Упражнение 1. Доказать, что остаток квадрата нечётного числа на 8 равен 1.

Решение.
$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$$
Либо $n \equiv 0 \pmod 2$, либо $n+1 \equiv 0 \pmod 2$ $\Rightarrow$ $4n(n+1) \equiv 0 \pmod 2$. Тогда $4n(n+1)+1 \equiv 1 \pmod 2$. □

Упражнение 2. Доказать, что $n(n^2+1)(n^2+4)$ делится на 5.

Решение.

Случай 1: $n \equiv 0 \pmod 5$
Очевидно.

Случай 2: $n \equiv 1 \pmod 5$
$n^2 + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$

Случай 3: $n \equiv 2 \pmod 5$
$n^2 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5$

Случай 4: $n \equiv 3 \pmod 5$
$n^2 + 1 \equiv 9 + 1 \equiv 0 \pmod 5$

Случай 5: $n \equiv 4 \pmod 5$
$n^2 + 4 \equiv 16 + 4 \equiv 0 \pmod 5$

□

Упражнение 3. Найти все натуральные n для которых $n^2+1 \,\vdots\, n+1$

Решение. Очевидно для $n = 0$ и $n = 1$ искомое верно. $\lhd n > 1$.

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \,\vdots\, n+1 \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n+1} \Rightarrow n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{n+1}$$

Для $n > 1$ выполнено $2 \not\equiv 0 \pmod{n+1}$, таким образом ответ $n = 0$ и $n = 1$. □

Упражнение 4. Доказать, что $n^9 + 17n^3 - 18$ делится на 3.

Решение. **Случай 1:** $n \equiv 0 \pmod 3$
$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv -18 \equiv 0 \pmod 3$

Случай 2: $n \equiv 1 \pmod 3$
$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv 1 + 17 - 18 \equiv 0 \pmod 3$

Случай 3: $n \equiv 2 \pmod 3$
$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv 512 + 136 - 18 \equiv 630 \equiv 0 \pmod 3$

$\square$

Упражнение 5. Доказать, что $5ab$ делится на 45, если $a^6 + b^6$ делится на 3.

Решение. $5ab \vdots 45 \Leftrightarrow ab \vdots 9$

a	$a^6 \pmod 3$
0	0
1	1
2	1

Случай 1: $a \equiv 0 \pmod 3$
Тогда $b^6 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow b \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a = 3k, b = 3l \Rightarrow ab = 9l \vdots 9$

Случай 2: $a \equiv 1 \pmod 3$
Тогда $b^6 \equiv 2 \pmod 3$, но $\nexists b$. Таким образом, $a \not\equiv \pmod 3$.

Случай 3: $a \equiv 2 \pmod 3$
Тогда $b^6 \equiv -a^6 \equiv 2 \pmod 3$, см. случай 2.

$\square$