Линейная алгерба 1 из 2

$$\varphi: X \to X$$

Определение. $x \in X$ — собственный вектор φ , если

$$x \neq 0$$
 $\varphi x = \lambda x$, $\lambda \in K$

 λ — собственное значение φ , соответствующее x

Определение. Спектр $\sigma_{\varphi}=\{\lambda_1\dots\lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Пример. Найти спектр и собственные вектора оператора φ , заданного матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Найдем спектр:

$$\chi_{\varphi}(\lambda) = |A_{\lambda}E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 6\\ -2 & 6-\lambda & 3\\ 6 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)((6-\lambda)(-2-\lambda)-9) + 2(2(2+\lambda)-18) + 6(-6-6(6-\lambda)) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21) + 4(\lambda - 7) - 36(7-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 21) + 40(\lambda - 7) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda - 7)(\lambda + 3) + 40(\lambda - 7) =$$

$$(49-\lambda^2)(\lambda - 7) = (\lambda - 7)^2(\lambda + 7)$$

$$\sigma_{arphi}=$$
 корни $\chi_{arphi}=\{-7,7^{(2)}\}$

Найдем собственные вектора:

1.
$$\lambda = -7$$

$$A\xi = \lambda \xi \Rightarrow (A - \lambda E)\xi = 0 - \text{однор. CJIAY}$$

$$\begin{bmatrix} 3+7 & -2 & 6 \\ -2 & 6+7 & 3 \\ 6 & 3 & -2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 13 & 3 \\ 0 & 42 & 14 \\ 0 & 63 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 13 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$]\xi^3 -$$
 параметр $\Rightarrow egin{cases} -2\xi^1 + 13\xi^2 = -3\xi^3 \ 3\xi^2 = -\xi^3 \end{cases}$

$$]\xi^3 = 3 \Rightarrow \xi^2 = -1, \xi^1 = -2 \Rightarrow \xi = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор один (см. СЛАУ)

M3137y2019 Практика 7

Линейная алгерба 2 из 2

2.
$$\lambda=7$$

$$\begin{bmatrix} 3-7 & -2 & 6 \\ -2 & 6-7 & 3 \\ 6 & 3 & -2-7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
 два собственных вектора
$$[\xi^2,\xi^3-\text{параметры}] \xi^2=2,\xi^3=0 \Rightarrow \xi^1=-1$$

$$\xi^2=0,\xi^3=2 \Rightarrow \xi^1=3$$

$$\xi_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

 $\{\xi_j\}_{j=1}^3$ — базис X

Проверка:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Проверим, что A в базисе из собственных векторов диагональна:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\tilde{T}^{T}$$

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

$$\tilde{T}^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{28} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ -6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 7 & -21 \\ -7 & -14 & 0 \\ 21 & 0 & -14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{bmatrix}$$

M3137y2019 Практика 7