

wide, libelwidth=!, libelindent=0pt Рассмотрим табличную модель \mathfrak{M} с n истинностными значениями, и с выделенным значением T для истины. Покажите, что

$$\models \bigvee_{1 \leq i \neq j \leq n+1} (P_i \rightarrow P_j) \ \& \ (P_j \rightarrow P_i)$$

В частности, покажите, что в любой корректной модели если $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket$, то $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$; если $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T$, то $\llbracket \gamma \ \& \ \delta \rrbracket = T$; если $\llbracket \gamma \rrbracket = T$, то $\llbracket \gamma \vee \eta \rrbracket = \llbracket \eta \vee \gamma \rrbracket = T$.

$$(a) \ \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket \Rightarrow \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$$

Предположим обратное, т.е. $\exists \alpha, \beta : \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = A, \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket \neq T$.

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\rightarrow}(A, A) \neq T.$$

Но $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$, следовательно по корректности

$$\models \alpha \rightarrow \alpha, \text{ следовательно } f_{\rightarrow}(A, A) = T.$$

Противоречие.

$$(b) \ \llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \gamma \ \& \ \delta \rrbracket = T$$

$$f_{\&}(T, T) = T, \text{ т.к. } \vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \ \& \ (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow \models (\alpha \rightarrow \alpha) \ \& \ (\alpha \rightarrow \alpha) \Rightarrow T = f_{\&}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket) = f_{\&}(T, T)$$

$$(c) \ T = f_{\vee}(\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket) = f_{\vee}(T, A), \text{ т.к. } \vdash (\alpha \rightarrow \alpha) \vee \beta. \text{ Аналогично для симметричного случая.}$$

По принципу Дирихле $\exists i \neq j : \llbracket P_i \rrbracket = \llbracket P_j \rrbracket \Rightarrow \llbracket P_i \rightarrow P_j \rrbracket = T \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = T$

wide, libelwidth=!, libelindent=0pt Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.

Докажем это по индукции по количеству операторов в α

База: $n = 0$, т.е. $\alpha = P_i$ — переменная. Искомое верно по определению W .

Переход: 4 случая:

$$(a) \ \alpha = \neg \beta$$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_k : W_i \leq W_k \quad W_k \nVdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(b) $\alpha = \beta \ \& \ \gamma$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta, W_i \Vdash \gamma, \text{ по индукционному предположению } W_j \Vdash \beta, W_j \Vdash \gamma \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(c) $\alpha = \beta \vee \gamma$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow W_i \Vdash \beta \text{ или } W_i \Vdash \gamma, \text{ пусть это } \beta \text{ (иначе переименуем)}. \text{ Тогда } W_j \Vdash \beta \text{ по индукционному предположению } W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \alpha$$

(d) $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$

$$W_i \Vdash \alpha \Rightarrow \forall W_j : W_i \leq W_j \quad W_j \Vdash \beta \Rightarrow W_j \Vdash \gamma, \text{ по транзитивности } \leq \text{ выполняется } W_j \Vdash \alpha$$

Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.

$$P \vee \neg P;$$

Пусть P — одна переменная и модель Крипке $W_1 \nVdash P$, а $W_2 \Vdash P$ и $W_1 \leq W_2$. Тогда несложно заметить, что $W_1 \nVdash \neg P$, т.к. $\exists W_2 :$

$W_1 \leq$
 $W_2, W_2 \Vdash$
 P . Т.к.
 $W_1 \nVdash$
 $P, W_1 \nVdash$
 $\neg P$,
 получаем,
 что $W_1 \nVdash$
 $P \vee$
 $\neg P$

$\neg \neg P \rightarrow$
 P ;

$W_1 \nVdash \neg \neg P \rightarrow P$

Пусть
 $W_2 \Vdash$
 P и
 $W_1 \leq$
 W_2 , тогда
 искомое
 выполнено.

$P \vee$
 $\neg P \vee$
 $\neg \neg P \vee$
 $\neg \neg \neg P$;

$W_1 \nVdash$
 $P, W_2 \Vdash$
 $P, W_3 \Vdash$
 $\neg P, W_4 \nVdash \neg P$,
 все упорядочены

$((P \rightarrow$
 $Q) \rightarrow$
 $P) \rightarrow$
 P ;

$W_1 \Vdash$
 $(P \rightarrow$
 $Q) \rightarrow$

$P, W_1 \not\models$
 P . Второе
 выполнено
 по построению;
 придумаем,
 как выполнить
 первое.

$W_1 \not\models$
 $P \rightarrow$
 $Q \Leftarrow$
 $\begin{cases} W_2 \models P \\ W_2 \not\models Q \end{cases}$.
 Противоречий
 не возникло.

Ответ:
 $W =$
 $\{W_1, W_2\}, \leq =$
 $\{(W_1, W_2)\}$
 (плюс
 рефлексивность,
 $W_2 \models$
 P

$(A \rightarrow$
 $B) \vee$
 $(B \rightarrow$
 $C) \vee$
 $(C \rightarrow$
 $A);$

$W_1 \not\models$
 $(A \rightarrow$
 $B), W_1 \not\models$
 $(B \rightarrow$
 $C), W_1 \not\models$
 $(C \rightarrow$
 $A) \Rightarrow$
 $\exists W_2, W_3, W_4 :$
 $W_2 \models$
 $A, W_2 \not\models$
 $B, W_3 \models$
 $B, W_3 \not\models$

$C, W_4 \Vdash$
 $C, W_4 \nVdash$
 A . Если
 $\leq =$
 $\{(W_1, W_2), (W_1,$
 (плюс
 рефлексивность)
 то противоречия
 нет.

$\neg(\neg A \&$
 $\neg B) \rightarrow$
 $A \vee$
 $B;$

$W_1 \Vdash$
 $\neg(\neg A \&$
 $\neg B), W_1 \nVdash$
 $A \vee$
 $B \Rightarrow$
 $W_1 \nVdash$
 $A, W_1 \nVdash$
 B

Попробуем
 выполнить
 первое
 утверждение.
 $W_1 \nVdash$
 $\neg A \&$
 $\neg B \Rightarrow$
 $W_1 \nVdash$
 $\neg A$ или
 $W_1 \nVdash$
 $\neg B$.

Пусть
 $W_1 \nVdash$
 $\neg A$ без
 потери
 общности.
 $W_1 \nVdash$
 $\neg A \Leftrightarrow$
 $\exists W_2 :$
 $W_2 \Vdash$

A и

$W_1 \leq$

W_2

Ответ:

$W =$

$\{W_1, W_2\}, \leq =$

$\{(W_1, W_2)\}$

(плюс

рефлексивность)

$W_1 \not\models$

$A, W_1 \not\models$

$B, W_2 \Vdash$

$A.$

wviide, lviibelwviidth=!, lviibelviindent=0pt $(\neg A \vee$

$B) \rightarrow$

$(A \rightarrow$

$B);$

$\neg A \vee B, A, \neg A \vdash$

$\neg A$

$\neg A$

wviiide, lviiibelwviidth=!, lviiibelviindent=0pt $(A \rightarrow$

$B) \rightarrow$

$(\neg A \vee$

$B);$

$W_1 \not\models (A \rightarrow B) -$

Пусть

$W_2 \Vdash$

$A, W_2 \Vdash$

B и

$W_1 \leq$

W_2 , тогда

$W_2 \Vdash$
 $A \rightarrow$
 $B, W_1 \Vdash$
 $A \rightarrow$
 B пустотно
 и искомое
 выполнено.

wixde, lixbelwixdth=!, lixbelixndent=0pt $\neg \perp$.

$\frac{}{\perp \vdash \perp}$
 $\frac{}{\vdash \perp \rightarrow \perp}$
 $\frac{}{\vdash \neg \perp}$

wivde, livbelwivdth=!, livbelivndent=0pt Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{ \mathcal{W} \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in \mathcal{W} \text{ и } W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in \mathcal{W} \}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{ W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha \}$ (множество миров, где вынуждена формула α).

- (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.

Покажем, что выполняются три аксиомы топологии:

i. $\mathcal{W} = \bigcup_\alpha \mathcal{W}_\alpha \in \Omega$, где $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in \mathcal{W}$ и при этом $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$. Если $W_i \preceq W_j$, то т.к. $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$, то $W_j \in \mathcal{W}_\alpha$, а следовательно $W_j \in \mathcal{W}$.

ii. $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \in \Omega$, где $\mathcal{W}_i \in \Omega$

$\triangleleft W_i \in \mathcal{W} \Rightarrow W_i \in \mathcal{W}_\alpha \ \forall \alpha$. Если $W_i \preceq W_j$, то $W_j \in \mathcal{W}_\alpha \ \forall \alpha$ и следовательно $W_j \in \mathcal{W}$.

iii. $\emptyset \in \Omega, \mathfrak{W} \in \Omega$

Первое выполнено в силу пустотности утверждения (*vacuous, не знаю, как по-русски*). Второе очевидно выполнено.

- (b) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$ через \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β и покажите, что они также открыты.

$$\mathcal{W}_{\alpha \& \beta} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha \& \beta\} = \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \alpha\} \cap \{W_i \in \mathfrak{W} : W_i \Vdash \beta\} = \mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta.$$

$$\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta} = \mathcal{W}_\alpha \cup \mathcal{W}_\beta$$

Открытость тривиальна из того, что (\mathfrak{W}, Ω) — топологическое пространство.

- (с) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.

$$\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta} = (\mathfrak{W} \setminus (\mathcal{W}_\alpha \setminus \mathcal{W}_\beta))^\circ$$

- (d) Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров \mathcal{W}_α , где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α , что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).

Покажем, что $\mathcal{W}_\alpha \in \Omega \ \forall \alpha$ по индукции.

База: α есть одна переменная. Искомое выполнено по монотонности вынужденности.

Переход: 4 случая, разобранных в пунктах а,б,с.

Покажем, что $\forall Q \in \Omega \ Q = \mathcal{W}_\alpha$

Не покажем :(

Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание $\neg \neg P \rightarrow P$. Постройте соответствующую ему табличную модель.

$$\mathfrak{W} = \{W_1\}, \Omega = \{\emptyset, \{W_1\}\}$$

Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров \mathfrak{W} упорядочено как дерево: (а) существует наименьший мир W_0 ; (б) для любого $W_i \neq W_0$ существует единственный предшествующий мир $W_k : W_k \prec W_i$.

- (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
- (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
- (c) Покажите, что для любого натурального n найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с n мирами.

wviide, lviibelwviidth=!, lviibelviindent=0pt Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно*, если нет таких открытых множеств A и B , что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \emptyset$. Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связан в смысле теории графов.

Если граф не связан, то выберем одну КС, все миры в ней будут A , а остальные миры B . Несложно заметить, что $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$.

Если пространство не связно, то рассмотрим A и B из условия. Предположим, что граф связан, в частности есть ребро $a \rightarrow b$, где $a \in A, b \in B$ (или наоборот). Т.к. $a \leq b$, то $b \in A$, что противоречит $A \cap B = \emptyset$.

wviiide, lviiibelwviidth=!, lviiibelviindent=0pt Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).

wixde, lixbelwixdth=!, lixbelixndent=0pt Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} , гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и согласованные оценки $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$ и $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$: $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$.

- (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \preceq a_2$, то $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$.
- (b) Покажите, что если $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$.

$$\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = \varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$$

wxde, lxbelwxdth=!, lxbelxndent=0pt Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} . Всегда

ли можно построить гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$?

Пусть \mathcal{A} — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.

Пусть \mathcal{A} — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?

Не всегда, например в алгебре $\Gamma(1 \rightarrow 0)$ выполняется следующее: $1 + (1 \rightarrow 0) = 1$, а должно быть 1_Γ