

$$\begin{aligned}
\ln L(\vec{x}, a, \sigma^2) &= -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - a)^2 \\
\frac{\partial}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2} (n\bar{x} - na) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_i - a)^2 - \frac{n}{\sigma} \\
\begin{cases} \hat{a} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = D_B \end{cases} & \quad M := (\bar{x}, D_B) \\
\frac{\partial^2}{\partial a^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} = -\frac{n}{D_B} \\
\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} &= -\frac{3}{\sigma^4} \sum (x_i - a)^2 + \frac{n}{\sigma^2} = -\frac{3}{D_B^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 + \frac{n}{D_B} = -\frac{3n}{D_B} + \frac{n}{D_B} = -\frac{2n}{D_B} \\
\frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma} &= -\frac{2}{\sigma^3} (n\bar{x} - na) = 0 \\
d^2 L(M) &= -\frac{n}{D_B} (da)^2 + 2 \cdot 0 \cdot da d\sigma - \frac{2n}{D_B} (d\sigma)^2 = -\frac{n(da)^2 + 2n(d\sigma)^2}{D_B} < 0
\end{aligned}$$

Таким образом, M — точка максимума.

Примечание. Можно было посчитать по теореме Сильвестра.

Упражнение 1. $X \in B_p$. Найти оценку параметра p методом максимального правдоподобия.

Решение.

$$\begin{aligned}
L(\vec{X}, p) &= \prod_{i=1}^n (1-p)^{n-n\bar{x}} \cdot p^{n\bar{x}} \\
\ln L(\vec{X}, p) &= \sum_{i=1}^n \ln(1-p) \cdot \ln p \cdot (n-n\bar{x}) \cdot n\bar{x} = \ln(1-p) \cdot (n-n\bar{x}) + \ln p \cdot n\bar{x} \\
\frac{\partial \ln L}{\partial p} &= -\frac{n-n\bar{x}}{1-p} + \frac{n\bar{x}}{p} = 0 \\
n\bar{x}(1-p) + (n\bar{x}-n)p &= 0 \\
p &= \bar{x}
\end{aligned}$$

□

Упражнение 2. $X \in E_\alpha$. E_α — регулярное ли семейство? Найти $I(\alpha)$.

$$\text{Решение. } f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Носитель $C = (0, \infty)$. Можно выкинуть точку 0, т.к. она имеет меру 0.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_{\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln \alpha - \alpha x) = \frac{1}{\alpha} - x$$

Эта функция непрерывна $\forall \alpha \in C$.

$$I(\alpha) = \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(f_{\alpha}(X)) \right) = \mathbb{E} \left(X - \frac{1}{\alpha} \right) = \mathbb{E} (X - \mathbb{E} X) = \mathbb{D} X = \frac{1}{\alpha^2}$$

□

Упражнение 3. То же самое, но для $X \in E_{\frac{1}{\alpha}}$

Решение.

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_{\alpha}(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\ln \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha} \right) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha^2}$$

$$I(\alpha) = \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_{\alpha}(x) \right)^2 = \mathbb{E} \left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^4} \mathbb{E} (X - \alpha)^2 = \frac{1}{\alpha^4} \mathbb{D} X = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^* = \bar{x}$$

$$\mathbb{D} \alpha^* = \mathbb{D} \bar{x} = \frac{\mathbb{D} x}{n} = \frac{\alpha^2}{n}$$

$$\mathbb{D} \alpha^* \geq \frac{1}{nI(\alpha)}$$

$$\frac{\alpha^2}{n} = \frac{\alpha^2}{n}$$

Таким образом, оценка эффективная.

□

Упражнение 4. Для $X \in U(0, \theta)$ найти информацию фишера, проверить регулярность.

$\theta^* = 2\bar{X}^*$ — по м. моменты, $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ — ОМП.