

# 1 Определения

## 1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества  $X$  и  $I$  - множество “индексов”, тогда  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  - **семейство элементов**  $X$ . ( $\forall \alpha \in I \ x_\alpha \in X$ )

**Упорядоченная пара** — семейство из двух элементов, построенная при  $I = \{1, 2\}$ . Обозначается  $(a, b)$ .

Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

## 1.2 Декартово произведение

**Декартово произведение** двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств.  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств.  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2 \dots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_n \in A_n\}$

## 1.3 Аксиомы вещественных чисел

### 1.3.1 Аксиомы поля

В множестве  $\mathbb{R}$  определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  ( $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксиомы сложения (здесь и далее  $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ ):

1.  $a + b = b + a$  — коммутативность
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  — ассоциативность
3.  $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4.  $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1.  $ab = ba$  — коммутативность
2.  $(ab)c = a(bc)$  — ассоциативность
3.  $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4.  $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксиома комбинации сложения и умножения:

1.  $(a + b)c = ac + bc$  — дистрибутивность

**Поле** — множество, в котором определены операции  $+$ ,  $\cdot$ , удовлетворяющие группе аксиом I. Например,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{F}_3$

### 1.3.2 Аксиомы порядка

1.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$  или  $y \leq x$
2.  $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3.  $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$  — транзитивность
4.  $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5.  $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

**Упорядоченное поле** — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$  — не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$  — упорядоченные поля

Дальнейшие аксиомы в следующем вопросе.

## 1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

### 1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

**Архимедовы поля** — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

$\mathcal{R}$  — не архимедово поле

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$  — архимедовы поля

### 1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  ( $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ )

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

$\mathbb{Q}$  не удовлетворяет этой аксиоме, в отличие от  $\mathbb{R}$ .

## 1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$  — не определено

Для  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

## 1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$  называется максимальным элементом множества  $A$ , если  $\forall a \in A \quad a \leq M$

## 1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \rightarrow Y$  — последовательность

## 1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для  $A \subset X, f : X \rightarrow Y$  **образ** — множество  $\{f(x), x \in A\} \subset Y$  — обозначается  $f(A)$

Для  $B \subset Y$  **прообраз** —  $\{x \in X : f(x) \in B\}$  — обозначается  $f^{-1}(B)$

## 1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

**Сюръекция** — такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $f(X) = Y$ , т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет решение относительно  $x$ .

**Инъекция** — такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ , т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет не более одного решения относительно  $x$ .

**Биекция** — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е.  $\forall y \in Y \quad f(x) = y$  имеет ровно одно решение относительно  $x$ .

### 1.10 Векторнозначная функция, ее координатные функции

Если  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ , то  $F$  — векторнозначная функция (значения функции — вектора)

$F_1(x) \dots F_m(x)$  — координатные функции отображения  $F$

### 1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

### 1.12 Композиция отображений

$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ , тогда композиция  $f$  и  $g$  (обозначается  $g \circ f$ ) — такое отображение, что  $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$ .

Также возможно определение, которое допускает  $g : Y_1 \rightarrow Z, Y_1 \supset Y$

### 1.13 Сужение и продолжение отображений

Для  $g : X \rightarrow Y$   $f$  — сужение  $g$  на множество  $A$ , если  $f : A \subset X \rightarrow Y, \forall a \in A \ g(a) = f(a)$

$g$  называется продолжением  $f$ .

### 1.14 ! Предел последовательности (эпсилон-дельта определение)

Если для  $(x_n), a \in \mathbb{R}$  выполняется  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$ , то  $a$  — предел последовательности  $(x_n)$ , обозначается  $x_n \rightarrow a$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

### 1.15 Окрестность точки, проколота окрестность

Окрестность точки  $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ , обозначается  $U_\varepsilon(a)$

Проколота окрестность точки  $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ , обозначается  $\dot{U}_\varepsilon(a)$

### 1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \ \exists N \ \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

### 1.17 ! Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве  $X$  отображение  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется метрикой, если выполняются свойства 1-3:

$$1. \ \forall x, y \ \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2.  $\forall x, y \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

**Метрическое пространство** — упорядоченная пара  $(X, \rho)$ , где  $X$  — множество,  $\rho$  — метрика на  $X$ .

**Подпространством** метрического пространства  $(X, \rho)$  называется  $(A, \rho|_{A \times A})$ , если  $A \subset X$

### 1.18 ! Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

**Шар (открытый шар)**  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

**Замкнутый шар**  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

**Окрестность точки  $a$**  в метрическом пространстве:  $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$ .

### 1.19 Линейное пространство

Если  $K$  — поле ( $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $X$  — множество, то  $X$  называется **линейным пространством** над полем  $K$  (и тогда  $K$  называется полем скаляра), если определены следующие две операции:

1.  $+$  :  $X \times X \rightarrow X$  — сложение векторов
2.  $\cdot$  :  $K \times X \rightarrow X$  — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь  $A, B, C \in X$ ;  $a, b \in K$ ):

#### 1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $\exists 0 \in X : A + 0 = A$
4.  $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$  — обратный элемент

#### 1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1.  $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2.  $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3.  $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$

$$4. \exists 1 \in K : 1 \cdot A = A$$

## 1.20 Норма, нормированное пространство

**Норма** - отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ , если  $X$  - линейное пространство (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) и выполняется следующее:

1.  $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Нормированное пространство** — упорядоченная пара  $(X, \|\cdot\|)$ , где  $\|\cdot\|$  - норма

## 1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$  — **ограничено**, если  $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$ , т.е. если  $A$  содержится в некотором шаре в  $X$ .

## 1.22 ! Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

$a$  — **внутренняя точка** множества  $D$ , если  $\exists U(a) : U(a) \subset D$ , т.е.  $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

$D$  — **открытое множество**, если  $\forall a \in D : a$  — внутренняя точка  $D$

**Внутренностью** множества  $D$  называется  $Int(D) = \{x \in D : x \text{ — внутр. точка } D\}$

## 1.23 ! Предельная точка множества

$a$  — **предельная точка** множества  $D$ , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

## 1.24 ! Замкнутое множество, замыкание, граница

$D$  — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$  — **замыкание**.

**Граница множества** — множество его граничных точек. Обозначается  $\partial D$

### 1.25 ! Изолированная точка, граничная точка

$a$  — изолированная точка  $D$ , если  $a \in D$  и  $a$  — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

$a$  — граничная точка  $D$ , если  $\forall U(a) \quad U(a)$  содержит точки как из  $D$ , так и из  $D^c$

### 1.26 Описание внутренности множества

1.  $Int D$  - откр. множество

2.  $Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}} G$  — максимальное открытое множество, содержащееся в  $D$

3.  $D$  — откр. в  $X \Leftrightarrow D = Int D$

### 1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$$\overline{D} = \bigcap_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F \text{ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее } D.$$

### 1.28 ! Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$ .  $E$  — **огр. сверху**, если  $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad x \leq M$ . Кроме того, всякие такие  $M$  называются **верхними границами**  $E$ .

Аналогично ограничение снизу.

$$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset.$$

Для  $E$  — **огр. сверху** **супремум** ( $\sup E$ ) — наименьшая из верхних границ  $E$ .

Для  $E$  — **огр. снизу** **инфимум** ( $\inf E$ ) — наибольшая из нижних границ  $E$ .

### 1.29 Техническое описание супремума

$$\text{Техническое описание супремума: } b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad b - \varepsilon < x \end{cases}$$

### 1.30 ! Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В  $\mathbb{R}$ :

$$1. \quad x_n \rightarrow +\infty \quad \forall E > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n > E$$

$$2. x_n \rightarrow -\infty \quad \forall E \exists N \forall n > N \quad x_n < E$$

$$3. x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$$

### 1.31 ! Компактное множество

$K \subset X$  — компактное, если для любого открытого покрытия этого множества  $\exists$  конечное подпокрытие  $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

### 1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество  $A \subset X : \forall$  посл.  $(x_n)$  точек  $A$   $\exists$  подпосл.  $x_{n_k}$ , которая сходится к точке из  $A$

### 1.33 ! Определения предела отображения (3 шт)

$$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \rightarrow Y$$

$a \in X$ ,  $a$  — пред. точка множества  $D$ ,  $A \in Y$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  — предел отображения, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне:  $\forall (x_n) — посл. в X:$

$$(a) \quad x_n \rightarrow a$$

$$(b) \quad x_n \in D$$

$$(c) \quad x_n \neq a$$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

### 1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для  $X = \mathbb{R}, Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$ :

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > E$$



2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < -E$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X : x > \delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X : x < -\delta \quad |f(x) - c| < \varepsilon$

### 1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \rightarrow Y, D_1 \subset D, x_0$  — пред. точка  $D_1$

Тогда предел по множеству  $D_1$  в точке  $x_0$  — это  $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_1}(x)$

### 1.36 Односторонние пределы

В  $\mathbb{R}$  одностор. = { левостор., правостор. }

Левосторонний предел  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = L$  — это  $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

### 1.37 ! Непрерывное отображение

$f : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$

$f$  — непрерывное в точке  $x_0$ , если:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , либо  $x_0$  — изолированная точка  $D$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \rho(x, x_0) < \delta \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3.  $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x_0; x_n \in D \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$

### 1.38 Непрерывность слева

$f$  — непр. слева в  $x_0$ , если  $f|_{(-\infty, x_0] \cap D}$  — непрерывно в  $x_0$

### 1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , либо  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  — точка разрыва.

Пусть  $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  и не все 3 числа равны:  $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$ . Это **разрыв I рода (скачок)**.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

*Примечание.*

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

## 1.40 ! О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — пр. точка  $D$

Если  $\exists V(x_0) \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$  при  $x \in V(x_0) \cap D$

1.  $\varphi$  — ограничена. Тогда говорят  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow x_0$

“ $f$  **ограничена** по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ”

2.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$   $f$  — **беск. малая** по отношению к  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $f = o(g)$

3.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$   $f$  и  $g$  **экв.** при  $x \rightarrow x_0$   $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$

*Примечание.* О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

## 1.41 ! Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x \\ \operatorname{sh} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \\ \operatorname{arctg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ \operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\sim x \\ \ln(1 + x) &\sim x \\ (1 + x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \end{aligned}$$

### 1.42 Асимптотически равные (сравнимые) функции

В условиях прошлых определений  $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$  — асимптотически сравнимы на множестве  $D$ , “величины одного порядка”.

### 1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — пред. точка  $D$

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$

Пример.  $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad x \rightarrow 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \rightarrow 0$

$(g_n)$  называется шкала асимптотического разложения.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Если  $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n)$ , то это асимптотическое разложение  $f$  по шкале  $(g_n)$

### 1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть  $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая  $y = Ax + B$  — наклонная асимптота к графику  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$

### 1.45 Путь в метрическом пространстве

$Y$  — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$  — непр. на  $[a, b]$

= путь в пространстве  $Y$

### 1.46 Линейно связное множество

$E \subset Y$

$E$  — линейно связное, если  $\forall A, B \in E \exists$  путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

### 1.47 ! Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$

$f$  — дифференцируема. в точке  $x_0$ , если  $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом  $A$  называется **производной**  $f$  в точке  $x_0$

*Примечание.* Это два разных билета.

### 1.48 Счётное множество

$A$  — счётное множество  $\Leftrightarrow$  равномощно  $\mathbb{N}$

### 1.49 ! Мощность континуума

$A$  равномощно  $[0, 1] \Rightarrow A$  имеет мощность континуума.

### 1.50 Фундаментальная последовательность

$x_n$  — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

### 1.51 Полное метрическое пространство

$X$  — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

### 1.52 Классы функций $C^n([a, b])$

$f$  —  $n$ -гладкая, если  $\forall i = 1 \dots n \quad \exists i$ -ная непрерывная производная.

Класс функций  $C^n([a, b])$  — множество функций,  $n$ -гладких на  $[a, b]$

### 1.53 Производная $n$ -го порядка

Пусть  $n - 1 \in \mathbb{N}$  — множество  $D_{n-1}$  и  $f^{(n-1)} : D_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  определены. Пусть  $D_n$  — множество точек  $x_0 \in D_{n-1}$ , для которых существует  $\delta > 0$ , такое что:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

и  $f^{(n-1)}$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Если  $x_0 \in D_n$ , то  $f$  — дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0$ . Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'_{D_n} : D_n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется производной порядка  $n$ .

## 1.54 Многочлен Тейлора $n$ -го порядка

Многочленом Тейлора  $n$ -той степени (*порядка*) функции  $f$  в точке  $a$  называется:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

## 1.55 ! Разложения Тейлора основных элементарных функций

Некоторые разложения по Тейлору:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

## 2 Теоремы

### 2.1 Законы де Моргана

Пусть  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  - семейство множеств,  $Y$  - множество. Тогда:

$$1. Y \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad \textcircled{1}$$

$$2. Y \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad \textcircled{2}$$

Вариант 2:

$$1. Y \cap \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$$

$$2. Y \cup \left( \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$$

*Доказательство.*  $\triangleleft x \in$  левая часть  $\textcircled{1}$

$$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$$

$$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$$

$$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$$

$x \in$  правая часть ①

$$\forall \alpha : x \in Y \setminus X_\alpha$$

$$x \in Y; \forall \alpha \ x \notin X_\alpha$$

Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ②

□

## 2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

### 2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right) \left(\sum b_k^2\right)$$

### 2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i a_k b_i b_k) = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k^2 b_i^2 - \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i a_k b_k = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \\
 & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \sum_{(i,k) \in A \times B} a_k b_k = \\
 & \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \left( \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \right)^2
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left( \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i b_i \right)^2 = \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 \leq \sum_{(i,k) \in A \times B} a_i^2 \sum_{(i,k) \in A \times B} b_k^2$$

□

Доказательство. Альтернативное:

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j) = \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

□

## 2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

### 2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

### 2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

В любом интервале в  $\mathbb{R}$  содержится число  $\in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{Q}$  плотно в  $\mathbb{R}$ , т.е.  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Возьмем  $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$ . Тогда  $\frac{1}{n} < b - a$

$$q := \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b \Rightarrow q < b$$

$$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$$

□

## 2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} - \text{более сложная версия}$$

*Доказательство.* База:  $n = 1 : (1+x)^1 \geq 1+x$

Переход: Дано неравенство  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , оно верно при каком-то  $n$ . Докажем, что  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

□



## 2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

### 2.5.1 Единственность предела

$(X, \rho)$  — метрическое пр-во,  $a, b \in X$ ,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , тогда  $a = b$

*Доказательство.*

Докажем от противного — пусть  $a \neq b$ . Возьмем  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K(\varepsilon) \quad \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

При  $n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon))$   $\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b)$  — противоречие

□

### 2.5.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Если  $(x, \rho)$  — метрическое пр-во,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n$  сходится, тогда  $x_n$  - ограничен.

*Доказательство.*

$$\text{Пусть } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$\forall U(a) \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \in U(a)$$

$$U(a) = B(a, \varepsilon)$$

$$r := \max(\varepsilon, \rho(x_1, a), \rho(x_2, a) \dots \rho(x_N, a)) + 1$$

$$\text{тогда } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B(a, r)$$

□

## 2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

### 2.6.1 Для последовательностей

Если  $(x_n), (y_n)$  — вещественные последовательности  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \leq y_n$ , тогда  $a \leq b$ .

### 2.6.2 Для функций

Если  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $X$ , и  $\forall x \in X \ f(x) \leq g(x)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

*Доказательство.*

Докажем от противного. Пусть  $a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$ .

$$\exists N(\varepsilon) \ \forall n > N \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \ \forall n > K \ b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

При  $n > \max(N, K)$   $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$  — противоречие

□

*Доказательство.* По Гейне.

$\forall (x_n) \rightarrow a, x_n \in X, x_n \neq a$ :

$$f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B, \forall x \ f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \Rightarrow A \leq B$$

□

## 2.7 ! Теорема о двух городских

Если  $(x_n), (y_n), (z_n)$  - вещ. посл.,  $\forall n \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$ , тогда  $\exists \lim y_n = a$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \ \forall n > K \ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = \max(N, K) \ \forall n > N_0 \ a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

По определению  $\lim y_n = a$

□

## 2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая последовательность, т.е.  $(x_n)$  — беск. малая,  $(y_n)$  — ограничена  $\Rightarrow x_n y_n$  — беск. малая

*Доказательство.* Возьмём  $K$  такое, что  $\forall n \quad |y_n| \leq K$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \rightarrow 0$$

□

## 2.9 ! Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в $\mathbb{R}$

Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.

Если  $(X, \|\cdot\|)$  — норм. пр-во,  $(x_n), (y_n)$  — посл. в  $X$ ,  $\lambda_n$  — посл. скаляров, и  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , тогда:

1.  $x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$
2.  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$
3.  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$

*Доказательство.* 1.  $\forall \varepsilon \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad \|x_n - x_0\| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon \quad \exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\forall \varepsilon \quad \forall n > N \quad \|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \leq 2\varepsilon$$

$$2. \quad \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0\| \leq \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n\| + \|(x_n - x_0)\lambda_0\| = \|x_n\| |\lambda_n - \lambda_0| + \|x_n - x_0\| |\lambda_0|$$

$|\lambda_n - \lambda_0|$  и  $\|x_n - x_0\|$  — бесконечно малые,  $\|x_n\|$  и  $|\lambda_n|$  — ограниченные  $\Rightarrow \|x_n\| |\lambda_n - \lambda_0| + \|x_n - x_0\| |\lambda_0|$  — бесконечно малая

$$3. \quad \text{Докажем, что } \left| \|x_n\| - \|x_0\| \right| \leq \|x_n - x_0\|.$$

$$\|x_n\| = \|x_0 + (x_n - x_0)\| \leq \|x_0\| + \|x_n - x_0\| \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\|$$

Аналогично  $||x_0|| - ||x_n|| \leq ||x_n - x_0||$ .

Тогда  $|||x_n|| - ||x_0||| \leq ||x_n - x_0||$

□

**Об арифметических свойствах пределов в  $\mathbb{R}$ .**

Для  $(x_n), (y_n)$  — вещ. посл.,  $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$ :

$$4. \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$$

**Доказательство взято из воздуха.**

*Доказательство.* Докажем, что  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y_0}$ , если  $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$ .

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \left| \frac{y_0 - y_n}{y_n y_0} \right|$$

В числителе бесконечно малая последовательность, в знаменателе ограниченная  $\Rightarrow$  дробь — бесконечно малая последовательность. □

## 2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

### 2.10.1 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве

Для  $X$  — линейного пространства (над  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ )

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

*Доказательство.* Возьмём  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Заметим, что  $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ .

При  $y = 0$  тривиально, пусть  $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}, \bar{\lambda} = \overline{\left( -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right)} = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle$$

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

□

### 2.10.2 Норма, порожденная скалярным произведением

Для лин. пространства  $X$ , скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\rho : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма

*Доказательство.* Докажем, что  $\rho$  удовлетворяет всем леммам нормы.

1.  $\rho(x) \geq 0 \quad \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\rho(\alpha x) = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \rho(x)$
3.  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

Пояснение следующего перехода: пусть  $\langle x, y \rangle = a$ . Тогда  $a = \Re a + \Im a$ ,  $\bar{a} = \Re a - \Im a$  (разложение на вещественную и мнимую части).  $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = \Re \langle x, y \rangle + \Im \langle x, y \rangle + \Re \langle x, y \rangle - \Im \langle x, y \rangle = 2\Re \langle x, y \rangle$ .

$$2\Re \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

$$\Re \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

□

## 2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

### 2.11.1 О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

О покоординатной сходимости в  $\mathbb{R}^m$

$(x^{(n)})$  — последовательность векторов в  $\mathbb{R}^m$

в  $\mathbb{R}^m$  задано евклидово скалярное произведение и норма.

Тогда  $(x^{(n)}) \rightarrow x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$

*Доказательство.* Модуль координаты  $\leq$  нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq \|x^{(n)} - x\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{(n)} - x_i|$$

Первое неравенство доказывает  $\Rightarrow$ , второе неравенство доказывает  $\Leftarrow$  □

### 2.11.2 О непрерывности скалярного произведения

$X$  - лн. пространство со скалярным произведением,  $\|\cdot\|$  — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x, \quad \forall (y_n) : y_n \rightarrow y, \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По теореме о двух городских чтд. □

## 2.12 Открытость открытого шара

$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$  — открыт

*Доказательство.*  $x_0 \in B(a, r)$

Докажем, что  $x_0$  — внутренняя, т.е.  $\exists U(x_0) \subset B(a, r)$

$k := r - \rho(a, x_0)$

Докажем, что  $B(x_0, k) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(x_0, k) \quad \rho(x, x_0) < k$$

$$\rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$$\rho(x, a) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

□

### 2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1.  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  - семейство открытых множеств в  $(X, \rho)$

Тогда  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открыто в  $X$ .

2.  $G_1, G_2, \dots, G_n$  - открыто в  $X$ .

Тогда  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  - открыто в  $X$ .

*Доказательство.* 1.  $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$$

$G_{\alpha_0}$  - открыто  $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$  - внутренняя точка  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$   
 $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2.  $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$

$$\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$$

$$\forall \alpha \in A \ G_\alpha \text{ - открыто } \Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$$

$\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min_{\alpha} r_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$  - внутренняя точка  $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$   
 - открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□

### 2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

$D$  - замкнуто  $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$  (дополнение) - открыто.

Свойства:

1.  $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$  - замкн. в  $X$

Тогда  $\bigcap F_\alpha$  - замкн. в  $X$

2.  $F_1 \dots F_n$  — замкн. в  $X$

Тогда  $\bigcup F_i$  — замкн. в  $X$

*Доказательство.* Докажем  $\Rightarrow$ :  $D$  — замкн.  $\Rightarrow X \setminus D$

$x \in X \setminus D \Rightarrow x$  — не пред. точка  $D$ , т.к.  $D$  содержит все свои пред. точки и  $x \notin D$

$\Rightarrow \exists r : B(x, r) \subset X \setminus D$

Докажем  $\Leftarrow$ :  $X \setminus D$  — откр.,  $D$  — замкн.?, т.е.  $\forall x \in \{\text{пр. точки } D\} \Rightarrow x \in D$

Если  $x \in D$  — тривиально.

$x \notin D \Rightarrow x \in X \setminus D$

$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$  — не пред. точка

□

*Доказательство.* 1.  $(\bigcap F_\alpha)^c = X \setminus (\bigcap F_\alpha) = \bigcup (X \setminus F_\alpha)$

$F_\alpha$  — закрыто  $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$  — открыто  $\Rightarrow \bigcup (X \setminus F_\alpha)$  — открыто

$(\bigcap F_\alpha)^c$  — открыто  $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$  — замкнуто

2.  $(\bigcup F_i)^c = \bigcap (F_i)^c$

$\bigcap (F_i)^c$  — открыто, т.к.  $F_i^c$  — открыто  $\Rightarrow (\bigcup F_i)^c$  — открыто  $\Rightarrow \bigcup F_i$  — замкнуто

□

## 2.15 ! Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$ ). Неопределенности

### 2.15.1 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$ )

#### 2.15.1.1 По Кохасю

$(x_n), (y_n)$  — вещ.,  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:

1.  $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$

2.  $x_n y_n \rightarrow ab$

3.  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ , если  $\forall n \ y_n \neq 0; b \neq 0$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.



### 2.15.1.2 По Виноградову

1.  $x_n \rightarrow +\infty, \{y_n\} - \text{огр. снизу} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$
2.  $x_n \rightarrow -\infty, \{y_n\} - \text{огр. сверху} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$
3.  $x_n \rightarrow \infty, \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow \infty$
4.  $x_n \rightarrow \pm\infty, \forall n \ y_n > 0 \text{ или } y_n \rightarrow b > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \pm\infty$
5.  $x_n \rightarrow \pm\infty, \forall n \ y_n < 0 \text{ или } y_n \rightarrow b < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \mp\infty$
6.  $x_n \rightarrow \infty, \forall n \ |y_n| > 0 \text{ или } y_n \rightarrow b \neq 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$
7.  $x_n \rightarrow a \neq 0, y_n \rightarrow 0, \forall n \ y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
8.  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, y_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
9.  $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Доказательство. Тривиально. □

### 2.15.2 Неопределенности

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{0}{0}$

## 2.16 ! Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков  $\rightarrow 0$ , т.е.  $(b_n - a_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда  $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$  и при этом  $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c, b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} c$

Доказательство. Берем из аксиомы Кантора  $c \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \rightarrow 0 \\ c - a_n \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \rightarrow c \\ a_n \rightarrow c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела  $c$  однозначно определено. □

## 2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset, E$  — огр. сверху.

Тогда  $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* Строим систему вложенных отрезков  $[a_k, b_k]$  со свойствами:

1.  $b_k$  — верхняя граница  $E$
2.  $[a_k, b_k]$  содержит точки  $E$ .

$a_1$  — берём любую точку  $E$ ,  $b_1$  — любая верхняя граница.

Границы следующего отрезка найдём биссекцией (математики это называют половинное деление).

Если  $\frac{a_1+b_1}{2}$  — верхняя граница  $E$ ,  $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ .

Иначе на  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$  есть элементы  $E$ ,  $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

Длина  $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$\exists! c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Проверим:  $c = \sup E$  по техническому описанию супремума:

1.  $\forall x \in E \quad \forall n \quad x \leq c$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad c - \varepsilon$  — не верхн. гран., т.е.  $\exists n : c - \varepsilon < a_n$

Доказательство 1:  $\forall n \quad x \leq b_n, x \rightarrow x, b_n \rightarrow c \Rightarrow x \leq c$  (предельный переход)

Доказательство 2:  $\forall \varepsilon > 0$  возьмём  $n$  : длина отрезка  $= b_n - a_n < \varepsilon$ .

$$c - a_n < b_n - a_n < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < a_n$$

□

## 2.18 Лемма о свойствах супремума

О свойствах  $\sup, \inf$

1.  $\emptyset \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2.  $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$

Пусть  $\lambda > 0$ , тогда  $\sup \lambda E = \lambda \sup E$

3.  $\sup(-E) = -\inf E$

*Доказательство.* 1. Множество верхних границ  $E \subset$  множество верхних границ  $D$ .

2.  $\lambda \cdot$  Множество верхних границ  $E =$  множество верхних границ  $\lambda E$

3. Множество верхних границ  $-E = -$  множество нижних границ  $E$

□

## 2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1.  $x_n$  — вещ. посл., огр. сверху, возрастает.  $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

2.  $x_n$  — убывает, огр. снизу.  $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

3.  $x_n$  — монотонна, огр.  $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* Достаточно доказать 1.

Проверяем  $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению  $\sup$ :

$$\forall \varepsilon \exists N \quad M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \dots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \exists N \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению  $M = \lim x_n$

□

## 2.20 Определение числа $e$ , соответствующий замечательный предел

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$ ,  $X$  — метр.п.,  $Y$  — подпространство,  $D \subset Y \subset X$

1.  $D$  — откр. в  $Y \Leftrightarrow \exists G$  — откр. в  $X \quad D = G \cap Y$

2.  $D$  — замкн. в  $Y \Leftrightarrow \exists F$  — замкн. в  $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

$\forall$  точка  $D$  внутр. в  $Y$

$\forall x \in D \exists r_x B^Y(x, r_x) \subset D$

Очевидно  $D = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x)$   $G := \bigcup_{X \in D} B^X(x, r_x)$  — откp. в  $X$ .

$$G \cap Y = \left( \bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x) \right) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) = D$$

Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$G$  — откp. в  $X$   $D := G \cap Y$  ?  $D$  — откp. в  $Y$

$x \in D$  ?  $x$  — внутр. точка  $D$  (в  $Y$ )

$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$  □

Докажем 2.

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”

$D$  — замкн. в  $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$  — откp. в  $Y$

$\exists G$  — откp. в  $X$ , такое что  $D^c = G \cap Y$

Тогда  $G^c = X \setminus G$  — замкнуто в  $X$ , кроме того  $D = G^c \cap Y$ , т.к.  $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве  $F$   $G^c$ .

Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$F$  — замкн. в  $X$

$F \cap Y$  — замкн. в  $Y$ ?

$F^c = X \setminus F$  — откp. в  $X$

$F^c \cap Y$  — откp. в  $Y$

$Y \setminus (F^c \cap Y)$  — замкн. в  $Y$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$$

$$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cdot Y} = Y \cdot (\overline{\overline{F}} + \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

## 2.22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

$(X, \rho)$  — метрич. пространство,  $Y \subset X$  — подпространство,  $K \subset Y$

Тогда  $K$  — комп. в  $Y \Leftrightarrow K$  — компактно в  $X$ .

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”

$$K \text{ — комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}, G_{\alpha} \text{ — откp. в } X$$

Доказать:  $\exists$  кон.  $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_{\alpha} \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда  $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Докажем “ $\Leftarrow$ ”

Дано:  $K$  — комп. в  $X$ , доказать:  $K$  — комп. в  $Y$ .

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_{\alpha}, O_{\alpha} \text{ — откp. в } Y$$

$$\exists G_{\alpha} : O_{\alpha} = G_{\alpha} \cap Y (G_{\alpha} \text{ — откp. в } X)$$

По двум выражениям выше:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \cap Y = Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Это открытое покрытие,  $K$  — компактно в  $X \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ .

Тогда  $K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$  — конечное подпокрытие в  $Y$ . □

## 2.23 Простейшие свойства компактных множеств

$(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$

1.  $K$  — комп.  $\Rightarrow K$  — замкн.,  $K$  — огр.
2.  $X$  — комп,  $K$  — замкн.  $\Rightarrow K$  — комп.

*Доказательство.* 1. ? $K$  — замкн. ? $K^c$  — откр.

$a \notin K$ , проверим, что  $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x, a))$  — откр. покрытие

$K$  — комп.  $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$  — открытое покрытие

$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a))$

$B(a, r)$  не пересекается ни с одним  $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a)) \Rightarrow B(a, r) \subset K^c$

? $K$  — огр.

$b \in X$

$K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$

$K$  — комп.  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{n=1}^m \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$

2. ? $K$  — комп.

$$\begin{cases} K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откр.} \\ K \text{ — замкн., } K^c \text{ — откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — откр. покрытие } X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \subset (\text{может быть } K^c) \cup \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

□

## 2.24 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \ a_i \leq x_i \leq b_i\}$  – параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$  – бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \emptyset$

Если  $\text{diam}[a^n, b^n] = \|b^n - a^n\| \rightarrow 0$ , тогда  $\exists! c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

*Доказательство.*  $\forall i = 1 \dots m \ [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \ \exists c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]. \ c = (c_1 \dots c_m)$  – общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq \|a^n - b^n\| \rightarrow 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$

□

## 2.25 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a, b]$  – компактное множество в  $\mathbb{R}^m$

*Доказательство.* Докажем, что  $\exists$  кон.  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Допустим, что не  $\exists$

$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$  нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2] :=$  делим  $[a^1, b^1]$  на  $2^m$  частей, берем любую “часть”, которую нельзя покрыть конечным набором  $G_{\alpha}$

$\vdots$

$$\text{diam} [a^n, b^n] = \frac{1}{2} \text{diam} [a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} \text{diam} [a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad \text{diam}[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

## 2.26 ! Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$ . Эквивалентны следующие утверждения:

1.  $K$  — замкнуто и ограничено
2.  $K$  — компактно
3.  $K$  — секвенциально компактно

*Доказательство.* Докажем  $1 \Rightarrow 2$

$K$  — огр.  $\Rightarrow K$  содержится в  $[a, b]$

$K$  — замкн. в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$  — замкн. в  $[a, b]$

Т.к.  $[a, b]$  — комп., по простейшему свойству компактов  $K$  — комп. □

*Доказательство.* Докажем  $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$  — точки из  $K$ .

?сходящаяся последовательность

Если множество значений  $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  — конечно, то  $\exists$  сход. подпол. очевидно.

Пусть  $D$  — бесконечно

Если  $D$  имеет предельную точку, то  $x_{m_k} \rightarrow a$

Если  $D$  — бесконечно и не имеет предельных точек,  $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ , радиус такой, что в этом шаре нет точек  $D$ , кроме  $x$  (его может тоже не быть). Тогда  $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$  — открытое покрытие  $K$ . Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть  $K$ , т.к. в  $K$  бесконечное число точек (т.к. бесконечное число различных значений  $D$ ). Таким образом, мы нашли открытое покрытие  $K$ , у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.



Пусть  $a \in K$  — предельная точка. Возьмём из  $B(a, r_1)$  точку  $x_{n_1}$ . Возьмём  $r_2 < r_1$  и из соответствующего шара возьмём  $x_{n_2}$ . При  $r_n \rightarrow 0$   $x_{n_k} \rightarrow a$ .

Почему вблизи  $a$  будет точка из произвольной последовательности? □

*Доказательство.* Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем,  $3 \Rightarrow 1$ .

Рассмотрим секвенциально компактное  $K$  и пусть  $K$  — не ограничено. (случай ограниченного множества тривиален)

$$\exists x_n : \|x_n\| \rightarrow +\infty$$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$  ограничена. Противоречие  $\Rightarrow K$  — не секвенциально компактно.

Таким образом, если  $K$  — секвенциально компактно, то  $K$  ограничено.

Докажем замкнутость  $K$ .

Пусть  $\exists$  предельная точка  $x_0 \notin K$

$$\exists x_n \rightarrow x_0$$

По секвенциальности  $\exists$  подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow a \in K$ .

Не дописано. □

## 2.27 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши  $\Leftrightarrow$  определение Гейне.

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

Если дана  $(x_n)$ , удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

, где  $x_n \in D, x_n \neq a$

$$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

□

*Доказательство.* Докажем “ $\Leftarrow$ ”

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \quad 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in D \quad 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность  $(x_n) : x_n \in D \quad x_n \neq a \quad \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow a$ . Кроме того,  $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$  — противоречит утверждению Гейне, что  $f(x_n) \rightarrow A$ .  $\square$

## 2.28 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

### 2.28.1 Единственность предела

о единственности предела

*Доказательство.* По Гейне.  $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$$f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B \xrightarrow[\text{теор. о ед. предела посл.}]{=} A = B$$

$\square$

### 2.28.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$$f : D \subset X \rightarrow Y, a - \text{пред. точка } D, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Тогда  $\exists V(a) : f - \text{огр. на } V(a) \cap D$ , т.е.  $f(V(a) \cap D)$  содержится в некотором шаре.

$$\text{Доказательство. Для } \varepsilon = 1 \quad \exists V(a) \quad \forall x \in V(a) \cap D \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Если  $\nexists f(a)$ , ограниченность доказана. Иначе:

$$\forall x \in V(a) \cap D \quad f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A), \text{ где } \tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$$

$\square$

### 2.28.3 Теорема о стабилизации знака

О стабилизации знака.

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пред. точка  $D$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Пусть  $B \in Y, B \neq A$

Тогда  $\exists V(a) \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \neq B$

*Доказательство.* Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$  не содержит  $B$ . □

### 2.29 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $X$  — метрич. пространство,  $Y$  — норм. пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $a$  — пред. точка  $D$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \lambda_0$$

Тогда:

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|A\|$
4. Для случая  $Y = \mathbb{R}$  и для  $B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$\frac{f}{g}$  задано на множестве  $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

$a$  — пр. точка  $D'$  по теореме о стабилизации знака  $\exists V(a) \ \forall x \in V(a) \cap D \ g(x) —$  того же знака, что и  $B$ , т.е.  $g(x) \neq 0$

$$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a — пред. точка для  $D'$$$

*Доказательство.* По Гейне.  $\forall (x_n) :$

- $x_n \rightarrow a$

- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow^? A + B$  верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$g(x_n) \rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \forall n > n_0 \quad g(x_n) \neq 0$$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$  корректно задано при  $n > n_0$ . □

Если  $Y = \overline{\mathbb{R}}$ , можно “разрешить” случай  $A, B = \pm\infty$  Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения  $A \pm B$ ,  $\lambda_0 A$ ,  $\frac{A}{B}$  корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \quad f(x) > E_1 \quad \forall E_2 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \quad g(x) > E_2$$

## 2.30 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в  $\mathbb{R}^m$   $(x_n)$  — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

*Доказательство.*  $x_n$  — огр.  $\Rightarrow x_n$  содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен,  $x_{n_k}$  сходится. □

## 2.31 Сходимость в себе и ее свойства

$x_n$  — фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \quad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1.  $x_n$  — фунд.  $\Rightarrow x_n$  — ограничена
2.  $x_n$  — фунд;  $\exists x_{n_k}$  — сходящ. Тогда  $x_n$  сходится.

*Доказательство.* 1.  $\varepsilon := 1 \exists N \forall m, n := N + 1 > N \quad \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \dots, \rho(x_N, x_{N+1}))$$

$$\forall n \quad x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n \text{ ограничена.}$$

$$2. \begin{cases} \varepsilon > 0 \exists K \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \stackrel{?}{\Rightarrow} x_n \rightarrow a$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} := \max(N, K)$  при  $k > \tilde{N}$  выполняется  $k > K$ , значит  $n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ .

При  $n > \tilde{N} \geq N$   $m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

Итого  $\forall n > \tilde{N} \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$

□

## 2.32 Критерий Коши для последовательностей и отображений

### 2.32.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве  $x_n$  — сходящ.  $\Rightarrow x_n$  — фунд.

2. В  $\mathbb{R}^m$   $x_n$  — фунд.  $\Rightarrow x_n$  — сходящ.

*Доказательство.* 1.  $x_n \rightarrow a \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$$x_n \rightarrow a \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$$

2.  $x_n$  — фунд.  $\Rightarrow x_n$  — огр.  $\stackrel{\text{Б.-Б.}}{\Rightarrow} \exists x_{n_k}$  — сходящ.

$$\begin{cases} \exists x_{n_k} \text{ — сходящ.} \\ x_n \text{ — фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n \text{ — сходящ.}$$

□

### 2.32.2 Для отображений

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — пр. точка  $D$ ,  $Y$  — полное метрическое пространство.

Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ” как для последовательностей.

Докажем “ $\Leftarrow$ ” по Гейне.

Заметим, что последовательность  $f(x_n)$  — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xrightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

## 2.33 ! Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , монотонная,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$ ,  $a$  — пред. точка  $D_1$ . Тогда:

1.  $f$  — возрастает, огр. сверху на  $D_1$ . Тогда  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$
2.  $f$  — убывает, огр. снизу на  $D_1$ . Тогда  $\exists$  конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

*Доказательство.* 1.  $L := \sup_{D_1} f \quad L \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad L - \varepsilon$  — не верхн. граница для  $\{f(x) : x \in D_1\} \quad \exists x_1 : L - \varepsilon < f(x_1)$ .

Тогда при  $x \in (x_1, a) \cap D_1 \quad L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$

$\exists \delta := |x_1 - a| \quad \forall x : x \in (x_1, a) \quad L - \varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

## 2.34 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

### 2.34.1 Арифметические

1.  $f, g : D \subset X \rightarrow Y \quad x_0 \in D$  ( $Y$  — норм. пространство)

$f, g$  — непр. в  $x_0$ ;  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  — непр.  $x_0$

Тогда  $f \pm g, \|f\|, \lambda f$  — непр.  $x_0$

2.  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in D$

$f, g$  — непр. в  $x_0$

Тогда  $f \pm g, |f|, fg$  — непр. в  $x_0$

$g(x_0) \neq 0$ , тогда  $\frac{f}{g}$  — непр.  $x_0$

Доказательство отсутствует

### 2.34.2 Стабилизация знака

Если функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$$

*Доказательство.* Докажем для  $f(x_0) > 0$ .

Докажем от противного:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in U_{x_0} \left( \frac{1}{n} \right) \cap D : g(x_n) \leq 0$$

Противоречие. □

### 2.34.3 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$$f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$$

$f$  — непр. в  $x_0 \in D$ ,  $g$  — непр. в  $f(x_0)$

Тогда  $g \circ f$  непр. в  $x_0$

*Доказательство.* По Гейне.

Проверяем, что  $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x_0)$$

$$y_n \in E$$

$$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0)$$
□

## 2.35 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

### 2.35.1 Непрерывность композиции

Дана выше.

### 2.35.2 Соответствующая теорема для пределов

$$f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$$

$a$  — предельн. точка  $D \quad f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} A$

$A$  — предельн. точка  $E$   $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} B$

$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$

Тогда  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$

*Доказательство.* По Гейне.

Проверяем, что  $\forall (x_n) : \begin{smallmatrix} x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \\ x_n \neq a \end{smallmatrix} \quad g(f(x_n)) \overset{?}{\rightarrow} B$

$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$

$y_n \in E$

При больших  $N$   $y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$

$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow B$

□

## 2.36 ! Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

### 2.36.1 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0$  — предельная точка  $D$

$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$  при  $x \rightarrow x_0$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если  $\exists$  один из пределов, то  $\exists$  и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если  $x_0$  лежит в области определения  $\frac{f}{g}$

*Доказательство.*

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \frac{f}{\tilde{f}} \frac{g}{\tilde{g}} \rightarrow \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$

□

### 2.36.2 Таблица эквивалентных

Дана выше. (1.41, стр. 10)



### 2.37 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — предельная точка  $D$

$\forall n \quad g_{n+1} = o(g_n), x \rightarrow x_0$

$\exists U(x_0) \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \quad \forall i \quad g_i(x) \neq 0$

Если  $f(x) = c_0 g_0(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$

$f(x) = d_0 g_0(x) + \dots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

$n \leq m$

Тогда  $\forall i \quad c_i = d_i$

Доказательство.  $k := \min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0 g_0 + \dots + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0 g_0 + \dots + c_{k-1} g_{k-1} + d_k g_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k) g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

### 2.38 ! Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \rightarrow Y$  — непр. на  $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$ , откр.  $f^{-1}(G)$  — откр. в  $X$ .

Доказательство. “ $\Rightarrow$ ”  $x_0 \in f^{-1}(G) \quad ? \exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$

$f$  — непр. в  $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x \in W \quad f(x) \in U$

$f(x_0) \in G$  — откр.  $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$

Для  $U_1 \quad \exists W(x_0) : x \in W \quad f(x) \in U_1 \subset G$

$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$

“ $\Leftarrow$ ”  $x_0 \in X \quad ?$  непр.  $f$  в  $x_0$

$\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$  — надо проверить

$U(f(x_0))$  — откp.  $\Rightarrow f^{-1}(U(f(x_0)))$  — откp., а  $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$ , значит  $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$

Для любого  $x \in W(x_0)$  будет выполняться  $f(x) \in U(f(x_0))$  □

### 2.39 ! Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \rightarrow Y$  — непр. на  $X$

Если  $X$  — комп., то  $f(X)$  — комп.

*Доказательство.*  $f(X)$  — комп.

$f(X) \subset \bigcup G_\alpha$   $G_\alpha$  — откp. в  $Y$ .

$X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha)$  — откp. т.к.  $f$  — непр.  $\xRightarrow{X \text{ — комп.}}$

$$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

□

*Следствие.* Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

*Следствие.* (1-я теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.

Тогда  $f$  — огр.

*Следствие.*  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$X$  — комп.,  $f$  — непр. на  $X$

Тогда  $\exists \max_X f, \min_X f$

$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

*Следствие.*  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр.

$\exists \max f, \min f$

### 2.40 Лемма о связности отрезка

Промежуток  $\langle a, b \rangle$  (границы могут входить, могут не входить) — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е.  $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$  — откp.:

- $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
- $\langle a, b \rangle \cap G_1 \neq \emptyset \quad \langle a, b \rangle \cap G_2 \neq \emptyset$
- $\langle a, b \rangle \subset G_1 \cup G_2$

*Доказательство.* От противного:  $\alpha \in \langle a, b \rangle \cap G_1 \quad \beta \in \langle a, b \rangle \cap G_2$ , пусть  $\alpha < \beta$

$$t := \sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$t \in G_1$ ? нет, т.к. если да, то  $t \neq \beta$  и  $\exists U(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_1 \cap [\alpha, \beta]$ , это противоречит определению  $t$ :

$$[\alpha, t - \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$$

$$(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_1$$

$$[\alpha, t + \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$$

$t \in G_2$ ? нет, т.к. если лежит, то  $t \neq \alpha \quad \exists(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_2 \cap [\alpha, \beta]$

$$\sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \leq t - \varepsilon$$

□

## 2.41 ! Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непр. на  $[a, b]$ . Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \quad \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

Традиционное доказательство — бинпоиск.

*Доказательство.* Сразу следует из леммы о связности отрезка и топологического определения непрерывности.

Если нашлось  $t$ , для которого доказуемое утверждение неверно, то

$$[a, b] = f^{-1}(-\infty, t) \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

Оба множества открыты, т.к. они — прообразы открытых множеств. Кроме того, они непусты, т.к. одно из них содержит  $a$ , другое содержит  $b$ . Итого, мы представили отрезок  $[a, b]$  в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, противоречие по предыдущей лемме. □

## 2.42 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непр.

Тогда  $f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток.

*Доказательство. Не по Кохасю.*

$m := \inf f, M := \sup f$ . Докажем, что  $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$  путем доказательства, что  $f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$  и  $f(\langle a, b \rangle) \supset \langle m, M \rangle$ .

$$1. f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$$

$$\forall x \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) \subset \langle m, M \rangle$$

$$2. f(\langle a, b \rangle) \supset \langle m, M \rangle$$

$\forall k \in \langle m, M \rangle$ . По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении  $\exists c \in \langle a, b \rangle : f(c) = k \Rightarrow k \in f(\langle a, b \rangle) \Rightarrow \langle m, M \rangle \subset f(\langle a, b \rangle)$

□

## 2.43 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности

$X, Y$  — метрические пространства,  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное и сюръекция

$X$  — линейно связное множество. Тогда  $Y$  — линейно связное множество.

*Доказательство.* Надо доказать, что  $\exists$  путь  $[a, b] \rightarrow [A, B]$

$$f(a) = A; f(b) = B$$

$X$  — линейно связное  $\Rightarrow \exists \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b, \gamma$  — непрерывное

$$f \circ \gamma[a, b] \rightarrow Y; f \circ \gamma(\alpha) = A, f \circ \gamma(\beta) = B$$

Т.к. композиция непрерывных функций непрерывна,  $f \circ \gamma$  — непрерывна.

□

## 2.44 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

В  $\mathbb{R}$  линейно связными множествами являются только промежутки.

*Доказательство.* 1. Промежуток линейно связан.

$$\forall A, B \in \langle a, b \rangle \quad \exists \text{ путь: } \gamma : [A, B] \Rightarrow \langle a, b \rangle; t \mapsto t$$

2.  $E \subset \mathbb{R}$  — линейно связное  $\stackrel{?}{\Rightarrow}$   $E$  — промежуток

Пусть  $E$  — не промежуток

$$\exists a, b, t : a, b \in E; a < b \quad a < t < b; t \notin E$$

Линейная связность:  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow E$

$$\gamma(\alpha) = a \quad \gamma(\beta) = b \quad \gamma - \text{непр.}$$

□

## 2.45 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

*Доказательство.* Рассмотрим угол  $\varphi$  и разделим прямой под углом  $\varphi$  колбасу на две равные по площади части. Это можно сделать для произвольного  $\varphi$  по теореме о разделении колбасы.

$$S(\varphi) = S_{\text{л}} - S_{\text{п}} \text{ (для хлеба)}$$

$S$  — непр.

Берём произвольный угол  $\varphi_0$ ;  $\varphi_0 + \pi$

$$\varphi_0 : S_{\text{л}} - S_{\text{п}}$$

$$\varphi_0 + \pi : S_{\text{п}} - S_{\text{л}}$$

$\exists \varphi \ S(\varphi) = 0$  по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении.

□

## 2.46 Теорема о вписанном $n$ -угольнике максимальной площади

Вписанный  $n$ -угольник максимальной площади — правильный.

*Доказательство.* Докажем, что если такой  $n$ -угольник существует, то он правильный. Предположим обратное — он не правильный  $\Rightarrow$  не все стороны равны. Возьмём точки этого  $n$ -угольника  $A, B, C$  на окружности такие, что  $AB \neq BC$ . Сдвинем  $B$  таким образом, что  $AB = BC$ . Площадь треугольника увеличилась (т.к. основание не изменилось), а высота увеличилась  $\Rightarrow n$ -угольник правильный.

Докажем, что такой  $n$ -угольник существует, т.е.  $\exists \max S$ . Зададим  $n$ -угольник углами между соседними вершинами  $\alpha_i$ . Заметим, что  $0 \leq \alpha_i \leq \pi$  и  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$ . Совпадающие

вершины разрешены, искомый  $n$ -угольник содержит центр окружности (*очевидно*). Таким образом, мы задали  $n$ -угольник в  $\mathbb{R}^n$  — пространстве углов. Множество всех многоугольников ограничено гиперкубом со стороной  $\pi$ . Кроме того, оно замкнуто  $\Rightarrow$  по характеристике компактов в  $\mathbb{R}^m$  оно компактно.

$S := \sum \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha_i$  — непрерывна на компакте  $\Rightarrow \exists \max S$  □

## 2.47 ! Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

### 2.47.1 Теорема о непрерывности монотонной функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , монотонна. Тогда

1. Точки разрыва  $f$  (если есть) — I рода
2.  $f$  — непр. на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b \rangle)$  — промежутки

*Доказательство.* Рассмотрим  $f \uparrow$

1.  $x_1 \in \langle a, b \rangle$

$$\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle}$$

$f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle} \uparrow$  и ограничена значением  $f(x) \Rightarrow$  по теореме о пределе монотонной функции  $\exists \lim_{x \rightarrow x_1} f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle} = \sup f(x)|_{\langle a, x_1 \rangle}$ . Аналогично  $\exists \lim_{x \rightarrow x_1 + 0}$ . Таким образом, для каждой точки существует предел слева и справа.

2. “ $\Rightarrow$ ” следует из теоремы о сохранении промежутка.

“ $\Leftarrow$ ”

Пусть  $f$  имеет разрыв в  $x_0$ . Тогда либо  $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ , либо  $f(x_0) < f(x_0 + 0)$ . Рассмотрим  $f(x_0) < f(x_0 + 0)$ . В силу монотонности  $f$  не принимает значений между  $f(x_0)$  и  $f(x_0 + 0) \Rightarrow$  множество значений — не промежуток. Противоречие.

□

### 2.47.2 Следствие о множестве точек разрыва

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное (НБЧС) множество точек разрыва.

*Доказательство.*  $f(x - 0) < f(x + 0)$

Создадим инъекцию  $(f(x-0), f(x+0)) \rightsquigarrow q_x \in \mathbb{Q}$ . Возьмём  $q_x \in (f(x-0), f(x+0))$ . Такая точка будет в силу плотности  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ . Теперь докажем, что взятие  $q_x$  — инъекция. Рассмотрим другую точку разрыва —  $y$ .

$$\exists t \in (f(x), f(y))$$

$$f(x) \leq t \leq f(y)$$

$$f(x) \leq f(x+0) \leq t \leq f(y-0) \leq f(y)$$

Таким образом,  $(f(x-0), f(x+0))$  и  $(f(y-0), f(y+0))$  не имеют общих точек, тогда  $q_x$  все разные  $\Rightarrow$  взятие  $q_x$  — инъекция. Доказать инъективность достаточно, т.к. нам не нужна равномощность.  $\square$

## 2.48 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непр., строго монот.

$m := \inf_{\langle a, b \rangle} f(x)$ ,  $M := \sup_{\langle a, b \rangle} f(x)$ . Тогда:

1.  $f$  — обратимая и  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2.  $f^{-1}$  строго монотонна и того же типа (возрастает или убывает)
3.  $f^{-1}$  непрерывна

*Доказательство.* Пусть  $f \uparrow$

$f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток  $\langle m, M \rangle$  (типы скобок совпадают)

$f$  — строго монот.  $\Rightarrow f$  — инъекция. Тогда  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle m, M \rangle$  — биекция

$$\forall x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$$

$$\forall y_1 < y_2 \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

$\square$

## 2.49 Счетность множества рациональных чисел

$\mathbb{Q}$  — счётное

*Доказательство.*

$$\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \quad \mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad Q_p = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots \right\} - \text{счётно}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p - \text{счётно}$$

$$\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q}_- - \text{счётно}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\} - \text{счётно}$$

□

## 2.50 Несчетность отрезка

$[0, 1]$  — несчётно

*Доказательство.* Пусть  $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  — биекция

$[a_1, b_1]$  — любая из частей, где нет  $\varphi(1)$

$[a_2, b_2]$  — любая из частей, где нет  $\varphi(2)$  и  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$

$\bigcap [a_k, b_k] \supset \{x\}$   $x$  — не имеет номера

$\forall k \quad x \in [a_k, b_k] \Rightarrow x \neq \varphi(k)$

□

## 2.51 Континуальность множества бинарных последовательностей

$Bin$  = множество бинарных последовательностей

$Bin$  имеет мощность континуума

*Доказательство.*  $\varphi : Bin \rightarrow [0, 1] \cup Bin_{\text{кон.}}$

$0101 \dots \mapsto 0.0101 \dots$  — это отображение не инъективно ( $0100 \dots \mapsto 0.01$ ;  $0011 \dots \mapsto 0.01$ )

Инъекция достигается тем, что конечные дроби идут в  $Bin_{\text{кон.}}$ , а бесконечные в  $[0, 1]$  □

## 2.52 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования.

### 2.52.1 Равносильность двух определений производной

Определение 1  $\Leftrightarrow$  определению 2, т.е.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \in \mathbb{R}$$



$$A = B$$

*Доказательство.* Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

### 2.52.2 Правила дифференцирования

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифф. в  $x_0$

Тогда указанные ниже в левых частях дифференцируемы в  $x_0$  и их производные равны.

1.  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
3.  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если  $g(x_0) \neq 0$ :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*Доказательство.* Докажем 4 по определению.

$$\frac{\frac{f}{g}(x_0 + h) - \frac{f}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{OK}$$

□

## 2.53 Дифференцирование композиции и обратной функции

### 2.53.1 Дифференцирование композиции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle \quad x \in \langle a, b \rangle \quad f - \text{дифф. в } x$

$g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad g - \text{дифф. } y = f(x)$

Тогда  $g \circ f - \text{дифф. в } x; (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ g(y+k) &= g(y) + g'(y)k + \beta(k)k \\ f'(x)h + \alpha(h)h &= k; \quad k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ g(f(x+h)) &= g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h \\ &= g'(f(x))f'(x)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h = \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

### 2.53.2 Дифференцирование обратной функции

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} - \text{непр., строго монот. } x \in \langle a, b \rangle \quad f - \text{дифф. в } x; f'(x) \neq 0$

По определению  $f \exists f^{-1}$

Тогда  $f^{-1} - \text{дифф. в } y = f(x) \text{ и}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

*Доказательство.*  $\forall k \exists h : f(x+h) = y+k$

$$h = (x+h) - x = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x+\tau(k)) - x}} \xrightarrow[\tau(k) \rightarrow 0]{\substack{\text{по т.о непр. обр. ф.} \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

## 2.54 Теорема Ферма (с леммой)

### 2.54.1 Лемма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — дифф. в  $x_0 \in (a, b)$ ;  $f'(x_0) > 0$

Тогда  $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad f(x_0) < f(x)$

и  $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad f(x_0) > f(x)$

*Примечание.* Это не монотонность.

*Доказательство.*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) > 0$$

$x \rightarrow x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$  вблизи  $x_0$  (по теор. о стабилизации знака)

$x \rightarrow x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$  вблизи  $x_0$

□

### 2.54.2 Теорема Ферма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$  — точка максимума

$f$  — дифференцируема в  $x_0$

Тогда  $f'(x_0) = 0$

*Доказательство.* Из леммы.

Если  $f'(x_0) > 0$ , то справа от  $x_0$  есть  $x : f(x) > f(x_0)$

Если  $f'(x_0) < 0$ , то слева от  $x_0$  есть  $x : f(x) > f(x_0)$

□

## 2.55 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра

### 2.55.1 Теорема Ролля

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр. на  $[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$

$f(a) = f(b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса.

$$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$$

$$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = \text{const}; f' \equiv 0$$

Иначе: пусть  $x_0 \in (a, b) \xRightarrow{\text{т. Ферма}} f'(x_0) = 0$

□

### 2.55.2 Вещественность корней многочлена Лежандра

$$n \in \mathbb{N}$$

$L_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$  — полиномы Лежандра (с точностью до умножения на константу)

$$\deg L_n = n$$

Утверждение:  $L_n$  имеет  $n$  различных вещественных корней.

*Доказательство.* Рассмотрим  $(x^2 - 1)^n$ . У этого многочлена 2 корня  $\{-1, 1\}$ , каждый кратности  $n$ .

Возьмём производную. По т. Ролля у этого многочлена есть корень  $\in (-1, 1)$ . Кроме того,  $\{-1, 1\}$  все ещё корни, у них кратность  $n - 1$ . Т.к.  $\deg = 2n - 1$ , кратность нового корня 1. На  $n$ -ом шаге получается  $n$  корней, каждый кратности 1. □

## 2.56 ! Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной

### 2.56.1 Теорема Лагранжа

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непр., дифф. в  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$ , такое что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

*Примечание.* Теорему Лагранжа можно интерпретировать как следующее:  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  — тангенс угла между хордой графика и горизонталью, а  $f'(c)$  — касательная. Таким образом, если провести хорду графика, то можно найти точку между точками пересечения графика и хорды такую, что касательная к графику будет параллельна этой хорде.

*Доказательство.* Следует из теоремы Коши при  $g(x) = x$

□

### 2.56.2 Теорема Коши

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$f, g$  — дифф. в  $(a, b)$ ;  $g' \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда

$\exists c \in (a, b)$ , такое что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство. Теоремы Коши.*

$$F(x) := f(x) - kg(x)$$

Подберем  $k$  такое, что  $F(b) = F(a)$

$$f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По т. Ролля  $\exists c : F'(c) = 0$

$$f'(c) - kg'(c) = 0$$

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

### 2.56.3 Следствия об оценке приращения и о пределе производной

1.  $f$  непр. на  $[a, b]$ , дифф. в  $(a, b)$

$$\exists M : \forall x \quad |f'(x)| \leq M$$

Тогда  $\forall x, x + h \in [a, b]$

$$|f(x + h) - f(x)| \leq M|h|$$

2.  $f$  — непр. на  $[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = k \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда  $f'_+(a) = k$

*Доказательство. Следствия 2.*

$\exists a < c < a + h$ , такой что:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} k$$

□

## 2.57 Теорема Дарбу. Следствия

### 2.57.1 Теорема Дарбу

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — дифф. на  $[a, b]$

Тогда  $\forall C$  лежащего между  $f'(a), f'(b)$

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$$

*Доказательство.*  $F(x) := f(x) - C \cdot x$  — у неё  $\exists \max_{[a,b]}$  (в силу непрерывности)

$F'(x) = f'(x) - C$   $F'(a)$  и  $F'(b)$  разных знаков.

$$1. F'(a) > 0 \quad F'(b) < 0$$

По лемме при  $x > a$ , близких к  $a$   $f(x) > f(a) \Rightarrow \max f$  достигается в  $c \in (a, b)$

□

### 2.57.2 Следствия

*Следствие.* 1. Функция  $f'$  обладает свойством “сохранять промежуток”

2.  $f'$  не может иметь разрывов вида “скачок”

## 2.58 Теорема о свойствах показательной функции

$f$  — показ. ф-ция

Тогда:

$$1. \forall x \quad f(x) > 0; f(0) = 1$$

$$2. \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$$

$$3. f \text{ — строго монот.: } a := f(1)$$

Тогда  $a \neq 1$ , если  $a > 1$  — возр., если  $a < 1$  — убыв.

$$4. \text{ Множество значений } f \quad (0, +\infty)$$

$$5. \tilde{f}(1) = f(1), \text{ тогда } f = \tilde{f}$$

*Доказательство.* 1.  $f \not\equiv 0 \quad \exists f(x_0) \neq 0$

$$x = x_0, y = 0 \quad f(x_0 + 0) = f(x_0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

Если  $f(x_1) = 0$ , тогда

$$\forall x \quad f(x) = f(x - x_1) \cdot f(x_1) = 0$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

2. Как в опр. ст. с рациональным показателем

(a)  $r = 1$

(b)  $r \in \mathbb{N}$

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) \cdot f(x) = f(x^2)$$

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$$

(c)  $r \in -\mathbb{N}$

$$1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx) \cdot f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$$

(d)  $r = 0$

$$f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$$

(e)  $r = \frac{1}{n}$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = (f(x))^{\frac{1}{n}}$$

(f)  $r = \frac{m}{n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m \cdot \left(\frac{1}{n}x\right)\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}x\right)\right)^m = \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

3.  $a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = 1^r = 1$

$f$  — непр. и  $f(x) = 1$  при  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \equiv 1$

$a > 1$ . Тогда  $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$

$$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r > 1$$

Значит  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$  берем  $r_k \rightarrow x (r_k \in \mathbb{Q})$

$f(r_k) \rightarrow f(x)$ , значит  $f(x) \geq 1$

$$f(x) = f((x-r) + r) = f(x-r) \cdot f(r) > 1$$

$$\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$$

$$\text{возр. } x \in \mathbb{R}, h > 0$$

$$f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$$

$$f(h) > 1 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$$

$$a < 1 - \text{аналогично.}$$

$$4. f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$$

$$\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$$

$$f(1) = a > 1$$

$$a^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5. \tilde{f}(1) = f(1) \Rightarrow \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$$

$$\forall x \quad r_k \rightarrow x$$

$$\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$$

$$\tilde{f}(r_k) \rightarrow \tilde{f}(x); f(r_k) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$$

□

## 2.59 Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия

$\exists$  показательная функция  $f_0$ , удовлетворяющая

$$\frac{f_0(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$f$  — произвольная показательная функция. Тогда  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x : f(x) = f_0(\alpha x)$

*Доказательство.*  $a := f(1), \exists \alpha : f_0(\alpha) = a$

$f_0(\alpha x)$  и есть  $f(x)$ , т.к. у них совпадает значение в 0.

Докажем, что  $f_0(\alpha x)$  — показ. функция.

$$f_0(\alpha(x+y)) = f_0(\alpha x + \alpha y) = f_0(\alpha x) f_0(\alpha y)$$

□

*Следствие.*  $f_0$  — единственна.



*Доказательство.* Пусть  $h(x)$  — ещё одна такая функция  $\Rightarrow \exists \alpha : h(x) = f_0(\alpha x)$

$$1 \xleftarrow{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{x} = \frac{f_0(\alpha x) - 1}{x} = \frac{f_0(\alpha x) - 1}{\alpha x} \cdot \alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

□

*Следствие.*  $\forall a > 0, a \neq 1 \quad \exists! f : f(1) = a$

*Доказательство.* Для этого  $a \quad \exists! \alpha : f_0(\alpha) = a$

$$f(x) := f_0(\alpha x)$$

$$f(1) = a = f(\alpha)$$

□

## 2.60 Показательная функция от произведения

$f$  — показ. ф-ция.  $\forall r \in \mathbb{R} \quad f(rx) = (f(x))^r$

*Доказательство.* Для  $r \in \mathbb{Q}$  доказано выше. (2.58, стр. 54)

$$\forall r \in \mathbb{R}. \exists a_n \in \mathbb{Q} \rightarrow r$$

$$f(a_n x) = f(x)^{a_n} \rightarrow f(x)^r$$

□

## 2.61 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Остаток:  $T_n := o((x - x_0)^{n+1}), x \rightarrow x_0$ .

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^{n+1})$$

*Доказательство.*

**Лемма 1.**  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle, \varphi$   $n$  раз дифференцируема в  $x_0$  и  $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$ .

Тогда  $\varphi(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$

*Доказательство.* База:  $n = 1$ .

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Переход:

$\varphi'(x) = o((x - x_0)^n)$  по индукционному переходу.

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = 0 + o((x - x_0)^n)(x - x_0) + o(x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1}) + o(x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$$

□

$$T_n := f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n - \text{подходит в лемму} \Rightarrow T_n = o((x - x_0)^{n+1}) \quad \square$$

## 2.62 ! Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Остаток:  $R_n := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ , где  $c \in (x_0, x)$  (или наоборот, если  $x < x_0$ ).

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство.

$$g(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

$$g(x) = 0, g(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} R_n$$

$$g'(t) = \left( f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right)'$$

$$g'(t) = 0 - f'(t) - (f''(t)(x - t) - f'(t)) - \dots - \left( \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right)'$$

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

$$h(x) := (x_0 - x)^{n+1}, n + 1 > 0$$

По т. Коши: (можно применить, т.к.  $h' \neq 0$ ,  $g, h$  — дифф. на  $(x, x_0)$ )

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$$

и при этом  $c \in (x, x_0)$ .

$$\frac{0 - R_n}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n}{-(n+1)(x - c)^n}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

□

## 2.63 Метод Ньютона

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — дважды дифф.

$$m := \inf_{\langle a, b \rangle} |f'| > 0$$

$$M := \sup |f''|$$

$$\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$$

$$x_1 \in (a, b) : |x_1 - \xi| \frac{M}{2m} < 1$$

Рассмотрим последовательность  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Тогда  $\exists \lim x_n = \xi$  и при этом !. Кроме того, оно очень быстро сходится.

$$|x_n - \xi| \leq \left( \frac{M}{2m} |x_1 - \xi| \right)^{2^n}$$

## 2.64 Иррациональность числа $e^2$

$e^2$  — ирр.

*Доказательство.* Предположим обратное:  $e^2$  — рационально. Тогда  $e^2$  представимо следующим образом:

$$e^2 = \frac{2k}{n}$$

$$ne = 2ke^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = (2k)!e^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = n(2k-1)! \left( 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{e^c}{(2k)!} \right) = \text{целое число} + \frac{ne^c}{2k}$$

$$\frac{ne^c}{2k} \leq \frac{ne}{2k} = e \cdot e^{-2} = e^{-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k)!} - \frac{e^d}{(2k+1)!} \right) = \text{целое число} - \frac{e^d}{2k+1}$$

Заметим, что  $d \in [-1, 0]$

$$\frac{e^d}{2k+1} \leq \frac{e^d}{3} \leq \frac{e^0}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Дробная часть левой части  $\leq \frac{1}{2}$ , дробная часть правой  $\geq \frac{2}{3}$  — противоречие.  $\square$

## 2.65 Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры

$$|f^{(n+1)}| \leq M$$

$$|R_n(x_0)f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Пусть  $f \in C^\infty\langle a, b \rangle$ ,  $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, t \in \langle a, b \rangle \quad |f^{(n)}(t)| \leq M$ . Тогда

$$T_n(x_0)f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

## 2.66 Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби

$P(x), Q(x)$  — многочлен  $\deg P < \deg Q = n$

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m} \quad (k_1 + \dots + k_m = n; a_i \neq a_j)$$

Тогда  $\exists$

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \left( \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) + \left( \frac{B_1}{(x - a_2)} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - a_2)^{k_2}} \right) + \\ & + \dots + \left( \frac{C_1}{(x - a_m)} + \frac{C_2}{(x - a_m)^2} + \dots + \frac{C_{k_m}}{(x - a_m)^{k_m}} \right) \end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m}} &= \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} \frac{P(x)}{(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}} = \\ &= \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} (A_{k_1} + A_{k_1+1}(x - a_1) + A_{k_1-2}(x - a_1)^2 + \dots + A_1(x - a_1)^{k_1} + o((x - a_1)^{k_1})) \\ \frac{P}{Q} - \left( \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) &= \frac{o((x - a_1)^{k_1})}{(x - a_1)^{k_1}} \end{aligned}$$

$\frac{P}{Q} - (\text{Пр. часть}) = \text{знам. сократится} \Rightarrow \text{многочлен} \equiv 0$   $\square$