Бесконечные произведения

Определение. $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n : \prod_N := \prod\limits_{n=1}^{N} p_n \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \prod_N = P$

- $P \in (0, +\infty) \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n$ сходится к P
- $P = +\infty \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к $+\infty$
- $P = 0 \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{+\infty} p_n$ расходится к 0
- $\nexists \lim \prod_n$: расходится

Пример.

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{4}\frac{8}{9}\frac{15}{16}\dots$$

$$1-\frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \qquad \prod_N = \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{2\cdot 4}{3^2}\frac{3\cdot 5}{4^2}\dots\frac{(N-1)(N+1)}{N^2} = \frac{N+1}{2N}$$

Пример. Формула Валлиса:

$$\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\dots = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)\frac{1}{2n}$$

Пример.

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{4}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

Определение. $\pi_m := \prod\limits_{n=m+1}^{+\infty} p_n$

Свойства:

1. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall m \;\; \pi_m$ сходится
2. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится. Тогда $\pi_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1$

3. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится $\Rightarrow p_n \to 1$

4. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ сходится

$$\pi_m = \lim_{N\to+\infty} \frac{\prod\limits_{n=1}^{N} p_n}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_n} = \frac{P}{\prod_m}$$

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty} p_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln p_n$$

Теорема 1. 1. $a_n > 0$ НСНМ. Тогда $\prod 1 + a_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится.

2. $\sum a_n$ сходится, $\sum a_n^2$ сходится $\Rightarrow \prod(1 + a_n)$ сходится.

Доказательство. 1. $\prod(1 + a_n)$ − сх. $\Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n)$ − сх. $\Leftrightarrow \sum a_n$ − сх.

2. $\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1 + a_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} o(a_n^2)}_{\text{абс.сх, т.к. } |o(a_n^2)| \le a_n^2}$$

$\square$

Лемма 1. $\prod(n, x) := \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt, x > 0$

Примечание. При $x \le 0$ интеграл расходится.

Тогда $\prod(n, x) = \frac{1\cdot 2\cdots n}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n)} n^x$

Доказательство.

$$\prod(n, x) \overset{t=ny}{=} n^x \int\limits_0^1 (1 - y)^n y^{x-1} dy =$$

$$= n^x \left((1 - y)^n \frac{1}{x} y^x \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1 - y)^{n-1} y^x dy \right) =$$

$$= n^x \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1 - y)^{n-1} y^x dy =$$

$$= n^x \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\int\limits_0^1 (1-y)^{n-2}y^{x+1}dy =$$

$$= \ldots = n^x \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\int\limits_0^1 y^{x+n-1}dy$$

$\square$

Лемма 2. $0 \le t \le n$. *Тогда*

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2e^{-t}}{n}$$

Доказательство. Т.к. $y = 1 + x$ — график касательной к e^x в $x = 0$ и экспонента выпуклая:

$$1 + y \le e^y$$

Произошла коллизия переменных, x стал y.

Заменим y на $-y$:

$$1 - y \le e^{-y}$$

Возведем в степень -1:

$$(1-y)^{-1} \ge e^y$$

Итого:

$$1 + y \le e^y \le (1-y)^{-1}$$

$$y := \frac{t}{n}$$

$$1 + \frac{t}{n} \le e^{\frac{t}{n}} \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-1}$$

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \ge e^{-t} \ge \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

По правому неравенству:

$$e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ge 0$$

Возведем левое неравенство в степень -1:

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \le e^t$$

$$e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) \le e^{-t}\left(1 - \left(1+\frac{t}{n}\right)^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t}\left(1 - \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$$

$$e^{-t}\left(1 - \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \overset{\text{неравенство Бернулли}}{\le} \frac{t^2}{n}e^{-t}$$

Примечание. Неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geq 1+an, a \geq -1$, в данном случае $a = -\frac{t^2}{n^2}$

В неравенстве Бернулли $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ предположительно в лемме $n \in \mathbb{N}$, на лекции этого не было сказано. $\square$

Теорема 2. Формула Эйлера:

При $x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{x(x+1)\cdots(x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

Примечание.

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Доказательство.

$$\Gamma(x) - \lim \Pi(n,x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt - \lim \int\limits_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\int\limits_0^{n} \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int\limits_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt}_{\mathrm{II}} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

$\mathrm{II} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, т.к. это “остаточный интеграл”, при $n \to +\infty$ интеграл “берется по нулевому промежутку”.

По лемме о приближении e пределом:

$$0 \leq \mathrm{I} \leq \int_0^n \frac{1}{n}t^2e^{-t}t^{x-1}dt \leq \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x+1}dt = \frac{\Gamma(x+2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\square$

Теорема 3. Формула Вейерштрасса.

При $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

где $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n)$ — постоянная Эйлера.

$\prod(1+a_k)$ сходится, если $\sum a_k$ сходится, поэтому распишем "$1+a_k$":

$$\text{“}1+a_k\text{”} = \left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = \left(1+\frac{x}{k}\right)\left(1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}+\dots\right) = 1-\frac{x^2}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\sum -\frac{x^2}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ очевидно сходится, кроме того, x может быть ≤ 0, сходимость не изменится. $\Gamma(x)$ не определено для $x<0$, но если рассматривать формулу Вейерштрасса как определение Γ, то для $x \in \mathbb{N}^-$ $\Gamma(x) = +\infty$, т.к. $\prod 1+a_k = 0$. Кроме того, можно подставлять и $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство будет на следующей лекции.

Лемма 3. *Об оценке нормы линейного отображения.*

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $A = (a_{ij})$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m$: $|Ax| \le C_A|x|$, где $C_a = \left(\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

$$|Ax|^2 = \sum_j\left(\sum_i a_{ij}x_j\right)^2 \overset{\text{КБШ}}{\le} \sum_i\left(\left(\sum_j a_{ij}^2\right)\left(\sum_j x_j^2\right)\right) = |x|^2\sum_i\sum_j a_{ij}^2$$

$\square$

Следствие. Линейное отображение непрерывно всюду:

$$|Ax - Ax_0| = |A(x-x_0)| \le C_a|x-x_0|$$

Теорема 4.
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $G : I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$
- $F(E) \subset I$
- $a \in IntE$
- F дифф. в a
- $F(a) \in IntI$
- G дифф. в $F(a)$

Тогда $G \circ F$ дифф. в a, $(G\circ F)'(a) = G'(F(a))F'(a)$

Доказательство. $b := F(a)$. По определению:

$$F(a+h) = \underbrace{F(a)}_{b} + \underbrace{F'(a)h + \alpha(h)|h|}_{k}$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$$

$$G(F(a+h)) = G(F(a)) + G'(F(a))(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k| =$$
$$= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|F'(a)h + \alpha(h)|h||$$

Надо доказать, что $\underbrace{G'(b)\alpha(h)|h|}_{\text{I}} + \beta(k)\underbrace{|F'(a)h + \alpha(h)|h||}_{\text{II}} = \gamma(h)|h|$.

$$|\text{I}| = |G'(b)\alpha(h)|h|| \le C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$$

$$|F'(a)h + \alpha(h)|h|| \le |F'(a)h| + |\alpha(h)||h| \le \underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{огр.}}\underbrace{|h|}_{\to 0}$$

$$k \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$|\text{II}| \le \underbrace{|\beta(k)|}_{\to 0}\underbrace{(C_{F'(a)} + |\alpha(h)|)}_{\text{огр.}}\underbrace{|h|}_{\to 0}$$

$$|\text{I}| + |\text{II}| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

□

Примечание. $(F \circ G \circ H)'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$

$F = (f_1, f_2 \dots f_l) \quad G = (g_1, g_2 \dots g_n) \quad H = G \circ F = (h_1 \dots h_n)$

$h_j(x_1 \dots x_m) = g_j(f_1(x_1 \dots x_m), f_2(x_1 \dots x_m) \dots f_l(x_1 \dots x_m))$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{df_1}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{df_2}{dx} + \dots \frac{\partial g}{\partial y_m}\frac{df_m}{dx}$$

Скипнуто

Лемма 4.

- $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- $a \in IntE$
- $\lambda : E \to \mathbb{R}$

- F, G, λ *дифф. в* a

Тогда $\lambda F, \langle F, G\rangle$ *— дифф. в* a*:*

1. $(\lambda F)'(a)(h) = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)h$
2. $\langle F, G\rangle'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

Здесь h *нигде не умножается, на него действуют операторы дифференциирования.*

Доказательство. 1. Для координатной функции $l = 1$:

$$\lambda f(a+h) - \lambda f(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) - \lambda(a)f(a) =$$
$$= (\lambda'(a)h)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + o(h)$$
$$|(\lambda'(a)h)(f'(a)h)| \leq C_{\lambda'(a)}|h|C_{f'(a)}|h|$$

2.
$$\langle F, G\rangle = \sum_{i=1}^{l} f_i g_i$$

По линейности всего и пункту 1:

$$\langle F, G\rangle'(a)h = \sum_i (f_i g_i)'(a)h \overset{1.}{=} \sum_i f_i'(a)hg_i(a) + f(a)g_i'(a)(h) = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$$

□

Примечание. $m = 1$:

$$\langle F, G\rangle'(a) = \langle F'(a), G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)\rangle$$

Теорема 5. Лагранжа для векторнозначных функций.

$F : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

Тогда $\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)|(b - a)$

Доказательство.

$$\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a)\rangle, t \in [a, b]$$
$$\varphi(a) = 0 \quad \varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$$
$$\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t)\rangle$$

Теорема Лагранжа *(для обычных функций)*:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)|^2 = (b-a)\langle F(b) - F(a), F'(c)\rangle \overset{\text{КБШ}}{\leq} (b-a)|F(b) - F(a)||F'(c)|$$

$\square$

Примечание. “$=$” не достигается, если ехать быстро и криво.

Пример. $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (\cos t, \sin t) \quad F'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$a := 0, b := 2\pi$

$$F(b) - F(a) = 0 \overset{?}{=} |F'(c)|(b-a)$$

Нет.