1 Определения

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \overset{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \overset{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f^{(\alpha)}_{(x)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha : 0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha : |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!}(x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

1.3 n-й дифференциал

$$\sum_{\alpha : |\alpha| = k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \overset{\text{def}}{=} k\text{-й **дифференциал** функции } f \text{ в точке } a \overset{\text{def}}{=} d^k f(a,h)$$

1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad ||A|| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m : \\ |x| = 1}} |Ax|$$

1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. **Положительно определенная кв. форма:** $\forall h \neq 0 \;\; Q(h) > 0$

Определение. **Отрицательно определенная кв. форма:** $\forall h \neq 0 \;\; Q(h) < 0$

Определение. **Неопределенная кв. форма:** $\exists \overline{h} : Q(h) < 0, \exists \tilde{h} : Q(h) > 0$

Определение. Полуопределенная (***положительно определенная вырожденная***) кв. форма: $Q(h) \geq 0 \;\; \exists \overline{h} \neq 0 : Q(\overline{h}) = 0$

1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in E$ — **локальный максимум**, если

$$\exists U(a) \subset E \ \ \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — **диффеоморфизм**, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо

1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : T\Big|_U$ — диффеоморфизм, т.е. $\exists T^{-1}$

1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) — решение этой системы, $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение, C^r гладко зависящее от y.

1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

1.11 ! Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ — **простое** k**-мерное** C^r**-гладкое многообразие** в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \ \ \text{rg}\Phi'(x) = k$

1.12 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k-мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от Φ.

$\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство** к M в точке p, обозначается T_pM.

1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

x_0 — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \ \ f(x_0) \geq f(x)$, остальные — аналогично.

Уравнения $\Phi(x) = 0$ называются **уравнениями связи**.

1.14 ! Формулировка достаточного условия относительного экстремума

Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума

- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg}\Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$.

Рассмотрим квадратную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

Тогда:

1. Если $Q(h)$ положительно определена, a — точка минимума
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — точка максимума
3. Если $Q(h)$ незнакоопределена, a — не экстремум
4. Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

Пусть $E \subset X$. Последовательность f_n **сходится поточечно** к f на множестве E, если $\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$, т.е.:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1.16 ! Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

f_n **равномерно сходится** к f на $E \subset X$, если $M_n := \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \ 0 \le M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

- X — произвольное множество
- $u_n : X \to Y$ — нормированное пространство

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ **равномерно** на $E \subset X$: $S_N \underset{E}{\overset{N \to +\infty}{\rightrightarrows}} S$

1.18 Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости

Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x), S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на $E \Leftrightarrow R_N \underset{E}{\rightrightarrows} 0$

1.19

1.20 Кусочно-гладкий путь

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

Кусочно-гладкое отображение - отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва - I рода и $\gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое $\forall k$, где t_k — точка разрыва.

1.21 Векторное поле

Векторное поле — непрерывное отображение $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \;\; V(x) \in \mathbb{R}^m$ — вектор, “приложенный к точке x”.

1.22 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \ldots V_m d\gamma_m \end{aligned} \tag{1}$$

Также используется обозначение $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 d\gamma_1 + \ldots V_m d\gamma_m$

1.23 ! Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \le k \le r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \ldots \right)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k}$$

□

2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \to \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha:0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{(\alpha + 1)!}(x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha:0\le|\alpha|\le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\Theta(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-1|^r)}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!}h^\alpha + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\Theta(x-a))}{\alpha!}h^\alpha$$

□

2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha:0\le|\alpha|\le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. Отсутствует □

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \to ||A||$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:
   (a) $||A|| \ge 0$
   (b) $||A|| = 0 \Rightarrow A = 0_{n\times m}$
   (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ ||\lambda A|| = |\lambda| ||A||$
   (d) $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow ||BA|| \le ||B|| \cdot ||A||$

Доказательство.

1. $||A|| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$

   a, b, c — очевидно.

   d: $|(A+B)x| = |Ax + Bx| \le |Ax| + |Bx| \le (||A|| + ||B||)|x|$

   По замечанию 3 $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$

2. $|BAx| = |B(Ax)| \leq ||B|| \cdot |Ax| \leq ||B|| \cdot ||A||$

$\square$

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $||A||$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.
2. $2 \Rightarrow 1$

   Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \;\; \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

   $\lessdot \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left|A \frac{1}{\delta} \delta x\right| = \frac{1}{\delta} |A\delta x| \leq \frac{1}{\delta}$
3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta := \frac{\varepsilon}{||A||} \;\; \forall x_1, x_0 \;\; |x_1 - x_0| < \delta$$

$\square$

2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- E открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ $(c = a + \Theta(b - a)), \Theta \in [0, 1]$:

$$|F(b) - F(a)| \leq ||F'(c)|||b - a|$$

2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $||L - M|| < \dfrac{1}{||L^{-1}||}$ – M “близкий” к L

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m открыто в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $||M^{-1}|| \leq \dfrac{1}{||L^{-1}||^{-1} - ||L - M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \leq \dfrac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L - M||}||L - M||$

Доказательство. По неравенству треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{||L||^{-1}}|x| - ||M - L|| \cdot |x| \\ &\geq \left(||L^{-1}||^{-1} - ||M - L||\right)|x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в $\mathbb{R}$ выполняется следующее равенство в Ω_m:

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на M слева и на L справа:

Доказательство.

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$||M^{-1} - L^{-1}|| = ||M^{-1}(L-M)L^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}||L-M||$$

□

2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. $\exists$ все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на E
2. $F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \ \ \forall \overline{x} : |\overline{x} - x| < \delta \quad ||F'(x) - F'(\overline{x})|| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$:

  Берем x, ε. $\exists \delta > 0 : \forall \overline{x} \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех i, j.

$$||F'(x)| - F'(\overline{x})|| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \overline{x} : |x - \overline{x}| < \delta \quad ||F'(x) - F'(\overline{x})|| < \varepsilon$$

  $\triangleleft h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$

$$|F'(x)h - F'(\overline{x})h| \leq ||F'(x) - F'(\overline{x})|| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\overline{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \varepsilon$$

□

2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in IntE$
- a — точка локального экстремума
- f — дифф. в точке a

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \dfrac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f\Big|_{\text{прямая}(a,u)}$ a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. □

Следствие (необходимое условие экстремума). a — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- f дифф. в $IntK$
- f непрерывно на K
- $f\Big|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in IntK : f'(a) = \vec{0}$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо f на K const, либо $\exists a \in IntK$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ □

2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

- $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \ \ \forall x \ \ C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

Доказательство.

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x|p\left(\frac{x}{|x|}\right)\begin{cases}\geq C_2|x|\\ \leq C_1|x|\end{cases}$$

Существование C_1 и C_2 гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что p непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned}p(x-y) &= p\left(\sum(x_k-y_k)e_k\right)\\ &\leq \sum p((x_k-y_k)e_k)\\ &= \sum |x_k-y_k|p(e_k)\\ &\leq |x-y|\sqrt{\sum p(e_k)^2}\\ &\leq |x-y|M\end{aligned}$$

□

2.10 ! Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in IntE$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, a — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — локальный максимум
- Если $Q(h)$ незнакоопределена, a — не экстремум
- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a)\\
&= \frac{1}{2}d^2 f(a+\Theta h, h)\\
&= \frac{1}{2}\left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(f''_{x_i x_i}(a+\Theta h) - f''_{x_i x_i}(a)\right)}_{\to 0}\underbrace{h_i^2}_{\le |h|^2} + 2\sum_{i<j}\underbrace{\left(f''_{x_i x_i}(a+\Theta h) - f''_{x_i x_i}(a)\right)}_{\to 0}\underbrace{h_i h_j}_{\substack{\le |h|^2\\ \text{по модулю}}}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
f(a+h) - f(a) \ge \frac{1}{2}\left(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2\right) \ge \frac{1}{4}\gamma_Q |h|^2 > 0
$$

$$
\begin{aligned}
\lhd \overline{h} : Q(\overline{h}) > 0 \Rightarrow f(a+t\overline{h}) - f(a) &= \frac{1}{2}d^2 f(a+\Theta t\overline{h}, \overline{h})t^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{t^2 Q(\overline{h})}_{Q(t\overline{h})} + t^2 \underbrace{\left(\sum (f''_{x_i x_i}(a+\Theta th) - f''_{x_i x_i}(a))\overline{h}_i^2 + 2\sum_{i<j}\dots\right)}_{\text{б.м. при } t\to 0}\right)\\
&\ge \frac{1}{2}t^2(Q(h) - \frac{1}{2}Q(h)) > 0
\end{aligned}
$$

Т.е. $f(a+t\overline{h}) > f(a)$ при t, близких к 0.

Аналогично $f(a+t\overline{\overline{h}}) < f(a)$ при t, близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$

$\overline{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$

$a = (0, 0, \dots)$

$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$

$d^2 f(a, h) = h_1^2$

$d^2 \overline{f}(a, h) = 2h_1^2$

Итого f не имеет экстремума в a, но для $\overline{f}$ a — локальный минимум. □

2.11 Лемма о "почти локальной инъективности"

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F дифф. в $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists c > 0, \delta > 0 \ \ \forall h < \delta \ \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. Если F — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq ||F'(x_0)|| \cdot |h| \geq \frac{1}{||(F'(x_0))^{-1}||}|h|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)|h|| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

2.12 Теорема о сохранении области

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F дифф.
- $\forall x \in O \ \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открыто.

Доказательство. $x_0 \in O \Rightarrow F(x_0) \in F(O)$ — внутренняя? в $F(O)$

По лемме $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \ \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

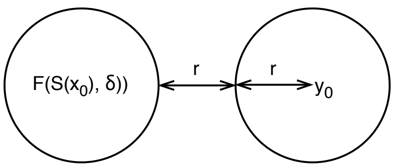
В частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2}\rho(y_0, F(S(x_0, \delta))$$

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$

Т.к. S — компакт, $\exists \min$.

Если $y \in B(y_0, r)$, то $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$:



Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$, т.е. $\forall y \in B(y_0, r)\ \ \exists x \in B(x_0, \delta)\ \ F(x) = y$

Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|^2$ при $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

Мы хотим показать, что $\exists x : g(x) = 0$. Найдем $\min g$.

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара $\Rightarrow$ он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$$
$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$
$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \ldots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$
$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$
$$\forall x \quad \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

$\square$

2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\mathrm{rg} F'(x) = l\ \ \forall x \in O$

Тогда $F(O)$ открыто.

Доказательство. Зафискируем точку x_0. Пусть ранг реализуется на столбцах $1 \ldots l$, т.е. определитель матрицы из столбцов $1 \ldots l \neq 0$, т.е.:

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1\ldots l}(x_0)}_{A(x_0)} \neq 0$$

И для близких точек тоже $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F'(x)} \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array}\right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда $\tilde{F}\Big|_{U(x_0)}$ удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$

$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$ □

2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \ldots + \infty$
- T обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in O$

Тогда $T^{-1} \in C^r(0, \mathbb{R}^m)$ и $(T^{-1})'_{y_0} = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. Докажем по индукции по r.

База: $r = 1$

$S := T^{-1}$ — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему?

$f : X \to Y$ непр. $\Leftrightarrow \forall B$ — откр. $\subset Y$ $f^{-1}(B)$ — открыто.

$T'(x_0) = A$ — невырожденный оператор.

По лемме о локальной иньективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \ \ |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(x_0)$$

В терминах y и S:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y\to 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y-y_0|}$$

Если действительно $\to 0$, то S дифференцируемо по определению.

Пусть y близко к y_0, тогда $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}w(S(y))|S(y) - S(y_0)|| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}w(S(y))| \\ &\leq |x - x_0| \cdot ||A^{-1}|| \cdot |w(S(y))| \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{C}|y - y_0| \cdot ||A^{-1}|| \cdot |w(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что S дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что S' непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

"Алгоритм" получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому S' непрерывно.

Переход

$$T \in C^{r+1} \quad T' : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ?S \in C^{r+1}$$
$$y \overset{\in C^r \text{ по инд.}}{\mapsto} S(y) \overset{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \overset{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})'$$

□

2.15 ! Теорема о неявном отображении

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- O откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$

- $\det F'_y(a,b) \neq 0$

Тогда:

1. $\exists$ откр. $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$

   $\exists$ откр. $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$

   $\exists!\ \Phi : P \to Q \in C^r : \forall x \in P\ \ F(x, \Phi(x)) = 0$

2. $\Phi'(x) = -\left(F'_y(x, \Phi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

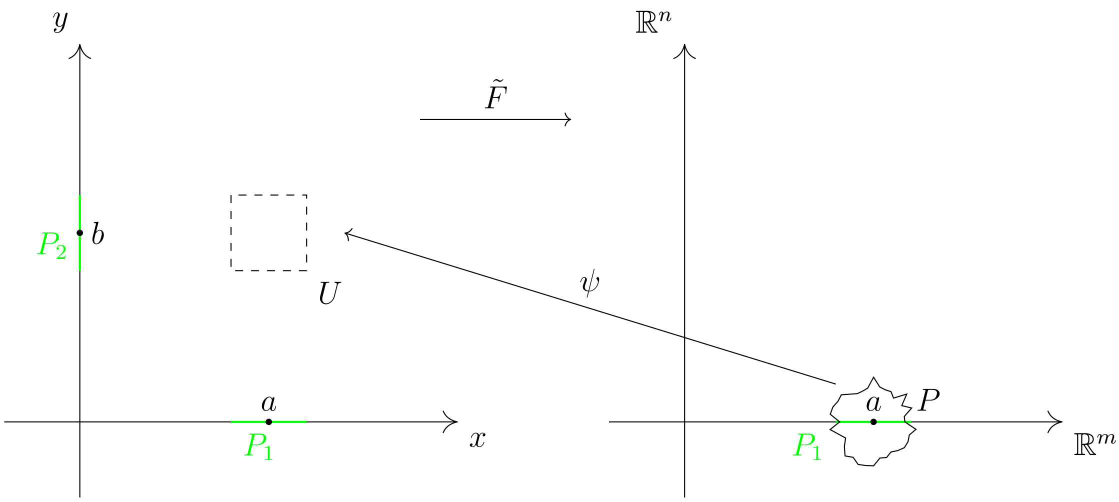
Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: $F(x,\Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x,\Phi(x)) + F'_y(x,\Phi(x))\Phi'(x) = 0$

1: $\tilde{F} : O \to \mathbb{R}^{m+n} : (x,y) \mapsto (x, F(x,y)), \tilde{F}(a,b) = (a,0)$

$$F' = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right)$$

Очевидно $\det \tilde{F}' \neq 0$ в (a,b), значит $\exists U(a,b) : \tilde{F}\Big|_U$ — диффеоморфизм



1. $U = P_1 \times Q$ — можно так считать
2. $V = \tilde{F}(U)$
3. $\tilde{F}$ — диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \to U$
4. $\tilde{F}$ не меняет первые m координат $\Rightarrow \Psi(u,v) = (u, H(u,v)), H : V \to \mathbb{R}^n$.
5. “Ось x” $\Leftrightarrow$ “ось y”, $P :=$ ‘‘ось $u''= \mathbb{R}^m \times a \cap V$, P — откр. в $\mathbb{R}^m$, $P = P_1$

6. $\Phi(x) := H(x, 0)$

   $F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$

   Единственность: $(x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$

□

2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$ (случай $k = m$ тривиален)
- $1 \leq r \leq \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность p в $\mathbb{R}^m$: $M \cap U$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие.
2. $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и функции $f_1, f_2 \ldots f_{m-k} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$, все $f_i \in C^r$

   $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \ldots = 0$, при этом $\mathrm{grad} f_1(p) \ldots \mathrm{grad} f_{m-k}(p)$ — ЛНЗ.

Доказательство.

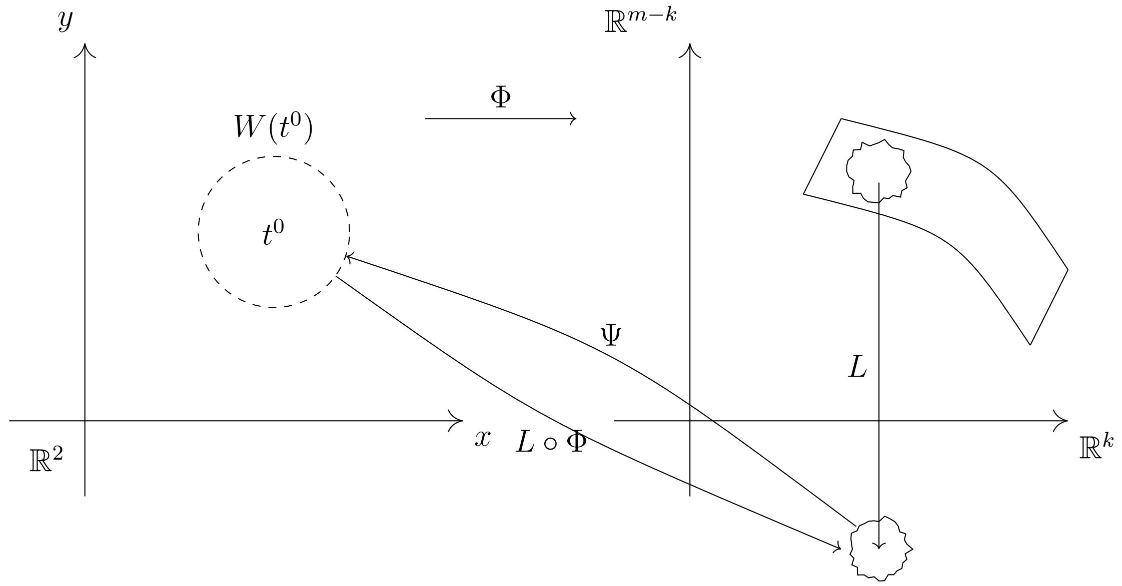
$1 \Rightarrow 2$: Φ — параметризация $O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$\mathrm{rg}\Phi'(t^0) = k$

Пусть $\det \left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1\ldots k} \neq 0$

Пусть $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция на первые k координат: $(x_1 \ldots x_m) \mapsto (x_1 \ldots x_k)$

Тогда $(L \circ \Phi)'$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ локальный диффеоморфизм. Тогда если $W(t^0)$ — окрестность точки t^0, то $L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ — диффеоморфизм.



Множество $\Phi(W)$ — график некоторого отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем $x' \in V$, тогда $(x', U(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ открыто в $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где $\tilde{U}$ открыто в $\mathbb{R}^m$

$\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $f_j : \tilde{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$. Тогда $x \in M \cap \tilde{U}(= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \dots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow$ ЛНЗ

$2 \Rightarrow 1$: $F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$.

Пусть ранг реализуется на последних $m - k$ столбцах, т.е.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$$

$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$ при $x \in U$

По т. о неявном отображении:

$\exists P$ — окр. $(x_1 \dots x_k)$ в $\mathbb{R}^m$

$\exists Q$ — окр. $(x_{k+1} \dots x_m)$ в $\mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H \in C^r : P \to Q : F(x', H(x')) = 0$ для $x' \in P$

Тогда $\Phi : P \to \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k)$

Φ — гомеоморфизм P и $M \cap \tilde{U}, \Phi$ — фактически проекция.

□

2.17 Следствие о двух параметризациях

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие
- $p \in M$
- $\exists$ две параметризации:

  $\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$

  $\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$

Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Psi : O_1 \to O_2$, такой что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

Доказательство.

Частный случай: Пусть $\mathrm{rg}\Phi_1'(t^0), \mathrm{rg}\Phi_2'(s^0)$ достигается на первых k столбцах.

Тогда $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta\text{ — искомый диффеоморфизм}}$

Общий случай: $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$

$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□

2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$

- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k-мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Оно не зависит от Φ.

$\Phi'(t^0)$ — **касательное пространство** к M в точке p, обозначается T_pM.

Доказательство. $\text{rg}\Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации $\Rightarrow$ искомое очевидно. Если взять другую параметризацию Φ_1, то

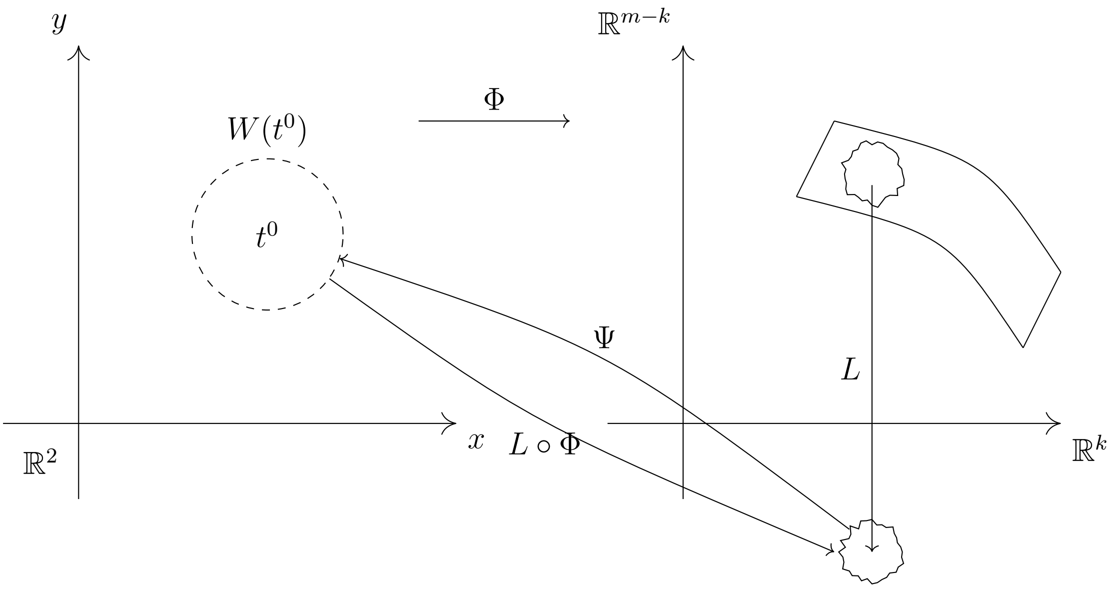
$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi_1'\Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ образ Φ' = образ Φ_1' □

2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M, \gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$



Доказательство. Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'\Psi'L'\gamma'(0) = \Phi'(\gamma(0)) = \Phi'(p) \in T_pM$$

□

2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, y = f(x)$ — поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}$, задается точками (x, y).

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a, b) задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$

$\Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \ldots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит образу Φ'?

$$\Phi'\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \ldots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \ldots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \ldots + \alpha_m f'_{x_m}$ $\square$

$\Phi(x_1 \ldots x_m) = 0$

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$\Phi(a) = 0$

Тогда уравнение касательной к плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

Доказательство. γ — путь в $M : \Phi(\gamma(s)) = 0, \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$. По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору x в касательном пространстве можно сопоставить $\gamma : \gamma'(s) = x$. Поэтому любой касательный вектор от точки a, он должен быть подчинём искомоу отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости Φ в точке a:

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \ldots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + \cancel{o()}$$

Мы игнорируем o, потому что оно скомпенсируется тем, что мы берем не с поверхности Φ, а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение. ☐

2.21 ! Необходимое условие относительного локального экстремума

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\mathrm{rg}\Phi'(a) = n$

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) - \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

В координатах: $\begin{cases} f'_{x_1} - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} - \ldots - \lambda_m(\Phi_m)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} - \ldots - \lambda_m(\Phi_m)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$

Здесь неизвестны $a_1 \ldots a_{m+n}, \lambda_1 \ldots \lambda_n$, поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

Доказательство. $\mathrm{rg}\Phi'(a) = n$. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1} \ldots x_{m+n}$.

Обозначим $y_1 = x_{m+1} \ldots y_n = x_{m+n}$.

$(x_1 \ldots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y)$.

$\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists U(a_x)\ \exists V(a_y)\ \exists \varphi : U(a_x) \to V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация простого гладкого многообразия $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$.

a — точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ — точка локального экстремума функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$, потому что $(x, \varphi(x)) \in U(a)$.

Необходимое свойство экстремума для a_x:

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0 \tag{2}$$

Примечание. Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется a и a_x, но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$$
$$\Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda\Phi'_x + \lambda\Phi'_y \cdot \varphi' = 0 \tag{3}$$

$$f'_x + \lambda\Phi'_x + (f'_y + \lambda\Phi'_y)\varphi' = 0 \tag{2 + 3}$$

Пусть $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$.

Тогда $f'_y + \lambda\Phi'_y = f'_y - f'_y(\Phi'_y(a))^{-1}\Phi'_y(a) = 0$ и $f'_x + \lambda\Phi'_y = 0$ в силу (2 + 3). $\square$

2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

- $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда $||A|| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda$ — собственное число $A^T A\}$

Такое число существует, т.к. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \Rightarrow \langle A^T Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

Доказательство. $\lhd x \in S^{m-1}$.

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симм.}} x, x\rangle$$
$$\max|Ax|^2 = \max\langle A^T Ax, x\rangle = \lambda_{\max}$$

$\square$

2.23 ! Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

- $f_n, f : X \to \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- f_n непрерывна в x_0
- $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Тогда f непрерывна в x_0

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \le \underline{|f(x) - f_n(x)|} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underline{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$ — верно $\forall x, \forall n$

$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$

Берем $\forall \varepsilon > 0$ возьмём любой n, для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые $\le \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для этого n подбираем $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

- X компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство с метрикой ρ.

Доказательство. f_n — фундаментальная в $C(X) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \ (*)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещественная последовательность $(f_n(x_0))$ фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$, тогда f — поточечный предел f_n. Проверим это.

В $(*)$ перейдем к пределу при $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \Rightarrow f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \xrightarrow{\text{сл. из Стокс}} f \in C(X)$$

□

2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f|(b-a) = \rho(f_n, f)(b-a) \to 0$$

□

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

- $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$
- f, f'_y — непр. на $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$

Тогда Φ дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$

Доказательство.

$$\frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int_a^b \frac{f\left(y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \tag{4}$$

$$= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \tag{5}$$

$$= \int_a^b g_n(x, y)dx \tag{6}$$

5: по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow[]{n\to+\infty}\!\!\!\!\!\!\!\!\rightrightarrows f'_y(x, y)$ на $x \in [a, b]$ по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем y фиксированным.

Таким образом, $\Phi'(y) \leftarrow \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \to \int_a^b f'_y(x, y)dx$ □

2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

- $f_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $f_n \to f$ поточечно на $\langle a, b\rangle$
- $f'_n \underset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} \varphi$

Тогда $f \in C^1\langle a, b\rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "D"'] & f \arrow[d, dashed] \\ f'_n \arrow[r, Rightarrow] & \varphi \end{tikzcd}$$

Доказательство. $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b\rangle$:

$$f'_n \overset{[x_0,x_1]}{\rightrightarrows} \varphi \xRightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow{n\to+\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1) - f(x_0) \to \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Тогда $\begin{cases} f \text{ — первообразная } \varphi \\ \varphi \text{ — непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$ □

Дифференцирование функционального ряда?

2.28 ! Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — сх. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in E \;\; c_{n+1} + \ldots c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. □

2.29

2.30 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \forall U, V - \text{векторные поля} \;\; I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

   Доказательство. Очевидно из формулы 1 в определении. □

2. Аддитивность при дроблении пути

   - $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
   - $c \in (a, b)$
   - $\gamma^1 = \gamma\Big|_{[a,c]}$
   - $\gamma^2 = \gamma\Big|_{[c,b]}$

   Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

   Доказательство. Очевидно из линейности интеграла в 1. □

3. Замена параметра

   - $\varphi : [p, q] \to [a, b]$
   - $\varphi \in C^1$
   - $\varphi(p) = a$
   - $\varphi(q) = b$

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Тогда $I(V, \varphi) = I(V, \tilde{\varphi})$

Доказательство. Это замена переменной в интеграле.

$$\begin{aligned} I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s)\rangle ds \\ &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(\varphi(s))\rangle \varphi'(s) ds \\ t := \varphi(s) & \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \tilde{\gamma}'(t)\rangle dt \\ &= I(V, \gamma) \end{aligned}$$

□

Примечание. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \to \mathbb{R}^m$ — то же самое

По теореме о двух параметризациях: $\exists$ диффеоморфизм $\varphi : [p, q] \to [a, b]$ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей

   - $\gamma^1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$
   - $\gamma^2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$
   - $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

   Зададим путь $\gamma = \gamma^2\gamma^1 : [a, b + d - c] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b + d - c] \end{cases}$

   В точке b возможен излом, т.е. нет $\gamma'(b)$, но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

   Если γ^1, γ^2 — кусочно-гладкие, то γ — кусочно-гладкое.

   Тогда $I(V, \gamma^2\gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
I(V,\gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
\tau := t - b + c \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1\prime}(t)\rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2\prime}(\tau)\rangle d\tau \\
&= I(V,\gamma^1) + I(V,\gamma^2)
\end{aligned}
$$

$\square$

5. Противоположный путь

   $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto= \gamma(a+b-t)$, т.е. мы идём от b к a, а не наоборот.

   Тогда $I(V,\gamma) = -I(V,\gamma^-)$

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
I(V,\gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a+b-\tau)), -\gamma'(a+b-\tau)\rangle d\tau \\
t := a + b - \tau \\
&= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t)\rangle (-dt) \\
&= -I(V,\gamma)
\end{aligned}
$$

$\square$

6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$
|I(V,\gamma)| \le \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)
$$

   , где $L = \gamma[a,b]$ — носитель пути.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt\right| &\le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle|\,dt\\ &\le \int_a^b |V(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \qquad (7)\\ &\le \sup_{x\in L}|V(x)|\int_a^b|\gamma'(t)|dt\\ &\le \max_{x\in L}|V(x)|\int_a^b|\gamma'(t)|dt \qquad (8)\\ &\le \max_{x\in L}|V(x)|l(\gamma)dt\end{aligned}$$

7: Неравенство Коши-Буняковского

8: V — непр., L — компакт $\Rightarrow$ sup достигается □

2.31 ! Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- V — потенциально
- f — потенциал V
- $\gamma[a,b] \to O$
- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_\gamma \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. γ — гладкий

   $\Phi(t) = f(\gamma(t))$

$$\begin{aligned}\Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma_m'(t)\\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\\ &= \langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t)dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

2. γ — кусочно-гладкий

   $\exists$ дробление: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b : \gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum v_k dx_k &= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \varphi'(t)\rangle dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \qquad (9) \\ &= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

   9: по пункту 1.

□