

# Алгоритмы в математике (*теория чисел*)

Михайлов Максим

2 января 2022 г.

# Оглавление

Лекция 1	4 сентября	4
1	Вводная лекция . . . . .	4
Лекция 2	11 сентября	5
2	Алгебраические структуры . . . . .	6
2.1	Структуры с одним законом композиции . . . . .	6
2.2	Структуры с двумя законами композиции . . . . .	7
2.3	Основные алгебраические структуры . . . . .	7
Лекция 3	18 сентября	8
3	Внешний закон композиции . . . . .	8
3.1	Фактор-структуры . . . . .	9
Лекция 4	25 сентября	12
4	Структура групп . . . . .	12
4.1	Смежные классы . . . . .	14
Лекция 5	2 октября	17
4.2	Цепочки гомоморфизмов . . . . .	17
5	Действие группы . . . . .	19
5.1	Орбиты . . . . .	20
Лекция 6	9 октября	21
6	Действие группы на себя . . . . .	21
6.1	Сопряжение . . . . .	21
6.2	Левая трансляция . . . . .	23
7	Циклические группы . . . . .	23
Лекция 7	16 октября	24
8	Силовские группы . . . . .	25
Лекция 8	23 октября	28
8.1	Теоремы Силова . . . . .	28
Лекция 9	30 октября	30
9	Элементы теории категорий . . . . .	30
9.1	Определения . . . . .	30
9.2	Коммутативные диаграммы . . . . .	31
9.3	Функтор . . . . .	32
Лекция 10	6 ноября	34
9.4	Произведения и копроизведения . . . . .	34
Лекция 11	13 ноября	37

---

10 Свободные группы . . . . .	38
Лекция 12 4 декабря	41
11 Кольца . . . . .	41
Лекция 13 11 декабря	46
11.1 Делимость в кольце . . . . .	46

# Лекция 1

## 4 сентября

### 1 Вводная лекция

Хотя этот курс формально называется “теория чисел”, мы не будем рассматривать только теорию чисел. Теория чисел, разумеется, про числа, делители, простоту, алгоритм Евклида и т.д.. Однако, её можно обобщить на произвольные полугруппы, группы, кольца и поля. Поэтому мы будем рассматривать теорию чисел через призму общей алгебры.

Например, в кольце целых чисел есть понятие “простое число”. А в каких ещё кольцах есть “простые” элементы и каким условиям эти кольца удовлетворяют? Оказывается, кольцо многочленов содержит простые элементы и поэтому там применим алгоритм Евклида.

Мы также затронем теорию категорий (*терминальные объекты*), алгебраическую геометрию (*криптографию на эллиптических кривых*).

# Лекция 2

## 11 сентября

План курса:

- Полугруппа
- Группа
  - Гомоморфизм
  - Фактор-группа
  - Теорема о ядре
  - Произведение групп
- Кольцо
  - $\mathbb{Z}$
  - Остатки
  - Китайская теорема об остатках
  - Алгоритм Евклида
  - Кольцо многочленов
  - Алгебра многочленов
- Поле
  - Поля Галуа
  - Расширения Галуа
  - Алгебраические кривые
  - Диофантовы уравнения

Начиная с групп мы будем использовать формализм теории категорий.

## 2 Алгебраические структуры

### 2.1 Структуры с одним законом композиции

Пусть  $M$  — множество с законом композиции  $T : \forall x, y \in M \exists xTy \in M$ .

*Примечание.* Такой закон называется **внутренним**, т.к. оба его аргумента  $\in M$ .

*Обозначение.*  $x \cdot y, x \circ y, x + y, x^y, x * y$

Закон задает структуру на множестве.

**Определение.**  $e_L \in M : \forall x \in M e_L \cdot x = x$  — **левый нейтральный элемент**

$e_R \in M : \forall x \in M x \cdot e_R = x$  — **правый нейтральный элемент**

**Лемма 1.**  $\exists e_L, e_R \in M \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\text{def}}{=} e$

*Доказательство.*  $e_L = e_L \cdot e_R = e_R$  □

**Лемма 2.**  $e, e' — нейтральные элементы \Rightarrow e = e'$ .

*Доказательство.*  $e = e \cdot e' = e'$  □

**Определение.**  $p \in M : p \cdot p = p$  — **идемпотент**

**Определение.**  $z \in M : z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$  — **регулярный элемент (левый)**

**Определение.**  $x \in M, \exists e \in M$ . Элемент  $z \in M : z \cdot x = e$  — **левый обратный элемент к  $x$** .

$y \in M : x \cdot y = e$  — **правый обратный элемент к  $x$** .

**Лемма 3.** Если  $\exists y, z$ , то  $y = z \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}$  — **обратный элемент**.

*Доказательство.*  $z = z \cdot e = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = e \cdot y = y$ . Здесь мы воспользовались **ассоциативностью** закона композиции. □

**Определение.**  $\Theta_L : \forall x \in M \Theta_L \cdot x = \Theta_L$  — **поглощающий (слева) элемент**

$\Theta_R : \forall x \in M x \cdot \Theta_R = \Theta_R$  — **поглощающий (справа) элемент**

**Лемма 4.**  $\exists \Theta_L, \Theta_R \Rightarrow \Theta_L = \Theta_R \stackrel{\text{def}}{=} \Theta$

*Доказательство.*  $\Theta_L = \Theta_L \cdot \Theta_R = \Theta_R$  □

$\triangleleft x, y, z \in M, x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$  или  $x \cdot (y \cdot z)$ . Какое выбрать? Без ассоциативности непонятно. Поэтому мы требуем ассоциативность в рамках этого курса.

То же самое можно сказать для семейства элементов.

**Теорема 1** (об ассоциативном законе).  $1 \leq k \leq n \Rightarrow T_{i=1}^n x_i = (T_{i=1}^k x_i) T (T_{i=k+1}^n x_i)$

**Определение.**  $\triangleleft \forall x, y \in M \ xTy = yTx$ . Тогда  $T$  называется **коммутативным**.

**Определение.**  $\exists x, y \in M : xTy = yTx$ . Тогда  $x, y$  называются **перестановочными** относительно закона.

**Теорема 2** (об ассоциативном, коммутативном законе). Аргументы ассоциативного, коммутативного закона можно переставлять как угодно.

## 2.2 Структуры с двумя законами композиции

Пусть  $M$  — множество с законами композиции  $*$ ,  $\circ$ . Нас интересует случай, когда эти два закона взаимосвязаны.

Как воспринимать  $x * y \circ z$ ? Может иметь место **дистрибутивность**  $*$  относительно  $\circ$  (слева):  $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$\triangleleft e$  — нейтральный элемент по  $\circ$ .  $\triangleleft x * y = x * (e \circ y) = (x * e) \circ (x * y) \Rightarrow x * e = e$ . Поэтому из поля нельзя убрать ноль.

## 2.3 Основные алгебраические структуры

- Полугруппа — множество с ассоциативным законом
- Моноид — полугруппа с единицей
- Группа — моноид с обратным элементом для любого
- Абелева группа — группа с коммутативным законом
- Кольцо — два закона, по первому — абелева группа, по второму — полугруппа
- Поле — по двум законам группа

# Лекция 3

## 18 сентября

### 3 Внешний закон композиции

Пусть  $\Omega$  — множество.

**Определение.** Внешний закон композиции — бинарная операция  $g : \Omega \times M \rightarrow M$ :

$$\forall \alpha \in \Omega, x \in M \quad g : (\alpha, x) \mapsto \alpha \perp x \in M$$

*Пример.*  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ . Тогда  $g(\alpha, x) = \alpha \cdot x$ .

*Обозначение.*  $g(\alpha, x)$  обозначается как:

- $\alpha(x)$
- $\alpha x$
- $x^\alpha$

*Пример.*  $M = \mathbb{Z}$  — абелева группа по сложению.  $\triangleleft z \in \mathbb{Z}$ .

$$\underbrace{z + z + z + \cdots + z}_n = nz$$

Слева написано применение внутреннего закона  $n-1$  раз, а справа — применение внешнего закона. Не всегда внешний закон можно представить в виде внутреннего, иначе внешний закон был бы не содержательным.

Пусть  $M$  имеет внутренний закон композиции  $\top$ , множество  $\Omega$  имеет внешний<sup>1</sup> закон  $\perp$ .

*Обозначение.*

---

<sup>1</sup> Относительно  $M$ .



- $\top = \circ$
- $\perp(\alpha, x) = \alpha x$

**Определение.** Внешний закон согласован с внутренним законом, если:

$$\alpha(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y)$$

*Пример.*  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$

$\triangleleft$  алгебраические структуры  $(M, \circ)$ ,  $(\Omega, *)$  и  $\perp$  — внешний закон  $\Omega$  по  $M$ .

**Определение.**

$$\triangleleft \alpha, \beta \in \Omega, x \in M \quad (\alpha * \beta)x = \alpha(\beta(x))$$

Такой способ согласования мы называем **действием**  $\Omega$  на  $M$ .

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(x \circ y) &\stackrel{\text{согл.}}{=} (\alpha * \beta)(x) \circ (\alpha * \beta)(y) \\ &\stackrel{\text{действ.}}{=} \alpha(\beta(x)) \circ \alpha(\beta(y)) = \alpha(\beta(x \circ y)) \end{aligned}$$

*Пример.*  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot)$

$$\triangleleft n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2$$

$$(n \cdot m)(z_1 + z_2)$$

**Определение.** Пусть есть множества  $\{M, N \dots \Omega\}$  со своими внутренними законами композиции. Кроме того, некоторые из них могут являться носителями внешнего закона для других множеств. Этот набор множеств, внутренних и внешних законов есть алгебраическая структура.

### 3.1 Фактор-структуры

$\triangleleft M$ , бинарное отношение<sup>2</sup>  $R$

Свойства бинарного отношения:

- $\forall x \exists y : xRy$  — полнота
- $\forall x, y \ xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRz$  — евклидовость

**Определение.**  $R$  — отношение эквивалентности, если оно:

- Рефлексивно
- Симметрично

---

<sup>2</sup> Над  $M$ .

- Транзитивно

**Определение.**  $\triangleleft(M, R)$  — множество с отношением эквивалентности. Тогда  $M/R$  — фактор-множество, состоящее из классов эквивалентности  $M$  по  $R$ . Каждому  $x \in M$  сопоставляется класс эквивалентности  $[x] \in M/R$

*Пример.*  $\triangleleft M = \mathbb{N}$  с операцией сложения,  $x, y \in M, \triangleleft(x, y) \in M \times M$ .

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

Несложно заметить, что фактор-множество  $(M \times M)/\sim$  соответствует  $\mathbb{Z}$ :

**Определение.**  $x \in M, y \in M$

$$[x \circ y] \stackrel{?}{=} [x] * [y]$$

Здесь  $*$  — фактор-закон закона  $\circ$ .

*Пример.*

$$(a_1, b_1) \tilde{+} (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Чтобы рассмотреть  $\hat{+}$  — фактор-закон операции  $\tilde{+}$ , нужно показать, что для  $z = [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]$  верно  $z = z_1 \hat{+} z_2$

**Определение.** Закон  $\circ$  согласован с отношением  $R$ , если:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, x_1 \in M \quad x R x_1 \\ \forall y, y_1 \in M \quad y R y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x \circ y) R (x_1 \circ y_1)$$

**Теорема 3.** Если закон композиции согласован с отношением эквивалентности, то он совпадает со своим фактор-законом.

$$[x] * [y] \stackrel{\text{def}}{=} [x \circ y] = [x] \circ [y]$$

*Обозначение.*

$$M \cdot N := \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$$

*Пример.*

- $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M \times M$
- $(c_1, d_1) \sim (a_1, b_1) \Leftrightarrow c_1 + b_1 = d_1 + a_1$
- $(a_1, b_1) \rightarrow [(a_1, b_1)] = z_1 \ni (c_1, d_1)$
- $(a_2, b_2) \rightarrow [(a_2, b_2)] = z_2 \ni (c_2, d_2)$
- $(a_1, b_1) \tilde{+} (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \rightarrow [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)] = z$

Выполнено ли  $(c_1 + c_2, d_1 + d_2) \in z$ ?

$$c_1 + c_2 + (b_1 + b_2) = d_1 + d_2 + (a_1 + a_2)$$

$$a_1 + d_1 = b_1 + c_1$$

$$a_2 + d_2 = b_2 + c_2$$

Таким образом, наша операция согласована.

# Лекция 4

## 25 сентября

### 4 Структура групп

**Определение (группа).**  $G$  — множество с внутренним законом  $\cdot$ , таким что:

1.  $\forall x, y, z \in G \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2.  $\exists e \in G : \forall x \in G \quad e \cdot x = x \cdot e = x$
3.  $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$

*Пример.* Пусть  $S$  — множество,  $G$  — группа. Будем обозначать множество отображений  $S \rightarrow G$  как  $M(SG)$ . Наделим его структурой группы:

$$f, g \in M(SG) \Rightarrow \begin{cases} (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \\ f_e(x) = e_G \end{cases}$$

**Определение.**  $G, G, \sigma : G \rightarrow G'$ .

$\sigma$  — гомоморфизм группы  $G$  в группу  $G'$ , если:

$$\forall x, y \in G \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \sigma(e_G) = e_{G'}$$

**Лемма 5.**  $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e_{G'} &= \sigma(e_G) = \sigma(xx^{-1}) = \sigma(x)\sigma(x^{-1}) \\ \sigma(x)^{-1}e_{G'} &= \sigma(x)^{-1}\sigma(x)\sigma(x^{-1}) \\ \sigma(x)^{-1} &= \sigma(x^{-1}) \end{aligned}$$

□

*Обозначение.*

- $\text{hom}(G \rightarrow G')$  — множество всех гомоморфизмов  $G \rightarrow G'$ .
- $\text{End}(G) := \text{hom}(G \rightarrow G)$ .

**Определение.**  $\sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G')$  называется **изоморфизмом**, если:

$$\chi \in \text{hom}(G' \rightarrow G) : \sigma \circ \chi = \text{id}_{G'}, \chi \circ \sigma = \text{id}_G$$

*Обозначение.*

- $\text{Iso}(G \rightarrow G')$  — множество всех изоморфизмов
- $\text{Aut}(G) := \text{Iso}(G \rightarrow G)$  — множество **автоморфизмов**

**Лемма 6.**  $\sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G'), \chi \in \text{hom}(G' \rightarrow G'') \Rightarrow \zeta = \chi \circ \sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G'')$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in G \quad \zeta(x \cdot y) &= (\chi \circ \sigma)(x \cdot y) \\ &= \chi(\sigma(x \cdot y)) \\ &= \chi(\sigma(x) \cdot \sigma(y)) \\ &= (\chi \circ \sigma)(x) \cdot (\chi \circ \sigma)(y) \\ &= \zeta(x) \cdot \zeta(y) \end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $\text{Aut}(G)$  — группа относительно  $\circ$ .

**Определение.**  $G$  — группа.

$\triangleleft S_G = \{S_i\}_{i \in I}$ :

$$\forall g \in G \quad a = \prod_{j \in J \subseteq I} S_j$$

$S_G$  тогда называется **множеством образующих группы  $G$** .

**Лемма 7.** Мы проиграли, вернемся к этой лемме позже.

**Определение** (ядро гомоморфизма).

$$\ker \sigma := \{g \in G : \sigma(g) = e\}$$

**Лемма 8.** Если  $\ker \sigma = \{e\}$ , то  $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$ , т.е.  $\sigma$  инъективно.

*Доказательство.*

$$\sigma(x)\sigma(y^{-1}) = \sigma(y)\sigma(y^{-1}) = e_{G'}$$

Таким образом,  $x$  есть обратный к  $y^{-1}$ , т.е.  $x = y$ . □

**Определение** (образ гомоморфизма).

$$\text{Im } \sigma = \{g' \in G' : \exists g \in G : \sigma(g) = g'\}$$

**Лемма 9.**  $\text{Im } \sigma = G' \Rightarrow \sigma$  сюръективно.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } \sigma = G' \\ \ker \sigma = \{e\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma - \text{изоморфизм}$$

**Определение.** Подгруппой  $H$  группы  $G$  называется подмножество элементов  $G$ , на котором групповой закон  $G$  индуцирует структуру группы.

**Определение.** Несобственные подгруппы:  $\{e_G\}, G$ .

Иначе подгруппа **собственная**.

*Пример.*  $\sigma \in \text{hom}(G, G')$ . Тогда  $\ker \sigma$  — подгруппа  $G$ ,  $\text{Im } \sigma$  — подгруппа  $G'$ .

## 4.1 Смежные классы

Пусть  $G$  — группа,  $H$  — подгруппа  $G$ .

**Определение.**  $gH, g \in G$  — левый смежный класс группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

**Лемма 10.** Пусть  $\exists z : z \in gH, z \in g'H$ . Тогда  $gH = g'H$

*Доказательство.*  $z = gh, z = g'h' \Rightarrow gh = g'h' \Rightarrow g = g'h'h^{-1}$

$$gH = (g'h'h^{-1})H = g'h'h^{-1}H$$

□

**Лемма 11.**

$$\forall g, g' \in G \quad |gH| = |g'H|$$

*Доказательство.* Отображение  $h \mapsto gg^{-1}h$  есть биекция между  $gH$  и  $g'H$  □

**Обозначение.**  $(G : H)$  — индекс группы  $G$  по  $H$  — количество смежных классов.

*Примечание.* В общем случае это кардинальное число, но мы будем рассматривать только конечные индексы.

$(G : 1)$  — количество элементов  $G$  (порядок группы).

**Лемма 12.**

$$(G : 1) \cdot (G : H)$$

**Теорема 4.**  $H$  — подгруппа  $G$ ,  $K$  — подгруппа  $H$ .

$$(G : H)(H : K) = (G : K)$$

*Доказательство.*

$$G = \bigcup_i g_i H \quad H = \bigcup_j h_j K$$

$$G = \bigcup_i \bigcup_j g_i h_j K$$

$$g_i h_j K = g'_i h'_j K \Rightarrow \begin{cases} g_i H = g'_i H \\ h_j K = h'_j K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_i = g'_i \\ h_j = h'_j \end{cases}$$

□

**Лемма 13** (проигранная). Дано:  $G, G'$  — группы,  $S_G$  — множество производящих  $G$ ,  $f : S_G \rightarrow G'$ .

Если  $\exists \tilde{f} \in \text{hom}(G, G')$ , то  $\tilde{f}|_{S_G} = f \Rightarrow \tilde{f}$  единственно.

$$\begin{array}{ccc} S_G & \xrightarrow{f} & G' \\ & \nearrow \tilde{f} \in \text{hom}(G, G') & \\ G & & \end{array}$$

*Доказательство.*  $\triangleleft g \in G, g' := \tilde{f}(g)$

$$g = \prod_{i \in I} S_i \quad \tilde{f}(g) = \tilde{f}\left(\prod_{i \in I} S_i\right) = \prod_{i \in I} \tilde{f}(S_i) = \prod_{i \in I} f(S_i)$$

□

**Определение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется **нормальной** или **инвариантной**, если  $\forall g \in G \quad gH = Hg$ . Аналогично можно определить через  $H = g^{-1}Hg$

*Обозначение.*  $H \triangleleft G$

**Лемма 14.**

- $G$  — группа

$$\bullet \sigma \in \text{hom}(G, G')$$

Тогда  $\ker \sigma$  — нормальная подгруппа  $G$ .

*Доказательство.*  $H := \ker \sigma$

$$\sigma(e) = \sigma(g^{-1}g) = \sigma(g^{-1})\sigma(g) = \sigma(g^{-1})e\sigma(g) = \sigma(g^{-1})\sigma(H)\sigma(g) = \sigma(g^{-1}Hg) = e_{G'}$$

Таким образом,  $g^{-1}Hg \subset H$ . Заменяем  $g$  на  $g^{-1}$ :  $H \subset g^{-1}Hg \Rightarrow H = g^{-1}Hg$ .  $\square$

$\triangleleft G$  — группа,  $H$  — подгруппа  $G$ .

Рассмотрим отношение  $\sim$ :  $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in H$ . Это отношение эквивалентности:

1.  $g_1g_1^{-1} = e \in H$
2.  $g_1g_2^{-1} \in H \Rightarrow (g_1g_2^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$
3.  $g_1g_2^{-1} \in H, g_2g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1g_3^{-1} \in H$

Кроме того,  $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1H = g_2H$ , поэтому  $\sim$  это отношение эквивалентности на смежных классах, будем обозначать фактор-множество как  $G/H$ .

Для каких  $H$  выполняется следующее: если  $x_1 \sim y_1$  и  $x_2 \sim y_2$ , тогда  $(x_1x_2) \sim (y_1y_2)$ ?  $x_1H = y_1H, x_2H = y_2H$ . Тогда  $H$  — нормальная подгруппа.

$\triangleleft G/H, H \triangleleft G, \cdot : [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ . Свойства “ $\cdot$ ”:

1.  $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$
2.  $\exists [e] : [x][e] = [e][x] = [x], [e] = H$
3.  $[x]^{-1} = [x^{-1}]$

*Примечание.*  $G/H$  — фактор-группа.

$$\triangleleft \sigma : \ker \sigma = H$$

Тогда пусть  $\sigma : G \rightarrow G/H, g \mapsto [g]$ .



# Лекция 5

## 2 октября

**Определение.**

- $G$  — группа
- $S \subset G$  — подмножество элементов  $G$

**Нормализатор  $S$ :**  $N_S := \{g \in G : gS = Sg\}$

**Определение.**

- $G$  — группа
- $x \in G$
- $S \subset G$

**Централизатор  $x$ :**  $Z_x := \{g \in G : gx = xg\}$

$Z_S := \{g \in G : \forall y \in S \quad gy = yg\}$

$Z_G$  — центр группы  $G$ .

*Пример.* В группе  $GL(n, \mathbb{R})$  инвертируемых матриц  $n \times n$  центр — единичная матрица.

### 4.2 Цепочки гомоморфизмов

**Определение.**

- $G, G', G''$  — группы
- $\sigma \in \text{hom}(G, G')$
- $\chi \in \text{hom}(G', G'')$

Рассмотрим цепочку  $G \xrightarrow{\sigma} G' \xrightarrow{\chi} G''$ . Такая последовательность называется **точной**, если  $\ker \chi = \text{Im } \sigma$ .



$$(G/K)/(H/K) = G/H$$

## 5 Действие группы

**Определение.**

- $G$  — группа
- $S$  — множество

$G$  действует на  $S$ , если существует отображение

$$T : G \times S \rightarrow S$$

, при этом  $(g_1 g_2)s = g_1(g_2 s)$

*Примечание.*

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2} \quad T_e = \text{id} \quad T_{g^{-1}} = T_g^{-1}$$

$G$  действует на  $S$  как группа перестановок.

**Определение.**

- $s \in S$
- $G$  — группа

$G_s := \{g \in G : gs = s\}$  — стабилизатор элемента  $s$ .

*Пример.*  $\mathbb{Q}$  действует на  $\mathbb{R}^3$  через  $T$ .

**Лемма 15.**  $G_s \subset G$  — подгруппа

*Доказательство.*  $g_1, g_2 \in G_s \Rightarrow g_1 s = s, g_2 s = s$

$$(g_1 g_2) \cdot s = g_1(g_2 s) = g_1 s = s$$

□

$\triangleleft G/G_s$  — фактор-множество.

**Лемма 16.**  $s, s' \in S, s' = xs, x \in G$ . Тогда  $G_{s'} = xG_s x^{-1}$  и  $G_{s'}$  вместе с  $G_s$  называются сопряженными

*Доказательство.*

$$g' s' = s' = xs = xgs = xgx^{-1} s' \\ g' = xgx^{-1}$$

□

**Определение.** Преобразование вида  $xAx^{-1}$ , где  $A \subset G$  — подгруппа  $G$ , называется сопряжением.

**Лемма 17.**  $gG_s, g'G_s \in G/G_s$

$$gs = g's \Leftrightarrow gG_s = g'G_s$$

## 5.1 Орбиты

**Определение.**  $\mathcal{O}_G(S) := \{gs : g \in G\}$  — орбита

**Лемма 18.**  $|\mathcal{O}_G(S)| = (G : G_S)$

*Доказательство.* Из предыдущей леммы. □

Остаётся на следующую лекцию:

1.  $S = \bigsqcup_{S \in C} \mathcal{O}_G(S)$ , где  $C$  — непересекающиеся орбиты
2. Действия группы на себя

## Лекция 6

### 9 октября

**Лемма 19.** Орбиты элементов  $\mathcal{O}_G(s)$  и  $\mathcal{O}_G(s')$  или непересекаются или совпадают.

*Доказательство.* Пусть орбиты пересекаются, т.е.  $\exists s_0 : s_0 \in \mathcal{O}_G(s)$  и  $s_0 \in \mathcal{O}_G(s')$ . Тогда  $\exists g \in G : s_0 = gs, \exists g' \in G : s_0 = g's'$

$$\mathcal{O}_G(s') = \mathcal{O}_G(g's') = \mathcal{O}_G(s_0) = \mathcal{O}_G(gs) = \mathcal{O}_G(s)$$

Таким образом,  $\mathcal{O}_G(s') = \mathcal{O}_G(s)$ . □

*Примечание.*

$$S = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(S_i)$$

*Примечание.* Если  $S$  — конечно, то

$$|S| = \sum_{i \in I} |\mathcal{O}_G(s_i)|$$

## 6 Действие группы на себя

Пусть  $S_G = G$ , т.е. группа действует сама на себя.

### 6.1 Сопряжение

Пусть  $x \in G$ .  $\sigma : x \mapsto \sigma_x : \sigma_x(y) = xyx^{-1}$

Пусть  $y, y' \in G$ .

$$\sigma_x(y \cdot y') = xy'y^{-1} = xyx^{-1}xy'x^{-1} = \sigma_x(y)\sigma_x(y')$$

$$\sigma_x(e) = e$$

Таким образом,  $\sigma_x$  — гомоморфизм.

$$\sigma_x^{-1} = \sigma_{x^{-1}}$$

$$\sigma_x^{-1} \circ \sigma_x = \text{id}_G$$

$$\sigma_x^{-1} \circ \sigma_x(y) = G_x^{-1}(xyx^{-1}) = x^{-1}xyx^{-1}x = y \quad \forall y$$

$$\sigma_x \in \text{Aut}(G) \quad \forall x$$

$$\triangleleft \sigma : G \rightarrow \text{Aut}(G).$$

$$\sigma_x \sigma_y = \sigma_{xy} \quad \sigma_e = \text{id}_G$$

Таким образом,  $\sigma \in \text{hom}(G, \text{Aut}(G))$

$$\ker \sigma = \{x \in G : \forall y \quad \sigma_x y = y\}$$

$$xyx^{-1} = y$$

$$xy = yx$$

Таким образом,  $\ker \sigma = Z_G$

Рассмотрим  $G$  как множество.  $A \subset G$  — подмножество  $G$ .

$$\triangleleft \sigma_x(A) = xAx^{-1} \subset G$$

$$\triangleleft \sigma_x(H) = xHx^{-1} \subset G \text{ — подгруппа } G.$$

Пусть  $S$  — множество подгрупп группы  $G$ ,  $H$  — подгруппа  $G$ , рассмотрим  $G/H$ .

Пусть  $x \in G$ .

$$G_x := \{g \in G : \sigma_g(x) = x\} = Z_x$$

$$\mathcal{O}_G(x) = \{\sigma_g(x), g \in G\}$$

$$|\mathcal{O}_G(x)| = (G : Z_x)$$

$$G = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(x_i)$$

$$\boxed{|G| = \sum_{i \in I} (G : Z_{x_i})}$$

$$G_H = \{g \in G : \sigma_g H = H\} \stackrel{\text{def}}{=} N_H$$

$$G = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(H_i) \quad |G| = \sum_{i \in I} (G : N_i)$$

## 6.2 Левая трансляция

Пусть  $x \in G$ .  $\tau : x \mapsto \tau_x : y \mapsto xy$ .

$\tau_x(yu') = xyu'$  — не гомоморфизм.

Пусть  $H \subset G$  — подгруппа  $G$ . Сопряжение не определяло действие, а трансляция определяет:  $\triangleleft G/H : [g] = gH$ , тогда  $\tau_x(gH) = xgH = g'H \in G/H$ .

## 7 Циклические группы

**Определение.** Группа  $G$  называется **циклической**, если  $\exists g : \forall h \in G \ h = g^m = \underbrace{g \cdot g \cdots}_m$ .

*Обозначение.*  $G = \langle g \rangle$

**Определение.** Показатель элемента  $g$  в  $G = \langle g \rangle$  это число  $m > 0$ , такое что  $g^m = e$ .

**Определение.** Показатель группы  $\langle g \rangle$  — число  $k > 0$ , такое что  $\forall x \in G \ x^k = e$ .

*Пример.*  $(\mathbb{Z}, +)$  — бесконечная циклическая группа.

Если  $H$  — подгруппа  $\mathbb{Z}$ , то  $H = \{mz\}_{m \in \mathbb{Z}}$ ,  $z := \min\{t \in \mathbb{Z} \mid t > 0\}$

# Лекция 7

## 16 октября

Пусть  $G$  — произвольная группа,  $\langle \sigma : \mathbb{Z} \rightarrow G, \sigma : z \mapsto a^z$

$$\text{Im } \sigma = \langle a \rangle \subset G$$

Есть два случая:

1.  $\ker \sigma = \{0\} \Rightarrow \text{Im } \sigma \cong \mathbb{Z}$  и  $G$  содержит бесконечную циклическую подгруппу.
2.  $\ker \sigma \neq \{0\} \Rightarrow \ker \sigma = H \subset \mathbb{Z} \Rightarrow H = \{nh\}_{n \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \mathbb{Z}/H = \{[0], [1], [2] \dots [h-1]\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}/H \xrightarrow{\sigma^*} G \\ & \searrow \sigma & \nearrow \end{array}$$

Разложили  $\sigma = \sigma^* \circ \varphi$ , где  $\varphi$  — канонический гомоморфизм.

Тогда  $\sigma^*$  отображает  $\mathbb{Z}/H$  в  $a^0, a^1, a^2 \dots a^{h-1}$ , где  $a^h = a^0 = e$ .

*Утверждение.* Все элементы различны, т.е.  $\langle s, r : a^s = a^r \rangle$ . Тогда  $s = r$ .

*Доказательство.*  $a^{s-r} = e \Rightarrow s - r = kh = 0 \Rightarrow s = r$ . □

**Определение.** Пусть  $G$  — циклическая группа  $a^0, a^1 \dots a^{h-1}$ . Тогда  $h$  — **период** элемента  $a$ . Это не то же самое, что показатель: показатель имеет вид  $qh$ .

**Лемма 20.**  $G$  — конечная  $\Rightarrow$  период  $\forall g \in G$  делит порядок группы.

*Доказательство.* Пусть  $d$  — период  $g \in G$ , тогда  $g^d = e$ .

$\langle H = \langle g \rangle$  — подгруппа  $G$  и  $|H| = d$

$$|G| = (G : 1) = (G : H)(H : 1) = (G : H)|H|$$

□



**Лемма 21.** Пусть  $|G| = p$  — простое число,  $\triangleleft g \in G, g \neq e$ .

Тогда  $G = \langle g \rangle$ .

*Доказательство.*  $\triangleleft g \in G, g \neq e$

$\triangleleft H = \langle g \rangle \Rightarrow |H| \neq 1$ , т.к.  $e \in H, g \in H$ .

$p = (G : 1) = (G : H)(H : 1)$ . Но тогда  $(G : H) = 1$  по простоте  $p$ , следовательно  $G = \langle g \rangle$   $\square$

**Лемма 22.**  $G$  — циклическая группа. Тогда

1.  $H \subset G$  — циклическая
2.  $\sigma(G)$  — циклическая, если  $\sigma \in \text{Hom}(G)$

*Доказательство.*  $G$  — циклическая группа

1. (a)  $G$  — бесконечная циклическая группа.

Тогда  $G \cong \mathbb{Z}$  — знаем все подгруппы (они циклические).

- (b)  $G$  — конечная циклическая группа.

$\triangleleft H \subset G$  — подгруппа.

$|G| : |H| \Rightarrow |H|$  конечна.

$\triangleleft a \in H \Rightarrow a = g^n \Rightarrow a^k = g^{kn} \Rightarrow H = \langle a \rangle$

2. Пусть  $G = \langle g \rangle$ , тогда  $\sigma(g)$  — образующая для  $\sigma(G)$  и значит  $\sigma(G) = \langle \sigma(g) \rangle$

$\square$

**Лемма 23.**  $G$  — бесконечная циклическая группа. Тогда у  $G$  есть две образующие:  $g$  и  $g^{-1}$ .

## 8 Силовские группы

**Определение.** Группа называется  $p$ -группой, если ее порядок является степенью простого числа  $p$ .

**Определение.** Подгруппа  $H$  называется  $p$ -подгруппой группы  $G$ , если  $H \subset G$ ,  $H$  —  $p$ -группа.

**Определение.**  $H$  называется силовой подгруппой  $G$ , если  $H$  —  $p$ -подгруппа  $G$  и  $|H| = p^n$ , где  $p^n$  — максимальный порядок в группе.

Пусть  $n$  — порядок группы  $G$ . Мы знаем<sup>1</sup>, что  $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots$ , где  $p_i$  — простые.  $n_i$  — максимальная степень  $p_i$ , которая встречается в  $n$ , т.е.  $n \not\equiv p_i^{n_i+1}$ . Т.к. порядок подгруппы делит порядок группы, то найдутся подгруппы, порядки которых соответствуют этому разложению.

**Лемма 24.**

- $|G| = m$
- Показатель  $G = n$
- $G$  — коммутативная группа

Тогда порядок  $G$  делит некоторую степень показателя:

$$\exists k : n^k \vdots m$$

*Доказательство.* По индукции (по порядку группы)

$\triangleleft H \triangleleft G, H = \langle b \rangle$ . Т.к. показатель  $G = n, b^n = e$ .

$\triangleleft |G/H|$

Так как  $n \vdots (H : 1)$  и по индукции  $n^k \vdots (G : H)$ , то  $n^{k+1} \vdots (G : 1) = (G : H)(H : 1)$  □

**Лемма 25.**

- $G$  — конечная абелева группа
- $|G| \vdots p$  ( $p$  — простое)

Тогда  $\exists H \subset G : |H| = p$ .

*Доказательство.*  $|G| \vdots p$  по условию.

$\triangleleft H = \langle x \rangle, x^n = e$

Пусть показатель группы  $G$  есть  $n, m$  — порядок группы.

$$m \vdots p \Rightarrow \exists s : m = sp$$

Некоторая степень показателя делится на порядок группы:  $n^k \vdots m \Rightarrow \exists z : n^k = z \cdot m = zsp$

$$x^{zs} = y, y^p = e \Rightarrow H' = \langle y \rangle \text{ — искомая группа}$$

□

---

<sup>1</sup> Но докажем потом.

**Теорема 5.**

- $G$  — конечная группа
- $|G| \vdots p$  ( $p$  — простое)

Тогда в  $G$   $\exists$  силовская подгруппа.

*Доказательство.* По индукции.

Если  $|G| = p$ , искомое очевидно.

Пусть искомое доказано для всех порядков меньших  $G$ .

Пусть  $H \subset G \Rightarrow (G : 1) = (G : H)(H : 1)$

1. Если  $|H| \vdots p$ , то силовская подгруппа для  $G$  будет силовской подгруппой для  $H$ , которая существует по индукционному предположению.
2. Если  $(G : H) \vdots p$

Пусть  $G$  действует на себя.

$$(G : 1) = |Z_G| + \sum_x (G : G_x)$$

Так как  $(G : 1) \vdots p$  и  $\forall x : (G : G_x) \vdots p \Rightarrow |Z_G| \vdots p$ , т.е. центр нетривиальный. Кроме того, центр абелев, следовательно по лемме 25  $\exists H \subset Z_G$  - абелева подгруппа, такая что  $|H| = p$ .

Т.к.  $H \subset G$ ,  $H \triangleleft G \Rightarrow G/H$ . В  $G/H$  существует силовская подгруппа  $p^{n-1}$  по индукционному предположению, назовём ее  $K'$ .

$|K'| = p^{n-1}$ ,  $|K'H| = p^{n-1} \cdot p = p^n$ , при этом  $K'H$  — подгруппа, т.к.  $H$  — нормальная подгруппа.  $K'H$  — искомая подгруппа.

□

# Лекция 8

## 23 октября

### 8.1 Теоремы Силова

*Примечание.*

- $G$  — произвольная группа
- $H, K$  — подгруппы  $G$
- $H \subset N_K = \{g \in G : gKg^{-1} = K\}$

Тогда:

1.  $HK$  — подгруппа  $G$

*Доказательство.*  $\triangleleft h_1k_1, h_2k_2 \in HK$

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1k_1h_2k_2 = \underbrace{h_1h_2}_h \underbrace{k_1k_2}_k$$

□

2.  $K \triangleleft HK \Rightarrow \exists HK/K$

$\triangleleft \varphi : HK \rightarrow HK/K$  — канонический гомоморфизм

$\ker \varphi = K$ , т.к.  $1 \cdot K \cdot K = K^2 = K$ , что есть нейтральный элемент фактор-группы.

Мы запутались, но каким-то образом  $HK/K \cong H/H \cap K$ .

**Не дописано**

**Теорема 6** (первая теорема Силова). Каждая  $p$ -подгруппа содержится в силовой  $p$ -подгруппе.

*Доказательство.* Пусть  $G$  — группа,  $S$  — множество силовских  $p$ -подгрупп и  $G$  действует на  $S$  сопряжением.

$$\langle \mathcal{P} \in S, S = S_G$$

$$S_0 := O_G(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \{g\mathcal{P}g^{-1}\}_{g \in G} = \{\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2 \dots \tilde{\mathcal{P}}_m\}$$

Сколько элементов в  $S_0$ ?  $(G : \mathcal{P}) \not\equiv p \Rightarrow |S_0| \not\equiv p$

Пусть  $H$  —  $p$ -подгруппа  $G$ , действующая на  $S_0$  сопряжением.

*Примечание.*  $|H| = p^k \Rightarrow \forall \tilde{H} \subset H \quad |\tilde{H}| \not\equiv p$

$$|S_0| = \sum_C (H : \tilde{H}_x)$$

Т.к.  $H$  —  $p$ -подгруппа, остатки от деления  $(H : \tilde{H}_x)$  либо  $\equiv p$ , либо  $= 1$ . Т.к.  $|S_0| \not\equiv p$ , существуют слагаемые, не делящиеся на  $p$  и по предыдущему утверждению они равны единице. Рассмотрим одну из таких групп,  $\tilde{H}'$ . Ей соответствует  $\mathcal{P}'$ , причём  $O_H(\mathcal{P}') = \mathcal{P}', \forall h \in H \quad h\mathcal{P}'h^{-1} = \mathcal{P}' \Rightarrow h\mathcal{P}' = \mathcal{P}'h$ , а следовательно  $H \subset N_{\mathcal{P}'}$ .

Так как  $HK/K \cong H/H \cap K, H\mathcal{P}'/\mathcal{P}' \cong H/(H \cap \mathcal{P}') \Rightarrow \mathcal{P}'H \cong \mathcal{P}' \Rightarrow H \subset \mathcal{P}' \quad \square$

**Теорема 7** (вторая теорема Силова). Силоские  $p$ -подгруппы сопряжены.

**Теорема 8** (третья теорема Силова). Число силоских  $p$ -подгрупп  $\equiv 1 \pmod p$ .

Не дописано

# Лекция 9

## 30 октября

### 9 Элементы теории категорий

Теория категорий позволит нам обобщить уже известные нам утверждения и позволит их применять в других алгебраических структурах, например кольцах.

#### 9.1 Определения

**Определение.**  $\mathcal{C}$  — категория:

1. Коллекция объектов  $\text{Obj}(\mathcal{C}) : A, B, C \dots X, Y$
2. Множество морфизмов  $\text{Arr}(\mathcal{C}) : f, g, h, \varphi, \chi, \psi$   
 $\triangleleft A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}), A \xrightarrow{f} B, f \in \text{Mor}(A, B)$
3.  $\text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) = \text{Mor}(A, C)$

**Аксиомы категории:**

1. Множества морфизмов не пересекаются:  $f \in \text{Mor}(A, B), f \in \text{Mor}(A', B') \Leftrightarrow A = A', B = B'$
2.  $f \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(B, C), h \in \text{Mor}(C, D) \Rightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
3.  $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \exists \text{id}_A \in \text{Mor}(A, A) : \begin{cases} \forall f \in \text{Mor}(A, B) & f \circ \text{id}_A = f \\ \forall g \in \text{Mor}(B, A) & \text{id}_A \circ g = g \end{cases}$

**Определение.**  $f \in \text{Mor}(A, B)$  — **изоморфизм**, если  $\exists g \in \text{Mor}(B, A)$ :

$$\begin{cases} g \circ f = \text{id}_A \\ f \circ g = \text{id}_B \end{cases}$$

**Определение. Автоморфизм** — изоморфизм из объекта в него же, т.е.  $f \in \text{Mor}(A, A)$ ,  $f$  — изоморфизм  $\Rightarrow f \in \text{Aut}(A)$

**Определение. Эндоморфизм** — морфизм из объекта в него же,  $\text{End}(A) = \text{Mor}(A, A)$

**Лемма 26.**  $\text{End}(A)$  — моноид

**Лемма 27.**  $\text{Aut}(A)$  — группа

Категории, которые мы будем рассматривать:

- $\text{Set}$  — категория множеств.
- $\text{Mon}$  — категория моноидов.
- $\text{Grp}$  — категория групп.
- $\text{Set}_G$  — категория множеств, на которые действует группа.

$\triangleleft \text{Set}_G = \mathcal{C}, G$  — группа.

Пусть  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}), A = A_G, B = B_G$

$\text{Mor}(A, B)$  — отображения множеств.

Действие группы это  $\sigma : x \mapsto \sigma_x$ , где  $x \in G, \sigma_x$  — перестановка множества  $A$ .

## 9.2 Коммутативные диаграммы

Пусть  $\mathcal{C}$  — категория. Рассмотрим категорию  $\zeta : \text{Obj}(\zeta) = \text{Arr}(\mathcal{C})$ . Пусть  $f \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(A', B')$ . Рассмотрим  $(\varphi, \psi) \in \text{Mor}(f, g)$ , такие что  $\varphi, \psi \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ A' & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

Если свойство  $g \circ \varphi = \psi \circ f$  выполнено, то эта диаграмма называется **коммутативной**.

Рассмотри категорию  $\mathcal{C}, A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , рассмотрим  $\mathcal{C}_A : f \in \text{Obj}(\mathcal{C}_A) \quad f : X \rightarrow A \quad \forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , то есть категорию стрелок в некоторый отмеченный элемент  $A$ .

$\triangleleft f : X \rightarrow A, g : X' \rightarrow A, \varphi \in \text{Arr}(\mathcal{C}_A), \varphi \in \text{Mor}(f, g), \varphi : X \rightarrow X'$ , тогда  $g \circ \varphi = f$ , т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & A & \end{array}$$

### 9.3 Функтор

**Определение.** Рассмотрим категории  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . **Ковариантный функтор** — отображение, которое:

- Каждому  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  сопоставляет  $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ .
- Каждому  $f \in \text{Mor}(A, B)$ <sup>1</sup> сопоставляет  $F(f) \in \text{Mor}(F(A), F(B))$

со следующими аксиомами:

1.  $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$
2.  $\forall f \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(B, C) \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

*Пример.*  $\mathcal{C} := \text{Grp}$ ,  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  — группы,  $\text{Arr}(\mathcal{C})$  — гомоморфизмы групп.

Рассмотрим стирающий функтор  $F$ , который группам сопоставляет множества, а гомоморфизмам — отображения.

**Лемма 28.** Функтор переводит изоморфизм в изоморфизм.

**Определение.** Рассмотрим категории  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . **Контравариантный функтор** — отображение, которое:

- Каждому  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  сопоставляет  $F'(A) \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ .
- Каждому  $f \in \text{Mor}(A, B)$ <sup>2</sup> сопоставляет  $F'(f) \in \text{Mor}(F'(B), F'(A))$

со следующими аксиомами:

1.  $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \quad F'(\text{id}_A) = \text{id}_{F'(A)}$
2.  $\forall f \in \text{Mor}(A, B), g \in \text{Mor}(B, C) \quad F'(g \circ f) = F'(f) \circ F'(g)$

*Обозначение.*  $F$  — ковариантный функтор,  $F'$  — контравариантный функтор.

$\triangleleft \mathcal{A}, A \in \text{Obj}(\mathcal{A}), F_A : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$

$$\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \quad F_A(X) = \text{Mor}(A, X)$$

$$\forall f \in \text{Mor}(X, X') \quad F_A(f) = \text{Mor}(A, X) \rightarrow \text{Mor}(A, X'), \varphi \mapsto f \circ \varphi$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \nwarrow \varphi & \nearrow f \circ \varphi \\ & A & \end{array}$$

$$F_A^c : \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$$

$$\forall Y \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \quad F_A^c(Y) = \text{Mor}(Y, A)$$

<sup>1</sup>  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A}), B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$

<sup>2</sup>  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A}), B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$



$$\forall g \in \text{Mor}(Y', Y) \quad F_A^c(g) : \text{Mor}(Y', A) \rightarrow \text{Mor}(Y, A)$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{g} & Y' \\ & \searrow \psi & \swarrow g \circ \psi \\ & A & \end{array}$$

Построенные функторы — представляющие<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Кажется, у АС ошибка — такие функторы называются представимыми.

# Лекция 10

## 6 ноября

### 9.4 Произведения и копроизведения

**Определение.** Произведением  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  и  $B \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  называется тройка  $\{P, f, g\}$ , где:

- $P \in \text{Obj}(\mathcal{A})$
- $f, g \in \text{Arr}(\mathcal{A})$

, такая что если  $\varphi : A \rightarrow C, \psi : B \rightarrow C$ , тогда  $\exists$  морфизм  $h$ , такой что  $\varphi = f \circ h, \psi = g \circ h$ , т.е. следующая диаграмма<sup>1</sup> коммутует:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow \varphi & \downarrow h & \searrow \psi & \\ A & \xleftarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

*Пример.*  $\mathcal{A} = \text{Set}$

Тогда категориальное произведение  $S_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), S_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  есть  $\{S_1 \times S_2, \text{proj}_1, \text{proj}_2\}$ .

Обобщение: (прямое)<sup>2</sup> произведение  $\{A_i\}_{i \in I}$  это  $(P, \{f_i\}_{i \in I})$ , удовлетворяющее условию:

$$\forall C \in \text{Obj}(\mathcal{A}) : g_i : C \rightarrow A_i \quad \exists h : g_i = f_i \circ h$$

*Примечание.* Произведение двух объектов обозначается как  $A \times B$ , произведение нескольких как  $\prod_{i \in I} A_i$

**Определение.** Копроизведение  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  и  $B \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  — тройка  $\{P', f, g\}$ , где:

<sup>1</sup> На лекции диаграмма была представлена в другом виде, но категорист во мне взвыл в этот момент.

<sup>2</sup> Иногда говорят “прямое”, обычно — нет.

- $P' \in \text{Obj}(\mathcal{A})$
- $f, g \in \text{Arr}(\mathcal{A})$

, такая что

$$\forall C \in \text{Obj}(\mathcal{A}), \varphi : A \rightarrow C, \psi : B \rightarrow C \exists h : P' \rightarrow C : \varphi = h \circ f, \psi = h \circ g$$

, т.е. следующая диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow \varphi & \uparrow h & \nwarrow \psi & \\ A & \xrightarrow{f} & P' & \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

*Пример.* Пусть  $\mathcal{A} = \text{Set}$ ,  $S_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ ,  $S_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ . Пусть  $U$  — копроизведение  $S_1$  и  $S_2$ . Тогда  $U = (\{1\} \times S_1) \cup (\{2\} \times S_2)$ <sup>3</sup>.

Обобщение: копроизведение  $\{A_i\}_{i \in I}$  это  $(P', \{f_i\}_{i \in I})$ , удовлетворяющее условию:

$$\forall C' \in \text{Obj}(\mathcal{A}) : g_i : A_i \rightarrow C' \exists h : P' \rightarrow C' : g_i = h \circ f_i$$

**Определение.** Инициальным объектом в  $\mathcal{A}$  называется  $I \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ , такой что:

$$\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \exists ! \varphi : I \rightarrow A$$

**Определение.** Терминальным объектом в  $\mathcal{A}$  называется  $T \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ , такой что:

$$\forall B \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \exists ! \varphi : B \rightarrow T$$

*Примечание.* Терминальный и инициальный объект универсальны.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\varphi} & I' \\ & \xleftarrow{\varphi'} & \end{array}$$

По определению:

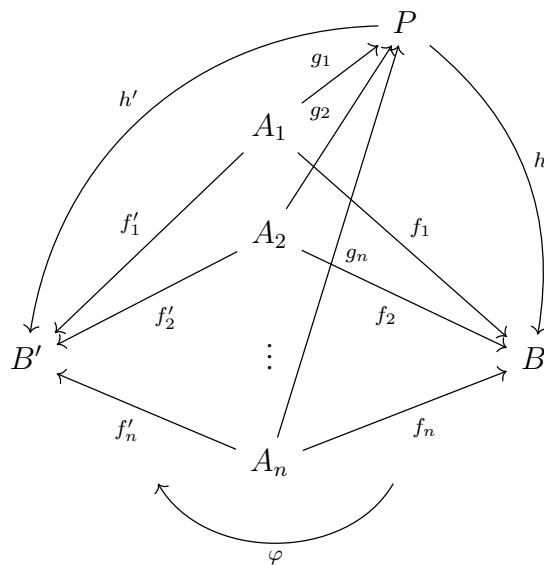
$$\varphi \circ \varphi' : I' \rightarrow I'$$

$$\varphi' \circ \varphi : I \rightarrow I$$

---

<sup>3</sup> Это дизъюнктивное объединение.

Рассмотрим категорию  $\mathcal{A}$ ,  $\{A_i\}, B, B' \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  и категорию  $\zeta$ , где  $\{f_i : A_i \rightarrow B\} \in \text{Obj}(\zeta)$  и  $\{f'_i : A_i \rightarrow B'\} \in \text{Obj}(\zeta)$ .



$\varphi : B \rightarrow B'$  — морфизм в  $\mathcal{A}$ , но с другой стороны это и морфизм в  $\zeta$ , т.к.  $f'_i = \varphi \circ f_i$ .

$P$  — копроизведение.

В  $\zeta$   $\{g_i : A_i \rightarrow P\}$  является универсальным объектом.

# Лекция 11

## 13 ноября

Пусть  $\{G_i\}$  — группы. Рассмотрим объект  $\prod_i G_i$  — декартово произведение этих групп как множеств.

Пусть  $G_i = \{x'_i, x''_i \dots\}$ ,  $\prod_i G_i = \{(x_i, x_j \dots)\} = \{(x_i)\}$

**Лемма 29.**  $\prod_i G_i$  может быть наделено структурой группы.

$\triangleleft (x_i), (y_i) \in \prod_i G_i$  и  $(x_1, x_2 \dots x_n \dots) * (y_1, y_2 \dots y_n \dots) = (x_1 y_1, x_2 y_2 \dots x_n y_n \dots)$

*Доказательство.* Проверим аксиомы группы. Они все очевидны из аксиом групп  $G_i$ .  $\square$

$\triangleleft \lambda_j : G_j \rightarrow \prod_i G_i$   $\lambda_j(x) = (e_1, e_2 \dots x \dots e_n \dots)$  и обратное к нему отображение  $\text{proj}_j$

**Лемма 30.**  $(\prod_i G_i, \{\text{proj}_k\})$  — произведение в  $\text{Grp}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\tilde{G} \in \text{Obj}(\text{Grp})$ ,  $\{g_i : \tilde{G} \rightarrow G_i\}$ . Нужно показать, что  $\exists! h : \tilde{G} \rightarrow \prod_i G_i$  с  $f_i \circ h = g_i$ .

$\triangleleft y \in \tilde{G}, y \xrightarrow{h} (y_i) \xrightarrow{\text{proj}_i} y_i$

$g_i(y) = (y)_i$ , поэтому  $f_i \circ \underbrace{h(y)}_{x_1 \dots x_i \dots} = \underbrace{g_i(y)}_{x_i}$ . Тогда  $h(y)$  существует, и это может быть только  $(g_1(y), g_2(y) \dots g_n(y) \dots)$ , из этого следует единственность.



□

Лемма 31 (критерий прямого произведения).

- $G$  — группа
- $H, K$  — подгруппы  $G$
- $H \cap K = \{e\}$
- $\forall x \in H \ y \in K \ xy = yx$
- $HK = G$

Тогда и только тогда  $H \times K \cong G$

Доказательство.  $\triangleleft \psi : (x, y) \mapsto xy, \psi \in \text{hom}(H \times K, G)$

Сюръективность очевидна, т.к.  $HK = G$ .

Рассмотрим  $(x, y)$ , такие что  $\psi((x, y)) = e$ . Тогда  $xy = e \Rightarrow x = y^{-1}$ .  $y \in K \Rightarrow y^{-1} \in K \Rightarrow x \in K$ , но кроме того  $x \in H \Rightarrow x \in H \cap K$ , следовательно,  $x = e$ . Аналогично  $y = e$ .

Т.к.  $\psi$  — биективный гомоморфизм,  $\psi$  — изоморфизм.

□

Обобщение:

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \cong G \Leftrightarrow \begin{cases} H_{j+1} \cap (H_1 H_2 \dots H_j) = \{e\} \\ H_i H_j = H_j H_i \quad \forall i, j \end{cases}$$

## 10 Свободные группы

Рассмотрим  $S$  — множество.

$\triangleleft g : S \rightarrow g(S) \subset G$ , где  $g(S)$  — множество образующих группы  $G$ .

**Определение.** Отображение  $g : S \rightarrow G$  порождает группу  $G$ , если образ  $g$  порождает  $G$ .

**Определение.**  $S$  — множество образующих<sup>1</sup> группы  $G$ , если  $\forall y \in G \ y = \prod_i x_i$ , где  $x_i \in S$  или  $x_i^{-1} \in S$

Рассмотрим два отображения  $f : S \rightarrow F, g : S \rightarrow G$ , где  $f(S)$  порождает  $F$  и  $g(S)$  порождает  $G$ .



По доказанной ранее лемме 13 существует не более одного гомоморфизма  $g_*$ .

Рассмотрим категорию  $\zeta$ , объекты которой являются парами вида  $(F, f)$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : F \rightarrow G$ , тогда  $\varphi \in \text{Arr}(\zeta)$ :  $(F, f) \xrightarrow{\varphi} (G, g)$ .

**Определение.** Свободная группа, определяемая множеством  $S$  — инициальный объект в категории  $\zeta$ .

**Теорема 9.** Для всякого множества  $S$  существует определяемая им свободная группа  $(F, f)$ , при этом:

1.  $f$  инъективен.
2.  $f$  порождает  $F$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $S$  конечно.

$\triangleleft T$  — счётное множество. Пусть на нём мы можем заводить групповые структуры, множество всех таких структур назовём  $\Gamma$ . Пусть тогда  $T_\gamma$ , где  $\gamma \in \Gamma$  — реализация группы на  $T$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi$  между  $S$  и  $T_\gamma$ . Т.к. множество образующих можно по-разному вкладывать в  $T_\gamma$ . Чтобы это фиксировать, скажем, что  $\varphi : S \rightarrow T_{\gamma, \varphi}$ .  $T_{\gamma, \varphi} \in \text{Obj}(\zeta)$ , а  $T_\gamma \in \text{Grp}$ .

Рассмотрим также множество  $M_\gamma = \{\varphi\}$  — множество отображений  $S$  в  $T_\gamma$ .<sup>2</sup>

$$F_0 := \prod_{g \in \Gamma} \prod_{\varphi \in M_\gamma} T_{\gamma, \varphi}$$

$F_0 \in \text{Grp}$ <sup>3</sup>, поскольку это произведение элементов  $\text{Obj}(\text{Grp})$ . Рассмотрим  $f_0 : S \rightarrow F_0$ :  $S \mapsto (\varphi_1(S)_{\gamma_1}, \varphi_2(S)_{\gamma_1} \dots \varphi'_1(S)_{\gamma_2}, \varphi'_2(S)_{\gamma_2} \dots)$ .

<sup>1</sup> Также называется множеством порождающих.

<sup>2</sup>  $M_\gamma = \text{Arr}(-, T_\gamma)$

<sup>3</sup> Мы игнорируем тот факт, что произведение это тройка из объекта и двух морфизмов, нас интересует только объект.

Покажем, что  $\forall g : S \rightarrow G \exists! g_* : F_0 \rightarrow G$ , такой что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & F_0 & \\ f_0 \nearrow & & \downarrow g_* \\ S & & G \\ g \searrow & & \end{array}$$

Пусть  $g(S)$  порождает  $G$ . Т.к.  $S$  конечно,  $|G| \leq |T|$ , т.к.  $T$  счётно.

Рассмотрим  $\bar{G} = G \times \mathbb{Z}$ . Надо, чтобы  $|G \times \mathbb{Z}| = |T|$  и тогда будет существовать биекция между  $G \times \mathbb{Z}$  и  $T$ , тогда  $\exists \gamma \in \Gamma : G \times \mathbb{Z} \cong T_\gamma$  с изоморфизмом  $\lambda : G \times \mathbb{Z} \rightarrow T_\gamma$ .

$$S \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} G \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} T_\gamma$$

$$\psi := \lambda \circ h \circ g \in M_\gamma \quad S \xrightarrow{\psi} T_{\gamma, \psi}$$

$$\psi_* := \text{proj}_G \circ \lambda^{-1} \circ \text{proj}_{\gamma, \psi}$$

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\text{proj}_{\gamma, \psi}} & T_{\gamma, \psi} \\ \downarrow \psi_* & & \downarrow \lambda^{-1} \\ G & \xleftarrow{\text{proj}_G} & G \times \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & F_0 & & & \\ f_0 \nearrow & & \downarrow \text{proj}_{\gamma, \psi} & & \\ S & & T_{\gamma, \psi} & & \\ & & \downarrow \lambda^{-1} & & \\ & & G \times \mathbb{Z} & & \\ g \searrow & & \downarrow \text{proj}_G & & \\ & G & & \swarrow \psi_* & \end{array}$$

Рассмотрим  $f : S \rightarrow F$ ,  $f(S) = F$ . Для единственности  $g_*$  мы сужаем его на  $g_*|_F$ . Весь трюк заключается в том, что в  $F_0$  много лишнего, т.к. там много одинаковых элементов.

$f$  инъективно, т.к. всех  $\varphi \in M_\gamma$  найдётся инъективное.

Если  $S$  несчётно, ты мы не знаем что делать.

Если  $S$  счётно, то все то же самое, но за  $T$  возьмём  $S$  и тогда  $G \times \mathbb{Z} \cong T \underbrace{\times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots}_{\text{нужное количество } \mathbb{Z}}$   $\square$



# Лекция 12

## 4 декабря

### 11 Кольца

**Определение.** Множество  $R$  с бинарными операциями  $+$  и  $\cdot$  называется **кольцом**, если:

1.  $(R, +)$  — коммутативная группа
2.  $(R, \cdot)$  — моноид
3. Дистрибутивность справа и слева:

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= ab + ac \\(a + b) \cdot c &= ac + bc\end{aligned}$$

*Пример.*

- $R = \mathbb{Z}$
- $R = \mathbb{R}_{n \times n}$

**Определение.** Кольцо  $R$  **коммутативно**, если  $ab = ba$ .

*Примечание.* Мы будем рассматривать в основном коммутативные кольца. Если не сказано иначе, то кольцо коммутативно.

*Примечание.*  $0, 1 \in R$ , где:

- $0$  — нейтральный по  $+$
- $1$  — из моноида  $(R, \cdot)$

*Примечание.* Если  $0 = 1$ , то  $R = \{0\}$

**Определение.**  $a \in R$  называется **обратимым**, если  $\exists b : ab = 1$ .

**Определение.**  $R^*$  называется группой обратимых элементов (или группой единиц):

$$R^* := \{a \in R \mid \exists b \ ab = 1\}$$

**Теорема 10.**  $(R^*, \cdot)$  — группа.

*Примечание.*

- $0 \cdot a = 0$
- $(-1) \cdot a = -a$
- $(-a)(-b) = a \cdot b$

**Определение.**  $S \subset R$  называется подкольцом, если  $S$  — кольцо с индуцированными операциями.

*Примечание.*  $S \subset R$  — подкольцо, если  $+$  и  $\cdot$  замкнуты в  $S$ .

*Пример.*  $S = 2\mathbb{Z}$  — подкольцо

Вообще говоря, можно рассматривать кольцо без 1.

**Определение.**  $J \subset R$  называется идеалом, если  $J$  — подкольцо и  $\forall a \in R \ \forall x \in J \ ax \in J$

*Пример.*  $J = 2\mathbb{Z}$  — идеал

**Определение.**  $\mathcal{I}(R)$  — множество идеалов.<sup>1</sup>

**Определение.** Если  $J_1, J_2 \in \mathcal{I}(R)$ , то:

$$J_1 + J_2 := \langle J_1 + J_2 \rangle := \{x + y \mid x \in J_1, y \in J_2\}$$

**Теорема 11.**  $J_1 + J_2 \in \mathcal{I}(R)$

*Доказательство.*  $\triangleleft x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in J_1 + J_2$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in J_1 + J_2$$

$$\triangleleft a \in R, x + y \in J_1 + J_2$$

$$a \cdot (x + y) = \underbrace{ax}_{J_1} + \underbrace{ay}_{J_2} \in J_1 + J_2$$

□

*Примечание.* Если  $S$  — подкольцо, то  $0 \in S$

**Теорема 12.**  $J_1 \in \mathcal{I}(J_1 + J_2)$

---

<sup>1</sup> На лекции обозначено  $I$ , но это чаще используется для дробных идеалов.

**Определение.** Если  $J_1, J_2 \in \mathcal{I}(R)$ , то:

$$\underbrace{J_1 \cdot J_2}_{\text{умножение идеалов}} := \overbrace{\langle J_1 \cdot J_2 \rangle}^{\text{поэлементное умножение}} := \left\{ \sum_{k=1}^n x_k y_k \mid x_k \in J_1, y_k \in J_2, n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Теорема 13.**  $J_1 \cdot J_2 \in \mathcal{I}(R)$

*Доказательство.*  $\triangleleft a \in R$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &\in J_1 J_2 \\ a \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{k=1}^n \underbrace{a x_k}_{\in J_1} y_k \in J_1 \cdot J_2 \end{aligned}$$

□

*Примечание.* Вообще говоря,  $\mathcal{I}(R)$  — не кольцо, только полукольцо.

**Определение.** Если  $J_1, J_2 \in \mathcal{I}(R)$ , то:

$$J_1 \cap J_2 := \{x \mid x \in J_1, x \in J_2\}$$

**Теорема 14.**  $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{I}(R)$

*Доказательство.*  $\triangleleft x_1, x_2 \in J_1 \cap J_2$

$$J_2 \ni x_1 + x_2 \in J_1$$

$$\triangleleft a \in R, x \in J_1 \cap J_2$$

$$J_2 \ni ax \in J_1$$

□

**Определение.**  $J_1 \leq J_2$ , если  $J_1 \subset J_2$ .

*Примечание.* Это частичный порядок.

**Определение.**

- $\{0\}$  — тривиальный идеал
- $J = R$  — несобственный идеал

**Определение.**  $J \in \mathcal{I}(R)$ , тогда  $x \sim y$ , если  $x - y \in J \Leftrightarrow x + J = y + J$

*Примечание.*  $J^+ \triangleleft R^+$

**Определение.**  $R/J$  – фактор-кольцо:

$$R/J := \{[x] \mid x \in R\} = \{x + J \mid x \in R\}$$

**Теорема 15.**  $R/J$  – кольцо.

*Доказательство.*  $\triangleleft x + J, y + J \in R/J$

$$x + J + y + J = x + y + J + J = x + y + J$$

$$(x + J)(y + J) = xy + xJ + Jy + JJ = xy + J$$

□

*Пример.*  $R = \mathbb{Z}, J = 5\mathbb{Z}$

$$R/J = \{0 + J, 1 + J, 2 + J, 3 + J, 4 + J\}$$

$$R/J \cong \mathbb{Z}_5$$

*Примечание.*  $R/J$  называют кольцом вычетов  $\text{mod } J$ .

**Определение.** Если  $x, y \in R, J \in \mathcal{I}(R)$ , то:

$$x \equiv y \pmod{J} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in J$$

$x$  и  $y$  называются сравнимыми  $\text{mod } J$ .

*Примечание.*  $x \in R, J = x \cdot R \in \mathcal{I}(R)$

**Определение.**  $a_k \in R$ , тогда  $(a_1 \dots a_n)$  называется идеалом, порожденным элементами  $a_1 \dots a_n$ :

$$(a_1 \dots a_n) = a_1 R + \dots + a_n R$$

*Примечание.*

- $\langle \dots \rangle$  – кольцо
- $(\dots)$  – идеал

*Пример.*  $\triangleleft R = \mathbb{Z}$

$$(12, 18) = \{12x + 18y \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}$$

**Определение.**  $J \in \mathcal{I}(R)$  называется главным идеалом, если:

$$\exists a \in R \quad J = (a) = aR$$

**Определение.**  $R$  называется **кольцом главных идеалов**, если в нём любой идеал — главный.

**Определение.**  $f : R \rightarrow R'$  — гомоморфизм, если:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$ , если  $1 \in R$

*Примечание.* Пунктов 1 и 2 достаточно.

**Определение.**

$$\ker f := \{x \in R \mid f(x) = 0\}$$

$$\operatorname{Im} f := f(R) = \{y \in R' \mid \exists x \ f(x) = y\}$$

**Лемма 32.**  $\ker f \in \mathcal{I}(R)$

*Доказательство.* Замкнутость по сложению следует из того что  $f$  есть гомоморфизм абелевых групп.

$$\triangleleft a \in R, x \in \ker f$$

$$ax \in \ker f \Leftrightarrow f(ax) = 0$$

$$f(ax) = f(a)f(x) = f(a) \cdot 0 = 0$$

□

**Теорема 16.** Если  $f : R \rightarrow R'$  — гомоморфизм, то  $R/\ker f \cong \operatorname{Im} f$ .

*Доказательство.* Построим  $\sigma : R/\ker f \rightarrow \operatorname{Im} f \subset R'$ .

$$\triangleleft x + \ker f \in R/\ker f$$

$$\sigma(x + \ker f) := f(x)$$

Тогда  $\sigma$  — изоморфизм.

□

# Лекция 13

## 11 декабря

### 11.1 Делимость в кольце

Пусть  $R$  — кольцо.

**Определение.** Делителями нуля в кольце  $R$  называются такие элементы, что  $x \cdot y = 0$ , при этом  $x \neq 0, y \neq 0$ .

*Примечание.* Если в  $R$  нет делителей нуля, то  $R$  называется **кольцом целостности**.

*Пример.*  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$  — кольца целостности.

**Определение.** Единицей кольца<sup>1</sup> называется любой элемент  $u \in R$ , такой что  $\exists v : u \cdot v = 1$ .  $\{u\}$  — группа обратимых элементов кольца, обозначим  $R^*$ .

**Лемма 33.**  $R$  — целостное, тогда

$$Rx = Ry \Leftrightarrow \exists u \in R^* : y = ux$$

*Доказательство.*

“ $\Rightarrow$ ”  $\triangleleft y \in Rx \Rightarrow y = bx, \triangleleft x \in Ry \Rightarrow x = ay, y = bay \Rightarrow (1 - ba)y = 0 \Rightarrow$  или  $y = 0$ , или  $1 - ba = 0$ .

$$\triangleleft y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 = 1 \cdot 0$$

$$\triangleleft 1 - ba = 0 \Rightarrow ba = 1 \Rightarrow \text{и } a, \text{ и } b \text{ — единицы } R.$$

“ $\Leftarrow$ ”

$$Ry = R(ux) \subseteq Rx = R(u^{-1}y) \subseteq Ry$$

□

---

<sup>1</sup> С единицей.

**Определение (1).** Пусть  $\mathcal{P}$  — идеал в  $R$  и  $R/\mathcal{P}$  — целостное кольцо. Тогда  $\mathcal{P}$  называется **простым идеалом**.

**Определение (2).**  $\mathcal{P}$  — **простой идеал**, если  $x \cdot y \in \mathcal{P} \Rightarrow x \in \mathcal{P}$  или  $y \in \mathcal{P}$ .

**Лемма 34.**  $1 \Leftrightarrow 2$

*Доказательство.*  $\triangleleft \mathcal{P} : R/\mathcal{P}$  — целостное

“ $\Rightarrow$ ”  $\triangleleft [x], [y] \in R/\mathcal{P} \Rightarrow [x] = x + \mathcal{P}, [y] = y + \mathcal{P}$ .

$$\begin{aligned} [x][y] = [0] &\Leftrightarrow [x] = [0] \text{ или } [y] = [0] \\ [xy] = xy + \mathcal{P} = \mathcal{P} &\Rightarrow x \in \mathcal{P} \text{ или } y \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ”  $\triangleleft x, y \in \mathcal{P} \Rightarrow x \in \mathcal{P}$  или  $y \in \mathcal{P}$

$$\triangleleft [x] = x + \mathcal{P}, [y] = y + \mathcal{P}$$

$$[x] \cdot [y] = \underbrace{x \cdot y}_{\in \mathcal{P}} + \mathcal{P} = \mathcal{P} = [0]$$

□

**Лемма 35.**  $\triangleleft \sigma : R \rightarrow R'$  — гомоморфизм колец,  $\mathcal{P}' \subset R'$  — простой идеал в  $R'$ .

Тогда  $\sigma^{-1}(\mathcal{P}')$  — простой идеал в  $R$ .

*Доказательство.*  $\mathcal{P} := \sigma^{-1}(\mathcal{P}')$ . Докажем от противного: пусть  $\mathcal{P}$  — не простой.

$\triangleleft x, y \in R : xy \in \mathcal{P}, x \notin \mathcal{P}, y \notin \mathcal{P}$

$$\sigma(xy) = \underbrace{\sigma(x)}_{\notin \mathcal{P}'} \underbrace{\sigma(y)}_{\notin \mathcal{P}'} \in \mathcal{P}'$$

Противоречие.

□

**Определение.** **Спектром** кольца называется множество его простых идеалов.

*Обозначение.*  $\text{spec}(R)$

**Определение.** Идеал  $\mathcal{M}$  называется **максимальным** в  $R$ , если  $\mathcal{M}$  — идеал в  $R$  и  $\mathcal{M}$  не содержится ни в каком другом идеале.

*Примечание.*  $R$  — целостное, если  $\{0\}$  — простой идеал.

**Лемма 36.** Всякий максимальный идеал — простой.

*Доказательство.*  $\triangleleft \mathcal{M}$  — максимальный идеал.

$$\triangleleft x, y \in R : x \cdot y \in \mathcal{M}, x \notin \mathcal{M}$$

По максимальнойности идеала  $Rx + \mathcal{M} = R$ , тогда  $\exists r \in R, m \in \mathcal{M} : rx + m = 1$

$$\begin{aligned} rx + m &= 1 \\ r \underbrace{xy}_{\substack{(1) \\ \in \mathcal{M}}} + \underbrace{my}_{\substack{(2) \\ \in \mathcal{M}}} &= y \end{aligned}$$

Тогда  $y \in \mathcal{M}$ . □

**Лемма 37.** Всякий идеал  $I$  кольца  $R$  содержится в некотором максимальном идеале  $\mathcal{M}$ .

*Доказательство.*  $\triangleleft I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_m \subset R$

В любой такой цепочке есть максимальный элемент  $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$  □

**Лемма 38.**

- $\sigma : R \rightarrow R'$  — сюръективный
- $\mathcal{M}'$  — максимальный идеал в  $R'$

Тогда  $\sigma^{-1}(\mathcal{M}') = \mathcal{M}$  — максимальный идеал.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Определение.** Полем  $K$  называется кольцо  $R$ , множество ненулевых элементов которого образует мультипликативную абелеву группу.

**Лемма 39.**  $R/\mathcal{M}$  — поле.

*Доказательство.*  $\triangleleft [x] \neq [0] \in R/\mathcal{M}$ . Мы хотим показать, что  $\exists [x]^{-1} : [x][x]^{-1} = [1]$

$$\triangleleft x \in R, x \notin \mathcal{M} \Rightarrow Rx + \mathcal{M} = R \Rightarrow \exists r \in R, m \in \mathcal{M} : rx + m = 1$$

$$\begin{aligned} rx + m &= 1 \\ [rx + m] &= [1] \\ [rx] &= [1] \\ [r][x] &= [1] \end{aligned}$$

□

---

1: по условию  $xy \in \mathcal{M}$

2: т.к.  $m \in \mathcal{M}$  и  $\mathcal{M}$  — идеал



Лемма 40.

- $\mathcal{M} \subset R$
- $R/\mathcal{M}$  — поле

Тогда  $\mathcal{M}$  — максимальный.

*Доказательство.* Самостоятельно.

