

Домашнее задание №7: «типовая система Хиндли-Милнера»

1. *О выразительной силе НМ.* Заметим, что список — это «параметризованные» числа в аксиоматике Пеано. Число — это длина списка, а к каждому штриху мы присоединяем какое-то значение. Операции добавления и удаления элемента из списка — это операции прибавления и вычитания единицы к числу.

Рассмотрим тип «бинарного списка» (расширение Окамля):

```
type 'a bin_list = Nil | Zero of (('a*'a) bin_list) |
  One of 'a * (('a*'a) bin_list);;
```

и операцию добавления элемента к списку:

```
let rec add elem lst = match lst with
  Nil → One (elem, Nil)
| Zero tl → One (elem, tl)
| One (hd, tl) → Zero (add (elem, hd) tl)
```

- (a) Какой тип имеет add (обратите внимание на ключевое слово `rec`: для точного указания соответствующего лямбда-выражения и вывода типа необходимо использовать Y-комбинатор)? Считайте, что семейство типов `bin_list 'a` предопределено и обозначается как τ_α . Выразим ли этот тип в системе Хиндли-Милнера?
 - (b) Реализуйте предложенный тип и функцию `add` на Хаскеле (используйте опцию `RankNTypes`). Также реализуйте функцию для удаления элемента списка (головы).
 - (c) Предложите функцию для эффективного соединения двух списков (источник для вдохновения — сложение двух чисел в столбик).
 - (d) Предложите функцию для эффективного выделения n -го элемента из списка.
2. На занятии мы рассмотрели функцию `strange_pair x = (x 1, x "a")`. Покажите, что данную функцию невозможно типизировать в типовой системе Хиндли-Милнера. Указания: (a) ограничение мономорфизма отношения к делу не имеет; (б) ограничение на правило введения квантора всеобщности может оказаться существенным.
 3. Покажем, что алгоритм W действительно находит корректный тип для лямбда-выражения (доказательство, что он находит наиболее общий тип, мы оставим в стороне). Для этого докажем по индукции, что $W(\Gamma, X)$ действительно находит такие тип τ и подстановку S , что $S\Gamma \vdash X : \tau$:
 - (a) покажите базу индукции: $W(\Gamma, x)$;

$$\frac{\Gamma, x : \forall \alpha_1 \dots \alpha_n. \tau : x \vdash \forall \alpha_1 \dots \alpha_n. \tau}{\Gamma \vdash x : \forall \beta_1 \dots \beta_n. \tau}$$

(b) покажите случай аппликации: $W(\Gamma, P Q)$;

$$\begin{array}{c}
 \frac{W(\Gamma, P) = (\tau_p, S_1)}{S_1\Gamma \vdash P : \tau_p} \\
 \frac{S_1\Gamma \vdash P : \tau_p}{S_{21}\Gamma \vdash P : S_2\tau_p} \\
 \frac{S_{321}\Gamma \vdash P : S_3(S_2\tau_p)}{S_{321}\Gamma \vdash P : S_3(\tau_q \rightarrow \gamma)} \quad \frac{W(S_1\Gamma, Q) = (\tau_q, S_2)}{S_{21}\Gamma \vdash Q : \tau_q} \\
 \frac{S_{321}\Gamma \vdash P : S_3(\tau_q \rightarrow \gamma)}{S_{321}\Gamma \vdash P : (S_3\tau_q) \rightarrow S_3\gamma} \quad \frac{S_{21}\Gamma \vdash Q : \tau_q}{S_{321}\Gamma \vdash Q : S_3\tau_q} \\
 \hline
 (S_3 \circ S_2 \circ S_1)\Gamma \vdash P Q : S_3\gamma
 \end{array}$$

(c) покажите случай лямбда-абстракции: $W(\Gamma, \lambda x.P)$;

$$\begin{array}{c}
 \frac{W(\Gamma \cup \{x : \tau_x\}, P) = (\tau_p, S_1)}{S_1(\Gamma \cup \{x : \tau_x\}) \vdash P : S_1\tau_p} \\
 \frac{S_1(\Gamma \cup \{x : \tau_x\}) \vdash P : S_1\tau_p}{S_1\Gamma, x : S_1\tau_x \vdash P : S_1\tau_p} \\
 \frac{S_1\Gamma, x : S_1\tau_x \vdash P : S_1\tau_p}{S_1\Gamma \vdash \lambda x.P : S_1\tau_x \rightarrow S_1\tau_p} \\
 \hline
 S_1\Gamma \vdash \lambda x.P : S_1(\tau_x \rightarrow \tau_p)
 \end{array}$$

(d) покажите случай let-выражения: $W(\Gamma, \text{let } x = P \text{ in } Q)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{W(\Gamma, P) = (\tau_p, S_1)}{S_1\Gamma \vdash P : S_1\tau_p} \quad \frac{W(S_1\Gamma \cup \{x : \forall\{\alpha_i\}.\tau_p\}, Q) = (\tau_q, S_2), \{\alpha_i\} \in FV(\tau_p)}{S_2(S_1\Gamma \cup \{x : \forall\{\alpha_i\}.\tau_p\}) \vdash Q : \tau_q, \{\alpha_i\} \in FV(\tau_p)} \\
 \frac{S_1\Gamma \vdash P : S_1\tau_p}{S_{21}\Gamma \vdash P : S_{21}\tau_p} \quad \frac{\dots}{S_2(S_1\Gamma \cup \{x : S_{21}\tau_p\}) \vdash Q : \tau_q} \\
 \frac{S_{21}\Gamma \vdash P : S_{21}\tau_p \quad S_{21}\Gamma, x : S_{21}\tau_p \vdash Q : \tau_q}{S_{21}\Gamma \vdash \text{let } x = P \text{ in } Q : \tau_q}
 \end{array}$$

4. Покажите, что в Хаскеле выражается $Y : \forall\alpha.(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ и правило исключённого третьего $E : \alpha \vee \neg\alpha$.

```
magic :: a
magic = magic
```

```
Y :: (a -> a) -> a
Y = magic
```

```
E :: Either a (a -> Void)
E = magic
```

5. Возможно ли в C++ построить выражения с типами ранга два и выше (включая конструкции с темплейтами)? Приведите пример, если да.