

Определение предела дает функцию $N(\varepsilon)$, хорошо приспособленную для изучения неравенства $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для $n \in (N; +\infty)$. Кроме того, для последовательности $r_n = \rho(x_n, a) \quad |r_n| < \varepsilon$.

Теорема 1. О единственности предела. (X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X , $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$, тогда $a = b$

Доказательство.

Докажем от противного — пусть $a \neq b$. Возьмем $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K(\varepsilon) \quad \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

При $n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b)$ — противоречие

□

Определение. $A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$

Пусть $b \in X$. A — **огр.** $\Leftrightarrow \exists r > 0 \quad A \subset B(b, r)$

$$A \subset B(x_0, R) \Rightarrow A \subset B(b, \rho(x_0, b) \pm R)$$

Теорема 2. Если (x, ρ) — метрическое пр-во, (x_n) — послед. в X , x_n сходится, тогда x_n — ограничен.

Доказательство.

$$\text{Пусть } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$\forall U(a) \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \in U(a)$$

$$U(a) = B(a, \varepsilon)$$

$$r := \max(\varepsilon, \rho(x_1, a), \rho(x_2, a) \dots \rho(x_N, a)) + 1$$

$$\text{тогда } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B(a, r)$$

□

Порядковые свойства предела

Теорема 3. О предельном переходе в неравенствах для \mathbb{R} . Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \forall n \quad x_n \leq y_n$, тогда $a \leq b$.

Доказательство.

Докажем от противного. Пусть $a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$.

$$\exists N(\varepsilon) \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \forall n > K \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

При $n > \max(N, K)$ $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ — противоречие

□

Примечание. Если вместо " $\forall n \quad x_n \leq y_n$ " потребовать: " $\exists M \quad \forall n > M \quad x_n \leq y_n$ " то утв. по-прежнему верно

Примечание. $x_n = -\frac{1}{n}$ $y_n = \frac{1}{n}$. тогда $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$. $x_n < y_n$, но пределы совпадают. То есть даже если $x_n < y_n$ строго, $a \leq b$ — не строго.

Следствие. (x_n) — вещественная последовательность, $a, b \in \mathbb{R}$

1. $\forall n \quad x_n \leq a \Rightarrow \lim x_n \leq a$
2. $\forall n \quad x_n \geq b \Rightarrow \lim x_n \geq b$
3. $\forall n \quad x_n \in [a, b] \Rightarrow \lim x_n \in [a, b]$

Теорема 4. О двух городских (о сжатой последовательности). Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ — вещ. посл., $\forall n \quad x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, тогда $\exists \lim y_n = a$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall n > K \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = \max(N, K) \quad \forall n > N_0 \quad a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

По определению $\lim y_n = a$

□

Следствие. $(y_n), (z_n) \quad \forall n \quad |y_n| \leq z_n, \quad \exists \lim z_n = 0$, тогда $y_n \rightarrow 0$. Доказательство тривиально, т.к. y_n ограничено z_n и $-z_n$.

Определение. (x_n) — вещ. посл. называется **бесконечно малой**, если $x_n \rightarrow 0$

Теорема 5. Если $(x_n), (y_n)$ — вещ. посл., x_n — беск. мал., y_n — огр., тогда $x_n y_n$ — беск. мал.

Доказательство.

$$\exists R \quad \forall n \quad |y_n| < R, \text{ т.к. } y_n \text{ — огр.}$$

$$|x_n y_n| \leq R |x_n|, R |x_n| \rightarrow 0 \Rightarrow y_n \rightarrow 0$$

□

Нормированные пространства

Определение. Если K — поле ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), X — множество, то X называется линейным пространством над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+$: $X \times X \rightarrow X$ — сложение векторов
2. \cdot : $K \times X \rightarrow X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь $A, B, C \in X$; $a, b \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C}):

Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists 0 \in X : A + 0 = A$

Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists 1 \in X : 1 \cdot a = a$

Ещё есть аксиома $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$, но у нас её не было.

Определение. Норма - отображение $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, если X - линейное пространство (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) и выполняется следующее:

1. $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение. Полунорма - норма без свойства $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Определение. Нормированное пространство — $(X, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ - норма

Лемма 1. О свойстве полунормы.

1. $p\left(\sum_{finite} \lambda_k x_k\right) \leq \sum \lambda_k p(x_k)$
2. $p(0) = 0$ - тут $0 \in X$
3. $p(-x) = p(x)$

$$4. |p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

Доказательство. 1. $p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots) \leq p(\lambda_1 x_1) + p(\lambda_2 x_2 + \dots)$

2. тривиально

3. тривиально

$$4. -p(x - y) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y) \\ p(x) = p(y + (x - y)) \leq p(y) + p(x - y)$$

□

Примеры норм:

$$1. X = \mathbb{R}^m \quad ||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

$$X = \mathbb{C}^m \quad ||x|| = \sqrt{\sum_i^m |x_i|^2}$$

$$2. (\mathbb{R}^m, ||\cdot||_\infty) \quad ||x||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|)$$

$$3. (\mathbb{R}^m, ||\cdot||_1) \quad ||x||_1 = \sum_i^m |x_i|$$

(а) $p(x) = |x_1|$ — полунорма, но не норма

Примечание. Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, тогда $\rho(x, y) := ||x - y||$ — метрика, порожденная нормой. Не все метрики порождены нормами, например $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Арифметические свойства предела

Теорема 6. Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.

Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X , λ_n — посл. скаляров, и $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$, **тогда:**

$$1. x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$$

$$2. \lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$$

$$3. ||x_n|| \rightarrow ||x_0||$$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon \exists N_1 \forall n > N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 \forall n > N_2 \quad ||y_n - y_0|| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\forall \varepsilon \forall n > N \quad ||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| \leq ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| \leq 2\varepsilon$$

2. $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0\| \leq$
 $\|(\lambda_n - \lambda_0)x_n\| + \|(x_n - x_0)\lambda_0\| = \|x_n\|\|\lambda_n - \lambda_0\| + \|x_n - x_0\|\|\lambda_0\|$
- $|\lambda_n - \lambda_0|$ и $\|x_n - x_0\|$ — бесконечно малые, $\|x_n\|$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow \|x_n\|\|\lambda_n - \lambda_0\| + \|x_n - x_0\|\|\lambda_0\|$ — бесконечно малая
3. Докажем, что $||x_n| - |x_0|| \leq \|x_n - x_0\|$.

$$\|x_n\| = \|x_0 + (x_n - x_0)\| \leq \|x_0\| + \|x_n - x_0\| \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\|$$

$$\text{Аналогично } \|x_0\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x_0\|.$$

$$\text{Тогда } ||x_n| - |x_0|| \leq \|x_n - x_0\|$$

□

Теорема 7. Об арифметических свойствах пределов в \mathbb{R} .

Для $(x_n), (y_n)$ — вещ. посл., $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

$$4. \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$$

Доказательство взято из воздуха.

Доказательство. Докажем, что $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y_0}$, если $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \left| \frac{y_0 - y_n}{y_n y_0} \right|$$

В числителе бесконечно малая последовательность, в знаменателе ограниченная \Rightarrow дробь — бесконечно малая последовательность. □