Упражнение 1. Доказать, что евклидово кольцо R есть область целостности.

*Решение.* Это неверно, т.к. вырожденное кольцо  $\{0\}, 0=1$  является евклидовым, но не является целостным.

Если в такое не верится, то кольцо  $\{0,1,x,1+x\}, x^2=0$  не является целостным, т.к.  $x\cdot x=0$ , но  $x\neq 0$ , при этом это кольцо является евклидовым:

$$F(t) := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t = 1 \\ 1, & t = 1 + x \\ 2, & t = x \end{cases}$$

$$a = q \cdot b + r$$

$$0 = 0 \cdot *^{1} + 0$$

$$1 = 1 \cdot 1 + 0$$

$$1 = \underbrace{x \cdot x}_{F=2} + \underbrace{1}_{F=1}$$

$$1 = \underbrace{(1+x) \cdot (1+x)}_{1} + 0$$

$$x = x \cdot 1 + 0$$

$$x = 1 \cdot x + 0$$

$$x = \underbrace{x \cdot (1+x)}_{x} + 0$$

$$1 + x = (1+x) \cdot 1 + 0$$

$$1 + x = (1+x) \cdot 1 + 0$$

$$1 + x = \underbrace{(1+x) \cdot 1}_{1+x} + 0$$

Упражнение 2. Найти gcd(9+12i,5) в  $\mathbb{Z}[i]$ .

Михайлов Максим

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Подразумевается любой элемент кольца.

Решение.

$$9 + 12i = 5 \cdot (2 + 2i) + (-1 + 2i)$$
$$2 + 2i = (-1 + 2i) \cdot (-i) + i$$
$$-1 + 2i = i \cdot 2 - 1$$
$$i = (-1) \cdot (-i)$$

Otbet: -1.

Упражнение 3. Рассмотрим кольцо R:

$$R = \{n + md \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad d^2 = 3$$

Какими свойствами обладает данное кольцо? Является ли оно областью целостности? Евклидовым?

Решение.

• В этом кольце есть единица, это  $1 + 0 \cdot d$ .

• Коммутативность тривиальна.

Решений нет, следовательно, это кольцо целостности.

Михайлов Максим 18.12.2021

 $\sqrt{3}y = b$ 

*Упражнение* 4. Рассмотрим кольцо R:

$$R = \{n + md \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad d^2 = 0$$

Какими свойствами обладает данное кольцо? Является ли оно областью целостности? Евклидовым?

Решение.

- В этом кольце есть единица, это  $1 + 0 \cdot d$ .
- Коммутативность тривиальна.
- $d \cdot d = 0, d$  делитель нуля.
- $\triangleleft n_1 + m_1 d, n_2 + m_2 d$

$$n_1 + m_1 d = q \cdot (n_2 + m_2 d) + r$$
  

$$n_1 + m_1 d = (n_3 + m_3 d) \cdot (n_2 + m_2 d) + (n_4 + m_4 d)$$
  

$$n_1 + m_1 d = n_2 n_3 + n_2 m_3 d + n_3 m_2 d + n_4 + m_4 d$$

$$\begin{cases} n_1 = n_2 n_3 + n_4 \\ m_1 = n_2 m_3 + n_3 m_2 + m_4 \end{cases}$$

Первое уравнение решается в  $\mathbb{Z}$ , при этом  $|n_4|<|n_2|$  или  $n_4=0$ . Т.к.  $n_3$  и  $m_2$  теперь фиксированы, то уравнение  $m_1-n_3m_2=n_2m_3+m_4$  также решается и  $|m_4|<|m_2|$  или  $m_4=0$ . Тогда N(n+md)=|n|+|m| подходит и кольцо евклидово.

Михайлов Максим