

1 Определения

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

1.3 n -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. Положительно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

Определение. Отрицательно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

Определение. Неопределенная кв. форма: $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

Определение. Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма: $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$ — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо

1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : T|_U$ — диффеоморфизм, т.е. $\exists T^{-1}$

1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) — решение этой системы, $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение, C^r гладко зависящее от y .

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \leq k \leq r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

□

2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{(\alpha + 1)!} (x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1} \\ f(x) &= \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-a|^{r+1})} \end{aligned}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. Отсутствует

□

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \rightarrow \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:

- (a) $\|A\| \geq 0$
- (b) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
- (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
- (d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$

a, b, c — очевидно.

d: $|(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$

По замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. \quad |BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

□

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $\|A\|$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.
2. $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 \quad |x_1 - x_0| < \delta$$

□

2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- E открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ ($c = a + \Theta(b - a)$), $\Theta \in [0, 1]$:

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|} - M$ “близкий” к L

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m открыто в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

Доказательство. По неравенству треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}} |x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в \mathbb{R} выполняется следующее равенство в Ω_m :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на M слева и на L справа:

Доказательство.

$$\begin{aligned} M^{-1} - L^{-1} &\stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1} \\ E - L^{-1} &\stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1} \\ L - M &= L - M \end{aligned}$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. \exists все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на E
2. $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$:

Берем x, ε . $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех i, j .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- a — точка локального экстремума
- f — дифф. в точке a

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. \square

Следствие (необходимое условие экстремума). a — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- f дифф. в $\text{Int}K$
- f непрерывно на K
- $f|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in \text{Int}K : f'(a) = \vec{0}$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо f на K const, либо $\exists a \in \text{Int}K$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ \square

2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \quad C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

Доказательство.

$$C_1 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x|p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{cases}$$

Существование C_1 и C_2 гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что p непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k|p(e_k) \\ &\leq |x - y|\sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y|M \end{aligned}$$

□

2.10 Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, a — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — локальный максимум
- Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум
- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 f(a+h) &= f(a) \\
 &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\
 &= \frac{1}{2} \left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

$$\begin{aligned}
 \angle \bar{h} : Q(\bar{h}) > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left(\sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0
 \end{aligned}$$

Т.е. $f(a + t\bar{h}) > f(a)$ при t , близких к 0.

Аналогично $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$ при t , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого f не имеет экстремума в a , но для \bar{f} a — локальный минимум. □

2.11 Лемма о “почти локальной инъективности”

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- F дифф. в $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists c > 0, \delta > 0 \ \forall h < \delta \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. Если F — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \|F'(x_0)\| \cdot |h| \geq \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|} |h|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□