

## Несколько классических неравенств

### 1. Неравенство Йенсена

$f$  — выпуклая на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

$$\forall x_1 \dots x_n \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \geq 0 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

*Доказательство.* Для  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  тривиально.

Покажем, что  $x^* := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in \langle a, b \rangle$ :

$$\min x_i \leq x^* \leq (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \max(x_i) = \max(x_i) \Rightarrow x^* \in \langle a, b \rangle$$

В  $x^*$  можно провести опорную прямую  $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = \sum_{i=1}^n (\alpha_i kx_i) + b = \sum_{i=1}^n \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

□

*Следствие.* Неравенство Коши.

$$a_i > 0 \quad \frac{1}{n} \sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

*Доказательство.*  $f(x) = \ln x$  — вогн.,  $\alpha_i = \frac{1}{n}$ , по неравенству Йенсена:

$$\ln \left( \frac{1}{n} a_1 + \dots + \frac{1}{n} a_n \right) \geq \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

$$\ln \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n)$$

$$\ln \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \geq \ln(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

□

## 2. Интегральное неравенство Йенсена

- $f$  — выпуклая на  $\langle A, B \rangle$
- $\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$  — непрерывная
- $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  — непрерывная (для кусочно-непрерывной тоже верно)
- $\int_a^b \lambda(t) dt = 1$

Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt\right) \leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt$$

Доказательство.  $m := \inf \varphi, M := \sup \varphi$

$$m \leq m \int_a^b \lambda(t) \leq \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) \leq M \int_a^b \lambda(t) = M$$

$$x^* := \int_a^b \lambda(t) \varphi(t) dt \Rightarrow x^* \in \langle A, B \rangle$$

Для  $m = M$  тривиально.

$y = kx + b$  — опорная прямая в точке  $x^*$  графика  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x^*) &= kx^* + b = k \int_a^b \lambda \varphi + b \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(t) (k\varphi(t) + b) dt \leq \\ &\leq \int_a^b \lambda(t) f(\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

□

Пример. Неравенство Коши для интегралов:

$$f > 0, f \in C[a, b] \quad \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Правая часть — среднее значение  $f$  на  $[a, b]$ , похоже на среднее арифметическое, если рассмотреть интегральную сумму:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f \approx \frac{1}{b-a} \sum \frac{1}{n} f(x_i)$$

Аналогично левая часть  $\approx$  среднее геометрическое:

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx\right) \approx \exp\left(\sum \frac{1}{n} \ln f(x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\ln(f(x_i))}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x_1) \cdots f(x_n)}$$

Возьмём логарифм от искомого неравенства:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \leq \ln \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

Подставим в интегральное неравенство Йенсена:

- $f \leftrightarrow \ln$
- $\lambda(t) \leftrightarrow \frac{1}{b-a}$
- $\varphi \leftrightarrow f$

### 3. Неравенство Гёльдера

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Частный случай при  $p = q = 2$  — неравенство Коши-Буняковского.

*Доказательство.*  $f(x) = x^p, (p > 1)$  — строго выпуклая, т.к.  $f'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По Йенсену  $(\sum \alpha_i x_i)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$

$$\alpha_i := \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} \quad x_i := a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \left( \sum b_j^q \right)$$

$$\text{Левая часть}^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i b_i^{\frac{-1}{p-1}} \sum b_j^q \right) = \sum a_i b_i^{q - \frac{1}{p-1}} = \sum a_i b_i$$

$$\begin{aligned} \text{Правая часть} &= \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i^p b_i^{\frac{-p}{p-1}} \left( \sum b_j^q \right)^p = \sum \frac{b_i^q}{\sum b_j^q} a_i^p b_i^{-q} \left( \sum b_j^q \right)^p = \\ &= \left( \sum a_i^p \right) \left( \sum b_j^q \right)^{p-1} = \left( \sum a_i^p \right) \left( \sum b_j^q \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

$$\text{Правая часть}^{\frac{1}{p}} = \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Общий вид:  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum a_i b_i \right| \leq \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

#### 4. Интегральное неравенство Гёльдера

$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   $f, g \in C[a, b]$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство КБШ в пространстве функций — частный случай этого неравенства.

*Доказательство.* По интегральным суммам:

$$x_i := a + i \frac{b-a}{n} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad a_i := f(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{p}} \quad b_i = g(x_i)(\Delta x_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_i b_i = f(x_i)g(x_i)(\Delta x_i)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x_i \right| \leq \left( \sum |f(x_i)|^p \Delta x_i \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |g(x_i)|^q \Delta x_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

Предельный переход доказывает искомое. □

#### 5. Неравенство Минковского

$p \geq 1, a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это неравенство треугольника для нормы  $\|a\|_p = \left( \sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

*Доказательство.*  $p = 1$  тривиально,  $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$

Докажем для положительных  $a_i, b_i$ , другие случаи сводятся к этому.

По неравенству Гёльдера для  $q = p/(p-1)$ :

$$\sum a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum (a_i + b_i)^p \leq \left( \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left( \sum (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

□

## 6. Интегральное неравенство Минковского

$f, g \in C[a, b], p \geq 1$

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Оставлено как упражнение читателю.

□

### Теорема 1. Признак Коши

$a_n \geq 0, K_n := \sqrt[p]{a_n}$ . Тогда:

Lite:

1. Если  $\exists q < 1 : K_n \leq q$ , начиная с некоторого места (НСМ)  $(\exists N : \forall n > N) \Rightarrow \sum a_n$  сходится.
2.  $K_n \geq 1$  для бесконечного множества  $n \Rightarrow \sum a_n$  расходится.

Pro:  $K := \overline{\lim} K_n$

1.  $K < 1 \Rightarrow \sum a_n$  сходится
2.  $K > 1 \Rightarrow \sum a_n$  расходится

*Доказательство.* Lite:

1. НСМ  $\sqrt[p]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n, \sum q^n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$
2.  $\sqrt[p]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

Pro:

1. По техническому описанию  $\overline{\lim} \exists N \forall n > N K_n < q \Rightarrow$  по Lite.1 сходится.
2.  $l = \overline{\lim} K_n > 1, 1 = l - \varepsilon$ . Тогда  $K_n \geq 1$  для бесконечного множества  $n \Rightarrow$  по Lite.2 расходится.

□

**Теорема 2.** Признак Даламбера.

$$a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Lite:

$$1. \exists q < 1 : D_n < q \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. D_n \geq 1 \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$$

Pro:  $D := \lim D_n$

$$1. D < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. D > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$$

Доказательство. Lite:

$$1. \exists N : \frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots$$

$$\frac{a_n}{a_N} < q^{n-N}$$

$$a_n < q^n \left( \frac{a_N}{q^N} \right)$$

$$\sum q^n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. D_n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n, \text{ при } n > N \ a_n \geq a_N \Rightarrow a_n \geq A_N \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0. \text{ Также можно аналогично пункту 1.}$$

Pro:

$$1. q := \frac{1+D}{2}. \text{ По определению предела } \varepsilon := q - D \ \exists N \ \forall n > N \ D_n < q \xrightarrow{\text{Lite1}} \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. \varepsilon := D - 1 \ \exists N \ \forall n > N \ D_n > 1 \xrightarrow{\text{Lite2}} \sum a_n \text{ расх.}$$

□

**Лемма 1.**  $a_n, b_n > 0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ НСНМ.}$

Тогда:

$$1. \sum b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$$

$$2. \sum a_n \text{ расх.} \Rightarrow \sum b_n \text{ расх.}$$

Доказательство. Будем игнорировать “НСНМ”

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \quad \dots$$

$$a_n \leq b_n \frac{a_1}{b_1}$$

По признаку сравнения все работает.  $\square$

### Теорема 3. Признак Раабе

$a_n > 0, R_n := n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ . Тогда:

1.  $\exists r > 1 \ R_n \geq r \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх.}$

2.  $R_n \leq 1 \text{ НСНМ} \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

### Еще следствие

*Доказательство.* 1.  $R_n \geq r \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}$$

$$b_n := \frac{1}{n^s} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{r}{n}} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$\sum b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ сх. по лемме 1.}$

2.  $R_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$b_n = \frac{1}{n} \text{ расх.} \Rightarrow \sum a_n \text{ расх.}$

$\square$