

Математическая статистика

Михайлов Максим

25 сентября 2021 г.

Оглавление

Лекция 1	6 сентября	2
1	Организационные вопросы	2
2	Введение	2
2.1	Выборочная функция распределения	3
3	Первоначальная обработка статданных	4
Лекция 2	13 сентября	6
4	Точечные оценки	6
4.1	Свойства статистических оценок	6
4.1.1	Состоятельность	6
4.1.2	Несмещённость	6
4.1.3	Эффективность	7
4.2	Точечные оценки моментов	7
4.3	Метод моментов	10

Лекция 1

6 сентября

1 Организационные вопросы

Большая часть баллов зарабатывается индивидуальными заданиями, выполняемыми в Excel — 30 баллов. Тест с большим числом вопросов — 20 или 25 баллов.

2 Введение

Теория вероятности состоит в следующем: исследуется случайная величина с заданным распределением. Математическая статистика занимается обратным — даны данные, нужно приближенно найти числовые характеристики случайной величины и с некоторой уверенностью найти вид распределения. Матстатистика также исследует связанность случайных величин, их корреляцию. В идеале есть цель построить модель, которая по значениям одних случайных величин предсказывает другие.

Пусть проводится некоторое количество экспериментов, в ходе которых появились некоторые данные.

Определение. Генеральная совокупность — набор всех исходов проведенных экспериментов.

В реальности наблюдается некоторая выборка генеральной совокупности, ибо рассматривать всю совокупность нецелесообразно.

Определение. Выборочная совокупность — исходы наблюдаемых экспериментов.

Определение. Выборка называется **репрезентативной**, если её распределение совпадает с распределением генеральной совокупности.

Выборка может быть нерепрезентативной, как в примере с ошибкой выжившего. Мы считаем, что таких ошибок у нас нет и все выборки репрезентативны, ибо исправление

этих ошибок — задача конкретной области, в которой используется матстатистика.

Определение (после опыта). Пусть проведено n наблюдаемых независимых экспериментов, в которых случайная величина приняла значение $X_1, X_2 \dots X_n$. Набор¹ этих данных называется **выборкой объема n** .

Определение (до опыта). **Выборкой объема n** называется набор из n независимых одинаково распределенных случайных величин.

Пусть имеется выборка в смысле “после опыта” объема n . Её можно интерпретировать как следующую дискретную случайную величину:

X_i	X_1	X_2	\dots	X_n	\sum
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	\dots	$\frac{1}{n}$	1

Средневыборочное:

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Выборочная дисперсия:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

2.1 Выборочная функция распределения

$$F_n^*(z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < z) = \frac{\text{число } X_i \in (-\infty, z)}{n}$$

Примечание. I — индикатор:

$$I(X_i < z) = \begin{cases} 1, & X_i < z \\ 0, & X_i \geq z \end{cases}$$

Теорема 1.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n^*(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(z)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbb{E}I(X_1 < z) = 1 \cdot P(X_1 < z) + 0 \cdot P(X_1 \geq z) = P(X_1 < z) = F(z)$$

¹ Или вектор.

, где $F(z)$ — функция распределения X_1 . Заметим, что $F(z) \leq 1 < \infty$, следовательно применим ЗБЧ Хинчина:

$$F_n^*(z) = \frac{\sum_{i=1}^n I(X_i < z)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}I(X_1 < z) = F(z)$$

□

Примечание. На самом деле имеется даже равномерная сходимость по вероятности — это теорема Гливенко-Кантелли:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n^*(z) - F(z)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

3 Первоначальная обработка статданных

Если отсортировать данные, то получим **вариационный ряд**: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Если учесть повторяющиеся экземпляры, то получим **частотный вариационный ряд**:

$X_{(i)}$	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	\dots	$X_{(k)}$	\sum
n_i	n_1	n_2	\dots	n_k	n
p_i^*	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	\dots	$\frac{n_k}{n}$	1

Определение. $h := X_{\max} - X_{\min}$ — **размах выборки**

Допустим, что разбили интервал (X_{\min}, X_{\max}) на k интервалов, чаще всего одинаковой длины.² Тогда $l_i = \frac{h}{k}$ — длина каждого интервала и интервальный ряд можно заменить интервальным вариационным рядом.

i	l_1	l_2	\dots	l_k	\sum
m_i	m_1	m_2	\dots	m_k	n
$\frac{m_i}{n}$	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	\dots	$\frac{m_k}{n}$	1

m_i — число попавших в i -тый интервал данных.

По такой таблице можно построить **гистограмму**. На координатной плоскости построим прямоугольники с основаниями l_i и высотами $\frac{m_i}{nl_i}$. В результате получаем ступенчатую фигуру площади 1, которая и называется гистограммой.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty, k(n) \rightarrow \infty$, причем $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$, гистограмма будет стремиться к плотности распределения:

$$\frac{m_i}{n} \xrightarrow{P} P(X_i \in l_i) = \int_{l_i} f(x) dx$$

² Применяются и другие разбиения, например равнонаполненное.



Рис. 1.1: Пример
гистограммы



Рис. 1.2: Пример
полигона

Чаще всего число интервалов берется по формуле Стёрджесса: $k \approx 1 + \log_2 n$. Иногда $k \approx \sqrt[3]{n}$.

Примечание. Иногда выборка изображается в виде **полигона**: отображаются точки, соответствующие серединам интервалов и ставим точки на высоте $\frac{m_i}{n}$.

Лекция 2

13 сентября

4 Точечные оценки

Пусть имеется выборка объема n : $X = (X_1 \dots X_n)$

Определение. Статистикой называется измеримая функция $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$.

Пусть требуется найти значение параметра θ случайной величины X по данной выборке. Оценку будем считать с помощью некоторой статистики θ^* .

4.1 Свойства статистических оценок

4.1.1 Состоятельность

Определение. Статистика $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$ называется **состоятельной оценкой** параметра θ , если:

$$\theta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$$

4.1.2 Несмещённость

Определение. Статистика $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$ называется **несмещенной оценкой** параметра θ , если

$$\mathbb{E}\theta^* = \theta$$

Примечание. То есть с равной вероятностью можем ошибиться как в меньшую, так и в большую сторону. Нет систематической ошибки.

Определение. Статистика $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$ называется **асимптотически несмещенной оценкой** параметра θ , если

$$\mathbb{E}\theta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$$

Примечание. То есть при достаточно большом объеме выборки ошибка исчезает, но при малом она может существовать.

4.1.3 Эффективность

Определение. Оценка θ_1^* не хуже оценки θ_2^* , если

$$\mathbb{E}(\theta_1^* - \theta)^2 \leq \mathbb{E}(\theta_2^* - \theta)^2$$

или, если оценки несмещенные,

$$\mathbb{D}\theta_1^* \leq \mathbb{D}\theta_2^*$$

Определение. Оценка θ^* называется **эффективной**, если она не хуже всех остальных оценок.

Теорема 3. Не существует эффективной оценки в классе всех возможных оценок.

Теорема 4. В классе несмещённых оценок существует эффективная оценка.

4.2 Точечные оценки моментов

Определение. Выборочным средним \overline{X}_B называется величина

$$\overline{X}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Определение. Выборочной дисперсией \mathbb{D}_B называется величина

$$\mathbb{D}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2$$

Определение. Исправленной выборочной дисперсией S^2 называется величина

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \mathbb{D}_B$$

или

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2$$

Определение. Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma_B = \sqrt{\mathbb{D}_B}$$

Определение. Исправленным выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$S = \sqrt{S^2}$$

Определение. Выборочным k -тым моментом называется величина

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

Определение. Модой M_0^* вариационного ряда называется варианта с наибольшей частотой:

$$M_0^* = X_i : n_i = \max_{1 \leq j < n} n_j$$

Определение. Медианой M_e^* вариационного ряда называется значение варианты в середине ряда:

1. Если $n = 2k - 1$, то $M_e^* = X_k$
2. Если $n = 2k$, то $M_e^* = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$

Величина	Команда в Excel	
	Русский	Английский
$\overline{X_B}$	СРЗНАЧ	AVERAGE
\mathbb{D}_B	ДИСПР	VARP
S^2	ДИСП	VAR
σ_n	СТАНДОТКЛОНП	STDEVP
S	СТАНДОТКЛОН	STDEV
M_0^*	МОДА	MODE
M_e^*	МЕДИАНА	MEDIAN

Теорема 5. Выборочное среднее $\overline{X_B}$ является несмещенной состоятельной оценкой для математического ожидания, то есть:

1. $\mathbb{E}\overline{X_B} = \mathbb{E}X = a$ — несмещенность
2. $\overline{X_B} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}X$ — состоятельность

Доказательство.

1.

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \frac{1}{n} \cdot n\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X$$

2.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}X$$

Это верно по закону больших чисел.

□

Теорема 6. Выборочный k -тый момент является несмещенной состоятельной оценкой для теоретического k -того момента, то есть:

1. $\mathbb{E}\bar{X}^k = X^k$
2. $\bar{X}^k \xrightarrow{P} \mathbb{E}X^k$

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы, если в качестве случайной величины взять X^k . □

Теорема 7.

- \mathbb{D}_B — смещённая состоятельная оценка дисперсии
- S^2 — несмещённая состоятельная оценка дисперсии

Доказательство.

$$\mathbb{D}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$$

$$\mathbb{E}\mathbb{D}_B =$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) =$$

$$\mathbb{E}\bar{X}^2 - \mathbb{E}(\bar{X})^2 =$$

$$\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}(\bar{X})^2 =$$

$$\mathbb{D}\bar{X} =$$

$$\mathbb{E}(\bar{X})^2 - (\mathbb{E}\bar{X})^2 =$$

$$\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{D}\bar{X} + (\mathbb{E}\bar{X})^2) =$$

$$\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 - \mathbb{D}\bar{X} =$$

$$(\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2) - \mathbb{D}\bar{X} =$$

$$\mathbb{D}X - \mathbb{D}\bar{X} =$$

$$\mathbb{D}X - \mathbb{D}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) =$$

$$\mathbb{D}X - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i =$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}X - \frac{1}{n^2} \cdot n\mathbb{D}X &= \\ \mathbb{D}X - \frac{1}{n}\mathbb{D}X &= \\ \frac{n-1}{n}\mathbb{D}X &\neq \mathbb{D}X\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}\left(\frac{n}{n-1}\mathbb{D}_B\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\mathbb{D}X = \mathbb{D}X$$

$$\mathbb{D}_B = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{D}X$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\mathbb{D}_B \xrightarrow{P} \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\rightarrow 1} \mathbb{D}X$$

□

Примечание. \mathbb{D}_B — асимптотически несмещённая оценка, т.к. при $n \rightarrow \infty$, $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$. Таким образом, при большой¹ выборке можно игнорировать смещённость.

4.3 Метод моментов

Изобретен Карлом Пирсоном.

Пусть имеется выборка $(X_1 \dots X_n)$ неизвестного распределения, при этом известен тип² распределения. Пусть этот тип определяется k неизвестными параметрами $\theta_1 \dots \theta_k$. Теоретическое распределение задает теоретические k -тые моменты. Например, если распределение непрерывное, то оно задается плотностью $f(X, \theta_1 \dots \theta_k)$ и $m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(x, \theta_1 \dots \theta_k) dx = h_k(\theta_1 \dots \theta_k)$. Метод моментов состоит в следующем: вычисляем выборочные моменты и подставляем их в эти равенства вместо теоретических. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{X} = h_1(\theta_1 \dots \theta_k) \\ \overline{X^2} = h_2(\theta_1 \dots \theta_k) \\ \vdots \\ \overline{X^k} = h_k(\theta_1 \dots \theta_k) \end{cases}$$

Решив эту систему, мы получим оценки на $\theta_1 \dots \theta_k$. Эти оценки будут состоятельными³, но смещёнными.

Пример. Пусть $X \in U(a, b)$, $a < b$. Обработав статданные, получили оценки первого и второго момента: $\overline{X} = 2.25$; $\overline{X^2} = 6.75$

¹ $n \geq 100$, например.

² Нормальное, показательное и т.д.

³ Если не придумывать специально плохие примеры

Решение. Плотность $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$

$$\mathbb{E}X = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \boxed{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

$$\begin{cases} 2.25 = \frac{a+b}{2} \\ 6.75 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4.5 \\ a^2 + ab + b^2 = 20.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4.5 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 4.5 \end{cases}$$

□