

Т.к. эта практика проходит до первой лекции, то сначала будет немного теории.

Мы занимаемся исчислением высказываний. В высказываниях есть:

- Переменные  $A, B, C$  (пропозициональные)
- Битовые операции  $\vee, \&, \rightarrow, \neg$

**Определение. Пропозициональная формула:**

1.  $A$  — переменная  $\Rightarrow A$  — формула
2.  $a, b$  — переменные  $\Rightarrow a \vee b, a \& b, a \rightarrow b, \neg a$

**Определение. Оценка** — отображение  $\pi : \text{переменные} \rightarrow \{T, F\}$ .

**Определение. Тавтология** — формула, для любой оценки истинна.

*Пример.*

- $A \vee \neg A$
- $A \rightarrow A$
- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Схемы аксиом:

1.  $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
2.  $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$
3.  $a \rightarrow b \rightarrow a \& b$
4.  $a \& b \rightarrow a$
5.  $a \& b \rightarrow b$
6.  $a \rightarrow a \vee b$
7.  $b \rightarrow a \vee b$
8.  $(a \rightarrow ) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \vee b \rightarrow c)$
9.  $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a$
10.  $\neg \neg a \rightarrow a$

*Примечание.*  $a \rightarrow b \rightarrow c \Leftrightarrow a \rightarrow (b \rightarrow c)$

Можно заметить, что все эти аксиомы — тавтологии. Это так и должно быть. Вместо  $a, b, c$  можно подставлять произвольные формулы.

**Определение. Вывод формулы  $\varphi$**  есть последовательность формул  $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ , где  $\varphi_i$  — одна из аксиом или Modus Ponens из  $\varphi_a, \varphi_b$ , где  $a, b < i$

**Определение. Modus Ponens (правило вывода)** из формул  $a$  и  $a \rightarrow b$  есть формула  $b$ .

Корректность: можно вывести любую тавтологию.

*Proof.* Очевидно по индукции и определению Modus Ponens. □

Полнота: любую тавтологию можно вывести.

*Proof.* Будет на лекции. □

*Пример.* Выведем  $a \rightarrow a$

$$a := x, b := x \rightarrow x, c := x$$

$$\varphi_1 = (x \rightarrow x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow (x \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x)$$

$$\varphi_2 = x \rightarrow x \rightarrow x$$

$$\text{М.р. } \varphi_3 = (x \rightarrow (x \rightarrow x) \rightarrow x) ???$$

Пусть  $\Gamma$  — какой-то набор формул.

**Определение.** Вывод в грамматике  $\Gamma$  формулы  $\varphi$  обозначается  $\Gamma \vdash \varphi$ , и его шаги могут иметь вид  $\tau$ , где  $\tau \in \Gamma$  (шаги как в нормальном выводе также разрешены).

**Лемма 1** (о дедукции).  $\Gamma \cup \{a\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash a \rightarrow \varphi$

*Упражнение 1.* Указать про каждое из высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

$$1. \neg A \vee \neg \neg A$$

$$\varphi_1 = \neg A \vee A$$

$$\varphi_2 = \neg A \vee \neg \neg A$$

**Ответ:** общезначимо, выполнимо.

$$2. (A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$$

При подстановке  $(1, 1, 1)$  не выполнено, при  $(0, 0, 0)$  выполнено.

**Ответ:** выполнимо, опровержимо.

3.  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$

При подстановке  $(0, 1)$  не выполнено, при  $(1, 1)$  выполнено.

**Ответ:** выполнимо, опровержимо.

4.  $\neg A \& \neg\neg A$

$$\neg A \& \neg\neg A = \neg A \& A$$

**Ответ:** невыполнимо, опровержимо.

5.  $\neg(A \& \neg A)$

Т.к.  $A \& \neg A$  невыполнимо,  $\neg(A \& \neg A)$  общезначимо.

**Ответ:** общезначимо, выполнимо.

6.  $A$

**Ответ:** выполнимо ( $A = 1$ ), опровержимо ( $A = 0$ ).

7.  $A \rightarrow A$

**Ответ:** общезначимо, выполнимо (подстановкой).

8.  $A \rightarrow \neg A$

**Ответ:** выполнимо ( $A = 0$ ), опровержимо ( $A = 1$ ).

9.  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

**Ответ:** общезначимо, выполнимо.

Доказать:

1.  $\vdash A \rightarrow A$

Было до этого.

2.  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\varphi_1 = a \rightarrow a$$

$$\varphi_2 = (a \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$$

3.  $\vdash \neg(A \& \neg A)$

$$\varphi_1 = (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$$

$$\varphi_2 = A \& \neg A \rightarrow A$$

$$\varphi_3 = A \& \neg A \rightarrow \neg A$$

$$\varphi_4 = (A \& \neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \& \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& \neg A)$$