Лемма 1. *О связности отрезка*

Промежуток $\langle a, b\rangle$ (границы могут входить, могут не входить) — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \cap G_1 \neq \varnothing \quad \langle a, b\rangle \cap G_2 \neq \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$

Доказательство. От противного: $\alpha \in \langle a, b\rangle \cap G_1 \quad \beta \in \langle a, b\rangle \cap G_2$, пусть $\alpha < \beta$

$$t := \sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$t \in G_1$? нет, т.к. если да, то $t \neq \beta$ и $\exists U(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_1 \cap [\alpha, \beta]$, это противоречит определению t:

$[\alpha, t - \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$

$(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_1$

$[\alpha, t + \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$

$t \in G_2$? нет, т.к. если лежит, то $t \neq \alpha \quad \exists (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_2 \cap [\alpha, \beta)$

$\sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \leq t - \varepsilon$ □

Теорема 1. Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \;\; \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

Традиционное доказательство — бинпоиск.

Доказательство. Сразу следует из леммы о связности отрезка и топологического определения
непрерывности.

Если нашлось t, для которого доказуемое утверждение неверно, то

$$[a, b] = f^{-1}(-\infty, t) \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

Оба множества открыты, т.к. они — прообразы открытых множеств. Кроме того, они непусты, т.к. одно из них содержит a, другое содержит b. Итого, мы представили отрезок $[a, b]$ в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, противоречие по предыдущей лемме. □

Теорема 2. О вписанном n-угольнике максимальной площади

Вписанный n-угольник максимальной площади — правильный.

Доказательство. Докажем, что если такой n-угольник существует, то он правильный. Предположим обратное — он не правильный $\Rightarrow$ не все стороны равны. Возьмём точки этого n-угольника A, B, C на окружности такие, что $AB \neq BC$. Сдвинем B таким образом, что $AB = BC$. Площадь треугольника увеличилась *(т.к. основание не изменилось)*, а высота увеличилась $\Rightarrow$ n-угольник правильный.

Докажем, что такой n-угольник существует, т.е. $\exists \max S$. Зададим n-угольник углами между соседними вершинами α_i. Заметим, что $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha = 2\pi$. Совпадающие вершины разрешены, искомый n-угольник содержит центр окружности *(очевидно)*. Таким образом, мы задали n-угольник в $\mathbb{R}^n$ — пространстве углов. Множество всех многоугольников ограничено гиперкубом со стороной π. Кроме того, оно замкнуто $\Rightarrow$ по характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$ оно компактно.

$S := \sum \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha_i$ — непрерывна на компакте $\Rightarrow \exists \max S$ □

Теорема 3. Теорема о разделении колбасы.

Кусок колбасы произвольной формы можно разделить прямой, параллельной данной, на две части одинаковой площади. *(Кусок колбасы вводится, чтобы не возникало вопросов о площади.)*

Доказательство. Пусть колбаса лежит на столе высотой H_0.

$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{л}}$ — непр.

$$|S(x+h) - S(x)| \leq hH_0$$

$$\begin{cases} S(x_0) = 0 \\ S(x_1) = S \end{cases} \Rightarrow \exists \overline{x} \;\; S(\overline{x}) = \frac{S}{2}$$

□

Теорема 4. Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

Примечание. Т.к. хлеб и колбаса лежат на столе, они ограничены.

Доказательство. Рассмотрим угол φ и разделим прямой под углом φ колбасу на две равные по площади части. Это можно сделать для произвольного φ по теореме о разделении колбасы.

$S(\varphi) = S_{\text{л}} - S_{\text{п}}$ *(для хлеба)*

S — непр.

Берём произвольный угол $\varphi_0; \varphi_0 + \pi$

$\varphi_0 : S_{\text{л}} - S_{\text{п}}$

$\varphi_0 + \pi : S_{\text{п}} - S_{\text{л}}$

$\exists \varphi \ \ S(\varphi) = 0$ по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении. □

Примечание. Это верно для адекватной колбасы, например она не должна состоять из двух кусков. Кроме того, она не должна состоять из двух кусков, соединённых ниткой.

Теорема верна для выпуклых фигур, но возможно для других — тоже.

Теорема 5. О сохранении промежутка

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, непр.

Тогда $f(\langle a, b \rangle)$ — промежуток.

Доказательство. Не по Кохасю.

$m := \inf f, M := \sup f$. Докажем, что $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$ путем доказательства, что $f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$ и $f(\langle a, b \rangle) \supset \langle m, M \rangle$.

1. $f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$

$$\forall x \ \ m \le f(x) \le M \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$$

2. $f(\langle a, b \rangle) \supset \langle m, M \rangle$

   $\triangleleft k \in \langle m, M \rangle$. По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении $\exists c \in \langle a, b \rangle :$ $f(c) = k \Rightarrow k \in f(\langle a, b \rangle) \Rightarrow \langle m, M \rangle \subset f(\langle a, b \rangle)$

□

Примечание. Это промежуток $\langle \inf f, \sup f \rangle$

Примечание. $f = \sin \quad (0; 2\pi) \to [-1, 1]; (0; \pi) \to (0, 1]$

Но! т. Вейерштрасса $f([a, b])$ — замкн. промежуток

Определение. Y — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$

= **путь** в пространстве Y

$\gamma[a, b] =$ носитель пути, "кривая"

Пример. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

γ — окружность.

Определение. $E \subset Y$

E — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E$ $\exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Лемма 2. *В $\mathbb{R}$ линейно связанными множествами являются только промежутки.*

Доказательство.

1. Промежуток линейно связен.

$$\forall A, B \in \langle a, b\rangle \quad \exists \text{ путь: } \gamma : [A, B] \Rightarrow \langle a, b\rangle; t \mapsto t$$

2. $E \subset \mathbb{R}$ — линейно связное $\overset{?}{\Rightarrow}$ E — промежуток

   Пусть E — не промежуток

   $\exists a, b, t : a, b \in E; a < b \quad a < t < b; t \notin E$

   Линейная связность: $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$

   $\gamma(\alpha) = a \quad \gamma(\beta) = b \quad \gamma$ — непр.

$\square$

Пример. (ужасный)

$\gamma : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}$

$[0, \frac{1}{4}]$ — в третий квадрант

$[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$ — во второй квадрант

$[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]$ — в первый

$[\frac{3}{4}, 1]$ — в четвертый

Каждую часть разобьем таким же образом, только так, чтобы из последнего квадранта можно было перейти в дальнейший.

Разобьем так бесконечное число раз.

$$x \in [0,1] \quad [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \text{ — квадраты}$$

$$\bigcap K_i = \{X\}$$

$$x \mapsto X$$

Это кривая Пеано

Определение. A и B **равномощны**, если $\exists \varphi : A \to B$ — биекция

Определение. A **"меньше либо равно"** B, обозначается $A \preccurlyeq B$

$\exists \varphi : A \to B$ — иньекция

Теорема 6. Кантора — Бернштейна

$$A \preccurlyeq B, B \preccurlyeq A \Rightarrow A \text{ и } B \text{ равномощны}$$

$\mathbb{N}$ равномощно $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 2n \mapsto n \\ 2n - 1 \mapsto 1 - n \end{cases}$$

Определение. A — **счётное множество** $\Leftrightarrow$ равномощно $\mathbb{N}$

Теорема 0. A — бесконечное $\quad \exists$ счётное $B \subset A$

Теорема 1. A — счётное $\Rightarrow A \cap \{x\}$ — счётное

A, B — счётное $\Rightarrow A \cap B$ — счётное

Теорема 2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счётное

Теорема 3. $A \subset B, B$ — счётное; A — бесконечное $\Rightarrow A$ — счётное

Следствие. $\mathbb{Q}$ — счётное

Доказательство.

$$\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\},\ \ \mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

$$\forall q \in \mathbb{N}\ \ Q_p = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q} \dots\right\} \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q}_- \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \text{ — счётно}$$

□

Теорема 4. $[0, 1]$ — несчётно

Доказательство. Пусть $\exists \varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$ — биекция

$[a_1, b_1]$ — любая из частей, где нет $\varphi(1)$

$[a_2, b_2]$ — любая из частей, где нет $\varphi(2)$ и $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$

$\bigcap [a_k, b_k] \supset \{x\}$ $\quad x$ — не имеет номера

$\forall k\ \ x \in [a_k, b_k] \Rightarrow x \neq \varphi(k)$ □

Определение. A равномощно $[0, 1] \Rightarrow A$ имеет мощность **континуума**.

Теорема 5. $Bin =$ множество бинарных последовательностей

Bin имеет мощность континуума

Лемма 3. *A — беск., B — счётное $\Rightarrow A \cup B$ равномощно A*

Доказательство. Теорема 0 + Теорема 1 *(второй пункт)* + Теорема 3 □

Доказательство. $\varphi : Bin \to [0, 1] \cup Bin_{\text{кон.}}$

$0101\ldots \mapsto 0.0101\ldots$ — это отображение не иньективно ($0100\ldots \mapsto 0.01$; $0011\ldots \mapsto 0.01$)

Иньекция достигается тем, что конечные дроби идут в $Bin_{\text{кон.}}$, а бесконечные в $[0, 1]$ □

Следствие. $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ — тоже континуум

Доказательство. Докажем, что $Bin \times Bin$ равномощно Bin

$(x_1x_2x_3\dots), (y_1y_2\dots) \mapsto x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$ — биекция

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} Bin \quad [0,1] \xrightarrow{\psi} Bin$$

$$(x,y) \mapsto (\varphi(x), \psi(y))$$

□

Примечание. $(0,1)$ равномощно $\mathbb{R}$, например через $ctg(\pi x)$

Упражнение. Доказать, что $[0,1]$ и $(0,1)$ равномощны.

Теорема 6. О непрерывности монотонных функций. (Важно знать формулировку)

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. Точки разрыва f (если есть) — I рода
2. f — непр. на $\langle a,b\rangle \Leftrightarrow f(\langle a,b\rangle)$ — промежуток

Доказательство. Рассмотрим $f\uparrow$

1. $\lhd x_1 \in \langle a,b\rangle$

   $$\lim_{x\to x_1-0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_1} f(x)|_{\langle a,x_1)}$$

   $f(x)|_{\langle a,x_1)} \uparrow$ и ограничена значением $f(x) \Rightarrow$ по теореме о пределе монотонной функции $\exists \lim\limits_{x\to x_1} f(x)|_{\langle a,x_1)} = \sup f(x)|_{\langle a,x_1)}$. Аналогично $\exists \lim\limits_{x\to x_1+0}$. Таким образом, для каждой точки существует предел слева и справа.

2. "$\Rightarrow$" следует из теоремы о сохранении промежутка.

   "$\Leftarrow$"

   Пусть f имеет разрыв в x_0. Тогда либо $f(x_0-0) < f(x_0)$, либо $f(x_0) < f(x_0+0)$. Рассмотрим $f(x_0) < f(x_0+0)$. В силу монотонности f не принимает значений между $f(x_0)$ и $f(x_0+0) \Rightarrow$ множество значений — не промежуток. Противоречие.

□