Рассмотрим случай, когда ξ принимает значения $1, 2\dots$

$$\sum_a aP(\xi = a) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(\xi = i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} P(\xi = i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} P(\xi = i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi \geq j)$$

Кидаем честную монету, пока не выпадет 1, ξ — число бросков.

$$P(\xi \geq i) = \frac{1}{2^{i-1}} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}} = 2$$

$$Corr(\xi, \eta) = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

$\lhd \eta = c\xi$

$$Corr(c\xi, \xi) = \frac{Ec\xi\xi - cE\xi E\xi}{\sqrt{c^2 D\xi D\xi}} = \begin{cases} 1, & c > 0 \\ -1, & c < 0 \end{cases}$$

1 Хвостовые неравенства

Определение. Хвост распределения — левая или правая маловероятная часть распределения

1.1 Неравенство Маркова

$\lhd \xi \geq 0$

Если возможных значений бесконечно, то их вероятности должны стремиться к 0, т.к. сумма всех вероятностей 1.

$\lhd kE\xi$. Отрежем "хвост" справа от ka.

$$P(\xi \geq ka) \leq \frac{1}{k}$$

$$E\xi = \sum_a a \cdot P(\xi = a) = \sum_{a < kE\xi} a \cdot P(\xi = a) + \sum_{a \geq kE\xi} a \cdot P(\xi = a) \geq \sum_{a \geq kE\xi} kE\xi \cdot P(\xi = a) = kE\xi P(\xi \geq kE\xi)$$

$$1 \geq kP(\xi \geq kE\xi)$$

1.2 Неравенство Чебышева

$\lhd \xi, \eta = (\xi - E\xi)^2$

$$E\eta = D\xi$$
$$P(\eta \geq kE\eta) \leq \frac{1}{k}$$

$k' = \frac{k}{\sqrt{D\xi}}$

$$P((\xi - E\xi)^2 \geq k^2 D\xi) \leq \frac{1}{k^2}$$
$$P(|\xi - E\xi| \geq k\sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{k^2}$$

$\sqrt{D\xi} =: \sigma$

Лучше хвостовые неравенства не придумать, т.к. есть случайные величины, при которых эти неравенства обращаются в равенста. Но можно накладывать дополнительные ограничения на величины и получать более "быстрые" неравенства.

Допустим, у нас есть нечестная монета и надо найти p. Кинем монету n раз и оценим нашу уверенность в ответе.

$C_n^i p^i q^{n-i} \quad E = pn \quad D = pqn$

$$P\left(|\xi - E\xi| \geq k\sqrt{D\xi}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$
$$k\sqrt{pqn} = \left(p - \frac{1}{2}\right)n$$
$$k = \frac{p - \frac{1}{2}}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}$$

Рассмотрим следующую случайную величину: $\xi = \sum \xi_i \quad \xi_i$ — незав., од. распр. $\eta := e^{t\xi}, t$ — параметр

$$P(\eta \geq k) \leq \frac{E\eta}{k} \quad k = e^{ta}$$
$$P(\eta \geq e^{ta}) \leq \frac{E\eta}{e^{ta}}$$
$$P(e^{t\xi} \geq e^{ta}) \leq \frac{E\eta}{e^{ta}}$$

$]t > 0$

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{Ee^{t\sum \xi_i}}{e^{ta}} = \frac{E\prod_i e^{t\xi_i}}{e^{ta}} \overset{\text{независ.}}{=} \frac{\prod_i Ee^{t\xi_i}}{e^{ta}} = \frac{\left(Ee^{t\xi_i}\right)^n}{e^{ta}}$$

$$P(\xi \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{\left(Ee^{t\xi_i}\right)^n}{e^{ta}}$$

$\lhd \xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p \end{cases}$

$\xi_i = 1 \Rightarrow e^{t\xi_i} = e^t \quad \xi_i = 0 \Rightarrow e^{t\xi_i} = 1$

$$E(e^{t\xi_i}) = e^t p + q = e^p + 1 - p = p(e^t - 1) + 1$$

$$P(\xi \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{(p(e^t - 1) + 1)^n}{e^{ta}}$$

$a := (1 + \delta)pn$

$$P(\xi \geq (1 + \delta)pn) \leq \frac{(p(e^t - 1) + 1)^n}{e^{(1+\delta)pnt}} \leq$$

$1 + x \leq e^x$

$$\leq \frac{e^{p(e^t-1)n}}{e^{(1+\delta)pnt}} \leq e^{pn(e^t-1-(1+\delta)t)} =$$

$t := \ln(1 + \delta)$

$$= e^{pn(1+\delta-1-(1+\delta)\ln(1+\delta))} \leq$$

$\ln(1 + x) \leq x$

$$\leq e^{pn(\delta-(1+\delta)\delta)} \leq e^{-pn\frac{\delta^2}{2}}$$