Упражнение 1. Пусть H, K — некоторые группы (вообще говоря неабелевы). Рассмотрим $G = H \times K$ — их прямое произведение. Показать, что подгруппа $F = H \times \{e_K\}$ нормальна в G:

$$F = \{(h, e_K) \mid h \in G\} \lhd G$$

Решение.

$$(h_1, k) \circ (h_2, e_K) \circ (h_1^{-1}, k^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, k k^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, e_K) \in F$$

Упражнение 2. Пусть G — некоторая конечная абелева группа. Доказать, что существует набор циклических групп $H_1 \dots H_k$, таких что их произведение изоморфно G:

$$H_1 \times \cdots \times H_k \cong G$$

Решение. Факторизуем n = |G|:

$$n = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k}$$

По теореме Силова существуют p-подгруппы G порядков $p_i^{q_i}$, обозначим их \mathcal{P}_i . Т.к. G абелева, \mathcal{P}_i нормальны.

Докажем по индукции по k, что $G \cong \times_{i=1}^k \mathcal{P}_i$.

База. k = 1: очевидно.

Переход. По индукционному предположению для любой абелевой $G: |G| = n = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k}$ верно $G \cong \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{P}_i$.

$$\triangleleft G' : |G'| = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k} \cdot p_{k+1}^{q_{k+1}} = t \cdot p_{k+1}^{q_{k+1}} = t \cdot r.$$

Покажем, что $G'\cong H\times K$, где |K|=r, |H|=t. Тогда по индукционному предположению искомое будет верно.

Пусть
$$H = \{x \in G' \mid x^r = e\}, K = \{x \in G' \mid x^t = e\}.$$

Утверждение.
$$G\cong H\times K\Leftrightarrow egin{cases} G=HK\\ H\cap K=\{e\}\\ H,K\vartriangleleft G \end{cases}$$

Покажем все, что все три пункта этого утверждения выполнены для наших H, K, G':

1. По какой-то теореме из теории чисел $\exists a, b \in \mathbb{Z} : at + br = 1$.

$$\forall x \in G' \quad x = x^{at+br} = x^{at}x^{br}$$

$$(x^{at})^r = (x^{tr})^a = e^a = e \Rightarrow x^{at} \in H$$

$$(x^{br})^t = (x^{tr})^b = e^b = e \Rightarrow x^{br} \in K$$
 Итого $\forall x \in G' \quad x = \underbrace{x^{at}}_{\in H} \underbrace{x^{br}}_{\in K} \Rightarrow G' = HK$

Михайлов Максим 13.11.2021

2. $\lhd g \in H \cap K$ $g^t = e = g^r \text{, следовательно, порядок } g \text{ есть } \gcd(t,r) = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$

3. Очевидно, т.к. G' нормальна.

Таким образом, мы доказали, что G раскладывается на прямое произведение силовских p-подгрупп. Однако они необязательно циклические. Покажем, что каждая из таких подгрупп есть прямое произведение циклических.

Утверждение. $\triangleleft \mathcal{P}_i, |\mathcal{P}_i| = p_i^{q_i}$. GG to GРассмотрим произвольный элемент максимального порядка g. Тогда $\mathcal{P}_i \cong \{g\} \times K$, где K — подгруппа G.

Proof. Докажем по индукции по q_i .

База.
$$\mathcal{P}_i = \langle g \rangle \cong \langle g \rangle \times \langle e \rangle$$

Переход. Пусть g — элемент максимального порядка в \mathcal{P}_i и этот порядок равен a. Рассмотрим какую-нибудь подгруппу H, не содержащую a. Такую подгруппу можно получить как $\langle h \rangle$, где $h \notin \langle a \rangle$, $h \neq e$. Фактор-группа \mathcal{P}_i/H имеет порядок меньше \mathcal{P}_i , следовательно, для неё выполняется утверждение и $\mathcal{P}_i/H = \langle g' \rangle \times K'$.

С помощью прообразов естественного гомоморфизма фактор-группы искомое выполнено, технические детали здесь опущены.

Применяя это утверждение к K рекурсивно, получим искомое:

$$\mathcal{P}_i \cong \left\langle g_1^{(i)} \right\rangle \times K \cong \left\langle g_1^{(i)} \right\rangle \times \left(\left\langle g_2^{(i)} \right\rangle \times K' \right) \cong \left\langle g_1^{(i)} \right\rangle \times \left\langle g_2^{(i)} \right\rangle \times \cdots \times \left\langle g_{r_i}^{(i)} \right\rangle$$

Очевидно, что $\left\langle g_{j}^{(i)} \right\rangle$ есть циклическая группа и тогда:

$$G \cong \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} \mathcal{P}_i \cong \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} \underset{j=1}{\overset{r_i}{\times}} \left\langle g_j^{(i)} \right\rangle$$

Упражнение 3. Рассмотрим аффинные преобразования плоскости. Пусть T — множество всех трансляций, пусть R — множество всех поворотов вокруг фиксированной точки O (одной для всех поворотов). Рассмотрим группу $G = \langle T \cup R \rangle$, порождённую всеми трансляциями и поворотами вокруг O. Показать, что T нормальна в G. Показать, что $G = T \cdot R$:

$$G = \{\tau \ \rho \mid \tau \in T, \rho \in R\}$$

Решение. Очевидно T и R замкнуты.

Михайлов Максим 13.11.2021

Обозначение. $\tau \in T \leftrightarrow \langle x', y' \rangle$ — сдвиг на x' по оси x и на y' по оси y.

Рассмотрим действие τ ρ :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \langle x', y' \rangle \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' & y + y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x + x')\cos \theta + (y + y')\sin \theta & -(x + x')\sin \theta + (y + y')\cos \theta \end{pmatrix}$$

Рассмотрим действие ρ τ : после поворота на θ $\langle x', y' \rangle$ заменится на

$$\langle x'\cos\theta + y'\sin\theta, -x'\sin\theta + y'\cos\theta\rangle$$

и после сложения с повернутым вектором $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ мы получим тот же самый вектор, что и при τ ρ . Таким образом, множество $T \cup R$ абелево 1 .

Поворот на θ , сдвиг на $\langle x,y\rangle$ и поворот на θ' есть то же самое, что сдвиг на повернутое на θ $\langle x,y\rangle$ и поворот на $\theta+\theta'$.

Сдвиг на $\langle x, y \rangle$, поворот на θ и сдвиг на $\langle x', y' \rangle$ есть то же самое, что сдвиг на повернутое на $\langle x, y \rangle$ + повернутое на θ $\langle x', y' \rangle$ и поворот на θ .

Итого, $\langle T \cup R \rangle = T \cdot R \cup R \cdot T$, т.к. было показано, что нельзя поворотами и сдвигами получить что-либо кроме поворотов и сдвигов, а также тождественное действие $e \in T, e \in R \Rightarrow T = T \cdot e \Rightarrow T \subset T \cdot R$ и аналогично $R \subset T \cdot R$. Т.к. множество $T \cup R$ абелево, то $T \cdot R = R \cdot T \Rightarrow \langle T \cup R \rangle = T \cdot R$.

$$\triangleleft \rho \tau \rho^{-1}$$

Примечание. $\left\langle \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle x', y' \right\rangle$, используется, чтобы формулы не были слишком широкими.

$$\left\langle \begin{array}{c} x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{array} \right\rangle \left(\begin{array}{c} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right)^{-1} = \left\langle \begin{array}{c} x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{array} \right\rangle \left(\begin{array}{c} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right)$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} (x'\cos\theta + y'\sin\theta)\cos\theta - (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)\sin\theta \\ (x'\cos\theta + y'\sin\theta)\sin\theta + (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)\cos\theta \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} x' + y'\sin\theta\cos\theta - y'\cos\theta\sin\theta \\ y' + x'\cos\theta\sin\theta - x'\sin\theta\cos\theta \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} x' + y'\sin\theta\cos\theta - x'\sin\theta\cos\theta \\ y' + x'\cos\theta\sin\theta - x'\sin\theta\cos\theta \end{array} \right\rangle$$

Михайлов Максим 13.11.2021

¹ Абелево как группа, но ещё не доказано, что это группа.

Таким образом, T нормально в G, т.к. случай $\tau'\tau\tau'^{-1}\in T$ тривиален. $\hfill\Box$

Михайлов Максим 13.11.2021