

wide, libelwidth=!, libelindent=0pt Рассмотрим табличную модель  $\mathfrak{M}$  с  $n$  истинностными значениями, и с выделенным значением  $T$  для истины. Покажите, что

$$\models \bigvee_{1 \leq i \neq j \leq n+1} (P_i \rightarrow P_j) \ \& \ (P_j \rightarrow P_i)$$

В частности, покажите, что в любой корректной модели если  $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket$ , то  $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$ ; если  $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T$ , то  $\llbracket \gamma \ \& \ \delta \rrbracket = T$ ; если  $\llbracket \gamma \rrbracket = T$ , то  $\llbracket \gamma \vee \eta \rrbracket = \llbracket \eta \vee \gamma \rrbracket = T$ .

$$(a) \ \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket \Rightarrow \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$$

Предположим обратное, т.е.  $\exists \alpha, \beta : \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = A, \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket \neq T$ .

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\rightarrow}(A, A) \neq T.$$

Но  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ , следовательно по корректности

$$\models \alpha \rightarrow \alpha, \text{ следовательно } f_{\rightarrow}(A, A) = T.$$

Противоречие.

$$(b) \ \llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \gamma \ \& \ \delta \rrbracket = T$$

$$f_{\&}(T, T) = T, \text{ т.к. } \vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \ \& \ (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow \models (\alpha \rightarrow \alpha) \ \& \ (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow T = f_{\&}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket) = f_{\&}(T, T)$$

$$(c) \ T = f_{\vee}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\vee}(T, A), \text{ т.к. } \vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \vee \beta. \text{ Аналогично для симметричного случая.}$$

По принципу Дирихле  $\exists i \neq j : \llbracket P_i \rrbracket = \llbracket P_j \rrbracket \Rightarrow \llbracket P_i \rightarrow P_j \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = T$

wide, libelwidth=!, libelindent=0pt Покажите, что какая бы ни была формула  $\alpha$  и модель Крипке, если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \preceq W_j$ , то  $W_j \Vdash \alpha$ .

Докажем это по индукции по количеству операторов в  $\alpha$

База:  $n = 0$ , т.е.  $\alpha = P_i$  — переменная. Искомое верно по определению  $W$ .

Переход: 4 случая:

$$(a) \ \alpha = \neg \beta$$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_k : W_i \leq W_k \quad W_k \nVdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(b)  $\alpha = \beta \ \& \ \gamma$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta, W_i \Vdash \gamma, \text{ по индукционному предположению } W_j \Vdash \beta, W_j \Vdash \gamma \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(c)  $\alpha = \beta \vee \gamma$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta \text{ или } W_i \Vdash \gamma, \text{ пусть это } \beta \text{ (иначе переименуем). Тогда } W_j \Vdash \beta \text{ по индукционному предположению } W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(d)  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_j : W_i \leq W_j \quad W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \gamma, \text{ по транзитивности } \leq \text{ выполняется } W_j \Vdash \alpha$$

Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.

$$P \vee \neg P;$$

Пусть  $P$  — одна переменная и модель Крипке  $W_1 \nVdash P$ , а  $W_2 \Vdash P$  и  $W_1 \leq W_2$ . Тогда несложно заметить, что  $W_1 \nVdash \neg P$ , т.к.  $\exists W_2 :$

$W_1 \leq$   
 $W_2, W_2 \Vdash$   
 $P$ . Т.к.  
 $W_1 \nVdash$   
 $P, W_1 \nVdash$   
 $\neg P$ ,  
 получаем,  
 что  $W_1 \nVdash$   
 $P \vee$   
 $\neg P$

$\neg \neg P \rightarrow$   
 $P$ ;

$W_1 \nVdash \neg \neg P \rightarrow P$

Пусть  
 $W_2 \Vdash$   
 $P$  и  
 $W_1 \leq$   
 $W_2$ , тогда  
 искомое  
 выполнено.

$P \vee$   
 $\neg P \vee$   
 $\neg \neg P \vee$   
 $\neg \neg \neg P$ ;

$W_1 \nVdash$   
 $P, W_2 \Vdash$   
 $P, W_3 \Vdash$   
 $\neg P, W_4 \nVdash \neg P$ ,  
 все упорядочены

$((P \rightarrow$   
 $Q) \rightarrow$   
 $P) \rightarrow$   
 $P$ ;

$W_1 \Vdash$   
 $(P \rightarrow$   
 $Q) \rightarrow$

$P, W_1 \not\models$ 
 $P$ . Второе

выполнено

по построению;

придумаем,

как выполнить

первое.

 $W_1 \not\models$ 
 $P \rightarrow$ 
 $Q \Leftarrow$ 
 $\begin{cases} W_2 \models P \\ W_2 \not\models Q \end{cases}$ 

Противоречий

не возникло.

Ответ:

 $W =$ 
 $\{W_1, W_2\}, \leq =$ 
 $\{(W_1, W_2)\}$ 

(плюс

рефлексивность,

 $W_2 \models$ 
 $P$ 
 $\text{wvde, lvbelwvdth=!, lvbelvndent=0pt } (A \rightarrow$ 
 $B) \vee$ 
 $(B \rightarrow$ 
 $C) \vee$ 
 $(C \rightarrow$ 
 $A);$ 
 $W_1 \not\models$ 
 $(A \rightarrow$ 
 $B), W_1 \not\models$ 
 $(B \rightarrow$ 
 $C), W_1 \not\models$ 
 $(C \rightarrow$ 
 $A) \Rightarrow$ 
 $\exists W_2, W_3, W_4 :$ 
 $W_2 \models$ 
 $A, W_2 \not\models$ 
 $B, W_3 \models$ 
 $B, W_3 \not\models$

$C, W_4 \Vdash$   
 $C, W_4 \nVdash$   
 $A$ . Если  
 $\leq =$   
 $\{(W_1, W_2), (W_1,$   
 (плюс  
 рефлексивность)  
 то противоречия  
 нет.

$\neg(\neg A \&$   
 $\neg B) \rightarrow$   
 $A \vee$   
 $B;$

$W_1 \Vdash$   
 $\neg(\neg A \&$   
 $\neg B), W_1 \nVdash$   
 $A \vee$   
 $B \Rightarrow$   
 $W_1 \nVdash$   
 $A, W_1 \nVdash$   
 $B$

Попробуем  
 выполнить  
 первое  
 утверждение.  
 $W_1 \nVdash$   
 $\neg A \&$   
 $\neg B \Rightarrow$   
 $W_1 \nVdash$   
 $\neg A$  или  
 $W_1 \nVdash$   
 $\neg B.$

Пусть  
 $W_1 \nVdash$   
 $\neg A$  без  
 потери  
 общности.  
 $W_1 \nVdash$   
 $\neg A \Leftrightarrow$   
 $\exists W_2 :$   
 $W_2 \Vdash$

$A$  и $W_1 \leq$  $W_2$ 

Ответ:

 $W =$  $\{W_1, W_2\}, \leq =$  $\{(W_1, W_2)\}$ 

(плюс

рефлексивность)

 $W_1 \not\models$  $A, W_1 \not\models$  $B, W_2 \models$  $A.$ wviide, lviibelwviidth=!, lviibelviindent=0pt ( $\neg A \vee$  $B) \rightarrow$  $(A \rightarrow$  $B);$  $\frac{\neg A \vee B, A, \neg A \vdash}{\neg A}$  $\frac{\neg A}{\neg A}$  $\frac{\neg A}{\neg A}$ wviiide, lviiibelwviiidth=!, lviiibelviindent=0pt ( $A \rightarrow$  $B) \rightarrow$  $(\neg A \vee$  $B);$  $W_1 \not\models (A \rightarrow B) \cdot$ 

Пусть

 $W_2 \models$  $A, W_2 \models$  $B$  и $W_1 \leq$  $W_2$ , тогда

$W_2 \Vdash$   
 $A \rightarrow$   
 $B, W_1 \Vdash$   
 $A \rightarrow$   
 $B$  пустотно  
 и искомое  
 выполнено.

wixde, lixbelwixdth=!, lixbelixndent=0pt  $\neg \perp$ .

$\frac{}{\perp \vdash \perp}$   
 $\frac{}{\vdash \perp \rightarrow \perp}$   
 $\frac{}{\vdash \neg \perp}$

wivde, livbelwivdth=!, livbelivndent=0pt Рассмотрим некоторую модель Крипке  $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$ . Пусть  $\Omega = \{ \mathcal{W} \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in \mathcal{W} \text{ и } W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in \mathcal{W} \}$ . Пусть  $\mathcal{W}_\alpha := \{ W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha \}$  (множество миров, где вынуждена формула  $\alpha$ ).

- (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара  $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$  — топологическое пространство. Докажите её.

Покажем, что выполняются три аксиомы топологии:

i.  $\mathcal{W} = \bigcup_\alpha \mathcal{W}_\alpha \in \Omega$ , где  $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in \mathcal{W}$  и при этом  $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$ . Если  $W_i \preceq W_j$ , то т.к.  $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$ , то  $W_j \in \mathcal{W}_\alpha$ , а следовательно  $W_j \in \mathcal{W}$ .

ii.  $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \in \Omega$ , где  $\mathcal{W}_i \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in \mathcal{W} \Rightarrow W_i \in \mathcal{W}_\alpha \quad \forall \alpha$ . Если  $W_i \preceq W_j$ , то  $W_j \in \mathcal{W}_\alpha \quad \forall \alpha$  и следовательно  $W_j \in \mathcal{W}$ .

iii.  $\emptyset \in \Omega, \mathfrak{W} \in \Omega$

Первое выполнено в силу пустотности утверждения (*vacuous, не знаю, как по-русски*). Второе очевидно выполнено.

- (b) Пусть  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  — открытые множества. Выразите  $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$  и  $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$  через  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  и покажите, что они также открыты.

$$\mathcal{W}_{\alpha \& \beta} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha \& \beta\} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha\} \cap \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \beta\} = \mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta.$$

$$\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta} = \mathcal{W}_\alpha \cup \mathcal{W}_\beta$$

Открытость тривиальна из того, что  $(\mathfrak{W}, \Omega)$  — топологическое пространство.

- (с) Пусть  $\mathcal{W}_\alpha$  и  $\mathcal{W}_\beta$  — открытые множества. Выразите  $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$  через них и покажите, что оно также открыто.

$$\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta} = (\mathfrak{W} \setminus (\mathcal{W}_\alpha \setminus \mathcal{W}_\beta))^\circ$$

- (d) Покажите, что  $\Omega$  — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы  $\alpha$  множество миров  $\mathcal{W}_\alpha$ , где она вынуждена, всегда открыто ( $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$ ) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для  $Q \in \Omega$  существует формула  $\alpha$ , что  $\mathcal{W}_\alpha = Q$ ).

Покажем, что  $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega \ \forall \alpha$  по индукции.

База:  $\alpha$  есть одна переменная. Искомое выполнено по монотонности вынужденности.

Переход: 4 случая, разобранных в пунктах а,б,с.

Покажем, что  $\forall Q \in \Omega \ Q = \mathcal{W}_\alpha$

Не покажем :(

Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание  $\neg \neg P \rightarrow P$ . Постройте соответствующую ему табличную модель.

$$\mathfrak{W} = \{W_1\}, \Omega = \{\emptyset, \{W_1\}\}$$

Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров  $\mathfrak{W}$  упорядочено как дерево: (а) существует наименьший мир  $W_0$ ; (б) для любого  $W_i \neq W_0$  существует единственный предшествующий мир  $W_k : W_k \prec W_i$ .



- (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
- (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
- (c) Покажите, что для любого натурального  $n$  найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с  $n$  мирами.

`wviide, lviibelwviidth=!, lviibelviindent=0pt` Будем говорить, что топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$  *связно*, если нет таких открытых множеств  $A$  и  $B$ , что  $X = A \cup B$ , но  $A \cap B = \emptyset$ . Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связан в смысле теории графов.

Если граф не связан, то выберем одну КС, все миры в ней будут  $A$ , а остальные миры  $B$ . Несложно заметить, что  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .

Если пространство не связно, то рассмотрим  $A$  и  $B$  из условия. Предположим, что граф связан, в частности есть ребро  $a \rightarrow b$ , где  $a \in A, b \in B$  (или наоборот). Т.к.  $a \leq b$ , то  $b \in A$ , что противоречит  $A \cap B = \emptyset$ .

`wviiide, lviiibelwviidth=!, lviiibelviindent=0pt` Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).

`wixde, lixbelwixdth=!, lixbelixndent=0pt` Пусть заданы алгебры Гейтинга  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , гомоморфизм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и согласованные оценки  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$  и  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$ :  $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$ .

- (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если  $a_1 \preceq a_2$ , то  $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$ .
- (b) Покажите, что если  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$ , то  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$ .

$$\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = \varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$$

`wxde, lxbelwxdth=!, lxbelxndent=0pt` Пусть заданы алгебры Гейтинга  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . Всегда

ли можно построить гомоморфизм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ?

Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Гейтинга. Покажите, что  $\Gamma(\mathcal{A})$  — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.

Пусть  $\mathcal{A}$  — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что)  $\Gamma(\mathcal{A})$  будет булевой алгеброй?

Не всегда, например в алгебре  $\Gamma(1 \rightarrow 0)$  выполняется следующее:  $1 + (1 \rightarrow 0) = 1$ , а должно быть  $1_\Gamma$