0 Введение

Пусть мы хотим найти y — функцию от одного аргумента.

Определение. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ — **дифференциальное уравнение**

Пример. Условие задачи:

$$dy_n \approx ky_n dt$$
$$\frac{dy}{dt} \approx ky$$
$$y' = ky \tag{1}$$
$$y(t) = ?$$

Предположим, что $y = kt$ — решение искомого дифференциального уравнения. Подставим $y = kt$ в (1).

$$(kt)' = k(kt)$$
$$k = k^2 t$$
$$1 = kt$$
$$t = \frac{1}{k}$$

Это не верно для всех t, следовательно $y = kt$ — не решение.

Предположим, что $y = e^{kt}$ — решение.

$$(e^{kt})' = ke^{kt}$$
$$ke^{kt} = ke^{kt}$$
$$e^{kt} = e^{kt}$$

Это верно $\forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Кроме того, $y = Ce^{kt}$ — решение $\forall C \in \mathbb{R}$

Пример. Груз массой m подвешен к пружине. Пусть его положение — функция $x(t)$.

В положении равновесия:

$$mg = -kx_0$$

Второй закон Ньютона:

$$F_\Sigma = ma$$
$$mg + (-k(x - x_0)) = m\ddot{x}$$

Примечание. $\ddot{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{d^2x}{dt^2}$ *(вторая производная x по t)*

$$-kx_0 - kx + kx_0 = m\ddot{x}$$
$$-kx = m\ddot{x}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Ответ:

$$x(t) = A\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \phi_0\right)$$

A, ϕ_0 — произвольные постоянные.

1 Уравнения первого порядка. Основные понятия.

1.1 Уравнение первого порядка и его решения

Определение. $F(x, y, y') = 0$ — **уравнение первого порядка**

Определение. **Решением** уравнения первого порядка на (a, b) называется функция $\varphi \in C^1(a, b)$:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

(a и b могут быть ∞)

Пример.

$$\lhd y' = x$$
$$y = \frac{x^2}{2} + C$$
$$\text{Частные решения: } \begin{cases} \varphi(x) = \frac{x^2}{2} - \text{решение на } (-\infty, +\infty) \\ \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \end{cases}$$

Определение. **Общее решение** — множество всех решений.

Определение. **Общий интеграл** — соотношение вида $F(x, y, C) = 0$, которое при любом допустимом C неявно задаёт решение.

Пример.

$$y - \frac{x}{2} + C = 0 - \text{общий интеграл}$$

Определение. **Интегральная кривая** уравнения — график его решения.

1.2 Формы записи уравнения первого порядка

Определение. $y' = f(x, y)$ — уравнение, **разерешенное относительно производной** *(нормальная форма)*.

Пример.

$$\lhd y' = -\frac{x}{y}$$

$$y = \sqrt{1-x} \text{ — решение на } x \in (-1, 1)$$

$$y = -\sqrt{1-x} \text{ — решение на } x \in (-1, 1)$$

Кроме того, можно решить относительно x:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

$$x = \sqrt{1-y} \text{ — решение на } y \in (-1, 1)$$

$$x = -\sqrt{1-y} \text{ — решение на } y \in (-1, 1)$$

Определение. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ — **уравнение в дифференциалах**

Определение. **Решением уравнения в дифференциалах** называется функция $y(x) \in C^1(a, b)$, такая что:

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Аналогично определяется решение $x(y)$.

Определение. **Параметрическим решением уравнения в дифференциалах** называется пара $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$, такая что:

1. $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$
2. $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$

Примечание. Первое условие гарантирует, что в графике нет изломов, т.к. мы всегда "движемся" хотя бы по одной из осей.

Определение. **Интегральная кривая уравнения в дифференциалах** — кривая, параметризация которой является параметрическим решением.

Пример.

$$ydy + xdx = 0$$

Параметрическое решение: $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

1.3 Поле направлений и приближенные решения

$\lhd y' = f(x, y)$

G — область в $\mathbb{R}^2$

$f \in C(G)$

Пусть φ — решение на (a, b), т.е. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (a, b)$

$y_0 := \varphi(x_0)$

$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$

$(1, f(x_0, y_0))$ — касательный вектор к $y(x)$ в точке x_0

Построив множество касательных векторов, можно увидеть, как должны идти искомые кривые, т.к. они должны касаться этих векторов.

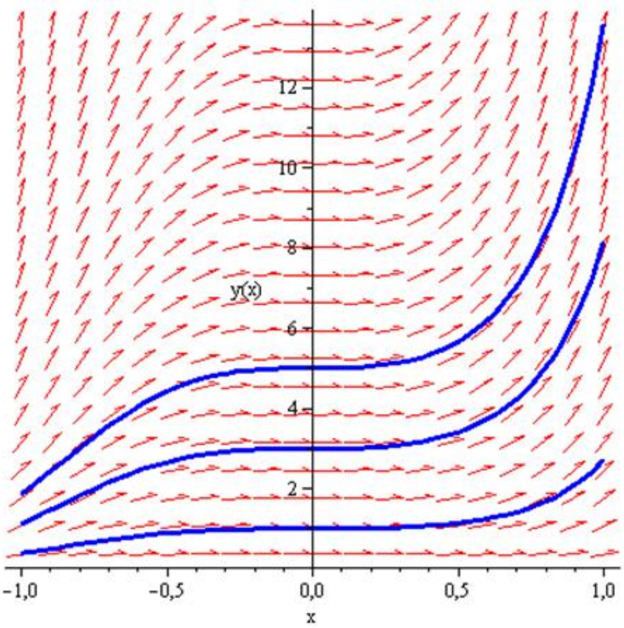

Рис. 1: Поле направлений с ломаными Эйлера

Определение (Ломаная Эйлера). $\lhd y' = f(x, y)$, (x_0, y_0) — начальная точка, Δx — постоянный шаг.

Вершины **ломаной Эйлера**: $\begin{cases} x_k = x_0 + k\Delta x \\ y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta x \end{cases}$

1.4 Задача Коши

Определение. **Задача Коши** *(начальная задача)* для уравнения $y' = f(x, y)$ — задача отыскать его решения, удовлетворяющие начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 — начальные данные задачи.

Пример.

$$y' = 2x \quad y(1) = 2$$

Решение:

$$y = x^2 + C$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

Ответ: $y = x^2 + 1, x \in (-\infty, +\infty)$