

## Основные вопросы

### 1. Уравнение с разделяющимися переменными: общее решение, общая схема исследования.

Уравнение с разделенными переменными имеет вид:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

У него решение имеет вид:

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

*Доказательство.*

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = \int X(x)dx + \int Y(y)y'dx = \int (X(x) + Y(y)y')dx = \int 0dx = C$$

□

При этом мы получаем общее решение, когда находим такие  $C$ , что ответ  $\in C^1$ .

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Если поделить на  $p_2(x)q_1(y)$ , то получим уравнение с разделенными переменными. При этом необходимо убедиться, что мы не делим на ноль.

Если  $\exists y_0 : q_1(y_0) = 0$ , то  $y \equiv y_0$  — решение исходного уравнения. Исключив  $y_0$ , мы разбиваем область возможных решений на две подобласти.

Аналогично для  $x$ .

После разбиения нужно на каждой области найти решение.

### 2. Линейное уравнение 1-го порядка: общее решение ЛОУ, общее решение ЛНУ. Метод Лагранжа и метод интегрирующего множителя.

Линейное уравнение первого порядка это

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Если  $q \equiv 0$ , то это уравнение **однородно**, иначе **неоднородно**.

Общее решение ЛОУ это  $y = Ce^{\int p}$ ,  $C \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* Заметим, что  $y \equiv 0$  — решение. По теореме о единственности оно не является особым. т.к. мы рассматриваем  $p \in C(a, b)$ .

$y > 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= p(x)dx \\ \ln y &= \int p(x)dx + C \\ y &= e^C e^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

По теореме об общем решении уравнения с разделенными переменными это семейство всех решений исходного уравнения при  $y > 0$ .

Аналогично при  $y < 0$  □

Общее решение ЛНУ это

$$y = \left( C + \int q e^{-\int p} \right) e^{\int p}$$

*Доказательство.* Подстановкой легко показать, что это решение. Покажем, что нет других решений.

Пусть есть решение  $\varphi$  на  $(\alpha, \beta)$ , не подходящее под искомую формулу.

Пусть  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  и  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Функция

$$C = \left( y_0 e^{-\int p} - \int q e^{-\int p} dx \right) \Big|_{x=x_0}$$

подходит под искомую формулу, но при этом является решением задачи Коши  $y(x_0) = y_0$ , поэтому  $y \equiv \varphi$  — противоречие. □

**Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной)** — постоянную  $C$  считают функцией от  $x$  и получают дифур относительно  $C$ .

### 3. Равностепенно непрерывные функции. Лемма Арцела–Асколи.

Множество функций  $F$ , определенных на  $D$ , **равностепенно непрерывно**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

**Лемма 1.** Пусть функции последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничены ( $\exists C : \forall n, x |f_n(x)| < C$ ) и равностепенно непрерывны на  $[a, b]$ . Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $M$  ограничивает (равномерно)  $f_n$ :

$$M := \sup_{n,x} |f_n(x)|$$

$$\triangleleft \varepsilon_k = \frac{M}{2^{k+1}}$$

$$\forall \varepsilon_k > 0 \quad \exists \delta_k > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad |x_2 - x_1| < \delta_k \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon_k$$

Поделим всю область  $[a, b] \times (-M, M)$  на прямоугольники со стороной  $\varepsilon_1$  и  $\delta_1$ .

Рассмотрим первый столбец. Возьмём два произвольных соседних прямоугольника, таких что по ним проходит бесконечное число  $f$ . Вырежем все  $f$ , которые по этим прямоугольникам не подходят. Сделаем то же самое для каждого столбца. Получим в итоге (бесконечную) подпоследовательность  $F_1^*$ .

Повторим то же самое для всех  $\varepsilon_n, \delta_n$ .

$$\forall f, g \in F_i^* \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon_n$$

Нам нужно показать, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N, k \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_N^*(x) - f_{N+k}^*(x)| < \varepsilon$

Тогда возьмём  $N : 2\varepsilon_N < \varepsilon$  и все получится, т.к.  $F_N^* \supset F_{N+k}^*$  □

#### 4. ЗК для нормальной системы. Лемма о равносильном интегральном уравнении. Лемма: свойства ломаной Эйлера, определённой на отрезке Пеано.

Задача Коши для нормальной системы — нахождение решения, подходящего под условие  $r(t_0) = r_0$

$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , тогда  $\varphi$  — решение на  $[a, b]$  интегрального уравнения

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

, если:

1.  $\varphi \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2.  $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$  на  $[a, b]$

**Лемма 2.**  $\varphi$  — решение задачи Коши  $\dot{r} = f(t, r), r$  эквивалентно тому, что  $\varphi$  — решение

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Проинтегрируем  $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$  от  $t_0$  до  $t$

$\Leftarrow$  Продифференцируем интегральное уравнение.

□

**Определение (Отрезок Пеано).**  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $(t_0, r_0) \in G$ . Т.к.  $G$  открыто,  $\exists a, b > 0$ , такие что параллелепипед с центром в  $(t_0, r_0)$  и сторонами  $a, b$  ( $|t - t_0| \leq a, |r - r_0| \leq b$ ) лежит в  $G$ .

По теореме Вейерштрасса на компакте есть максимум, т.е.  $\exists M = \max_{\Pi} |f|$ . Пусть  $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ . Тогда отрезок  $[t_0 - h, t_0 + h]$  — **отрезок Пеано**

Рассмотрим некоторый отрезок Пеано и поделим его правую часть на  $N$  равных частей точками  $t_k$ .

Пусть ломаная Эйлера  $E_N$  определена рекурсивно:

1.  $E_N(t_0) = r_0$
2.  $E_N(t) = E_N(t_k) + f(t_k, E_N(t_k))(t - t_k)$ , если  $t \in (t_k, t_{k+1}]$

**Лемма 3.**  $\forall t \in [t_0, t_0 + h]$ :

1.  $\exists E_N(t)$
2.  $|E_N(t) - r_0| \leq M(t - t_0)$ , т.е. оно лежит в треугольнике.

*Доказательство.* Докажем по индукции, что это верно при  $t \in [t_0, t_k]$  для всех  $k$ .

При  $k = 1$   $E_N$  действительно определена, т.к.  $E_N(t) = r_0 + f(t_0, r_0)(t - t_0)$

$$|E_N(t) - r_0| = |f(t_0, r_0)(t - t_0)| \leq M(t - t_0)$$

Переход индукции:

$$|E_N(t_k) - r_0| \leq M(t_k - t_0) \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b$$

Таким образом мы лежим в  $\Pi$ , все определено.

$$\begin{aligned} |E_N(t) - r_0| &= |E_N(t) - E_N(t_0)| \leq |E_N(t) - E_N(t_0)| + |E_N(t_k) - E_N(t_0)| \leq \\ &|f(t_k, E_N(t_k))|(t - t_k) + M(t_k - t_0) \leq M(t - t_k) + M(t_k - t_0) = M(t - t_0) \end{aligned}$$

□

## 5. Теорема Пеано о существовании решения ЗК.

**Теорема 1.**  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда задача Коши имеет решение, определенное на отрезке Пеано для  $(t_0, r_0)$ .

*Доказательство.* Пусть  $t_0 = 0, r_0 = 0$  (сдвиг координат). Пусть  $[-h, h]$  — искомый отрезок Пеано. Докажем для  $[0, h]$ , для другой части аналогично. Объединить оба решения можно по лемме о гладкой стыковке решений.

Построим бесконечную последовательность ломаных Эйлера. Мы знаем, что  $|E_N(t)| \leq b$ , т.е. она равномерно ограничена.

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| dt$$

Мы знаем, что  $|\dot{E}_N(t)| \leq M$ , поэтому:

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| dt \leq M(t_2 - t_1)$$

Пусть  $|t_2 - t_1| < \delta$ , тогда  $|E_N(t_2) - E_N(t_1)| < M\delta$  и пусть  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , тогда  $|E_N(t_2) - E_N(t_1)| < \varepsilon$ , т.е.  $E_N$  равномерно непрерывна. По лемме Арцела–Асколи у этой последовательности есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся к некоторой функции  $\varphi$ . Покажем, что  $\varphi$  — решение задачи Коши. Для этого достаточно показать, что:

$$\varphi(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \text{ на } [0, h]$$

Пусть теперь  $E_N$  — подпоследовательность исходной последовательности.

По формуле Ньютона–Лейбница для отображений:

$$E_N(t) = \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau$$

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau$$

Таким образом, надо показать, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Покажем, что

$$\Delta_N = \left| \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_N &\leq \int_0^t |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \int_0^h |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau\end{aligned}$$

$f$  равномерно непрерывна на параллелепипеде, поэтому  $|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta \Rightarrow |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| < \varepsilon$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau < \varepsilon h$$

Тогда по двойной бухгалтерии  $\Delta_N \rightarrow 0$ .

Но мы не доказали, что  $|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta$ .

$$\begin{aligned}|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| &\leq |(t_k, E_N(t_k)) - (t_k, \varphi(t_k))| + |(t_k, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(t_k))| + |(\tau, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\ &= |E_N(t_k) - \varphi(t_k)| + |t_k - \tau| + |\varphi(t_k) - \varphi(\tau)|\end{aligned}$$

При достаточно больших  $N$  все три слагаемых  $< \frac{\delta}{3}$

□

## 6. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет локальному условию Липшица по заданной переменной.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $f'_r \in M_{m,n}(C(G))$ . Тогда  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$

Кроме того, если  $K \subset G$  — выпуклый компакт, то  $M_1 := \max_{(t,r) \in K} |f'_r(t, r)|$ , то:

$$\forall (t, r_1), (t, r_2) \in K \quad |f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq n M_1 |r_2 - r_1|$$

*Доказательство.* Докажем, что на выпуклом компакте  $f \in \text{Lip}_r(K)$ .

Зададим  $g(s) = f(t, r_1 + s(r_2 - r_1))$  (т.к.  $K$  выпуклый, функция везде определена)

$$f(t, r_2) - f(t, r_1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1) ds$$

По лемме об оценке нормы произведения матриц (вектор — тоже матрица)

$$\begin{aligned}|f(t, r_2) - f(t, r_1)| &\leq \left| \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1)| ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 n |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))| |(r_2 - r_1)| ds \\
&\leq \int_0^1 n M_1 |(r_2 - r_1)| ds \\
&\leq n M_1 |r_2 - r_1|
\end{aligned}$$

Тогда константа Липшица  $nM_1$  и искомое выполнено.

Почему  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ? Потому что можно для каждой точки взять параллелепипед  $K$  (выпуклый компакт) вокруг этой точки и тогда в  $\text{Int}K$  выполняется условие Липшица.  $\square$

## 7. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет глобальному условию Липшица по заданной переменной.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $K \subset G$  — компакт. Тогда  $f \in \text{Lip}_r(K)$

*Доказательство.* Докажем от противного. Пусть  $\forall N \in \mathbb{N} \exists (t_N, r_N), (t_N, \tilde{r}_N) \in K$ , для которых  $|f(t_N, r_N) - f(t_N, \tilde{r}_N)| > N|r_N - \tilde{r}_N|$

Т.к.  $K$  компакт, то он секвенциальный компакт, т.е. в  $(t_N, r_N)$  и  $(t_N, \tilde{r}_N)$  есть сходящиеся подпоследовательности. Пусть они сходятся к  $(t, r)$  и  $(t, \tilde{r})$  соответственно.

Либо  $r = \tilde{r}$ , либо нет.

1.  $r = \tilde{r}$

$\exists U(t, r) : f \in \text{Lip}_r(U)$ , т.к.  $f$  лок. Липшицева, т.е.  $\exists L : |f(t', r') - f(t', r'')| \leq L|r' - r''|$

Пусть  $N > L$ , тогда  $|f(t', r') - f(t', r'')| > N|r' - r''| > L|r' - r''|$  — противоречие.

Пусть теперь  $r \neq \tilde{r}$ . Выберем непересекающиеся параллелепипеды  $R = [a, b] \times X$  и  $\tilde{R} = [a, b] \times \tilde{X}$ , для которых точки  $(t, r)$  и  $(t, \tilde{r})$  соответственно являются внутренними. Рассмотрим функцию

$$g(t, x, y) := \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|},$$

определённую на компакте  $[a, b] \times X \times \tilde{X}$ , где она непрерывна, а значит, ограничена некоторым числом  $L$ . Выбирая номер  $N > L$ , такой что  $(t_N, r_N) \in R$  и  $(t_N, \tilde{r}_N) \in \tilde{R}$ , из (4.9) получаем

$$g(t_N, r_N, \tilde{r}_N) > N > L.$$

2. Это противоречие завершает доказательство леммы. □

□

## 8. Лемма Гронуолла. Теорема Пикара (доказательство единственности решения).

**Лемма 4 (Гронуолл).**  $\varphi \in C[a, b]$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$  и

$$\forall t \in [a, b] \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|$$

Тогда

$$\forall t \in [a, b] \quad \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $t \geq t_0$  без потери общности.

Рассмотрим случай  $\lambda > 0$  и пусть  $v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$ . Тогда  $v'(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu v(t)$ .

Таким образом,  $\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu$ . Проинтегрировав по  $[t_0, t]$ , получаем  $v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}$ . Таким образом,  $\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}$

Рассмотрим  $\lambda = 0$ , тогда для любого  $\lambda_1$  верно  $\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau < \lambda_1 + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$ , для этого уже доказали.

При  $\lambda_1 \rightarrow 0$  получаем  $\varphi(t) \leq 0$ . □

**Теорема 2.**  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда на отрезке Пеано существует решение задачи Коши  $\dot{r} = f(t, r)$ ,  $r(t_0) = r_0$  и оно единственно.

*Доказательство.* Мы доказываем последний пункт, что решение  $\varphi$  единственно.



Пусть  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — решения на  $(a, b)$ . По лемме об эквивалентном интегральном уравнении:

$$\psi_1(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau \quad \psi_2(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau)) d\tau$$

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| d\tau$$

Пусть  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ,  $a < 0, b > 0$ .

Т.к. графики  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на  $[\alpha, \beta]$  компактны,  $f(\tau, \psi_1(t))$  и то же самое для 2 Липшицевы, поэтому:

$$|f(\tau, \psi_1(t)) - f(\tau, \psi_2(t))| \leq \tilde{L} |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|$$

Итого:

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \tilde{L} \int_0^t |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| d\tau$$

По лемме Гронуолла  $|\psi_1(t) - \psi_2(t)|$ , т.к.  $\lambda = 0$ , таким образом  $\psi_1$  и  $\psi_2$  совпадают на  $[\alpha, \beta]$ , а в силу произвольности они совпадают и на  $(a, b)$   $\square$

## 9. Теорема Пикара (доказательство существования решения).

*Доказательство.* Без потери общности  $t_0 = 0, r_0 = 0$ . Рассмотрим правую часть отрезка Пеано  $[0, h]$ , для левой аналогично и решения можно сшить. Возьмём  $\Pi, M, h$  из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность функций:

- $\varphi_0(t) = 0$
- $\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

У нас будет три этапа (в этом билете):

1. Докажем, что последовательность верно определена, т.е.  $(t, \varphi_k(t)) \in G$ .
  2. Докажем, что последовательность равномерно сходится на  $[0, h]$  к некоторой  $\varphi$
  3. Докажем, что  $\varphi$  решает интегральное уравнение, эквивалентное искомому.
1. Докажем по индукции. База тривиальна. Переход:

$$|\varphi_{k+1}(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \leq Mt \leq Mh \leq \frac{Mb}{M} = b$$

2. Докажем, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall t, m > N, k \quad |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \varepsilon$

По лемме о достаточном условии Липшица  $f \in \text{Lip}_r(\Pi)$  с константой  $L$ . Докажем по индукции, что

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}$$

, тогда искомого будет доказано, т.к.  $t < h$  и дробь  $\rightarrow 0$ .

База очевидна:

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))| d\tau \leq Mt$$

Переход:

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1+k}(t) - \varphi_{m+1}(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L |(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - (\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L \frac{ML^m \tau^{m+1}}{(m+1)!} d\tau \\ &\leq \frac{ML^{m+1} t^{m+2}}{(m+2)!} \end{aligned}$$

3.

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau$$

Т.к.  $(t, \varphi_m(t)) \in \Pi$ , то и  $(t, \varphi(t)) \in \Pi$ . Таким образом:

$$|f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \leq L |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|$$

В силу равномерной сходимости  $\varphi_m$  мы получаем, что  $f(t, \varphi_m(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$  при  $m \rightarrow +\infty$  равномерно. Тогда мы можем внести предел под знак интеграла по теореме о предельном переходе под знаком интеграла.

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

По лемме об эквивалентном интегральном уравнении получаем, что  $\varphi$  — решение искомого уравнения.

□

## 10. Теорема существования и единственности решения ЗК для уравнения $n$ -го порядка. Следствие с более простыми условиями.

**Теорема 3.**  $G \subset \mathbb{R}_{t,y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G)$ ,  $f \in \text{Lip}_{(y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$ ,  $(t_0, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ . Тогда в некоторой окрестности  $t_0$  есть решение задачи Коши для уравнения  $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$

*Доказательство.* Рассмотрим эквивалентную систему. Каждое из уравнений имеет единственное решение задачи Коши по теореме Пикара. По Пикару у эквивалентной системы есть решение.  $\square$

**Следствие 1.**  $G \subset \mathbb{R}_{t,y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$  — область,  $f, f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ . Тогда в некоторой окрестности есть единственное решение задачи Коши для уравнения  $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ .

*Доказательство.* Была лемма, по которой  $f \in \text{Lip}_{(y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$  и по теореме в этом билете.  $\square$

## 11. Критерий продолжимости.

**Теорема 4.**  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Тогда решение  $\varphi$  уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  на промежутке  $[a, b)$  продолжимо вправо  $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = \tilde{r}$  и при этом  $(b, \tilde{r}) \in G$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Пусть  $\psi$  — продолжение вправо  $\varphi$ .

Т.к.  $\psi$  непрерывна, то  $\varphi(b-0) = \psi(b-0) = \psi(b)$ . Т.к.  $b \in \text{dom} \psi$ ,  $(b, \psi(b)) \in G$ .

$\Leftarrow$  Доопределим  $\varphi$  на  $[a, b]$ . На  $[a, b)$ :

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^t \varphi'(\tau) d\tau = \int_{t_1}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Пусть  $t_1 \rightarrow b$ .

$$\varphi(t) = \tilde{r} + \int_b^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

По лемме об экв. интегральном уравнении  $\varphi$  — решение задачи  $\dot{r} = f(t, r)$ ,  $r(b) = \tilde{r}$

По теореме Пеано есть решение  $\vartheta$  на  $[b-h, b+h]$ . Тогда можем сшить  $\vartheta$ ,  $\varphi$  и получить  $\psi$ , это будет решение  $[a, b+h]$ .

$\square$

## 12. Теорема существования и единственности максимального решения.

**Теорема 5.**  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$

Тогда максимальное решение задачи Коши существует и единственно.

*Доказательство.* Пусть все решения задачи Коши на интервалах образуют множество  $S$ . По теореме Пеано  $|S| \neq 0$ . Пусть для  $\varphi \in S$  область определения  $(a_\varphi, b_\varphi)$ . Пусть  $(A, B) := \bigcup_{\varphi \in S} (a_\varphi, b_\varphi)$

Для  $t \in (a_\varphi, b_\varphi)$  пусть  $\psi(t) := \varphi(t)$ . Т.к. все решения задачи Коши совпадают (*теорема Пикара*), функция задана однозначно. Вполне очевидно, что  $\psi$  — максимальное решение.

Другого решения  $\vartheta$  нет, т.к. если  $\text{dom} \vartheta \neq \text{dom} \psi$ , то одно из них не максимально, а иначе они равны.  $\square$

## 13. Теорема о выходе интегральной кривой за пределы любого компакта.

**Теорема 6.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$ ,  $\varphi$  — максимальное решение на  $(a, b)$  уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$ ,  $K \subset G$  — компакт. Тогда найдется  $\Delta > 0$ , такое что  $(t, \varphi(t)) \notin K$  при всех  $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$ .

*Доказательство.* Заметим, что расстояние  $\rho = \rho(K, \partial G)$  от компакта  $K$  до границы  $\partial G$  области  $G$  положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из  $K$ , сходящейся к точке на границе, но  $\partial G \cap K = \emptyset$ ). Если  $\rho < +\infty$ , положим  $c = \frac{\rho}{2}$ , иначе пусть  $c = 1$ .

Вокруг каждой точки  $(t', r') \in K$  построим содержащийся внутри  $G$  параллелепипед

$$\Pi(t', r') = \{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t'| \leq c, |r - r'| \leq c\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c = \bigcup_{(t', r') \in K} \Pi(t', r')$$

Поскольку  $K$  — компакт, то максимум нормы достигается, пусть это  $d$ . Если  $(t, r)$  — произвольная точка из  $K_c$ , то для некоторой точки  $(t', r') \in K$  будет  $(t, r) \in \Pi(t', r')$ , поэтому

$$|(t, r)| \leq |(t, r) - (t', r')| + |(t', r')| \leq c + d$$

Значит, множество  $K_c$  ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность  $\{(t_{m_k}, r_{m_k})\}$  точек из  $K_c$ , сходящуюся к  $(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Для каждой такой точки найдется параллелепипед  $\Pi(t'_{m_k}, r'_{m_k})$ , которому она принадлежит. Раз  $K$  — компакт, то существует подпоследовательность  $\{(t'_{m_k}, r'_{m_k})\}$ , сходящаяся к некоторой точке  $(t', r') \in K$ . Переходя к пределу в неравенствах

$$|t_{m_k} - t'_{m_k}| \leq c, \quad |r_{m_k} - r'_{m_k}| \leq c$$

находим  $|t - t'| \leq c$  и  $|r - r'| \leq c$ . Следовательно  $(t, r) \in K_c$ .

Таким образом,  $K_c$  — компакт, и функция  $f$  достигает на нем максимального значения

$$M = \max_{(t,r) \in K_c} |f(t, r)|$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть  $\Delta = \frac{h}{2}$ , где  $h = \min\{c, \frac{c}{M}\}$ . Тогда при некотором  $t_0 \in (b - \frac{h}{2}, b)$  будет  $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$ .

Рассмотрим ЗК  $\dot{r} = f(t, r)$ ,  $r(t_0) = \varphi(t_0)$ . По теореме Пеано она имеет решение  $\psi$  на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Пусть

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in (a, t_0) \\ \psi(t), & \text{если } t \in [t_0, t_0 + h] \end{cases}$$

По лемме о гладкой стыковке решений  $\tilde{\varphi}$  — решение уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  на  $(a, t_0 + h)$ . Функция  $\tilde{\varphi} \equiv \varphi$  на  $(a, b) \cap (a, t_0 + h)$  по теореме Пикара. Но

$$t_0 + h > b - \frac{h}{2} + h = b + \frac{h}{2} > b$$

то есть  $\tilde{\varphi}$  — продолжение  $\varphi$  вправо за точку  $b$ . Так как  $\varphi$  по условию является максимальным решением, приходим к противоречию.  $\square$

#### 14. Признак продолжимости решения системы, сравнимой с линейной. Теорема о существовании и единственности максимального решения ЛС.

**Теорема 7.** Пусть  $G = (a, b) \times \mathbb{R}_r^n$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}(G)$ , функции  $u, v \in C(a, b)$  таковы, что для любых  $(t, r) \in G$

$$|f(t, r)| \leq u(t)|r| + v(t)$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения  $\dot{r} = f(t, r)$  определено на  $(a, b)$ .

*Доказательство.* По теореме о существовании и единственности максимального решения любая задача Коши с начальными данными  $(t_0, r_0) \in G$  имеет единственное максимальное решение  $\varphi$ , заданное на некотором интервале  $(\alpha, \beta)$ . Докажем, что границы

интервала  $(\alpha, \beta)$  совпадают с границами интервала  $(a, b)$ . Пойдем от противного. Пусть, например,  $\beta < b$ . Принимая во внимание лемму о равносильном интегральном уравнении, при  $t \in [t_0, \beta)$  находим

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq |r_0| + \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |r_0| + \int_{t_0}^t |u(\tau)| |\varphi(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Из непрерывности функций  $u$  и  $v$  вытекает их ограниченность на отрезке  $[t_0, \beta]$ . Следовательно, найдутся такие числа  $\lambda, \mu \geq 0$ , что при  $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t |\varphi(s)| ds$$

Тогда по лемме Гронуолла

$$|\varphi(t)| \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)} \leq L$$

где  $L = \lambda e^{\mu(\beta-t_0)}$ . Отсюда следует, что график решения  $\varphi$  не покидает компакт

$$K = \{(t, r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leq L\} \subset G$$

при  $t \in [t_0, \beta)$ , что противоречит теореме о выходе интегральной кривой за пределы компакта.  $\square$

**Определение.** Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t) \quad (1)$$

где  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ .

**Теорема (существование и единственность максимального решения ЛС).** Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $t_0 \in (a, b)$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда максимальное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{r} = P(t)r + q(t) \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \quad (2)$$

существует, единственно и определено на интервале  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Заметим, что правая часть системы  $f(t, r) = P(t)r + q(t)$  и ее производная  $f'_r = P(t)$  непрерывны в области  $(a, b) \times \mathbb{R}^n$ . Тогда существует единственное максимальное решение задачи (2) по теореме о  $\exists$  максимального решения.

Имеем

$$|f(t, r)| \leq |P(t)r| + |q(t)| \leq n|P(t)||r| + |q(t)|$$

Так как функции  $u(t) = n|P(t)|$  и  $v(t) = |q(t)|$  непрерывны на  $(a, b)$ , то по признаку продолжимости системы, сравнимой с линейной, решение задачи (2) продолжимо на интервал  $(a, b)$ .

## 15. Формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС.

**Определение.** Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то система (1), то есть

$$\dot{r} = P(t)r \quad (3)$$

называется **однородной**, в противном случае **неоднородной**.

**Определение.** Определителем Вронского (вронскианом) вектор-функций  $\{r_k\}_{k=1}^n$ , где  $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$ , называют определитель

$$W(t) = \det(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

**Теорема (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС).** Пусть  $t, t_0 \in (a, b)$ ,  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — решения системы (3). Тогда их вронскиан

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} P(\tau) d\tau$$

**Доказательство.** Пусть  $X$  — матрица со столбцами  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , а  $R_k$  — ее  $k$ -ая строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$\dot{W} = \det \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \dot{R}_n \end{pmatrix}$$

Так как

$$\dot{X} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n) = (Pr_1, Pr_2, \dots, Pr_n) = PX$$

то  $k$ -ая строка матрицы  $\dot{X}$  совпадает с  $k$ -ой строкой матрицы  $PX$ , то есть

$$\dot{R}_k = \sum_{j=1}^n p_{kj} R_j$$

где  $p_{kj}$  — элемент матрицы  $P$  в  $k$ -ой строке и  $j$ -ом столбце.

Подставляя выражение для  $\dot{R}_k$  в формулу для  $\dot{W}$  и используя свойства определителя, находим

$$\dot{W} = p_{11} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + p_{22} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + p_{nn} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = W \operatorname{tr} P$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к требуемой формуле.

## 16. Общее решение ЛОС. Лемма о множестве фундаментальных матриц. Лемма об оцеществлении.

**Теорема (Общее решение ЛОС).** Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ . Тогда множество решений системы  $\dot{r} = P(t)r$  образуют  $n$ -мерное линейное пространство.

*Доказательство.* Пусть  $t_0 \in (a, b)$ ,  $\{a_k\}_{k=1}^n$  — базис в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для любого  $k \in [1 : n]$  существует  $r_k$  — решение задачи Коши  $\dot{r} = P(t)r$ ,  $r(t_0) = a_k$ . Вронскиан этих решений  $W(t_0) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ . Тогда функции  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение  $r$  системы  $\dot{r} = P(t)r$ . Пусть  $\{c_k\}_{k=1}^n$  — координаты вектора  $r(t_0)$  в базисе  $\{a_k\}_{k=1}^n$ . Положим

$$\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n$$

Ясно, что  $\varphi$  — решение системы  $\dot{r} = P(t)r$ , при этом  $\varphi(t_0) = r_0$ . Тогда  $r \equiv \varphi$  в силу теоремы о единственности максимального решения ЛС.

Таким образом, функции  $\{r_k\}_{k=1}^n$  линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит,  $\{r_k\}_{k=1}^n$  — базис в пространстве решений.  $\square$

**Определение.** Фундаментальной системой решений системы уравнений  $\dot{r} = P(t)r$  называется совокупность ее  $n$  линейно независимых решений.

**Определение.** Фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$  — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

**Лемма (о множестве фундаментальных матриц).** Пусть  $\Phi$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$ . Тогда  $\{\Phi A \mid A \in M_n(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$  — множество всех фундаментальных матриц этой системы.

*Доказательство.* Пусть  $\Psi$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$ . Тогда каждый ее столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы  $\Phi$ . Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы  $A$ , имеем  $\Psi = \Phi A$ . А так как  $\det \Psi \neq 0$  и  $\det \Phi \neq 0$ , то и  $\det A \neq 0$ .



Обратно, пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$  — произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица  $\Phi A$  состоит из решений, а ее определитель не обращается в ноль. Следовательно, эти решения линейно независимы, поэтому  $\Phi A$  — фундаментальная матрица.  $\square$

**Лемма (Об овеествлении).** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$ , при этом  $r_1 = \bar{r}_2$ . Тогда

$$\Psi = (\Re r_1, \Im r_1, r_3, \dots, r_n)$$

— фундаментальная матрица той же системы.

*Доказательство.* Так как

$$\begin{aligned}\Re r_1 &= \frac{1}{2}(r_1 + \bar{r}_1) = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 \\ \Im r_1 &= \frac{1}{2i}(r_1 - \bar{r}_1) = \frac{1}{2i}r_1 - \frac{1}{2i}r_2\end{aligned}$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

где  $E_{n-2}$  — единичная матрица порядка  $n-2$ . По лемме о множестве фундаментальных матриц матрица  $\Psi$  является фундаментальной.  $\square$

**17. Теорема о фундаментальной системе решений ЛОС с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса общего вида). Определение и свойства матричной экспоненты (без доказательств). Решение задачи Коши при помощи матричной экспоненты.**

**Определение.** Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называют линейную систему вида

$$\dot{r} = Ar = q(t)$$

где  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n)$ .

**Лемма.** Пусть  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_k$  — жорданова цепочка, соответствующая  $\lambda \in \text{spec } A$ . Тогда функции

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\lambda t} h_1 \\ \varphi_2(t) &= e^{\lambda t} \left( \frac{t}{1!} h_1 + h_2 \right) \\ &\dots \\ \varphi_k(t) &= e^{\lambda t} \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \dots + \frac{t}{1!} h_{k-1} + h_k \right)\end{aligned}$$

являются решениями системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** Принимая во внимание определение жордановой цепочки, при  $j \in [1 : k]$  имеем

$$\begin{aligned} A\varphi_j &= e^{\lambda t} \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} Ah_m = e^{\lambda t} \left( \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \lambda h_1 + \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} (\lambda h_m + h_{m-1}) \right) = \\ &= e^{\lambda t} \left( \lambda \sum_{m=1}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h_m + \sum_{m=2}^j \frac{t^{j-m}}{(j-m)!} h_{m-1} \right) \end{aligned}$$

Это же выражение получается при дифференцировании вектор-функции  $\varphi_j$ . Значит,  $\dot{\varphi}_j = A\varphi_j$ , что и требовалось доказать.

**Теорема (Случай жорданова базиса общего вида).** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , базис пространства  $\mathbb{C}^n$  состоит из жордановых цепочек

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\sim h_1, h_2, \dots, h_k \\ &\dots \\ \lambda_d &\sim u_1, u_2, \dots, u_m \end{aligned}$$

соответствующих  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \text{spec } A$ . Тогда вектор-функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda_1 t} h_1, \quad \dots, \quad \varphi_k(t) = e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \dots + \frac{t}{1!} h_{k-1} + h_k \right) \\ &\dots \\ \psi_1(t) &= e^{\lambda_d t} u_1, \quad \dots, \quad \psi_m(t) = e^{\lambda_d t} \left( \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} u_1 + \dots + \frac{t}{1!} u_{m-1} + u_m \right) \end{aligned}$$

образуют фундаментальную систему решений системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** По вышедоказанной лемме каждая из вектор-функций

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m$$

является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det(h_1, \dots, h_k, \dots, u_1, \dots, u_m) \neq 0$$

Тогда вектор-функции  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots, \psi_1, \dots, \psi_m\}$  линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений.

**Определение.** Матричной экспонентой называется сумма ряда

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

**Свойства матричной экспоненты.** Пусть  $A, B, J, T \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\det T \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда

1. ряд, определяющий  $e^A$ , сходится
2. если  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$
3.  $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$
4. если  $A = T J T^{-1}$ , то  $e^A = T e^J T^{-1}$
5. если  $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_d)$ , то  $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_d})$
6. если  $J_s(\lambda)$  — жорданова клетка размера  $s$ :

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

то

$$e^{J_s(\lambda)t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Теорема.** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Тогда матрица  $e^{At}$  является фундаментальной матрицей системы  $\dot{r} = Ar$ .

**Доказательство.** По свойствам матричной экспоненты будет  $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ . Следовательно, каждый столбец матрицы  $e^{At}$  — решение системы  $\dot{r} = Ar$ . Соответствующий вронскиан

$$W(0) = \det e^{A \cdot 0} = \det E_n = 1$$

где  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ . Отсюда следует, что  $e^{At}$  — фундаментальная матрица.

**Следствие.** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r_0 \in \mathbb{C}^n$ . Тогда решением задачи

$$\dot{r} = Ar, \quad r(t_0) = r_0$$

является вектор-функция  $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)} r_0$

## 18. Общее решение ЛНС и метод вариации постоянных.

**Теорема (Общее решение ЛНС).** Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi$  — решение системы

$$\dot{r} = P(t)r + q(t) \quad (4)$$

$\Phi$  — фундаментальная матрица системы

$$\dot{r} = P(t)r$$

Тогда общее решение неоднородной системы (4) имеет вид

$$r = \Phi C + \varphi, \quad C \in \mathbb{R}^n$$

**Доказательство.** Пусть  $r$  — произвольное решение (4). Тогда

$$\dot{r} = Pr + q$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет такому же соотношению:

$$\dot{\varphi} = P\varphi + q$$

Вычитая эти равенства, находим

$$(r - \varphi)' = P(r - \varphi)$$

Значит, найдется вектор-столбец  $C \in \mathbb{R}^n$ , такой что

$$r - \varphi = \Phi C$$

Верно и обратное: любая функция вида  $\Phi C + \varphi$  являются решением (4), что проверяется непосредственной подстановкой.

**Теорема (метод вариации постоянных для ЛНС).** Пусть  $\Phi$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$ ,  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$ . Тогда если вектор-функция  $C$  пробегает все решения системы

$$\Phi \dot{C} = q$$

то  $r = \Phi C$  пробегает все решения системы (4)

**Доказательство.** Опираясь на формулу для обратной матрицы, использующей алгебраические дополнения, заключаем, что  $\Phi^{-1} \in M_n(C(a, b))$ . Поэтому

$$C(t) = \int \Phi^{-1} q + A$$

где  $A$  — вектор произвольных постоянных. Тогда требуется доказать, что общее решение системы (4) имеет вид

$$r = \Phi A + \Phi \int \Phi^{-1} q$$

По теореме об общем решении ЛНС достаточно показать, что второе слагаемое в правой части — частное решение системы (4). Убедимся в этом подстановкой:

$$\dot{\Phi} \int \Phi^{-1} q + \Phi \Phi^{-1} q = P(t) \Phi \int \Phi^{-1} q + q$$

Это верное тождество, поскольку  $P(t)\Phi = \dot{\Phi}$ .

## 19. Теорема об изоморфизме решений ЛОС и ЛОУ, формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОУ. Метод вариации постоянных для ЛНУ.

**Определение.** Линейным дифференциальным уравнением порядка  $n$  называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t) \quad (5)$$

где  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$ .

**Определение.** Если  $q \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то уравнение (5), то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = 0 \quad (6)$$

называется **однородным**, в противном случае — **неоднородным**.

**Лемма (О равносильной ЛС).** Если функция  $y$  — решение уравнения (5) на  $(a, b)$ , то вектор-функция  $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  — решение системы

$$\dot{r} = P(t)r + Q(t) \quad (7)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

И наоборот, если  $r = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — решение системы (7), то  $y_1$  — решение (5) на  $(a, b)$  и  $r = \Lambda_n y_1$ .

**Теорема (Об изоморфизме).** Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$ . Тогда множество решений однородного уравнения (6) является линейным пространством, изоморфным пространству решений системы

$$\dot{y} = P(t)y$$

где матрица  $P$  та же, что и в лемме о равносильной ЛС. При этом изоморфизм устанавливается отображением  $\Lambda_n$ .

**Доказательство.** Любое решение уравнения (6) по теореме о существовании и единственности максимального решения ЛУ является элементом линейного пространства  $C^n(a, b)$ . Кроме того, сумма двух решений, а также решение, умноженное на произвольное число, также являются решениями. Поэтому множество всех решений само образует линейное пространство.

Лемма о равносильной ЛС устанавливает биекцию между решениями уравнения и равносильной системы. Отображение  $\Lambda_n$  линейно. Таким образом,  $\Lambda_n$  — изоморфизм.

**Определение.** Определителем Вронского (или вронскианом) функций  $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^{n-1}(a, b)$  называют

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

**Теорема (Формула Остроградского-Лиувилля для решений ЛОУ).** Пусть  $t, t_0 \in (a, b)$ ,  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1} \in C(a, b)$ ,  $\{y_k\}_{k=1}^n$  — решения линейного однородного уравнения (6). Тогда вронскиан этих решений

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau$$

**Доказательство.** Принимая во внимание формулу Остроградского-Лиувилля для решений ЛОС и лемму о равносильной ЛС, находим

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) &= W(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) = \\ &= W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr } P(\tau) d\tau = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-p_{n-1}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

**Теорема (метод вариации постоянных для ЛНУ).** Пусть  $\{y_k\}_{k=1}^n$  — фундаментальная система решений однородного уравнения (6). Тогда если функции  $\{C_k\}$  пробегает все

решения системы

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \cdots & \dot{y}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \\ \vdots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

то  $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k$  пробегает все решения уравнения (5).

**Доказательство.** По теореме о методе вариации постоянных для ЛС общее решение системы, равносильной уравнению (5), имеет вид

$$r = \sum_{k=1}^n C_k \Lambda y_k$$

где функции  $C_1, \dots, C_n$  удовлетворяют системе

$$(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n) \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \vdots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

По лемме о равносильной ЛС первая строка вектора  $r$  — общее решение уравнения (5).

## 20. Общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами.

**Определение.** Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = f(t) \quad (8)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $f \in C(a, b)$ .

В дальнейшем для краткости используется обозначение

$$Ly = \frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_1\frac{d}{dt}y + a_0y = \left( \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \right) y$$

где  $a_n = 1$ . При помощи оператора  $L$  уравнение (8) записывается в виде

$$Ly = f(t)$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0 \quad (9)$$

Применяя оператор  $L$  к функции  $e^{\lambda t}$ , находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

**Определение.** Многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

называется **характеристическим многочленом** уравнения (8), а его корни — **характеристическими числами** уравнения (8).

Если  $\lambda$  — корень характеристического многочлена, то получаем  $L(e^{\lambda t}) \equiv 0$ . Верно и обратное: если  $e^{\lambda t}$  — решение однородного уравнения (15), то  $\lambda$  — корень многочлена  $p$ . Докажем более общее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  — корни кратности  $m \in \mathbb{N}$  характеристического многочлена уравнения (15). Тогда функции

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями (15).

**Доказательство.** Убедимся подстановкой в уравнение (15), что указанные функции являются решениями.

Пусть  $k \in [0 : m - 1]$ . Считая  $\lambda$  переменной, в силу бесконечной дифференцируемости функции  $e^{\lambda t}$  при любом  $j \in \mathbb{Z}_+$  будет

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{\lambda t}$$

Тогда

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t})$$

Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (p(\lambda) e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^k C_k^j p^{(j)}(\lambda) \frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}} e^{\lambda t}$$



Подставляя вместо  $\lambda$  корень кратности  $m$  многочлена  $p$ , получаем ноль, поскольку при  $j \in [0 : k]$  обнуляются значения  $p^{(j)}(\lambda)$ .

**Лемма (Линейная независимость квазиодночленов).** Пусть  $k_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  при  $j \in [1 : n]$ ,  $\{(k_j, \lambda_j)\}_{j=1}^n$  — различные пары чисел. Тогда функции  $\{t^{k_j} e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^n$  линейно независимы на любом промежутке из  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Разобьем множество пар  $(k_1, \lambda_1), \dots, (k_n, \lambda_n)$  на группы с одинаковым вторым элементом. Если такая группа одна, то линейная независимость следует из линейной независимости одночленов.

Допустим, что линейная независимость доказана, если количество групп равно  $m$ . Предположим, что в случае  $m + 1$  группы некоторая нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю. Объединяя слагаемые с одинаковыми экспонентами и изменяя нумерацию чисел  $\lambda_i$ , имеем

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + p_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0$$

где  $p_i$  — многочлены, а числа  $\lambda_i$  различны. Деля обе части на  $e^{\lambda_{m+1} t}$ , получаем

$$p_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_{m+1})t} + \dots + p_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} + p_{m+1}(t) \equiv 0$$

Дифференцируя это тождество  $\deg p_{m+1} + 1$  раз, находим

$$q_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_{m+1})t} + \dots + q_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} \equiv 0 \quad (10)$$

где при всех  $i \in [1 : m]$  многочлен  $q_i$  имеет ту же степень, что и  $p_i$ .

Значит, если для некоторого  $i$  будет  $p_i \not\equiv 0$ , то и  $q_i \not\equiv 0$ . Следовательно, в левой части тождества (10) находится нетривиальная линейная комбинация квазиодночленов. Это противоречит индукционному предположению.

**Теорема (Общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами).** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$  — характеристические числа уравнения (15) кратностей  $m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ . Тогда функции

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ & \dots \\ & e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \dots, t^{m_s-1} e^{\lambda_s t} \end{aligned}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (15).

**Доказательство.** Указанные функции являются решениями (15), а по лемме о линейной независимости квазиодночленов они линейно независимы. Так как сумма всех кратностей равна порядку уравнения, то эти функции образуют фундаментальную систему решений.

## 21. Теорема об устойчивости ЛОС с постоянными коэффициентами.

**Определение.** Точкой покоя, или положением равновесия, или стационарным состоянием системы  $\dot{r} = f(r)$  называют точку  $r_0$ , такую что  $f(r_0) = 0$ .

**Определение.** Положение равновесия  $r = 0$  автономной системы  $\dot{r} = f(r)$  называется устойчивым (по Ляпунову), если для любой  $\varepsilon$ -окрестности нуля найдется такая  $\delta$ -окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой  $\delta$ -окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на  $\varepsilon$ . То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies \forall t \geq 0 |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon$$

В противном случае положение равновесия называется неустойчивым.

**Определение.** Положение равновесия  $r = 0$  автономной системы  $\dot{r} = f(r)$  называется асимптотически устойчивым, если

- $r = 0$  устойчиво
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies r(t, 0, r_0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

**Лемма** Пусть  $\varphi$  — решение системы  $\dot{r} = f(t, r)$ . Тогда  $\varphi$  устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение  $s = 0$  системы

$$\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$$

**Доказательство.** Положим  $s = r - \varphi$ . Пусть  $\dot{r} = f(t, r)$ , тогда

$$\dot{s} = \dot{r} - \dot{\varphi} = f(t, r) - f(t, \varphi) = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$$

Получаем, что  $s = 0$  — решение системы  $\dot{s} = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$ . Остается сопоставить определение устойчивости (асимптотической устойчивости) для решения  $\varphi$  исходной и решения  $s = 0$  новой системы.

Из вышедодказанной леммы следует, что решение  $\varphi$  линейной системы

$$\dot{r} = P(t)r + q(t)$$

устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение  $r = 0$  соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{r} = P(t)r$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все решения линейной системы имеют одинаковый характер устойчивости, поэтому можно говорить об устойчивости линейной системы.

**Теорема (Устойчивость ЛОС с постоянными коэффициентами).** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Тогда система

$$\dot{r} = Ar \quad (11)$$

1. асимптотически устойчива, если  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  для всех  $\lambda \in \operatorname{spec} A$
2. устойчива, если для каждого  $\lambda \in \operatorname{spec} A$  либо  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , либо  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  и алгебраическая кратность числа  $\lambda$  совпадает с геометрической
3. неустойчива, если найдется  $\lambda \in \operatorname{spec} A$ , такое что либо  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , либо  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  и алгебраическая кратность числа  $\lambda$  больше геометрической

**Доказательство.** Через  $T$  обозначим матрицу перехода к жорданову базису матрицы  $A$ ,  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ .

Любое решение системы (11) имеет вид

$$r(t) = e^{At}r(0) = Te^{Jt}T^{-1}r(0)$$

Принимая во внимание лемму о норме матрицы, получаем

$$|r(t)| \leq n^3 |T| |e^{Jt}| |T^{-1}| |r(0)| = K |e^{Jt}| |r(0)| \quad (12)$$

где  $K > 0$  не зависит от  $t$ . Обозначим через  $a_{ij}(t)$  элементы матрицы  $e^{Jt}$ .

1. Каждая функция  $a_{ij}(t)$  имеет вид  $Ce^{\lambda t k}$ , где  $\lambda$  — одно из собственных чисел. Поскольку  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , то для всех  $i, j$  будет  $a_{ij}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , следовательно,

$$|e^{Jt}| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty$$

Тогда из оценки (12) следует устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения.

2. Каждая функция  $a_{ij}(t)$  имеет вид  $Ce^{\lambda t k}$ , но теперь  $k = 0$ , если  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Следовательно, существует такое число  $M$ , что при всех  $t \leq 0$

$$|e^{Jt}| < M$$

Поэтому из оценки (12) следует устойчивость нулевого решения.

3. Пусть существует собственное число  $\lambda = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha > 0$ . Обозначим через  $h$  соответствующий собственный вектор. Тогда вектор-функция

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} h$$

является комплексным решением (11).

Если же имеется собственное число  $\lambda = i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , алгебраическая кратность которого больше геометрической, то система (11) имеет комплексное решение

$$\varphi(t) = e^{i\beta t}(th_1 + h_2)$$

где  $h_1, h_2$  — собственный и присоединенный вектор, соответствующие число  $\lambda$ .

Заметим, что в обоих случаях  $|\varphi(t)| \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно, хотя бы одна из вектор-функций,  $Re\varphi(t)$  или  $Im\varphi(t)$ , является неограниченным вещественным решением (11). Пусть таковой является  $Re\varphi(t)$ . Тогда выбирая в качестве начального условия

$$r(0) = \mu Re\varphi(0)$$

при достаточно малом  $\mu$ , получаем неограниченное решение с начальным значением в сколь угодно малой окрестности нуля. Отсюда следует, что нулевое решение неустойчиво.

## 22. Классификация точек покоя ЛОС 2-го порядка (случай вещественных корней).

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$\dot{r} = Ar$$

если  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Пусть  $\det A \neq 0$ , тогда имеется единственное положение равновесия  $r = 0$  и собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  отличны от нуля.

### Случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Перейдем в систему координат  $u, v$ , связанную с собственным базисом  $h_1, h_2$ . Подставляя в уравнение  $r = Ts$ , где  $s = (u, v)^T$ ,  $T = (h_1, h_2)$ , получаем

$$T\dot{s} = ATs$$

Умножая слева на  $T^{-1}$ , находим

$$\dot{s} = T^{-1}ATs$$

Так как  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ , то в новых координатах система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = \lambda_2 v \end{cases}$$

Ее решение  $u = C_1 e^{\lambda_1 t}$ ,  $v = C_2 e^{\lambda_2 t}$ .

Если одна, и только одна из констант  $C_1$  и  $C_2$  равна нулю, то получаем параметрическое задание одной из полуосей. Заметим еще, что изменение знака одной из констант

преобразует фазовую траекторию в симметричную ей относительно координатной оси. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет только в первой четверти.

Пусть  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$ . Выражая  $t$  через  $u$  и подставляя в выражение для  $v$ , находим

$$v = C_2 \left( \frac{u}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C u^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

При  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  получается семейство парабол. Функции  $u$  и  $v$  возрастают, следовательно, фазовые траектории расходятся от начала координат. Отражая траектории относительно координатных осей, получаем фазовый портрет во всей плоскости (см. [рисунок](#)). Такая точка покоя называется **неустойчивый узел**.

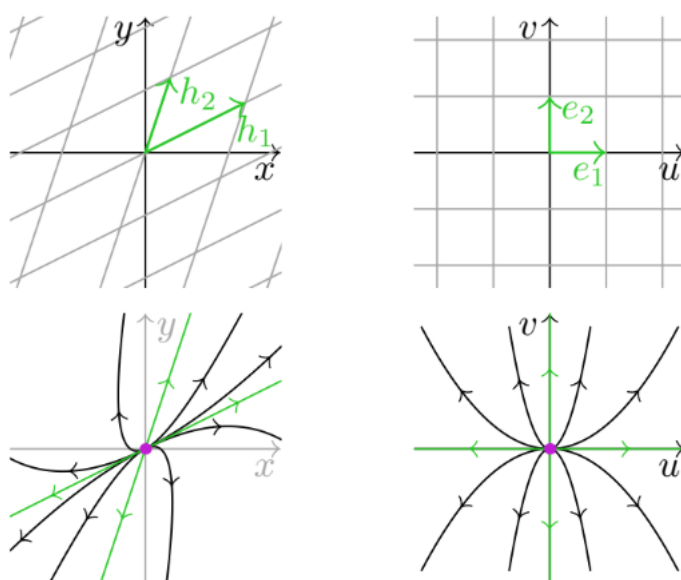


Рис. 1: Неустойчивый узел в старой и новой системе координат

При возвращении к прежней системе координат фазовый портрет исказится, но качественное поведение траекторий не изменится. Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Если  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , то уравнение фазовых траекторий не меняется, но изменяется направление движения. Теперь фазовые точки стремятся к началу координат. Соответствующее положение равновесия — **устойчивый узел** (см. [рисунок](#)).

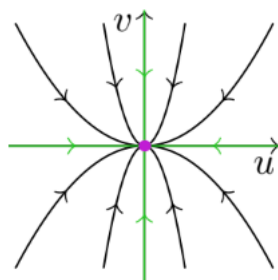


Рис. 2: Устойчивый узел

Если  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , то  $v = Cu^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$  — уравнение гиперболы. Соотношения  $u = C_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ ,  $v = C_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  дают представление о направлении движения вдоль фазовых траекторий. Точка покоя называется **седло** (см. [рисунок](#)), она неустойчива. Асимптоты фазовых траекторий называют **сепаратрисами седла**. В старой системе координат сепаратрисы проходят вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов.

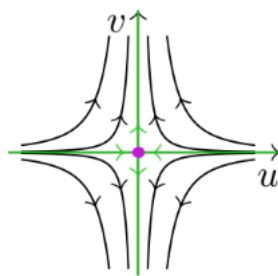


Рис. 3: Седло

### Случай $\lambda_1 = \lambda_2$

Если геометрическая кратность собственного числа  $\lambda = \lambda_{1,2}$  равна двум, то  $A = \text{diag}(\lambda, \lambda)$ . Тогда решения системы  $x = C_1 e^{\lambda t}$ ,  $y = C_2 e^{\lambda t}$ . Исключая отсюда параметр  $t$  получаем, что фазовые траектории — лучи, входящие в начало координат при  $\lambda < 0$ , и выходящие из него, если  $\lambda > 0$ . Соответствующая точка покоя — устойчивый или неустойчивый **диркритический узел** (см. [рисунок](#)).

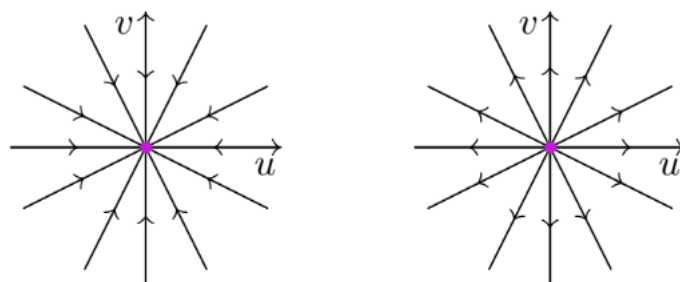


Рис. 4: Устойчивый и неустойчивый дикритический узел

Пусть собственное число  $\lambda$  имеет геометрическую кратность 1. Подставляя в систему  $\dot{r} = Ts$ , где  $T$  — матрица перехода к жорданову базису, получаем

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} s$$

Тогда

$$s = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Следовательно,  $u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$ ,  $v = C_2 e^{\lambda t}$ .

Заметим, что одновременная замена знака у постоянных  $C_1$  и  $C_2$  переводит фазовую траекторию в симметричную ей относительно начала координат. При  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 = 0$  функции  $u$  и  $v$  определяют полуоси координатной оси  $u$ . Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет при  $v > 0$ .

Выражая параметр  $t$  через  $v$  и подставляя его в выражение для  $u$ , находим уравнение траекторий

$$u = Cv + \frac{\ln v}{\lambda} v$$

где  $C = \frac{C_1}{C_2}$ . Производная  $u'_v$  указывает на то, что все фазовые траектории касаются оси  $u$  при  $v \rightarrow 0$  (см. [рисунок](#)). Соответствующая точка покоя — **вырожденный узел** (устойчивый при  $\lambda < 0$  и неустойчивый при  $\lambda > 0$ ).

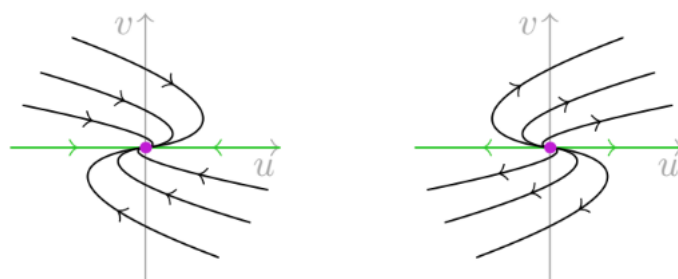


Рис. 5: Устойчивый и неустойчивый вырожденный узел

## 23. Классификация точек покоя ЛОС 2-го порядка (случай комплексных корней).

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$\dot{r} = Ar$$

если  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Пусть  $\det A \neq 0$ , тогда имеется единственное положение равновесия  $r = 0$  и собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  отличны от нуля.

Случай  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$

Поскольку матрица  $A$  вещественная, то  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ . Пусть  $\lambda = \lambda_1$ ,  $h$  — соответствующий собственный вектор. Тогда  $\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h$  — базис в  $\mathbb{R}^2$ . Поскольку

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \bar{h}}{2}, \quad \operatorname{Im} h = \frac{h - \bar{h}}{2i} = \frac{-ih + i\bar{h}}{2}$$

то матрица перехода  $T$  к базису  $\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h$  представима в виде

$$T = (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) = \frac{1}{2}(h, \bar{h}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Пусть  $H = (h, \bar{h})$  — матрица перехода к собственному базису. Подставляя  $r = Ts$  в уравнение  $\dot{r} = Ar$ , находим

$$\frac{1}{2}H \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = A \frac{1}{2}H \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} s$$

Сокращая на множитель  $\frac{1}{2}$  и умножая слева на  $H^{-1}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = H^{-1}AH \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} s \quad (13)$$

Поскольку  $H^{-1}AH = \operatorname{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$ , то система (13) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \lambda(u - iv) \\ \dot{u} + i\dot{v} = \bar{\lambda}(u + iv) \end{cases}$$

Уравнения этой системы равносильны: одно получается из другого при комплексном сопряжении. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из них. Положим  $z = u + iv$ . Тогда второе уравнение принимает вид

$$\dot{z} = \bar{\lambda}z$$



Его решения  $z = Ce^{\bar{\lambda}t}$

Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $C = ae^{i\varphi}$ . Тогда

$$z = ae^{\alpha t}e^{i(\varphi - \beta t)}$$

При  $\alpha = 0$  получаем окружности радиуса  $a$ . Соответствующая устойчивая, но не асимптотически устойчивая точка покоя называется **центр**. Направление обхода окружностей зависит от знака  $\beta$ .

При  $\alpha > 0$  получаем логарифмическую спираль. Модуль  $z$  возрастает, значит, точка удаляется от начала координат, при этом совершая вокруг него обороты. Данное положение равновесия называется **неустойчивый фокус**.

При  $\alpha < 0$  спираль закручивается. Точка покоя — **устойчивый фокус**. Направление закручивания или раскручивания траекторий в случае фокуса зависит от знака  $\beta$  (см. [рисунок](#)).

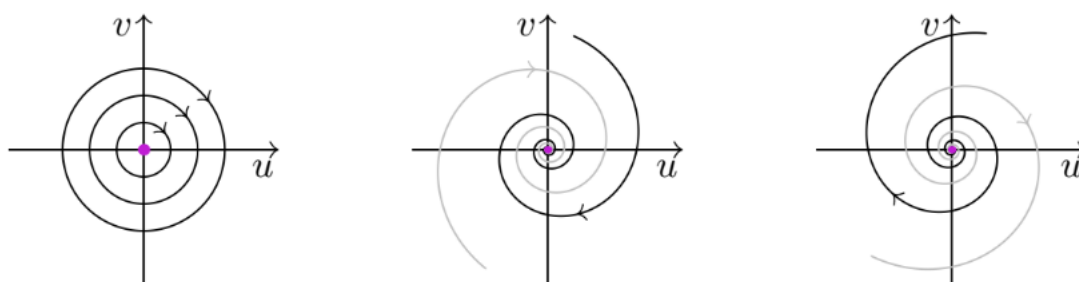


Рис. 6: Центр, устойчивый и неустойчивый фокус

## 24. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Рассмотрим нелинейную автономную систему  $\dot{r} = f(r)$ . Допустим, вектор-функция  $f$  дифференцируема. Тогда по формуле Тейлора

$$f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r)$$

**Определение.** Пусть  $f(0) = 0$ . Тогда система

$$\dot{r} = f'(0)r$$

называется **системой первого приближения** или **линеаризацией** системы  $\dot{r} = f(r)$

**Теорема (Ляпунов, устойчивость по первому приближению).** Пусть  $f \in C^2(\Omega)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля,  $f(0) = 0$ . Тогда нулевое решение системы  $\dot{r} = f(r)$

1. асимптотически устойчиво, если  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  для любого  $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$
2. неустойчиво, если найдется  $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$ , для которого  $\operatorname{Re} \lambda > 0$

**Доказательство.** В окрестности  $r = 0$  систему  $\dot{r} = f(r)$  можно записать в виде

$$\dot{r} = Ar + q(r)$$

где  $q(r) = o(|r|)$  при  $|r| \rightarrow 0$ . Решение задачи Коши  $\dot{r} = f(r)$ ,  $r(0) = r_0$  в силу предположения в некоторой окрестности  $r_0$  определено для всех  $t > 0$ . Его можно записать в виде

$$r(t) = e^{At} \cdot r_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot q(r(\tau)) d\tau$$

Если  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  для любого  $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$ , то найдется  $\mu > 0$  такое, что  $\operatorname{Re} \lambda < -2\mu < 0$ . Решение задачи Коши для  $\dot{r} = Ar$ ,  $r(0) = r_0$  имеет вид

$$r = e^{At} \cdot r_0$$

Покажем, что найдется такое  $M > 0$ , что норма матричной экспоненты

$$|e^{At}| \leq M e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0$$

Каждый элемент  $a_{ij}(t)$  матрицы  $e^{At}$  является конечной суммой квазимногочленов

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m P_k^{(i,j)}(t) e^{\lambda_k t}$$

где  $P_k^{(i,j)}(t)$  — многочлены,  $m$  — количество собственных чисел. Всегда найдется такое число  $c_{ij} > 0$ , что для всех  $k \in [1 : m]$

$$|P_k^{(i,j)}(t) e^{\lambda_k t}| \leq c_{ij} e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0$$

Тогда

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq |e^{At}| |r_0| = |r_0| \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)|^2} \leq \\ &\leq |r_0| e^{-\mu t} m \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |c_{ij}|^2} = M e^{-\mu t} |r_0| \end{aligned}$$

Так как  $q(r) = o(|r|)$  при  $|r| \rightarrow 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из  $|r| < \delta$  следует  $|q(r)| \leq \varepsilon |r|$ . Тогда при всех  $t > 0$

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq |e^{At} r_0| + \int_0^t |e^{A(t-\tau)} q(r(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |e^{At}| |r_0| + \int_0^t |e^{A(t-\tau)}| |q(r(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq M e^{-\mu t} |r_0| + \varepsilon M \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} |r(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Если положить  $u(t) = e^{\mu t}|r(t)|$ , то отсюда находим, что

$$u(t) \leq M|r_0| + \varepsilon M \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Функция  $u(t)$  удовлетворяет условиям леммы Гронуолла. Значит, что при всех  $t > 0$

$$u(t) \leq M|r_0|e^{\varepsilon M t}$$

Заменяя  $u(t)$  на  $e^{\mu t}|r(t)|$ , получаем оценку

$$|r(t)| \leq M|r_0|e^{-(\mu - \varepsilon M)t}$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно малых  $\varepsilon > 0$

$$r(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

если фиксировать  $\varepsilon > 0$ , положив, например,  $\varepsilon = \frac{\mu}{2M}$ . Кроме того, взяв  $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$ , из оценки получаем, что  $|r(t)| < \varepsilon$  при  $|r_0| < \delta$  для всех  $t > 0$ .

Второй пункт теоремы следует непосредственно из доказательства теоремы об устойчивости ЛОС с постоянными коэффициентами (мб кукарек, хз как доказать).

**Определение.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля. Функция  $V \in C^1(\Omega)$  называется функцией Ляпунова системы  $\dot{r} = f(r)$ , если

- $V(r) > 0$  при всех  $r \in \Omega \setminus \{0\}$ ,  $V(0) = 0$
- $V' \cdot f \leq 0$  при всех  $r \in \Omega$

**Теорема (Ляпунов, об устойчивости).** Пусть  $f \in Lip_{loc}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля,  $f(0) = 0$ . Если в области  $\Omega$  существует функция Ляпунова системы  $\dot{r} = f(r)$ , то  $r = 0$  — устойчивое решение.

**Доказательство.** Будем доказывать от противного. Пусть нулевое положение равновесия неустойчиво. Тогда найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что при любом сколь угодно малом  $\delta > 0$  можно выбрать такое начальное положение  $r_0$  из  $\delta$ -окрестности нуля, что будет ложным утверждение

$$\forall t \geq 0 \quad |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon \tag{14}$$

Все числа, меньшие  $\varepsilon$ , обладают тем же свойством, что и  $\varepsilon$ . Поэтому можно считать, что  $\varepsilon$ -окрестность содержится вместе с границей в области  $\Omega$ .

Ложность утверждения (14) означает одно из двух:

1. решение  $r(t, 0, r_0)$  определено не при всех  $t \geq 0$
2. найдется  $t_\varepsilon > 0$ , такое что  $|r(t_\varepsilon, 0, r_0)| \geq \varepsilon$

Допустим, выполнено (1), то есть максимальное решение  $r(t, 0, r_0)$  (которое существует и единственно) определено на интервале  $(a, b) \ni 0$ , где  $b < +\infty$ . Построим параллелепипед  $[0, b] \times \overline{B}_\varepsilon(0)$ , где  $\overline{B}_\varepsilon(0)$  — замыкание  $\varepsilon$ -окрестности нуля. Интегральная кривая решения  $r(t, 0, r_0)$  выйдет на его границу при некотором  $t_\varepsilon < b$ . Значит, верно утверждение (2).

Итак, достаточно получить противоречие, если верно (2). Будем считать, что  $t_\varepsilon$  — это точка, в которой  $r(t_\varepsilon, 0, r_0) \in \partial B_\varepsilon(0)$ , где  $\partial B_\varepsilon(0)$  — граница  $\varepsilon$ -окрестности нуля.

Пусть  $V_M = \min_{r \in \partial B_\varepsilon(0)} V(r)$ . Поскольку  $V(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то можно выбрать  $\delta$  так, чтобы  $V(r) < \frac{V_M}{2}$  при  $|r| < \delta$ . Положим

$$v(t) = V(r(t, 0, r_0))$$

где  $r_0$  выбрано из  $\delta$ -окрестности нуля так, чтобы выполнялось (2).

Функция  $v$  дифференцируема

$$\begin{aligned} v(0) &= V(r_0) < \frac{V_M}{2} \\ v(t_\varepsilon) &= V(r(t_\varepsilon, 0, r_0)) \geq V_M \end{aligned}$$

Поэтому найдется точка  $t_1 \in (0, t_\varepsilon)$ , в которой  $\dot{v}(t_1) > 0$ .

Однако, исходя из второго свойства функции Ляпунова, имеем

$$\dot{v}(t_1) = V'(r(t_1, 0, r_0)) \cdot r'_t(t_1, 0, r_0) = V'(r(t_1, 0, r_0)) \cdot f(r(t_1, 0, r_0)) \leq 0$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Теорема (Ляпунов, об асимптотической устойчивости).** Если в условиях предыдущей теоремы выполнено  $V' \cdot f < 0$  в области  $\Omega \setminus \{0\}$ , то нулевое решение системы  $\dot{r} = f(r)$  асимптотически устойчиво.

## Дополнительные вопросы

### Уравнение 1-го порядка и его решение.

Это уравнение вида  $F(x, y, y') = 0$ . Функция  $\varphi$  — решение такого дифференциального уравнения, если:

1.  $\varphi \in C^1(a, b)$
2.  $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$  на  $(a, b)$

*Пример.*  $y' - x = 0$ , решение  $y = \frac{x^2}{2} + C$ .

Методов решения много, все относятся к частным случаям.

**Интегральная кривая уравнения.**

Это график решения уравнения.

**Общее решение уравнения.**

Это множество всех его решений.

**Уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной. Геометрический смысл.**

Это уравнение вида  $y' = f(x, y)$ .

Пусть  $\varphi$  решение этого уравнения. Тогда  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ , то есть тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точке  $(x_0, y_0)$  это  $f(x_0, y_0)$

**Ломаная Эйлера.**

См. 4

**Уравнение в дифференциалах, его решение и параметрическое решение.**

Уравнение в дифференциалах получается, если в уравнении, разрешенном относительно производной, записать  $y' = \frac{dy}{dx}$ :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Функция  $\varphi$  — решение такого дифференциального уравнения, если:

1.  $\varphi \in C^1(a, b)$
2.  $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$  на  $(a, b)$

Аналогично можно определить решение вида  $x = \psi(y)$ .

Функция  $r = (\varphi(t), \psi(t))$  — параметрическое решение такого уравнения на  $\alpha, \beta$ , если:

1.  $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$  и  $r'(t) \neq 0$  на  $t \in (\alpha, \beta)$
2.  $P(\varphi(t), \psi(t)) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$  на  $t \in (\alpha, \beta)$

*Пример.*

$$x dx + y dy = 0$$

Подстановкой тривиально можно убедиться, что  $y = \sqrt{C^2 - x^2}$  — решение этого уравнения.

Параметрическое решение  $(C \cos t, C \sin t)$

### Особые точки уравнения в дифференциалах.

$(x_0, y_0)$  — особая, если  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

Пример.

$$x dx + y dy = 0$$

Особая точка  $(0, 0)$ , через нее ничто не проходит.

### Геометрический смысл уравнения в дифференциалах и его решения.

Пусть  $r = (x(t), y(t))$  есть параметрическое решение уравнения на  $(\alpha, \beta)$ . Тогда при  $t \in (\alpha, \beta)$ :

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

$$F(r(t))r'(t) = 0$$

Таким образом, любая интегральная кривая в каждой своей точке перпендикулярная вектору  $F(x, y)$

### Задача Коши (ЗК) для уравнения 1-го порядка, разрешённого относительно производной.

Задача Коши — задача поиска решения уравнения, удовлетворяющему  $y(x_0) = y_0$ .

**Теорема 8.**  $G \subset \mathbb{R}^2$  — область,  $f \in C(G)$ ,  $(x_0, y_0) \in G$ . Тогда в некоторой окрестности  $x_0$  существует решение задачи Коши.

**Теорема 9.** Как в предыдущей теореме, но  $f'_y \in C(G)$ . Тогда решение задачи Коши единственно.

Таким образом, может быть такое, что в некоторых (или всех) точках решение не единственно.

### Особое решение уравнения.

Это решение уравнения, в каждой точке которого нарушается локальная единственность решения задачи Коши.

Пример.

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

Тогда особое решение  $y' \equiv 0$ , его в любой точке  $(x_0, 0)$  пересекает решение вида  $y = (x - x_0)^3/3$

### Однородное уравнение.

Функция однородна степени  $\alpha$ , если  $\forall t, x, y \quad F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$

Однородное уравнение — уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, где  $P$  и  $Q$  однородные функции одной степени.

Замена  $z = \frac{y}{x}$  сводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

### Геометрическое свойство решений однородного уравнения.

Пусть  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  — параметрическое решение однородного дифура. Растянем пространство в  $\lambda$  раз, получим  $x = \lambda\varphi(t), y = \lambda\psi(t)$ . При подстановке получим:

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0$$

По однородности:

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0$$

Таким образом, любое растяжение (или сжатие) решения однородного уравнения приводит к другому решению однородного уравнения.

### Уравнение Бернулли.

Это уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Поделив на  $y^\alpha$  и заменив  $z = y^{1-\alpha}$ , получаем линейное.

### Уравнение Риккати.

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Оно решается только в особых случаях (например,  $\alpha = 2$ ), но если нашел какое-то решение  $\varphi$ , то замена  $y = z + \varphi$  сводит к Бернулли.

### Уравнение в полных дифференциалах.

Это уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, при этом

$$\exists u : du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Решение имеет вид  $u(x, y) = C$

Обязательное условие на существование  $u$  это  $P'_y = Q'_x$ . Если при этом  $P, Q \in C^1(G)$  и  $G$  односвязна, то это условие еще и достаточно.

Если область прямоугольная, то можно решить систему  $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$  следующим образом: Решаем первое уравнение при фиксированном  $y$ , после чего заменяем  $C = C(y)$  и находим  $C$  как функцию.

В таком случае  $u$  есть потенциал векторного поля  $(P, Q)$ .

### Интегрирующий множитель.

Это то, на что мы домножаем уравнение, чтобы получить уравнение в полных дифференциалах.

Если  $\mu$  — инт. множитель, то

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

, то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

Это сложно решить, но иногда решается при  $\mu'_x \equiv 0$  или  $\mu'_y \equiv 0$ .

### Уравнение n-го порядка и его решение.

Это уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Его решение на  $a, b$  —  $\varphi$ , такое что:

1.  $\varphi \in C^n(a, b)$
2.  $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$  на  $(a, b)$

### ЗК для уравнения, разрешённого относительно старшей производной.

Это уравнение вида  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

Задача Коши для него имеет вид  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

### Методы понижения порядка уравнения.

- $y^{(n)} = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x) dx$
- $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) \xrightarrow{z=y^{(k)}} F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$



- $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Тогда пусть  $z = y'$ ,  $y''_{xx} = z'_y z$ ,  $y'''_{xxx} = z''_{yy} z^2 + z'^2_y z$  и т.д.
- Пусть  $F$  линейна по  $y$ . Тогда можно заменить  $z = y'/y$
- $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \Rightarrow \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$

## Нормальная система уравнений, её решение.

Нормальная система порядка  $n$  это система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Можно ввести пару обозначений для краткости:

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \vdots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix} \quad \dot{r} = f(t, r)$$

$\varphi$  — решение такой системы, если:

1.  $\varphi \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2.  $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$  на  $(a, b)$

## Интегральная кривая нормальной системы.

Это график решения, но теперь он в  $(n + 1)$ -мерном пространстве.

## Глобальное и локальное условие Липшица.

Функция  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условию Липшица на множестве  $D$ , если  $\exists L$  — константа Липшица, что для  $\forall r_1, r_2 \in D$   $|f(r_2) - f(r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$

*Пример.* Пусть  $f(x) = \sqrt{x}$ . Тогда  $f \in \text{Lip}[1/2, 1]$ ,  $f \notin \text{Lip}(0, 1]$ ,  $f \in \text{Lip}_{loc}(0, 1]$

Функция  $f : \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условию Липшица по  $r$  (равномерно по  $t$ ) на множестве  $D$ , если  $\exists L$ , что для  $\forall (t, r_1), (t, r_2) \in D$   $|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$ , обозначается  $f \in \text{Lip}_r(D)$

$f \in \text{Lip}_{loc}(D)$  локально, если  $\forall x_0 \in D \exists U(x_0) f \in \text{Lip}(U(x_0))$

**Приближения Пикара.**

- $\varphi_0(t) = 0$
- $\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

**Сведение уравнения n-го порядка к равносильной системе.**

Пусть  $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$

**Лемма 5.**  $y$  — решение  $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  на  $(a, b) \Leftrightarrow \Lambda_n y$  — решение на  $(a, b)$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

*Доказательство.*

- $\Rightarrow$  Пусть  $y$  — решение первого уравнения. Тогда пусть  $y_k = y^{(k-1)}$ . Тогда первые  $n-1$  уравнений решаются, а  $\dot{y}_n = y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ , искомое верно.
- $\Leftarrow$  Пусть  $r$  — решение второго уравнения. Будем последовательно дифференцировать первое уравнение и получим искомое.

□

**Максимальное решение.**

Решение  $\varphi$  продолжимо, если есть решение  $\psi$  на большем отрезке, равное  $\varphi$  на  $\text{dom} \varphi$ .

Если у решения нет продолжения, оно максимально.

**Определитель Вронского (решений ЛОС и ЛОУ) и его свойства.**

Вронскиан множества вектор-функций  $\{r_k\}_{k=1}^n$ , где  $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$ :

$$W(t) = \det(r_1(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

**Определение.** Определителем Вронского (или вронскианом) функций  $y_1, y_2, \dots, y_n \in$

$C^{n-1}(a, b)$  называют

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \ddots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

### Фундаментальная система решений.

**Определение.** Фундаментальной системой решений системы уравнений  $\dot{r} = P(t)r$  называется совокупность ее  $n$  линейно независимых решений.

### Фундаментальная матрица.

**Определение.** Фундаментальная матрица системы  $\dot{r} = P(t)r$  — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

### Метод неопределённых коэффициентов для ЛС.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $a_j \in \mathbb{C}^n$  при  $j \in [0, k] \cap \mathbb{Z}$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $p_k(t)$  — многочлен от  $t$  степени  $k$ , при этом коэфы  $a_j$ .

Тогда  $e^{\gamma t} q_{k+s}(t)$  есть решение системы  $\dot{r} = Ar + e^{\gamma t} p_k(t)$ , где  $q_{k+s}(t)$  — вектор-многочлен степени  $\leq k + s$ , и  $s$ :

1.  $= 0$ , если  $\lambda$  не СЗ  $A$
2.  $=$  максимальный размер жордановых клеток, соответствующих  $\gamma$

### Характеристический многочлен ЛУ.

В дальнейшем для краткости используется обозначение

$$Ly = \frac{d^n}{dt^n} y + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y + a_0 y = \left( \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \right) y$$

где  $a_n = 1$ . При помощи оператора  $L$  уравнение (8) записывается в виде

$$Ly = f(t)$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0 \tag{15}$$

Применяя оператор  $L$  к функции  $e^{\lambda t}$ , находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

**Определение.** Многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

называется **характеристическим многочленом** уравнения (8), а его корни — **характеристическими числами** уравнения (8).

### Метод неопределённых коэффициентов для ЛУ.

Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = f(t)$$

$f(t) = p_k(t)e^{\gamma t}$ , где  $p_k(t)$  — многочлен ( $f$  — *квазимногочлен*). Тогда у этого уравнения есть единственное частное решение вида

$$\varphi(t) = t^m q_k(t) e^{\gamma t}$$

, где  $q_k$  — многочлен степени  $k$ , при этом  $m$ :

1.  $= 0$ , если  $\gamma$  — не характеристическое число
2.  $=$  кратность  $\gamma$  как хар. числа.

### Автономная система.

Это система вида

$$\dot{r} = f(r)$$

**Фазовое пространство автономной системы. Фазовая траектория, фазовый портрет, фазовая скорость, точка покоя.**

- Фазовое пространство —  $\text{dom} f$
- Расширенное фазовое пространство —  $\mathbb{R} \times \text{dom} f$
- Фазовая траектория — проекция интегральной кривой на фазовое пространство параллельно оси времени
- Фазовый портрет — совокупность фазовых траекторий
- Фазовая скорость в точке  $r$  —  $f(r)$

### Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.

**Определение.** Положение равновесия  $r = 0$  автономной системы  $\dot{r} = f(r)$  называется **устойчивым (по Ляпунову)**, если для любой  $\varepsilon$ -окрестности нуля найдется такая  $\delta$ -окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой  $\delta$ -окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на  $\varepsilon$ . То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies \forall t \geq 0 |r(t, 0, r_0)| < \varepsilon$$

В противном случае положение равновесия называется **неустойчивым**.

**Определение.** Положение равновесия  $r = 0$  автономной системы  $\dot{r} = f(r)$  называется **асимптотически устойчивым**, если

- $r = 0$  устойчиво
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0 : |r_0| < \delta \implies r(t, 0, r_0) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

### Функция Ляпунова.

**Определение.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля. Функция  $V \in C^1(\Omega)$  называется **функцией Ляпунова** системы  $\dot{r} = f(r)$ , если

- $V(r) > 0$  при всех  $r \in \Omega \setminus \{0\}$ ,  $V(0) = 0$
- $V' \cdot f \leq 0$  при всех  $r \in \Omega$

### Теорема об устойчивости по первому приближению.

Есть система  $\dot{r} = f(r)$ . Пусть  $f$  — дифф. Тогда  $f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r)$ . Пусть  $f(0) = 0$  (если не так, пошафлим координаты). Тогда  $f(r) = f'(0)r$  есть сист $\blacklozenge\blacklozenge$ ма первого приближения.

**Теорема 10.**  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — окрестность нуля,  $f(0) = 0$ . Тогда нулевое решение системы  $\dot{r} = f(r)$ :

1. Асимптотически устойчиво, если  $\Re \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \text{spec} f'(0)$
2. Неустойчиво, если  $\exists \lambda \in \text{spec} f'(0) : \Re \lambda > 0$