$]x = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix} \quad \varphi(x) = \left(\xi^1 + \xi^2, \xi^2, \xi^3\right)$ — линеный оператор.

Определение. **Ядро** ЛОп φ называется множество

$$Ker\varphi = \{x \in X : \varphi x = O_Y\}$$

Примечание. $Ker\varphi$ — подпространство ЛП X

Определение. **Образом** ЛОп φ называется множество:

$$Im\varphi = \{y \in Y : \exists x \quad \varphi x = y\} = \varphi(X)$$

Примечание. $Im\varphi$ — подпространство ЛП Y

Доказательство. $y_1, y_2 \in Im\varphi \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in X : \varphi x_1 = y_1 \;\; \varphi x_2 = y_2$

$\lhd y_1 + y_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \Rightarrow y_1 + y_2 \in Im\varphi$ □

Пример. E_3 — евклидово пространство

$\varphi E_3 \to E_3$

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} \quad \vec{n} \neq \vec{0}$$

1. $Ker\varphi$
2. $Im\varphi$
3. Геометрический смысл

$Ker\varphi$:

$$\vec{x} - \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} = 0$$

$$\vec{x} = \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n} \Rightarrow Ker\varphi = \mathcal{L}(\vec{n})$$

$Im\varphi$:

$$\lhd \varphi(\vec{y}) = \vec{y} - \frac{(\vec{y}\vec{n})}{(\vec{n}\vec{n})}\vec{n}$$

$$y \in \mathcal{L}^{\perp}(\vec{n}) \Rightarrow \varphi(y) = y \Rightarrow Im\varphi = \mathcal{L}^{\perp}(\vec{n})$$

$$\mathcal{L}(\vec{n}) \cap \mathcal{L}^{\perp}(\vec{n}) = 0 \Rightarrow E_3 = \mathcal{L}(\vec{n}) + \mathcal{L}^{\perp}(\vec{n})$$

Пример. E_3

$\varphi : E_3 \to E_3$

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}\vec{n})}{(\vec{a}\vec{n})}\vec{a} \quad (\vec{a}, \vec{n}) \neq 0$$

$Ker\varphi = \mathcal{L}(\vec{a})$

$\vec{x} \overset{!}{=} \vec{y} + \alpha\vec{a}$

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ – базис X, $\{h_k\}_{k=1}^m$ – базис $Y \Rightarrow \varphi(e_j) = \sum\limits_{k=1}^m a_j^k h_k$

$\lhd A_\varphi = ||a_j^k||$ – матрица оператора φ в паре выбранных базисов

Пример. Найти матрицу оператора φ в стандартном базисе E_3

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$

$$\varphi(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{14} \\ \frac{-2}{14} \\ \frac{-3}{14} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{w}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} \\ \frac{10}{14} \\ \frac{-6}{14} \end{bmatrix}$$

То же самое для e_3 и собрать все в матрицу.

Пример. φ_θ – оператор поворота вокруг $\vec{S}$ на θ

$]y = \beta\vec{a} + \gamma\vec{b}, \vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$]\vec{x} = \alpha\vec{s} + \vec{y} = \alpha\vec{s} + \beta\vec{a} + \gamma\vec{b}$

$\varphi(x) = \varphi(\alpha\vec{s} + \beta\vec{a} + \gamma\vec{b}) = \alpha\vec{s} + (\beta\cos\theta - \gamma\sin\theta)\vec{a} + (\beta\sin\theta + \gamma\cos\theta)\vec{b}$

$\varphi(e_1) = \ldots$ и так далее

$]\varphi : X \to X$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ – базис $X \Rightarrow A_\varphi$

$\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ – базис $X \Rightarrow \tilde{A}_\varphi$

$\{e\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}\}$

$$\lhd \varphi(\tilde{e}_j) = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_j^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_j^k \sum_{l=1}^n t_k^l e_l$$

$$\varphi(\tilde{e}_j) = \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_j^l e_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_j^l \varphi(e_l) = \sum_{l=1}^{n} t_j^l \sum_{k=1}^{n} a_l^k e_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_j^k t_k^l = \sum_{k=1}^{n} t_j^k a_k^l$$

$$(T\tilde{A}_\varphi)_j^l = (A_\varphi T)_j^l \quad \forall l, j$$

$$T\tilde{A}_\varphi = A_\varphi T$$

$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1} A_\varphi T$$