

Упражнение 1. Всякий ли элемент в S_3 является простым циклом? В S_4 ?

Решение. В S_3 — да, что проверяется перебором:

Перестановка	$a_1 \dots a_k$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	\emptyset
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	2, 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1, 2
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	1, 2, 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	1, 2, 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	1, 2, 3

В S_4 — нет, т.к. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ нельзя представить в виде простого цикла — на все элементы она действует не тождественно ($\forall x \ g(x) \neq x$), следовательно все элементы $\{1 \dots n\}$ в этом цикле. Пусть¹ $1 = a_1$, тогда $a_2 = 2$, тогда a_4 это либо 3, либо 4, но ни для одного из них не верно $g(x) = 1$. \square

Упражнение 2. Рассмотрим все $g \in S_4$, которые являются простыми циклами. Какие значения может принимать порядок g ?

Решение.

¹ Так можно говорить, т.к. $a_1 \dots a_k$ можно циклически сдвинуть без потери общности.

Порядок	Пример перестановки с таким порядком
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Утверждение. Элементов с порядком > 4 нет.

Proof. Рассмотрим a_i . Оно отображается в себя же за максимум последовательных 4 шага g , т.к. так работает цикл. \square

Ответ: $\{1, 2, 3, 4\}$ \square

Упражнение 3. Показать, что любой элемент $\rho \in S_4$ представим в виде произведения независимых простых циклов:

$$\rho = g_1 \cdots g_k$$

Решение. Предположим обратное, что есть $\rho \in S_4$, не представимый искомым образом. Пусть $a_1 = 1, a_2 = \rho(a_1)$.

Если $a_2 = a_1$, то ρ действует тождественно на первый элемент и тогда группа G всех таких ρ изоморфна S_3 , а все элементы S_3 — простые циклы, следовательно ρ есть простой цикл.

Рассмотрим случай $a_1 \neq a_2$. Пусть $a_3 = \rho(a_2)$. $a_3 \neq a_2$, т.к. иначе ρ не биективно. Если $a_3 = a_1$, то ρ действует как простой цикл длины 2 на элементы $\{a_1, a_2\}$. Группа всех таких ρ изоморфна S_2 , т.к. осталось 2 не использованных элемента, а все элементы S_2 — простые циклы (перебор).

Рассмотрим случай $a_3 \neq a_1$. Пусть $a_4 = \rho(a_3)$. $a_4 \neq a_3$ и $a_4 \neq a_2$ по соображениям выше. Если $a_4 = a_1$, то ρ — цикл длины 3 на элементах $\{a_1, a_2, a_3\}$ и на оставшийся элемент не может не подействовать тривиально. Если $a_4 \neq a_1$, то $a_5 = \rho(a_4)$. По соображениям выше $a_5 \notin \{a_2, a_3, a_4\}$, следовательно $a_5 = a_1$ и ρ — цикл длины 4.

Альтернативное доказательство: перебор.

ρ	Представление ρ в виде произведения простых циклов
--------	---

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 \hline
 \end{array}$$

□

Упражнение 4. Показать, что если $g, h \in S_n$ — независимые простые циклы, то они коммутируют. Что можно сказать об обратном? (если g, h — коммутирующие простые циклы, то ...)

Решение.

Утверждение. Если $g(x) \neq x$, то $h(g(x)) = g(x)$.

Proof. $g(g(x)) \neq g(x)$ по биективности g .

□

$$\begin{aligned}
 g(h(x)) &= \begin{cases} g(x), & g(x) \neq x \\ h(x), & h(x) \neq x \\ x, & h(x) = g(x) = x \end{cases} \\
 h(g(x)) &= \begin{cases} g(x), & g(x) \neq x \\ h(x), & h(x) \neq x \\ x, & h(x) = g(x) = x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Итого $gh = hg$.

Если g, h — коммутирующие простые циклы, то они не обязательно независимы. Например, если $g = h$: $gg = gg$, но g зависит от себя (если это не тривиальный цикл). Также можно построить случай с $g \neq h$. Пусть дано g с $\{a_i\}_{i=1}^n$. Тогда пусть $h(a_i) = \begin{cases} a_{i-1}, & i > 1 \\ a_n, & i = 1 \end{cases}$ □