

Примечание. Эти решения проверены только частично через `lean`, верность не гарантируется.

Упражнение 1 (2.d). $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$

Докажем, что $A \& B \vdash B \& A$, это эквивалентно искомому.

- | | | |
|----|--------------------------------------|----------------|
| 1. | $A \& B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \& B \rightarrow A$ | (a. 4) |
| 3. | A | (M.P. 1, 2) |
| 4. | $A \& B \rightarrow B$ | (a. 5) |
| 5. | B | (M.P. 1, 4) |
| 6. | $A \rightarrow B \rightarrow A \& B$ | (a. 3) |
| 7. | $B \rightarrow A \& B$ | (M.P. 3,6) |
| 8. | $A \& B$ | (M.P. 5,7) |

Упражнение 2 (2.e). $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

Докажем, что $A \vdash \neg\neg A$, это эквивалентно искомому.

- | | | |
|----|---|------------------|
| 1. | A | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg A \rightarrow A$ | (M.P. 1, 2) |
| 4. | $\neg A \rightarrow \neg A$ | (доказано ранее) |
| 5. | $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$ | (a. 9) |
| 6. | $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$ | (M.P. 4,5) |
| 7. | $\neg\neg A$ | (M.P. 3,6) |

Упражнение 3 (2.f). $A \& \neg A \vdash B$

- | | | |
|----|--|----------------|
| 1. | $A \& \neg A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \& \neg A \rightarrow A$ | (a. 4) |
| 3. | $A \& \neg A \rightarrow \neg A$ | (a. 5) |
| 4. | A | (M.P. 1, 2) |
| 5. | $\neg A$ | (M.P. 1, 3) |
| 6. | $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ | (a. 1) |
| 7. | $\neg B \rightarrow A$ | (M.P. 4, 6) |
| 8. | $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | (a. 1) |

- | | | |
|-----|---|--------------|
| 9. | $\neg B \rightarrow \neg A$ | (М.Р. 5, 8) |
| 10. | $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$ | (a. 9) |
| 11. | $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$ | (М.Р. 7,10) |
| 12. | $\neg\neg B$ | (М.Р. 9,11) |
| 13. | $\neg\neg B \rightarrow B$ | (a. 10) |
| 14. | B | (М.Р. 12,13) |

Упражнение 4 (3.a). $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$

- | | | |
|----|---|------------------|
| 1. | $A \& B \rightarrow A$ | (a. 4) |
| 2. | $\neg A \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg A$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg A$ | ($\in \Gamma$) |
| 4. | $A \& B \rightarrow \neg A$ | (М.Р. 2,3) |
| 5. | $(A \& B \rightarrow A) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$ | (a. 9) |
| 6. | $(A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$ | (М.Р. 1, 5) |
| 7. | $\neg(A \& B)$ | (М.Р. 4,6) |

Упражнение 5 (3.b). $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

- | | | |
|----|---|------------------|
| 1. | $A \& B \rightarrow B$ | (a. 4) |
| 2. | $\neg B \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg B$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg B$ | ($\in \Gamma$) |
| 4. | $A \& B \rightarrow \neg B$ | (М.Р. 2,3) |
| 5. | $(A \& B \rightarrow B) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ | (a. 9) |
| 6. | $(A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ | (М.Р. 1, 5) |
| 7. | $\neg(A \& B)$ | (М.Р. 4,6) |

Упражнение 6 (3.c). $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

- | | | |
|----|--|--------|
| 1. | $A \& B \rightarrow B$ | (a. 4) |
| 2. | $\neg B \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg B$ | (a. 1) |

3. $\neg B$ ($\in \Gamma$)
4. $A \& B \rightarrow \neg B$ (М.Р. 2,3)
5. $(A \& B \rightarrow B) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ (а. 9)
6. $(A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$ (М.Р. 1, 5)
7. $\neg(A \& B)$ (М.Р. 4,6)

Упражнение 7 (3.d). $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

1. $(A \vee B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee B)$ (а. 9)
2. $(A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A)$ (а. 8)
3. $A \rightarrow A$ (доказано ранее)
4. $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A)$ (М.Р. 2,3)
5. $\neg A$ ($\in \Gamma$)
6. $\neg B$ ($\in \Gamma$)
7. $\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (3.g)
8. $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (М.Р. 5, 7)
9. $B \rightarrow A$ (М.Р. 6, 8)
10. $A \vee B \rightarrow A$ (М.Р. 4, 9)
11. $(A \vee B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee B)$ (М.Р. 1, 10)
12. $\neg A \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg A)$ (а. 1)
13. $A \vee B \rightarrow \neg A$ (М.Р. 5,12)
14. $\neg(A \vee B)$ (М.Р. 11,13)

Упражнение 8 (3.e). $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

130 (c) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

1) $(A \rightarrow B) \rightarrow B \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow \bar{B} \} \rightarrow \{ \bar{A} \rightarrow B \}$
 2) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B \} \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow B \}$
 3) $A \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow A \}$ 4) A 5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \}$
 6) $A \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow \bar{A} \rightarrow B \} \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow B \}$ (2, 5, MP) 6.5) $\alpha \rightarrow \alpha$
 7) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ 8) $\{ (A \rightarrow B) \rightarrow \bar{B} \} \rightarrow \bar{A} \rightarrow B$ (1, 7, MP)
 9) $\bar{B} \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow \bar{B} \}$ 10) \bar{B}
 11) $(A \rightarrow B) \rightarrow \bar{B}$ (9, 10, MP)
 12) $\overline{(A \rightarrow B)}$ (8, 11, MP)

$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$
$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Упражнение 9 (3.f). $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

Докажем $\neg A, B, A \vdash B$, т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

1. B ($\in \Gamma$)

Упражнение 10 (3.g). $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$

Докажем $\neg A, \neg B, A \vdash B$, т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

- | | | |
|-----|--|------------------|
| 1. | A | ($\in \Gamma$) |
| 2. | $\neg A$ | ($\in \Gamma$) |
| 3. | $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ | (a. 1) |
| 4. | $\neg B \rightarrow A$ | (M.P. 1, 3) |
| 5. | $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ | (a. 1) |
| 6. | $\neg B \rightarrow \neg A$ | (M.P. 2, 5) |
| 7. | $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$ | (a. 9) |
| 8. | $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$ | (M.P. 4, 7) |
| 9. | $\neg \neg B$ | (M.P. 6, 8) |
| 10. | $\neg \neg B \rightarrow B$ | (a. 10) |

11. B

(М.Р. 9, 10)

Упражнение 11 (3.h). $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

$$\begin{aligned}
 & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\
 & (A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\
 & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \\
 & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A \vdash C
 \end{aligned}$$

- | | |
|----------------------|----------------|
| 1. A | $(\in \Gamma)$ |
| 2. $A \rightarrow B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 3. B | (М.Р. 1,2) |
| 4. $B \rightarrow C$ | $(\in \Gamma)$ |
| 5. C | (М.Р. 3,4) |

Упражнение 12 (3.i). $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$

Это утверждение не тавтология, что проверяется подстановкой 0, 0, 1. В силу корректности исчисления высказываний из пустого множества можно вывести только тавтологии, таким образом это утверждение не выводится.

Упражнение 13 (3.j). $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

$$\begin{aligned}
 & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \\
 & (A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A \\
 & (A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A
 \end{aligned}$$

- | | |
|--|----------------|
| 1. $A \rightarrow B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. $\neg B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 3. $\neg B \rightarrow A \rightarrow \neg B$ | (a. 1) |
| 4. $A \rightarrow \neg B$ | (М.Р. 2,3) |
| 5. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ | (a. 9) |
| 6. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ | (М.Р. 1,5) |
| 7. $\neg A$ | (М.Р. 4,6) |

Упражнение 14 (4.a). $\vdash A \vee \neg A$

1. $A \rightarrow A \vee \neg A$ (акс. 6)
2. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ (акс. 7)
3. $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A$ (закон контрапозиции)
4. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A$ (закон контрапозиции)
5. $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ (акс. 9)
6. $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ (М.Р. 4,6)
7. $\neg\neg(A \vee \neg A)$ (М.Р. 5,7)
8. $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ (акс. 10)
9. $A \vee \neg A$ (М.Р. 8,9)

Упражнение 15 (4.b). $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

1. $A \& B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$ (т. о дедукции)
2. $(\neg A \vee \neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (акс.9)
3. $A \& B \rightarrow A$ (акс. 4)
4. $A \& B \rightarrow B$ (акс. 5)
5. A (М.Р. 3, 1)
6. B (М.Р. 4, 1)
7. $A \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$ (акс.1)
8. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$ (М.Р. 7, 5)
9. $(\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (М.Р. 2, 8)
10. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A)$ (акс. 8)
11. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A)$ (М.Р. 8 и известный факт)
12. $B, A \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ равносильно $B, A, \neg B \vdash \neg A$ (т. о дедукции)
13. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (акс.9)
14. $\neg A$ (дважды аксиома 1 из B и $\neg B$)
15. $\neg B \rightarrow \neg A$ (доказали по дедукции)
16. $(\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A)$ (М.Р. 11, 15)
17. $\neg(\neg A \vee \neg B)$ (М.Р. 9, 16)

Упражнение 16 (4.c). $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$

1. $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$ (акс. 6)
2. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$ (контрапозиция)
3. $\vdash B \rightarrow (A \vee B)$
4. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$
5. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$
6. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$
7. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B$
8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B$
9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B$
10. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B$
11. $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow \neg\neg(A \vee B)$
12. $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B)$
13. $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B) \rightarrow A \vee B$
14. $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash A \vee B$
15. $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$

Упражнение 17 (4.d). $\vdash A \& \neg A \rightarrow A \vee B$

$$\vdash A \& \neg A \rightarrow A \vee B$$

$$A \& \neg A \vdash A \vee B$$

1. $A \& \neg A$ ($\in \Gamma$)
2. $A \& \neg A \rightarrow A$ (а. 4)
3. A (М.Р. 1,2)
4. $A \rightarrow A \vee B$ (а. 6)
5. $A \vee B$ (М.Р. 3,4)

Упражнение 18 (4.e). $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

Идея решения — рассмотрим три случая : $A \in \Gamma$; $\neg A, B \in \Gamma$; $\neg A, \neg B \in \Gamma$

Упражнение 19 (5). Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \not\equiv \beta$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \not\equiv \gamma$ и $\beta \not\equiv \gamma$.

Решение, рассказанное на паре $\gamma := \alpha \& \beta$, неверное, т.к. при тавтологии β выполняется $\alpha \equiv \gamma$.

Верное решение: пусть множество подстановок, на которых α выполняется — \mathcal{A} , для β — \mathcal{B} . Несложно заметить, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, при этом $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}|$. Если $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}| - 1$, то можно найти множество между ними, т.е. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Если $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| - 1$, то нужно ввести новую переменную, чтобы разница стала больше.

Упражнение 20 (6). $\alpha \vdash \beta, \neg\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \beta$

- | | | |
|-----|---|----------------|
| 1. | α | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg\beta \rightarrow \alpha$ | (M.P. 1,2) |
| 4. | $\neg\alpha$ | $(\in \Gamma)$ |
| 5. | $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | (a. 1) |
| 6. | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | (M.P. 4,5) |
| 7. | $(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$ | (a. 9) |
| 8. | $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$ | (M.P. 3,7) |
| 9. | $\neg\neg\beta$ | (M.P. 6,8) |
| 10. | $\neg\neg\beta \rightarrow \beta$ | (a. 10) |
| 11. | β | (M.P. 9,10) |