

*Упражнение 1.* Рассмотрим множество всех отображений из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$   $S = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Введём на нём операцию композиции как стандартную композицию функций. Доказать, что регулярные справа алгоритмы это в точности (все) сюръективные отображения.

*Решение.*  $\triangleleft g$  — правый регулярный, т.е.  $\forall f_1, f_2 \in S \quad f_1 \circ g = f_2 \circ g \Rightarrow f_1 = f_2$ .

$$f_1 \circ g = f_2 \circ g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(g(x)) = f_2(g(x))$$

Если  $h$  сюръективно,  $h$  — правое регулярное, т.к.  $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  по определению сюръективного отображения и тогда  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(h(x)) = f_2(h(x)) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = f_2(x)$ , из чего следует  $f_1 = f_2$  по определению.

Если  $g$  не сюръективно, то  $\exists y : \nexists x \quad g(x) = y$  по определению. Тогда рассмотрим произвольную функцию  $f_1 \in S$  и  $f_2 = \begin{cases} f_1(x), & x \neq y \\ f_1(x) + 1, & x = y \end{cases}$ . Условие  $f_1(g(x)) = f_2(g(x))$  выполнено, но  $f_1 \neq f_2$ .

Таким образом, все сюръективные отображения являются регулярными справа, а не сюръективные — нет.  $\square$

*Упражнение 2.* Рассмотрим множество пар целых чисел  $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Зададим на нём операцию композиции:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Проверить ассоциативность. Найти все (односторонние) нейтральные и поглощающие элементы. Найти все регулярные элементы.

*Решение.*

$$(a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) * (a_2 a_3, a_2 b_3 + a_3 b_2) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1)$$

$$((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) * (a_3, b_3) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1)$$

Оба результата равны, следовательно операция ассоциативна.

Операция очевидно коммутативна, поэтому не будем рассматривать отдельно левые и правые элементы.

$\triangleleft (e_a, e_b)$  — нейтральный элемент

$$(e_a, e_b) * (a, b) = (e_a a, e_b \cdot a + e_a \cdot b) = (a, b)$$

$$\begin{cases} e_a a = a \\ e_b a + e_a b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_a = 1 \\ e_b = 0 \end{cases}$$

$\triangleleft(\theta_a, \theta_b)$  — поглощающий элемент

$$(\theta_a, \theta_b) * (a, b) = (\theta_a a, \theta_a b + \theta_b a) = (\theta_a, \theta_b)$$

$$\begin{cases} \theta_a a = \theta_a \\ \theta_a b + \theta_b a = \theta_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = 0 \\ \theta_b a = \theta_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = 0 \\ \theta_b = 0 \end{cases}$$

$\triangleleft(x, y)$  — регулярный элемент.

$$\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \quad (a_1, b_1) * (x, y) = (a_2, b_2) * (x, y) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$$(a_1 x, b_1 x + a_1 y) = (a_2 x, b_2 x + a_2 y)$$

$$\begin{cases} a_1 x = a_2 x \\ b_1 x + a_1 y = b_2 x + a_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 x = b_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Мы потеряли случай  $x = 0$  (тогда нельзя сокращать на  $x$ ), рассмотрим его:

$$b_1 x + a_1 y = b_2 x + a_2 y \Rightarrow a_1 y = a_2 y \Rightarrow a_1 = a_2$$

$b_1 \neq b_2$  в общем случае.

Итого:

- Нейтральный элемент  $(0, 0)$
- Поглощающий элемент  $(0, 0)$
- Регулярные элементы  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}\}$

□

**Упражнение 3.** Пусть есть некоторая конечная полугруппа  $S$  и  $a \in S$  есть некоторый фиксированный элемент. Рассмотрим множество  $M = a \cdot S = \{a \cdot x \mid x \in S\}$ . Что можно сказать про  $|M|$ , если  $|S| = n$ ? Каков будет ответ в случае, если  $a$  регулярен?

**Решение.** Если  $a$  произвольный, то ничего (технически  $|M| \leq n$ ).

Если  $a$  регулярен, то  $a \cdot x$  пробегает все возможные элементы  $S$ , т.к.  $\nexists a_1 \neq a_2 : a_1 \cdot x = a_2 \cdot x$ . Таким образом,  $|M| = |S| = n$ . □

**Упражнение 4.** Пусть  $S$  — некоторая полугруппа с левым сокращением. Доказать, что любой идемпотент  $e$  (свойство  $e \cdot e = e$ ), то  $e$  — левый нейтральный.

**Решение.** Пусть  $e \cdot x$  это некоторое  $a \in S$ . Докажем, что  $x = a$ .

$$e \cdot x = a$$

$$e \cdot e \cdot x = e \cdot a$$

$$e \cdot x = e \cdot a$$

$$x = a$$

□

*Упражнение 5.* Пусть  $S$  — некоторая полугруппа со следующим свойством. Из того, что  $ab = cd$  следует либо  $a = c$ , либо  $b = d$ . Доказать, что  $S$  — полугруппа левых либо правых нулей.

*Решение.*  $\triangleleft a, b \in S$

$$a \cdot b =: c$$

$$b \cdot a \cdot b = b \cdot c$$

$$(b \cdot a) \cdot b = b \cdot c$$

Либо  $b \cdot a = b$ , либо  $b = c$ . В первом случае  $b$  — левый поглощающий. Во втором случае можно подставить в исходное равенство и получить  $a \cdot b = b$  и тогда  $b$  правый поглощающий. □

*Упражнение 6.* Рассмотрим некоторую полугруппу  $S$  и некоторую её подполугруппу  $H \subset S$ . Будем говорить, что  $a \sim b$  если  $aH = bH$ . Проверить, что заданное отношение есть отношение эквивалентности. Построим фактор-множество  $Y = S/R$ . Пусть некоторый элемент  $a$  регулярен слева. Что можно сказать про регулярность элемента  $b \in [a]$ ?

*Решение.* Проверим, что  $R$  — отношение эквивалентности:

1. Рефлексивность:  $aH = aH$
2. Транзитивность: по транзитивности равенства множеств
3. Симметричность: по симметричности равенства множеств

Если  $a$  регулярен слева, то  $|aH| = |H|$  (см. задание 3). Таким образом,  $|bH| = |aH| = |H|$ . Т.к.  $|bH| = |H|$ , то  $b \cdot x$  пробегает все элементы  $H$ . Из этого следует регулярность слева ( $\forall H$ ) — если  $\exists x_1, x_2 \in H : b \cdot x_1 = b \cdot x_2$  &  $x_1 \neq x_2$ , то  $bH \neq H$ .

Регулярности в  $S$  нет в общем случае — если  $\exists x \in S \setminus H$ , то пусть  $b \cdot x = y$ , где  $y$  — произвольный элемент  $bH$  (и следовательно  $\exists z \in H : b \cdot z = y$ ). Тогда  $b$  не регулярен в  $S$ , т.к.  $b \cdot x = y = b \cdot z$ . □

*Упражнение 7.* Пусть на некотором множестве  $X$  задано отношение частичного порядка  $\rho$  (в смысле  $\leq$ ). Определим отношения  $R = \rho \circ \rho^{-1}$  и  $L = \rho^{-1} \circ \rho$ . Что можно сказать про отношения  $R, L$ ?

Определим для некоторого  $a \in X$  множество  $R(a) = \{b \mid b \in X, aRb\}$ , как множество всех элементов, которые состоят в отношении  $R$  с  $a$ . Указать процедуру поиска  $R(a)$ .

Решение.  $\triangleleft R$

$$aRc \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b : (a\rho b) \ \& \ (b\rho^{-1}c) \Rightarrow (a\rho b) \ \& \ (c\rho b)$$

С точки зрения графа это выглядит так: у  $a$  и  $c$  есть общий потомок.



$\triangleleft L$

$$aLc \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b : (a\rho^{-1}b) \ \& \ (b\rho c) \Rightarrow (b\rho a) \ \& \ (b\rho c)$$

С точки зрения графа это выглядит так: у  $a$  и  $c$  есть общий родитель



Поиск  $R(a)$ : ищем все  $c \in S$ , такие что есть общий ( $c a$ ) потомок  $b$ . Переберем всех кандидатов на роль  $b$  — это все потомки  $a$ . Для каждого  $b$  переберем его родителей. Все такие родители образуют  $R(a)$ .  $\square$