

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример: $\lambda z.(\lambda x.a b c \lambda y.d e) f$ эквивалентно $\lambda z.((\lambda x.(a b c (\lambda y.(d e)))) f)$. В аппликациях скобки расставляются слева направо: $\lambda z.(\lambda x.(a b c (\lambda y.(d e)))) f$ можно преобразовать в $(\lambda z.((\lambda x.(((a b) c) (\lambda y.(d e)))))) f)$.

(a) Расставьте скобки в выражении: $\lambda z.\lambda x.a b c \lambda y.d e f$

Решение.

$$\lambda z.(\lambda x.(((a b) c) (\lambda y.((d e) f))))$$

□

(b) Уберите все «лишние» скобки из выражения: $(\lambda f.((\lambda x.(f (f (x (\lambda z.(z x)))))) z))$

Решение.

$$\lambda f.\lambda x.(f f x (\lambda z.z x)) z$$

Почему z не под λz ?

□

(c) Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

2. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x F T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x y F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

(a) $T F$

Решение.

$$T F \rightarrow_{\beta} (\lambda a.\lambda b.a) F \rightarrow_{\beta} \lambda b.F$$

□

(b) $(T Not (\lambda t.t)) F$

Решение.

$$\begin{aligned}
 (T \text{ Not } (\lambda t.t)) F &\rightarrow_\beta \\
 ((\lambda b.\text{Not}) (\lambda t.t)) F &\rightarrow_\beta \\
 \text{Not } F &\rightarrow_\beta \\
 F F T &\rightarrow_\beta \\
 (\lambda b.b) T &\rightarrow_\beta T
 \end{aligned}$$

□

(c) $\text{And } (\text{And } F F) T$

Решение.

$$\begin{aligned}
 \text{And } (\text{And } F F) T &\rightarrow_\beta \\
 \text{And } ((\lambda y.F y F) F) T &\rightarrow_\beta \\
 \text{And } ((\lambda y.(\lambda b.b) F) F) T &\rightarrow_\beta \\
 \text{And } ((\lambda y.F) F) T &\rightarrow_\beta \\
 \text{And } F T &\rightarrow_\beta \\
 (\lambda y.F y F) T &\rightarrow_\beta \\
 F T F &\rightarrow_\beta \\
 (\lambda b.b) F &\rightarrow_\beta F
 \end{aligned}$$

□

3. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

(a) Дизъюнкция

Решение. $\lambda a.\lambda b.a T b$

□

(b) Штрих Шеффера («и-не»)

Решение. $\lambda a.\lambda b.a (\text{Not } b) T$

□

(c) Исключающее или

Решение. $\lambda a.\lambda b.a (\text{Not } b) b$

□

4. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
\bar{n}	$\lambda f. \lambda x. f^{(n)} x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n. \lambda f. \lambda x. n f (f x)$	прибавление 1
$(+)$	$\lambda a. \lambda b. a (+1) b$	сложение
(\cdot)	$\lambda a. \lambda b. a ((+) b) \bar{0}$	умножение

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

(a) Умножение на 2 (*Mul2*)

Решение. $\lambda a. ((+) a a)$ □

(b) Возведение в степень

Решение. $\lambda a. \lambda b. b ((\cdot) a) \bar{1}$ □

(c) Проверка на чётность

Решение. $\lambda a. a \text{ Not } T$ □

(d) *IsZero*: возвращает *T*, если аргумент равен нулю, иначе *F*

Решение.

$$\bullet \text{ Flip} := \lambda a. a ((\cdot) \bar{0}) \bar{1}. \text{ Flip}(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ 0, & a \neq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ IsZero} := \lambda a. (\text{Flip } a) \text{ Not } T$$

□

5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
<i>MkPair</i>	$\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x a b)$	создание пары
<i>PrL</i>	$\lambda p. p T$	левая проекция
<i>PrR</i>	$\lambda p. p F$	правая проекция

(a) Убедитесь, что $PrL (MkPair\ a\ b) \rightarrow_{\beta} a$.

Решение.

$$\begin{aligned} PrL (MkPair\ a\ b) &\rightarrow_{\beta} \\ PrL (\lambda x.x\ a\ b) &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda p.p\ T) (\lambda x.x\ a\ b) &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda x.x\ a\ b)\ T &\rightarrow_{\beta} \\ T\ a\ b &\rightarrow_{\beta} a \end{aligned}$$

□

(b) Постройте операцию вычитания 1 из числа

$$\text{Решение. } \lambda a.a\ (PrL\ (\lambda p.(MkPair\ (PrR\ p)\ ((+1)\ (PrR\ p))))\ (MkPair\ \bar{0}\ \bar{0}))$$

□

(c) Постройте операцию вычитания чисел

$$\text{Решение. } \lambda a.\lambda b.b\ (-1)\ a$$

□

(d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)

Решение.

□

(e) Постройте операцию деления чисел

Решение. Пусть дробь $\frac{n}{m}$ есть применение коллбека f к m аргументам n раз (распределенных равномерно) с комбинирующим коллбеком g :

$$\frac{4}{3} \leftrightarrow \lambda f.\lambda g.\lambda a_1.\lambda a_2.\lambda a_3.g\ (f\ (f\ a_1))\ (f\ a_2)\ (f\ a_3)$$

Определим конвертер $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \text{FRAC}$:

$$\text{Frac} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.\lambda g.n\ (m\ (\lambda t.\lambda z.\lambda v.t\ (\lambda q.z\ q\ v))\ (\lambda x.x)\ (\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a))))\ g$$

$$t_1 = \lambda z.\lambda v.(\lambda x.x)\ (\lambda q.z\ q\ v) \rightarrow_{\beta} \lambda z.\lambda v.\lambda q.z\ q\ v$$

$$t_2 = \lambda z_1.\lambda v_1.(\lambda z_2.\lambda v_2.\lambda q_2.z_2\ q_2\ v_2)\ (\lambda q_1.z_1\ q_1\ v_1) \rightarrow_{\beta} \lambda z_1.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda q_2.z_1\ q_2\ v_1\ v_2$$

$$t_m = \lambda z.\lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.z\ q\ v_1\ v_2 \dots v_m$$

$$r_m := t_m(\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a)) = \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a))\ q\ v_1\ v_2 \dots v_m$$

$$= \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda b.b\ (f\ q))\ v_1\ v_2 \dots v_m$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda v_1 \dots v_m. \lambda q. v_1 (f q) v_2 \dots v_m \\
r_m g &= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q. g (f q) v_2 \dots v_m \\
r_m (r_m g) &= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q_1. (r_m g) (f q_1) v_2 \dots v_m \\
&= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q_1. (\lambda v_3 \dots v_m. \lambda q_2. g (f q_2) (f q_1) v_3 \dots v_m) v_2 \dots v_m \\
&= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q_1. (\lambda q_2. g (f q_2) (f q_1) v_2 \dots v_{m-1}) v_m \\
&= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q. g (f v_m) (f q) v_2 \dots v_{m-1}
\end{aligned}$$

Если $n < m$:

$$r_m^n g = \lambda v_2 \dots \lambda v_m. \lambda q. g (f v_{m-n+1}) \dots (f v_m) (f q) v_2 \dots v_{m-n}$$

Если $n \geq m$, то мы начинаем строить новый слой в скобках. Это то, что нам нужно.

Если не верится, то в lci можно вбить следующее: $(\backslash n. \backslash m. \backslash f. \backslash g. n (m (\backslash t. \backslash z. \backslash v. t (\backslash q. z q v)) (\backslash x. x) (\backslash a. \backslash b. b (f a))) g) (\backslash f. \backslash x. f(f(f(x)))) (\backslash f. \backslash x. f(f(f(x))))$ и получить $\frac{4}{3}$ из примера выше.

Из дроби легко получить результат (с округлением вверх) подстановкой вместо g функции, которая берет первый из m аргументов, f оставить свободной, вынести все a_i как x . Для округления вниз надо вместо g подставить функцию, которая берёт последний аргумент.

$$\text{Call} = \lambda f. \lambda n. \lambda x. n (\lambda g. g x) f \leftrightarrow f \underbrace{x \dots x}_n$$

$$\text{Last} = \lambda n. n (\lambda x. \lambda t. x) (\lambda x. x) (\lambda x. x) \leftrightarrow \lambda t_1 \dots t_n. t_n$$

$$\text{Floor} = \lambda m. \lambda z. \lambda f. \lambda x. \text{Call} (z f \text{Last}) m x$$

$$\text{Div} = \lambda n. \lambda m. \lambda f. \lambda x. \text{Floor } m (\text{Frac } n m) f x$$

□

(f) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго.

$$\text{Решение. } IsLess = \lambda a. \lambda b. IsZero (- b a)$$

□

6. Существует ли выражение A , что существуют такие выражения B и C , что $A \rightarrow_\beta B$ и $A \rightarrow_\beta C$, но B и C различны?

Решение.

□

7. Будем говорить, что лямбда-выражение находится в нормальной форме, если в нём невозможно провести бета-редукции. Нормальной формой выражения называется результат (возможно, многократной) его бета-редукции, находящийся в нормальной форме. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

(a) $\bar{2} \bar{2}$

(b) $\bar{2} \bar{2} \bar{2}$

(c) $\bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2}$

Решение. (a)

$$\begin{aligned}
 & \bar{2} \bar{2} \rightarrow_{\beta} \\
 & (\lambda f. \lambda x. f (f x)) \bar{2} \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \bar{2} (\bar{2} x) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \bar{2} ((\lambda g. \lambda y. g (g y)) x) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \bar{2} (\lambda y. x (x y)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. (\lambda h. \lambda z. h (h z)) (\lambda y. x (x y)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \lambda z. (\lambda y. x (x y)) ((\lambda y. x (x y)) z) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \lambda z. (\lambda y. x (x y)) (x (x z)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \lambda z. x (x (x (x z))) \rightarrow_{\beta} \bar{4}
 \end{aligned}$$

□

8. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$. Напомним, что отношение бета-эквивалентности ($=_{\beta}$) есть транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции. Будем говорить, что выражение не имеет нормальной формы, если никакая конечная последовательность его бета-редукций не приводит к выражению в нормальной форме.

- (a) Покажите, что $Y f =_{\beta} f (Y f)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 & Y f \rightarrow_{\beta} \\
 & (\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))) f \rightarrow_{\beta} \\
 & (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \underbrace{f ((\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x)))}_{\varphi} \leftarrow_{\beta} f (Y f)
 \end{aligned}$$

$Y f \rightarrow_{\beta} \varphi \Rightarrow Y f =_{\beta} \varphi$ и $f (Y f) \rightarrow_{\beta} \varphi \Rightarrow f (Y f) =_{\beta} \varphi$, следовательно $Y f =_{\beta} \varphi =_{\beta} f (Y f)$. \square

- (b) Покажите, что выражение $Y f$ не имеет нормальной формы;
 (c) Покажите, что выражение $Y (\lambda f. \bar{0})$ имеет нормальную форму.

Решение.

$$Y (\lambda f. \bar{0}) \rightarrow_{\beta} (\lambda f. \bar{0}) (Y (\lambda f. \bar{0})) \rightarrow_{\beta} \bar{0}$$

\square

- (d) Покажите, что выражение $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) \bar{2}$ имеет нормальную форму.
 (e) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero x) \bar{0} ((+1) (f Minus1 x))) \bar{n}$?
 (f) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f Minus1 x))) \bar{n}$?
 (g) Определите с помощью Y -комбинатора функцию для вычисления n -го числа Фибоначчи.

Решение.

$$(Y \lambda f. \lambda a. \lambda b. \lambda n. (IsZero n) a (f b (a + b) (n - 1))) 1$$

\square

9. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)`
 Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
 - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
 - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
 - (d) можно ли определить функцию вычитания 1 и вычитания двух чисел? Что получается, а что — нет?

10. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$L := \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\textit{thisisafixedpointcombinator})$$

$$R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F , выполнено $R F =_{\beta} F (R F)$.

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
 - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами (без ё) и осмысленной русской фразой в терме L ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x z (y z)$$

$$K := \lambda x.\lambda y.x$$

$$I := \lambda x.x$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Выразите в базисе SK :

- (a) $F = \lambda x.\lambda y.y$
- (b) \bar{I}
- (c) Not
- (d) Xor
- (e) InL
- (f) \bar{n}