Теория категорий

Михайлов Максим

7 октября 2022 г.

Оглавление

Лекция 1

23 октября

1 Введение

Что такое математика? Это наука или язык, мы будем считать, что язык. Язык можно по-разному выражать.

Пример. Вспомним определение предела функции $\lim_{x\to x_0} f(x) = \xi$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x_\alpha \in \dot{B}(x_0, \delta) \quad f(X_\alpha) \in B(f(\xi), \varepsilon)$$

$$\forall U(\xi) = \varepsilon\ \exists\dot{U}(x_0) = \delta\ \forall x_\alpha \in \delta : f(x_\alpha) \in \varepsilon$$

У нас есть два способа написать одно и то же. Теория категорий — ещё один способ описать всю математику.

В математике мы часто встречаем функции (отображения), у которых есть композиция. Попробуем описать всю математику композицией. Такая попытка привела к успеху, и теоркат позволил описать различные области одним синтаксисом.

Определение. Категория — объект $\mathcal{C}$, у которого есть:

1. “Коллекция” объектов $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Мы не можем сказать “множество”, т.к. тогда мы сталкиваемся с проблемами теории множеств[1].
2. “Коллекция” морфизмов (стрелок) $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})/\,\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$

$$\forall f \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C})\ \ f : X \to Y,\ X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$$

3. Правила:
   (a) $\forall X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})\ \exists f \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) : f(X) = X$. Также это обозначают как $f : X \to X$. f обозначается как id_X

[1] См. парадокс Рассела

(b) $\lhd f : X \to Y, g : Y \to Z,\ f, g \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C}), X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

$$\exists! h : X \to Z, h \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \quad h = g \circ f$$

Но это не значит, что не существует других $h' : X \to Z$.

Примечание. Мы не определяем, что такое "$=$", "$f(x)$" и так далее, потому что теория категорий — про синтаксис, а смысл мы сами додумываем.

Утверждение.

$$\forall a, b, c \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

Пример. Пустая категория (без объектов, без морфизмов)

Пример ($\mathbb{1}$). Категория с одним объектом и одной стрелкой:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop below, "\mathrm{id}_1"] \end{tikzcd}$$

Пример.
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_1"] & 2 \arrow[loop below, "\mathrm{id}_2"] \end{tikzcd}$$

Утверждение. $\forall f : X \to Y, \mathrm{id}_X : X \to X, \mathrm{id}_Y : Y \to Y \quad f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f$

Не все категории удовлетворяют этому закону.

Пример.
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop below, "\mathrm{id}_0"] \arrow[loop below, distance=4em, "f_1 : 0 \to 0"] \arrow[loop below, distance=7em, "f_2 : 0 \to 0"] \end{tikzcd}$$
$$\ldots$$

Пусть при этом $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i = f_{i+j}$. Тогда эта категория описывает натуральные числа.

Пример.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_{xy}"] \arrow[rr, bend right, "f_{xz}"'] \arrow[rrr, bend right=60, "f_{xw}"'] & Y \arrow[r, "f_{yz}"] \arrow[rr, bend right, "f_{yw}"'] & Z \arrow[r, "f_{zw}"] & W \end{tikzcd}$$

С одной стороны, $f_{xw} = f_{zw} \circ f_{xz}$, с другой стороны $f_{xw} = f_{yw} \circ f_{xy}$, с третьей стороны $f_{xw} = f_{zw} \circ f_{yz} \circ f_{xy}$. Есть проблема: мы можем получить один и тот же морфизм разными способами, следовательно, не можем однозначно разложить морфизм в композицию, т.е. объекты не являются свободными[2]. С этим можно бороться очень тупо: для каждого

[2] Ради сохранения рассудка пока что не нужно понимать, что это такое.

способа разложить морфизм вводить копию исходного морфизма, но тогда мы теряем ассоциативность.

Лекция 2

30 октября

2 Функторы

Пример. Рассмотрим следующую категорию:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left=50] \arrow[rrrr, bend right] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_0"] & 1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left=50] \arrow[rrrr, bend right] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_1"] & 2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left=50] \arrow[rrrr, bend right] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_2"] & 3 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left=50] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_3"] & 4 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_4"] & 5 \arrow[r] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_5"] & \dots
\end{tikzcd}
$$

Стрелки можно определить как суммирование, а можно как $\leq$, ничего не изменится.

Пусть мы хотим отобразить категорию $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$. Отобразим точки в точки и стрелки в стрелки, при этом $\mathrm{Arr}'(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ задает отображение точек, а $\mathrm{Arr}'(\mathrm{Arr}(\mathcal{C}), \mathrm{Arr}(\mathcal{D}))$ задает отображение стрелок.

Определение. Малая категория — категория, объекты которой образуют множество.

Примечание. При этом нет ограничения на стрелки, они могут быть не множеством.

Пример. Категория из одного элемента со сложением на стрелках, где стрелки есть для всех натуральных чисел, кардиналов и пределов. Все стрелки не “помещаются” в множество.

Отображать между категориями мы можем как угодно, но хотелось бы сохранять структуру. Условие сохранения композиции:

$$\forall f_{AB}, f_{BC} \in \mathrm{Arr}\,\mathcal{C} : \mathcal{F}(f_{BC}) \circ \mathcal{F}(f_{AB}) = \mathcal{F}(f_{BC} \circ f_{AB})$$

, где $\mathcal{F}$ — отображение из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$. Из предыдущего закона следует, что петли отображаются в петли, т.к.:

$$\mathcal{F}(f_{AA} \circ f_{AA}) = \mathcal{F}(f_{AA}) \circ \mathcal{F}(f_{AA})$$

таким образом, образ f_{AA} должен иметь композицию с собой $\Rightarrow$ это петля. Но никто не гарантирует, что эта петля будет на соответствующем объекте. Введём следующий закон:

$$\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

Определение. $\mathcal{F}$ называется ***(ковариантным*[1]*)*** **функтором**

3 Моно– и эпиморфизмы, дуальные категории

Рассмотрим следующую категорию (id опущены):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "f_{AC}"] & B \arrow[r, bend left, "h_1"] \arrow[r, "h_2"] \arrow[r, bend right, "h_{\dots}"'] & C
\end{tikzcd}$$

Если стрелку $A \to C$ можно получить только как $f_{AC} = f \circ h_i$, то мы хотим:

1. Ввести отношение эквивалентности, чтобы не различать разные f_{AC}.
2. Назвать стрелку f **монической** *(или мономорфизмом)*.

Определение. Дуальная[2] **категория** для некоторой категории $\mathcal{C}$ это категория $\mathcal{C}^*$, что:

1. $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C} = \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}^*$
2. $\forall f_{AB} \in \mathrm{Arr}\,\mathcal{C} \;\; \exists! f_{BA} \in \mathrm{Arr}\,\mathcal{C}^*$
3. $\forall f_{BA} \in \mathrm{Arr}\,\mathcal{C}^* \;\; \exists! f_{AB} \in \mathrm{Arr}\,\mathcal{C}$

Операция сопряжения является функтором, будем обозначать его τ. Она легко строится в том смысле, что для любой категории, не зная ничего про объекты, мы можем построить её путём разворота стрелок.

Пример.

Определение. Если f — мономорфизмом в категории $\mathcal{C}$. Тогда $f^* = \tau(f)$ является **эпиморфизмом** в категории $\mathcal{C}^*$.

Определение (альтернативное)**.** Если стрелку $C \to A$ можно получить только как $f_{CA} = h_i \circ f$, то f называется **эпиморфизмом**.

[1] Не важно, что это значит.
[2] Или зеркальная, двойственная, сопряженная, dual, opposite.

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
A \arrow[loop below] \arrow[ur] \arrow[rr] & & C \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[loop above] \arrow[dl] & \\
A \arrow[loop below] & & C \arrow[loop below] \arrow[ul] \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2.1: Категория и дуальная к ней категория.

Примечание. Если стрелки соответствуют отношению предпорядка “$\leq$”, то в дуальной категории стрелки соответствуют отношению “$\geq$”.

Примечание. Категория, где стрелки соответствуют отношению предпорядка называется Poset.

Определение. Если $\forall f_{AB} \in \operatorname{Arr}\mathcal{C}\ \ \exists f_{BA}^{-1} : f_{AB} \circ f_{BA}^{-1} = \mathrm{id}_B, f_{BA}^{-1} \circ f_{BA} = \mathrm{id}_A$, то $\mathcal{C}$ — **группоид**.

Лекция 3

6 ноября

Пусть даны две категории:

Пример.

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[loop below] & & C \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& B' \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
A' \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[loop below] & & C' \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
$$

По нашему определению эти две категории символьно не равны. Однако мы хотим построить операцию, которая покажет их эквивалентность. Давайте забудем объекты, получим следующую категорию:

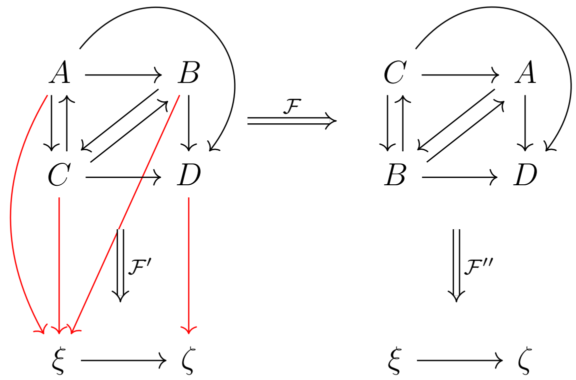
$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
{} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[loop below] & & {} \arrow[loop below]
\end{tikzcd}
$$

Тогда у нас функтор будет состоять только из отображения морфизмов.

Не дописано.

Пример. Рассмотрим две категории $ABCD, CABD$, а также категорию $\xi\zeta$, функтор $\mathcal{F}$:

(отображение объектов красным цветом) между ними[1]:



Тогда $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'' \circ \mathcal{F}$

Если в рассматриваемых нами категориях нет кратных рёбер, то операция забвения[2] работает.

Определение. Cat — класс малых категорий

FCat — класс забытых категорий

Тогда рассмотрим отображение $\mathrm{Er} : \mathrm{Cat} \to \mathrm{FCat}$ и $\mathrm{Er}^{-1} : \mathrm{FCat} \to \mathrm{Cat}$, такие что $\mathrm{Er} \circ \mathrm{Er}^{-1} = \mathrm{id}$. При этом Er^{-1} не единственно.

Обозначение. $\mathrm{Er}^{-1} = \mathrm{re}$

Теперь можем определить предикат:

$$P : (\mathrm{Fcat} \to \mathrm{Cat}) \to (\mathrm{FCat} \to \mathrm{Cat}) \to \mathrm{Bool}$$

Он берёт два способа “вспомнить” категорию и возвращает, равны ли они.

$$P(\mathrm{re}_1, \mathrm{re}_2) = \forall f \in \mathrm{FCat} \quad \mathrm{re}_1(f) = \mathrm{re}_2(f)$$

Наше определение — чушь, потому что квантор “$\forall$” мы не можем применить к Arr — это может быть не множество.

Утверждение. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, в которой нет кратных рёбер. Тогда, если $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ является множеством, то $\exists h : \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Arr}'(\mathcal{C})$ — гомоморфизм, где $\mathrm{Arr}'(\mathcal{C})$ является множеством.

Доказательство. Слишком сложно. $\square$

[1] Отображение морфизмов не обозначено на диаграмме, оно однозначно.
[2] Удаления имен объектов.

Мы хотим придумать некоторую структуру X, такую что $\mathrm{Cat} \subset X, \mathrm{FCat} \subset X$. Маханием рук существует способ ввести **теорию топосов**. Пусть S' — некоторая структура, похожая на множество. В таких структурах можно ввести понятие квантора: если мы можем завести маркировку $S' \leftrightarrow \mathrm{Type}$. Если мы также можем сопоставить наш набор кванторов $\exists, \forall$ особым видам типов Π, Σ в теории типов, то полученная теория становится “довольно неплохой”.

Если мы опишем некоторую функцию h, отображающую какие-нибудь другие кванторы в $\{\exists, \forall\}$, то эти другие кванторы будут работать “схожим образом”.