Вспомним два интеграла для Γ:

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma(x) \quad x > 0$$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = B(x,y) \overset{(??)}{=} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \approx \frac{1}{C_{x+y}^x}$$

?? надо будет доказать.

Пример.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2021} x dx \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin^2 x \\ dt = 2\sin x \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t^{\frac{1}{2}})} \end{bmatrix} \\
&= \int_0^1 t^{1010.5}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1010}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}B(1011, \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(1011)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1011.5)}
\end{aligned}$$

Для вычисления Γ у нас есть несколько формул:

- Формула понижения: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
- Формула дополнения: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$
- $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

Таким образом, мы можем вычислить все Γ в ответе.

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1011)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1011.5)} = \frac{1}{2}\frac{1010!\sqrt{\pi}}{\frac{2021}{2}\cdot\frac{2019}{2}\ldots} = \frac{1010!2^{1009}}{}$$

Упражнение 1 (3845).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

Можно решить через $t^4 = x$, но это сложно.

$$t := \frac{1}{1+x} \quad x = \frac{1}{t} - 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\frac{1}{4}} dt = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Упражнение 2 (3849).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} t^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1}{n}} dt = B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{1}{n}\right)}$$

Упражнение 3 (3848).

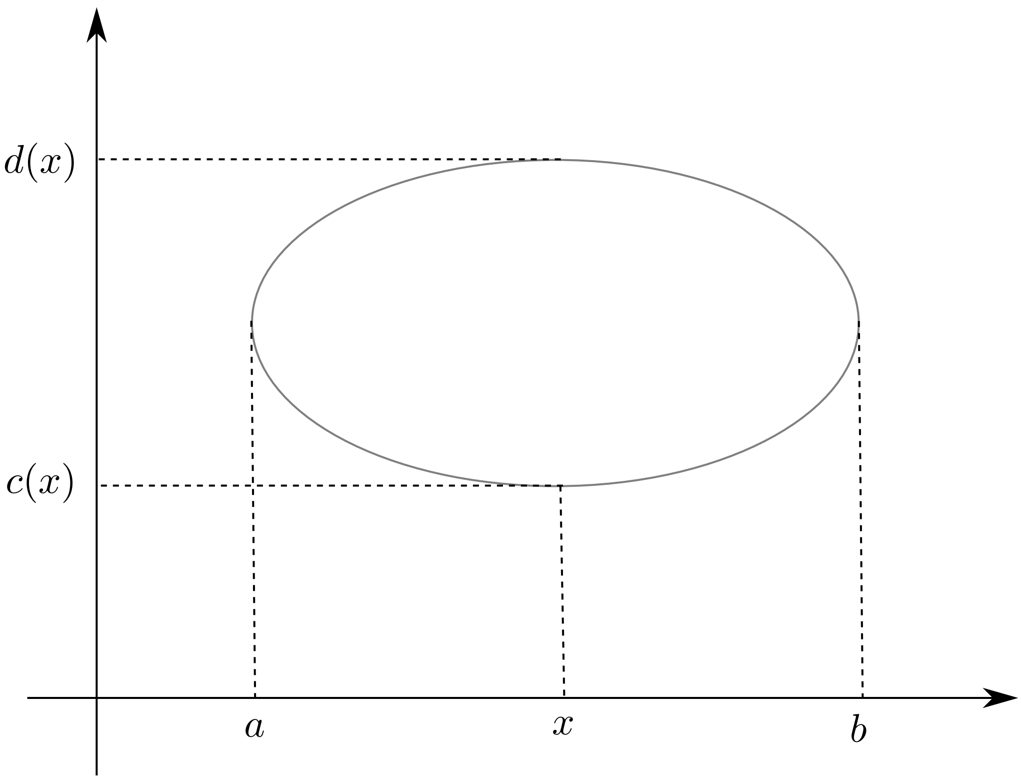
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx = [\sin^2 x = t] = \int_0^1 t^3(1-t)^2 \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{7!!5!!\pi}{2^8 5!}$$

Кратные интегралы

$$\int\int f dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy\right) dx$$

Упражнение 4.

$$\int_{-1}^2 dx \int_x^{x^2} f dy$$


$d(x)$
$c(x)$
a
x
b