Упражнение 1. Рассмотрим группу диэдра D_6. Найти в ней силовскую 2-подгруппу $\mathcal{P}_2$ и силовскую 3-подгруппу $\mathcal{P}_3$ такие, чтобы $\mathcal{P}_3$ была нормальной. Рассмотрим множество $S = \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_2$:

$$S = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma \in \mathcal{P}_3, \tau \in \mathcal{P}_2\}$$

Рассмотрим отображение $\varphi : S \to D_6$, которое перемножает компоненты кортежа:

$$\varphi((\sigma, \tau)) = \sigma\tau$$

Ввести на S структуру группы, так чтобы отображение φ стало изоморфизмом.

Решение. $12 = 4 \cdot 3 \Rightarrow$ силовские 2-подгруппы имеют порядок $2^2 = 4$, силовские 3-подгруппы имеют порядок $3^1 = 3$.

Обозначение. Поворот на $60t$ ($60t \in [0, 360)$) градусов это ρ_t. Зафиксируем произвольную ось симметрии, тогда τ_t — отражение относительно оси, повернутой на $30t$ градусов относительно фиксированной оси ($30t \in [0, 180)$). Все сложения и вычитания в индексах операций выполняются по модулю 6.

Несложно заметить, что $\{e, \tau_0, \rho_3, \tau_3\}$ образуют подгруппу размера 4, пусть она будет $\mathcal{P}_2$.

$\mathcal{P}_3 = \{e, \rho_2, \rho_4\}$. Нормальность:

1. Поскольку повороты коммутируют между собой, $\rho_i \mathcal{P}_3 \rho_i^{-1} = \rho_i \rho_i^{-1} \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3$.
2. (a) e очевидно нормален
   (b) $\tau_i \rho_2 \tau_i^{-1} = \tau_{i-2}\tau_i = \rho_{-2} = \rho_4$
   (c) $\tau_i \rho_4 \tau_i^{-1} = \tau_{i-4}\tau_i = \rho_{-4} = \rho_2$

$e_S = (e, e)$ — очевидно.

Воспользуемся сопряжением:

$$(\sigma, \tau) \circ (\sigma', \tau') \coloneqq (\sigma\tau\sigma'\tau^{-1}, \tau\tau')$$

Интуитивное пояснение нахождения этой операции: нормальность $\mathcal{P}_3$ явно требуется не случайно, поэтому воспользуемся тем, что $\tau\sigma\tau^{-1} \in \mathcal{P}_3$ — тут есть 4 варианта навешивания штрихов. Для второго элемента результата вариантов два: $\tau\tau'$ и $\tau'\tau$ (отбрасывать τ или τ' не кажется содержательным). Мы ещё забыли σ' *(или σ, в зависимости от штрихов в сопряжении)*, поэтому домножим на него в первом элементе результата. После небольшого перебора находится искомая операция.

Примечание. То, что φ — изоморфизм, показано в задаче 3.

□

Упражнение 2. Рассмотрим группу порядка 35. Рассмотрим некоторую её силовскую 5-подгруппу $\mathcal{P}_5$. Показать, что она единственна.

Примечание. Показать, что количество n_5 силовских 5-подгрупп равно: $n_5 = 1$

Proof. $35 = 5 \cdot 7 \Rightarrow n_5 \equiv 1 \mod 5$ и $\frac{35}{5} \vdots n_5$ по третьей теореме Силова[1]. У 7 два делителя: 1 и 7. $7 \not\equiv 1 \mod 5, 1 \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow n_5 = 1$. □

Упражнение 3. Рассмотрим группу G порядка 119. Пусть $\mathcal{P}_7$ — её силовская 7-подгруппа. Показать, что $\mathcal{P}_7$ нормально. Показать, что фактор-группа $G/\mathcal{P}_7$ — циклическая группа. Показать, что группа G абелева.

Примечание. см. задачу 1

Решение. $119 = 7 \cdot 17 \Rightarrow |\mathcal{P}_7| = 7 \Rightarrow |G/\mathcal{P}_7| = \frac{|G|}{|\mathcal{P}_7|} = \frac{119}{7} = 17$ — простое число $\Rightarrow G/\mathcal{P}_7$ — циклическая группа.

Аналогично предыдущей задаче $n_7 \equiv 1 \mod 5, 17 \vdots n_7 \Rightarrow n_7 = 1$, т.е. $\mathcal{P}_7$ — единственная силовская 7-подгруппа. $|g\mathcal{P}_7 g^{-1}| = |\mathcal{P}_7|$, но $g\mathcal{P}_7 g^{-1}$ также является силовской 7-подгруппой. В силу единственности $g\mathcal{P}_7 g^{-1} = \mathcal{P}_7 \Rightarrow \mathcal{P}_7$ нормальна.

По первой теореме Силова $\exists \mathcal{P}_{17}$. $\mathcal{P}_7 \times \mathcal{P}_{17} \cong G$ по изоморфизму $\varphi : (a, b) \mapsto ab$, где операция на $\mathcal{P}_7, \mathcal{P}_{17}$ есть $(a, b) \circ (c, d) = (abcb^{-1}, bd)$:

$$abcd = \varphi(a, b)\varphi(c, d) \stackrel{?}{=} \varphi((a, b) \circ (c, d)) = \varphi((abcb^{-1}, bd)) = abcd$$

Т.к 7 и 17 простые числа, $\mathcal{P}_7$ и $\mathcal{P}_{17}$ циклические, а следовательно абелевы. Пусть $\mathcal{P}_7 = \langle g \rangle, \mathcal{P}_{17} = \langle h \rangle$. Покажем, что $g^i h^j = h^j g^i$, тогда:

$$(g^i, h^j) \circ (g^k, h^l) = (g^i h^j g^k h^{-j}, h^{j+l}) = (g^{i+k}, h^{j+l}) = (g^k, h^l) \circ (g^i, h^j)$$

, то есть $\mathcal{P}_7 \times \mathcal{P}_{17}$ абелева, тогда G абелева как изоморфная абелевой.

Для этого покажем $g^i h = hg^i$, тогда , тогда искомое будет верно по индукции ($g^i h^{j+1} = g^i h h^j = hg^i h^j = h^{j+1} g^i$)

$$\lhd a = g^i, b = hg^j \quad ab = g^i hg^j = h(h^{-1} g^i h) g^j = hg^k g^j = hg^{k+j} \quad ba = hg^{i+j}$$

, где $g^k = h^{-1} g^i h$, такое k существует по нормальности $\mathcal{P}_7$.

$$\begin{aligned} g^k &= h^{-1} g^i h \\ hg^k &= g^i h \end{aligned}$$

[1] Второй факт, кажется, не рассматривался на лекции, но он очевиден. Я взял его с википедии, страница “Теоремы Силова”.

$$
\begin{aligned}
g^{-i}hg^k &= h \\
(g^{-i}hg^k)^{17} &= h^{17} \\
(g^{-i}hg^k)^{17} &= e \\
g^{-i}hg^{k-i}hg^{k-i}\dots g^k &= e \\
(hg^{k-i})^{17} &= e
\end{aligned}
$$

Таким образом, $hg^{k-i} \in \mathcal{P}_{17}$[2], тогда $g^{k-i} = 1 \Rightarrow k - i \equiv 0 \mod 7 \Rightarrow ab = hg^{k+j} = hg^{i+j} = ba$ $\square$

[2] Точнее, $hg^{k-i} \in \varphi^{-1}(\mathcal{P}_{17})$