

Домашнее задание №4: «просто-типизированное лямбда исчисление»

1. Сформулируйте аксиомы для просто типизированного исчисления по Чёрчу. *Указание:* аксиомы должны быть согласованы с типами аргументов лямбда-абстракций.

Решение.

- (a) $\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$
 (b) $\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A B : \tau}$
 (c) $\frac{\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^\tau. A : \tau \rightarrow \sigma}$

□

2. Рассмотрим типизацию по Чёрчу. Определим стирающее преобразование $|\cdot| : \Lambda \rightarrow \Lambda_q$:

$$|A| = \begin{cases} \alpha, & A = \alpha \\ |P||Q|, & A = PQ \\ \lambda x. |P|, & A = \lambda x^\tau. P \end{cases}$$

Верно ли следующее: если $P \rightarrow_\beta Q$ и $|P'| = P, |Q'| = Q$, то $P' \rightarrow_\beta Q'$.

Решение. Кажется, преобразование $|\cdot| : \Lambda \rightarrow \Lambda$.

Нет. Пусть $Q' = \lambda x^\tau. x, P' = \lambda x^\sigma. (\lambda x^\sigma. x) x$. $|Q'| \equiv \lambda x. x, |P'| \equiv \lambda x. (\lambda x. x) x$, тогда $|P'| \rightarrow_\beta \lambda x. x \equiv |Q'|$. Но $P' \not\rightarrow_\beta Q'$, т.к. единственный возможный шаг это $P' \rightarrow_\beta \lambda x^\sigma. x \neq_\alpha \lambda x^\tau. x$

Иначе переберём как было сделано $P \rightarrow_\beta Q$:

- (a) $P \equiv A B, Q = C D$ и либо $A \rightarrow_\beta C$ и $B =_\alpha D$ либо $A =_\alpha C$ и $B \rightarrow_\beta D$. Тогда индукция даёт $P' \equiv A' B'$

□

3. Покажите, что если $A =_\alpha B$ и $\Gamma \vdash A : \tau$, то $\Gamma \vdash B : \tau$ (или, иными словами, доказательство не зависит от выбора пред-лямбда-терма).

Решение.

- (a) $A \equiv x, B \equiv x$. Тогда искомое очевидно.

(b) $A \equiv P Q, B \equiv R S, P =_{\alpha} R, Q =_{\alpha} S$ — индукция:

$\Gamma \vdash P Q : \tau$, тогда $\Gamma \vdash P : \sigma \rightarrow \tau, \Gamma \vdash Q : \sigma$. По индукционному предположению будет $\Gamma \vdash R : \sigma \rightarrow \tau, \Gamma \vdash S : \sigma$ и следовательно по второму правилу вывода искомое верно.

(c) $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda y.Q$ и существует t — новая переменная, такая что $P[x := t] =_{\alpha} Q[y := t]$ — опять индукция:

$\Gamma \vdash \lambda x.P : \tau \rightarrow \sigma$, тогда $\Gamma, x : \tau \vdash P : \sigma$, но тогда и $\Gamma, t : \tau \vdash P[x := t] : \sigma$, т.к. это просто переименование и следовательно $\Gamma, t : \tau \vdash Q[y := t] : \sigma$ по индукционному предположению. Опять же $\Gamma, y : \tau \vdash Q : \sigma$ и тогда по правилу вывода $\Gamma \vdash \lambda y.Q : \tau \rightarrow \sigma$.

□