1 Пространство элементарных исходов. Случайные события. Операции над событиями.

1.1 Пространство элементарных исходов. Случайные события.

Определение.

- **Пространством элементарных исходов** Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного эксперимента, из которых при испытании происходит ровно один.
- Элементы данного множества называются **элементарными исходами** и обозначаются $w \in \Omega$.
- **Случайными событиями** называются подмножества $A \subset \Omega$.
- Событие A **наступило**, если в ходе эксперимента произошёл один из элементарных исходов, входящих в A.
- Такие исходы называются **благоприятными** к A.

Пример.

1. Бросают монетку. $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$ *(герб, решка).*
2. Бросают кубик. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A — выпало четное число очков. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$.
3. Монета бросается дважды:
   (a) Учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{ГР}, \text{РГ}\}$
   (b) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{ГР}\}$
4. Бросается дважды кубик, порядок учитывается. A — разность очков делится на 3, т.е. $A = \{(1, 4), (4, 1), (3, 3), (5, 2), (2, 5), (3, 6), (6, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
5. Монета бросается до выпадения герба. $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \ldots\}$ — счётное число исходов.
6. Монета бросается на плоскость. $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ — несчётное число исходов.

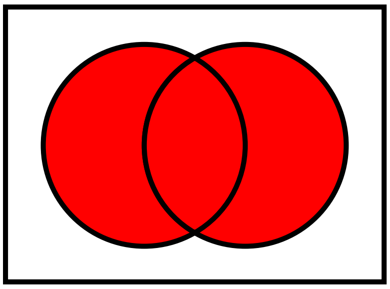
1.2 Операции над событиями

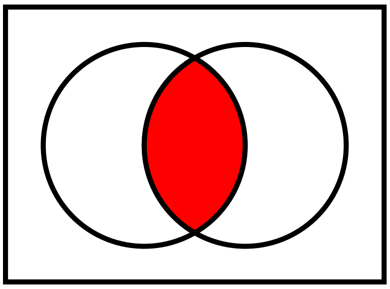
Ω — универсальное *(достоверное)* событие, т.к. содержит все элементарные исходы.

$\varnothing$ — невозможное событие.

Определение. $A + B$ это $A \cup B$

Определение. $A \cdot B$ это $A \cap B$





Определение. **Противоположным** к A называется событие $\overline{A}$, соответствующее тому, что A не произошло, т.е. $\Omega \setminus A$

Определение. Дополнение $A \setminus B$ это $A \cdot \overline{B}$

Определение. События A и B называются **несовместными**, если $A \cdot B = \varnothing$

Определение. Событие A влечет событие B, если $A \subset B$.

2 Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.

2.1 Статистическое определение вероятности

Определение. Пусть проводится n реальных экспериментов, событие A произошло в n_A экспериментах. Отношение $\frac{n_A}{n}$ называется **частотой события** A. Эксперименты показывают, что при увеличении числа n эта частота "стабилизируется" около некоторого числа, под которым понимаем **статистическую вероятность**.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

Очевидно это определение не формально, поэтому мы им пользоваться не будем.

2.2 Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число исходов, причем их можно считать равновозможными. Тогда применимо классическое определение вероятности.

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}$, где n — число всех возможных элементарных исходов, m — число элементарных исходов, благоприятных A.

В частности, если $|\Omega| = n$, а A — элементарный исход, то $P(A) = \frac{1}{n}$.

Свойства.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(\Omega) = 1$
4. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Proof. $|A| := m_1, |B| := m_2, |A \cup B| = m_1 + m_2$

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

□

Пример. Найти вероятность, что при бросании кости выпадет чётное число очков.

$$n = 6, m = 3, \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

Пример. В ящике лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Вынули 3 шара. Найти вероятность того, что из них две белых и один чёрный.

$$n = \binom{5}{3} = 10$$

$$m = \binom{3}{2}\binom{2}{1} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

Однако, это определение редко применимо.

3 Геометрическое определение вероятности. Задача Бюффона об игле.

Определение.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая ограниченная область.

- μ — конечная мера множества Ω, например мера Лебега

Пусть выбирают точку наугад, т.е. вероятность попадания точки в область A зависит от меры A, но не от её положения.

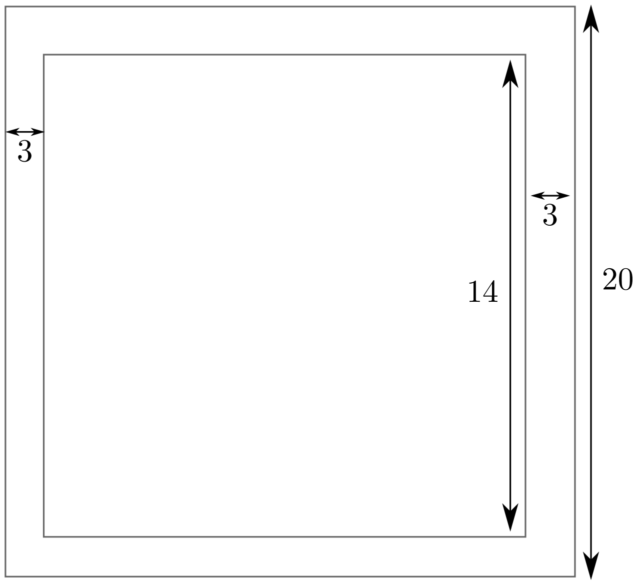
Тогда $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Примечание. По этому определению мера точки равна 0 и вероятность попадания в конкретную точку тоже равна 0.

Пример. Монета диаметром 6 сантиметров бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 сантиметров. Найти вероятность того, что монета целиком окажется на одной плитке.

Без ущерба для общности можно рассматривать, что монета бросается на одну плитку и положение монеты определяется положением её центра.

Чтобы монета лежала полностью на одной плитке, необходимо, чтобы её центр лежал на расстоянии ≥ 3 сантиметра от каждой стороны:



$$S(\Omega) = 20^2 = 400$$
$$S(A) = 14^2 = 196$$
$$P(A) = \frac{196}{400} = 0.49$$

Пример (задача Бюффона). Пол вымощен ламинатом. На пол бросается игла длинной, равной ширине доски. Найти вероятность того, что она пересечёт стык.

Пусть l — длина иглы, x — расстояние от центра иглы до ближайшего края. Положение иглы определяется центром и углом поворота φ.

$$A : x \leq l \sin \varphi$$
$$x \in [0, l] \quad \varphi \in [0, \pi]$$
$$S(\Omega) = \pi l$$
$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(\cos \pi - \cos 0) = 2l$$
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2}{\pi}$$

Это определение кажется хорошим — оно согласовано с классическим. Но и это определение редко применимо на практике, т.к. обычно вероятность зависит от положения в пространстве или событие неизмеримо.

4 Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов.

Определение. Систему $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называют σ-алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $A_1 \dots A_n \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Примечание. Из 2 и 3 следует 1.

Свойства.

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$, т.к. $\overline{\Omega} = \varnothing$
2. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap A_i \in \mathcal{F}$

   Proof. $A_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A}_1 \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup \overline{A}_i} = \bigcap A_i \in \mathcal{F}$ □

3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

Пример.

1. $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$
2. $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$

Определение. Пусть Ω — множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра над ним.

Вероятностью на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $P(A) \geq 0$ — свойство неотрицательности
2. Если события $A_1 \dots A_n \dots$ — попарно несовместны, т.е. $\forall i \neq j \;\; A_i \cap A_j = \varnothing$, то $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$ — свойство счётной аддитивности
3. $P(\Omega) = 1$ — свойство нормированности

Примечание. Вероятность есть нормированная мера.

Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства.

1. $P(\varnothing) = 0$

   Proof. $\underbrace{P(\varnothing + \Omega)}_{1} = P(\varnothing) + \underbrace{P(\Omega)}_{1} \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ □

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

   Proof. A и $\overline{A}$ — несовместны, $A + \overline{A} = \Omega$.

   $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$ □

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Proof. (a) $P(A) \geq 0$

   (b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

   □

5 Аксиома непрерывности. Ее смысл и вывод.

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

Смысл: при непрерывном изменении области $A \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность также должна изменяться непрерывно.

Теорема 1. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счётной аддитивности.

Proof.

$$A_n = \sum_{i=n}^{+\infty} A_i \overline{A}_{i+1} \cup \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$$

Т.к. эти события несовместны, то по аксиоме счётной аддитивности

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) + P\left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$$

Т.к. по условию $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i) = \varnothing$ и $\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $P(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i) = 0$.

Таким образом, $P(A_n) = \sum_{i=n}^{+\infty} P(A_i\overline{A}_{i+1})$ – остаточный член сходящегося ряда $\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i\overline{A}_{i+1})$, который сходится, т.к. равен $P(A_1)$. Тогда $P(A_n) \to 0$ □

Примечание. Аксиома счётной аддитивности следует из аксиомы непрерывности и свойства конечной аддитивности.

6 Свойства операций сложения и умножения. Формула сложения вероятностей.

Примечание.

$$A(B + C) = AB + AC$$

6.1 Формула сложения

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Теорема 2. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Proof.

$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \\ &= (P(A\overline{B}) + P(AB)) + (P(\overline{A}B) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

□

Пример. Пусть D – дама, Π – пика. Найти вероятность $P(D + \Pi)$.

$$P(D + \Pi) = P(D) + P(\Pi) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

Аналогично можно доказать формулу включения-исключения:

$$P\left(\sum A_i\right) = \sum P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

Пример. n писем раскладываются в n конвертов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадёт в свой конверт. Чему равна эта вероятность при $n \to +\infty$.

Пусть A_i — i-тое письмо попало в свой конверт. A — хотя бы одно письмо попало в свой конверт.

$$A = \sum A_i$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n} \quad P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2} \quad P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3} \quad \dots \quad P(A_1 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \sum_i (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} \to 1 - e^{-1} \approx 0.62$$

7 Независимость событий. Независимые события в совокупности и попарно. Пример Бернштейна.

Определение. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Упражнение 1. Пусть $P(A), P(B) \neq 0$. Доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы.

Proof.

$$0 = P(AB) = P(A)P(B)$$

Таким образом, либо $P(A) = 0$, либо $P(B) = 0$, что является противоречием. □

Свойства. Если A и B независимы, то A и $\overline{B}$ — независимы.

Proof.

$$P(A) = P(A(B + \overline{B})) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(AB)$$

Таким образом, A и $\overline{B}$ — независимы. □

Определение. События $A_1 \dots A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора $1 \leq i_1 \dots i_k \leq n$ $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$

Пример (Бернштейн). Три грани правильного тетраедра выкрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань — во все эти три цвета.

Бросаем тетраэдр и смотрим на грань, на которую он упал. События:

- A — красный цвет
- B — синий цвет
- C — зеленый цвет

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

Таким образом, все события попарно независимы.

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

Таким образом, события не независимы в совокупности.

8 Условная вероятность. Формула умножения событий.

Обозначение. $P(A|B)$ — вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло.

Пример. Кубик подбрасывается один раз. Известно, что выпало больше 3 очков. Какова вероятность, что выпало чётное число очков?

Пусть A — чётное число очков, B — больше 3 очков.

$$n = 3 \quad (4, 5, 6) \quad m = 2 \quad (4, 6)$$

$$P(A|B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Определение. **Условной вероятностью** события A при условии, что имело место событие B, называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Теорема 3. $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$

Proof. По индукии.

База $n = 2$ — по определению условной вероятности.

Переход

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1 \dots A_{n-1})P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_{n-1} \dots A_1)$$

□

Определение. События A и B независимы, если $P(A|B) = P(A)$, что равносильно $P(AB) = P(A)P(B)$ — прошлому определению.

Proof.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

□

9 Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Определение. События $H_1 \dots H_n \dots$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и содержат все элементарные исходы.

Теорема 4 (формула полной вероятности)**.** Пусть $H_1 \dots H_n \dots$ — полная группа событий. Тогда $P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

Proof.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\Omega A) \\ &= P((H_1 + \dots H_n + \dots)A) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^{+\infty} H_k A\right) \\ &\overset{(??)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i) \end{aligned}$$

??: По лемме о счётной аддитивности и т.к. H_iA и H_jA несовместны. □

9.1 Формула Байеса

Эта формула также называется формулой проверки гипотезы.

Теорема 5. Пусть $H_1 \dots H_n$ — полная группа событий и известно, что A произошло. Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{+\infty} P(H_k)P(A|H_k)}$$

Proof.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

□

10 Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.

Определение. Схемой Бернулли называется серия одинаковых независимых испытаний, каждое из которых имеет лишь два исхода — интересующее нас событие произошло *(успех)* или не произошло *(неудача)*.

Обозначение.

- n — число испытаний
- p — вероятность события A при одном испытании
- $q = 1 - p$
- v_n — число успехов при n испытаниях
- $P_n(k) = P(v_n = k)$

10.1 Формула Бернулли

Теорема 6. Вероятность того, что при n испытаниях произойдёт ровно k успехов равна:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Proof. Рассмотрим один из исходов, благоприятных событию A: $A_1 = \underbrace{\text{У}\dots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{Н}\dots\text{Н}}_{n-k}$. Т.к. рассматриваемые события независимы, верна следующая формула:

$$P(A_1) = \underbrace{p\dots p}_{k}\underbrace{q\dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Остальные благоприятные исходы отличаются лишь расстановкой k успехов по n местам, а их вероятности будут те же самые. □

Выясним, при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k - 1$ будет не более, чем вероятность k успехов, т.е. $P_n(k) \geq P_n(k-1)$

$$P_n(k-1) \leq P_n(k)$$
$$\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \leq \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$
$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q \leq \frac{n!}{k!(n-k)!} p$$

$$\frac{k!}{(k-1)!}q \leq \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!}p$$
$$k(1-p) \leq (n-k+1)p$$
$$k - kp \leq np - kp + p$$
$$np + p - 1 \leq k \leq np + p$$

1. np — целое. Тогда $np + p$ — не целое и $k = np$ — наибольшее искомое k
2. $np + p$ — не целое. Тогда $k = [np + p]$
3. $np + p$ — целое. Тогда $np + p - 1$ — целое и $P_n(k-1) = P_n(k)$ и $k = np + p$ или $k = np + p - 1$

11 Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа (без док-ва).

11.1 Локальная формула Муавра-Лапласа

Примечание. Локальность формулы означает, что мы её применям, чтобы найти вероятность некоторого числа успехов.

$$P_n(v_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \text{ , где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

φ называется функцией Гаусса.

Свойства.

- $\varphi(-x) = \varphi(x)$
- При $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$

11.2 Интегральная формула Лапласа

Примечание. Эта формула применяется, если искомое число успехов лежит в некотором диапазоне.

$$P_n(k_1 \leq v_n \leq k_2) \xrightarrow{n\to+\infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \text{ , где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства.

- $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
- При $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0.5$

Примечание. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевается несколько иная функция, чаще всего

$$F_0(X) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

Несложно заметить, что $F_0(x) = 0.5 + \Phi(x)$

Мы применяем эти формулы при $n \geq 100$ и $p, q \geq 0.1$

12 Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события. Закон больших чисел Бернулли.

Пример. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0.8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

1. Произошло ровно 330 попаданий.
2. Произошло от 312 до 336 попаданий.

1. $k = 400, p = 0.8, q = 0.2, k = 330$

$$x = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$P_{400}(320) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1.25^2}{2}} \approx 0.0228$$

2. $k = 400, k_1 = 312, k_2 = 336, p = 0.8, q = 0.2$

$$x_1 = \frac{332 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{312 - 320}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{336 - 320}{8} = 2$$

$$P_{400}(312 \leq v_n \leq 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.8285$$

12.1 Вероятность отклонения относительно частоты от вероятности события

Пусть p — вероятность события A, $\frac{n_A}{n}$ — частота A. По интегральной формуле Лапласа найдём вероятность того, что частота отклонится от p не больше, чем на ε:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) &= P(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon) \\ &= P(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) \\ &= P(np - n\varepsilon \leq n_A \leq np + n\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$= 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

Итого:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

12.2 Закон больших чисел Бернулли

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

При $n \to +\infty : \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}} \to +\infty$ и $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right) \to 0.5$, поэтому $P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \to 2 \cdot 0.5 = 1$, т.е.:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

Эта формула называется законом больших чисел Бернулли.

13 Схемы испытаний: Бернулли, до первого успеха. Биномиальное и геометрическое распределения. Свойство отсутствия последействия.

13.1 Схема Бернулли

См. билет 10.

13.2 Схема до первого успешного испытания

Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успеха. Номер такого успеха обозначается τ.

Теорема 7. $P(\tau = k) = q^{n-1}p$

Proof.

$$P(\tau = k) = P(\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{k-1}\text{У}) = q^{k-1}p$$

□

Определение. Отображение $k \mapsto \binom{n}{k}q^{n-k}p^k$, где $0 \le k \le n$ называется **биномиальным распределением** с параметрами n и p.

Обозначение. $B(n,p)$ или $B_{n,p}$

Определение. Отображение $k \mapsto q^{k-1}p$ при $1 \le k < +\infty$ называется **геометрическим распределением** с параметром p.

Обозначение. G_p или $G(p)$

Примечание. Это распределение обладает свойством “отсутствие последействия” или нестарения, т.е. знание о том, что у вас не было успеха в течение n испытаний, никак не влияет на распределение оставшегося числа испытаний.

Теорема 8. $p(\tau = k) = q^{k-1}p$. Тогда

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \;\; P(\tau > k + n \mid \tau > n) = p(\tau > k)$$

Proof.

$$P(\tau > n) = P(\underbrace{\text{НН}\ldots\text{Н}}_{n}) = q^n$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\tau > n + k \mid \tau > n) &= \frac{P(\tau > n + k \cap \tau > n)}{P(\tau > k)} \\ &= \frac{P(\tau > n + k)}{P(\tau > n)} \\ &= \frac{q^{n+k}}{q^n} \\ &= q^k \\ &= P(\tau > k) \end{aligned}$$

□

Примечание. Аналогично $P(\tau = n + k \mid \tau > n) = P(\tau = k)$

14 Урновая схема с возвратом и без возврата. Гипергеометрическое распределение. Теорема об его асимптотическом приближении к биномиальному.

В урне N шаров, из них K белых и $N - K$ чёрных. Из неё выбрали n шаров без учета порядка.

1. Схема с возвратом.

   Вероятность выбрать белый шар не меняется и равна $\frac{K}{N}$. Тогда $P_n(k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$ — опять биноминальное распределение.

2. Схема без возврата.

   Тогда $P_{N,K}(n,k) = \dfrac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Определение. Отображение $k \mapsto \dfrac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ при $k < K$ называется **гипергеометрическим распределением**.

Теорема 9. Если $N \to +\infty$ и $K \to +\infty$ так, что $\frac{K}{N} \to p \in (0,1)$, n и $0 \le k \le n$ фиксированы, то $P_{N,K}(n,k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Лемма 1. $\binom{K}{k} \sim \frac{K^k}{k!}$, где $K \to +\infty$, $k = \mathrm{const}$

Proof.

$$\begin{aligned}
\binom{K}{k} &= \frac{K!}{k!(K-k)!} \\
&= \frac{K \cdot (K-1) \dots (K-k+1)}{K^k} \frac{K^k}{k!} \\
&= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{K}\right)\left(1 - \frac{2}{K}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{K}\right) \cdot \frac{K^k}{k!} \\
&\sim \frac{K^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

Доказательство 9.

$$\begin{aligned}
P_{N,K}(n,k) &= \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&\xrightarrow[n \to +\infty]{\substack{\text{к каждому} \\ \text{применили} \\ \text{формулу}}} \frac{K^k}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{N^n} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{K^k}{N^k} \frac{(N-k)^{n-k}}{N^{n-k}} \\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{k}{N}\right) \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \\
&\xrightarrow{N \to +\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

□

15 Схема Пуассона. Формула Пуассона. Оценка погрешности в формуле Пуассона.

Схема Пуассона: см. формулу Пуассона, т.е. $n \to +\infty, p \to 0$ в схеме Бернулли.

Теорема 10 (Формула Пуассона)**.** Пусть $n \to +\infty, p_n \to 0$ так, что $np_n \to \lambda = \text{const} > 0$. Тогда вероятность успеха при n испытаниях:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Эта формула применима при малых *(или крупных)* p и $n \geq 100$.

Proof.

Обозначение. $\lambda_n = n \cdot p_n$, при этом $\lambda_n \to \lambda$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &\to \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&\to \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \\
&\to \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right)^{-\lambda_n} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

□

Теорема 11. Пусть v_n — число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью успеха p, $\lambda = np$, $A \subset \mathbb{N}_0$ — произвольное подмножество.

Тогда:

$$\left| P(v_n \in A) - \sum \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \min(p, np^2) = \min(p, \lambda p) = \min\left(p, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

16 Случайные величины, определение. Измеримость функции, ее смысл. Вероятностное пространство (R, B, P). Распределение случайной величины.

Пример.

1. Бросаем кость. ξ — число выпавших очков. $\xi \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Достали случайную микросхему из ящика. ξ — время работы до отказа.
   (a) Пусть время измеряется в часах. Тогда $\xi \in \{0, 1, 2, 3 \dots\}$
   (b) Пусть время измеряется точно. Тогда $\xi \in [0, +\infty)$
3. ξ — температура воздуха в текущий момент времени. $\xi \in (-50°, 50°)$
4. ξ — индикатор события A. Обозначается $I_A = \begin{cases} 0, & A \text{ не наступает} \\ 1, & A \text{ наступает} \end{cases}$

Определение. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **$\mathfrak{F}$-измеримой**, если $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \{w : \xi(w) < x\} \in \mathfrak{F}$. Иными словами, прообраз $\xi^{-1}(-\infty, x) \in \mathfrak{F}$.

Определение. Случайной величиной ξ, заданной на пространстве $\Omega, \mathfrak{F}, P$, называется $\mathfrak{F}$-измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, ставящая в соотвествие каждому элементарному исходу некоторое вещественное число.

Примечание. Не все функции являются измеримыми.

Пример. Бросаем кость. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathfrak{F} = \{\varnothing, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$. $\xi(i) = i$

Пусть $x = 4$, $\{w : \xi(w) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathfrak{F}$. ξ не измеримо.

Упражнение 2. Описать класс измеримых функций для тривиальной σ-алгебры $\{\varnothing, \Omega\}$

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима. Тогда $P(\xi < x) = P(\underbrace{\{w : \xi(w) < x\}}_{A_x})$, т.к. $A_x \in \mathfrak{F}$, а также:

- $\overline{A_x} = \{w : \xi(w) \geq x\} \in \mathfrak{F}$
- При $x > y$ $A_x \setminus B_y = \{w : y \leq \xi(w) < x\} \in \mathfrak{F}$.
- $B_x = \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{x-\frac{1}{t}} = \{w : \xi(w) \leq x\}$
- $B_x \setminus A_x = \{w : \xi(w) = x\} \in \mathfrak{F}$

Отсюда видим, что по теореме Каратеодори вероятностную меру можно продолжить до любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра.

$$P(B \in \mathfrak{B}) = P(\{w : \xi(w) \in B\})$$

Итак, пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Тогда:

1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathfrak{B}, P)$
2. В свою очередь совокупность прообразов $\xi^{-1}(B)\ \forall B \in \mathfrak{B}$ является σ-алгеброй $\mathfrak{F}_\xi \subset \mathfrak{F}$. Такая σ-алгебра называется **σ-алгеброй, порожденной случайной величиной** ξ.

17 Дискретные случайные величины. Определение, закон распределения, числовые характеристики.

17.1 Дискретные случайные величины

Определение. Случайная величина ξ имеет **дискретное распределение**, если она принимает не более чем счётное число значений, то есть существует конечный или счётный набор чисел $x_1 \dots x_n \dots$, такой что $p_i = P(\xi = x_i) > 0$ и $\sum p_i = 1$

Дискретная случайная величина задаётся законом распределения *(рядом, таблицей).*

Пример. Кость.

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

17.2 Основные числовые характеристики дискретной случайной величины

17.2.1 Математическое ожидание *(среднее значение)*

Определение. Математическим ожиданием $\mathbb{E}\,\xi$ называется число $\mathbb{E}\,\xi = \sum_i x_i p_i$ при условии, что данный ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что матожидания не существует.

Примечание. Смысл: значения случайной величины группируются вокруг матожидания.

17.2.2 Дисперсия

Определение. Дисперсией $\mathbb{D}\,\xi$ случайной величины ξ называется среднее квадратов отклонений этой величины от математического ожидания: $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,x)^2$ или $\mathbb{D}\,\xi = \sum_i (x_i - \mathbb{E}\,\xi)^2 - p_i$ при условии, что данное значение существует *(конечно).*

Примечание. Вычислять дисперсию удобнее по формуле $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}\,\xi)^2$

Примечание. Смысл: квадрат среднего разброса рассеяния случайной величины около её математического ожидания.

17.2.3 Среднеквадратическое отклонение

Определение. Среднеквадратическим отклонением σ_ξ случайной величины ξ называется число $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\,\xi}$

Примечание. Смысл: характеризует средний разброс случайной величины около её математического ожидания.

18 Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Свойства.

1. $\mathbb{E}\,C = C, \mathbb{D}\,C = 0$

   Proof.
   $$\mathbb{E}\,C = C \cdot 1 = C$$
   $$\mathbb{D}\,C = \mathbb{E}(\underbrace{C - \mathbb{E}\,C}_{0}) = 0$$
   □

2. $\mathbb{E}(\xi + C) = \mathbb{E}\,\xi + C, \mathbb{D}(\xi + C) = \mathbb{D}\,\xi$

   Proof.
   $$\mathbb{E}(\xi + C) = \sum_i (x_i + C)p_i = \sum_i x_i p_i + C \underbrace{\sum_i p_i}_{1} = \mathbb{E}\,\xi + C$$
   $$\mathbb{D}(\xi + C) = \mathbb{E}(\xi + C - \mathbb{E}(\xi + C))^2 = \mathbb{E}(\xi + C - \mathbb{E}\,\xi - C)^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2 = \mathbb{D}\,\xi$$
   □

3. Растяжение: $\mathbb{E}(C\xi) = C\,\mathbb{E}\,\xi, \mathbb{D}(C\xi) = C^2\,\mathbb{D}\,\xi$

   Proof.
   $$\mathbb{E}(C\xi) = \sum_i C x_i p_i = C \sum_i x_i p_i = C\,\mathbb{E}\,\xi$$
   $$\mathbb{D}(C\xi) = \mathbb{E}(C\xi - \mathbb{E}\,C\xi)^2 = C^2\,\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2 = C^2\,\mathbb{D}\,\xi$$
   □

4. $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\,\xi + \mathbb{E}\,\eta$

Proof. Пусть x_i, y_j — соответствующие значения случайных величин ξ и η.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi+\eta) &= \sum_{i,j}(x_i+y_j)P(\xi=x_i,\eta=y_j)\\ &= \sum_i x_i\sum_j P(\xi=x_i,\eta=y_j)+\sum_j y_j\sum_i P(\xi=x_j,\eta=y_i)\\ &= \sum_i x_iP(\xi=x_i)+\sum_j y_jP(\eta=y_j)\\ &= \mathbb{E}\,\xi+\mathbb{E}\,\eta\end{aligned}$$

□

Определение. Дискретные случайные величины ξ и η **независимы**, если $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)\ \ \forall i, j$, т.е. случайные величины принимают свои значения независимо друг от друга.

5. Если ξ и η независимы, то $\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) = \mathbb{E}\,\xi\cdot\mathbb{E}\,\eta$

   Proof.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) &= \sum_{i,j}x_iy_jP(\xi=x_i,\eta=y_j)\\ &= \sum_i x_i\sum_j y_jP(\xi=x_i,\eta=y_j)\\ &= \sum_i x_i\sum_j y_jP(\xi=x_i)P(\eta=y_j)\\ &= \sum_i x_iP(\xi=x_i)\sum_j y_jP(\eta=y_j)\\ &= \sum_i x_iP(\xi=x_i)\,\mathbb{E}\,\eta\\ &= \mathbb{E}\,\xi\,\mathbb{E}\,\eta\end{aligned}$$

□

   В обратную сторону это утверждение не верно.

6. $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2$

   Proof.

$$\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi \mathbb{E}\,\xi + (\mathbb{E}\,\xi)^2) \\
&= \mathbb{E}\,\xi^2 - 2\,\mathbb{E}\,\xi\,\mathbb{E}\,\xi + \mathbb{E}(\mathbb{E}\,\xi^2) \\
&= \mathbb{E}\,\xi^2 - 2(\mathbb{E}\,\xi)^2 + (\mathbb{E}\,\xi)^2 \\
&= \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2
\end{aligned}
$$

□

7. $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\,\xi + \mathbb{D}\,\eta + 2 \cdot \operatorname{cov}(\xi, \eta)$, где $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\,\eta$ — ковариация.

   Proof.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(\xi + \eta) &= \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 \\
&= \mathbb{E}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (\mathbb{E}\,\xi + \mathbb{E}\,\eta)^2 \\
&= \mathbb{E}\,\xi^2 + 2\,\mathbb{E}\,\xi\eta + \mathbb{E}\,\eta^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2 - (\mathbb{E}\,\eta)^2 - 2\,\mathbb{E}\,\xi\,\mathbb{E}\,\eta \\
&= \mathbb{D}\,\xi + \mathbb{D}\,\eta + 2(\mathbb{E}\,\xi\eta - \mathbb{E}\,\xi\,\mathbb{E}\,\eta)
\end{aligned}
$$

□

8. Если случайные величины ξ и η независимы, то $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\,\xi + \mathbb{D}\,\eta$

   Proof. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$ □

9. Среднеквадратическое отклонение — минимум отклонения случайной величины от точек вещественной прямой: $\mathbb{D} = \min_a (\xi - a)^2$

   Proof.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi - a)^2 &= \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\,\xi) + (\mathbb{E}\,\xi - a))^2 \\
&= \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2 + 2\,\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi) \cdot (\mathbb{E}\,\xi - a) + (\mathbb{E}\,\xi - a)^2 \\
&= \mathbb{D}\,\xi + (\mathbb{E}\,\xi - a)^2 \leq \mathbb{D}\,\xi
\end{aligned}
$$

□

19 Стандартные дискретные распределения и их числовые характеристики (Бернулли, биномиальное, геометрическое, Пуассона).

1. Распределение Бернулли B_p с параметром $0 < p < 1$. ξ — число успехов при одном испытании, где p — вероятность успеха при одном испытании. Закон распределения:

ξ	0	1
p	$1 - p$	p

$$\mathbb{E}\,\xi = 0(1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$\mathbb{D}\,\xi = 0^2(1 - p) + 1^2 p - p^2 = p - p^2 = pq$$

2. Биномиальное распределение $B_{n,p}$ с параметрами n и p. ξ — число успехов при n испытаниях, p — вероятность успеха при одном испытании.

$$\xi \in B_{n,p} \Leftrightarrow P(\xi = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n, q = 1 - p$$

Примечание. $B_p = B_{1,p}$

$\xi = \xi_1 + \dots \xi_n$, где $\xi_i \in B_p, \mathbb{E}\,\xi_i = p, \mathbb{D}\,\xi_i = pq$.

$$\mathbb{E}\,\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,\xi_i = np$$

$$\mathbb{D}\,\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}\,\xi_i = npq$$

$$\sigma\xi = \sqrt{npq}$$

3. Геометрическое распределение G_p. ξ — номер первого успешного испытания.

$$\xi \in G_p \Leftrightarrow P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad 1 \le k < +\infty$$

$$\mathbb{E}\,\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = p\left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}\,\xi^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot q^{k-1} \cdot p = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \cdot q^{k-1} + k \cdot q^{k-1} = pq \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)' + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{q}{p^2}$$

4. Распределение Пуассона Π_λ с параметром $\lambda > 0$.

$$\xi \in \Pi_\lambda \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad 0 \le k < +\infty$$

$$\mathbb{E}\,\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{E}\,\xi^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1) + k) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\sigma\xi = \sqrt{\lambda}$$

20 Функция распределения и ее свойства (в свойствах 4, 5, 6 достаточно привести одно из доказательств).

Определение. Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$

Пример. $\xi \in B_p$. Тогда $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-p, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

Свойства.

1. $F(x)$ — ограниченная функция.
2. $F(x)$ — неубывающая функция.

   Proof.

$$\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$$
$$P(\xi < x_1) \le P(\xi < x_2)$$
$$F(x_1) \le F(x_2)$$

□

3. $P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

   Proof.

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2)$$
$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2)$$
$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

□

4. Т.к. $\mathfrak{B}$ порождается интервалами, то, зная функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной величины в любое борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$, а значит распределение полностью задаётся функцией распределения.
5. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

   Proof. Т.к. $F(x)$ ограничена и монотонна, эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать пределы для каких-нибудь последовательностей $x_n \to \pm\infty$.

   Рассмотрим $A_n = \{w : n-1 \le \xi(w) < n\}, n \in \mathbb{N}$ — несовместные события и по счётной аддитивности

$$1 = P(\Omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\bigcup A_n\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(a_n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) - F(n-1) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} F(n) - F(n-1) \\
&= \lim_{N\to\infty} F(N) - F(-N-1) \\
&= \lim_{N\to\infty} F(N) - \lim_{N\to\infty} F(-N-1)
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\lim_{N\to\infty} F(N) = 1$, т.к. $F(N) \le 1$ и $F(-N-1) \ge 0$ □

6. $F(x)$ — непрерывная слева и $F(x-0) = F(x)$

   Proof. В силу монотонности и ограниченности предел существует.

   Рассмотрим $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} < \xi < x_0\}$. $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ и $\bigcap B_n = \varnothing$. Таким образом, по аксиоме непрерывности $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty}(F(x_0) - F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)) = F(x_0) - \lim\limits_{n\to+\infty} F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow F(x_0) = F(x_0 - 0)$ □

7. Скачок в точке x_0 равен вероятности попадания в эту точку.

   Proof. $C_n = \{x_0 < \xi < x_0 + \frac{1}{n}\}$. По аксиоме непрерывности $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = 0$.

$$
\begin{aligned}
P(C_n) + P(\xi \ge x_0) &= P(\xi = x_0) \\
P\left(x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}\right) &\xrightarrow{n\to+\infty} P(\xi = x_0) \\
F\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - F(x_0) &\xrightarrow{n\to+\infty} P(\xi = x_0) \\
F(x_0 + 0) - F(x_0) = P(\xi = x_0)
\end{aligned}
$$

□

8. Если $F(x)$ непрерывно в точке x_0, то $P(\xi = x_0) = 0$. Это следствие из свойства 6.
9. Если $F(x)$ непрерывно, то $P(x_1 \le \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
10. Случайная величина дискретна $\Leftrightarrow$ её функция распределения ступенчата.

21 Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность и ее свойства.

Определение. Случайная величина ξ имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$ $P(\xi \in \mathfrak{B}) = \int_B f_\xi(x)dx$ для некоторой функции $f_\xi(x)$.

Примечание. Интеграл выше — Лебега, а не Римана.

Определение. Функция $f_\xi(x)$ называется **плотностью распределения** случайной величины ξ.

Свойства.

1. $P(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$

   Proof. Очевидно из определения, если взять интервал $B = (\alpha, \beta)$. □

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$.
3. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

   Proof. По определению $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ □

4. $F_\xi(x)$ — непрерывная функция, т.к. это интеграл с переменным верхним пределом.
5. $F_\xi(x)$ дифференцируема почти всюду и при этом $F' = f$, что очевидно из того же соображения.
6. $f_\xi(x) \geq 0$
7. $P(\xi = x_0) = 0$
8. $P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
9. Если для $f(x)$ выполнены свойства 2 и 6, то она является плотностью некоторой случайной величины.

22 Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины, их свойства.

Определение. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется число $\mathbb{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно.

Определение. $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mathbb{E}\,\xi)^2 f(x)dx$ — **дисперсия**

Примечание. Удобная формула: $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbb{E}\,\xi)^2$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\,\xi}$$

Примечание. Смысл и свойства характеристик идентичны таковым для дискретной величины.

23 Равномерное распределение.

ξ равномерно распределена на $[a, b]$, если её плотность постоянна на этом отрезке и такая величина обозначается $\xi \in U_{a,b}$ или $\xi \in U(a; b)$.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}\,\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_a^b x^2\frac{dx}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\,\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$P(\alpha < q < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}, \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

24 Показательное распределение. Свойство нестарения.

ξ показательно распределена с параметром $\alpha > 0$ на $[a, b]$, если $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$ и такая величина обозначается $\xi \in E_\alpha$ или $\xi \in E(\alpha)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Определение. Гамма-фукнция Эйлера $G(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt$. При $\lambda \in \mathbb{N}$ $\Gamma(\lambda+1) = \lambda!$

$$\mathbb{E}\,\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} x^k \alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha^k}\int_0^{+\infty}(\alpha x)^k \alpha e^{-\alpha k} d(\alpha x) = \frac{k!}{\alpha^k}$$

$$\mathbb{E}\,\xi = \frac{1}{\alpha}$$

$$\mathbb{E}\,\xi^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\mathbb{D}\,\xi = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}$$

$$P(\alpha < \xi < \beta) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

Proof.

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\alpha b}) - (1 - e^{-\alpha a}) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

□

Теорема 12. Если $\xi \in E_\alpha$, то $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

Proof.

$$\begin{aligned} P(\xi > x + y \mid \xi > x) &= \frac{P(\xi > x + y, \xi > x)}{P(\xi > x)} \\ &= \frac{1 - P(\xi < x + y)}{1 - P(\xi < x)} \\ &= \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-\alpha(x+y)})}{1 - (1 - e^{\alpha x})} \\ &= e^{-\alpha y} \\ &= 1 - (1 - e^{-\alpha y}) \\ &= 1 - F(y) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(\xi < y)$$
$$= P(\xi > y)$$

□

25 Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение, его числовые характеристики.

ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и $\sigma > 0$, если её плотность имеет вид $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$, обозначается $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ или $\xi \in N(\alpha, \sigma^2)$

Смысл параметров распределения:

$$\mathbb{E}\,\xi = a \quad \sigma\xi = \sigma \quad \mathbb{D}\,\xi = \sigma^2$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Определение. **Стандартным нормальным распределением** называется нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma = 1$.

Плотность:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Эта функция называется **функцией Гаусса**

Функция распределения:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Примечание.

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{\frac{z^2}{2}} dz = 0.5 + \Phi(x)$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Примечание. Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$\mathbb{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} - \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}\,\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx - (\mathbb{E}\,\xi)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 0 = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = xe^{-\frac{x^2}{2}} dx & v = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

26 Связь между стандартным нормальным и нормальным распределениями. Следствия.

1. Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $F_\xi(x) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

   Proof.

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{bmatrix} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sigma dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

□

2. Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1)$

   Примечание. Эта операция называется стандартизацией.

   Proof.

   $$F_\eta(x) = P\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = P(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = \Phi_0\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = \Phi_0(x)$$

   □

3. Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $\mathbb{E}\,\xi = a, \mathbb{D}\,\xi = \sigma^2$.

   Proof.

   $$\eta := \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1)$$
   $$\mathbb{E}\,\xi = \sigma\,\mathbb{E}\,\xi + a = 0 + a = a$$
   $$\mathbb{D}\,\xi = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

   □

4. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

   Proof.

   $$\begin{aligned} P(\alpha < \xi < \beta) &= F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) \\ &= \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - 0.5 - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

   □

   Примечание. В этой формуле можно заменить Φ на Φ_0, т.к. они отличаются на константу и она сократится.

5. Вероятность отклонения случайной величины от её среднего значения *(попадание в интервал, симметричный относительно a).*

   $$P(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Proof.

$$\begin{aligned} P(|\xi - a| < t) &= P(-t < \xi - a < t) \\ &= P(a - t < \xi < a + t) \\ &= \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

□

При замене в этой формуле Φ на Φ_0 получим $P(|\xi - a| < t) = 2\Phi_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$.

Правило трёх σ: $P(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$.

Proof.

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0.49865 = 0.9973$$

□

Смысл этого правила: нормальная случайная величина почти гарантировано попадает в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$

27 Гамма-функция и гамма-распределение, его свойства.

Определение. Гамма-функция Эйлера $G(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt$. При $\lambda \in \mathbb{N}$ $\Gamma(\lambda + 1) = \lambda!$

Свойства.

1. $\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(x) = (x - 1)!, x \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Определение. Случайная величина ξ имеет Γ-распределение с параметрами $\alpha > 0, \lambda > 0$, если её плотность имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$, обозначается $\xi \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

$$F_\xi(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt, \quad x \geq 0$$

Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то:

$$F_\xi(x) = \sum_{k=\lambda}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\alpha x}$$

Свойства.

1. $\mathbb{E}\,\xi = \frac{\lambda}{\alpha}, \mathbb{D}\,\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$
2. $\Gamma_{\alpha,1} = E_\alpha$
3. Пусть случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы и имеют одинаковое показательное распределение E_α. Тогда $\sum_{i=1}^n \xi_i = \Gamma_{\alpha,n}$
4. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

28 Сингулярные распределения. Теорема Лебега (без док-ва).

Определение. ξ имеет **сингулярное распределение**, если существует борелевское множество $B \in \mathfrak{B}$ с нулевой мерой Лебега, такое что $P(\xi \in B) = 1$, но $\forall x \in B \;\; P(\xi = x) = 0$.

Примечание. Такое борелевское множество состоит из несчётного числа точек. В противном случае по счётной аддитивности меры $P(\xi \in B) = 0$.

Примечание. Функция распределения $F(x)$ — непрерывная функция по свойству 7 функции распределения[1].

Пример. ξ задана функцией распределения "лестница Кантора":

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 < x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Теорема 13 (Лебега)**.** Пусть $F_\xi(x)$ — функция распределения произвольной случайной величины ξ. Тогда $\xi(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3(x)$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ и $F_1(x)$ — функция дискретного распределения, $F_2(x)$ — функция абсолютно непрерывного распределения и $F_3(x)$ — функция сингулярного распределения. Другими словами, все распределения делятся на дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное и их смеси.

[1] В каждой точке функция распределения имеет скачок, равный вероятности попадания в эту точку.

29 Преобразования случайных величин. Борелевские функции. Стандартизац случайной величины.

Определение. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **борелевская функция**, если $\forall B \in \mathfrak{B} \ \ g^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$.

Теорема 14. Если $g(x)$ борелевская функция и ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, то $g(\xi)$ — тоже случайная величина на этом же пространстве.

Proof. Очевидно из определения борелевской функции. □

Примечание. Если ξ — дискретная случайная величина, то её закон распределения находится просто из определения. Поэтому в дальнейшем будем считать, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение.

29.0.1 Стандартизация случайных величин

Определение. Стандартной случайной величиной, соответствующей случайной величине ξ, называется величина $\frac{\xi - \mathbb{E}\,\xi}{\sigma_\xi}$

Свойства.

- $\mathbb{E}\,\xi = 0$
- $\mathbb{D}\,\xi = 1$

Proof. Было доказано раннее. □

Примечание. При стандартизации тип распределения не всегда сохраняется.

30 Линейное преобразование случайной величины. Теорема о монотонном преобразовании (без док-ва).

Теорема 15. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$. Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b$ при $a \neq 0$ имеет плотность $f_\eta = \frac{1}{|a|} f_\xi \left(\frac{x-b}{a}\right)$

Proof.

1. $a > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= P(a\xi + b < x) \\ &= P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty & y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x & \end{bmatrix} \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f_\xi \left(\frac{y-b}{a}\right) dy \Rightarrow f_\eta = \frac{1}{|a|} f_\xi \left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

2. $a < 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= P(a\xi + b < x) \\
&= P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) \\
&= P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) \\
&= \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f_\xi(t)dt \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{y-b}{a} & dt = \frac{1}{a}dy & y = at + b \\ y(+\infty) = -\infty & y\left(\frac{x-b}{a}\right) = x & \end{bmatrix} \\
&= \int_{x}^{-\infty} \frac{1}{a} f_\xi \left(\frac{y-b}{a}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{-a} f_\xi \left(\frac{y-b}{a}\right) dy \Rightarrow f_\eta = \frac{1}{|a|} f_\xi \left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

□

1. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = \sigma\xi + a \in N(a, \sigma^2)$.

   Свойства.

$$
f_\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}
$$

$$
f_\eta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x-a}{2\sigma}}}
$$

2. Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \frac{\eta - a}{\sigma} \in N(0,1)$
3. Если $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то $\xi = \gamma\eta + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$
4. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = a\xi + b \in N(b, a+b)$ при $a > 0$
5. Если $\xi \in E_\alpha$, то $\eta = \alpha\xi \in E_1$

Теорема 16. f_ξ — плотность случайной величины ξ и функция $g(x)$ монотонна. Тогда $\exists$ обратная функция $h(x) = g^{-1}(x)$ и случайная величина $\eta = g(\xi)$:

$$
f_\eta(x) = \frac{1}{|h'(x)|} \cdot f_\xi(h(x))
$$

31 Квантильное преобразование. Моделирование случайной величины с помощью датчика случайных чисел.

Теорема 17 (квантильное преобразование)**.** Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ непрерывна. Тогда случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет стандартное равномерное распределение, т.е. $U(0,1)$

Proof. Ясно, что $0 \le \eta \le 1$, т.к. $0 \le F(x) \le 1$.

1. Предположим, что $F(x)$ — строго возрастающая функция. Тогда она имеет обратную функцию $F^{-1}(x)$ и:

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}(x)) \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ F(F^{-1}(x)) = x & 0 < x < 1 \Rightarrow \eta \in U(0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

2. Пусть функция не является строго возрастающей, т.е. есть интервалы постоянства. В этом случае через $F^{-1}(x)$ обозначим самую левую точку такого интервала: $F^{-1}(x) = \min_t\{t \mid F(t) = x\}$[2].

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, \quad 0 \le x \le 1$$

□

Теорема 18 (обратная)**.** Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ, причём не обязательно непрерывная. Обозначим через $F^{-1}(x) = \inf\{t \mid F(t) \ge x\}$. Пусть случайная величина $\eta \in U(0,1)$, $F(x)$ — произвольная функция распределения. Тогда случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$

Примечание. $F^{-1}(\eta)$ называется **квантильным преобразованием** над случайной величиной η.

Примечание. Датчики случайных чисел имеют обычно стандартное равномерное распределение.

Из теоремы 18 следует, что из датчика случайных чисел и квантильного преобразования можно смоделировать любое желаемое распределение, в том числе и дискретное.

32 Виды сходимостей случайных величин, связь между ними. Теорема об эквивалентности сходимостей к константе (все без док-ва).

32.0.1 Сходимость почти наверное

Определение. Случайная величина ξ имеет некоторое свойство **почти наверное**, если вероятность того, что ξ имеет это свойство, равна 1.

[2] Можно писать min, а не inf, т.к. $F(x)$ непрерывна слева

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится **почти наверное** к случайной величине ξ при $n \to +\infty$, если:

$$P(w \in \Omega \mid \xi_n(w) \to \xi(w)) = 1$$

и обозначается $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{п.н.}} \xi$.

32.0.2 Сходимость по вероятности

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \to +\infty$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ или } P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

и обозначается $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \xi$

Примечание. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \mathbb{E}\,\xi_n \to \mathbb{E}\,\xi$

Свойства.

1. $|\xi_n| \leq C = \text{const} \;\; \forall n$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \mathbb{E}\,\xi_n \to \mathbb{E}\,\xi$
2. Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, то $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta$ и $\xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{P} \xi \cdot \eta$

32.0.3 Слабая сходимость *(сходимость по функции распределения)*

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ **слабо сходится** к случайной величине ξ, если последовательность функций распределений $F_{\xi_n}(x)$ сходится к функции распределения F_ξ для всех x таких, что $F_\xi(x)$ непрерывно в точке x.

и обозначается $\xi_n \rightrightarrows \xi$.

Свойства.

1. Если последовательность случайных величин $\xi_n \xrightarrow{P} C$ и $\eta_n \rightrightarrows \eta$, то $\xi_n\eta_n \rightrightarrows C\eta$ и $\xi_n + \eta_n \rightrightarrows C + \eta$

32.0.4 Связь между видами сходимости

Теорема 19. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \rightrightarrows \xi$

Proof.

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$

   Можно ограничиться случаем, когда $\xi_n(w) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi(w) \;\; \forall w \in \Omega$. Зафиксируем $w \in \Omega$.

$$\xi_n(w) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi(w) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, w) \ \ \forall n > N \ \ |\xi_n(w) - \xi(w)| < \varepsilon$$

Или

$$A = \{w \in \Omega \mid N(\varepsilon, w) < n\} \subset B = \{|\xi_n(w) - \xi(w)| < \varepsilon\}$$

Тогда

$$1 \geq P(B) \geq P(A) = P(N(\varepsilon, w) < n) = F_{N(\varepsilon,w)}(n) \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \Rightarrow P(B) \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \rightrightarrows \xi$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n - \xi \xrightarrow{P} 0$$
$$\xi_n = \underbrace{(\xi_n - \xi)}_{\to 0} + \xi \rightrightarrows \xi$$

□

Теорема 20. Если $\xi_n \rightrightarrows C$, то $\xi_n \xrightarrow{P} C$

Proof. Пусть $\xi_n \rightrightarrows C \Rightarrow F_{\xi_n}(x) \to F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ 1, & x > C \end{cases}$ $\forall x$, где непрерывна $F_C(x)$, т.е. $\forall x \neq C$.

Докажем, что $P(|\xi_n - C| < \varepsilon) \to 1 \forall\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - C| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < \xi_n - C < \varepsilon) \\ &= P(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) \\ &\geq P(C - \frac{\varepsilon}{2} < \xi_n < C + \varepsilon) \\ &= F_{\xi_n}(\varepsilon + C) - F_{\xi_n}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\xrightarrow{n\to+\infty} F_C(C + \varepsilon) - F_C\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

33 Математическое ожидание преобразованной случайной величины. Свойства моментов.

Теорема 21. Для произвольной борелевской функции $g(x)$:

1. $\mathbb{E}\, g(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(x_k) \cdot P(\xi = x_k)$, если ξ — дискретная случайная величина и если ряд абсолютно сходится.
2. $\mathbb{E}\, g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x) dx$, если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина.

33.1 Свойства моментов

1. Если случайная величина ξ неотрицательна почти наверное, то и $\mathbb{E}\,\xi \geq 0$

   Proof.
   $$A := \{w \in \Omega \mid g(w) \geq 0\}$$
   $$\mathbb{E}\,\xi = \int_\Omega \xi(w) dP(w) = \int_A \xi(w) dP(w) + \int_{\overline{A}} \xi(w) \underbrace{dP(w)}_{0} = \int_A \xi(w) dP(w)$$
   □

2. Если $\xi \geq \eta$ почти наверное, то $\mathbb{E}\,\xi \geq \mathbb{E}\,\eta$

   Proof.
   $$\mathbb{E}(\xi - \eta) = \mathbb{E}\,\xi - \mathbb{E}\,\eta \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\,\xi \geq \mathbb{E}\,\eta$$
   □

3. Если $|\xi| \geq |\eta|$, то $\mathbb{E}\,|\xi|^k \geq \mathbb{E}\,|\eta|^k$
4. Если существует момент M_t случайной величины ξ, то существуют и её моменты меньшего порядка. В частности, если $\exists\, \mathbb{D}$, то и $\exists\, \mathbb{E}$.

   Proof. Пусть $s < t$. Заметим, что $|x|^s \leq \max(|x|^t, 1) \leq |x|^t + 1$ при $|x| \geq 1$ $|x|^s \leq |x|^t$, а при $|x| \leq 1$, $|x|^s \leq 1$.
   $$|\xi(w)|^s \leq |\xi(w)|^t + 1 \;\; \forall w \in \Omega$$
   По свойству 2:
   $$\mathbb{E}\,|\xi|^s \leq \mathbb{E}\,|\xi|^t + 1 \Rightarrow \mathbb{E}\,|\xi|^s < +\infty$$
   т.к. по условию $\mathbb{E}\,|\xi|^t < +\infty$. □

34 Неравенство Йенсена, следствие.

Теорема 22 (неравенство Йенсена)**.** Пусть функция g выпукла вниз. Тогда $\mathbb{E}\, g|\xi| \geq g(\mathbb{E}\, \xi)$.

Если g выпукла вверх, то $\mathbb{E}\, g(\xi) \leq g(\mathbb{E}\, \xi)$

Примечание. Если функция выпукла, то в любой точке её графика можно провести прямую, лежащую ниже графика.

Proof. $\forall x_0 \;\; \exists k(x_0) \;\; g(x) \geq g(x_0) + k(x_0) \cdot (x - x_0)$. Положим $x_0 = \mathbb{E}\, \xi$

$$g(x) \geq g(\mathbb{E}\, \xi) + k(\mathbb{E}\, \xi) \cdot (x - \mathbb{E}\, \xi)$$

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \geq \mathbb{E}(g(\mathbb{E}\, \xi)) + k(\mathbb{E}\, x_0) \cdot \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\, \xi)$$
$$\mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}\, \xi)$$

□

Следствие 22.1. Если $\mathbb{E}\, |\xi|^t < +\infty$, то $\forall 0 < s < t$:

$$\sqrt[s]{\mathbb{E}\, |\xi|^s} \leq \sqrt[t]{\mathbb{E}\, |\xi|^t}$$

Proof. Т.к. $s < t$, то $g(x) = x^{\frac{t}{s}}$ — выпуклая. По неравенству Йенсена при $\eta = \xi^s$:

$$(\mathbb{E}\, |\xi|^s)^{\frac{t}{s}} = \mathbb{E}\, |\eta|^{\frac{t}{s}} = g(\mathbb{E}\, |\eta|) \leq \mathbb{E}\, g(|\eta|) = \mathbb{E}(|\xi|^s)^{\frac{t}{s}} = \mathbb{E}\, |\xi|^t$$

Возьмём корень степени t:
$$(\mathbb{E}\, |\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\mathbb{E}\, |\xi|^t)^{\frac{1}{t}}$$

□

В частности, если $s = 1$, то $\mathbb{E}\, |\xi| \leq \sqrt[t]{\mathbb{E}\, |\xi|^t}$

35 Неравенства Маркова, Чебышева, правило трех сигм.

35.0.1 Неравенство Маркова

Теорема 23.
$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\, |\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Proof.
$$I_A(w) = \begin{cases} 0, & w \notin A \\ 1, & w \in A \end{cases}$$

Дано: $I_A \in B_p$, где $p = P(A)$, $\mathbb{E}\, I_A = p$ и $I(A) + I(\overline{A}) = 1$

$$
\begin{aligned}
|\xi| &= |\xi| \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon) + |\xi| I(|\xi| < \varepsilon) \\
&\geq |\xi| I(|\xi| \geq \varepsilon) \\
&\geq \varepsilon I(|\xi| \geq \varepsilon) \\
&\Downarrow \\
\mathbb{E}\,|\xi| &\geq \mathbb{E}(\varepsilon I(|\xi| \geq \varepsilon)) \\
&= \varepsilon\,\mathbb{E}(I(|\xi| \geq \varepsilon)) \\
&= \varepsilon P(|\xi| \geq \varepsilon) \\
&\Downarrow \\
P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\,|\xi|}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

□

35.0.2 Неравенство Чебышева

Теорема 24.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\,\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\,\xi}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Proof.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\,\xi| \geq \varepsilon) = P((\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}\,\xi}{\varepsilon^2}$$

□

35.0.3 Обобщенное неравенство Чебышева

Теорема 25. Пусть имеется возрастающая функция $g(x) \geq 0$. Тогда:

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\,g(\xi)}{g(\xi)} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Proof. Т.к. $g(x)$ возрастает, по неравенству Маркова:

$$P(\xi \geq \varepsilon) = P(g(\xi) \geq g(\varepsilon)) \leq \frac{\mathbb{E}\,g(\xi)}{g(\xi)}$$

□

35.0.4 Правило трёх сигм

Теорема 26.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\,\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

Proof.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\,\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{\mathbb{D}\,\xi}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}$$

□

Примечание. Можем заметить, что правило трёх сигм дает нам куда большую точность. Таким образом, неравенство Чебышева грубо.

36 Среднее арифметическое одинаковых независимых случайных величин. Закон больших чисел Чебышева.

36.0.1 Среднее арифметическое случайных величин

Можем изменить модель с n экспермиентами так, что проходит 1 эксперимент с n переменными.

Пусть $\xi_1 \dots \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом. Обозначим $a = \mathbb{E}\,\xi_i, d = \mathbb{D}\,\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}an = a$$

$$\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}dn = \frac{d}{n}$$

$$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

36.1 Законы больших чисел

36.1.1 Закон больших чисел Чебышева

Теорема 27. $\xi_1 \dots \xi_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом. Тогда $\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\,\xi_i$

Proof. Пусть $a = \mathbb{E}\,\xi_i, d = \mathbb{D}\,\xi_i, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{d}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{d}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow{n\to+\infty}1\Rightarrow\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}a$$

□

37 Вывод закона больших чисел Бернулли из закона больших чисел Чебышева. Законы больших чисел Хинчина и Колмогорова (только формулировки), закон больших чисел Маркова (с док-м).

37.0.1 Закон больших чисел Бернулли

Теорема 28. Пусть v_A — число появлений события A в серии из n независимых экспериментов, p — вероятность события A. Тогда частота $\frac{v_A}{n}\xrightarrow{P}p$.

Примечание. Эта теорема обосновывает определение статистической вероятности.

Proof. Заметим, что $v_A = \xi_1+\xi_2+\dots\xi_n$, где ξ_i есть число появления A при i-том испытании. $\xi_i\in B_p\Rightarrow\mathbb{E}\,\xi_i=p,\mathbb{D}\,\xi_i=pq$. Поэтому по закону больших чисел Чебышева $\frac{v_A}{n}=\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}E\xi_i=p$. □

При этом:

$$P\left(\left|\frac{v_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Этот факт можно можно использовать для грубой оценки.

37.0.2 Закон больших чисел Хинчина

Теорема 29. $\xi_1\dots\xi_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным <u>первым</u> моментом. Тогда $\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}\,\xi_i$

Proof. Будет на последней лекции, т.к. требуется преобразование Фурье. □

37.0.3 Усиленный закон больших чисел Колмогорова

Теорема Хинчина, но для сходимости "почти наверное".

37.0.4 Закон больших чисел Маркова

Теорема 30. Последовательность случайных величин $\xi_1\dots\xi_n$ с конечными вторыми моментами, причём $\mathbb{D}\,S_n=o(n^2)$. Тогда $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ или $\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}-\frac{\mathbb{E}\,\xi_1+\dots+\mathbb{E}\,\xi_n}{n}\xrightarrow{P}0$

Proof.

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{\mathbb{E}\,\xi_1+\dots+\mathbb{E}\,\xi_n}{n}$$

По неравенству Чебышева:

$$P\left(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathcal{O}(n^2)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{O}(n^2)}{n^2}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

□

38 Совместные распределения случайных величин. Функция совместного распределения, ее свойства. Независимость случайных величин.

Определение. **Случайным вектором** $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n)$ называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Случайный вектор задает отображение $(\xi_1 \dots \xi_n)(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Поэтому случайный вектор также называют **многомерной случайной величиной**, а соответствующее распределение $P(\prod) = P(\omega \in \Omega)(\xi_1 \dots \xi_n)(\omega) \in B$, где $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ называется **многомерным распределением**.

Таким образом, мы получаем новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), P(B))$.

Примечание. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра — минимальная[3] σ-алгебра, порожденная n-мерными прямоугольниками.

38.1 Функция распределения

Определение. **Функцией совместного распределения** случайных величин $\xi_1 \dots \xi_n$ называется функция $F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1 \dots x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n)$, то есть вероятность попадания в бесконечный параллелепипед.

Т.к. любой параллелепипед можно представить в виде пересечения таких параллелепипедов, то можно найти меру любого борелевского множества. Таким образом, по F можно найти $P(B)\ \ \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

Примечание. В дальнейшем мы будем изучать только системы из двух случайных величин ξ и η. $F_{\xi,\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$. Геометрически F есть вероятность попадания в третью четверть относительно точки (x, y).

Свойства.

1. $0 \leq F_{\xi,\eta}(x, y) \leq 1$
2. $F_{\xi,\eta}(x, y)$ — неубывающая по каждому из аргументов.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = 0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x, y) = 1$. Интуитивно это следует из геометрического определения F.
4. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому аргументу.

[3] т.е. полученная римановским продолжением

5. Можно восстановить частное *(маргинальное)* распределение:

$$\lim_{x\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\eta(y) \qquad \lim_{y\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)$$

6. Можно вычислить вероятность попадания в любой прямоугольник:

$$P(x_1 \le \xi < x_1, y_1 \le \eta < y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$$

Proof. Рассмотрим событие

$$\{\xi < x_2, \eta < y_2\} = \{x_1 \le \xi < x_1, y_1 \le \eta < y_2\} + \{\xi < x_1, \eta < y_2\} + \{\xi < x_2, \eta < y_2\}$$

Первое событие из правой части не совместно с вторым и третьим. Возьмём вероятность:

$$P(\xi < x_2, \eta < y_2) = P(x_1 \le \xi < x_1, y_1 \le \eta < y_2) + P(\{\xi < x_1, \eta < y_2\} + \{\xi < x_2, \eta < y_2\})$$

$$\begin{aligned} F(x_2,y_2) = P(x_1 \le \xi < x_1, y_1 \le \eta < y_2) &+ P(\xi < x_1, \eta < y_2) \\ &+ P(\xi < x_2, \eta < y_1) - P(\xi < x_1, \eta < y_2) \end{aligned}$$

$$P(x_1 \le \xi < x_2, y_1 \le \eta < y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$$

□

Также можно привести тривиальное геометрическое доказательство.

38.2 Независимость случайных величин

Определение. Случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ **независимы в совокупности**, если для любого набора борелевских множеств $B_1 \dots B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $P(\xi_1 \in B_1 \dots \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$

Определение. Случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ **попарно независимы**, если независимы любые две из них.

Примечание. Независимость в совокупности более сильная, чем попарная независимость, т.е. из независимости в совокупности следует попарная независимость. Обратное утверждение неверно.

Примечание. В дальнейшем под независимыми понимаем независимые в совокупности.

39 Дискретная система двух случайных величин. Закон совместного распределения. Маргинальные распределения.

Определение. Случайные величины ξ и η имеют дискретное совместное распределение, если случайный вектор (ξ, η) принимает не более чем счётное число значений.

То есть существует конечный или счётный набор пар чисел (x_i, y_j), такой что:

1. $P(\xi = x_i, \eta = y_j) > 0$
2. $\sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_j) = 1$

Таким образом, двумерная случайная дискретного величина задается законом распределения — таблицей вероятностей $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$. Зная общий *(совместный)* закон распределения, можно найти частный *(маргинальный)* закон распределения случайных величин ξ и η по формулам:

- $\xi : p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$
- $\eta : q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$

Определение. Дискретные случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ **независимы**, если $P(\xi_1 = x_1 \dots \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) \cdots P(\xi_n = x_n)$.

Определение. Случайные величины ξ и η **независимы**, если во всех клетках распределения $p_{ij} = p_i q_j$

40 Абсолютно непрерывная система двух случайных величин. Плотность совместного распределения, ее свойства.

Определение. Случайные величины ξ и η имеют **абсолютно непрерывное совместное распределение**, если существует функция $f_{\xi,\eta} \geq 0$, такая что

$$P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta} dxdy \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

При этом $f_{\xi,\eta}$ называется **плотностью** совместного распределения.

Геометрический смысл плотности: если B — замкнутая ограниченная область, то $P((\xi, \eta) \in B)$ есть объем цилиндрического тела, ограниченного снизу B, а сверху $f_{\xi,\eta}$.

Свойства.

1. $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$
2. Нормировка: $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x, y) dxdy = 1$
3. $F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(x, y) dxdy$
4. $f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x \partial y}$

5. Если случайные величины ξ, η имеют абсолютной непрерывное распределение $f(x,y)$, то маргинальное распределение ξ и η также абсолютно непрерывные с плотностями $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

   Proof.

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

   $f_\eta(y)$ — аналогично. □

6. Абсолютно непрерывные случайные величины $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы[4] тогда и только тогда, когда плотность их совместного распределения существует и равна произведению их плотностей:

$$f_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1\dots x_n) = f_{\xi_1}(x_1)\cdots f_{\xi_n}(x_n)$$

   Proof. Докажем для случая $n = 2$, общий случай аналогичен.

   Случайные величины ξ и η независимые $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{\xi,\eta}(x,y) &= F_\xi(x)F_\eta(y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_\xi(x)f_\eta(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy \end{aligned}$$

   Таким образом, $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$ □

Примечание. Совместное распределение двух абсолютно непрерывных случайных величин не обязано быть абсолютно непрерывным — оно может быть сингулярным.

Пример. Бросаем точку на отрезок на плоскости. Первая координата — ξ, вторая координата — η. Мера отрезка на плоскости есть 0, при этом число точек несчётно. Таким образом, распределение (ξ, η) сингулярное.

[4] в совокупности

41 Функции от двух случайных величин. Теорема о функции распределения. Формула свертки.

Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с плотностью $f(x, y)$ и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Что мы можем сказать про случайную величину $g(\xi_1, \xi_2)$?

Теорема 31. Пусть $z \in \mathbb{R}, D_z = \{(x, y) \mid g(x, y) < z\}$. Тогда случайная величина $\eta = g(x, y)$ имеет функцию распределения:

$$F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$$

Proof.

$$F_\eta = P(\eta < z) = P(g(\xi_1, \xi_2) < z) = P((\xi_1, \xi_2) \in D_z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$$

□

41.1 Формула свертки

Теорема 32. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые, абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(x)$
Тогда $\xi_1 + \xi_2$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t - x)\, dx$$

Proof. Т.к. случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность совместного распределения равна произведению плотностей: $f_{\xi_1\xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$. Применим предыдущую теорему для $\eta = g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$. Тогда $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| x + y < z\}$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\xi_1\xi_2}(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{t-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\, dy =$$

$$\begin{bmatrix} y = t - x & t = y + x & dy = dy \\ y(-\infty) = -\infty & t(z - x) = z & \end{bmatrix} = \int_{\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x)\, dx}_{f_{\xi_1+\xi_2}(t)}\, dt \implies f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x)\, dx$$

□

42 Суммы стандартных распределений, устойчивость по суммированию (биномиальное, Пуассона, стандартное нормальное).

Определение. Если сумма двух независимых случайных величин одного типа распределений также будет этого типа, то говорят что это распределение **устойчиво** относительно суммирования.

Пример. Независимые случайные величины:

- $\xi_1 \in B_{n,p}$
- $\xi_2 \in B_{m,p}$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in B_{n+m,p}$

Proof. $\xi_1 + \xi_2$ — число успехов в серии из $m + n$ испытаний, где p — вероятность успеха при одном испытании. $\xi_1 + \xi_2 \in B_{n+m,p}$ □

Пример. Независимые случайные величины:

- $\xi_1 \in \Pi_\lambda$
- $\xi_2 \in \Pi_\mu$

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in \Pi_{\lambda+\mu}$

Proof.

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(\xi_1 = i, \xi_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p(\xi_1 = i) \cdot p(\xi_2 = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

□

Пример. $\xi_1, \xi_2 \in N(0,1)$ — независимые случайные величины. Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in N(0,2)$

Proof.

$$\begin{aligned} f_{\xi_1+\xi_2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 - tx + \frac{t^2}{2})} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{t}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

□

43 Условные распределения и условные математические ожидания. Случаи дискретной и абсолютно непрерывной систем двух случайных величин.

Определение. Условным распределением случайной величины из системы случайных величин (ξ, η) называется ее распределение найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение

Обозначение. $\xi|\eta = y - \xi$ при условии что η приняла значение y

Определение. Условным математическим ожиданием $E(\xi|\eta = y)$ называется математическое ожидание случайной величины ξ при соответствующем условном распределении:

1. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин

$$P(\xi = x_i|\eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)}$$

2. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин

   Пусть двумерная абсолютно непрерывная случайная величина (ξ, η) задана плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Тогда плотность условного распределения $\xi|\eta = y$ будет равна:

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$$

Определение. Функция $f(x|y)$ называется **условной плотностью**. Аналогично $f(y|x) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\xi(x)}$

Лемма 2. Условное математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)\, dx$$

Аналогично

$$E(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x)\, dy$$

44 Пространство случайных величин. Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Примечание. Если $\xi = \eta$ почти наверное, т.е. $p(\xi = \eta) = 1$, то говорят, что $\xi = \eta$

$(\Omega, \mathfrak{F}, p)$ — вероятностное пространство
Введем $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, p) = \{\xi \big| \, \mathbb{E}\,\xi^2 < \infty\}$

Определение. Скалярным произведением случайных величин $\xi, \eta \in L_2(\Omega, \mathfrak{F}, p)$, называется число

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}(\xi\eta)$$

Примечание. $\langle \xi, \eta \rangle$ — фиксированная двумерная случайная величина с ... законом распределения $p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij}$, то

$$\mathbb{E}\,\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

Примечание. Если $\langle \xi, \eta \rangle$ — обе непрерывно дифф. случайные величины с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, то

$$\mathbb{E}\,\xi\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy$$

Свойства.

1. $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$
2. $\langle C\xi, \eta \rangle = C \langle \xi, \eta \rangle$
3. $\langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle + \langle \xi_2, \eta \rangle$
4. $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$
5. $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ почти наверное

Т.е. это скалярное произведение.

Определение. $\|\xi\| = \sqrt{\mathbb{E}\,\xi^2}$ и $\rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$, получаем $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, p)$

Теорема 33 (неравенство Коши-Буняковсого-Шварца)**.** Пусть случайные величины ξ, η имеют конечные вторые моменты
Тогда

$$|\,\mathbb{E}\,\xi\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\eta^2}$$

Причем $|\,\mathbb{E}\,\xi\eta| = \sqrt{\mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\,\eta^2} \Leftrightarrow \eta = C\xi$, почти наверное, $C = \mathrm{const}$

Proof.

$$P_2(x) = \mathbb{E}(x\xi - \eta)^2 = \mathbb{E}(x^2\xi^2 - 2x\xi\eta + \eta^2) = x^2 E\xi^2 - 2xE\xi\eta + \mathbb{E}\,\eta^2 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = (\mathbb{E}\,\xi\eta)^2 - \mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\,\eta^2 < 0 \Leftrightarrow |\,\mathbb{E}\,\xi\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\,\eta^2}$$

$\square$

Следствие 33.1 (неравенство треугольника).

$$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$$

Proof.
$$\|\xi + \eta\|^2 = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 = \mathbb{E}\,\xi^2 + 2E\xi\eta + \mathbb{E}\,\eta^2 \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\,\xi^2 + 2\sqrt{\mathbb{E}\,\xi^2} \cdot \sqrt{\mathbb{E}\,\eta^2} = \|\xi\|^2 + 2\|\xi\|\|\eta\| + \|\eta\|^2 = (\|\xi\| + \|\eta\|)^2 \implies$$
$$\implies \|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$$

□

45 Условное математическое ожидание как случайная величина, его свойства. Обобщенная формула полной вероятности.

46 Числовые характеристики зависимости случайных величин. Ковариация, ее свойства. Коэффициент корреляции, его свойства. Корреляция случайных величин.

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{\mathbb{E}\,\xi\eta - \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\,\eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

Свойства.

1. $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
2. (a) Если ξ и η независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$

   (b) Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то ξ, η не независимы
3. $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

   Proof. Не дописано □
4. $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$ почти наверное

   Proof. По неравенству Шварца: $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta - \mathbb{E}\,\eta = C \cdot (\xi - \mathbb{E}\,\xi)\quad \eta = \underbrace{C}_{a}\xi + \underbrace{(\mathbb{E}\,\eta - CE\xi)}_{b}$ □
5. (a) Если $r_{\xi,\eta} = 1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a > 0$

   (b) Если $r_{\xi,\eta} = -1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a < 0$

   Proof. Т.к. $|r_{\xi,\eta}| = 1$, то $\eta = a\xi + b$ Не дописано □

Определение. Если коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то говорят, что случайные величины ξ, η **коррелированы** друг с другом

1. Если $r_{\xi,\eta} > 0$, то **прямая** корреляция
2. Если $r_{\xi,\eta} < 0$, то **обратная** корреляция

Примечание. Если $r(\xi_1, \xi_2) > 0$ и $r(\xi_2, \xi_3) > 9 \not\Rightarrow r(\xi_1, \xi_3) > 0$ — нет транзитивности

47 Характеристическая функция случайной величины, ее свойства. Теорема о непрерывном соответствии (формулировка).

Определение. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}\, e^{it\xi} \quad t \in \mathbb{R}$$

Свойства.

1. Характеристическая функция существует для любой случайной величины, при чем

$$|\varphi_\xi(t)| \leq 1$$

Proof.

$$\mathbb{D}\,\eta = \mathbb{E}\,\eta^2 - (\mathbb{E}\,\eta)^2 \geq 0 \implies (\mathbb{E}\,\eta)^2 \leq \mathbb{E}\,\eta^2$$

$$|\varphi_\xi(t)|^2 = |\,\mathbb{E}\,e^{it\xi}|^2 = |\,\mathbb{E}\cos t\xi + iE\sin t\xi|^2 = (\mathbb{E}\cos t\xi)^2 + (\mathbb{E}\sin t\xi)^2 \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\cos^2 t\xi + \mathbb{E}\sin^2 t\xi = \mathbb{E}(\cos^2 t\xi + \sin^2 t\xi) = E1 = 1$$

□

2. Пусть $\varphi_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, тогда характеристическая функция случайной величины $\eta = a + b\xi$:

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(bt)$$

Proof.

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = Ee^{it(a+b\xi)} = Ee^{ita} \cdot e^{itb\xi} = e^{ita} \cdot Ee^{i(tb)\xi} = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(bt)$$

□

3. Пусть случайная величины ξ и η независимы, тогда

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Proof.

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} \cdot e^{it\eta} = Ee^{it\xi} \cdot Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

□

4. Пусть существует k-тый момент случайной величины ξ, тогда характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ непрерывно дифференцируема k раз и

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathbb{E}\,\xi^k$$

Proof. Доказательство существования непрерывности опустим

$$\varphi_\xi^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} Ee^{it\xi}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{it\xi}\right) = \mathbb{E}(i^k \xi^k e^{it\xi}) \xlongequal[t=0]{} \mathbb{E}(i^k \xi^k e^0) = i^k \cdot \mathbb{E}\,\xi^k$$

□

5. Пусть $\mathbb{E}\,|\xi|^k < \infty$. Тогда

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + it\,\mathbb{E}\,\xi - \frac{t^2}{2}\,\mathbb{E}\,\xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}\,\mathbb{E}\,\xi^2 + o(|t|^k)$$

Proof. По формуле Тейлора в точке $t = 0$

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \frac{\varphi_\xi'(0)}{1!} t + \frac{\varphi_\xi''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\varphi_\xi^{(k)}}{k!} t^k + o(|t|^2) =$$

$$= \varphi_\xi(0) + itE\xi - \frac{t^2}{2}\,\mathbb{E}\,\xi^2 + \dots + \frac{i^k t^k}{k!}\,\mathbb{E}\,\xi^k + o(|t|^2)$$

□

6. Распределение случайной величины восстанавливается по характеристической функции, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями. В частности если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то плотность:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \varphi_\xi(t)\,dt$$

Теорема 34 (о непрерывном соответсвии)**.** Последовательность случайных величин ξ_n слабо сходится к случайной величине ξ, тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций поточечно сходится к характеристической функции $\varphi_\xi(t)$

$$\xi_n \rightrightarrows \xi \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$$

48 Характеристические функции стандартных распределений (Бернулли. биномиальное, Пуассона, нормальное). Следствия.

48.0.1 Распределение Бернулли

$\xi \in B_p$

ξ	0	1
η	$1-p$	p

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}\, e^{it\xi} = e^{it\cdot 0} p(\xi = 0) + e^{it1} \cdot p(\xi = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

48.0.2 Биномиальное распределение

$\xi \in B_{n,p}$ — число успехов при n независимых испытаниях

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

, где $\xi_i = B_p$ — число успехов при одном испытании

$$\varphi_\xi(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

48.0.3 Распределение Пуассона

$\xi \in \Pi_\lambda$

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itk} \cdot p(\xi = k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)$$

Следствие 34.1. Если $\xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$ — независимые случайные величины, то $\xi + \eta = \Pi_{\lambda+\mu}$

48.0.4 Стандартное нормальное распределение

$\xi \in N_{0,1}$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(t) &= ??? \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

48.0.5 Нормальное распределение

$\xi \in N_{a,\sigma^2}$

$$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1) \quad \xi = a + \sigma\eta$$

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{a+\sigma\eta}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\eta(\sigma t) = e^{ita} \cdot e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

Следствие 34.2. $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$ — независимые случайные величин. Тогда

$$\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

49 Доказательство закона больших чисел Хинчина.

Теорема 35. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом a. Тогда

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} a$$

Proof. Докажем, что $\frac{S_n}{n} \rightrightarrows a$, тогда по теореме об эквивалентности сходимости к константе искомое будет верно.

$$\frac{S_n}{n} \rightrightarrows a \Leftrightarrow \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \to \varphi_a(t) = \mathbb{E}\, e^{ita} = e^{ita} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

По свойству 5, т.к. первый момент существует,

$$\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + it\,\mathbb{E}\,\xi_1 + o(t) = 1 + ita + o(t)$$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(\varphi_{\xi_1}\left(1 + \frac{ita}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right)^n \to e^{ita}$$

□

50 Центральная предельная теорема. Вывод из нее предельной теоремы Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Ессеена (формулировка).

Не дописано