

Теория типов

Михайлов Максим

25 сентября 2021 г.

Оглавление

Лекция 1	7 сентября	2
1	Лямбда-исчисление	2
1.1	Определение	2
1.2	Булево исчисление	2
1.3	Числа	3
1.4	Типизированное лямбда-исчисление	4
1.5	Y-комбинатор и противоречивость нетипизированного λ -исчисления .	4
Лекция 2	14 сентября	6
2	Формализация λ -исчисления	6
Лекция 3	21 сентября	10
3	Просто-типизированное λ -исчисление	10
3.1	Исчисление по Карри	11
3.2	Исчисление по Чёрчу	12

Лекция 1

7 сентября

1 Лямбда-исчисление

То, чем мы будем заниматься, можно назвать прикладной матлогикой.

В рамках курса матлогики мы рукомахательно рассмотрели изоморфизм Карри-Ховарда, в этом курсе мы его формализуем. Мы затронем систему типов Хиндли-Милнера (*Haskell*) и язык Arend, основанный на гомотопической теории типов.

1.1 Определение

В 20-30х годах XX века Алонзо Чёрчем была создана альтернатива теории множеств как основе математики — лямбда-исчисление. Основная идея — выбросить из языка все, кроме вызова функций.

В лямбда исчислении есть три конструкции:

- Функция (*абстракция*): $(\lambda x. A)$
- Применение функции (*аппликация*): $(A B)$
- Переменная (*атом*): x

Большими буквами начала латинского алфавита мы будем обозначать термы, малыми буквам конца — переменные. λ жадная, как \forall и \exists в исчислении предикатов. Аппликация идёт слева направо, т.е. $\lambda p. p F T = \lambda p. ((p F) T)$

Вычисление происходит с помощью β -редукции, его мы определим позже, общее понимание у нас есть из вводной лекции функционального программирования.

1.2 Булево исчисление

Определим булево исчисление в λ -исчислении:

- $T := \lambda x. \lambda y. x$ — истина
- $F := \lambda x. \lambda y. y$ — ложь
- $\text{Not} := \lambda p. p \ F \ T$

$$\begin{aligned} \text{Not } F &\rightarrow_{\beta} \\ ((\lambda x. \lambda y. y) \ F) \ T &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda y. y) \ T &\rightarrow_{\beta} T \end{aligned}$$

- $\text{And} := \lambda a. \lambda b. a \ b \ F$

And берёт свой второй аргумент, если первый аргумент истина и ложь иначе.

And использует идею **карринга** — функция от 2 аргументов есть функция от первого аргумента, возвращающая другую функцию от второго аргумента.¹ Например, в выражении “((+) 2) 3” ((+) 2) это функция, которая прибавляет к своему аргументу 2.

1.3 Числа

Числа в лямбда-исчислении кодируются **нумералами Чёрча**. Это только один из способов кодировки, есть и другие. Общая идея — число n применяет данную функцию к данному аргументу n раз.

- $0 = \lambda f. \lambda x. x$
- $1 = \lambda f. \lambda x. f \ x$
- $3 = \lambda f. \lambda x. f \ (f \ (f \ x))$
- $\overline{n+1} = \lambda f. \lambda x. f \ (\overline{n} \ f \ x)$
- $(+1) = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$ — функция инкремента.
- $(+) = \lambda a. \lambda b. b \ ((+) \ \overline{1}) \ a$: b раз прибавляет единицу к a .
- $(\cdot) = \lambda a. \lambda b. a \ ((+) \ b) \ \overline{0}$: a раз прибавляет b к 0.

Ходят легенды, что Клини изобрел декремент у зубного врача под действием наркоза. Существует много способов определить декремент различных степеней упоротости.

Рассмотрим декремент, основанный на следующей идее: пусть есть упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ и функция $(*) : \langle a, b \rangle \mapsto \langle b, b+1 \rangle$. Тогда применив $(*)$ n раз к $\langle 0, 0 \rangle$ и взяв первый элемент, возьмём первый элемент пары.

¹ Аналогично для n аргументов.

Упорядоченная пара определяется следующим способом:

$$\text{MkPair} = \lambda a. \lambda b. (\lambda p. p \ a \ b)$$

Можно потрогать эмулятор лямбда-исчисления lci, будет полезно для домашних заданий.

1.4 Типизированное лямбда-исчисление

Лямбда-исчисление для нас будет просто языком программирования. Для начала мы его типизируем, потому что нетипизированное лямбда-исчисление противоречиво.

Пусть у каждого выражения A есть тип τ , что обозначается $A : \tau$. Также используется некоторый контекст с переменными и их типами, обозначаемый M . Все вместе это записывается как $M \vdash A : \tau$, что напоминает исчисление предикатов.

1.5 Y -комбинатор и противоречивость нетипизированного λ -исчисления

Мы хотим, чтобы \rightarrow_β сохраняло значения, т.к. иначе мы вообще не можем говорить о равенстве термов.

Определение. $Y := \lambda f. (\lambda x. f \ (x \ x)) (\lambda x. f \ (x \ x))$ — Y -комбинатор, для него верно $Y f \approx f(Y f)$. Такое свойство называется “быть комбинатором неподвижной точки”, т.е. он находит неподвижную точку функции: A такое, что $f(A) = A$.

Пусть мы добавили бинарную операцию (\supset) — импликацию с некоторыми аксиомами. Оказывается, что доказуемо любое A . Мы это докажем на последующих лекциях.

Y -комбинатор полезен тем, что позволяет реализовывать рекурсию.

Пример. Запишем факториал в неформальном виде:

$$\text{Fact} = \lambda n. \text{If} \ (\text{IsZero } n) \ \bar{1} \ (\text{Fact } (n - 1) \cdot n)$$

На самом деле Fact есть неподвижная точка функции

$$\lambda f. \lambda n. \text{If} \ (\text{IsZero } n) \ \bar{1} \ (f \ (n - 1) \cdot n)$$

по определению неподвижной точки функции. Тогда Fact это

$$Y(\lambda f. \lambda n. \text{If} \ (\text{IsZero } n) \ \bar{1} \ (f \ (n - 1) \cdot n))$$

У нас появляется проблема: есть выражения, которым мы не можем приписать значение, например

$$Y(\lambda f. \lambda x. f \ (\text{Not } x))$$

Эта проблема происходит из-за того, что наш язык слишком мощный — мы написали решатель любых уравнений, даже тех, у которых нет решения. Логичный выход из этой ситуации — запретить то, из-за чего у нас возникают проблемы. Как запретить Y ? Оказывается, это позволяют сделать типы — они будут делить выражения на добропорядочные и недобропорядочные.

Лекция 2

14 сентября

2 Формализация λ -исчисления

Определение. Пред- λ -терм определяется индуктивно как одно из:

1. x — переменная
2. $(L\ L)$ — применение
3. $(\lambda x.L)$ — абстракция

Почему пред- λ -терм? Мы не хотим различать $\lambda x.x$ и $\lambda y.y$.

Определение. α -эквивалентность — обозначается $A =_\alpha B$ и выполняется, если¹:

1. $A \equiv x, B \equiv x$ — одна и та же переменная
2. $A \equiv P\ Q, B \equiv R\ S, P =_\alpha R, Q =_\alpha S$
3. $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda y.Q$ и существует t — новая переменная, такая что $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$

Определение. Свобода для подстановки: $A[x := B]$, никакое свободное вхождение переменной в B не станет связанным.

Определение (λ -терм). Множество всех λ -термов это $\Lambda / =_\alpha$

Определение (β -редекс). Выражение вида $(\lambda x.A)\ B$

Определение (β -редукция). Обозначается $A \rightarrow_\beta B$ и выполняется, если выполняется одно из:

1. $A \equiv P\ Q, B \equiv R\ S$ и либо $P \rightarrow_\beta R$ и $Q =_\alpha S$, либо $P =_\alpha R$ и $Q \rightarrow_\beta S$.

¹ И только если.

$$2. A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda x.Q \text{ и } P \rightarrow_{\beta} Q$$

$$3. A \equiv (\lambda x.P) Q, B \equiv P[x := Q] \text{ и } Q \text{ свободно для подстановки.}$$

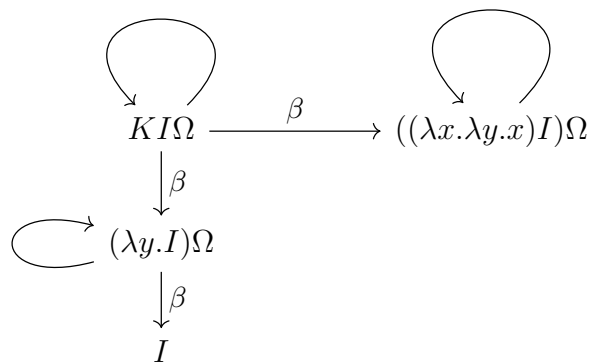
Определение. Придуман Моисеем Шейнфинкелем.

$I := \lambda x.x$ — Identität²

Определение.

- $K = \lambda x.\lambda y.x$
- $\Omega = \omega \omega$
- $\omega = \lambda x.x x$

Пример.



Определение. R обладает ромбовидным свойством (*diamond*), если для любых a, b, c , таких что:

1. $a R b, a R c$
2. $b \neq c$

существует d : $b R d$ и $c R d$.



Пример. $>$ на \mathbb{Z} не ромбовидно: для $a = 3, b = 2, c = 1$ выполнено условие, но $\nexists d$.

$>$ на \mathbb{R} ромбовидно.

² Тождество (с немецкого)

Определение (β -редуцируемость). Рефлексивное, транзитивное замыкание отношения \rightarrow_β , обозначается \rightarrow_β^* .

Теорема 1 (Чёрча-Россера). β -редуцируемость обладает ромбовидным свойством.

Определение. \Rightarrow_β — параллельная β -редукция, выполняется если:

0. $A =_\alpha B$
1. $A \equiv P Q, B \equiv R S$ и $P \Rightarrow_\beta R$ и $Q \Rightarrow_\beta S$.
2. Аналогично β -редукции.
3. Аналогично β -редукции.

Лемма 1. (\Rightarrow_β) обладает ромбовидным свойством.

Лемма 2. Если R обладает ромбовидным свойством, то R^* обладает ромбовидным свойством.

Доказательство. Две индукции. □

Лемма 3. $(\Rightarrow_\beta) \subseteq (\rightarrow_\beta)$

Доказательство теоремы Чёрча-Россера. Заметим, что:

1. $(\Rightarrow_\beta)^* \subseteq (\rightarrow_\beta)$ — из леммы
2. $(\rightarrow_\beta) \subseteq (\Rightarrow_\beta)^*$ — из определения
3. Т.к. $(\Rightarrow_\beta)^*$ обладает р.с., то и (\rightarrow_β) обладает р.с. □

Следствие 1.1. У λ -выражения существует не более одной нормальной формы.

Доказательство. Пусть A имеет две нормальные формы: $A \rightarrow_\beta B, A \rightarrow_\beta C$ и $B \neq_\alpha C$. Тогда есть $D: B \rightarrow_\beta D$ и $C \rightarrow_\beta D$. Противоречие. □

Определение. Нормальный порядок редукции — редуцируем самый левый редекс.

Теорема 2. Если нормальная форма существует, она может быть получена нормальным порядком редукции.

Примечание. Нижеследующее объяснение — с практики.

Рассмотрим $Y f =_\beta f (Y f) =_\beta f (f (Y f)) =_\beta \dots$. Можно считать, что у f сколько угодно аргументов, первый аргумент можно считать указателем на свой рекурсивный вызов.

Пример. Числа Фибоначчи:


```
fib a b n =  
  if n = 0 then a  
  else fib b (a + b) (n - 1)
```

Здесь решение уравнения заматано под ковер, в λ -исчислении оно видно:

$$\text{Fib} = \lambda f. \lambda a. \lambda b. \lambda n. (\text{IsZero } n) \ a \ (f \ f \ a \ (a + b) \ (n - 1))$$

Здесь f передается само себе, чтобы иметь ссылку на себя для рекурсивного вызова.

Для работы Fib нужно дать его самому себе: Fib Fib 1 1 10.

Лекция 3

21 сентября

В λ -исчислении можно сделать:

1. Целые числа, где $\langle a, b \rangle \leftrightarrow a - b$
2. Рациональные числа в виде дробей
3. Матлогику?

Попытки сделать матлогику всегда приводили к парадоксам.

Оказывается, нельзя относиться к любому выражению как к логическому.

Обозначение. \supset — импликация

Пример. Рассмотрим комбинатор $\Phi_A =_{\beta} A \supset \Phi_A$. Это $Y (\lambda f. \lambda a. a \supset f a)$.

Добавим аксиому $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$. Если такой аксиомы нет, то теория грустная.

Мы также хотим, чтобы если $X =_{\beta} Y$, то $X \supset Y$.

Каким-то образом мы получим парадокс.

3 Просто-типизированное λ -исчисление

Определение (типовые переменные).

- α, β, γ — атомарные
- τ, σ — составные

2 традиции:

1. Исчисление по Чёрчу

2. Исчисление по Карри

Мы сначала рассмотрим исчисление по Карри.

3.1 Исчисление по Карри

Типизация: $\Gamma \vdash A : \tau, \Gamma = \{x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2 \dots\}$

Правила:

1. $\frac{}{\Gamma, x_1 : \tau_1 \vdash x_1 : \tau_1} \text{Ax.}$
2. $\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A B : \tau}$
3. $\frac{\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \tau \rightarrow \sigma}$

Пример.

$$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}. \lambda x^{\alpha}. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$

Подгоним доказательство под результат:

$$\frac{\frac{\frac{f : \alpha \rightarrow \alpha \vdash f : \alpha \rightarrow \alpha}{f : \alpha \rightarrow \alpha, x : \alpha \vdash f (f x) : \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha \rightarrow \alpha \quad \Gamma \vdash x : \alpha}{\Gamma \vdash f x : \alpha}}{f : \alpha \rightarrow \alpha \vdash \lambda x. f (f x) : \alpha \rightarrow \alpha}}{\lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}$$

Теорема 3. Если $\Gamma \vdash A : \tau$, то любое подвыражение имеет тип.

Доказательство. По индукции по длине.

База. Это правило 1.

Переход. Пусть любое выражение длиной $< n$ символов обладает искомым свойством. Покажем искомое для $A : |A| = n$. Рассмотрим варианты того, по какому правилу доказана типизируемость A :

1. Второе правило: B и C короче A , следовательно для них искомое верно.
2. Третье правило: аналогично для x, B

□

Теорема 4 (Subject reduction, о редукции). Если $\Gamma \vdash A : \sigma$ и $A \rightarrow_{\beta} B$, то $\Gamma \vdash B : \sigma$

Доказательство. Скучно.

Самая интересная часть: рассмотрим $A \rightarrow_\beta B$. Случаи:

1. $\lambda x.A \rightarrow \lambda x.B$ — индукция
2. $A B$ — индукция
3. $(\lambda x.A) B \rightarrow A[x := B]$

По теореме о типизации подвыражений, $(\lambda x^{\tau \rightarrow \sigma}.A^\sigma) B^\tau : \sigma$. Кроме того, доказывается $(A[x := B]) : \sigma$.

□

Лемма 4. Если $\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma, \Gamma \vdash B : \tau$, то $\Gamma \vdash A[x := B] : \sigma$

Теорема 5 (Чёрча-Россера). Если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и существуют $N, P : M \twoheadrightarrow_\beta N, M \twoheadrightarrow_\beta P$, то найдется такой S , что $\Gamma \vdash S : \sigma$ и $N \twoheadrightarrow_\beta S$ и $P \twoheadrightarrow_\beta S$

3.2 Исчисление по Чёрчу

Язык:

- x — переменная
- $A B$ — аппликация
- $\lambda x^\tau.P$ — абстракция

Обозначение. Когда нужно различить исчисления, будем писать $\vdash_{\text{ч}}$ или $\vdash_{\text{к}}$

Теорема 6. Если контекст Γ и выражение P типизируется, то $\Gamma \vdash_{\text{ч}} P : \sigma$

Пример.

$$\vdash_{\text{к}} \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha$$

$$\vdash_{\text{к}} \lambda x.x : \beta \rightarrow \beta$$

$$\vdash_{\text{ч}} \lambda x^\sigma.x : \sigma \rightarrow \sigma$$