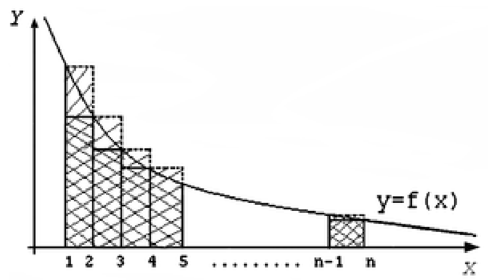
Теорема 1. Интегральный признак Коши.

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ монотонно убывает, $f \geq 0$, f непр.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится/расходится одновременно.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \Delta_n$$



Δ_n — площадь криволинейных треугольников, получаемых отсечением кривой $y = f(x)$.

$$0 \leq \Delta_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$$

$\Delta_n \uparrow \Rightarrow \exists$ кон. $\lim \Delta_n$

Более формальный вариант, без картинок:

$$\sum_{k=1}^{n} - \int_1^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right)$$

Т.к. $f \downarrow$:

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1)$$

□

Пример. $\sum \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$

Способы:

1. “Удавить логарифм”

2. Покажем, что $\frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ монотонна НСНМ:

$$f' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta \ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} \Rightarrow f' < 0 \text{ НСНМ}$$

   Перейдем к интегралу:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

   - $\alpha > 1$ сходится
   - $\alpha < 1$ расходится
   - $\alpha = 1$:
     - $\beta > 1$ сходится
     - $\beta \le 1$ расходится

   По другим признакам сходимость ряда нельзя выяснить.

Определение. Ряд A **абсолютно сходится**, если 1 и 2:

1. $\sum a_n$ сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.

Пример.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Возьмём интеграл на $[0, 1]$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \frac{(-1)^n}{2n+1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx}_{\Delta_n}$$

Устремим $n \to +\infty$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Таким образом, мы посчитали сумму ряда, это ряд Лейбница. По модулю этот ряд не сходится.

Теорема 2. $\sum a_n, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\sum a_n$ абс. сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.
3. Оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сх.

Сходимость рядов со слагаемыми произвольного знака

Теорема 3. Признак Лейбница.

$c_n \geq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \ldots, c_n \to 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n$ сх.

Доказательство.

$$S_{2N} = c_1 - c_2 + \ldots + c_{2N-1} - c_{2N}$$

$$S_{2N+2} = S_{2N} + \underbrace{(c_{2N+1} - c_{2N+2})}_{\geq 0} \geq S_{2N} \Rightarrow S_{2N} \uparrow$$

$$S_{2N} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_3 - c_4)}_{\geq 0} - \ldots - c_{2N} \leq c_1$$

$$\left.\begin{matrix} S_{2N} \uparrow \\ S_{2N} \leq c_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{N \to +\infty} S_{2N} \in \mathbb{R}$$

$$S_{2N+1} = \underbrace{S_{2N}}_{\to l \in \mathbb{R}} + \underbrace{c_{2N+1}}_{\to 0} \Rightarrow S_{2N+1} \to l \Rightarrow S_N \to l$$

$\square$

Примечание. Секретное приложение к признаку Лейбница.

В условиях признака Лейбница:

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} C_n \right| \leq |C_n|$$

Пример.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

Не монотонно.

Для незнакостабильных рядов признак эквивалентности не работает.

Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$

1. Структуры в $\mathbb{R}^m$

- Линейное пространство $x = (x_1 \dots x_m), x_i \in \mathbb{R}$. Строка/столбец — не важно.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\rho(x, y) := |x - y|$$

- Окрестности, шар

  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар, r-окрестность точки a

  a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

  D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

  a — **предельная точка** множества D, если $\forall \dot{U}(a) \;\; \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$

  D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

  Замыканием множества D называется $\overline{D} = D \cup$(множество предельных точек D)

- Сходимость, предел

  $\lhd x_n$ — посл. в $\mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^m$

$$x_n \to a \Leftrightarrow \forall U(a) \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n \in U(a)$$

  Норма и скалярное произведение сохраняют сходимость:

$$x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle, |x_n| \to |a|$$

  Сходимость функций:

  $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

  a — предельная точка O, $L \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

То же самое, но по Гейне:

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \in O \subset \mathbb{R}^m \\ x_k \to a \\ \forall k \;\; x_k \neq a \end{cases} \qquad f(x_k) \xRightarrow[k\to+\infty]{} L$$

Покоординатная сходимость:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i : 1 \le i \le n : \lim_{x\to a} f(x)_i = L_i$$

$$x_k \to a \Leftrightarrow \forall i : 1 \le i \le m : x_i^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} a_i$$

- Компактность

  Параллелепипед $[a,b] = \{x : \forall i : 1 \le i \le m \quad a_i \le x_i \le b_i\}$

  K **компактно**, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} \underbrace{G_\alpha}_{\text{откр.}} \Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

  В $\mathbb{R}^m$ комп. $\Leftrightarrow$ замкн. и огр.

  Секвенциальная компактность: $\forall (x_n), x_n \in K \Rightarrow \exists n_k, a \in K : x_{n_k} \to a$

  Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: если в $\mathbb{R}^m$ (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

$$\lim_{y\to 0, x\to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0} -1$$
$$= \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim 1 = 1$$

Получили противоречие. Что мы сделали не так?

Определение. $\lhd F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, то $F_1(x) \ldots F_m(x)$ — **координатные функции** отображения F

Определение. $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — пр. точка D_1, b — пр. точка D_2

$(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \subset D \quad f : D \to \mathbb{R}$

$\forall x \in D_1 \setminus \{a\}$ $\exists$ кон. $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$

Если $\exists \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ — это **повторный предел**.

Как предел в метрическом пространстве:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \Leftrightarrow \forall w(A) \;\; \exists U(a), V(b) \;\; \forall (x,y) \in U(a) \times V(b) \quad f(x,y) \in W(A)$$

Двойной предел:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A \Leftrightarrow \forall W(A)\ \ \exists U(a), V(b)\ \ \forall x \in \dot{U}(a), \forall y \in \dot{V}(b) \quad f(x,y) \in W(A)$$

Примечание. $(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) = D$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f$$

Теорема 4. О повторных пределах

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — пр. точка D_1, b — пр. точка D_2

$D = (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \quad f : D \to \mathbb{R}$

Пусть:

1. $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\forall x \in D_1 \setminus \{a\}\ \ \exists$ кон. $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D_1\ \ |x-a| < \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall y \in D_2\ \ |y-b| < \delta$$

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon \xrightarrow[y\to b]{} |\varphi(x) - A| \le \varepsilon$$

□

Пример. $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus (\{\text{ось } Ox\} \cup \{\text{ось } Oy\})$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x+y)}_{\text{б.м.}} \underbrace{\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}}_{\text{огр.}} = 0$$

$$\varphi(x) = \lim_{y\to 0} \underbrace{(x+y)}_{\to x} \sin\frac{1}{x} \underbrace{\sin\frac{1}{y}}_{\nexists \lim}$$

Загадка:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim 0 = 0$$

По теореме если предел $\exists$, то он $= 0$. Но существует ли он?