## Домашнее задание №4: «просто-типизированное лямбда исчисление»

1. Сформулируйте аксиомы для просто типизированного исчисления по Чёрчу. Указание: аксиомы должны быть согласованы с типами аргументов лямбда-абстракций.

Решение.

(a) 
$$\overline{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$$

(b) 
$$\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A B : \tau}$$

(c) 
$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^{\tau}.A : \tau \to \sigma}$$

2. Рассмотрим типизацию по Чёрчу. Определим стирающее преобразование  $|\cdot|:\Lambda\to\Lambda_{\mathtt{q}}$ :

$$|A| = \begin{cases} \alpha, & A = \alpha \\ |P||Q|, & A = PQ \\ \lambda x.|P|, & A = \lambda x^{\tau}.P \end{cases}$$

Верно ли следующее: если  $P \to_{\beta} Q$  и |P'| = P, |Q'| = Q, то  $P' \to_{\beta} Q'$ .

Решение. Кажется, преобразование  $|\cdot|:\Lambda_{\mathtt{u}} \to \Lambda_{\mathtt{k}}.$ 

Нет. Пусть  $Q'=\lambda x^{\tau}.x, P'=\lambda x^{\sigma}.(\lambda x^{\sigma}.x)\ x.\ |Q'|\equiv \lambda x.x, |P'|\equiv \lambda x.(\lambda x.x)\ x$ , тогда  $|P'|\to_{\beta}\lambda x.x\equiv |Q'|$ . Но  $P'\not\to_{\beta}Q'$ , т.к. единственный возможный шаг это  $P'\to_{\beta}\lambda x^{\sigma}.x\not=_{\alpha}\lambda x^{\tau}.x$ 

Иначе переберём как было сделано  $P \to_{\beta} Q$ :

- (a)  $P\equiv A\ B, Q=C\ D$  и либо  $A\to_{\beta} C$  и  $B=_{\alpha} D$  либо  $A=_{\alpha} C$  и  $B\to_{\beta} D.$  Тогда индукция даёт  $P'\equiv A'\ B'$
- 3. Покажите, что если  $A=_{\alpha} B$  и  $\Gamma \vdash A: \tau$ , то  $\Gamma \vdash B: \tau$  (или, иными словами, доказательство не зависит от выбора пред-лямбда-терма).

Решение.

(a)  $A \equiv x, B \equiv x$ . Тогда искомое очевидно.

(b) 
$$A \equiv P \ Q, B \equiv R \ S, P =_{\alpha} R, Q =_{\alpha} S$$
 — индукция:

M3\*37y2019 5.10.2021

 $\Gamma \vdash P\ Q:\tau$ , тогда  $\Gamma \vdash P:\sigma \to \tau, \Gamma \vdash Q:\sigma$ . По индукционному предположению будет  $\Gamma \vdash R:\sigma \to \tau, \Gamma \vdash S:\sigma$  и следовательно по второму правилу вывода искомое верно.

(c)  $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda y.Q$  и существует t — новая переменная, такая что  $P[x \coloneqq t] =_{\alpha} Q[y \coloneqq t]$  — опять индукция:

 $\Gamma \vdash \lambda x.P: \tau \to \sigma$ , тогда  $\Gamma, x: \tau \vdash P: \sigma$ , но тогда и  $\Gamma, t: \tau \vdash P[x:=t]: \sigma$ , т.к. это просто переименование и следовательно  $\Gamma, t: \tau \vdash Q[y:=t]: \sigma$  по индукционному предположению. Опять же  $\Gamma, y: \tau \vdash Q: \sigma$  и тогда по правилу вывода  $\Gamma \vdash \lambda y.Q: \tau \to \sigma$ .

M3\*37y2019 5.10.2021