

Методы трансляции

Михайлов Максим

31 декабря 2021 г.

Оглавление

| | | |
|----------|--|----|
| Лекция 1 | 2 сентября | 2 |
| 1 | Введение | 2 |
| 2 | $LL(k)$, FIRST, FOLLOW | 4 |
| Лекция 2 | 9 сентября | 6 |
| 2.1 | Вычисление FIRST | 6 |
| 2.2 | Вычисление FOLLOW | 7 |
| 2.3 | Доказательство теоремы о характеристизации $LL(1)$ | 7 |
| 2.4 | Проблемы грамматик | 8 |
| 2.4.1 | Левая рекурсия | 8 |
| 2.4.2 | Правое ветвление | 8 |
| 2.4.3 | Пример | 9 |
| 3 | Построение парсеров | 9 |
| Лекция 3 | 16 сентября | 11 |

Лекция 1

2 сентября

1 Введение

Этот курс — про парсеры. Рассмотрим их работу в общем случае.

1. На вход подается строка.
2. Строка разбивается на неделимые блоки (*лексемы или токены*) лексическим анализом.
3. Последовательность токенов с учетом синтаксиса языка переводится в дерево разбора путем синтаксического разбора (*парсинга*).
4. Дерево разбора не есть самоцель, дерево переводится с учетом семантики языка в искомый результат.

Адепты *architecture-driven* подхода могут захотеть разделить семантику и синтаксис, однако это проблематично. Рассмотрим арифметические выражения как пример.

Токены арифметических выражений это $+$, \cdot , $($, $)$, n , где n — число. Синтаксис задается следующей контекстно-свободной грамматикой:

- $E \rightarrow n$
- $E \rightarrow (E)$
- $E \rightarrow E + E$
- $E \rightarrow E \cdot E$

Однако, эта грамматика не однозначна, и выражение $2 + 2 \cdot 2$ можно разобрать по-разному, из-за чего невозможно навесить семантику. Таким образом, синтаксис нужно задавать с учетом семантики:

- $E \rightarrow T$

- $E \rightarrow T + E$
- $T \rightarrow F$
- $T \rightarrow F \cdot T$
- $F \rightarrow n$
- $F \rightarrow (E)$

Но с такой грамматикой операции правоассоциативные и семантику не получится навесить с добавлением вычитания. В правильной грамматике нужно переставить местами аргументы второго правила.

Рассмотрим, как мы будем писать калькулятор арифметических выражений по дереву разбора. Наивный подход — обойти дерево DFS-ом и рассматривать детей вершины, в которой мы находимся. Однако, таким образом информация о синтаксисе описывается в двух сущностях — в парсере и в калькуляторе. Это неудобно, поэтому часто парсинг и вычисления комбинируются в один шаг без построения дерева разбора. На примере арифметических выражений:

- $E_0.val = T.val$
- $E_0.val = E_1.val + T.val$
- $E_0.val = E_1.val - T.val$
- \vdots

Такой подход называется **синтаксически управляемая трансляция**.

Итого существуют четыре подхода дизайну систем парсинга в зависимости от сложности задачи:

1. Ad hoc: без теории, наивно.
2. Parser + walker: Парсер производит дерево разбора и walker его обходит.
3. Синтаксически управляемая трансляция.
4. Декомпозиция задач.

Этот курс рассматривает второй и третий подходы.

Рассмотрим пример калькулятора арифметических выражений:

```
int expr():  
    r = term()  
    nexttoken()  
    while token == '+':  
        nexttoken()  
        t = term()
```

```
    r += t

int term():
    r = factor()
    nexttoken()
    while token == '*':
        nexttoken()
        f = factor()
        r += f

int factor():
    if token == '(':
        nexttoken()
        r = expr()
        assert token == ')'
        nexttoken()
    else # token == 'n'
        r = tokenval()
        nexttoken()
```

Какая связь между этим кодом и грамматикой арифметических выражений? Оказывается, весьма близкая и код можно получить из нее.

2 $LL(k)$, FIRST, FOLLOW

Определение (контекстно-свободная грамматика).

- Алфавит Σ — множество токенов
- Нетерминалы N
- Стартовый нетерминал $S \in N$
- Правила $P \subset N \times (N \cup \Sigma)^*$

Определение. $\langle A, \alpha \rangle \in P \Leftrightarrow A \rightarrow \alpha$

Определение. $\alpha \Rightarrow \beta$ — из α выводится за один шаг β , если:

- $\alpha = \alpha_1 A \alpha_2$
- $\beta = \alpha_1 \xi \alpha_2$
- $A \rightarrow \xi \in P$

Определение (язык грамматики). $L(\Gamma) = \{x \mid S \Rightarrow^* x\}, x \in \Sigma^*$, где \Rightarrow^* есть замыкание отношения \Rightarrow .

Определение. Грамматика **однозначна**, если для любого слова из языка есть только одно дерево разбора и **неоднозначна** иначе.

Примечание. Здесь и далее буквы из конца латинского алфавита обозначают нетерминалы, а буквы греческого алфавита — строки из терминалов и/или нетерминалов.

Определение. $\Gamma \in LL(1)$, если из выполнения следующих двух условий:

- $S \Rightarrow^* xA\alpha \Rightarrow x\xi\alpha \Rightarrow^* xcy$
- $S \Rightarrow^* xA\beta \Rightarrow x\eta\beta \Rightarrow^* xcz$

следует $c \in \Sigma$, или $c = \varepsilon$, или $y = \varepsilon$, или $z = \varepsilon$, тогда $\xi = \eta$.

Определение. $\Gamma \in LL(k)$, если из выполнения следующих двух условий:

- $S \Rightarrow^* xA\alpha \Rightarrow x\xi\alpha \Rightarrow^* xcy$
- $S \Rightarrow^* xA\beta \Rightarrow x\eta\beta \Rightarrow^* xcz$

следует $c \in \Sigma^k$, или $c \in \Sigma^{\leq k}$, или $y = \varepsilon$, или $z = \varepsilon$, тогда $\xi = \eta$.

В частности, $LL(0)$ — линейные программы.

$LL(1)$ грамматики есть класс всех грамматик, которые можно разобрать рекурсивным спуском.

Определение $LL(1)$ грамматик не конструктивно, т.к. проверка определения может длиться бесконечно (*по количеству всех выводов*). Определим конструктивный критерий принадлежности $LL(1)$, для этого мы рассмотрим две вспомогательные функции:

- FIRST: $(N \cup \Sigma)^* \rightarrow 2^{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}$
- FOLLOW: $N \rightarrow 2^{\Sigma \cup \{\$ \}}$

$$\text{FIRST}(\alpha) := \{c \mid \alpha \Rightarrow^* c\beta\} \cup \{\varepsilon \mid \alpha \Rightarrow^* \varepsilon\}$$

$$\text{FOLLOW}(A) := \{c \mid S \Rightarrow^* \alpha A c \beta\} \cup \{\$ \mid S \Rightarrow^* \alpha A\}$$

Примечание. Мы считаем, что в грамматике нет нетерминалов, из которых нельзя вывести строку из терминалов. Это допущение не теряет общности, т.к. существует алгоритм удаления “бесполезных” нетерминалов, см. курс дискретной математики.

Теорема 1. $\Gamma \in LL(1) \Leftrightarrow \forall A \rightarrow \alpha, A \rightarrow \beta$:

1. $\text{FIRST}(\alpha) \cap \text{FIRST}(\beta) = \emptyset$
2. $\varepsilon \in \text{FIRST}(\alpha) \Rightarrow \text{FIRST}(\beta) \cap \text{FOLLOW}(A) = \emptyset$

Лекция 2

9 сентября

2.1 Вычисление FIRST

Определим массив (или *map*) $\text{FIRST}[] : N \rightarrow 2^{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}$, который будет возвращать FIRST от нетерминалов.

Лемма 1.

- $\alpha = c\beta \Rightarrow \text{FIRST}(\alpha) = \{c\}$
- $\alpha = \varepsilon \Rightarrow \text{FIRST}(\alpha) = \{\varepsilon\}$
- $\alpha = A\beta \Rightarrow \text{FIRST}(\alpha) = \text{FIRST}[A] \setminus \varepsilon \cup (\text{FIRST}(\beta) \text{ if } \varepsilon \in \text{FIRST}[A])$

Доказательство. Очевидно. □

По лемме мы можем найти $\text{FIRST}[]$ следующим алгоритмом:

```
while (change):
    for  $A \rightarrow \alpha \in \Gamma$ :
         $\text{FIRST}[A] \cup= \text{FIRST}(\alpha)$ 
```

Докажем, что итоговый массив $\text{FIRST}[]$ как функция от N равен функции FIRST.

Доказательство. Очевидно, что $\text{FIRST}[A] \subset \text{FIRST}(A)$, т.к. мы не добавляем лишнего (*по лемме*).

Докажем, что $\text{FIRST}[A] \supset \text{FIRST}(A)$ от противного — пусть $\exists c : c \in \text{FIRST}(A), c \notin \text{FIRST}[A]$. Среди всех таких c найдем такое, что вывод $A \Rightarrow^k c\xi$ имеет минимальную длину, т.е. $k \rightarrow \min$. Можем расписать $A \Rightarrow^k c\xi$ как $A \Rightarrow \alpha \Rightarrow^{k-1} c\xi$ для некоторого α .

Рассмотрим структуру α . Это некоторая строка $x_1x_2 \dots x_k$, при этом все символы с $x_1 \dots x_{i-1}$ ¹

¹ Эта последовательность может быть пустой.

породили пустые строки, и x_i породил строку, начинающуюся с c . Т.к. $k \rightarrow \min$, то $c \in \text{FIRST}[x_i]$, т.к. $c \in \text{FIRST}(x_i)$. Но тогда на последней итерации алгоритма, когда рассматривается правило $A \rightarrow \alpha$, в $\text{FIRST}[A]$ должно было добавиться $\text{FIRST}(A)$, в котором лежит c . Противоречие. \square

По массиву $\text{FIRST}[]$ можно восстановить $\text{FIRST}(\alpha)$ для любого α по лемме.

2.2 Вычисление FOLLOW

```

FOLLOW[S] = {$}
while (change):
    for  $A \rightarrow \alpha \in \Gamma$ :
        for  $B : \alpha = \beta B \gamma$ :
            FOLLOW(B)  $\cup = \text{FIRST}(\gamma) \setminus \varepsilon \cup (\text{FOLLOW}(A) \text{ if } \varepsilon \in \text{FIRST}(\gamma))$ 

```

Доказательство. Аналогично FIRST. \square

Пример. Вспомним грамматику арифметических выражений с прошлой лекции:

- $E \rightarrow E + T$
- $E \rightarrow T$
- $T \rightarrow T * F$
- $T \rightarrow F$
- $F \rightarrow (E)$
- $F \rightarrow n$

| | FIRST | FOLLOW |
|-----|-------|------------|
| E | $(n$ | $\$ +)$ |
| T | $(n$ | $\$ + *)$ |
| F | $(n$ | $\$ + *)$ |

Для правил $E \rightarrow E + T$, $E \rightarrow T$ множества FIRST от правых частей пересекаются, следовательно эта грамматика не $LL(1)$. Это вызвано простой проблемой — эти два правила образуют левую рекурсию и очевидно условие 1 теоремы не выполнено.

2.3 Доказательство теоремы о характеристизации $LL(1)$

Доказательство. Предположим, что $\Gamma \notin LL(1)$.

1. ξ не породил ε , η не породил ε

Тогда $c \in \text{FIRST}(\xi)$ и $c \in \text{FIRST}(\eta)$

2. ξ породил ε , η породил ε

Тогда $\varepsilon \in \text{FIRST}(\xi)$ и $\varepsilon \in \text{FIRST}(\eta)$

3. ξ породил ε , η не породил ε

Тогда $\varepsilon \in \text{FIRST}(\xi)$, $c \in \text{FOLLOW}(A)$ и $c \in \text{FIRST}(\eta)$

Таким образом, если $\Gamma \notin LL(1)$, то условие теоремы не выполнено.

В обратную сторону доказательство не написано. □

2.4 Проблемы грамматик

В этой части мы обсудим типичные причины, по которым грамматика может быть $\notin LL(1)$.

2.4.1 Левая рекурсия

Определение. $A \Rightarrow^+ A\alpha$ — левая рекурсия

Утверждение. Левая рекурсия $\notin LL(1)$. (почти всегда)

Доказательство. Рассмотрим непосредственную левую рекурсию: $A \rightarrow A\alpha$. Пусть ещё есть правило $A \rightarrow \beta$.² Рассмотрим $c \in \text{FIRST}(\beta)$, тогда ещё $c \in \text{FIRST}(A\alpha)$, следовательно $\Gamma \notin LL(1)$. Если же $\nexists c \in \text{FIRST}(\beta)$ для любого β , то $\Gamma \in LL(1)$. □

От левой рекурсии можно избавиться следующим преобразованием для всех $A \rightarrow A\alpha$, $A \rightarrow \beta$:

- $A \rightarrow \beta A'$
- $A' \rightarrow \alpha A'$
- $A' \rightarrow \varepsilon$

Никто не гарантирует, что после такого преобразования $\Gamma' \in LL(1)$, т.к. у грамматики могут быть другие проблемы.

2.4.2 Правое ветвление

Определение (правое ветвление). $A \rightarrow \alpha\beta$, $A \rightarrow \alpha\gamma$

Утверждение. Правое ветвление $\notin LL(1)$. (почти всегда)

Преобразование, удаляющее правое ветвление:

- $A \rightarrow \alpha A'$

² Мы не теряем общности, т.к. иначе A — бесполезный нетерминал. Мы не рассматриваем грамматики с такими нетерминалами, т.к. их можно убрать.

- $A' \rightarrow \beta$
- $A' \rightarrow \gamma$

2.4.3 Пример

Преобразуем грамматику арифметических выражений:

- $E \rightarrow TE'$
- $E' \rightarrow +TE'$
- $E' \rightarrow \varepsilon$
- $T \rightarrow FT'$
- $T' \rightarrow *FT'$
- $T' \rightarrow \varepsilon$
- $F \rightarrow (E)$
- $F \rightarrow n$

Посчитаем FIRST и FOLLOW:

| | FIRST | FOLLOW |
|------|-----------------|------------|
| E | $n ($ | $\$)$ |
| E' | $\varepsilon +$ | $\$)$ |
| T | $n ($ | $+ \$)$ |
| T' | $\varepsilon *$ | $+ \$)$ |
| F | $n ($ | $* + \$)$ |

Ура, эта грамматика $\in LL(1)$!

3 Построение парсеров

Есть два метода построения деревьев разбора — сверху и снизу. Для LL грамматик используется сверху, для LR (определим позже) — снизу.

Для каждого нетерминала определим функцию, которая возвращает дерево разбора с корнем в этом нетерминале.

Также у нас есть контекст, в котором есть `token` — рассматриваемый токен и функция `nextToken()` — достает новый токен. Для каждой функции инвариант — при вызове функции f `token` есть нетерминал f .

Пример. Пусть есть правила $A \rightarrow \alpha_1, A \rightarrow \alpha_2 \dots A \rightarrow \alpha_k$.

$$\text{FIRST1}(\alpha) := \text{FIRST}(\alpha) \setminus \varepsilon \cup (\text{FOLLOW}(A) \text{ if } \varepsilon \in \text{FIRST}(\alpha))$$

A(): Tree

```
r = Tree(A)
switch (token)
  case FIRST1( $\alpha_1$ )
    f $\alpha_1$ 
  case FIRST1( $\alpha_2$ )
    f $\alpha_2$ 
  :
return r
```

, где $f\alpha_i$ — блок обработки α_i .

Пусть $\alpha_i = X_1 X_2 \dots X_t$. Тогда $f\alpha_i$:

f α_i :

```
:
//  $X_i = c$  --- terminal
assert  $X_i == \text{token}$ 
nextToken()
r.addChild( $X_i$ )

//  $X_j = A$  --- nonterminal
r.addChild( $X_j$ )
```

Лекция 3

16 сентября

Пример. Напишем парсер для арифметических выражений.

```
E()
    res = Node(E)
    switch (token)
        case 'n':
        case 'c':
            res.add(T())
            res.add(Eprime())
    return res

Eprime()
    res = Node(Eprime)
    switch (token)
        case '+':
            assert(token == '+')
            res.add(Node(+))
            nextToken()
            res.add(T())
            res.add(Eprime())
        case '$':
        case ')':
            pass
    return res

T()
    res = Node(T)
    switch (token)
        case 'n':
```

```

        assert(token == 'n')
        res.add(Node(n))
        nextToken()
    case '(':
        assert(token == '(')
        res.add(Node('('))
        nextToken()
        res.add(E())
        assert(token == ')')
        res.add(Node(''))
        nextToken()
    return res

```

Вспомним код, который мы сдавали Георгию Александровичу:

```

int E():
    res = T()
    while token == '+':
        nextToken()
        res += T()
    return res

```

Он мощнее, потому что написан для другой грамматики (без E'), которая не $LL(1)$.

Пример. $\langle A \rightarrow A\alpha, A \rightarrow \beta_1\beta_2\dots, \text{после устранения левой рекурсии мы получим } A \rightarrow \beta A', A' \rightarrow \alpha A', A' \rightarrow \varepsilon. \text{ Запишем рекурсивный спуск для } A \text{ без спуска для } A':$

```

A()
    res = Node(A)
    switch (token)
        case FIRST1( $\beta_1$ )
            ...
        case FIRST1( $\beta_2$ )
            ...
    cur = Node(Aprime)
    res.add(cur)
    while token  $\in$  FIRST1( $\alpha_i$ )
        switch (token)
            case FIRST( $\alpha_1$ )
                cur.add(...)
        next = Node(Aprime)
        cur.add(next)
        cur = next
    // assert token  $\in$  FOLLOW(A)

```

Таким образом, мы можем не устранять левую рекурсию в грамматике, а делать это при

написании парсера.

Писать парсеры так, как мы сейчас это делали, неудобно. Будем писать по-другому.

$\langle \Gamma \in LL(1) \rangle$. Запишем информацию в таблицу, называемую **управляющей таблицей**:

Обозначение.

- \rightarrow — nextToken()
- \perp — дно стека.

Для каждого $A \in N$ пусть есть правила $A \rightarrow \alpha_i$. Тогда для каждого $t \in \text{FIRST1}(\alpha_i)$ впишем в ячейку (A, t) число i :

| | | Σ | \$ |
|-----|----------|---|--------|
| N | A | $\dots i \dots i \dots i \dots i \dots$ | |
| | Σ | <div> <div> \rightarrow </div> <div>ошибка</div> </div> <div> \rightarrow </div> <div> \ddots </div> <div>ошибка</div> <div> \rightarrow </div> | ошибка |
| | \perp | | ок |

Как разборщик пользуется таблицей? На каждой итерации он смотрит на вершину стека¹ и на управляющую таблицу.

1. Если на вершине стека терминал:
 - (a) Если терминал совпал с токеном, то с вершины стека снимается терминал и происходит переход к следующему токеному.
 - (b) Если терминал не совпал с токеном, то ошибка.
2. Если на вершине стека нетерминал, то в таблице ищется номер правила грамматики, соответствующий данному нетерминалу и токеному.
 - (a) Если ячейка не пуста, то из вершины стека удаляется элемент и в стек кладется правая часть соответствующего правила.
 - (b) Если ячейка пуста, то ошибка.

Пример (арифметические выражения).

¹ В котором лежат разбираемые нетерминалы/терминалы.

| Ввод Стек | | | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------|
| | n | $+$ | $*$ | $($ | $)$ | $\$$ |
| E | 1 | | | 1 | | |
| E' | | 2 | | | 3 | 3 |
| T | 4 | | | 4 | | |
| T' | | 6 | 5 | | 6 | 6 |
| F | 7 | | | 8 | | |
| n | \rightarrow | | | | | |
| $+$ | | \rightarrow | | | | |
| $*$ | | | \rightarrow | | | |
| $($ | | | | \rightarrow | | |
| $)$ | | | | | \rightarrow | |
| \perp | | | | | | OK |