Потенциальные векторные поля

Определение. Интеграл векторного поля V **не зависит от пути** в области O:

$\forall A, B \in O \ \ \forall \gamma_1, \gamma_2$ — кусочно-гладкие из A в B:

$$\int_{\gamma_1} \sum v_i dx_i = \int_{\gamma_2} \sum v_i dx_i$$

Теорема 0.1 (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов). V — векторное поле в области O. Тогда эквивалентны следующие:

1. V — потенциально
2. $\int_\gamma \sum v_i dx_i$ не зависит от пути в O
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий, замкнутый в O $\int_\gamma \sum v_i dx_i = 0$

Доказательство.

1⇒2 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

2⇒3 γ — петля: $[a, b] \to O$. $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь $\tilde{\gamma} : [a, b] \to 0, t \mapsto A$. По свойству 2: $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

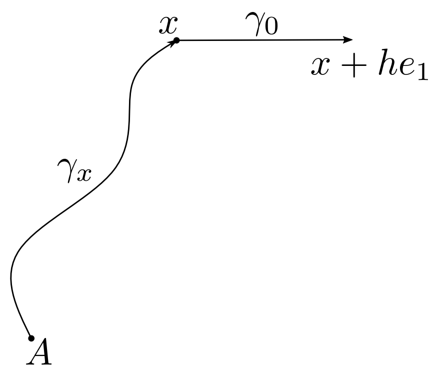
3⇒2 γ_1, γ_2 — пути с общим началом и концом. Тогда $\gamma := \gamma_2^- \gamma_1$ — петля. γ — кусочно гладкий ⇒ $\int_\gamma = 0$

2⇒1 Фиксируем $A \in O$.

$\forall x \in O$ выберем кусочно-гладкий путь γ_x из A в x. Проверим, что $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$ — потенциал.

Достаточно проверить, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O.

Фиксируем $x \in O$. $\gamma_0(t) = x + the_1, t \in [0, 1]$, $\gamma_0'(t) = (h, 0 \dots 0) = he_1$



$$
\begin{aligned}
f(x+he_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+he_1}} - \int_{\gamma_x} \\
&= \int_{\gamma_0\gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
&= \int_{\gamma_0} = \int_0^1 V_1(\gamma_0(t))hdt \\
&= ???
\end{aligned}
$$

□

Локально-потенциальные векторные поля

Лемма 1. *V — гладкое, потенциальное в O*

Тогда

$$\forall x \in O \;\; \forall k, j \;\; \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \tag{1}$$

Доказательство. Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

Упражнение. Даны 4 векторных поля в $\mathbb{R}^2$: $(x, y), (x, -y), (y, x), (-y, x)$. Вычеркните лишнее.

Теорема 0.2 (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклая область
- $V : O \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 1, в т.ч. V — гладкое.

Тогда V — потенциальное.

Доказательство. Фиксируем $A \in O$

$$\forall x \in O \;\; \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma_x'(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k)dt$$

Проверим, что f — потенциал.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \text{правило Лейбница} \\
&= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\ldots)t(x_k - A_k)dt \\
&= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\ldots)t(x_k - A_k)dt \qquad (2) \\
&= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt \\
&= tV_j(A + t(x - A))\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&= V_j(x)
\end{aligned}$$

2: по 1. □

Примечание. Это же доказательство проходит для “звёздных” областей.

Определение. V — **локально потенциальное** векторное поле в O, если $\forall x \in O \ \exists U(x)$: V — потенциально в $U(x)$

Следствие (лемма Пуанкаре).

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — любая область
- $V \in C^1(O)$
- V удовлетворяет 1.

Тогда V — локально потенциально.

Равномерная сходимость функциональных рядов *(продолжение)*

Теорема 3’ (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ (поточечная сходимость)
- $\sum u_n'(x) = \varphi(x)$ (равномерная сходимость)

Тогда:

1. $S(x) \in C^1\langle a, b\rangle$

2. $S' = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство. Следует из теоремы 3.

$S_n \to S$ поточечно, $S_n' \rightrightarrows \varphi$ □

Пример. Формула Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}, x > 0$$

γ — постоянная Эйлера.

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)}_{u_k(x)}$$

Зафиксируем x_0.

$$u_k'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{k}}\frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = \frac{-x}{(x+k)k}$$

Пусть $M > x_0$. Тогда

$$\left|\frac{-x}{(x+k)k}\right| \le \frac{M}{k^2}$$

при $x \in (0, M)$.

Тогда $\sum \dfrac{-x}{(x+k)k}$ равномерно сходится на $(0, M)$, значит $\ln\Gamma(x) \in C^1(0, M)$, $\dfrac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \sum \dfrac{-x}{(x+k)k}$ — непр. $\Rightarrow \ln\Gamma(x) \in C^1(0, +\infty) \Rightarrow \Gamma(x) \in C^1(0, +\infty)$

Примечание. Фактически, теорема 3' устанавливает, что $\sum u_n'(x)$ — непр.

Примечание.

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x)\left(\frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{(x+k)k}\right)$$

Изучив равномерную сходимость $\left(\dfrac{x}{(x+k)k}\right)'$, получаем, что $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$ и т.д. $\Rightarrow \Gamma \in C^{\infty}(0, +\infty)$

Теорема 4' (о почленном предельном переходе в суммах).

- $u_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- x_0 — предельная точка E
- $\forall n \;\; \exists$конечный $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

Доказательство.

1. $? \sum a_n$ — сходится

   $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k$

   Проверим, что S_n^a — фундаментальная:

   $$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| \tag{3}$$

   Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$

   $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in E \;\; |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   (Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

   Зададим ε по N, выберем $n, n+p$ и возьмём x близко к x_0 : $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   $|S_n^a - S_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   Тогда выполнено 3, т.е. $|S_{n+p} - S_n^a| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

2. $\sum a_n \overset{?}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \sum u_n(x)$

   Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$ — задано на $U \cup \{x_0\}$, непрерывно в x_0.

$\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \le \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\to 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\to 0}$$

$\square$

Примечание. Теорема 4' верна для случая $u_n : E \subset X \to Y$, где Y — полное нормированное пространство.

Теорема 4 (о перестановке двух предельных переходов).

- $f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- x_0 — предельная точка E
- $f_n \overset{E}{\underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, rightrightarrows] \arrow[d, "x \to x_0"'] & S(x) \arrow[d, dashed, "x \to x_0"] \\ f'_n \arrow[r, dashed, "n \to +\infty"'] & \varphi \end{tikzcd}$$

Доказательство. $u_1 = f_1, \dots u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$a_1 = A_1, \dots a_k = A_k - A_{k-1}$

Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

В эти обозначениях $\sum u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$.

$u_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$

Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^{n} a_k = A_n$ имеет конечный предел при $n \to +\infty$.

$$\lim_{x\to x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

$\square$

Примечание. Здесь можно было бы вместо n рассматривать "непрерывный параметр" t.

$f_n(x) \leftrightarrow$???