1 Линейные операторы

1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\triangleleft \varphi : X \to Y$, X, Y — ЛП, $\dim X = n, \dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Определение. Отображение φ, обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОп)

Пример.
- $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор
- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный *(тождественный)* оператор
- $X = L_1 \dot{+} L_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \ \ \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

  Проектор:
  $$\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x_1$$

  $$\mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} : X \to L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная $\exists$ и непрерывна

  $$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(t) K(x,t) dt$$

  $K(x, t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y, $\varphi(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $||a_j^k||$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

1.2 Пространство линейных операторов.

$\triangleleft \varphi, \psi : X \to Y$ — ЛОп

$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$\chi = \alpha\varphi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.

Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и $\cdot$ с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists(-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$

Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$

Модуль над кольцом *(коммутативным, с единицей)* R — множество M с операциями:

1. $+ : M \times M \to M$
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
   (d) $\forall x \in R : \exists(-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot : M \times R \to M$
   (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
   (b) $1m = m$
   (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
   (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением — алгебра над $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{C}$ — алгебра над $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{H}$ *(кватернионы)*
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F : A \to B$, где A и B — алгебры, сохраняющая "$+$" и "$\cdot$":

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$

Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum\limits_j a_{ij} b_{jk}$

Теорема 1.1.

$$\underbrace{\mathcal{C}}_{C} = \underbrace{\mathcal{B}}_{B}\underbrace{\mathcal{A}}_{A} \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji}e_j\right) = \sum_j a_{ji}\mathcal{B}e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj}e_k$$

$$c_{il} = (\mathcal{C}e_i)_l = \sum_j a_{ji}b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \to X$ — алгебра, пространство квадратных матриц $\mathbb{R}^n_n$ — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — **левый обратный** элемент для a_2

2. a_2 — **правый обратный** элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2, то он называется **обратным** элементом к a_2.

Теорема 1.2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. “$\Leftarrow$”

$$\det A \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij} a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к. $\det A = 0 \xRightarrow{def}$ вектора $\in A$ ЛНЗ $\Rightarrow$ единственное решение.

“$\Rightarrow$” то же самое, но наоборот.  □

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array}\right]$$

Доказательство.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} T_1 A & T_1 E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} T_2 T_1 A & T_2 T_1 E \end{array}\right] = \ldots = \left[\begin{array}{c|c} T_n \ldots T_1 A & T_n \ldots T_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E & T_n \ldots T_1 \end{array}\right]$$

$$\triangleleft T_n \ldots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \ldots T_1$$

□

Здесь T_i — матрица элементарного преобразования.

1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 4)

Теорема 1.3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$]\delta_{k_0}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1_{k_0} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T = b$$

$$\beta^j_{k_0} = \xi^j \quad \alpha^i_j = a_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \to b)$$

□

$A(a_j \to b)$ — матрица A, где заменили j-тый вектор на b

$$\det A(a_j \to b) = 0 \cdot M^1_j + \ldots + 1 \cdot M^k_j + \ldots + 0 = M^k_j$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)^j_k}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}^j_k}{\det A}$$

1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$\triangleleft \varphi : X \to Y$

Определение. Ядро φ :

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\operatorname{Ker} \varphi \subset X$

Лемма 1. *Ker* φ — *ЛП*

Определение. Образ φ:

$$\operatorname{Im} \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\operatorname{Im} \varphi \subset Y$$

Лемма 2. *Im* φ — *ЛП*

Теорема 1.4. О ядре и образе

$$]\varphi : X \to X \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim X$$

Доказательство. $]\dim \operatorname{Ker}\varphi = K$

$]\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \ \ \forall j = 1..k$

$\lhd \{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X

$\lhd x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \quad \lhd \varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j \varphi(e_j) = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \xi^j \varphi(e_j)$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для Im, т.к. любой $x \in \operatorname{Im}$ можно по нему разложить. Докажем ЛНЗ от обратного:

$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — ЛЗ $\Rightarrow \exists \alpha^j : \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k \text{ — противоречие} \\ \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ ЛНЗ} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$. □

1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

Теорема 1.5. Оператор φ обратим, если $\exists$ базис, в котором его матрица невырождена

Теорема 1.6. $\lhd \varphi : X \to X$

$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim X$ или $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$

Доказательство. $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim X \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$ — сюръекция, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0 \Rightarrow$ $\forall y \ \ \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$ — инъекция □

2 Тензорная алгебра

2.1 Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.

$\lhd \{e_j\}$ — базис X

$\lhd \{\tilde{e}_k\}$ — базис X^*

$\Rightarrow \forall k \ \ \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^{n} t_k^j e_j$

Определение. Набор $T = ||t^i_j||$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Примечание. $\lhd E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \dots & \tilde{e}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{E} = ET$

Лемма 3. *$]\xi$ — координаты вектора x в базисе $\{e_j\}$*

$]\tilde{\xi}$ — координаты вектора x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$

Тогда $\xi = T\tilde{\xi}$ или $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

Доказательство. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{x}^k \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{\xi}^k t^j_k) e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi}$ □

Лемма 4. *$]\{f^l\}$ — базис X^*, сопряженный $\{e_j\}$, т.е. $f^l(e_j) = \delta^l_j$*

$]\{\tilde{f}^m\}$ — базис X^*, сопряженный $\{\tilde{e}_k\}$, т.е. $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta^k_m$

$]F = \begin{bmatrix} f^1 & f^2 & \dots & f^n \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^1 & \tilde{f}^2 & \dots & \tilde{f}^n \end{bmatrix}^T$

Тогда $F = T\tilde{F}$ или $f^l = \sum\limits_{m=1}^{n} t^l_m \tilde{f}^m$

Доказательство. $\lhd (\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta^m_k = (\tilde{f}^m, \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k (\tilde{f}^m, e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k \sum\limits_{l=1}^{n} a^m_l (f^l, e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} t^j_k a^m_j$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a^m_j t^j_k = \delta^m_k$ или $AT = I$ — единичная матрица $\Rightarrow A = T^{-1}$ □

Лемма 5. *$]\varphi$ — коэфф. ЛФ в $\{e_j\}$*

$]\tilde{\varphi}$ — коэфф. ЛФ в $\{\tilde{e}_k\}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

Доказательство. $]g$ — ЛФ, $\varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^{n} t^j_k e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} t^j_k g(e_j) = \sum_{j=1}^{n} t^j_k \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$ □

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

$\lhd \overline{\mathcal{A}} : \overline{X} \to \overline{Y}, \mathcal{A} : X \to Y$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \overline{\mathcal{A}} \leftrightarrow \overline{A}$

$\mathcal{X}$ — матрица перехода $\overline{X} \to X$, $\mathcal{Y}$ — матрица перехода $\overline{Y} \to Y$

$x \in X, y := \mathcal{A}x, \overline{x} := \mathcal{X}x, \overline{y} := \mathcal{Y}y$

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow Ax = y = \mathcal{Y}^{-1}\overline{y} = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\overline{x} = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}x$$
$$\forall x \quad Ax = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}x \Leftrightarrow A = \mathcal{Y}^{-1}\overline{A}\mathcal{X}$$

2.3 Тензоры *(ковариантность, независимое от ПЛФ определение)*. Пространство тензоров.

Определение. Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными** величинами.

Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными** величинами.

Примечание. ξ — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$]W \in \Omega^p_q$ — ПЛФ (p, q)

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{f^k\}_{k=1}^n$ — базис X^*

$$\Rightarrow \omega^{j_1 \ldots j_n}_{i_1 \ldots i_n} \stackrel{\text{def}}{=} W(e_{i_1} \ldots e_{i_p} f^{j_1} \ldots f^{j_q})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}$ и $\{\tilde{f}^m\}$ ПЛФ W имеет тензор $\tilde{w}^{t_1 \ldots t_q}_{s_1 \ldots s_p} = W(\tilde{e}_{s_1} \ldots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \ldots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$= \text{⚠} W(t^{i_1}_{s_1} e_{i_1} \ldots t^{i_p}_{s_p} e_{i_p}, \sigma^{t_1}_{j_1} f^{j_1} \ldots \sigma^{t_q}_{j_q} f^{j_q}) =$$
$$= t^{i_1}_{s_1} \ldots t^{i_p}_{s_p} \sigma^{j_1}_{t_1} \ldots \sigma^{j_q}_{t_q} W(e_{s_1} \ldots e_{s_p}, f^{t_1} \ldots f^{t_q})$$

Определение.

1. **Вектором** называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону
2. **Линейной формой** называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону

3. **Тензором** типа (p, q) называется величина, преобразующаяся p раз по ковариантному закону и q раз по контравариантному.

- Сложение тензоров и умножение тензора на скаляр — поэлементное
- Нулевой элемент по сложению — тензор, принимающий значение 0 на любом входе
- Очевидно $w + \alpha v$ — тензор того же типа, что и $w \Rightarrow$ тензоры образуют линейное пространство $T^p_q, \dim T^p_q = p + q$

2.4 Свертка тензора.

Свертка:

$$\overset{k\wedge s}{\omega}{}^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_n} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{j_1 \dots \overset{k}{\cancel{m}} \dots j_q}_{i_1 \dots \underset{s}{\cancel{m}} \dots i_p}$$

Примечание. Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 6. *Свертка сохраняет тензорную природу*

Лемма 7.

$$\overset{l\wedge m}{\overset{k\wedge s}{\omega}} = \overset{k\wedge s}{\overset{l\wedge m}{\omega}}$$

Доказательство. От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется. □

2.5 Транспонирование тензора.

Транспонирование

$t^{(st)} : \omega^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \mapsto \omega^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$

Примечание. Транспонировать можно только по индексам одного типа

Лемма 8. *Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.*

2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

$\lhd \Lambda^p \quad \{{}^{i_1 \dots i_p}F\}_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$ — базис Λ^p

$$^{i_1 \dots i_p}F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \qquad \dim \Lambda^p = C^p_n$$

$]\{x_i\}^n_{i=1}$ — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1 \dots n}F(x_1 \dots x_n)$$

$\lhd \Lambda_p \quad \{_{i_1 \dots i_p}F\})_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$ — базис Λ_p

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad _{i_1 \dots i_p}F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$_{1 \dots n}F = \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) =$$

$$= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n](e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$$

Определение. **Определителем** набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1 \dots x_n]$, такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма 9.

$$\textit{от } \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \textit{ от } \Lambda_p$$

Доказательство.

$$\det\{x_1 \dots x_n\} = {}^{1 \dots n}F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n =$$

$$= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

□

Определение. $\lhd \varphi : X \to X$

Внешней степенью φ^{Λ_p} оператора φ называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

Примечание.

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \to \Lambda_p$$

$\lhd p = n$

$$\varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} =$$

$$= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Определение. **Определителем** линейного оператора φ называется число, такое что:

$$\det\varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Примечание.

$$\forall\omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n}\omega = \det\varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n}\omega = \alpha\varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \alpha\det\varphi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \det\varphi \cdot \omega$$

2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.

Пример. $\det\varphi$ — инвариант

$$\varphi^{\Lambda_n} z = \det\varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n$$

$$\det\varphi = \det A_\varphi \text{ — в некотором фиксированном базисе}$$

$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1}A_\varphi T \quad \det\tilde{A}_\varphi = \det T^{-1}\det A_\varphi \det T = \det A_\varphi$$

Теорема 2.1.

$$\det(\varphi\psi) = \det\varphi\det\psi$$

Доказательство.

$$\lhd \det(\varphi\psi)e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = (\varphi\psi)^{\Lambda_n} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \ldots \wedge \varphi(\psi(e_n)) =$$

$$= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \ldots \wedge \psi(e_n)) = \det\varphi\det\psi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

□

3 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерных пространствах

3.1 Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

Определение. **Инвариантном** линейного оператора φ называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

$\lhd\varphi : X \to X$ — автоморфизм

Определение. Подпространство L линейного пространства X называется **инвариантным подпространством** φ, если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

Пример. 1. $\varphi : X \to X$, тогда инвариантные подпрострнаства:

- X
- $\{0\}$

2. $\varphi = \Im, \quad \forall x \;\; \Im x = x \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

3. $\varphi = \Theta, \quad \forall x \;\; \Theta x = 0 \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

4. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq diag\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

   $\triangleleft \{e_j\}$ — базис $X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \to \mathcal{L}\{e_j\}$ — инв.

   Всего 2^n инвариантных подпространств

5. $]X = L_1 \dot{+} L_2$

$$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\| L_2} x = x_1 \in L_1$$

   L_1 — инв., $\forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\| L_2} x = x \quad \forall$ подпространство L_1 инвариантно

   L_2 — инв., $\forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\| L_2} x = 0 \quad \forall$ подпространство L_2 инвариантно

3.2 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: основные определения и свойства.

$\varphi : X \to X$

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ, если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

λ — **собственное значение** φ, соответствующее x

Определение. **Спектр** $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Определение. $x \in X$ — **собственный вектор** φ, если этот вектор ненулевой и принадлежит одномерному инвариантному подпространству: $x \neq 0, x \in L^{(1)}$

Лемма 10. *Эти определения собственного вектора эквивалентны.*

Доказательство. Опр. 1 $\Rightarrow$ Опр. 2:

$\triangleleft x : \varphi x = \lambda x, L^{(1)} = \mathcal{L}(x)$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \beta x \Rightarrow \varphi y = \varphi \beta x = \beta \varphi x = \beta \lambda x$$

Опр. 2 $\Rightarrow$ Опр. 1:

$\lhd x \in L^{(1)} = \mathcal{L}v \xRightarrow{def} \varphi x \in L^{(1)}$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \alpha v \quad \varphi y = \alpha \varphi v = \beta v$$

$\square$

Лемма 11. *Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейно независимы:*

$$\lambda_i \to x_i, \lambda_i \neq \lambda_{j \neq i} \Rightarrow \{x_i\} \text{ ЛНЗ}$$

Доказательство. По индукции:

База: $m = 1 \Rightarrow \{x_1\}$ ЛНЗ, т.к. $x_1 \neq 0$

Переход: $\{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛНЗ, тогда $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall i$

$$\lhd \{\alpha_i\} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

$$0 = \mathcal{A}0 = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_{n+1}\left(\sum \alpha_i x_i\right)$$

Вычтем второе выражение из первого:

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) + 0$$

Т.к. $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛНЗ, $\forall i \in [1, n] \;\; \alpha_i = 0$

$$0 = \alpha_{n+1} x_{n+1}, x_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$$

$\square$

Лемма 12. *Линейный оператор в конечномерном пространстве не может иметь более n различных собственных значений.*

Доказательство. Тривиально в силу ЛНЗ соответствующих векторов. $\square$

3.3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Вычислим СВ и СЗ.

$$x = \sum \xi^i e_i \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 & \dots & \xi^n \end{pmatrix}^T \quad \mathcal{A} \leftrightarrow A = ||a^i_j||$$
$$\mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow A\xi = \lambda\xi \Leftrightarrow A\xi - \lambda E\xi = 0$$

Таким образом, задача нахождения СЗ сводится к нахождению λ, для которых существуют нетривиальные решения СЛАУ $A - \lambda E$, что эквивалентно нахождению корней характеристического полинома $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Нахождение СВ $\Leftrightarrow$ нахождение нетривиальных решений СЛАУ $A - \lambda E$ для каждого СЗ λ

Лемма 13. $\lhd \mathcal{A} : X \to X$, *$X$ — ЛП над $\mathbb{C}$, тогда у $\mathcal{A}$ существует по крайней мере один собственный вектор и одно собственное значение.*

Доказательство. У любого многочлена есть хотя бы один корень $\in \mathbb{C}$. □

3.4 Спектральный анализ линейного оператора с простым спектром: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Определение. Собственное значение λ — **простое**, если оно — корень $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ единичной кратности.

Определение. Спектр σ называется **простым**, если все собственные значения в нём простые.

Теорема 3.1. $\lhd \mathcal{A} : X \to X$ — ЛОП с простым спектром $\sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ — СВ.

Тогда A можно привести к диагональной форме A^d:

$$A^d = T^{-1}AT$$

где T — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к $\{x_i\}$

Доказательство. Очевидно, т.к. $\mathcal{A}$ в базисе $\{x_i\}$ имеет диагональную матрицу $diag\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ □

Определение. $\lhd \lambda_i$ — собственное значение ЛОП $\mathcal{A} : X \to X$.

Спектральным проектором $\mathcal{P}^{||}_{\lambda_i}$ называется оператор проектирования на подпространство L_{λ_i} (множество векторов, отвечающих λ_i)

Лемма 14. *Спектральные проекторы оператора с простым спектром имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = x_i \cdot f^i$$

где $\{x_i\}$ *— базис* X *из СВ,* $\{f^i\}$ *— сопряженный ему базис.*

Доказательство. Необходимо показать, что для $x \in L_{\lambda_i}$ $\mathcal{P}^{\|}_{\lambda_i} x = x$, для $y \in \mathcal{L}\{x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_n\}$ $\mathcal{P}^{\|}_{\lambda_i} y = 0$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} x = x_i \cdot f^i x = x_i \cdot \alpha f^i x_i = \alpha x_i$$
$$\mathcal{P}_{\lambda_i} y = x_i \cdot f^i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \alpha_j x_j \right) x_i \cdot 0$$

□

Теорема 3.2. Спектральная теорема для скалярного оператора:

$$\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A} x = \mathcal{A} \left(\sum_i \mathcal{P}^{\|}_{\lambda_i} x \right) = \sum_i \mathcal{A} \mathcal{P}^{\|}_{\lambda_i} x = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}^{\|}_{\lambda_i} x$$

□

3.5 Спектральный анализ скалярного оператора: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Спектр, диагональный вид матрицы, спектральная теорема: см. выше.

Лемма 15. *Спектральные проекторы оператора скалярного типа имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{m_j} x_j^{(i)} \cdot f_{(i)}^j$$

где $\{x_j^{(i)}\}_{j=1}^{m_j}$ *— СВ, отвечающие* λ_i*,* $\{f_{(i)}^j\}_{j=1}^{m_j}$ *— сопряженный ему базис.*

3.6 Спектральная теорема и функциональное исчисление для скалярного оператора.

Спектральная теорема: см. выше

$p(\lambda)$ — скалярный полином. Тогда

$$p(\mathcal{A}) = \sum p(\lambda_i)\mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = \sum(\lambda_i + \lambda_i)\mathcal{P}_{\lambda_i} = 2\mathcal{A}$$

$$\alpha\mathcal{A} = \sum(\alpha\lambda_i)\mathcal{P}_{\lambda_i}$$

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{A} = \left(\sum_i \lambda_i\mathcal{P}_{\lambda_i}\right)\left(\sum_j \lambda_j\mathcal{P}_{\lambda_j}\right) = \sum_i\sum_j \lambda_i\lambda_j P_{\lambda_i}P_{\lambda_j} = \sum_i\sum_j \lambda_i\lambda_j P_{\lambda_i}\delta_j^i = \sum_i \lambda_i^2 P_{\lambda_i} = \mathcal{A}^2$$

□

3.7 Спектральная теорема и инварианты скалярного оператора. Тождество Кэли.

Спектральная теорема, инварианты скалярного оператора: см. выше.

Лемма 16. *Тождество Кэли.*

$\lhd\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ *— характеристический полином ЛОП* $\mathcal{A}$*, то* $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \sum \chi_{\mathcal{A}}(\lambda_i)\mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum 0P_{\lambda_i} = 0$$

□

4 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерном пространстве: операторы общего вида

4.1 Ультраинвариантные подпространства.

$\lhd\varphi : X \to X, \dim X = n$

$L \subset X$ — инвариантное подпространство φ, если $\varphi(L) \subset L$

Определение. Инвариантное подпространство называется **ультраинвариантным подпространством**, если существует его дополнение L', такое что:

$$L \dot{+} L' = X \quad L' \text{ — инвариантное подпространство } \varphi$$

Определение. Оператор $\varphi_L : L \to L$, такой что:

$$\varphi_L x = \varphi x \quad \forall x \in L$$

называется **сужением** оператора φ на L.

Если L — ультраинвариантное подпространство, то φ_L называется **компонетной** φ в L

Лемма 17. *Дополнение L' ультраинвариантного подпространства L является ультраинвариантным подпространством.*

Лемма 18. $X = L \dot{+} L' \quad L, L'$ — *ультраинвариантное подпространства* $\Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\parallel L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L}$$

Доказательство.

$$X = L \dot{+} L' \Rightarrow \forall x! = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_L^{\parallel L'} x + \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L} x$$

$$\varphi x = \varphi \mathcal{P}_L^{\parallel L'} x + \varphi \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L} x \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\parallel L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\parallel L} \quad (*)$$

□

4.2 Алгебра скалярных полиномов. Идеал. Минимальный полином.

$\lhd K$ — поле, над которым задано множество полиномов $K_\infty[\lambda]$, также обозначается $P_\infty[K]$

$$P_\infty[K] = \{p_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda^i \quad \forall n\}$$

Примечание. $P_\infty[K]$ — линейное пространство:

$$p, q \in P_\infty[K]; \lambda \in K \Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda) \\ (\lambda p)(\lambda) = \alpha p(\lambda) \end{cases} \quad \Rightarrow P_\infty[K] \text{ — линейное пространство}$$

Примечание. $P_\infty[K]$ — коммутативная алгебра

Зададим операцию умножения в $P_\infty[K]$:

$$\forall p, q \in P_\infty[K] \quad (p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda)$$

$$(p \cdot q)(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = (qp)(\lambda) \Rightarrow \text{коммутативность}$$

$$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r) = p \cdot q \cdot r$$

$$(p+q)r = pr + qr$$

$$(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq)$$

Нейтральный элемент:

- по сложению: $0(\lambda) = 0$
- по умножению: $1(\lambda) = 1$

Примечание. $\{1, t, t^2 \dots t^n \dots\}$ — базис $P_\infty[K] \Rightarrow \dim P_\infty[K] = \infty$

Определение. **Идеалом** J алгебры $P_\infty[K]$ называется такое её подпространство, что

$$\forall q \in J \ \ \forall p \in P_\infty[K] \quad q \cdot p \in J$$

Пример. Тривиальные идеалы:

- $\{0\}$
- $P_\infty[K]$

Лемма 19. *J — линейное подпространство $P_\infty[K]$*

Доказательство. $]q_1, q_2 \in J \quad q_1 + q_2 \in J?$

$q_1, q_2 \in J \Rightarrow \forall p \ \ q_1 p, q_2 p \in J$

$q_1 = r\tilde{q}_1, q_2 = r\tilde{q}_2 \quad (q_1 + q_2)p = r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p$

$(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in P_\infty[K] \Rightarrow r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in J$ □

Лемма 20. *J — подалгебра $P_\infty[K]$*

Доказательство.

$$(q_1 \cdot q_2)p = q_1(q_2 p) \in J$$

□

Пример. $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$ — идеал

Лемма 21. $]q \in P_\infty[K] \Rightarrow J_q = q \cdot P_\infty[K]$ *— идеал в* $P_\infty[K]$

Доказательство. $]r \in J_q \Rightarrow \exists p \in P_\infty[K] : r = q \cdot p$

$]\tilde{p} \in P_\infty[K]$

$r\tilde{p} = (qp)\tilde{p} = q(p\tilde{p})$

$p\tilde{p} \in P_\infty[K] \Rightarrow q(p\tilde{p}) \in q \cdot P_\infty[K] = J_q \Rightarrow J_q$ — идеал □

Определение. Полином $q : J_q = q \cdot P_\infty[K]$ называется **порождающим полиномом** идеала J_q

Примечание. Если идеал содержит $1(\lambda)$, то данный идеал совпадает с $P_\infty[K]$:

$$J_1 = 1 \cdot P_\infty[K] = P_\infty[K]$$

Определение. $]J_1$ и J_2 — идеалы в $P_\infty[K]$

1. Суммой $J_1 + J_2$ называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2 \quad p_1 \in J_1, p_2 \in J_2\}$$

2. Пересечением $J_1 \cap J_2$ называется множество:

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \wedge p \in J_2\}$$

Лемма 22. *J_s и J_r — идеалы в $P_\infty[K]$*

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2$ — идеал?

$]q \in J_s \Rightarrow q = q_1 + q_2 \quad q_1 \in J_1, q_2 \in J_2$

$]p \in P_\infty[K] \quad qp = (q_1 + q_2)p = q_1 p + q_2 p$

$q_1 p \in J_1, q_2 p \in J_2 \Rightarrow q_1 p + q_2 p \in J_s$

$J_r = J_1 \cap J_2$ — идеал?

$]q \in J_r \Rightarrow q \in J_1; q \in J_2$

$]p \in P_\infty[K] \quad qp \in J_1; qp \in J_2 \Rightarrow qp \in J_r$ □

Определение. Нетривиальный полином минимальной степени, содержащийся в идеале, называется **минимальным полиномом** идеала.

Лемма 23. *Любой полином идеала J делится на p_J без остатка:*

$$]p \in J \Rightarrow p \mid p_J$$

Доказательство. $]\exists p : p \nmid p_J \Rightarrow p = qp_J + r; \deg r < \deg p_J \Rightarrow r = p - qp_J :$ min полином — противоречие. □

Примечание. Если p_1 и p_2 — минимальные полиномы $J \Rightarrow p_1 = \alpha p_2; \alpha \in K$

Теорема 4.1. Минимальный полином идеала является его порождающим полиномом.

Доказательство. $\forall p \in J \quad p \mid p_J \Rightarrow p = p_J \cdot q \in p_J \cdot P_\infty[K]$

$\forall p \in q \cdot P_\infty[K] \Rightarrow p = qr; r \in P_\infty[K] \Rightarrow \forall p \mid q \Rightarrow q = p_J$ □

Лемма 24. *Сравнение идеалов:*

$$J_1 \subset J_2 \Leftrightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

Доказательство. “$\Rightarrow$”

$J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$

“$\Leftarrow$”

$]p_{J_1} \mid p_{J_2} \Rightarrow p_{J_1} = rp_{J_2}$

$\forall q \in J_1 \quad q = \tilde{q}p_{J_1} = \tilde{r}P_{J_2} \Rightarrow q \mid p_{J_2} \Rightarrow J_1 \subset J_2$ ☐

Лемма 25. *О минимальном полиноме пересечения*

$$J_1 \leftrightarrow p_{J_1} \;\; J_2 \leftrightarrow p_{J_2} \Rightarrow J_r = J_1 \cap J_2 \leftrightarrow r_J = \textit{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

Доказательство. $J_r = J_1 \cap J_2 \Rightarrow J_r \subset J_1 \wedge J_r \subset J_2 \Rightarrow r_J \mid p_{J_1} \wedge r_J \mid p_{J_2} \Rightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$ ☐

Лемма 26. *О минимальном полиноме суммы*

$$J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow S_J = \textit{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow J_S \supset J_1 \wedge J_S \supset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid S_J \wedge p_{J_2} \mid S_j \Rightarrow S_j = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$ ☐

Теорема 4.2. О взаимно простых полиномах

$]p_1, p_2$ – взаимно простые, т.е. $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in P_\infty[K] : p_1q_1 + p_2q_2 = 1$

Доказательство. $p_1 \leftrightarrow J_1 = p_1P_\infty[K]$

$p_2 \leftrightarrow J_2 = p_2P_\infty[K]$

$\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \leftrightarrow J_1 + J_2 = P_\infty[K]$

$p_1q_1 + p_2q_2 = 1$ ☐

Теорема 4.3. Обобщение

$$p_1 \ldots p_k \in P_\infty[K], \text{НОД}(p_1 \ldots p_k) = 1 \Rightarrow \exists q_1 \ldots q_k : \sum_{i=1}^{k} p_iq_i = 1$$

Доказательство. Аналогично. ☐

Примечание. $]p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k, \{p_i\}$ взаимно простые $\Rightarrow \exists q_1 \ldots q_k : p_1'q_1 + p_2'q_2 + \ldots + p_k'q_k = 1, p_j' = \frac{p}{p_j}$

4.3 Алгебра операторных полиномов. Минимальный полином линейного оператора.

Определение. Операторный полином $p \in \mathcal{P}_\infty[K]$ называется аннулирующим полиномом линейного оператора φ, если $p(\varphi) = 0$

Примечание. Множество аннулирующих полиномов операторов φ — ядро гомоморфизма S_φ по определению.

Теорема 4.4. Аннулирующий полином существует.

Доказательство. $\dim \mathcal{P}[\varphi] = n^2 \Rightarrow \exists n^2$ ЛНЗ элементов. Эти элементы : $\varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}$. Тогда $\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}\}$ — ЛЗ

$$\Rightarrow \exists p[\varphi] = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0 \Rightarrow \exists$$

□

$]J_\varphi$ — множество аннулирующих полиномов оператора φ

Лемма 27. *J_φ — идеал в $P_\infty[K]$*

Доказательство. $]p \in J_\varphi \Rightarrow p(\varphi) = 0$

$]q \in P_\infty[K]$

$\lhd p(\lambda)q(\lambda) \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi)q(\varphi) = 0 \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda)$ — аннулирующий $\Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) \in J_\varphi$ □

Определение. **Минимальным аннулирующим полиномом** оператора φ называется мнимальнй полином J_φ

Примечание. Обозначение минимального полинома: $p_\varphi(\lambda) \leftrightarrow p_\varphi(\varphi) = 0$

Пример. $]\varphi : X \to X$ — оператор с простым спектром

$]\chi_\varphi(\lambda)$ — характеристический полином $\varphi \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_\varphi(\lambda)$

Доказательство.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{P}_i \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \chi_\varphi(\lambda_i)\mathcal{P}_i = 0$$

Предположим обратное: $]p_\varphi(\lambda)$ — минимальный полином, такой что $\deg p_\varphi < \deg \chi_\varphi$

$]\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)p_\varphi(\lambda)$

$$\lhd p_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} p_\varphi(\lambda_i)\mathcal{P}_i = p(\lambda_k)\mathcal{P}_k \Rightarrow p_\varphi(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

Лемма 28. $]p(\varphi) = q(\varphi) \Leftrightarrow [p(\lambda) - q(\lambda)] \mid p_\varphi(\lambda)$

Доказательство. $\lhd p(\lambda) - q(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) - q(\lambda) \in J_\varphi$ □

Лемма 29. $]p(\lambda) = q(\lambda)p_\varphi(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

4.4 Разложение линейного пространства в сумму подпространств. 2я теорема о ядре и образе. Теорема о проекторах.

Теорема 4.5. $\lhd p_\varphi = p_1 \dots p_k, p_1 \dots p_k$ — взаимно простые

$$\Rightarrow \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\, p_j(\varphi) = X$$

Доказательство.

$$\mathrm{Ker}\, p_\varphi(\varphi) = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}\, p_j(\varphi)$$

$$\mathrm{Ker}\, p_\varphi(\varphi) = \mathrm{Ker}\, 0 = X$$

□

Теорема 4.6. О ядре и образе.

$]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \Rightarrow \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi) = \mathrm{Im}\, p_2(\varphi)$

Доказательство. Покажем, что:

1. $\mathrm{Im}\, p_2(\varphi) \subset \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi)$
2. $\dim \mathrm{Im}\, p_2(\varphi) = \dim \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi)$

1. $\mathrm{Im}\, p_2(\varphi) \subset \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi)$

   $]y \in \mathrm{Im}\, p_2(\varphi) \Rightarrow \exists x \in X : y = p_2(\varphi)x$

   $\lhd p_1(\varphi)y = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi) = 0$
2. $\mathrm{Ker}\, p_\varphi(\varphi) = \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi) \dot{+} \mathrm{Ker}\, p_2(\varphi) \Rightarrow$

$$\dim X = \dim \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}\, p_2(\varphi)$$

$$\dim X = \dim \mathrm{Ker}\, p_2(\varphi) + \dim \mathrm{Im}\, p_2(\varphi)$$

$$\dim \mathrm{Ker}\, p_1(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\, p_2(\varphi)$$

$\square$

Теорема 4.7. $]p_\varphi(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i(\lambda)$ — минимальный аннулирующий полином φ, $p_1 \dots p_k$ — взаимно простые делители

$\Rightarrow$

1. $\sum\limits_{j=1}^{k} p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}, \quad p'_j = \frac{p_\varphi}{p_j}$
2. $p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{P}_{L_j} \quad L_j = \mathrm{Ker}\, p_j(\varphi)$

Доказательство. $\lhd p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)\dots p_k(\lambda) \quad \exists q_1 \dots q_k :$

$$\sum_{j=1}^{k} p'_j(\lambda)q_j(\lambda) = 1 \xrightarrow{S_\varphi} \sum_{j=1}^{n} p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}$$

$]p_1(\lambda) = p_i(\lambda), p_2(\lambda) = p'_i(\lambda) \Rightarrow \mathrm{Im}\, p_1(\varphi) = \mathrm{Ker}\, p_2(\varphi)$

$\lhd \mathcal{P}_{L_1}x = p'_i(\varphi)q(\varphi) \in \mathrm{Ker}\, p_i(\varphi)$, т.к.

$$p_i(\varphi)[p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x] = p_i(\varphi)p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)q_i(\varphi)x = 0$$

Осталось доказать, что $\mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = \delta_i^j \mathcal{P}_{L_i}$

$$]i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = p'_i(\varphi)q_i(\varphi)p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \frac{p_\varphi(\varphi)}{p_i(\varphi)p_j(\varphi)}q_i(\varphi)q_j(\varphi)p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$]i = j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}(x) = \mathcal{P}_{L_i}(\mathcal{I}\cdot x) = \mathcal{P}_{L_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{L_j}\right)x = \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i}x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i} = \mathcal{P}_{L_i}$$

$\square$

4.5 Минимальный полином и инвариантные подпространства. Спектральная теорема для линейного оператора произвольного вида.

Минимальный полином и инвариантные пространства: см. выше.

Теорема 4.8. Спектральная теорема.

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j)^{m_j} = p_1(\lambda)\dots p_k(\lambda) \quad p_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \lambda \neq \lambda_{i\neq j}$$

$$\Rightarrow L_j = \mathrm{Ker}\, p_j(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda_j\mathcal{I})^{m_j} \text{ — ультраинвариантное подпространство}$$

$$\Rightarrow X = \dot{+}\sum_{j=1}^{n} \text{Ker}\,(\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} L_j$$

$$\varphi = \dot{+}\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \quad \varphi_j = \varphi|_{L_j}$$

4.6 Нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка.

4.7 Структура нильпотентного оператора. Базис Жордана (обзор).

4.8 Жорданова форма матрицы линейного оператора.

4.9 Кратности собственных чисел (алгебраическая, геометрическая, полная). Теорема Гамильтона-Кэли.