

# 1 Дискретная теория вероятности

**Определение.** Множество элементарных исходов обозначается  $\Omega$ . Это множество не более чем счётное в дискретной теории вероятности

**Определение.** Дискретная вероятностная мера (**дискретная плотность вероятности**) - отображение  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ ;  $\omega \mapsto$  вероятность исхода  $\omega$ .

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

*Пример.* Честная монета

$$\Omega = \{0, 1\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2} \quad p(\emptyset) = 0 \quad p(\{0, 1\}) = 1 - \text{достоверное событие}$$

*Пример.* Нечестная монета (*распределение Бернулли*)

$$\Omega = \{0, 1\} \quad p(0) = p \quad p(1) = q \quad p + q = 1$$

*Пример.* Честная игральная кость

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad p(1) = p(2) = \dots = p(6) = \frac{1}{6}$$

$$Even := \{2, 4, 6\} \quad Big := \{4, 5, 6\}$$

$$P(Even) = \frac{1}{2} \quad P(Big) = \frac{1}{2}$$

$$VeryBig := \{5, 6\} \quad P(VeryBig) = \frac{1}{3}$$

*Пример.* Честная колода карт

$$\Omega = \{(r, s) \mid r = 1 \dots 13, s = 1 \dots 4\} \quad p((r, s)) = \frac{1}{52}$$

*Пример.* Честная монета с ребром

$$\Omega = \{0, 1, \perp\} \quad p(0) = p(1) = \frac{1}{2} \quad p(\perp) = 0$$

*Пример.* Очень нечестная монета

$$p = 1 \quad q = 0$$

**Определение.** Событие — множество элементарных исходов

$$A \subset \Omega$$

$$P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

**Определение.**  $A$  и  $B$  — **независимые**, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(Even \cap Big) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(Even) \cdot P(Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow Even \text{ и } Big \text{ не независимы}$$

$$P(Even \cap VeryBig) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(Even) \cdot P(VeryBig) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow Even \text{ и } VeryBig \text{ независимы}$$

$$\triangleleft \Omega_1, p_1, \Omega_2, p_2 \quad \Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \quad P(\omega) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$$

**Определение.** События  $A_1 \dots A_n$  — **независимые в совокупности**, если

$$\forall I \subset \{1 \dots n\} \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

**Определение.** События  $A_1 \dots A_n$  — **независимые попарно**, если

$$\forall i, j \in \{1 \dots n\} \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

**Определение.** **Условная вероятность** — вероятность того, что произойдет  $A$ , если произошло  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(Big|Even) = \frac{P(Big \cap Even)}{P(Even)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$]A \text{ и } B \text{ — независимые}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$\triangleleft A_1, A_2, \dots, A_k$  — **разбиение** :  $\bigcap_{i=1}^k A_i = \Omega \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

**Теорема 1.1.** Формула полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

*Доказательство.*

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^k P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

□

**Теорема 1.2.** Формула Байеса:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i)}$$