

Основные вопросы

1. Уравнение с разделяющимися переменными: общее решение, общая схема исследования.

Уравнение с разделенными переменными имеет вид:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

У него решение имеет вид:

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

Доказательство.

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = \int X(x)dx + \int Y(y)y'dx = \int (X(x) + Y(y)y')dx = \int 0dx = C$$

□

При этом мы получаем общее решение, когда находим такие C , что ответ $\in C^1$.

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Если поделить на $p_2(x)q_1(y)$, то получим уравнение с разделенными переменными. При этом необходимо убедиться, что мы не делим на ноль.

Если $\exists y_0 : q_1(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ — решение исходного уравнения. Исключив y_0 , мы разбиваем область возможных решений на две подобласти.

Аналогично для x .

После разбиения нужно на каждой области найти решение.

2. Линейное уравнение 1-го порядка: общее решение ЛОУ, общее решение ЛНУ. Метод Лагранжа и метод интегрирующего множителя.

Линейное уравнение первого порядка это

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Если $q \equiv 0$, то это уравнение **однородно**, иначе **неоднородно**.

Общее решение ЛОУ это $y = Ce^{\int p}$, $C \in \mathbb{R}$

Доказательство. Заметим, что $y \equiv 0$ — решение. По теореме о единственности оно не является особым. т.к. мы рассматриваем $p \in C(a, b)$.

$y > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= p(x)dx \\ \ln y &= \int p(x)dx + C \\ y &= e^C e^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

По теореме об общем решении уравнения с разделенными переменными это семейство всех решений исходного уравнения при $y > 0$.

Аналогично при $y < 0$ □

Общее решение ЛНУ это

$$y = \left(C + \int q e^{-\int p} \right) e^{\int p}$$

Доказательство. Подстановкой легко показать, что это решение. Покажем, что нет других решений.

Пусть есть решение φ на (α, β) , не подходящее под искомую формулу.

Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\varphi(x_0) = y_0$.

Функция

$$C = \left(y_0 e^{-\int p} - \int q e^{-\int p} dx \right) \Big|_{x=x_0}$$

подходит под искомую формулу, но при этом является решением задачи Коши $y(x_0) = y_0$, поэтому $y \equiv \varphi$ — противоречие. □

Метод Лагранжа (вариации произвольной постоянной) — постоянную C считают функцией от x и получают дифур относительно C .

3. Равностепенно непрерывные функции. Лемма Арцела–Асколи.

Множество функций F , определенных на D , **равностепенно непрерывно**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Лемма 1. Пусть функции последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены ($\exists C : \forall n, x |f_n(x)| < C$) и равностепенно непрерывны на $[a, b]$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть M ограничивает (равномерно) f_n :

$$M := \sup_{n,x} |f_n(x)|$$

$$\triangleleft \varepsilon_k = \frac{M}{2^{k+1}}$$

$$\forall \varepsilon_k > 0 \quad \exists \delta_k > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad |x_2 - x_1| < \delta_k \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon_k$$

Поделим всю область $[a, b] \times (-M, M)$ на прямоугольники со стороной ε_1 и δ_1 .

Рассмотрим первый столбец. Возьмём два произвольных соседних прямоугольника, таких что по ним проходит бесконечное число f . Вырежем все f , которые по этим прямоугольникам не подходят. Сделаем то же самое для каждого столбца. Получим в итоге (бесконечную) подпоследовательность F_1^* .

Повторим то же самое для всех ε_n, δ_n .

$$\forall f, g \in F_i^* \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon_n$$

Нам нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N, k \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_N^*(x) - f_{N+k}^*(x)| < \varepsilon$

Тогда возьмём $N : 2\varepsilon_N < \varepsilon$ и все получится, т.к. $F_N^* \supset F_{N+k}^*$ □

4. ЗК для нормальной системы. Лемма о равносильном интегральном уравнении. Лемма: свойства ломаной Эйлера, определённой на отрезке Пеано.

Задача Коши для нормальной системы — нахождение решения, подходящего под условие $r(t_0) = r_0$

$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, тогда φ — решение на $[a, b]$ интегрального уравнения

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

, если:

1. $\varphi \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2. $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$ на $[a, b]$

Лемма 2. φ — решение задачи Коши $\dot{r} = f(t, r), r$ эквивалентно тому, что φ — решение

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau)) d\tau$$

Доказательство.

\Rightarrow Проинтегрируем $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ от t_0 до t

\Leftarrow Продифференцируем интегральное уравнение.

□

Определение (Отрезок Пеано). $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $(t_0, r_0) \in G$. Т.к. G открыто, $\exists a, b > 0$, такие что параллелепипед с центром в (t_0, r_0) и сторонами a, b ($|t - t_0| \leq a, |r - r_0| \leq b$) лежит в G .

По теореме Вейерштрасса на компакте есть максимум, т.е. $\exists M = \max_{\Pi} |f|$. Пусть $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Тогда отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ — **отрезок Пеано**

Рассмотрим некоторый отрезок Пеано и поделим его правую часть на N равных частей точками t_k .

Пусть ломаная Эйлера E_N определена рекурсивно:

1. $E_N(t_0) = r_0$
2. $E_N(t) = E_N(t_k) + f(t_k, E_N(t_k))(t - t_k)$, если $t \in (t_k, t_{k+1}]$

Лемма 3. $\forall t \in [t_0, t_0 + h]$:

1. $\exists E_N(t)$
2. $|E_N(t) - r_0| \leq M(t - t_0)$, т.е. оно лежит в треугольнике.

Доказательство. Докажем по индукции, что это верно при $t \in [t_0, t_k]$ для всех k .

При $k = 1$ E_N действительно определена, т.к. $E_N(t) = r_0 + f(t_0, r_0)(t - t_0)$

$$|E_N(t) - r_0| = |f(t_0, r_0)(t - t_0)| \leq M(t - t_0)$$

Переход индукции:

$$|E_N(t_k) - r_0| \leq M(t_k - t_0) \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b$$

Таким образом мы лежим в Π , все определено.

$$\begin{aligned} |E_N(t) - r_0| &= |E_N(t) - E_N(t_0)| \leq |E_N(t) - E_N(t_0)| + |E_N(t_k) - E_N(t_0)| \leq \\ &|f(t_k, E_N(t_k))|(t - t_k) + M(t_k - t_0) \leq M(t - t_k) + M(t_k - t_0) = M(t - t_0) \end{aligned}$$

□

5. Теорема Пеано о существовании решения ЗК.

Теорема 1. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда задача Коши имеет решение, определенное на отрезке Пеано для (t_0, r_0) .

Доказательство. Пусть $t_0 = 0, r_0 = 0$ (сдвиг координат). Пусть $[-h, h]$ — искомый отрезок Пеано. Докажем для $[0, h]$, для другой части аналогично. Объединить оба решения можно по лемме о гладкой стыковке решений.

Построим бесконечную последовательность ломаных Эйлера. Мы знаем, что $|E_N(t)| \leq b$, т.е. она равномерно ограничена.

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| dt$$

Мы знаем, что $|\dot{E}_N(t)| \leq M$, поэтому:

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)| dt \leq M(t_2 - t_1)$$

Пусть $|t_2 - t_1| < \delta$, тогда $|E_N(t_2) - E_N(t_1)| < M\delta$ и пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, тогда $|E_N(t_2) - E_N(t_1)| < \varepsilon$, т.е. E_N равномерно непрерывна. По лемме Арцела–Асколи у этой последовательности есть подпоследовательность, равномерно сходящаяся к некоторой функции φ . Покажем, что φ — решение задачи Коши. Для этого достаточно показать, что:

$$\varphi(t) \equiv \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \text{ на } [0, h]$$

Пусть теперь E_N — подпоследовательность исходной последовательности.

По формуле Ньютона–Лейбница для отображений:

$$E_N(t) = \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau$$

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau$$

Таким образом, надо показать, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Покажем, что

$$\Delta_N = \left| \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau - \int_0^t \dot{E}_N(\tau) d\tau \right| \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_N &\leq \int_0^t |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \int_0^h |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau\end{aligned}$$

f равномерно непрерывна на параллелепипеде, поэтому $|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta \Rightarrow |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| < \varepsilon$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau < \varepsilon h$$

Тогда по двойной бухгалтерии $\Delta_N \rightarrow 0$.

Но мы не доказали, что $|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta$.

$$\begin{aligned}|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| &\leq |(t_k, E_N(t_k)) - (t_k, \varphi(t_k))| + |(t_k, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(t_k))| + |(\tau, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\ &= |E_N(t_k) - \varphi(t_k)| + |t_k - \tau| + |\varphi(t_k) - \varphi(\tau)|\end{aligned}$$

При достаточно больших N все три слагаемых $< \frac{\delta}{3}$

□

6. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет локальному условию Липшица по заданной переменной.

Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in M_{m,n}(C(G))$. Тогда $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$

Кроме того, если $K \subset G$ — выпуклый компакт, то $M_1 := \max_{(t,r) \in K} |f'_r(t, r)|$, то:

$$\forall (t, r_1), (t, r_2) \in K \quad |f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq n M_1 |r_2 - r_1|$$

Доказательство. Докажем, что на выпуклом компакте $f \in \text{Lip}_r(K)$.

Зададим $g(s) = f(t, r_1 + s(r_2 - r_1))$ (т.к. K выпуклый, функция везде определена)

$$f(t, r_2) - f(t, r_1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1) ds$$

По лемме об оценке нормы произведения матриц (вектор — тоже матрица)

$$\begin{aligned}|f(t, r_2) - f(t, r_1)| &\leq \left| \int_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))(r_2 - r_1)| ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 n |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))| |(r_2 - r_1)| ds \\
&\leq \int_0^1 n M_1 |(r_2 - r_1)| ds \\
&\leq n M_1 |r_2 - r_1|
\end{aligned}$$

Тогда константа Липшица nM_1 и искомое выполнено.

Почему $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$? Потому что можно для каждой точки взять параллелепипед K (выпуклый компакт) вокруг этой точки и тогда в $\text{Int}K$ выполняется условие Липшица. \square

7. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет глобальному условию Липшица по заданной переменной.

Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда $f \in \text{Lip}_r(K)$

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $\forall N \in \mathbb{N} \exists (t_N, r_N), (t_N, \tilde{r}_N) \in K$, для которых $|f(t_N, r_N) - f(t_N, \tilde{r}_N)| > N|r_N - \tilde{r}_N|$

Т.к. K компакт, то он секвенциальный компакт, т.е. в (t_N, r_N) и (t_N, \tilde{r}_N) есть сходящиеся подпоследовательности. Пусть они сходятся к (t, r) и (t, \tilde{r}) соответственно.

Либо $r = \tilde{r}$, либо нет.

1. $r = \tilde{r}$

$\exists U(t, r) : f \in \text{Lip}_r(U)$, т.к. f лок. Липшицева, т.е. $\exists L : |f(t', r') - f(t', r'')| \leq L|r' - r''|$

Пусть $N > L$, тогда $|f(t', r') - f(t', r'')| > N|r' - r''| > L|r' - r''|$ — противоречие.

Пусть теперь $r \neq \tilde{r}$. Выберем непересекающиеся параллелепипеды $R = [a, b] \times X$ и $\tilde{R} = [a, b] \times \tilde{X}$, для которых точки (t, r) и (t, \tilde{r}) соответственно являются внутренними. Рассмотрим функцию

$$g(t, x, y) := \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|},$$

определённую на компакте $[a, b] \times X \times \tilde{X}$, где она непрерывна, а значит, ограничена некоторым числом L . Выбирая номер $N > L$, такой что $(t_N, r_N) \in R$ и $(t_N, \tilde{r}_N) \in \tilde{R}$, из (4.9) получаем

$$g(t_N, r_N, \tilde{r}_N) > N > L.$$

2. Это противоречие завершает доказательство леммы. □

□

8. Лемма Гронуолла. Теорема Пикара (доказательство единственности решения).

Лемма 4 (Гронуолл). $\varphi \in C[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, $\lambda, \mu \geq 0$ и

$$\forall t \in [a, b] \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|$$

Тогда

$$\forall t \in [a, b] \quad \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$$

Доказательство. Рассмотрим $t \geq t_0$ без потери общности.

Рассмотрим случай $\lambda > 0$ и пусть $v(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$. Тогда $v'(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu v(t)$.

Таким образом, $\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu$. Проинтегрировав по $[t_0, t]$, получаем $v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}$. Таким образом, $\varphi(t) \leq v(t) \leq v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}$

Рассмотрим $\lambda = 0$, тогда для любого λ_1 верно $\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau < \lambda_1 + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$, для этого уже доказали.

При $\lambda_1 \rightarrow 0$ получаем $\varphi(t) \leq 0$. □

Теорема 2. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда на отрезке Пеано существует решение задачи Коши $\dot{r} = f(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ и оно единственно.

Доказательство. Мы доказываем последний пункт, что решение φ единственно.

Пусть ψ_1 и ψ_2 — решения на (a, b) . По лемме об эквивалентном интегральном уравнении:

$$\psi_1(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau)) d\tau \quad \psi_2(t) = \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau)) d\tau$$

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| d\tau$$

Пусть $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $a < 0$, $b > 0$.

Т.к. графики ψ_1 и ψ_2 на $[\alpha, \beta]$ компактны, $f(\tau, \psi_1(t))$ и то же самое для 2 Липшицевы, поэтому:

$$|f(\tau, \psi_1(t)) - f(\tau, \psi_2(t))| \leq \tilde{L} |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|$$

Итого:

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq \tilde{L} \int_0^t |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| d\tau$$

По лемме Гронуолла $|\psi_1(t) - \psi_2(t)|$, т.к. $\lambda = 0$, таким образом ψ_1 и ψ_2 совпадают на $[\alpha, \beta]$, а в силу произвольности они совпадают и на (a, b) \square

9. Теорема Пикара (доказательство существования решения).

Доказательство. Без потери общности $t_0 = 0$, $r_0 = 0$. Рассмотрим правую часть отрезка Пеано $[0, h]$, для левой аналогично и решения можно сшить. Возьмём Π , M , h из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность функций:

- $\varphi_0(t) = 0$
- $\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

У нас будет три этапа (в этом билете):

1. Докажем, что последовательность верно определена, т.е. $(t, \varphi_k(t)) \in G$.
 2. Докажем, что последовательность равномерно сходится на $[0, h]$ к некоторой φ
 3. Докажем, что φ решает интегральное уравнение, эквивалентное искомому.
1. Докажем по индукции. База тривиальна. Переход:

$$|\varphi_{k+1}(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \leq Mt \leq Mh \leq \frac{Mb}{M} = b$$

2. Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall t, m > N, k \quad |\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \varepsilon$

По лемме о достаточном условии Липшица $f \in \text{Lip}_r(\Pi)$ с константой L . Докажем по индукции, что

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}$$

, тогда искомого будет доказано, т.к. $t < h$ и дробь $\rightarrow 0$.

База очевидна:

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))| d\tau \leq Mt$$

Переход:

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1+k}(t) - \varphi_{m+1}(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - f(\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L |(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) - (\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_0^t L \frac{ML^m \tau^{m+1}}{(m+1)!} d\tau \\ &\leq \frac{ML^{m+1} t^{m+2}}{(m+2)!} \end{aligned}$$

3.

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau$$

Т.к. $(t, \varphi_m(t)) \in \Pi$, то и $(t, \varphi(t)) \in \Pi$. Таким образом:

$$|f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| \leq L |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|$$

В силу равномерной сходимости φ_m мы получаем, что $f(t, \varphi_m(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$ при $m \rightarrow +\infty$ равномерно. Тогда мы можем внести предел под знак интеграла по теореме о предельном переходе под знаком интеграла.

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

По лемме об эквивалентном интегральном уравнении получаем, что φ — решение искомого уравнения.

□

10. Теорема существования и единственности решения ЗК для уравнения n -го порядка. Следствие с более простыми условиями.

Теорема 3. $G \subset \mathbb{R}_{t,y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$ — область, $f \in C(G)$, $f \in \text{Lip}_{(y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$, $(t_0, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда в некоторой окрестности t_0 есть решение задачи Коши для уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную систему. Каждое из уравнений имеет единственное решение задачи Коши по теореме Пикара. По Пикару у эквивалентной системы есть решение. \square

Следствие 1. $G \subset \mathbb{R}_{t,y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}}^{n+1}$ — область, $f, f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$, $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда в некоторой окрестности есть единственное решение задачи Коши для уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$.

Доказательство. Была лемма, по которой $f \in \text{Lip}_{(y,\dot{y},\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$ и по теореме в этом билете. \square

11. Критерий продолжимости.

Теорема 4. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Тогда решение φ уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ на промежутке $[a, b)$ продолжимо вправо $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = \tilde{r}$ и при этом $(b, \tilde{r}) \in G$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть ψ — продолжение вправо φ .

Т.к. ψ непрерывна, то $\varphi(b-0) = \psi(b-0) = \psi(b)$. Т.к. $b \in \text{dom} \psi$, $(b, \psi(b)) \in G$.

\Leftarrow Доопределим φ на $[a, b]$. На $[a, b)$:

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^t \varphi'(\tau) d\tau = \int_{t_1}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Пусть $t_1 \rightarrow b$.

$$\varphi(t) = \tilde{r} + \int_b^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

По лемме об экв. интегральном уравнении φ — решение задачи $\dot{r} = f(t, r)$, $r(b) = \tilde{r}$

По теореме Пеано есть решение ϑ на $[b-h, b+h]$. Тогда можем сшить ϑ , φ и получить ψ , это будет решение $[a, b+h]$. \square

12. Теорема существования и единственности максимального решения.

Теорема 5. $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in \text{Lip}_{r,loc}(G)$, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$

Тогда максимальное решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Пусть все решения задачи Коши на интервалах образуют множество S . По теореме Пеано $|S| \neq 0$. Пусть для $\varphi \in S$ область определения (a_φ, b_φ) . Пусть $(A, B) := \bigcup_{\varphi \in S} (a_\varphi, b_\varphi)$

Для $t \in (a_\varphi, b_\varphi)$ пусть $\psi(t) := \varphi(t)$. Т.к. все решения задачи Коши совпадают (*теорема Пикара*), функция задана однозначно. Вполне очевидно, что ψ — максимальное решение.

Другого решения ϑ нет, т.к. если $\text{dom } \vartheta \neq \text{dom } \psi$, то одно из них не максимально, а иначе они равны. \square

13. Теорема о выходе интегральной кривой за пределы любого компакта.

Теорема 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}_{r,loc}(G)$, φ — максимальное решение на (a, b) уравнения $\dot{r} = f(t, r)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда найдется $\Delta > 0$, такое что $(t, \varphi(t)) \notin K$ при всех $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$.

Доказательство. Заметим, что расстояние $\rho = \rho(K, \partial G)$ от компакта K до границы ∂G области G положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из K , сходящейся к точке на границе, но $\partial G \cap K = \emptyset$). Если $\rho < +\infty$, положим $c = \frac{\rho}{2}$, иначе пусть $c = 1$.

Вокруг каждой точки $(t', r') \in K$ построим содержащийся внутри G параллелепипед

$$\Pi(t', r') = \{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t'| \leq c, |r - r'| \leq c\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c = \bigcup_{(t', r') \in K} \Pi(t', r')$$

Поскольку K — компакт, то максимум нормы достигается, пусть это d . Если (t, r) — произвольная точка из K_c , то для некоторой точки $(t', r') \in K$ будет $(t, r) \in \Pi(t', r')$, поэтому

$$|(t, r)| \leq |(t, r) - (t', r')| + |(t', r')| \leq c + d$$

Значит, множество K_c ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность $\{(t_{m_k}, r_{m_k})\}$ точек из K_c , сходящуюся к $(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Для каждой такой точки найдется параллелепипед $\Pi(t'_{m_k}, r'_{m_k})$, которому она принадлежит. Раз K — компакт, то существует подпоследовательность $\{(t'_{m_k}, r'_{m_k})\}$, сходящаяся к некоторой точке $(t', r') \in K$. Переходя к пределу в неравенствах

$$|t_{m_k} - t'_{m_k}| \leq c, \quad |r_{m_k} - r'_{m_k}| \leq c$$

находим $|t - t'| \leq c$ и $|r - r'| \leq c$. Следовательно $(t, r) \in K_c$.

Таким образом, K_c — компакт, и функция f достигает на нем максимального значения

$$M = \max_{(t,r) \in K_c} |f(t, r)|$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $\Delta = \frac{h}{2}$, где $h = \min\{c, \frac{c}{M}\}$. Тогда при некотором $t_0 \in (b - \frac{h}{2}, b)$ будет $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$.

Рассмотрим ЗК $\dot{r} = f(t, r)$, $r(t_0) = \varphi(t_0)$. По теореме Пеано она имеет решение ψ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Пусть

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in (a, t_0) \\ \psi(t), & \text{если } t \in [t_0, t_0 + h] \end{cases}$$

По лемме о гладкой стыковке решений $\tilde{\varphi}$ — решение уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ на $(a, t_0 + h)$. Функция $\tilde{\varphi} \equiv \varphi$ на $(a, b) \cap (a, t_0 + h)$ по теореме Пикара. Но

$$t_0 + h > b - \frac{h}{2} + h = b + \frac{h}{2} > b$$

то есть $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ вправо за точку b . Так как φ по условию является максимальным решением, приходим к противоречию. \square

14. Признак продолжимости решения системы, сравнимой с линейной. Теорема о существовании и единственности максимального решения ЛС.

Теорема 7. Пусть $G = (a, b) \times \mathbb{R}_r^n$, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}(G)$, функции $u, v \in C(a, b)$ таковы, что для любых $(t, r) \in G$

$$|f(t, r)| \leq u(t)|r| + v(t)$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ определено на (a, b) .

Доказательство. По теореме о существовании и единственности максимального решения любая задача Коши с начальными данными $(t_0, r_0) \in G$ имеет единственное максимальное решение φ , заданное на некотором интервале (α, β) . Докажем, что границы

интервала (α, β) совпадают с границами интервала (a, b) . Пойдем от противного. Пусть, например, $\beta < b$. Принимая во внимание лемму о равносильном интегральном уравнении, при $t \in [t_0, \beta)$ находим

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq |r_0| + \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |r_0| + \int_{t_0}^t |u(\tau)| |\varphi(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Из непрерывности функций u и v вытекает их ограниченность на отрезке $[t_0, \beta]$. Следовательно, найдутся такие числа $\lambda, \mu \geq 0$, что при $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t |\varphi(s)| ds$$

Тогда по лемме Гронуолла

$$|\varphi(t)| \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)} \leq L$$

где $L = \lambda e^{\mu(\beta-t_0)}$. Отсюда следует, что график решения φ не покидает компакт

$$K = \{(t, r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leq L\} \subset G$$

при $t \in [t_0, \beta)$, что противоречит теореме о выходе интегральной кривой за пределы компакта. \square

Определение. Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t) \quad (1)$$

где $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

Теорема (существование и единственность максимального решения ЛС). Пусть $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in (a, b)$, $r_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда максимальное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{r} = P(t)r + q(t) \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \quad (2)$$

существует, единственно и определено на интервале (a, b) .

Доказательство. Заметим, что правая часть системы $f(t, r) = P(t)r + q(t)$ и ее производная $f'_r = P(t)$ непрерывны в области $(a, b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует единственное максимальное решение задачи (2) по теореме о \exists максимального решения.

Имеем

$$|f(t, r)| \leq |P(t)r| + |q(t)| \leq n|P(t)||r| + |q(t)|$$

Так как функции $u(t) = n|P(t)|$ и $v(t) = |q(t)|$ непрерывны на (a, b) , то по признаку продолжимости системы, сравнимой с линейной, решение задачи (2) продолжимо на интервал (a, b) .

15. Формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС.

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a, b) , то система (1), то есть

$$\dot{r} = P(t)r \quad (3)$$

называется **однородной**, в противном случае **неоднородной**.

Определение. Определителем Вронского (вронскианом) вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^n$, где $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$, называют определитель

$$W(t) = \det(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС). Пусть $t, t_0 \in (a, b)$, $P \in M_n(C(a, b))$, r_1, r_2, \dots, r_n — решения системы (3). Тогда их вронскиан

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} P(\tau) d\tau$$

Доказательство. Пусть X — матрица со столбцами r_1, r_2, \dots, r_n , а R_k — ее k -ая строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$\dot{W} = \det \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \dot{R}_n \end{pmatrix}$$

Так как

$$\dot{X} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n) = (Pr_1, Pr_2, \dots, Pr_n) = PX$$

то k -ая строка матрицы \dot{X} совпадает с k -ой строкой матрицы PX , то есть

$$\dot{R}_k = \sum_{j=1}^n p_{kj} R_j$$

где p_{kj} — элемент матрицы P в k -ой строке и j -ом столбце.

Подставляя выражение для \dot{R}_k в формулу для \dot{W} и используя свойства определителя, находим

$$\dot{W} = p_{11} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + p_{22} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \dots + p_{nn} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = W \operatorname{tr} P$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к требуемой формуле.

16. Общее решение ЛОС. Лемма о множестве фундаментальных матриц. Лемма об оцествлении.

Теорема (Общее решение ЛОС). Пусть $P \in M_n(C(a, b))$. Тогда множество решений системы $\dot{r} = P(t)r$ образуют n -мерное линейное пространство.

Доказательство. Пусть $t_0 \in (a, b)$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ — базис в \mathbb{R}^n . Тогда для любого $k \in [1 : n]$ существует r_k — решение задачи Коши $\dot{r} = P(t)r$, $r(t_0) = a_k$. Вронскиан этих решений $W(t_0) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$. Тогда функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение r системы $\dot{r} = P(t)r$. Пусть $\{c_k\}_{k=1}^n$ — координаты вектора $r(t_0)$ в базисе $\{a_k\}_{k=1}^n$. Положим

$$\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n$$

Ясно, что φ — решение системы $\dot{r} = P(t)r$, при этом $\varphi(t_0) = r_0$. Тогда $r \equiv \varphi$ в силу теоремы о единственности максимального решения ЛС.

Таким образом, функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит, $\{r_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве решений. \square

Определение. Фундаментальной системой решений системы уравнений $\dot{r} = P(t)r$ называется совокупность ее n линейно независимых решений.

Определение. Фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$ — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

Лемма (о множестве фундаментальных матриц). Пусть Φ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$. Тогда $\{\Phi A \mid A \in M_n(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$ — множество всех фундаментальных матриц этой системы.

Доказательство. Пусть Ψ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$. Тогда каждый ее столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы Φ . Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы A , имеем $\Psi = \Phi A$. А так как $\det \Psi \neq 0$ и $\det \Phi \neq 0$, то и $\det A \neq 0$.

Обратно, пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ — произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица ΦA состоит из решений, а ее определитель не обращается в ноль. Следовательно, эти решения линейно независимы, поэтому ΦA — фундаментальная матрица.

Лемма (Об овеществлении). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\Phi = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$, при этом $r_1 = \bar{r}_2$. Тогда

$$\Psi = (\operatorname{Re} r_1, \operatorname{Im} r_1, r_3, \dots, r_n)$$

— фундаментальная матрица той же системы.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}\Re r_1 &= \frac{1}{2}(r_1 + \bar{r}_1) = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 \\ \Im r_1 &= \frac{1}{2i}(r_1 - \bar{r}_1) = \frac{1}{2i}r_1 - \frac{1}{2i}r_2\end{aligned}$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

где E_{n-2} — единичная матрица порядка $n-2$. По лемме о множестве фундаментальных матриц матрица Ψ является фундаментальной.

17. Теорема о фундаментальной системе решений ЛОС с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса общего вида). Определение и свойства матричной экспоненты (без доказательств). Решение задачи Коши при помощи матричной экспоненты.

18. Общее решение ЛНС и метод вариации постоянных.

19. Теорема об изоморфизме решений ЛОС и ЛОУ, формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОУ. Метод вариации постоянных для ЛНУ.

20. Общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами.

Дополнительные вопросы

Уравнение 1-го порядка и его решение.

Это уравнение вида $F(x, y, y') = 0$. Функция φ — решение такого дифференциального уравнения, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$

2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на (a, b)

Пример. $y' - x = 0$, решение $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Методов решения много, все относятся к частным случаям.

Интегральная кривая уравнения.

Это график решения уравнения.

Общее решение уравнения.

Это множество всех его решений.

Уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной. Геометрический смысл.

Это уравнение вида $y' = f(x, y)$.

Пусть φ решение этого уравнения. Тогда $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, то есть тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0) это $f(x_0, y_0)$

Ломаная Эйлера.

См. 4

Уравнение в дифференциалах, его решение и параметрическое решение.

Уравнение в дифференциалах получается, если в уравнении, разрешенном относительно производной, записать $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Функция φ — решение такого дифференциального уравнения, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$

2. $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a, b)

Аналогично можно определить решение вида $x = \psi(y)$.

Функция $r = (\varphi(t), \psi(t))$ — параметрическое решение такого уравнения на α, β , если:

1. $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $r'(t) \neq 0$ на $t \in (\alpha, \beta)$

$$2. P(\varphi(t), \psi(t)) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0 \text{ на } t \in (\alpha, \beta)$$

Пример.

$$xdx + ydy = 0$$

Подстановкой тривиально можно убедиться, что $y = \sqrt{C^2 - x^2}$ — решение этого уравнения.

Параметрическое решение $(C \cos t, C \sin t)$

Особые точки уравнения в дифференциалах.

(x_0, y_0) — особая, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$

Пример.

$$xdx + ydy = 0$$

Особая точка $(0, 0)$, через нее ничто не проходит.

Геометрический смысл уравнения в дифференциалах и его решения.

Пусть $r = (x(t), y(t))$ есть параметрическое решение уравнения на (α, β) . Тогда при $t \in (\alpha, \beta)$:

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

$$F(r(t))r'(t) = 0$$

Таким образом, любая интегральная кривая в каждой своей точке перпендикулярная вектору $F(x, y)$

Задача Коши (ЗК) для уравнения 1-го порядка, разрешённого относительно производной.

Задача Коши — задача поиска решения уравнения, удовлетворяющему $y(x_0) = y_0$.

Теорема 8. $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда в некоторой окрестности x_0 существует решение задачи Коши.

Теорема 9. Как в предыдущей теореме, но $f'_y \in C(G)$. Тогда решение задачи Коши единственно.

Таким образом, может быть такое, что в некоторых (или всех) точках решение не единственно.

Особое решение уравнения.

Это решение уравнения, в каждой точке которого нарушается локальная единственность решения задачи Коши.

Пример.

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

Тогда особое решение $y' \equiv 0$, его в любой точке $(x_0, 0)$ пересекает решение вида $y = (x - x_0)^3/3$

Однородное уравнение.

Функция однородна степени α , если $\forall t, x, y \quad F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$

Однородное уравнение — уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, где P и Q однородные функции одной степени.

Замена $z = \frac{y}{x}$ сводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Геометрическое свойство решений однородного уравнения.

Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ — параметрическое решение однородного дифура. Растянем пространство в λ раз, получим $x = \lambda\varphi(t), y = \lambda\psi(t)$. При подстановке получим:

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0$$

По однородности:

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0$$

Таким образом, любое растяжение (или сжатие) решения однородного уравнения приводит к другому решению однородного уравнения.

Уравнение Бернулли.

Это уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Поделив на y^α и заменив $z = y^{1-\alpha}$, получаем линейное.

Уравнение Риккати.

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Оно решается только в особых случаях (например, $\alpha = 2$), но если нашел какое-то решение φ , то замена $y = z + \varphi$ сводит к Бернулли.

Уравнение в полных дифференциалах.

Это уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, при этом

$$\exists u : du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Решение имеет вид $u(x, y) = C$

Обязательное условие на существование u это $P'_y = Q'_x$. Если при этом $P, Q \in C^1(G)$ и G односвязна, то это условие еще и достаточно.

Если область прямоугольная, то можно решить систему $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$ следующим образом: Решаем первое уравнение при фиксированном y , после чего заменяем $C = C(y)$ и находим C как функцию.

В таком случае u есть потенциал векторного поля (P, Q) .

Интегрирующий множитель.

Это то, на что мы домножаем уравнение, чтобы получить уравнение в полных дифференциалах.

Если μ — инт. множитель, то

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

, то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

Это сложно решить, но иногда решается при $\mu'_x \equiv 0$ или $\mu'_y \equiv 0$.

Уравнение n-го порядка и его решение.

Это уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Его решение на a, b — φ , такое что:

1. $\varphi \in C^n(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на (a, b)

ЗК для уравнения, разрешённого относительно старшей производной.

Это уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Задача Коши для него имеет вид $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Методы понижения порядка уравнения.

- $y^{(n)} = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x) dx$
- $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) \xrightarrow{z=y^{(k)}} F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$
- $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Тогда пусть $z = y'$, $y''_{xx} = z'_y z$, $y'''_{xxx} = z''_{yy} z^2 + z'^2_y z$ и т.д.
- Пусть F линейна по y . Тогда можно заменить $z = y'/y$
- $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \implies \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$

Нормальная система уравнений, её решение.

Нормальная система порядка n это система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Можно ввести пару обозначений для краткости:

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \vdots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix} \quad \dot{r} = f(t, r)$$

φ — решение такой системы, если:

1. $\varphi \in C^1((a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n)$
2. $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на (a, b)

Интегральная кривая нормальной системы.

Это график решения, но теперь он в $(n + 1)$ -мерном пространстве.

Глобальное и локальное условие Липшица.

Функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица на множестве D , если $\exists L$ — константа Липшица, что для $\forall r_1, r_2 \in D$ $|f(r_2) - f(r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f \in \text{Lip}[1/2, 1]$, $f \notin \text{Lip}(0, 1]$, $f \in \text{Lip}_{loc}(0, 1]$

Функция $f : \mathbb{R}_{t,r}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по r (равномерно по t) на множестве D , если $\exists L$, что для $\forall (t, r_1), (t, r_2) \in D$ $|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$, обозначается $f \in \text{Lip}_r(D)$

$f \in \text{Lip}_{loc}(D)$ локально, если $\forall x_0 \in D \exists U(x_0) f \in \text{Lip}(U(x_0))$

Приближения Пикара.

- $\varphi_0(t) = 0$
- $\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$

Сведение уравнения n -го порядка к равносильной системе.

Пусть $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$

Лемма 5. y — решение $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ на $(a, b) \Leftrightarrow \Lambda_n y$ — решение на (a, b)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

- \Rightarrow Пусть y — решение первого уравнения. Тогда пусть $y_k = y^{(k-1)}$. Тогда первые $n-1$ уравнений решаются, а $\dot{y}_n = y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, искомое верно.
- \Leftarrow Пусть r — решение второго уравнения. Будем последовательно дифференцировать первое уравнение и получим искомое.

□

Максимальное решение.

Решение φ продолжимо, если есть решение ψ на большем отрезке, равное φ на $\text{dom} \varphi$.

Если у решения нет продолжения, оно максимально.

Определитель Вронского (решений ЛОС и ЛОУ) и его свойства.

Вронсиан множества вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^n$, где $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})^T$:

$$W(t) = \det(r_1(t), \dots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Фундаментальная система решений.

Фундаментальная матрица.

Метод неопределённых коэффициентов для ЛС.