

Упражнение 1. Доказать, что остаток квадрата нечётного числа на 8 равен 1.

Решение.

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$$

Либо $n \equiv 0 \pmod{2}$, либо $n + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 4n(n + 1) \equiv 0 \pmod{2}$. Тогда $4n(n + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{2}$. \square

Упражнение 2. Доказать, что $n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ делится на 5.

Решение.

Случай 1: $n \equiv 0 \pmod{5}$

Очевидно.

Случай 2: $n \equiv 1 \pmod{5}$

$$n^2 + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

Случай 3: $n \equiv 2 \pmod{5}$

$$n^2 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

Случай 4: $n \equiv 3 \pmod{5}$

$$n^2 + 1 \equiv 9 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

Случай 5: $n \equiv 4 \pmod{5}$

$$n^2 + 4 \equiv 16 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

\square

Упражнение 3. Найти все натуральные n для которых $n^2 + 1 \vdots n + 1$

Решение. Очевидно для $n = 0$ и $n = 1$ искомое верно. $\forall n > 1$.

$$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \vdots n + 1 \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n + 1} \Rightarrow n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{n + 1}$$

Для $n > 1$ выполнено $2 \not\equiv 0 \pmod{n + 1}$, таким образом ответ $n = 0$ и $n = 1$. \square

Упражнение 4. Доказать, что $n^9 + 17n^3 - 18$ делится на 3.

Решение. Случай 1: $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv -18 \equiv 0 \pmod{3}$$

Случай 2: $n \equiv 1 \pmod{3}$

$$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv 1 + 17 - 18 \equiv 0 \pmod{3}$$

Случай 3: $n \equiv 2 \pmod{3}$

$$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv 512 + 136 - 18 \equiv 630 \equiv 0 \pmod{3}$$

□

Упражнение 5. Доказать, что $5ab$ делится на 45, если $a^6 + b^6$ делится на 3.

Решение. $5ab : 45 \Leftrightarrow ab : 9$

a	$a^6 \pmod{3}$
0	0
1	1
2	1

Случай 1: $a \equiv 0 \pmod{3}$

$$\text{Тогда } b^6 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a = 3k, b = 3l \Rightarrow ab = 9l : 9$$

Случай 2: $a \equiv 1 \pmod{3}$

Тогда $b^6 \equiv 2 \pmod{3}$, но $\nexists b$. Таким образом, $a \not\equiv \pmod{3}$.

Случай 3: $a \equiv 2 \pmod{3}$

Тогда $b^6 \equiv -a^6 \equiv 2 \pmod{3}$, см. случай 2.

□