1 Пределы

Теорема 1. Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

Доказательство. Докажем “$\Rightarrow$”.
Если дана (x_n), удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \ \exists N \ \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$
$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$ □

Доказательство. Докажем “$\Leftarrow$”
Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n \in D \ 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \ \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D \ x_n \neq a \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow x_n \to a$. Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ — противоречит утверждению Гейне, что $f(x_n) \to A$. □

Теорема 2. О единственности предела. $f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A; \lim\limits_{x \to a} f(x) = B$
Тогда $A = B$

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n)$:

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) \to A, f(x_n) \to B \xRightarrow[\text{теор. о ед. предела посл.}]{} A = B$ □

Теорема 3. О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.
$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$
Если $\nexists f(a)$, ограниченность доказана. Иначе:
$\forall x \in V(a) \cap D \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A)$, где $\tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$ □

Теорема 4. О стабилизации знака.
$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
Пусть $B \in Y, B \neq A$
Тогда $\exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \neq B$

Доказательство. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \;\; \exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит B. □

Следствие. $f : D \subset X \to \mathbb{R}$, a – пред. точка, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0 \;\; B = 0$
$\exists \dot{V}(a) \cap D : f(x) \neq 0$
В доказательстве $0 < \varepsilon < A \;\; f(x) \in U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$

Теорема 5. Об арифметических свойствах предела
$f, g : D \subset X \to Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над $\mathbb{R}$, a — пред. точка D
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$
$\lambda : D \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = \lambda_0$
Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim\limits_{x\to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$
$\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$
a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \;\; \forall x \in V(a) \cap D \;\; g(x)$ — того же знака, что и B, т.е. $g(x) \neq 0$
$\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для D'

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n)$:

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \to^? A + B$ верно по теореме последовательности.
Аналогично прочие пункты, кроме 4.
$f(x_n) \to A$
$g(x_n) \to B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\; g(x_n) \neq 0$
$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. □

Примечание. Для $\overline{\mathbb{R}}$
Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно "разрешить" случай $A, B = \pm\infty$
Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B$, $\lambda_0 A$, $\frac{A}{B}$ корректны.
Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \;\; \exists \delta_1 > 0 \;\; \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \;\; f(x) > E_1 \;\; \forall E_2 \;\; \exists \delta_2 > 0 \;\; \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \;\; g(x) > E_2$

Это доказательство не будет спрашиваться.

2 Компактные множества

Теорема 6. О простейших свойствах компактных множеств. (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1. K — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., K — огр.
2. X — комп, K — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

Доказательство. 1. $?K$ — замкн. $?K^c$ — откр.

$a \notin K$, проверим, что $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x,a))$ — откр. покрытие

K — комп. $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$ — открытое покрытие

$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1, a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n, a)))$

$B(a,r)$ не пересекается ни с одним $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a)) \Rightarrow B(a,r) \subset K^c$

$?K$ — огр.

$b \in X$

$K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$

K — комп. $\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$

2. $?K$ — комп.

$$\begin{cases} K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откр.} \\ K \text{ — замкн., } K^c \text{ — откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — откр. покрытие } X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \subset (\text{может быть } K^c) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

□

Лемма 1. *О вложенных параллелепипедах.* $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \le x_i \le b_i\}$ *— параллелепипед.*
$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ *— бесконечная последовательность параллелепипедов.*
Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \varnothing$
Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, *тогда* $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Доказательство. $\forall i = 1 \dots m \quad [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]$. $c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \le ||a^n - b^n|| \to 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$ □

Лемма 2. $[a,b]$ *— компактное множество в* $\mathbb{R}^m$ $[a,b] \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ *— откр. в* $\mathbb{R}^m$

Доказательство. Докажем, что $\exists$ кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$
Допустим, что не $\exists$
$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором
$[a^2, b^2] :=$ делим $[a^1, b^1]$ на 2^m частей, берем любую "часть", которую нельзя покрыть конечным набором G_α
$\vdots$

$$diam = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} diam[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} diam[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad diam[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$\square$

Примечание. $x_n \to a$
$\forall$ подпосл. $n_k \quad x_{n_k} \to a$

Примечание. $\{n_k\} \cap \{m_k\} = \mathbb{N}$
$\begin{cases} x_{n_k} \to a \\ x_{m_k} \to a \end{cases} \Rightarrow x_n \to a$

Определение. **Секвенциально компактным** называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A $\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

Теорема 7. О характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$. $K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

Доказательство. Докажем $1 \Rightarrow 2$
K — огр. $\Rightarrow K$ содержится в $[a, b]$
K — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$
Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов K — комп. $\square$

Доказательство. Докажем $2 \Rightarrow 3$
$\forall (x_n)$ — точки из K.
?сходящаяся последовательность
Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то $\exists$ сход. подпосл. очевидно.
Пусть D — бесконечно

Если D имеет предельную точку, то $x_{m_k} \to a$
Если D — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек D, кроме x *(его может тоже не быть)*. Тогда $\bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ — открытое покрытие K. Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть K, т.к. в K бесконечное число точек *(т.к. бесконечное число различных значений D)*. Таким образом, мы нашли открытое покрытие K, у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.
Пусть $a \in K$ — предельная точка. Возьмём из $B(a, r_1)$ точку x_{n_1}. Возьмём $r_2 < r_1$ и из соответствующего шара возьмём x_{n_2}. При $r_n \to 0$ $x_{n_k} \to a$.
Почему вблизи a будет точка из произвольной последовательности? $\square$