

Упражнение 1. Пусть $H, K \triangleleft G$ — две нормальные подгруппы в G . Докажите, что тогда коммутатор любых двух элементов из H и K принадлежит пересечению $H \cap K$.

Решение.

Лемма 1. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Доказательство. $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ □

$\triangleleft h \in H, k \in K$

$$[h, k] = hk(kh)^{-1} = \underbrace{h}_{\in H} \underbrace{k}_{\in K} \underbrace{h^{-1}}_{\in K} \underbrace{k^{-1}}_{\in H}$$

$[k, h]$ аналогично. □

Упражнение 2. Показать, что коммутант $[H, K]$ двух нормальных подгрупп $H, K \triangleleft G$ есть подгруппа в пересечении $[H, K] \subset H \cap K$. Всегда ли $[H, K] = H \cap K$?

Решение. Т.к. коммутатор любых двух элементов H и K принадлежит и H , и K , то по замкнутости H и K произведение коммутаторов также принадлежит и H и K . Кроме того, $1 = [1, 1] \in [H, K]$, следовательно, $[H, K] \subset H \cap K$, т.к. это $[H, K]$ это в точности все коммутаторы вида $[hk], h \in H, k \in K$.

$[H, K]$ не всегда $= H \cap K$, например если G абелева, то $[H, K] = \{e\}$, но очевидно не для каждой H и K выполнено $H \cap K = \{e\}$, например для $H = K = G$. □

Упражнение 3. Пусть H, K — две произвольные подгруппы. Рассмотреть отображение $\psi : H \times K \rightarrow HK$:

$$\psi(h, k) = hk$$

Найти $\psi^{-1}(x) = \{(h, k) \mid \psi(h, k) = x\}$ в явном виде. Получить из этого, что:

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Решение. Пусть $h_1 k_1 = x$ и $h_2 k_2 = x$.

$$x^{-1} = k_2^{-1} h_2^{-1}$$

$$e = x x^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$$

$$h_2 h_1^{-1} = k_1 k_2^{-1}$$

Т.к. $h_2 h_1^{-1} \in H, k_1 k_2^{-1} \in K, k_1 k_2^{-1} = h_2 h_1^{-1} =: a \in K \cap H$. Тогда:

$$h_2 = i h_1 \Rightarrow h_1 = i^{-1} h_2 \quad k_1 = i k_2$$

И, следовательно, любое $(h_1, k_1) : h_1 k_1 = x$ записывается в виде $(i^{-1} h_2, i k_2)$, где h_2, k_2 — произвольное решение уравнения $h k = x$. Таким образом:

$$\psi^{-1}(x) = \{(i^{-1} h_2, i k_2) \mid i \in K \cap H\} \Rightarrow |\psi^{-1}(x)| = |K \cap H|$$

$$|H| \cdot |K| = \sum_{x \in HK} |\psi^{-1}(x)| = |HK| \cdot |H \cap K|$$

□

Упражнение 4. Показать, что среди 5 подгрупп порядков 483, 1309, 3059, 2783, 3451 есть хотя бы две абелевы.

Решение. Разложим размеры групп на простые делители.

| n | $p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ |
|------|-----------------------------|
| 483 | $3 \cdot 7 \cdot 23$ |
| 1309 | $7 \cdot 11 \cdot 17$ |
| 3059 | $7 \cdot 19 \cdot 23$ |
| 2783 | $11^2 \cdot 23$ |
| 3451 | $7 \cdot 11 \cdot 29$ |

Группу размера 2783 больше рассматривать не будем. Размеры всех остальных групп разбиваются на простые числа в первой степени, следовательно, по первой теореме Силова у каждой группы есть силовские p -подгруппы порядка каждого такого простого числа. Кроме того, они циклические.

Утверждение. $G \cong H \times K \Leftrightarrow \begin{cases} G = HK \\ H \cap K = \{e\} \\ H, K \triangleleft G \end{cases}$, аналогично для большего числа подгрупп.

Найдём все такие группы, что их силовские подгруппы H, K, L нормальны, тогда

$$|HKL| = \frac{|H| \cdot |K| \cdot |L|}{|H \cap K \cap L|} = |G|$$

и, следовательно, каждому элементу g можно взаимно-однозначно сопоставить элемент из HKL , т.е. $G \cong HKL$ и по утверждению $G \cong H \times K \times L$, а прямое произведение является абелевой группой.

Из соображений предыдущего домашнего задания для нормальности силовой p_i -подгруппы \mathcal{P}_{p_i} достаточно, чтобы $p_i \not\equiv 1 \pmod{p_j} \quad \forall j$.

| 483 | 3 | 7 | 23 | 1309 | 7 | 11 | 17 | 3059 | 7 | 19 | 23 |
|-----|---|-----|----|------|---|----|----|------|---|----|----|
| 3 | 0 | 3 | 3 | 7 | 0 | 7 | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 |
| 7 | 1 | ... | | 11 | 4 | 0 | 11 | 19 | 5 | 0 | 19 |
| ... | | | | 17 | 3 | 6 | 0 | 23 | 2 | 4 | 0 |

Дальше нет смысла перебирать, т.к. для групп размера 1309 и 3059 искомое доказано.

□