

# 1 Определения

## 1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1.  $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2.  $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3.  $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4.  $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

## 1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

## 1.3 $n$ -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

## 1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

## 1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. Положительно определенная кв. форма:  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

Определение. Отрицательно определенная кв. форма:  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

Определение. Неопределенная кв. форма:  $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

Определение. Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма:  $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

## 1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$  — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

## 1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — диффеоморфизм, если:

- $F$  обратимо
- $F$  дифференцируемо
- $F^{-1}$  дифференцируемо

## 1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0) : T|_U$  — диффеоморфизм, т.е.  $\exists T^{-1}$

## 1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть  $(x^0, y^0)$  — решение этой системы,  $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$ . Тогда  $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$  система имеет решение,  $C^r$  гладко зависящее от  $y$ .

## 1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

### 1.11 ! Простое $k$ -мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \quad \text{rg} \Phi'(x) = k$

## 2 Теоремы

### 2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$  — это подразумевает, что  $E$  открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при  $1 \leq k \leq r$ :

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

□

## 2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

### 2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$  — это подразумевает  $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда  $\exists t \in (0, 1)$ :

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

*Доказательство.* Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$ , где  $h = x - a$ . Тогда  $\varphi(0) = f(a)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1} \\ f(x) &= \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-a|^{r+1})} \end{aligned}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

### 2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

*Доказательство.* Отсутствует

□

## 2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение  $A \rightarrow \|A\|$  в  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  — норма, т.е.:
  - (a)  $\|A\| \geq 0$
  - (b)  $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
  - (c)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
  - (d)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2.  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

*Доказательство.*

1.  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$   
 а, б, с — очевидно.  
 д:  $|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$   
 По замечанию 3  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2.  $|BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

□

## 2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- $X, Y$  — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $A$  — ограниченный оператор, т.е.  $\|A\|$  — конечно
2.  $A$  — непрерывно в нуле
3.  $A$  — непрерывно всюду в  $X$
4.  $A$  — равномерно непрерывно

*Доказательство.*

1.  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  — очевидно.
2.  $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0:  $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3.  $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 \quad |x_1 - x_0| < \delta$$

□

## 2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- $E$  открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F$  дифф. на  $E$
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда  $\exists c \in [a, b]$  ( $c = a + \Theta(b - a)$ ),  $\Theta \in [0, 1]$  :

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

## 2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|} - M$  “близкий” к  $L$

Тогда:

1.  $M \in \Omega_m$ , т.е.  $\Omega_m$  открыто в  $\mathcal{L}_{m,m}$
2.  $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3.  $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

*Доказательство.* По неравенству треугольника  $|a + b| \geq |a| - |b|$ :

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}} |x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 и 2, докажем 3:

Аналогично равенству  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$  в  $\mathbb{R}$  выполняется следующее равенство в  $\Omega_m$ :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на  $M$  слева и на  $L$  справа:

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} M^{-1} - L^{-1} &\stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1} \\ E - L^{-1} &\stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1} \\ L - M &= L - M \end{aligned}$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

## 2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F$  дифф. на  $E$

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1.  $F \in C^1(E)$ , т.е.  $\exists$  все  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  и они непрерывны на  $E$
2.  $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$  — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

*Доказательство.*

- $1 \Rightarrow 2$ :

Берем  $x, \varepsilon$ .  $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$  для всех  $i, j$ .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \implies \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$\triangleleft h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$\|F'(x)h - F'(\bar{x})h\| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot \|h\| < \varepsilon$$

$$\|F'(x)h - F'(\bar{x})h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \implies \forall i \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

## 2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int} E$
- $a$  — точка локального экстремума
- $f$  — дифф. в точке  $a$

Тогда  $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

*Доказательство.* Для  $f|_{\text{прямая}(a,u)}$   $a$  остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. □

*Следствие* (необходимое условие экстремума).  $a$  — локальный экстремум  $f \implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

*Следствие* (теорема Ролля).



- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$  компакт
- $f$  дифф. в  $\text{Int}K$
- $f$  непрерывно на  $K$
- $f|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда  $\exists a \in \text{Int}K : f'(a) = \vec{0}$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо  $f$  на  $K$  const, либо  $\exists a \in \text{Int}K$  — точка экстремума. В первом случае  $f' \equiv 0$ , во втором по т. Ферма  $f'(a) = 0$   $\square$

## 2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — норма

Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 \ \forall x \ C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

*Доказательство.*

$$C_1 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{cases}$$

Существование  $C_1$  и  $C_2$  гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности  $p(x)$ .

Докажем, что  $p$  непрерывна.

Введем базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq |x - y| \sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y| M \end{aligned}$$

$\square$

## 2.10 Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если  $Q(h)$  положительно определена,  $a$  — локальный минимум
- Если  $Q(h)$  отрицательно определена,  $a$  — локальный максимум
- Если  $Q(h)$  не знакоопределена,  $a$  — не экстремум
- Если  $Q(h)$  положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 f(a+h) &= f(a) \\
 &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\
 &= \frac{1}{2} \left( Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left( \gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

$$\begin{aligned}
 \angle \bar{h} : Q(\bar{h}) > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left( \sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(\bar{h}) - \frac{1}{2} Q(\bar{h})) > 0
 \end{aligned}$$

Т.е.  $f(a + t\bar{h}) > f(a)$  при  $t$ , близких к 0.

Аналогично  $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$  при  $t$ , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого  $f$  не имеет экстремума в  $a$ , но для  $\bar{f}$   $a$  — локальный минимум. □

## 2.11 Лемма о “почти локальной инъективности”

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  дифф. в  $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists c > 0, \delta > 0 \ \forall h < \delta \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

*Доказательство.* Если  $F$  — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \|F'(x_0)\| \cdot |h| \geq \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|} |h|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

## 2.12 Теорема о сохранении области

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  дифф.
- $\forall x \in O \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда  $F(O)$  — открыто.

*Доказательство.*  $x_0 \in O \Rightarrow F(x_0) \in F(O)$  — внутренняя? в  $F(O)$

По лемме  $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

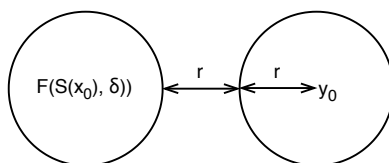
В частности  $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$  при  $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2}\rho(y_0, F(S(x_0, \delta)))$$

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$

Т.к.  $S$  — компакт,  $\exists \min$ .

Если  $y \in B(y_0, r)$ , то  $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$ :



Проверим, что  $B(y_0, r) \subset F(O)$ , т.е.  $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) F(x) = y$

Рассмотрим функцию  $g(x) = |F(x) - y|^2$  при  $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ .

Мы хотим показать, что  $\exists x : g(x) = 0$ . Найдем  $\min g$ .

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При  $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$  не лежит на границе шара  $\Rightarrow$  он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$

$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$

$$\forall x \quad \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

## 2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\operatorname{rg} F'(x) = l \quad \forall x \in O$

Тогда  $F(O)$  открыто.

*Доказательство.* Зафиксируем точку  $x_0$ . Пусть ранг реализуется на столбцах  $1 \dots l$ , т.е. определитель матрицы из столбцов  $1 \dots l \neq 0$ , т.е.:

$$\det \underbrace{\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots l}}_{A(x_0)}(x_0) \neq 0$$

И для близких точек тоже  $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[ \begin{array}{c|c} F'(x) & \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array} \right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда  $\tilde{F}|_{U(x_0)}$  удовлетворяет теореме  $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^m$

$$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$$

□

## 2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- $T$  обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \quad \forall x \in O$

Тогда  $T^{-1} \in C^r(0, \mathbb{R}^m)$  и  $(T^{-1})'_{y_0} = (T'(x_0))^{-1}$ , где  $y_0 = T(x_0)$

*Доказательство.* Докажем по индукции по  $r$ .

**База:**  $r = 1$

$S := T^{-1}$  — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему?

$f : X \rightarrow Y$  непр.  $\Leftrightarrow \forall B$  — откp.  $\subset Y \quad f^{-1}(B)$  — открыто.

$T'(x_0) = A$  — невырожденный оператор.

По лемме о локальной инъективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости  $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах  $y$  и  $S$ :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y \rightarrow 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно  $\rightarrow 0$ , то  $S$  дифференцируемо по определению.

Пусть  $y$  близко к  $y_0$ , тогда  $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}\omega(S(y))| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |w(S(y))| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{C} |y - y_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |w(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что  $S$  дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что  $S'$  непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

“Алгоритм” получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому  $S'$  непрерывно.

**Переход**

$$\begin{aligned} T \in C^{r+1} \quad T' : O \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ? S \in C^{r+1} \\ y \stackrel{\in C^r}{\mapsto} \text{по инд.} S(y) \stackrel{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \stackrel{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})' \end{aligned}$$

□

## 2.15 Теорема о неявном отображении

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $O$  откp.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$

$$\bullet \det F'_y(a, b) \neq 0$$

Тогда:

1.  $\exists$  откp.  $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$   
 $\exists$  откp.  $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$   
 $\exists! \Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$
2.  $\Phi'(x) = - (F'_y(x, \Phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

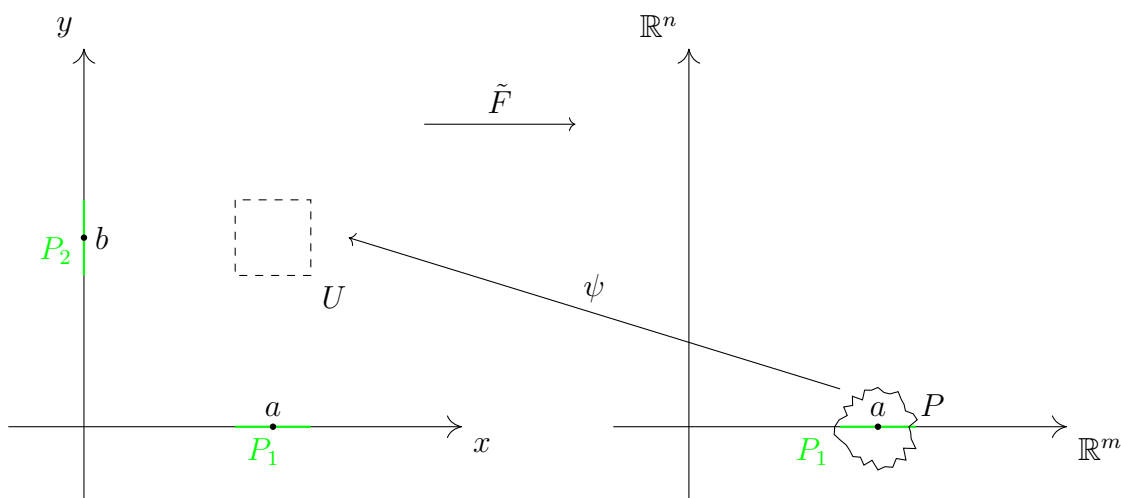
Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2: F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$$

$$1: \tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$$

$$F' = \left( \begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right)$$

Очевидно  $\det \tilde{F}' \neq 0$  в  $(a, b)$ , значит  $\exists U(a, b) : \tilde{F}|_U$  — диффеоморфизм



1.  $U = P_1 \times Q$  — можно так считать
2.  $V = \tilde{F}(U)$
3.  $\tilde{F}$  — диффеоморфизм на  $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$
4.  $\tilde{F}$  не меняет первые  $m$  координат  $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
5. “Ось  $x$ ”  $\Leftrightarrow$  “ось  $y$ ”,  $P :=$  “ось  $u$ ”  $= \mathbb{R}^m \times a \cap V, P$  — откp. в  $\mathbb{R}^m, P = P_1$



$$6. \Phi(x) := H(x, 0)$$

$$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$$

$$\text{Единственность: } (x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$$

□

## 2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$
- $1 \leq r \leq \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$  — окрестность  $p$  в  $\mathbb{R}^m$  :  $M \cap U$  —  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие.
2.  $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$  и функции  $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , все  $f_i \in C^r$   
 $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$ , при этом  $\text{grad} f_1(p) \dots \text{grad} f_{m-k}(p)$  — ЛНЗ.

*Доказательство.*

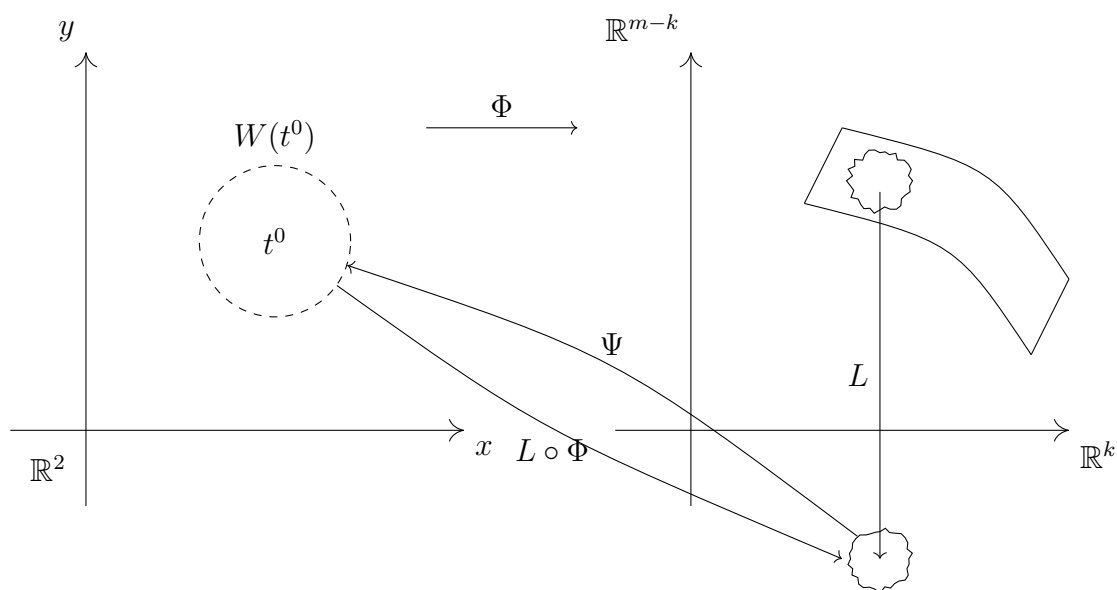
1  $\Rightarrow$  2:  $\Phi$  — параметризация  $O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$$\text{rg} \Phi'(t^0) = k$$

$$\text{Пусть } \det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1 \dots k} \neq 0$$

Пусть  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проекция на первые  $k$  координат:  $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда  $(L \circ \Phi)'$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  локальный диффеоморфизм. Тогда если  $W(t^0)$  — окрестность точки  $t^0$ , то  $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  — диффеоморфизм.



Множество  $\Phi(W)$  — график некоторого отображения  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть  $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем  $x' \in V$ , тогда  $(x', U(x')) = \Phi(\Psi(x'))$ , т.е.  $H \in C^r$

Множество  $\Phi(W)$  открыто в  $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$ , где  $\tilde{U}$  открыто в  $\mathbb{R}^m$

$\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть  $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$ . Тогда  $x \in M \cap \tilde{U} (= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow \text{ЛНЗ}$

$2 \Rightarrow 1: F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ  $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$ .

Пусть ранг реализуется на последних  $m - k$  столбцах, т.е.

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$$

$$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0 \text{ при } x \in U$$

По т. о неявном отображении:

$$\exists P - \text{окр. } (x_1 \dots x_k) \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$\exists Q - \text{окр. } (x_{k+1} \dots x_m) \text{ в } \mathbb{R}^{m-k}$$

$$\exists H \in C^2 : P \rightarrow Q : F(x', H(x)) = 0 \text{ для } x \in P$$

$$\text{Тогда } \Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$$

$\Phi$  — гомеоморфизм  $P$  и  $M \cap \tilde{U}$ ,  $\Phi$  — фактически проекция.

□

## 2.17 Следствие о двух параметризациях

- $M \subset \mathbb{R}^m$  —  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие
- $p \in M$
- $\exists$  две параметризации:

$$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$$

$$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$$

Тогда  $\exists$  диффеоморфизм  $\Psi : O_1 \rightarrow O_2$ , такой что  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

*Доказательство.*

Частный случай: Пусть  $\text{rg} \Phi'_1(t^0), \text{rg} \Phi'_2(s^0)$  достигается на первых  $k$  столбцах.

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta - \text{искомый диффеоморфизм}}$$

$$\text{Общий случай: } \Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$$

$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□