

Конспект по дискретной математике

October 15, 2019

1 Оценка числа элементов в схеме

Теорема 1. B_1 и B_2 $\exists c \forall f \text{ size}_{B_1}(f) \leq c \cdot \text{size}_{B_2}$

Доказывалась ранее.

Теорема 2. О нижней оценке. Почти все функции требуют $\Omega(\frac{2^n}{n})$ элементов в своей записи. Альтернативная формулировка:

$$f(n) = \frac{2^n}{n} \quad g(n) : \frac{g}{f} \rightarrow 0 \quad F_g = \{\text{булевы функции, size} \leq g(n)\}$$

Тогда

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \rightarrow 0$$

Теорема 3. О верхней оценке.

$$\forall f - \text{бул. ф.} \exists \text{схема из ф.э., содержащая } O\left(\frac{2^n}{n}\right) \text{ элементов}$$

2 Линейная программа

Пример для $x_1 \oplus x_2$:

$$y_1 = \neg x_1$$

$$y_2 = \neg x_2$$

$$y_3 = x_1 \wedge y_2$$

$$y_4 = x_2 \wedge y_1$$

$$y_5 = y_3 \vee y_4$$

Линейная программа — нумерованное множество строк вида

$$(a, [i_1 \dots i_k]), \text{ где } a \in B(\text{базис}), i_j - \text{индексы переменных, } a : \mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B}$$

Теорема 4. Для $f \exists$ линейная программа длины $r \Leftrightarrow \exists$ схема из r функциональных элементов.

Оценка: сколько линейных программ над $\{\downarrow\}$ длины r ?

Первая строка: n^2 вариантов (выбор 2 объектов из n)

Вторая строка: $(n+1)^2$ вариантов (выбор 2 объектов из n и y_1)

\vdots

$(n+r-1)^2$

$$K_{n,r} = \prod_{i=0}^{r-1} (n+i)^2 \leq (n+r)^{2r}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq \log_2 (n+r)^{2r} = 2r \log_2 (n+r)$$

Лемма 1.

$$\exists \text{ функция: } size_B(f) \geq \frac{2^n}{2n}$$

Доказательство. Предположим противное:

$$r < \frac{2^n}{2n}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq 2r \log_2 (n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2n} \log_2 \left(n + \frac{2^n}{2n}\right) \leq \frac{2^n}{n} \log_2 2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{2^n} !!!$$

Обобщим для произвольного c :

$$r < \frac{2^n}{2cn}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq 2r \log_2 (n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2cn} \log_2 \left(n + \frac{2^n}{2cn}\right) \leq \frac{2^n}{cn} \log_2 2^n = \frac{2^n}{c}$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{\frac{2^n}{c}} !!!$$

□

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Доказательство.

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \rightarrow 0$$
$$\frac{2^{\frac{2^n}{c}}}{2^{2^n}} = 2^{2^n \cdot (\frac{1}{c} - 1)} \rightarrow 0$$

□

Теорема 5. $\forall f \exists$ схема из функ.эл. $O(\frac{2^n}{n})$