Упражнение 1. Пусть $H, K \lhd G$ — две нормальные подгруппы в G. Докажите, что тогда коммутатор любых двух элементов из H и K принадлежит пересечению $H \cap K$.

Решение.

Лемма 1. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Доказательство. $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ ☐

$\lhd h \in H, k \in K$

$$[h, k] = hk(kh)^{-1} = \underbrace{\overbrace{h\,\underbrace{\overbrace{kh^{-1}}^{\in K}k^{-1}}_{\in H}}^{\in K}}_{\in H}$$

$[k, h]$ аналогично. ☐

Упражнение 2. Показать, что коммутант $[H, K]$ двух нормальных подгрупп $H, K \lhd G$ есть подгруппа в пересечении $[H, K] \subset H \cap K$. Всегда ли $[H, K] = H \cap K$?

Решение. Т.к. коммутатор любых двух элементов H и K принадлежит и H, и K, то по замкнутости H и K произведение коммутаторов также принадлежит и H и K. Кроме того, $1 = [1, 1] \in [H, K]$, следовательно, $[H, K] \subset H \cap K$, т.к. это $[H, K]$ это в точности все коммутаторы вида $[hk], h \in H, k \in K$.

$[H, K]$ не всегда $= H \cap K$, например если G абелева, то $[H, K] = \{e\}$, но очевидно не для каждых H и K выполнено $H \cap K = \{e\}$, например для $H = K = G$. ☐

Упражнение 3. Пусть H, K — две произвольные подгруппы. Рассмотреть отображение $\psi : H \times K \to HK$:

$$\psi(h, k) = hk$$

Найти $\psi^{-1}(x) = \{(h, k) \mid \psi(h, k) = x\}$ в явном виде. Получить из этого, что:

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Решение. Пусть $h_1k_1 = x$ и $h_2k_2 = x$.

$$x^{-1} = k_2^{-1}h_2^{-1}$$

$$e = xx^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$$

$$h_2h_1^{-1} = k_1k_2^{-1}$$

Т.к. $h_2h_1^{-1} \in H, k_1k_2^{-1} \in K, k_1k_2^{-1} = h_2h_1^{-1} =: a \in K \cap H$. Тогда:

$$h_2 = ih_1 \Rightarrow h_1 = i^{-1}h_2 \quad k_1 = ik_2$$

И, следовательно, любое $(h_1, k_1) : h_1k_1 = x$ записывается в виде $(i^{-1}h_2, ik_2)$, где h_2, k_2 — произвольное решение уравнения $hk = x$. Таким образом:

$$\psi^{-1}(x) = \{(i^{-1}h_2, ik_2) \mid i \in K \cap H\} \Rightarrow |\psi^{-1}(x)| = |K \cap H|$$

$$|H| \cdot |K| = \sum_{x \in HK} |\psi^{-1}(x)| = |HK| \cdot |H \cap K|$$

□

Упражнение 4. Показать, что среди 5 подгрупп порядков $483, 1309, 3059, 2783, 3451$ есть хотя бы две абелевы.

Решение. Разложим размеры групп на простые делители.

n	$p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$
483	$3 \cdot 7 \cdot 23$
1309	$7 \cdot 11 \cdot 17$
3059	$7 \cdot 19 \cdot 23$
2783	$11^2 \cdot 23$
3451	$7 \cdot 11 \cdot 29$

Группу размера 2783 больше рассматривать не будем. Размеры всех остальных групп разбиваются на простые числа в первой степени, следовательно, по первой теореме Силова у каждой группы есть силовские p–подгруппы порядка каждого такого простого числа. Кроме того, они циклические.

Утверждение. $G \cong H \times K \Leftrightarrow \begin{cases} G = HK \\ H \cap K = \{e\} \\ H, K \lhd G \end{cases}$, аналогично для большего числа подгрупп.

Найдём все такие группы, что их силовские подгруппы H, K, L нормальны, тогда

$$|HKL| = \frac{|H| \cdot |K| \cdot |L|}{|H \cap K \cap L|} = |G|$$

и, следовательно, каждому элементу g можно взаимно-однозначно сопоставить элемент из HKL, т.е. $G \cong HKL$ и по утверждению $G \cong H \times K \times L$, а прямое произведение является абелевой группой.

Из соображений предыдущего домашнего задания для нормальности силовской p_i-подгруппы $\mathcal{P}_{p_i}$ достаточно, чтобы $p_i \not\equiv 1 \mod p_j \ \forall j$.

483	3	7	23
3	0	3	3
7	1	$\dots$	
$\dots$			

1309	7	11	17
7	0	7	7
11	4	0	11
17	3	6	0

3059	7	19	23
7	0	7	7
19	5	0	19
23	2	4	0

Дальше нет смысла перебирать, т.к. для групп размера 1309 и 3059 искомое доказано. $\square$