

1 Линейные операторы

1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\varphi : X \rightarrow Y, X, Y - \text{ЛП}, \dim X = n, \dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Определение. Отображение φ , обладающее свойством линейности называется **линейным оператором (ЛОп)**

Пример. • $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор

- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный (тождественный) оператор
- $X = L_1 + L_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} : X \rightarrow L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} : X \rightarrow L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная \exists и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int_{-1}^1 f(t)K(x, t)dt$$

$K(x, t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X , $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y , $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $\|a_j^k\|$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

1.2 Пространство линейных операторов.

$\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ — ЛОп

$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$$\chi = \alpha\varphi, \text{ если } \forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

Алгебра — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.

Кольцо — множество, на котором заданы бинарные операции $+$ и \cdot с следующими свойствами:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4. $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Коммутативное кольцо — кольцо с коммутативным умножением: $a \cdot b = b \cdot a$

Кольцо с единицей — кольцо с нейтральным элементом по умножению: $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$

Модуль над кольцом (коммутативным, с единицей) R — множество M с операциями:

1. $+: M \times M \rightarrow M$
 - (a) $a + b = b + a$
 - (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - (c) $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
 - (d) $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2. $\cdot: M \times R \rightarrow M$
 - (a) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
 - (b) $1m = m$
 - (c) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
 - (d) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1. \mathbb{R}^3 с векторным произведением — алгебра над \mathbb{R}
2. \mathbb{C} — алгебра над \mathbb{R}
3. \mathbb{H} (кватернионы)
4. Многочлены

Изоморфизм алгебр — биекция $F : A \rightarrow B$, где A и B — алгебры, сохраняющая “+” и “.”:

1. $F(kx) = kF(x)$
2. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3. $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что $F(0_X) = 0_Y$

1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП: $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$

Умножение матриц: $(A \cdot B)_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$

Теорема 1.

$$\underbrace{C}_C = \underbrace{B}_B \underbrace{A}_A \Leftrightarrow C = BA$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji}e_j\right) = \sum_j a_{ji}\mathcal{B}e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj}e_k$$

$$c_{il} = (\mathcal{C}e_i)_l = \sum_j a_{ji}b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ — алгебра, пространство квадратных матриц \mathbb{R}_n^n — алгебра.

1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре A выполняется $a_1 \cdot a_2 = e$, где e — единичный элемент матрицы. Тогда:

1. a_1 — левый обратный элемент для a_2

2. a_2 — **правый обратный** элемент для a_1

Если a_1 — и левый, и правый обратный к a_2 , то он называется **обратным** элементом к a_2 .

Теорема 2. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. “ \Leftarrow ”

$$\det A \neq 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij} a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к. $\det A \neq 0 \stackrel{def}{\Rightarrow}$ вектора $\in A$ ЛНЗ \Rightarrow единственное решение.

“ \Rightarrow ” то же самое, но наоборот. 

□

$$[A | E] \sim [E | A^{-1}]$$

Доказательство.

$$[A | E] = [T_1 A | T_1 E] = [T_2 T_1 A | T_2 T_1 E] = \dots = [T_n \dots T_1 A | T_n \dots T_1 E] = [E | T_n \dots T_1 A]$$

$$\triangleleft T_n \dots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \dots T_1$$

□

Здесь T_i — матрица элементарного преобразования.

1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 4)

Теорема 3.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$[\delta_{k_0}^i = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1_{k_0} \ 0 \ \dots \ 0)^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \rightarrow b)$$

□

$A(a_j \rightarrow b)$ — матрица A , где заменили j -тый вектор на b

$$\det A(a_j \rightarrow b) = 0 \cdot M_j^1 + \dots + 1 \cdot M_j^k + \dots + 0 = M_j^k$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)_k^j}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}_k^j}{\det A}$$

1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

Определение. Ядро φ :

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\text{Ker } \varphi \subset X$

Лемма 1. $\text{Ker } \varphi$ — ЛП

Определение. Образ φ :

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.

$$\text{Im } \varphi \subset Y$$

Лемма 2. $\text{Im } \varphi$ — ЛП

Теорема 4. О ядре и образе

$$\varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X$$

Доказательство. $\dim \text{Ker } \varphi = K$

$\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \quad \forall j = 1..k$

$\{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X

$$\varphi x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j)$$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для $\text{Im } \varphi$, т.к. любой $x \in \text{Im } \varphi$ можно по нему разложить.
Докажем ЛНЗ от обратного:

$$\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n \text{ — ЛЗ} \Rightarrow \exists \alpha^j : \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi \left(\sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k \text{ — противоречие} \\ \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n \text{ — базис } \text{Im } \varphi. \quad \square$$

1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1} :

$$\varphi^{-1} \varphi = \varphi \varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

Теорема 5. Оператор φ обратим, если \exists базис, в котором его матрица невырождена

Теорема 6. $\varphi : X \rightarrow X$

$$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \text{Im } \varphi = \dim X \text{ или } \dim \text{Ker } \varphi = 0$$

Доказательство. $\dim \text{Im } \varphi = \dim X \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$ — сюръекция, $\dim \text{Ker } \varphi = 0 \Rightarrow \forall y \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$ — инъекция \square

2 Тензорная алгебра

2.1 Преобразование координат векторов X и X^* при замене базиса.

$\{e_j\}$ — базис X

$\{\tilde{e}_k\}$ — базис X^*

$$\Rightarrow \forall k \quad \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n t_k^j e_j$$

Определение. Набор $T = ||t_j^i||$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса $\{e_j\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$

Примечание. $\triangleleft E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n], \tilde{E} = [\tilde{e}_1 \ \tilde{e}_2 \ \dots \ \tilde{e}_n] \Rightarrow \tilde{E} = ET$

Лемма 3. $]\xi$ — координаты вектора x в базисе $\{e_j\}$

$]\tilde{\xi}$ — координаты вектора x в базисе $\{\tilde{e}_k\}$

Тогда $\xi = T\tilde{\xi}$ или $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

Доказательство. $x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{x}^k \sum_{j=1}^n t_k^j e_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k t_k^j) e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi} \quad \square$

Лемма 4. $]\{f^l\}$ — базис X^* , сопряженный $\{e_j\}$, т.е. $f^l(e_j) = \delta_j^l$

$]\{\tilde{f}^m\}$ — базис X^* , сопряженный $\{\tilde{e}_k\}$, т.е. $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta_k^m$

$]F = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^n]^T, \tilde{F} = [\tilde{f}^1 \ \tilde{f}^2 \ \dots \ \tilde{f}^n]^T$

Тогда $F = T\tilde{F}$ или $f^l = \sum_{m=1}^n t_m^l \tilde{f}^m$

Доказательство. $\triangleleft (\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta_k^m = (\tilde{f}^m, \sum_{j=1}^n t_k^j e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j (\tilde{f}^m, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \sum_{l=1}^n a_l^m (f^l, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j a_j^m$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j^m t_k^j = \delta_k^m$ или $AT = I$ — единичная матрица $\Rightarrow A = T^{-1} \quad \square$

Лемма 5. $]\varphi$ — коэфф. ЛФ в $\{e_j\}$

$]\tilde{\varphi}$ — коэфф. ЛФ в $\{\tilde{e}_k\}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

Доказательство. $]g$ — ЛФ, $\varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^n t_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n t_k^j g(e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T \quad \square$

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

$$\bar{\mathcal{A}} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}, \mathcal{A} : X \rightarrow Y$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \bar{\mathcal{A}} \leftrightarrow \bar{A}$$

\mathcal{X} — матрица перехода $\bar{X} \rightarrow X$, \mathcal{Y} — матрица перехода $\bar{Y} \rightarrow Y$

$$x \in X, y := \mathcal{A}x, \bar{x} := \mathcal{X}x, \bar{y} := \mathcal{Y}y$$

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{x} = \bar{y} &\Rightarrow Ax = y = \mathcal{Y}^{-1}\bar{y} = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\bar{x} = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\mathcal{X}x \\ \forall x \quad Ax = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\mathcal{X}x &\Leftrightarrow A = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\mathcal{X} \end{aligned}$$

2.3 Тензоры (ковариантность, независимое от ПЛФ определение). Пространство тензоров.

Определение. Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются ковариантными величинами.

Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются контравариантными величинами.

Примечание. ξ — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$$]W \in \Omega_q^p - \text{ПЛФ } (p, q)$$

$$\{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X, \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_n} f^{j_1} \dots f^{j_n})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов $\{\tilde{e}_k\}$ и $\{\tilde{f}^m\}$ ПЛФ W имеет тензор $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$\begin{aligned} &= \triangle W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) = \\ &= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q}) \end{aligned}$$

Определение. 1. Вектором называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону

2. Линейной формой называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону

3. **Тензором** типа (p, q) называется величина, преобразующаяся p раз по ковариантному закону и q раз по контравариантному.

- Сложение тензоров и умножение тензора на скаляр — поэлементное
- Нулевой элемент по сложению — тензор, принимающий значение 0 на любом входе
- Очевидно $w + \alpha v$ — тензор того же типа, что и $w \Rightarrow$ тензоры образуют линейное пространство T_q^p , $\dim T_q^p = p + q$

2.4 Свертка тензора.

Свертка:

$$\omega_{i_1 \dots i_n}^{k \wedge s j_1 \dots j_n} = \sum_{m=1}^n \omega_{i_1 \dots i_{n-1} i_n}^{j_1 \dots j_{n-1} j_n} \delta_{i_n}^{k \wedge s}$$

Примечание. Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 6. *Свертка сохраняет тензорную природу*

Лемма 7.

$$\omega_{i_1 \dots i_p}^{l \wedge m k \wedge s} = \omega_{i_1 \dots i_p}^{k \wedge s l \wedge m}$$

Доказательство. От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется. \square

2.5 Транспонирование тензора.

Транспонирование

$$t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$$

Примечание. Транспонировать можно только по индексам одного типа

Лемма 8. *Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.*

2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

$\langle \Lambda^p \quad \{i_1 \dots i_p F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \rangle$ — базис Λ^p

$$i_1 \dots i_p F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \quad \dim \Lambda^p = C_n^p$$

$\{x_i\}_{i=1}^n$ — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n)$$

$\langle \Lambda_p \quad \{_{i_1 \dots i_p} F\} \rangle_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ — базис Λ_p

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad _{i_1 \dots i_p} F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$\begin{aligned} _{1 \dots n} F &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \\ &= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n] (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

Определение. Определителем набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1 \dots x_n]$, такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Лемма 9.

$$om \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \quad om \Lambda_p$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \det\{x_1 \dots x_n\} &= _{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

Определение. $\varphi : X \rightarrow X$

Внешней степенью φ^{Λ_p} оператора φ называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

Примечание.

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\varphi^{\Lambda_p} = n$$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n} (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} = \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

Определение. Определителем линейного оператора φ называется число, такое что:

$$\det \varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Примечание.

$$\forall \omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n} \omega = \det \varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n} \omega = \alpha \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \alpha \det \varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det \varphi \cdot \omega$$

2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.

Пример. $\det \varphi$ — инвариант

$$\varphi^{\Lambda_n} z = \det \varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n$$

$\det \varphi = \det A_\varphi$ — в некотором фиксированном базисе

$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1} A_\varphi T \quad \det \tilde{A}_\varphi = \det T^{-1} \det A_\varphi \det T = \det A_\varphi$$

Теорема 7.

$$\det(\varphi\psi) = \det \varphi \det \psi$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \triangleleft \det(\varphi\psi)e_1 \wedge \dots \wedge e_n &= (\varphi\psi)^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) = \\ &= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \dots \wedge \psi(e_n)) = \det \varphi \det \psi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

3 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерных пространствах

3.1 Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

Определение. Инвариантом линейного оператора φ называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

$\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$ — автоморфизм

Определение. Подпространство L линейного пространства X называется **инвариантным подпространством** φ , если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

Пример. 1. $\varphi : X \rightarrow X$, тогда инвариантные подпространства:

- X
- $\{0\}$

2. $\varphi = \mathfrak{I}, \quad \forall x \quad \mathfrak{I}x = x \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

3. $\varphi = \Theta, \quad \forall x \quad \Theta x = 0 \Rightarrow$ любое подпространство X — инвариантное

$$4. \quad \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$$

$\angle \{e_j\}$ — базис $X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \rightarrow \mathcal{L}\{e_j\}$ — инв.

Всего 2^n инвариантных подпространств

5. $]X = L_1 \dot{+} L_2$

$$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1 \in L_1$$

L_1 — инв., $\forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x \quad \forall$ подпространство L_1 инвариантно

L_2 — инв., $\forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = 0 \quad \forall$ подпространство L_2 инвариантно

3.2 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: основные определения и свойства.

$$\varphi : X \rightarrow X$$

Определение. $x \in X$ — собственный вектор φ , если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

λ — собственное значение φ , соответствующее x

Определение. Спектр $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — множество всех собственных значений вектора

Определение. $x \in X$ — собственный вектор φ , если этот вектор ненулевой и принадлежит одномерному инвариантному подпространству: $x \neq 0, x \in L^{(1)}$

Лемма 10. Эти определения собственного вектора эквивалентны.

Доказательство. Опр. 1 \Rightarrow Опр. 2:

$$\angle x : \varphi x = \lambda x, L^{(1)} = \mathcal{L}(x)$$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \beta x \Rightarrow \varphi y = \varphi \beta x = \beta \varphi x = \beta \lambda x$$

Опр. 2 \Rightarrow Опр. 1:

$$\triangleleft x \in L^{(1)} = \mathcal{L}v \xrightarrow{\text{def}} \varphi x \in L^{(1)}$$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \alpha v \quad \varphi y = \alpha \varphi v = \beta v$$

□

Лемма 11. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейно независимы:

$$\lambda_i \rightarrow x_i, \lambda_i \neq \lambda_{j \neq i} \Rightarrow \{x_i\} \text{ ЛНЗ}$$

Доказательство. По индукции:

База: $m = 1 \Rightarrow \{x_1\}$ ЛНЗ, т.к. $x_1 \neq 0$

Переход: $\{x_i\}_{i=1}^m$ — ЛНЗ, тогда $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$

$$\triangleleft \{\alpha_i\} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

$$0 = \mathcal{A}0 = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) = \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_{n+1} \left(\sum \alpha_i x_i \right)$$

Вычтем второе выражение из первого:

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) + 0$$

Т.к. $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛНЗ, $\forall i \in [1, n] \quad \alpha_i = 0$

$$0 = \alpha_{n+1} x_{n+1}, x_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$$

□

Лемма 12. Линейный оператор в конечномерном пространстве не может иметь более n различных собственных значений.

Доказательство. Тривиально в силу ЛНЗ соответствующих векторов.

□

3.3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Вычислим СВ и СЗ.

$$x = \sum \xi^i e_i \quad \xi = (\xi^1 \ \dots \ \xi^n)^T \quad A \leftrightarrow A = \|a_j^i\|$$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\xi = \lambda \xi \Leftrightarrow A\xi - \lambda E\xi = 0$$

Таким образом, задача нахождения СЗ сводится к нахождению λ , для которых существуют нетривиальные решения СЛАУ $A - \lambda E$, что эквивалентно нахождению корней характеристического полинома $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Нахождение СВ \Leftrightarrow нахождение нетривиальных решений СЛАУ $A - \lambda E$ для каждого СЗ λ

Лемма 13. $\triangleleft A : X \rightarrow X$, X — ЛП над \mathbb{C} , тогда у A существует по крайней мере один собственный вектор и одно собственное значение.

Доказательство. У любого многочлена есть хотя бы один корень $\in \mathbb{C}$. □

3.4 Спектральный анализ линейного оператора с простым спектром: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Определение. Собственное значение λ — простое, если оно — корень $\chi_A(\lambda)$ единичной кратности.

Определение. Спектр σ называется простым, если все собственные значения в нём простые.

Теорема 8. $\triangleleft A : X \rightarrow X$ — ЛОП с простым спектром $\sigma_A = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ — СВ.

Тогда A можно привести к диагональной форме A^d :

$$A^d = T^{-1}AT$$

где T — матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к $\{x_i\}$

Доказательство. Очевидно, т.к. A в базисе $\{x_i\}$ имеет диагональную матрицу $diag\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ □

Определение. $\triangleleft \lambda_i$ — собственное значение ЛОП $A : X \rightarrow X$.

Спектральным проектором $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel}$ называется оператор проектирования на подпространство L_{λ_i} (множество векторов, отвечающих λ_i)

Лемма 14. *Спектральные проекторы оператора с простым спектром имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = x_i \cdot f^i$$

где $\{x_i\}$ — базис X из СВ, $\{f^i\}$ — сопряженный ему базис.

Доказательство. Необходимо показать, что для $x \in L_{\lambda_i}$ $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x = x$, для $y \in \mathcal{L}\{x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n\}$ $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} y = 0$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} x = x_i \cdot f^i x = x_i \cdot \alpha f^i x_i = \alpha x_i$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} y = x_i \cdot f^i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j x_j \right) = x_i \cdot 0$$

□

Теорема 9. *Спектральная теорема для скалярного оператора:*

$$A = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$Ax = A \left(\sum_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x \right) = \sum_i A \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x$$

□

3.5 Спектральный анализ скалярного оператора: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Спектр, диагональный вид матрицы, спектральная теорема: см. выше.

Лемма 15. *Спектральные проекторы оператора скалярного типа имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{m_j} x_j^{(i)} \cdot f_{(i)}^j$$

где $\{x_j^{(i)}\}_{j=1}^{m_j}$ — СВ, отвечающие λ_i , $\{f_{(i)}^j\}_{j=1}^{m_j}$ — сопряженный ему базис.

3.6 Спектральная теорема и функциональное исчисление для скалярного оператора.

Спектральная теорема: см. выше

$p(\lambda)$ — скалярный полином. Тогда

$$p(\mathcal{A}) = \sum p(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

Доказательство.

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = \sum (\lambda_i + \lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = 2\mathcal{A}$$

$$\alpha \mathcal{A} = \sum (\alpha \lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \left(\sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} \right) \left(\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_j} \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \mathcal{P}_{\lambda_j} = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \delta_j^i = \sum_i \lambda_i^2 \mathcal{P}_{\lambda_i} = \mathcal{A}^2$$

□

3.7 Спектральная теорема и инварианты скалярного оператора. Тожество Кэли.

Спектральная теорема, инварианты скалярного оператора: см. выше.

Лемма 16. *Тожество Кэли.*

$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ — характеристический полином ЛОП \mathcal{A} , то $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \sum \chi_{\mathcal{A}}(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum 0 \mathcal{P}_{\lambda_i} = 0$$

□

4 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерном пространстве: операторы общего вида

4.1 Ультраинвариантные подпространства.

$\varphi : X \rightarrow X, \dim X = n$

$L \subset X$ — инвариантное подпространство φ , если $\varphi(L) \subset L$

Определение. Инвариантное подпространство называется ультраинвариантным подпространством, если существует его дополнение L' , такое что:

$$L \dot{+} L' = X \quad L' \text{ — инвариантное подпространство } \varphi$$

Определение. Оператор $\varphi_L : L \rightarrow L$, такой что:

$$\varphi_L x = \varphi x \quad \forall x \in L$$

называется **сужением** оператора φ на L .

Если L — ультраинвариантное подпространство, то φ_L называется **компонентой** φ в L

Лемма 17. Дополнение L' ультраинвариантного подпространства L является ультраинвариантным подпространством.

Лемма 18. $X = L \dot{+} L'$ L, L' — ультраинвариантные подпространства \Rightarrow

$$\varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L}$$

Доказательство.

$$X = L \dot{+} L' \Rightarrow \forall x! = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x$$

$$\begin{aligned} \varphi x &= \varphi \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \varphi \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x \quad \forall x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L} \quad (*) \end{aligned}$$

□

4.2 Алгебра скалярных полиномов. Идеал. Минимальный полином.

$\triangleleft K$ — поле, над которым задано множество полиномов $K_\infty[\lambda]$, также обозначается $P_\infty[K]$

$$P_\infty[K] = \{p_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda^i \quad \forall n\}$$

Примечание. $P_\infty[K]$ — линейное пространство:

$$p, q \in P_\infty[K]; \lambda \in K \Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda) \\ (\lambda p)(\lambda) = \lambda p(\lambda) \end{cases} \Rightarrow P_\infty[K] \text{ — линейное пространство}$$

Примечание. $P_\infty[K]$ — коммутативная алгебра

Зададим операцию умножения в $P_\infty[K]$:

$$\begin{aligned} \forall p, q \in P_\infty[K] \quad (p \cdot q)(\lambda) &= p(\lambda)q(\lambda) \\ (p \cdot q)(\lambda) &= p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = (qp)(\lambda) \Rightarrow \text{коммутативность} \\ (p \cdot q) \cdot r &= p \cdot (q \cdot r) = p \cdot q \cdot r \\ (p+q)r &= pr + qr \\ (\lambda p)q &= p(\lambda q) = \lambda(pq) \end{aligned}$$

Нейтральный элемент:

- по сложению: $0(\lambda) = 0$
- по умножению: $1(\lambda) = 1$

Примечание. $\{1, t, t^2 \dots t^n \dots\}$ — базис $P_\infty[K] \Rightarrow \dim P_\infty[K] = \infty$

Определение. Идеалом J алгебры $P_\infty[K]$ называется такое её подпространство, что

$$\forall q \in J \quad \forall p \in P_\infty[K] \quad q \cdot p \in J$$

Пример. Тривиальные идеалы:

- $\{0\}$
- $P_\infty[K]$

Лемма 19. J — линейное подпространство $P_\infty[K]$

Доказательство. $]q_1, q_2 \in J \quad q_1 + q_2 \in J?$

$$q_1, q_2 \in J \Rightarrow \forall p \quad q_1 p, q_2 p \in J$$

$$q_1 = r \tilde{q}_1, q_2 = r \tilde{q}_2 \quad (q_1 + q_2)p = r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p$$

$$(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in P_\infty[K] \Rightarrow r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in J$$

□

Лемма 20. J — подалгебра $P_\infty[K]$

Доказательство.

$$(q_1 \cdot q_2)p = q_1(q_2 p) \in J$$

□

Пример. $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$ — идеал

Лемма 21. $]q \in P_\infty[K] \Rightarrow J_q = q \cdot P_\infty[K]$ — идеал в $P_\infty[K]$

Доказательство. $]r \in J_q \Rightarrow \exists p \in P_\infty[K] : r = q \cdot p$

$$] \tilde{p} \in P_\infty[K]$$

$$r \tilde{p} = (q p) \tilde{p} = q(p \tilde{p})$$

$$p \tilde{p} \in P_\infty[K] \Rightarrow q(p \tilde{p}) \in q \cdot P_\infty[K] = J_q \Rightarrow J_q \text{ — идеал}$$

□

Определение. Полином $q : J_q = q \cdot P_\infty[K]$ называется **порождающим полиномом** идеала J_q

Примечание. Если идеал содержит $1(\lambda)$, то данный идеал совпадает с $P_\infty[K]$:

$$J_1 = 1 \cdot P_\infty[K] = P_\infty[K]$$

Определение. J_1 и J_2 — идеалы в $P_\infty[K]$

1. Суммой $J_1 + J_2$ называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2 \quad p_1 \in J_1, p_2 \in J_2\}$$

2. Пересечением $J_1 \cap J_2$ называется множество:

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \wedge p \in J_2\}$$

Лемма 22. J_s и J_r — идеалы в $P_\infty[K]$

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2$ — идеал?

$$]q \in J_s \Rightarrow q = q_1 + q_2 \quad q_1 \in J_1, q_2 \in J_2$$

$$]p \in P_\infty[K] \quad qp = (q_1 + q_2)p = q_1p + q_2p$$

$$q_1p \in J_1, q_2p \in J_2 \Rightarrow q_1p + q_2p \in J_s$$

$J_r = J_1 \cap J_2$ — идеал?

$$]q \in J_r \Rightarrow q \in J_1; q \in J_2$$

$$]p \in P_\infty[K] \quad qp \in J_1; qp \in J_2 \Rightarrow qp \in J_r \quad \square$$

Определение. Нетривиальный полином минимальной степени, содержащийся в идеале, называется **минимальным полиномом** идеала.

Лемма 23. Любой полином идеала J делится на p_J без остатка:

$$]p \in J \Rightarrow p \mid p_J$$

Доказательство. $]\exists p : p \nmid p_J \Rightarrow p = qp_J + r; \deg r < \deg p_J \Rightarrow r = p - qp_J : \text{min полином} \\ \text{— противоречие.} \quad \square$

Примечание. Если p_1 и p_2 — минимальные полиномы $J \Rightarrow p_1 = \alpha p_2; \alpha \in K$

Теорема 10. Минимальный полином идеала является его порождающим полиномом.

Доказательство. $\forall p \in J \quad p \mid p_J \Rightarrow p = p_J \cdot q \in p_J \cdot P_\infty[K]$

$$\forall p \in q \cdot P_\infty[K] \Rightarrow p = qr; r \in P_\infty[K] \Rightarrow \forall p \mid q \Rightarrow q = p_J \quad \square$$

Лемма 24. Сравнение идеалов:

$$J_1 \subset J_2 \Leftrightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

Доказательство. “ \Rightarrow ”

$$J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

“ \Leftarrow ”

$$\mid p_{J_1} \mid p_{J_2} \Rightarrow p_{J_1} = r p_{J_2}$$

$$\forall q \in J_1 \quad q = \tilde{q} p_{J_1} = \tilde{r} p_{J_2} \Rightarrow q \mid p_{J_2} \Rightarrow J_1 \subset J_2 \quad \square$$

Лемма 25. *О минимальном полиноме пересечения*

$$J_1 \leftrightarrow p_{J_1} \quad J_2 \leftrightarrow p_{J_2} \Rightarrow J_r = J_1 \cap J_2 \leftrightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

Доказательство. $J_r = J_1 \cap J_2 \Rightarrow J_r \subset J_1 \wedge J_r \subset J_2 \Rightarrow r_J \mid p_{J_1} \wedge r_J \mid p_{J_2} \Rightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2}) \quad \square$

Лемма 26. *О минимальном полиноме суммы*

$$J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

Доказательство. $J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow J_s \supset J_1 \wedge J_s \supset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid S_J \wedge p_{J_2} \mid S_J \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2}) \quad \square$

Теорема 11. *О взаимно простых полиномах*

$$\mid p_1, p_2 \text{ — взаимно простые, т.е. } \text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in P_\infty[K] : p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$$

$$\text{Доказательство. } p_1 \leftrightarrow J_1 = p_1 P_\infty[K]$$

$$p_2 \leftrightarrow J_2 = p_2 P_\infty[K]$$

$$\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \leftrightarrow J_1 + J_2 = P_\infty[K]$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1 \quad \square$$

Теорема 12. *Обобщение*

$$p_1 \dots p_k \in P_\infty[K], \text{НОД}(p_1 \dots p_k) = 1 \Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : \sum_{i=1}^k p_i q_i = 1$$

Доказательство. Аналогично. \square

Примечание. $\mid p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k, \{p_i\} \text{ взаимно простые} \Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : p'_1 q_1 + p'_2 q_2 + \dots + p'_k q_k = 1, p'_j = \frac{p}{p_j}$

4.3 Алгебра операторных полиномов. Минимальный полином линейного оператора.

Определение. Операторный полином $p \in \mathcal{P}_\infty[K]$ называется аннулирующим полиномом линейного оператора φ , если $p(\varphi) = 0$

Примечание. Множество аннулирующих полиномов операторов φ — ядро гомоморфизма S_φ по определению.

Теорема 13. Аннулирующий полином существует.

Доказательство. $\dim \mathcal{P}[\varphi] = n^2 \Rightarrow \exists n^2$ ЛНЗ элементов. Эти элементы : $\varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}$. Тогда $\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}\}$ — ЛЗ

$$\Rightarrow \exists p[\varphi] = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0 \Rightarrow \exists$$

□

J_φ — множество аннулирующих полиномов оператора φ

Лемма 27. J_φ — идеал в $\mathcal{P}_\infty[K]$

Доказательство. $p \in J_\varphi \Rightarrow p(\varphi) = 0$

$q \in \mathcal{P}_\infty[K]$

$\triangleleft p(\lambda)q(\lambda) \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi)q(\varphi) = 0 \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) - \text{аннулирующий} \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) \in J_\varphi$

□

Определение. Минимальным аннулирующим полиномом оператора φ называется минимальный полином J_φ

Примечание. Обозначение минимального полинома: $p_\varphi(\lambda) \leftrightarrow p_\varphi(\varphi) = 0$

Пример. $\varphi : X \rightarrow X$ — оператор с простым спектром

$\chi_\varphi(\lambda) - \text{характеристический полином } \varphi \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_\varphi(\lambda)$

Доказательство.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}_i \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^n \chi_\varphi(\lambda_i) \mathcal{P}_i = 0$$

Предположим обратное: $p_\varphi(\lambda) - \text{минимальный полином, такой что } \deg p_\varphi < \deg \chi_\varphi$

$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k) p_\varphi(\lambda)$

$$\triangleleft p_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^n p_\varphi(\lambda_i) \mathcal{P}_i = p_\varphi(\lambda_k) \mathcal{P}_k \Rightarrow p_\varphi(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

Лемма 28. $]p(\varphi) = q(\varphi) \Leftrightarrow [p(\lambda) - q(\lambda)] \mid p_\varphi(\lambda)$

Доказательство. $\triangleleft p(\lambda) - q(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) - q(\lambda) \in J_\varphi$

□

Лемма 29. $]p(\lambda) = q(\lambda)p_\varphi(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

4.4 Разложение линейного пространства в сумму подпространств. 2я теорема о ядре и образе. Теорема о проекторах.

Теорема 14. $\triangleleft p_\varphi = p_1 \dots p_k, p_1 \dots p_k$ — взаимно простые

$$\Rightarrow \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi) = X$$

Доказательство.

$$\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi)$$

$$\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } 0 = X$$

□

Теорема 15. О ядре и образе.

$$]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \Rightarrow \text{Ker } p_1(\varphi) = \text{Im } p_2(\varphi)$$

Доказательство. Покажем, что:

$$1. \text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$2. \dim \text{Im } p_2(\varphi) = \dim \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$1. \text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$]y \in \text{Im } p_2(\varphi) \Rightarrow \exists x \in X : y = p_2(\varphi)x$$

$$\triangleleft p_1(\varphi)y = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$2. \text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi) \Rightarrow$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_1(\varphi) + \dim \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_2(\varphi) + \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

$$\dim \text{Ker } p_1(\varphi) = \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

□

Теорема 16. $]p_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)$ — минимальный аннулирующий полином φ , $p_1 \dots p_k$ — взаимно простые делители

\Rightarrow

1. $\sum_{j=1}^k p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}, \quad p'_j = \frac{p_\varphi}{p_j}$
2. $p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{P}_{L_j} \quad L_j = \text{Ker } p_j(\varphi)$

Доказательство. $\triangleleft p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \dots p_k(\lambda) \quad \exists q_1 \dots q_k :$

$$\sum_{j=1}^k p'_j(\lambda)q_j(\lambda) = 1 \xrightarrow{S_\varphi} \sum_{j=1}^k p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}$$

$$]p_1(\lambda) = p_i(\lambda), p_2(\lambda) = p'_i(\lambda) \Rightarrow \text{Im } p_1(\varphi) = \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$\triangleleft \mathcal{P}_{L_1}x = p'_i(\varphi)q(\varphi) \in \text{Ker } p_i(\varphi)$, т.к.

$$p_i(\varphi)[p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x] = p_i(\varphi)p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)q_i(\varphi)x = 0$$

Осталось доказать, что $\mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = \delta_i^j \mathcal{P}_{L_i}$

$$]i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = p'_i(\varphi)q_i(\varphi)p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \frac{p_\varphi(\varphi)}{p_i(\varphi)p_j(\varphi)}q_i(\varphi)q_j(\varphi)p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned}]i = j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}(x) &= \mathcal{P}_{L_i}(\mathcal{I} \cdot x) = \mathcal{P}_{L_i}\left(\sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{L_j}\right)x = \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i}x \quad \forall x \\ &\Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i} = \mathcal{P}_{L_i} \end{aligned}$$

□

4.5 Минимальный полином и инвариантные подпространства. Спектральная теорема для линейного оператора произвольного вида.

Минимальный полином и инвариантные пространства: см. выше.

Теорема 17. Спектральная теорема.

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{m_j} = p_1(\lambda) \dots p_k(\lambda) \quad p_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \lambda \neq \lambda_{i \neq j}$$

$$\Rightarrow L_j = \text{Ker } p_j(\varphi) = \text{Ker } (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} \text{ — ультраинвариантное подпространство}$$

$$\Rightarrow X = \dot{+} \sum_{j=1}^n \text{Ker} (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} = \dot{+} \sum_{j=1}^k L_j$$

$$\varphi = \dot{+} \sum_{j=1}^k \varphi_j \quad \varphi_j = \varphi|_{L_j}$$

- 4.6 Нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка.
- 4.7 Структура нильпотентного оператора. Базис Жордана (обзор).
- 4.8 Жорданова форма матрицы линейного оператора.
- 4.9 Кратности собственных чисел (алгебраическая, геометрическая, полная). Теорема Гамильтона-Кэли.