В первом семестре была задача нахождения максимального по площади вписанного n-угольника. Мы выяснили, что если максимум существует, то он достигается правильным n-угольником (*суждение про сдвиг точки*). Кроме того, мы доказали, что максимум существует, сделаем это снова, но другим методом.

Доказательство. Пусть внутренние углы многоугольника $\varphi_1 \dots \varphi_n$, тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi_1 + \ldots + \sin\varphi_n) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi_1 + \ldots + \sin\varphi_{n-1} - \sin(\varphi_1 - \ldots - \varphi_{n-1})) \end{aligned}$$

Очевидно $\forall i \;\; 0 < \varphi_1 < \pi \quad \pi < \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} < 2\pi$.

Найдём максимум путём дифференцирования. Это требует существования максимума внутри области определения. Если все неравенства сделать нестрогими, то область определения становится замкнутой, очевидно ограниченной $\Rightarrow \exists \max$ по теореме Вейерштрасса. Кроме того, максимум не лежит на границе области определения из очевидных геометрических соображений.

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_i = \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi_i - \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}) &= 0 \\ 2\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{\pi - 2n\varphi}{2} &= 0 \\ \varphi &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

$\square$

Диффеоморфизмы

Определение. **Область** — открытое связное множество.

Определение. $F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — **диффеоморфизм**, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо

Примечание. $Id = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F$

$E = F'(F^{-1})' \Rightarrow \forall x \;\; \det F'(x) \neq 0$

Лемма 1 (о почти локальной иньективности).

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F *дифф. в* $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists c > 0, \delta > 0 \;\; \forall h < \delta \;\; |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. Если F — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq ||F'(x_0)|| \cdot |h| \geq \frac{1}{||(F'(x_0))^{-1}||}|h|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)|h|| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

Теорема 0.1 (о сохранении области).

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F дифф.
- $\forall x \in O \;\; \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открыто.

Примечание. O — связно, F — непр. $\Rightarrow$ $F(O)$ связно.

Доказательство. $x_0 \in O \Rightarrow F(x_0) \in F(O)$ — внутренняя? в $F(O)$

По лемме $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \;\; |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

В частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$

$r := \frac{1}{2}\rho(y_0, F(S(x_0, \delta))$

Не дописано

□