

Вспомним два интеграла для Γ :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \quad x > 0$$

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = B(x, y) \stackrel{??}{=} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \approx \frac{1}{C_{x+y}^x}$$

?? надо будет доказать.

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2021} x dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x \\ dt = 2 \sin x \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t^{\frac{1}{2}})} \end{array} \right] \\ &= \int_0^1 t^{1010.5} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1010} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} B(1011, \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1011)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1011.5)} \end{aligned}$$

Для вычисления Γ у нас есть несколько формул:

- Формула понижения: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
- Формула дополнения: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$
- $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

Таким образом, мы можем вычислить все Γ в ответе.

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(1011)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1011.5)} = \frac{1}{2} \frac{1010! \sqrt{\pi}}{\frac{2021}{2} \cdot \frac{2019}{2} \dots} = \frac{1010! 2^{1009}}{2}$$

Упражнение 1 (3845).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$$

Можно решить через $t^4 = x$, но это сложно.

$$t := \frac{1}{1+x} \quad x = \frac{1}{t} - 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\frac{1}{4}} dt = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Упражнение 2 (3849).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} t^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1}{n}} dt = B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1 - \frac{1}{n})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Упражнение 3 (3848).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx = [\sin^2 x = t] = \int_0^1 t^3 (1-t)^2 \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{7!!5!!\pi}{2^8 5!}$$

Кратные интегралы

$$\int \int f dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Упражнение 4.

$$\int_{-1}^2 dx \int_x^{x^2} f dy$$

