1 Избыточное кодирование

Избыточное кодирование позволяет восстановить информацию, даже если часть кода была потеряна.
В избыточном кодировании обычно используют код фиксированной длины, так как код переменной длины сделать избыточным крайне сложно.
$c : \Sigma \to \mathbb{B}^k$

Определение. Расстояние Хемминга
x, y — строки одинаковой длины.
$H(x, y) = |\{i \mid x[i] \neq y[i]\}|$
$H(001001, 111000) = 3$

Определение. c **обнаруживает** d ошибок, если $\forall a, b \in \Sigma, a \neq b \;\; H(c(a), c(b)) > d$

Определение. c **исправляет** d ошибок, если $\forall a, b \in \Sigma, a \neq b \;\; H(c(a), c(b)) > 2d$

Определение. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ — **расстояние**, если ρ удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Лемма 1. *H — расстояние.*

c — исправляет d ошибок, тогда $x = c(a), x \mapsto y$, изменив $\leq d$ битов.

Лемма 2. *$\forall d, \forall \Sigma \;\; \exists$ код, исправляющий d ошибок.*

Доказательство. $|\Sigma| = n$
$k : 2^k \geq n$
$\lessdot c_1(a) =$ строка длины k, соответствующая номеру a в алфавите Σ
$\lessdot c(a) = c_1(a)c_1(a)\ldots c_1(a)$, всего $2\alpha + 1$ раз.
Этот код исправляет d ошибок, почему — хз. Не откажусь от доказательства. □

Определение. **Шаром** радиуса r с центром x называется $B_r(x) = \{y | \rho(x, y) \leq r\}$

Определение. **Булевым шаром** называется шар, в котором $x, y \in \mathbb{B}^n$

Определение. Объем булева шара — число векторов, которые в нем содержатся.

$|B_r(x)| = 1 + n + C_n^2 + \ldots + C_n^r = \sum\limits_{i=0}^{r} C_n^i$

Лемма 3. *Если код c обнаруживает d ошибок, то шары радиуса d с центрами в кодовых словах не содержат других кодовых слов.*

Лемма 4. *Если код c исправляет d ошибок, то шары радиуса d с центрами в кодовых словах не пересекаются.*

Теорема 1. Граница Хемминга
Для Σ, содержащего s символов, построен код $c : \Sigma \to \mathbb{B}^n$, исправляющий d ошибок.
Тогда

$$2^n \geq s \sum_{i=0}^{d} C_n^i$$

, в частности для $d = 1 \quad 2^n \geq s(n+1)$

1.1 Код Хэмминга *(оптимальное кодирование для $d = 1$)*

$s = 2^k$
Занумеруем все биты от 1 до n.
Все биты либо контрольные, либо информационные. Возьмём 2^i-тые биты как контрольные, остальные — информационные. Всего берём столько битов, чтобы набралось k информационных битов.
Например для $k = 7 : cci_1ci_2i_3i_4ci_5i_6i_7$. Ассимптотически контрольных битов log.
Контрольный бит с номером 2^i задается так, чтобы $\bigoplus\limits_{\substack{j=1\dots n \\ j\&2^i\neq 0}} x[j] = 0$

Проверка смотрит, что нужный $\oplus = 0$. Все i, для которых это не выполняется, суммируются. Бит на полученной позиции был потерян, его нужно поменять.

Теорема 2. Код Хэмминга исправляет одну ошибку.

Доказательство. Докажем, что $\forall a, b \in \Sigma, a \neq b \;\; H(c(a), c(b)) > 2$
Рассмотрим строку с одним различающимся разрядом j. Тогда различаются хотя бы два контрольных бита, т.к. в двоичном представлении j есть хотя бы две единицы.
Рассмотрим строку с двумя различающимся разрядами j и k. Тогда различается хотя бы один контрольный бит, хз почему. □

Найдём ассимптотику.
Пусть всего есть n бит, взяли $\log n$ контрольных и $n - \log n$ информационных.

$$S \sim 2^{n - \log n} \sim \frac{2^n}{n}$$

Определение. **Линейный код** $c(a) \oplus c(b) = c(p)$

Лемма 5. $H(x \oplus z, y \oplus z) = H(x, y)$

$H(c(a), c(b)) = H(c(a) \oplus c(a), c(a) \oplus c(b)) = H(0, c(p)) = \omega(c(p))$

Лемма 6. *Код Хемминга — линейный*