

# Математическая статистика

Михайлов Максим

14 января 2022 г.

# Оглавление

|                 |   |           |
|-----------------|---|-----------|
| <b>Лекция 1</b> | <b>6 сентября</b>   | <b>6</b>  |
| 1               | Организационные вопросы . . . . .                           | 6         |
| 2               | Введение . . . . .  | 6         |
| 2.1             | Выборочная функция распределения . . . . .                  | 7         |
| 3               | Первоначальная обработка статданных . . . . .               | 8         |
| <b>Лекция 2</b> | <b>13 сентября</b>  | <b>10</b> |
| 4               | Точечные оценки . . . . .                                   | 10        |
| 4.1             | Свойства статистических оценок . . . . .                    | 10        |
| 4.1.1           | Состоятельность . . . . .                                   | 10        |
| 4.1.2           | Несмещённость . . . . .                                     | 10        |
| 4.1.3           | Эффективность . . . . .                                     | 11        |
| 4.2             | Точечные оценки моментов . . . . .                          | 11        |
| 4.3             | Метод моментов . . . . .                                    | 14        |
| <b>Лекция 3</b> | <b>20 сентября</b>  | <b>16</b> |
| 4.4             | Метод максимального правдоподобия . . . . .                 | 16        |
| 5               | Неравенство Рао-Крамера . . . . .                           | 19        |
| <b>Лекция 4</b> | <b>18 сентября</b>  | <b>21</b> |
| 6               | Распределения в матстатистике . . . . .                     | 21        |
| 6.0             | Нормальное распределение . . . . .                          | 21        |
| 6.1             | Гамма-распределение . . . . .                               | 21        |
| 6.2             | Распределение “хи-квадрат” . . . . .                        | 22        |
| 6.3             | Распределение Стьюдента . . . . .                           | 22        |
| 6.4             | Распределение Фишера-Снедекора . . . . .                    | 22        |
| 7               | Линейные преобразования нормальных выборок . . . . .        | 23        |
| 7.1             | Многомерные нормальные распределения . . . . .              | 26        |
| <b>Лекция 5</b> | <b>4 октября</b>  | <b>28</b> |
| 8               | Квантили распределений . . . . .                            | 28        |
| 8.1             | Квантили основных распределений в Excel . . . . .           | 28        |
| 8.2             | Интервальные оценки . . . . .                               | 29        |
| 8.2.1           | Интервальные оценки для нормального распределения . . . . . | 29        |
| <b>Лекция 6</b> | <b>11 октября</b>   | <b>33</b> |
| 9               | Гипотезы . . . . .  | 33        |
| 9.1             | Способы сравнения критериев . . . . .                       | 34        |
| 9.2             | Критерий согласия . . . . .                                 | 34        |

|                  |   |           |
|------------------|---|-----------|
| 9.3              | Построение критериев согласия . . . . .   | 34        |
| 9.4              | Доверительные интервалы как критерии гипотез о параметрах распределения . . . . . | 36        |
| 9.5              | Распределение Коши . . . . .  | 37        |
| <b>Лекция 7</b>  | <b>18 октября</b>   | <b>40</b> |
| 9.6              | Критерии для проверки гипотез о распределении . . . . .                           | 40        |
| 9.6.1            | Критерий $\chi^2$ для параметрической гипотезы . . . . .                          | 40        |
| 9.6.2            | Критерий $\chi^2$ для гипотезы о распределении . . . . .                          | 42        |
| 9.6.3            | Критерий Колмогорова для гипотезы о распределении . . . . .                       | 42        |
| 9.7              | Критерии для проверки однородности . . . . .                                      | 42        |
| 9.7.1            | Критерий Колмогорова-Смирнова . . . . .   | 43        |
| 9.7.2            | Критерий Фишера . . . . .   | 43        |
| 9.7.3            | Критерий Стьюдента . . . . .  | 44        |
| <b>Лекция 8</b>  | <b>25 октября</b>   | <b>45</b> |
| 10               | Статистическая зависимость . . . . .  | 45        |
| 10.1             | Корреляционное облако . . . . .   | 45        |
| 10.2             | Корреляционная таблица . . . . .  | 45        |
| 10.3             | Критерий $\chi^2$ для проверки независимости . . . . .                            | 46        |
| 10.4             | Однофакторный дисперсионный анализ . . . . .                                      | 48        |
| 10.4.1           | Общая, межгрупповая и внутригрупповая дисперсия . . . . .                         | 48        |
| 10.4.2           | Проверка гипотезы о влиянии фактора . . . . .                                     | 49        |
| <b>Лекция 9</b>  | <b>1 ноября</b>   | <b>51</b> |
| 11               | Исследование статистической зависимости . . . . .                                 | 51        |
| 11.1             | Математическая модель регрессии . . . . .   | 51        |
| 11.1.1           | Метод наименьших квадратов . . . . .  | 52        |
| 11.1.2           | Линейная парная регрессия . . . . .   | 52        |
| 11.1.3           | Геометрический смысл прямой линейной регрессии . . . . .                          | 54        |
| 11.2             | Выборочный коэффициент линейной корреляции . . . . .                              | 54        |
| 11.2.1           | Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции . . . . .      | 55        |
| 11.3             | Исторический смысл понятия регрессии . . . . .                                    | 55        |
| 11.4             | Выборочное корреляционное отношение . . . . .                                     | 55        |
| <b>Лекция 10</b> | <b>8 ноября</b>   | <b>57</b> |
| 11.5             | Коэффициент детерминации . . . . .  | 59        |
| 11.6             | Качество моделей линейной регрессии . . . . .                                     | 61        |
| <b>Лекция 11</b> | <b>15 ноября</b>  | <b>64</b> |
| 12               | Общая модель линейной регрессии . . . . .   | 64        |
| 12.1             | Метод наименьших квадратов и нормальные уравнения . . . . .                       | 65        |
| <b>Лекция 12</b> | <b>22 ноября</b>  | <b>69</b> |
| 12.2             | Построение и анализ уравнения множественной линейной регрессии . . . . .          | 69        |
| 12.2.1           | Мультиколлинеарность . . . . .  | 69        |
| 12.2.2           | Начальный отбор факторов модели . . . . .   | 70        |
| 12.2.3           | Анализ уравнения линейной регрессии . . . . .                                     | 70        |

|                  |  |           |
|------------------|--|-----------|
| 12.2.4           | Уравнение регрессии в стандартных масштабах . . . . .                          | 71        |
| 12.3             | Частные коэффициенты эластичности . . . . .                                    | 72        |
| 12.4             | Коэффициенты детерминации и множественной корреляции . . . . .                 | 73        |
| 12.5             | Проверка гипотезы о значимости уравнения регрессии в целом . . . . .           | 74        |
| 12.6             | Проверка гипотезы о значимости отдельного коэффициента регрессии . . . . .     | 74        |
| <b>Лекция 13</b> | <b>29 ноября</b>   | <b>75</b> |
| 12.7             | Некоррелированные наблюдения . . . . .   | 75        |
| 12.8             | Коррелированные наблюдения . . . . .   | 76        |
| 13               | Нелинейная парная регрессия . . . . .  | 77        |
| 13.1             | Модель очень быстрого роста . . . . .  | 77        |
| 13.2             | Модель быстрого роста . . . . .  | 77        |
| 13.3             | Модель медленного роста . . . . .  | 77        |
| 13.4             | Модель очень медленного роста . . . . .  | 77        |
| 13.5             | Модель медленной стабилизации . . . . .  | 77        |
| 13.6             | Модель быстрой стабилизации . . . . .  | 77        |
| 13.7             | Зависимость в виде полинома . . . . .  | 78        |
| 14               | Метод главных компонент (приведение к главным осям) . . . . .                  | 78        |
| 15               | Метод Тейла . . . . .  | 78        |
| 16               | Ортогональная матрица плана $Z$ . . . . .                                      | 78        |
| <b>Лекция 14</b> | <b>6 декабря</b>   | <b>79</b> |
| 17               | Моделирование случайных величин . . . . .                                      | 79        |
| 17.1             | Датчики случайных чисел . . . . .  | 79        |
| 17.1.1           | Физические датчики . . . . .   | 79        |
| 17.1.2           | Таблица случайных чисел . . . . .  | 79        |
| 17.1.3           | Математические датчики . . . . .   | 79        |
| 17.1.4           | Рекомендации . . . . .   | 80        |
| 17.1.5           | Датчик Уичмана и Хилла . . . . .   | 80        |
| 17.2             | Моделирование непрерывных распределений . . . . .                              | 80        |
| 17.2.1           | Метод обратных функций (квантильное преобразование) . . . . .                  | 80        |
| 17.2.2           | Нормальные случайные числа на основе ЦПТ . . . . .                             | 81        |
| 17.2.3           | Точное моделирование пары независимых случайных величин<br>$N(0, 1)$ . . . . . | 81        |
| 17.2.4           | Быстрый показательный датчик . . . . .   | 82        |
| 17.3             | Моделирование дискретных распределений . . . . .                               | 83        |
| 17.3.1           | Общий метод . . . . .  | 83        |
| 17.3.2           | Биномиальное распределение . . . . .   | 83        |
| 17.3.3           | Геометрическое распределение . . . . .   | 83        |
| 17.3.4           | Распределение Пуассона . . . . .   | 83        |
| <b>Лекция 15</b> | <b>13 декабря</b>  | <b>85</b> |
| 18               | Метод Монте-Карло . . . . .  | 85        |
| 18.1             | Вычисление определенных интегралов . . . . .                                   | 86        |
| 18.1.1           | Квадратурные формулы . . . . .   | 86        |
| 18.2             | Вычисление кратных интегралов . . . . .  | 87        |

---

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| 18.3      | Метод Монте-Карло расслоенной выборкой . . . . .           | 87 |
| 19        | Равномерность по Вейлю . . . . .                           | 88 |
| 20        | Парадокс первой цифры . . . . .                            | 88 |
| Лекция 16 | 20 декабря.  | 89 |
| 21        | Энтропия . . . . .   | 89 |
| 21.1      | Непрерывные распределения с наибольшей энтропией . . . . . | 91 |
| 22        | Задача о ??? . . . . .                                     | 91 |

# Лекция 1

## 6 сентября

### 1 Организационные вопросы

Большая часть баллов зарабатывается индивидуальными заданиями, выполняемыми в Excel — 30 баллов. Тест с большим числом вопросов — 20 или 25 баллов.

### 2 Введение

Теория вероятности состоит в следующем: исследуется случайная величина с заданным распределением. Математическая статистика занимается обратным — даны данные, нужно приближенно найти числовые характеристики случайной величины и с некоторой уверенностью найти вид распределения. Матстатистика также исследует связанность случайных величин, их корреляцию. В идеале есть цель построить модель, которая по значениям одних случайных величин предсказывает другие.

Пусть проводится некоторое количество экспериментов, в ходе которых появились некоторые данные.

**Определение.** Генеральная совокупность — набор всех исходов проведенных экспериментов.

В реальности наблюдается некоторая выборка генеральной совокупности, ибо рассматривать всю совокупность нецелесообразно.

**Определение.** Выборочная совокупность — исходы наблюдаемых экспериментов.

**Определение.** Выборка называется **репрезентативной**, если её распределение совпадает с распределением генеральной совокупности.

Выборка может быть нерепрезентативной, как в примере с ошибкой выжившего. Мы считаем, что таких ошибок у нас нет и все выборки репрезентативны, ибо исправление

этих ошибок — задача конкретной области, в которой используется матстатистика.

**Определение (после опыта).** Пусть проведено  $n$  наблюдаемых независимых экспериментов, в которых случайная величина приняла значение  $X_1, X_2 \dots X_n$ . Набор<sup>1</sup> этих данных называется **выборкой объема  $n$** .

**Определение (до опыта).** **Выборкой объема  $n$**  называется набор из  $n$  независимых одинаково распределенных случайных величин.

Пусть имеется выборка в смысле “после опыта” объема  $n$ . Её можно интерпретировать как следующую дискретную случайную величину:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} X_i & X_1 & X_2 & \dots & X_n & \sum \\ \hline p_i & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{array}$$

**Средневыборочное:**

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Выборочная дисперсия:**

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

## 2.1 Выборочная функция распределения

$$F_n^*(z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < z) = \frac{\text{число } X_i \in (-\infty, z)}{n}$$

*Примечание.*  $I$  — индикатор:

$$I(X_i < z) = \begin{cases} 1, & X_i < z \\ 0, & X_i \geq z \end{cases}$$

**Теорема 1.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n^*(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(z)$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\mathbb{E} I(X_1 < z) = 1 \cdot P(X_1 < z) + 0 \cdot P(X_1 \geq z) = P(X_1 < z) = F(z)$$

---

<sup>1</sup> Или вектор.

, где  $F(z)$  — функция распределения  $X_1$ . Заметим, что  $F(z) \leq 1 < \infty$ , следовательно применим ЗБЧ Хинчина:

$$F_n^*(z) = \frac{\sum_{i=1}^n I(X_i < z)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E} I(X_1 < z) = F(z)$$

□

*Примечание.* На самом деле имеется даже равномерная сходимость по вероятности — это теорема Гливенко-Кантелли:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n^*(z) - F(z)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

### 3 Первоначальная обработка статданных

Если отсортировать данные, то получим **вариационный ряд**:  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . Если учесть повторяющиеся экземпляры, то получим **частотный вариационный ряд**:

| $X_{(i)}$ | $X_{(1)}$       | $X_{(2)}$       | $\dots$ | $X_{(k)}$       | $\sum$ |
|-----------|-----------------|-----------------|---------|-----------------|--------|
| $n_i$     | $n_1$           | $n_2$           | $\dots$ | $n_k$           | $n$    |
| $p_i^*$   | $\frac{n_1}{n}$ | $\frac{n_2}{n}$ | $\dots$ | $\frac{n_k}{n}$ | 1      |

**Определение.**  $h := X_{\max} - X_{\min}$  — **размах выборки**

Допустим, что разбили интервал  $(X_{\min}, X_{\max})$  на  $k$  интервалов, чаще всего одинаковой длины.<sup>2</sup> Тогда  $l_i = \frac{h}{k}$  — длина каждого интервала и интервальный ряд можно заменить интервальным вариационным рядом.

| $i$             | $l_1$           | $l_2$           | $\dots$ | $l_k$           | $\sum$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|---------|-----------------|--------|
| $m_i$           | $m_1$           | $m_2$           | $\dots$ | $m_k$           | $n$    |
| $\frac{m_i}{n}$ | $\frac{m_1}{n}$ | $\frac{m_2}{n}$ | $\dots$ | $\frac{m_k}{n}$ | 1      |

$m_i$  — число попавших в  $i$ -тый интервал данных.

По такой таблице можно построить **гистограмму**. На координатной плоскости построим прямоугольники с основаниями  $l_i$  и высотами  $\frac{m_i}{nl_i}$ . В результате получаем ступенчатую фигуру площади 1, которая и называется гистограммой.

**Теорема 2.** При  $n \rightarrow \infty, k(n) \rightarrow \infty$ , причем  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$ , гистограмма будет стремиться к плотности распределения:

$$\frac{m_i}{n} \xrightarrow{P} P(X_i \in l_i) = \int_{l_i} f(x) dx$$

<sup>2</sup> Применяются и другие разбиения, например равнонаполненное.



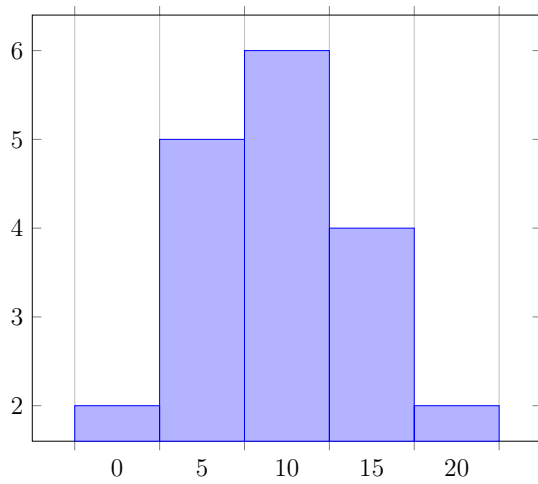


Рис. 1.1: Пример  
гистограммы

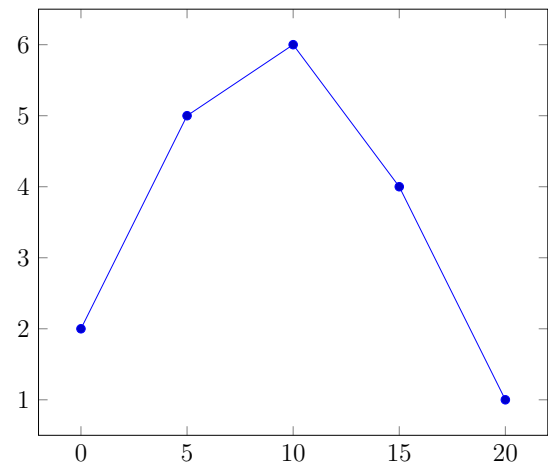


Рис. 1.2: Пример  
полигона

Чаще всего число интервалов берется по формуле Стёрджесса:  $k \approx 1 + \log_2 n$ . Иногда  $k \approx \sqrt[3]{n}$ .

*Примечание.* Иногда выборка изображается в виде **полигона**: отображаются точки, соответствующие серединам интервалов и ставим точки на высоте  $\frac{m_i}{n}$ .

# Лекция 2

## 13 сентября

### 4 Точечные оценки

Пусть имеется выборка объема  $n$ :  $X = (X_1 \dots X_n)$

**Определение.** Статистикой называется измеримая функция  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$ .

Пусть требуется найти значение параметра  $\theta$  случайной величины  $X$  по данной выборке. Оценку будем считать с помощью некоторой статистики  $\theta^*$ .

#### 4.1 Свойства статистических оценок

##### 4.1.1 Состоятельность

**Определение.** Статистика  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$  называется **состоятельной оценкой** параметра  $\theta$ , если:

$$\theta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$$

##### 4.1.2 Несмещённость

**Определение.** Статистика  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$  называется **несмещенной оценкой** параметра  $\theta$ , если

$$\mathbb{E} \theta^* = \theta$$

*Примечание.* То есть с равной вероятностью можем ошибиться как в меньшую, так и в большую сторону. Нет систематической ошибки.

**Определение.** Статистика  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$  называется **асимптотически несмещенной оценкой** параметра  $\theta$ , если

$$\mathbb{E} \theta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$$

*Примечание.* То есть при достаточно большом объеме выборки ошибка исчезает, но при малом она может существовать.

#### 4.1.3 Эффективность

**Определение.** Оценка  $\theta_1^*$  не хуже оценки  $\theta_2^*$ , если

$$\mathbb{E}(\theta_1^* - \theta)^2 \leq \mathbb{E}(\theta_2^* - \theta)^2$$

или, если обе оценки несмещенные,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta_1^* - \theta)^2 &\leq \mathbb{E}(\theta_2^* - \theta)^2 \\ \mathbb{E}(\theta_1^* - \mathbb{E} \theta_1^*)^2 &\leq \mathbb{E}(\theta_2^* - \mathbb{E} \theta_2^*)^2 \\ \mathbb{D} \theta_1^* &\leq \mathbb{D} \theta_2^*\end{aligned}$$

**Определение.** Оценка  $\theta^*$  называется **эффективной**, если она не хуже всех остальных оценок.

**Теорема 3.** Не существует эффективной оценки в классе всех возможных оценок.

**Теорема 4.** В классе несмещённых оценок существует эффективная оценка.

## 4.2 Точечные оценки моментов

**Определение.** Выборочным средним  $\overline{X}_B$  называется величина

$$\overline{X}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Определение.** Выборочной дисперсией  $\mathbb{D}_B$  называется величина

$$\mathbb{D}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2$$

**Определение.** Исправленной выборочной дисперсией  $S^2$  называется величина

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \mathbb{D}_B$$

или

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2$$

**Определение.** Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma_B = \sqrt{\mathbb{D}_B}$$

**Определение.** Исправленным выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$S = \sqrt{S^2}$$

**Определение.** Выборочным  $k$ -тым моментом называется величина

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

**Определение.** Модой  $M_0^*$  вариационного ряда называется варианта с наибольшей частотой:

$$M_0^* = X_i : n_i = \max_{1 \leq j < n} n_j$$

**Определение.** Медианой  $M_e^*$  вариационного ряда называется значение варианты в середине ряда:

1. Если  $n = 2k - 1$ , то  $M_e^* = X_k$
2. Если  $n = 2k$ , то  $M_e^* = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$

| Величина         | Команда в Excel |            |
|------------------|-----------------|------------|
|                  | Русский         | Английский |
| $\overline{X_B}$ | СРЗНАЧ          | AVERAGE    |
| $\mathbb{D}_B$   | ДИСПР           | VARP       |
| $S^2$            | ДИСП            | VAR        |
| $\sigma_n$       | СТАНДОТКЛОНП    | STDEVP     |
| $S$              | СТАНДОТКЛОН     | STDEV      |
| $M_0^*$          | МОДА            | MODE       |
| $M_e^*$          | МЕДИАНА         | MEDIAN     |

**Теорема 5.** Выборочное среднее  $\overline{X_B}$  является несмещенной состоятельной оценкой для математического ожидания, то есть:

1.  $\mathbb{E} \overline{X_B} = \mathbb{E} X = a$  — несмещенность
2.  $\overline{X_B} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E} X$  — состоятельность

Доказательство.

1.

$$\mathbb{E} \bar{X} = \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i = \frac{1}{n} \cdot n \mathbb{E} X = \mathbb{E} X$$

2.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E} X$$

Это верно по закону больших чисел.

□

**Теорема 6.** Выборочный  $k$ -тый момент является несмещенной состоятельной оценкой для теоретического  $k$ -того момента, то есть:

1.  $\mathbb{E} \bar{X}^k = \mathbb{E} X^k$

2.  $\bar{X}^k \xrightarrow{P} \mathbb{E} X^k$

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы, если в качестве случайной величины взять  $X^k$ . □

**Теорема 7.**

- $\mathbb{D}_B$  — смещённая состоятельная оценка дисперсии
- $S^2$  — несмещённая состоятельная оценка дисперсии

Доказательство.

$$\mathbb{D}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mathbb{D}_B &= \\ \mathbb{E}(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) &= \\ \mathbb{E} \bar{X}^2 - \mathbb{E}(\bar{X})^2 &\stackrel{\text{по 6}}{=} \\ \mathbb{E} X^2 - \mathbb{E}(\bar{X})^2 &= \\ \mathbb{E} X^2 - (\mathbb{D} \bar{X} + (\mathbb{E} \bar{X})^2) &= \\ \mathbb{E} X^2 - (\mathbb{E} \bar{X})^2 - \mathbb{D} \bar{X} &= \\ (\mathbb{E} X^2 - (\mathbb{E} X)^2) - \mathbb{D} \bar{X} &= \\ \mathbb{D} X - \underbrace{\mathbb{D} \bar{X}}_{\text{величина отклонения}} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} X - \mathbb{D} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \\
\mathbb{D} X - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D} X_i &= \\
\mathbb{D} X - \frac{1}{n^2} \cdot n \mathbb{D} X &= \\
\mathbb{D} X - \frac{1}{n} \mathbb{D} X &= \\
\frac{n-1}{n} \mathbb{D} X \neq \mathbb{D} X & \\
\mathbb{E} S^2 = \mathbb{E} \left( \frac{n}{n-1} \mathbb{D}_B \right) &= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \mathbb{D} X = \mathbb{D} X \\
\mathbb{D}_B = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E} X^2 - (\mathbb{E} X)^2 &= \mathbb{D} X \\
S^2 = \frac{n}{n-1} \mathbb{D}_B \xrightarrow{P} \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\rightarrow 1} \mathbb{D} X &
\end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $\mathbb{D}_B$  — асимптотически несмещённая оценка, т.к. при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ . Таким образом, при большой<sup>1</sup> выборке можно игнорировать смещённость.

### 4.3 Метод моментов

Изобретен Карлом Пирсоном.

Пусть имеется выборка  $(X_1 \dots X_n)$  неизвестного распределения, при этом известен тип<sup>2</sup> распределения. Пусть этот тип определяется  $k$  неизвестными параметрами  $\theta_1 \dots \theta_k$ . Теоретическое распределение задает теоретические  $k$ -тые моменты. Например, если распределение непрерывное, то оно задается плотностью  $f(X, \theta_1 \dots \theta_k)$  и

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(x, \theta_1 \dots \theta_k) dx = h_k(\theta_1 \dots \theta_k)$$

Метод моментов состоит в следующем: вычисляем выборочные моменты и подставляем их в эти равенства вместо теоретических. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{X} = h_1(\theta_1 \dots \theta_k) \\ \overline{X^2} = h_2(\theta_1 \dots \theta_k) \\ \vdots \\ \overline{X^k} = h_k(\theta_1 \dots \theta_k) \end{cases}$$

<sup>1</sup>  $n \geq 100$ , например.

<sup>2</sup> Нормальное, показательное и т.д.

Решив эту систему, мы получим оценки на  $\theta_1 \dots \theta_k$ . Эти оценки будут состоятельными<sup>3</sup>, но смещёнными.

*Пример.* Пусть  $X \in U(a, b)$ ,  $a < b$ . Обработав статданные, получили оценки первого и второго момента:  $\bar{X} = 2.25$ ;  $\bar{X}^2 = 6.75$

*Решение.* Плотность  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$

$$\mathbb{E} X = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$\mathbb{E} X^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \boxed{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

$$\begin{cases} 2.25 = \frac{a+b}{2} \\ 6.75 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4.5 \\ a^2 + ab + b^2 = 20.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4.5 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 4.5 \end{cases}$$

□

---

<sup>3</sup> Если не придумывать специально плохие примеры

# Лекция 3

## 20 сентября

### 4.4 Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия состоит в том, чтобы подобрать параметры таким образом, чтобы вероятность получения данной выборки была наибольшей. Если распределение дискретное, то вероятность выборки

$$P_{\theta}(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_n = x_n) = P_{\theta}(X_1 = x_1)P_{\theta}(X_2 = x_2) \dots P_{\theta}(X_n = x_n)$$

Для непрерывной величины аналогично.

Поэтому исследуем такую функцию:

**Определение.** Функцией правдоподобия называется функция  $L(\bar{X}, \theta)$ , зависящая от выборки и неизвестных параметров, равная:

- В случае дискретного распределения:

$$P_{\theta}(X_1 = x_1)P_{\theta}(X_2 = x_2) \dots P_{\theta}(X_n = x_n)$$

- В случае абсолютно непрерывного распределения:

$$f_{\theta}(x_1)f_{\theta}(x_2) \dots f_{\theta}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i)$$

Эту функцию неудобно исследовать, поэтому мы используем следующую функцию:

**Определение.** Логарифмическая функция правдоподобия:

$$M(\bar{X}, \theta) = \ln L(\bar{X}, \theta)$$

Т.к. логарифм — строго возрастающая функция, экстремумы обычной и логарифмической функций правдоподобия совпадают.



**Определение.** Оценкой максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$  называется значение  $\theta$ , при котором функция правдоподобия достигает наибольшего значения.

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка неизвестного распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ :  $X \in \Pi_\lambda, \lambda > 0$

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$L(\bar{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{n \cdot \bar{X}}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\bar{X}, \lambda) = n \cdot \bar{X} \cdot \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i! - n\lambda$$

$$\frac{\partial \ln L(\bar{X}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n \bar{X}}{\lambda} - n$$

Приравняем производную к нулю, чтобы найти точки экстремума:

$$\frac{n \bar{X}}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{X}$$

Таким образом,  $\hat{\theta} = \bar{X}$  — ОМП.

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка неизвестного нормального распределения:  $X \in N(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f_{a, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\bar{X}, a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum (x_i-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\bar{X}, a, \sigma^2) = n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - a)^2$$

Не дописано

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка равномерного распределения вида  $U(0, \theta)$

1. Метод моментов.

$$\mathbb{E} = \frac{a+b}{2} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta^* = 2\bar{X}$$

2. Метод максимального правдоподобия.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 0, & x > \theta \end{cases}$$

$$L(\bar{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \begin{cases} 0, & \theta < \max x_i = X_{(n)} \\ \frac{1}{\theta^n}, & \theta \geq X_{(n)} \end{cases}$$

$L$  достигает наибольшего значения при  $\hat{\theta} = X_{(n)}$ .

Сравним полученные оценки.

1.  $\theta^* = 2\bar{X}$  — несмещённая оценка, т.к.  $\mathbb{E} \theta^* = \mathbb{E} 2\bar{X} = 2 \mathbb{E} \bar{X} = \theta$

$$\mathbb{E}(\theta^* - \theta) = \mathbb{D}(\theta^*) = \mathbb{D} 2\bar{X} = 4 \frac{1}{n} \mathbb{D} X = \frac{4}{n} \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

2. Изучим случайную величину  $X_{(n)}$ . Её функция распределения это

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} < x) = P(X_1 < x) \dots P(X_n < x) = (F_X(x))^n$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E} X_{(n)} = \int_0^{\theta} x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\theta} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Таким образом, оценка смещённая, но асимптотически несмещённая.

Заменим эту оценку на несмещённую оценку  $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n} \hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$  — сходятся к  $\theta$  с одинаковой скоростью.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \tilde{\theta}^2 &= \\ \mathbb{E} \left( \frac{n+1}{n} X_{(n)} \right)^2 &= \\ \frac{(n+1)^2}{n^2} \mathbb{E} X_{(n)}^2 &= \\ \frac{(n+1)^2}{n^2} \int_0^{\theta} x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx &= \\ \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^{\theta} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \theta^2 \\ \mathbb{D} \tilde{\theta} = \mathbb{E} \tilde{\theta}^2 - \mathbb{E}^2 \tilde{\theta} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \theta^2 - \theta^2 = \theta^2 \left( \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{n^2 + 2n} \right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

Итак, сравним оценки.

$$\mathbb{D} \tilde{\theta} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n} = \mathbb{D} \theta^*$$

Таким образом, оценка с помощью метода максимального правдоподобия лучше, её дисперсия стремится к нулю со скоростью  $\frac{1}{n^2}$ , а дисперсия первой оценки — со скоростью  $\frac{1}{n}$ .  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$  со скоростью  $\frac{1}{n}$ , а  $\theta^* \rightarrow \theta$  со скоростью  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

*Следствие 7.1.* Оценка математического ожидания  $\bar{X} = 2\theta$  не будет эффективной оценкой, т.к. можно показать, что в данном случае эффективной оценкой будет

$$\mathbb{E} X = \frac{n+1}{n} \cdot \max\{X_1 \dots X_n\}$$

*Примечание.* ОМП состоятельны, часто эффективны, но могут быть смещенными.

## 5 Неравенство Рао-Крамера

Пусть известно, что случайная величина  $X \in \mathcal{F}_\theta$  — семейству распределений с  $\theta$ .

**Определение.** Носителем семейства распределений  $\mathcal{F}_\theta$  называется множество  $C \subset \mathbb{R}$ , такое что  $\forall \theta \ P(X \in C) = 1$ .

*Обозначение.*

$$f_\theta(x) = \begin{cases} f_\theta(x), & \text{если распределение абсолютно непрерывное} \\ P_\theta(X = x), & \text{если распределение дискретное} \end{cases}$$

**Определение.** Информацией Фишера называется величина

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial \theta} \right)^2$$

, если она существует.

**Определение.** Семейство распределений  $\mathcal{F}_\theta$  называется **регулярным**, если:

1. Существует носитель  $C$  семейства  $\mathcal{F}_\theta$ , такой что  $\forall x \in C$  функция  $\ln f_\theta(x)$  непрерывно дифференцируема по  $\theta$ .
2.  $I(\theta)$  существует и непрерывна по  $\theta$ .

**Теорема 8** (неравенство Рао-Крамера). Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка объема  $n$  из регулярного семейства распределений  $\mathcal{F}_\theta$ ,  $\theta^*$  — несмещенная оценка параметра  $\theta$ , дисперсия которой ограничена на любом компакте в области  $\theta$ .

Тогда

$$\mathbb{D} \theta^* \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

*Следствие 8.1.* Если при условиях выше  $\mathbb{D} \theta^* = \frac{1}{nI(\theta)}$ , то  $\theta^*$  — эффективная оценка. Это не всегда достижимо.

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка нормального распределения  $N(a, \sigma^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ . Проверим эффективность оценки  $a^* = \bar{X}$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Рассмотрим носитель  $C = \mathbb{R}$ .

$$\ln f(x) = -\ln \sigma - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a} = \frac{1}{2\sigma^2} 2(x-a) = \frac{x-a}{\sigma}$$

Производная непрерывна по  $a \ \forall a \in \mathbb{R}$

$$I(a) = \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ln f(x)}{\partial a} \right)^2 = \mathbb{E} \left( \frac{x-a}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{D} X = \frac{1}{\sigma^4} \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}$$

Сравним обе части неравенства Рао-Крамера:

$$\mathbb{D} a^* = \mathbb{D} \bar{X} = \frac{1}{n} \mathbb{D} X = \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathbb{D} a^* = \frac{\sigma^2}{n} \stackrel{?}{=} \frac{1}{nI(a)} = \frac{1}{n \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Таким образом, оценка эффективна.

*Примечание.* Исправленная дисперсия  $S^2$  также является эффективной оценкой.

**Определение.** BLUE<sup>1</sup>-оценка — лучшая оценка из оценок вида  $\theta^* = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ .

---

<sup>1</sup> Best linear unbiased estimate.

# Лекция 4

## 18 сентября

### 6 Распределения в матстатистике

#### 6.0 Нормальное распределение

$X \in N(a, \sigma^2)$ :

$$\mathbb{E} X = a, \mathbb{D} X = \sigma^2$$

$N(0, 1)$  — стандартное нормальное распределение

#### 6.1 Гамма-распределение

$X \in \Gamma_{\alpha, \lambda}$ , если её плотность равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

*Свойства.*

1.  $\mathbb{E} \xi = \frac{\lambda}{\alpha}, \mathbb{D} \xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$
2. Если  $\xi_1 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1}, \xi_2 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_2}$ , то  $\xi_1 + \xi_2 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1 + \lambda_2}$
3.  $\Gamma_{\alpha, 1} = E_\alpha$  — показательное распределение.
4. Если  $X_i \in E_\alpha$ , то  $\sum_{i=1}^n X_i \in \Gamma_{\alpha, n}$
5. Если  $X \in N(0, 1)$ , то  $X^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$

*Примечание.* Гамма-распределение возникает в матстатистике как распределение квадрата стандартно нормально распределенной величины. Обобщим эту идею:

## 6.2 Распределение “хи-квадрат”

**Определение.** Распределением хи-квадрат с  $k$  степенями свободы называется распределение суммы  $k$  квадратов независимых стандартных нормальных величин.

$$\chi_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2, \quad X_i \in N(0, 1)$$

**Обозначение.**  $\chi^2 \in H_k$

**Свойства.**

1.  $\chi_k^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{k}{2}}$
2.  $\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2$  — по определению
3.  $\mathbb{E} \chi_k^2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} = k, \mathbb{D} \chi_k^2 = \frac{\lambda}{\alpha^2} = \frac{\frac{k}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2k$

## 6.3 Распределение Стьюдента

**Определение.** Пусть случайные величины  $X_0, X_1 \dots X_k$  — независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределением Стьюдента с  $k$  степеней свободы называется распределение случайной величины

$$t_k = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k}(X_1^2 + \dots + X_k^2)}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi_k^2}}$$

**Свойства.**

1.  $\mathbb{E} t_k = 0$
2.  $\mathbb{D} t_k = \frac{k}{k-2}$

## 6.4 Распределение Фишера-Снедекора

**Определение.** Распределение  $F_{m,n}$  называется распределением Фишера-Снедекора (или ***F-распределением***) со степенями свободы  $m$  и  $n$  называется распределение случайной величины

$$f_{m,n} = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$$

, где  $\chi_n^2$  и  $\chi_m^2$  — независимые случайные величины с распределением  $\chi^2$ .

**Свойства.**

1.  $\mathbb{E} f_{m,n} = \frac{n}{n-2}$
2.  $\mathbb{D} f_{m,n} = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

$$3. F_{m,n}(x) = P(f_{m,n} < x) = P\left(\frac{1}{f_{m,n}} > \frac{1}{x}\right) = P\left(f_{m,n} > \frac{1}{x}\right) = 1 - F_{n,m}\left(\frac{1}{x}\right)$$

При  $n, k, m \rightarrow \infty$  эти распределения слабо сходятся к нормальному. При  $n > 30$  они достаточно близки.

## 7 Линейные преобразования нормальных выборок

Пусть  $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ , где  $X_i \in N(0, 1)$  и независимы. Будем рассматривать линейные комбинации этого вектора. Пусть  $A$  — невырожденная матрица размера  $n \times n$ . Рассмотрим случайный вектор  $\vec{Y} = A\vec{X}$ , где координаты случайного вектора  $Y_i = a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n$ . Будем исследовать, что из себя представляют  $Y_i$  и их совместное распределение.

*Примечание.* Если  $\eta = a\xi + b$ , то  $f_\eta(\xi) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{\xi-b}{a}\right)$

**Теорема 9.** Пусть случайный вектор  $\vec{X}$  имеет плотность распределения  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$  и  $A$  невырожденная матрица.

Тогда случайный вектор  $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$  имеет плотность

$$f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_{\vec{X}}(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))$$

*Примечание.*  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$  — плотность  $\vec{X}$ , если  $P(\vec{x} \in B) = \int \dots \int_B f_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P(\vec{y} \in B) &= P(A\vec{x} + \vec{b} \in B) \\ &= P(\vec{x} \in A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \\ &= \int \dots \int_{A^{-1}(B - \vec{b})} f_{\vec{x}}(x) d\vec{x} \end{aligned}$$

Сделаем замену  $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$ . Тогда  $A^{-1}(B - \vec{b})$  перейдёт в  $B$ ,  $\vec{x}$  перейдёт в  $A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$ ,  $\vec{y} \in B$ ,  $d\vec{x}$  перейдёт  $|J|d\vec{y}$ , где  $J = |A^{-1}| = |A|^{-1}$

Итого:

$$= \int \dots \int_B f(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \cdot \frac{1}{|\det A|} d\vec{y} \Rightarrow f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \frac{1}{|\det A|} f_{\vec{X}}(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))$$

□

**Определение.**  $A = C$  — ортогональна, т.е.  $C^T = C^{-1}$ ,  $|\det C| = 1$

**Теорема 10.** Пусть дан случайный вектор  $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ , где  $\forall i \ X_i \in N(0, 1)$  и  $X_i$  независимы, а  $C$  — ортогональная матрица.

Тогда координаты случайного вектора  $\vec{Y} = C\vec{X}$  независимы и также имеют стандартное нормальное распределение.

*Доказательство.* Т.к. координаты  $X_i \in N(0, 1)$  и независимы, то плотность  $\vec{X}$ :

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2}$$

По предыдущей теореме:

$$f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = f_{\vec{X}}(C^T \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|C^T \vec{y}\|^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{y}\|^2} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} = \prod_{i=1}^n f_i(y_i)$$

Следовательно,  $Y_i \in N(0, 1)$  и независимы.  $\square$

**Лемма 1 (Фишера).** Пусть случайный вектор  $\vec{X}$  состоит из независимых стандартных нормальных случайных величин,  $\vec{Y} = C\vec{X}$ , где  $C$  — ортогональная матрица. Тогда  $\forall k : 1 \leq k \leq n-1$  случайная величина

$$T(\vec{X}) = \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - Y_1^2 - \dots - Y_k^2$$

не зависит от случайного вектора  $Y_1 \dots Y_k$  и имеет распределение  $H_{n-k}$

*Доказательство.* Т.к.  $C$  ортогональна:

$$\|\vec{Y}\|^2 = \|C\vec{X}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 = Y_1^2 + \dots + Y_n^2$$

Отсюда

$$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 - \dots - Y_k^2 = Y_{k+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

$Y_{k+1} \dots Y_n$  — независимы, имеют стандартное нормальное распределение и  $T(\vec{X}) \in H_{n-k}$  по определению распределения  $\chi^2$ .

$T(\vec{X})$  не зависит от  $Y_1 \dots Y_k$ , т.к.  $Y_{k+1} \dots Y_n$  по предыдущей лемме от них не зависят.  $\square$

**Теорема 11 (основная).**

- $X_1 \dots X_k$  независимы и имеют нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$
- $\bar{X}$  — выборочное среднее



- $S^2$  — исправленная выборочная дисперсия

Тогда имеют место следующие распределения:

1.

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \in N(0, 1)$$

2.

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2 \in H_n$$

3.

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$$

4.

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{S} \in T_{n-1}$$

5.  $\bar{X}$  и  $S^2$  — независимые случайные величины

*Доказательство.*

1.

$$X_i \in N(a, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \in N(na, n\sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \in N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - a) \in N(0, 1)$$

2. Верно, т.к.  $\frac{X_i - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

3.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} - \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \end{aligned}$$

, где

$$z_i = \frac{X_i - a}{\sigma} \in N(0, 1), \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} = \frac{\sum X_i - na}{\sigma n} = \frac{\bar{X} - a}{\sigma}$$

Поэтому можем считать, что  $X_i \in N(0, 1)$ . Применим лемму Фишера.

$$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = n \mathbb{D}_B = n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - Y_1^2$$

, где

$$Y_1^2 = n(\bar{X})^2 \quad Y_1 = \sqrt{n}\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}X_1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}X_n$$

Так как длина<sup>1</sup> строки  $\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}$  равна 1, можем<sup>2</sup> дополнить эту строку до ортогональной матрицы  $C$ . Тогда  $Y_1$  — первая координата случайного вектора  $\vec{Y} = C\vec{X}$  и по лемме Фишера  $T(\vec{X}) \in H_{n-1}$

5.  $T(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  не зависит от  $Y_1 = \sqrt{n}\bar{X} \Rightarrow S^2$  и  $\bar{X}$  независимы.

4.

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} \in T_{n-1}, \text{ т.к.:}$$

$X_0 \in N(0, 1)$  по пункту 1,  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$  по пункту 3 и  $X_0$  не зависит от  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  по пункту 5.

□

*Примечание.* Эта часть была рассказана на практике 29 сентября.

## 7.1 Многомерные нормальные распределения

**Определение.** Пусть случайный вектор  $\vec{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n)$  имеет в средних  $\vec{a} = (\mathbb{E} \xi_1 \dots \mathbb{E} \xi_n)$ ,  $K$  — симметричная положительно определенная матрица.

Вектор  $\vec{\xi}$  имеет **многомерное нормальное распределение** с параметрами  $\vec{a}$  и  $K$ , если его плотность:

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}((\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a}))}$$

*Примечание.*  $(\vec{x} - \vec{a})^T K^{-1}(\vec{x} - \vec{a})$  — положительно определенная квадратичная форма от  $(x_1 \dots x_n)$

*Свойства.*

1. Пусть  $\vec{\eta}$  состоит из независимых стандартных нормальных величин,  $B$  — невырожденная матрица. Тогда  $\vec{\xi} = B\vec{\eta} + \vec{a}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$ ,  $K = B^T B$

<sup>1</sup> То есть норма строки как вектора.

<sup>2</sup> По некой теореме.

2. Пусть  $\vec{\xi}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$  и  $K$ . Тогда  $\eta = B^{-1}(\vec{\xi} - \vec{a})$ , где  $B = \sqrt{K}$ <sup>3</sup>, состоит из независимых стандартных нормальных величин.
3.  $K = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$
4. Пусть  $\vec{\xi}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$  и  $K$ . Координаты  $\vec{\xi}$  независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы, т.е.  $K$  — диагональная.

*Следствие 11.1.* Если  $\xi, \eta$  — нормальные случайные величины и вектор  $(\xi, \eta)$  имеет ненулевую плотность, то  $\xi$  и  $\eta$  независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы, т.е.  $r_{\xi, \eta} = 0$ .

**Теорема 12** (многомерная центральная предельная теорема). Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных векторов слабо сходится к многомерному нормальному распределению.

---

<sup>3</sup>  $B$  существует по задаче 3 из 4-ой практики.

# Лекция 5

## 4 октября

### 8 Квантили распределений

Для простоты предполагаем, что все распределения непрерывные.

**Определение (1).** Число  $t_\gamma$  называется квантилем<sup>1</sup> уровня  $\gamma$ , если  $F(t_\gamma) = \gamma$ .

С точки зрения геометрии  $P(X \in \text{область слева от } t_\gamma) = \gamma$ .

*Примечание.*

- Медиана — квантиль уровня  $\frac{1}{2}$
- Квартили — квантили уровня  $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$
- Децили — квантили уровня  $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots$

*Примечание.* Квантиль  $t_\gamma$  — значение обратной функции распределения:  $t_\gamma = F^{-1}(\gamma)$

**Определение (2 (альтернативное)).** Число  $t_\alpha$  называется квантилем уровня значимости  $\alpha$ , если  $F(t_\alpha) = 1 - \alpha$ .

*Примечание.*  $\alpha = 1 - \gamma$

#### 8.1 Квантили основных распределений в Excel

1. НОРМ.СТ.ОБР.

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Тогда НОРМ.СТ.ОБР. $(x+0.5)$  — обратная функция функции Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

---

<sup>1</sup> Или квантилью.

2. (a) СТЬЮДЕНТ.ОБР. — обратная к функции распределения Стьюдента стандартной величины.

$$t_k = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k} \chi_k^2}}$$

- (b) СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X

Возвращает  $t_\alpha$ , такое что  $P(|X| > t_\alpha) = \alpha$ . Отсюда  $P(|X| < t_\alpha) = 1 - \alpha$  и применяем СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X( $1 - \alpha, k$ )

3. (a) ХИ2.ОБР. — возвращает квантиль  $t_\gamma$  в первом смысле для распределения  $\chi^2$ .  
 (b) ХИ2.ОБР.ПХ — возвращает квантиль  $t_\alpha$
4. (a) F.ОБР. — возвращает квантиль  $t_\gamma$  F-распределения  
 (b) F.ОБР.ПХ — возвращает квантиль  $t_\alpha$  F-распределения

## 8.2 Интервальные оценки

Недостаток точных оценок в том, что мы не знаем, насколько точная наша оценка.

Пусть требуется дать оценку неизвестного параметра  $\theta$ .

**Определение.** Интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$  называется **доверительным интервалом** для параметра  $\theta$  надежности  $\gamma$ , если  $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) = \gamma$

*Примечание.* Если  $\theta$  — параметр дискретного распределения, то будет правильней написать  $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) \geq \gamma$ .

*Примечание.* Здесь случайные величины — интервальные оценки, а не  $\theta$ . Поэтому более культурно говорить так: интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$  накрывает неизвестный параметр  $\theta$  с вероятностью  $\gamma$ .<sup>2</sup>

*Примечание.* В экономике  $\gamma$  берется 0.95, но можно брать и меньше — 0.9. Для чего-либо важного берется 0.99 или даже 0.999. Уровень надёжности выбирается в зависимости от решаемой задачи. Стандартные уровни: 0.9, 0.95, 0.99, 0.999.

### 8.2.1 Интервальные оценки для нормального распределения

Пусть  $X = (X_1 \dots X_n)$  из  $N(a, \sigma^2)$ .

1. Доверительный интервал для параметра  $a$  при известном значении параметра  $\sigma^2$ .

По пункту 1 теоремы 11:

$$P\left(-t_\gamma < \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} < t_\gamma\right) = P\left(\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma}\right| < t_\gamma\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma$$

<sup>2</sup> А не “ $\theta$  попадает в интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$  с вероятностью  $\gamma$ ”

, где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ . Тогда  $t_\gamma$  — значение обратной к  $\Phi$  в точке  $\frac{\gamma}{2}$ .

Осталось решить неравенство относительно  $a$ .

$$\begin{aligned} -t_\gamma &< \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} < t_\gamma \\ -t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &< a - \bar{X} < t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &< a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Итак, получили доверительный интервал для параметра  $a$ :  $\left(\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

2. Доверительный интервал для параметра  $a$  при неизвестном значении параметра  $\sigma^2$ .

По пункту 4 теоремы 11:

$$P\left(-t_\gamma < \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{S} < t_\gamma\right) = P\left(\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S}\right| < t_\gamma\right) = 2F_{T_{n-1}}(t_\gamma) - 1 = \gamma$$

$F_{T_{n-1}}(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$ , т.е.  $t_\gamma$  — квантиль распределения Стьюдента  $T_{n-1}$  уровня  $\frac{1+\gamma}{2}$ .

*Примечание.* Если  $\xi$  — симметрично, то  $P(|\xi| < t) = 2F(t) - 1$

*Доказательство.*

$$P(|\xi| < t) = 2P(0 < \xi < t) = 2(F(t) - F(0)) = 2F(t) - 1$$

□

$$\begin{aligned} -t_\gamma &< \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S} < t_\gamma \\ \bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} &< a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

3. Доверительный интервал для параметра  $\sigma^2$  при неизвестном  $a$ .

По пункту 2 теоремы 11  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$ . Пусть  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили распределения  $H_{n-1}$  уровней  $\frac{1-\gamma}{2}$  и  $\frac{1+\gamma}{2}$ <sup>3</sup>. Тогда:

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = F_{H_{n-1}}(\chi_2^2) - F_{H_{n-1}}(\chi_1^2) = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) - \left(\frac{1-\gamma}{2}\right) = \gamma$$

<sup>3</sup> На лекции было сказано  $1 - \frac{\gamma}{2}$  и  $1 + \frac{\gamma}{2}$ , но это бред.

$$\begin{aligned}\chi_1^2 &< \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2 \\ \frac{1}{\chi_2^2} &< \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi_1^2} \\ \frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} &< \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\end{aligned}$$

Итак, доверительный интервал для параметра  $\sigma^2$  надежности  $\gamma$  есть  $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right)$ , где  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили уровней  $\frac{1-\gamma}{2}$  и  $\frac{1+\gamma}{2}$ . Следовательно, доверительный интервал для  $\sigma$  это  $\left(\frac{\sqrt{(n-1)S}}{\chi_2}, \frac{\sqrt{(n-1)S}}{\chi_1}\right)$ .

Этот интервал почти всегда не симметричен, можно его сделать симметричным, но мы этого делать не будем.

#### 4. Доверительный интервал для параметра $\sigma^2$ при известном параметре $\sigma^{2*}$

По пункту 3 теоремы  $\frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} \in H_n$ , где  $\sigma^{2*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$ . Пусть  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили распределения  $H_n$  уровней  $\frac{1-\gamma}{2}$  и  $\frac{1+\gamma}{2}$  соответственно.

$$\begin{aligned}P\left(\chi_1^2 < \frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) &= F_{H_n}(\chi_2^2) - F_{H_n}(\chi_1^2) = \gamma \\ \chi_1^2 &< \frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} < \chi_2^2 \\ \frac{n\sigma^{2*}}{\chi_2^2} &< \sigma^2 < \frac{n\sigma^{2*}}{\chi_1^2}\end{aligned}$$

Итак, доверительный интервал для  $\sigma^2$  надежности  $\gamma$  это  $\left(\frac{n\sigma^{2*}}{\chi_2^2}, \frac{n\sigma^{2*}}{\chi_1^2}\right)$ , где  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили  $H_n$  уровней  $\frac{1-\gamma}{2}$  и  $\frac{1+\gamma}{2}$ ,  $\sigma^{2*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$ .

Для других распределений при малых объемах выборки нужно выводить формулы для каждой задачи. При больших объемах благодаря ЦПТ можно делать вид, что распределение нормальное.

*Пример.*  $X \in N(a, \sigma^2)$ , причём известно, что  $\sigma = 3$ . В результате обработки выборки объема  $n = 36$  нашли  $\bar{X} = 4.1$ . Найти доверительный интервал параметра  $a$  надежности  $\gamma = 0.95$ .

*Решение.*  $t_\gamma : 2\Phi(t_\gamma) = 0.95, \Phi(t_\gamma) = 0.475, t_\gamma = 1.96$

$$\begin{aligned}\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &< a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ 4.1 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} &< a < 4.1 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}}\end{aligned}$$

$$4.1 - 0.98 < a < 4.1 + 0.98$$

$$3.12 < a < 5.08$$

Ответ: (3.12, 5.08)

□

*Пример.*  $X \in N(a, \sigma^2)$ . В результате обработки выборки объема  $n = 25$  нашли  $\bar{X} = 42.32$ ,  $S = 6.4$ . Найти доверительный интервал надежности  $\gamma = 0.95$ .

*Решение.* По таблице двустороннего распределения Стьюдента  $T_{n-1}$   $t_\gamma = 2.064$

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$42.32 - 2.064 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{25}} < a < 42.32 + 2.064 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{25}}$$

$$42.32 - 2.642 < a < 42.32 + 2.642$$

$$39.678 < a < 44.962$$

Ответ: (39.678, 44.962)

□



# Лекция 6

## 11 октября

### 9 Гипотезы

**Определение.** Гипотезой  $H$  называется предположение о распределении наблюдаемой случайной величины.

**Определение.** Гипотеза называется **простой**, если она однозначно определяет распределение, т.е.  $H : \mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ , где  $\mathcal{F}_1$  — распределение известного типа с известными параметрами.

**Определение.** Все остальные гипотезы называются **сложными**, т.к. они являются объединением конечного или бесконечного числа простых гипотез.

**Определение** (основная модель гипотез). Гипотеза  $H_1 = \overline{H_0}$  — конкурирующая (*альтернативная*) гипотеза, состоящая в том, что основная гипотеза  $H_0$  неверна.

*Примечание.* С помощью статистических методов нельзя доказать гипотезу, можно только сказать, что она верна с некоторой уверенностью.

Основная гипотеза  $H_0$  принимается или отклоняется с помощью статистики критерия  $K$ :

$$K(X_0 \dots X_n) \rightarrow \mathbb{R} = S \cup {}^1\overline{S} \rightarrow (H_0, H_1)$$
$$\begin{cases} H_0, & \text{если } K \in \overline{S} \\ H_1, & \text{если } K \in S \end{cases}$$

**Определение.** Если точка находится на границе областей  $S$  и  $\overline{S}$ , она называется **критической**.

**Определение.** Ошибка I рода состоит в том, что нулевая гипотеза отвергается, когда она верна.

---

<sup>1</sup> Объединение на самом деле дизъюнктно.

**Определение.** Ошибка II рода состоит в том, что отвергается альтернативная, когда она верна.

**Определение.**  $\alpha$  — вероятность ошибки I рода,  $\beta$  — вероятность ошибки II рода

*Пример.*  $H_0$  — деталь годная,  $H_1$  — деталь бракованная.

Ошибка I рода — признать годную деталь бракованной.

Ошибка II рода — признать бракованную деталь годной.

*Примечание.* При росте выборки вероятности ошибок уменьшаются, при уменьшении вероятности одной ошибки другая вероятность увеличивается.

## 9.1 Способы сравнения критериев

Пусть имеются критерии  $K_1$  и  $K_2$ ,  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  — вероятности ошибок при соответствующих критериях,  $h_1$  — потери в результате ошибке I рода,  $h_2$  — потери в результате ошибки II рода.

Тогда рассмотрим способы сравнения критериев:

1. Минимакс:  $K_1$  не хуже, чем  $K_2$ , если  $\max(\alpha_1 h_1, \beta_1 h_2) \leq \max(\alpha_2 h_1, \beta_2 h_2)$
2. Критерий называется баесовским, если средние ожидаемые потери  $U = \alpha h_1 + \beta h_2$  является минимальным.
3. Пусть  $\varepsilon$  — допустимый уровень ошибки I рода. Обозначим  $K_\varepsilon := \{K_i \mid \alpha_i \leq \varepsilon\}$ .

**Определение.** Критерий  $K \in K_\varepsilon$  называется наиболее мощным критерием уровня  $\varepsilon$ , если  $\beta \leq \beta_i \forall i$ .

## 9.2 Критерий согласия

**Определение.** Критерий  $K$  называется критерием асимптотического уровня  $\varepsilon$ , если вероятность ошибки первого рода  $\alpha$  стремится к  $\varepsilon$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.** Критерий  $K$  для проверки гипотезы  $H_0$  против альтернативы  $H_1 = \overline{H_0}$  называется состоятельным, если вероятность ошибки II рода  $\beta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.** Критерием согласия уровня  $\varepsilon$  называются состоятельные критерии асимптотического уровня  $\varepsilon$ .

## 9.3 Построение критериев согласия

В качестве критериев согласия берётся статистика  $K(X_1 \dots X_n)$  со свойствами:

1. Если  $H_0$  верна, то  $K(X_1 \dots X_n) \Rightarrow Z$  — известное распределение с известными параметрами.

2. Если  $H_0$  не верна, то  $K(X_1 \dots X_n) \xrightarrow{P} \infty$

Для заданного уровня значимости  $\varepsilon$  находим константу  $t_k$ , такую что  $P(|Z| \geq t_k) = \alpha$ . В результате получаем критерий согласия уровня значимости  $\alpha = \varepsilon$ :

$$\begin{cases} H_0, & |K| < t_k \\ H_1, & |K| \geq t_k \end{cases}$$

**Теорема 13.** Этот критерий является критерием согласия.

*Доказательство.*

1.  $K$  — критерий асимптотического уровня  $\varepsilon$ :

Пусть  $H_0$  верна. Тогда по построению  $K \Rightarrow Z$ , т.е.  $F_K(x) \rightarrow F_Z(x)$  и

$$\begin{aligned} \alpha &= P(|K| \geq t_k \mid H_0) \\ &= 1 - P(|K| < t_k) \\ &= 1 - (F_K(t_k) - F_K(-t_k)) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - (F_Z(t_k) - F_Z(-t_k)) \\ &= P(|Z| \geq t_k) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2.  $K$  — состоятельный критерий:

Пусть  $H_1$  верна. Тогда  $K(X_1 \dots X_n) \xrightarrow{P} \infty$ , т.е.

$$\forall C \quad P(|K| \geq C \mid H_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1 \Rightarrow \beta = P(|K| < t_k \mid H_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

□

*Упражнение.* Гипотеза о среднем нормальной совокупности с известной дисперсией.

Пусть имеется выборка  $(X_1 \dots X_n) \in X \in N(a, \sigma^2)$ , причём второй параметр известен.<sup>2</sup>

$H_0 : a = a_0, H_1 : a \neq a_0$ .

В качестве статистики критерия возьмём  $\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma}$ . Проверим, что оно имеет требуемые свойства:

1. Если  $H_0$  верна, т.е.  $a = a_0$ , то  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

<sup>2</sup> Например, мы измеряем что-то инструментом заданной точности.

2. Если  $H_0$  неверно, т.е.  $a \neq a_0$ , то  $|K| \rightarrow \infty$ :

$$|K| = \left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \right| = \underbrace{\sqrt{n}}_{\rightarrow \infty} \left| \underbrace{\frac{\bar{X} - a}{\sigma}}_{\in N(0,1)} + \underbrace{\frac{a - a_0}{\sigma}}_{\neq 0} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty$$

Таким образом, этот критерий — критерий согласия. Для уровня значимости  $\alpha = \varepsilon$  выберем  $C$ , такую что  $\varepsilon = P(|K| \geq C) \Rightarrow P(|K| < C) = 1 - \varepsilon \Rightarrow 2\Phi(C) = 1 - \varepsilon \Rightarrow 2\Phi(C) = \frac{1-\varepsilon}{2}$ . Тогда,  $C$  — это обратное значение  $\Phi$  для  $\frac{1-\varepsilon}{2}$ .

Итого:

$$\begin{cases} H_0, & |K| = \left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \right| < C \\ H_1, & |K| = \left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \right| \geq C \end{cases}$$

Заметим, что если мы решим это неравенство, то получим доверительный интервал для параметра  $a$  нормального распределения при известном  $\sigma$ .

*Примечание.* Аналогично можно проверять для неизвестного  $\sigma$ , тогда в критерии  $\sigma$  заменится на  $S$ .

В качестве статистики критерия возьмём  $\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a_0}{S}$ . Проверим, что оно имеет требуемые свойства:

1. Если  $H_0$  верна, т.е.  $a = a_0$ , то  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{S} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S} \in T_{n-1}$
2. Если  $H_0$  неверно, т.е.  $a \neq a_0$ , то  $|K| \rightarrow \infty$ :

$$|K| = \left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{S} \right| = \underbrace{\sqrt{n}}_{\rightarrow \infty} \left| \underbrace{\frac{\bar{X} - a}{S}}_{\in T_{n-1}} + \underbrace{\frac{a - a_0}{S}}_{\neq 0} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty$$

Таким образом, этот критерий — критерий согласия.

## 9.4 Доверительные интервалы как критерии гипотез о параметрах распределения

Пусть имеется выборка  $(X_1 \dots X_n)$  случайной величины  $X \in \mathcal{F}_\theta$ , где  $\mathcal{F}_\theta$  — распределение известного типа с неизвестным параметром  $\theta$ . Проверяется гипотеза:  $H_0 : \theta = \theta_0$  против  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Пусть для  $\theta$  построен доверительный интервал  $(\theta^-, \theta^+)$  надежности  $\gamma$ . Тогда следующий критерий является критерием согласия уровня  $\alpha = 1 - \gamma$ :

$$\begin{cases} H_0, & \theta_0 \in (\theta^-, \theta^+) \\ H_1, & \theta_0 \notin (\theta^-, \theta^+) \end{cases}$$

*Доказательство.*

$$\alpha = P(\theta_0 \notin (\theta^-, \theta^+) \mid X \in \mathcal{F}_\theta) = 1 - P(\theta_0 \in (\theta^-, \theta^+) \mid X \in \mathcal{F}_\theta) = 1 - \gamma = \alpha$$

Доказывать состоятельность критерия нужно в каждом случае отдельно.  $\square$

*Пример.* По выборке объема  $n = 36$  из нормальной совокупности с известным  $\sigma = 1.44$  найдено выборочное среднее  $\bar{X} = 21.36$ . Проверить гипотезу  $H_0 : a = 21$  против  $H_1 : a \neq 21$  при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

$$K = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} = \sqrt{36} \frac{21.6 - 21}{1.44} = 2.5$$

$$\Phi(t_k) = \frac{1 - \alpha}{2} = 0.475$$

$$t_k = 1.96$$

Т.к.  $|K| = 2.5 > 1.96$ , гипотеза отклоняется.

В математических пакетах могут не сравнивать с критической точкой, а считать статистику и искать вероятность.

*Примечание.* Следующий материал был рассказан на практике 13 октября.

## 9.5 Распределение Коши

Пусть дан источник некоторого излучения в точке  $(0, 1)$ , который равномерно посылает лучи во все стороны.

Случайная величина  $\xi$  — точка пересечения луча с осью  $OX$ .

Найти  $F_\xi(x)$ ,  $f_\xi(x)$ ,  $\mathbb{E} \xi$ .

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 0) + P(0 < \xi < x) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg x$$

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\mathbb{E} \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1 + x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \nexists$$

Пусть теперь источник сдвинут на  $\theta$  по оси  $x$ . Тогда  $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$ . Попробуем оценить  $\theta$ .  $\bar{X}$  не работает, т.к. оно убежит на бесконечность:  $\mathbb{E} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E} X$ . Оценим с помощью медианы. По симметрии  $\theta = \text{Me} \xi$ .

$$\text{Me}^* = \begin{cases} X_{(k+1)}, & n = 2k + 1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

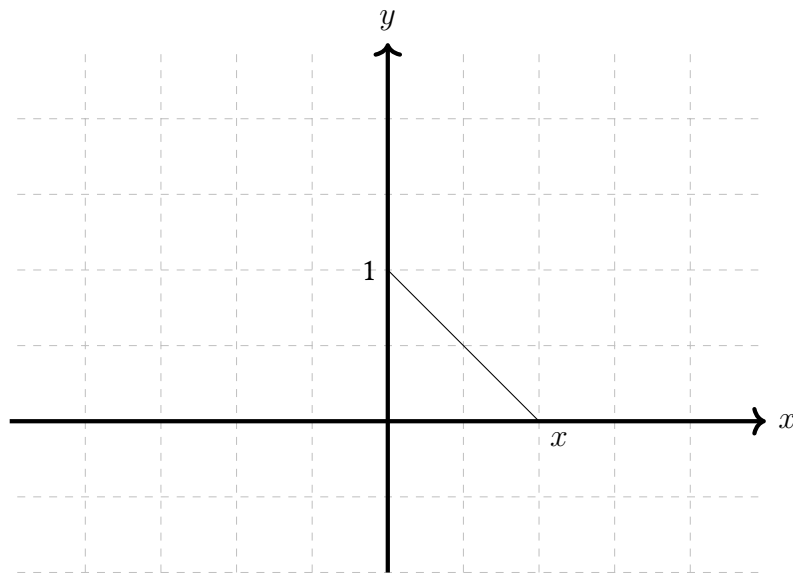


Рис. 6.1: Источник

**Теорема 14.** Если  $f(\text{Me}) \neq 0$ , то  $\text{Me}^* \xrightarrow{P} \text{Me}$ , причём сходится со скоростью  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

В целом при большом числе выбросов медиана помогает. Например, оценивать зарплату нужно по медиане, а не по среднему.

У медианы также есть свои недостатки: она сходится медленнее, чем выборочное среднее — эффективность обычно ниже на 20-30%, но бывают и случаи хуже.

Есть и другие оценки, например **усечённое среднее**. Выкидываются наименьшие и наибольшие  $k$  точек и считается выборочное среднее:

$$\frac{\sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}}{n - 2k}$$

Несложно заметить, что это нечто промежуточное между выборочным средним и медианой — если  $k = 0$ , то получаем выборочное среднее, если  $k = \frac{n-1}{2}$ , то получаем медиану.

Другой пример: составим по исходной выборке выборку объема  $\frac{n(n-1)}{2}$ , состоящую из  $\frac{X_i + X_j}{2}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . **Среднее Уолша** — медиана этой выборки. У этой оценки эффективность падает на  $\approx 12\%$  относительно выборочного среднего.

**Упражнение 1.** Дано  $n$  призывников с вероятностью болезни  $p = 0.01$ . Разбиваем призывников на группы по  $k$  человек в группе. Считаем, что  $n \vdots k$ , т.е. групп  $\frac{n}{k}$ . В каждой группе:

- Если суммарный результат отрицательный, то 1 анализ.

- Иначе  $k + 1$  анализ.

Найти оптимальное значение  $k$  и среднее значение числа анализов.

*Решение.*  $\xi_i$  — число анализов в  $i$ -той группе.

$$P(\xi_i = 1) = (1 - p)^k \quad P(\xi_i = k + 1) = 1 - (1 - p)^k$$
$$\mathbb{E} \xi_i = (1 - p)^k + (k + 1)(1 - (1 - p)^k) = k + 1 - k(1 - p)^k$$

$$\xi = \frac{n}{k} \cdot \xi_i$$

$$\mathbb{E} \xi = n \left( 1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k \right) = f(k)$$

Т.к.  $p$  мало, пусть оно  $p \rightarrow 0$ .  $(1 - p)^k \sim 1 - pk$ .

$$f(k) \sim n \left( \frac{1}{k} + pk \right)$$

$$f'(k) = n \left( -\frac{1}{k^2} + p \right) = 0$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{p}} = 10$$

$$\mathbb{E} \xi \approx n \left( \frac{1}{10} + 0.01 \cdot 10 \right) = 0.2n$$

□

# Лекция 7

## 18 октября

На прошлой лекции мы обсуждали проверку статистических гипотез, эта лекция будет посвящена основному набору оных.

### 9.6 Критерии для проверки гипотез о распределении

#### 9.6.1 Критерий $\chi^2$ для параметрической гипотезы

Этот критерий самый популярный.

Пусть дана выборка  $(X_1 \dots X_n)$  неизвестного распределения  $\mathcal{F}$ . Проверяется основная сложная гипотеза  $H_0 : \mathcal{F} \in \mathcal{F}_\theta$ , т.е.  $\mathcal{F}$  принадлежит классу распределений  $\mathcal{F}_\theta$ , параметризованное набором из  $m$  параметров:  $\theta = (\theta_1 \dots \theta_m)$ .

Пусть  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1 \dots \hat{\theta}_m)$  — оценка этих параметров методом максимального правдоподобия. Пусть выборка разбита на  $k$  интервалов  $A_1 \dots A_k$ , где  $A_i = [a_{i-1}, a_i)$ . Пусть  $n_i$  — соответствующие экспериментальные частоты попадания в интервал  $A_i$ ,  $p_i$  — соответствующие теоретические вероятности попадания в эти интервалы при распределении  $\mathcal{F}_{\hat{\theta}}$

*Примечание.*  $p_i = \mathcal{F}_{\hat{\theta}}(a_i) - \mathcal{F}_{\hat{\theta}}(a_{i-1})$

Тогда  $n'_i = np_i$  — теоретические частоты попадания в  $A_i$ .

В качестве статистики критерия берётся:

$$K = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{n'_i} - n$$

**Теорема 15 (Фишера).** Если гипотеза  $H_0 : \mathcal{F} \in \mathcal{F}_\theta$  верна, то

$$K = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \in H_{k-m-1}$$



, т.е.  $K$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $k - m - 1$  степенями свободы, где  $k$  — число интервалов и  $m$  — число параметров, задающих распределение.

*Доказательство.* Использует многомерное нормальное распределение.  $\square$

Критерий используется следующим образом: для заданного уровня значимости  $\alpha$  находим критическую точку  $t_k$ , такую что  $P(\chi_{k-m-1}^2 \geq t_k) = \alpha$ . Тогда критерий имеет вид:

$$\begin{cases} H_0, & K < t_k \\ H_1, & K \geq t_k \end{cases}$$

*Примечание.*  $t_k = \text{ХИ2.ОБР.ПХ}(\alpha, k - m - 1)$

*Примечание.* Частота интервалов должна быть  $\geq 5$ . Если нет, то объединяем соседние интервалы.

*Примечание.* Желательно выборку разбить на большое число равнонаполненных интервалов.

*Пример.* Имеется выборка в виде частотного вариационного ряда объёма  $n = 120$  : (5.2 ... 82.8). При разбиении её на 8 интервалов получили интервальный ряд:

| $A_i$        | $n$ | $n_i$ |
|--------------|-----|-------|
| [5.2; 7.4)   | 12  | 15    |
| [7.4; 9.6)   | 17  | 15    |
| [9.6; 11.8)  | 14  | 15    |
| [11.8; 14)   | 13  | 15    |
| [14; 16.2)   | 18  | 15    |
| [16.2; 18.4) | 14  | 15    |
| [18.4; 20.6) | 13  | 15    |
| [20.6; 22.6) | 11  | 15    |
| $\Sigma$     | 120 | 120   |

Проверим гипотезу о равномерности распределения при уровне значимости  $\alpha = 0.05$  :  $H_0 : \mathcal{F} \in U(a; b), H_1 : \mathcal{F} \notin U(a; b)$

$\hat{a} = X_{\min} = 5.2, \hat{b} = X_{\max} = 82.8, n_i = \frac{120}{8} = 15$  — теоретические частоты.

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 3.2$$

$\alpha = 0.05$ , число степеней свободы:  $k - m - 1 = 8 - 2 - 1 = 5, t_k(0.05; 5) = 11.07, \chi_{\text{набл}}^2 = 3.2 < 11.07$ , гипотеза о равномерном распределении принимается.

### 9.6.2 Критерий $\chi^2$ для гипотезы о распределении

Проверяется основная (простая) гипотеза  $H_0 : \mathcal{F} = \mathcal{F}_\theta$ , где  $\mathcal{F}_\theta$  — распределение известного типа с известными параметрами, против  $H_1 : \mathcal{F} \neq \mathcal{F}_\theta$ . В качестве статистики берётся та же самая функция

$$K = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

**Теорема 16 (Пирсона).** Если гипотеза  $H_0$  верна, то

$$K = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \in H_{k-1}$$

### 9.6.3 Критерий Колмогорова для гипотезы о распределении

Приведён по историческим причинам.

Пусть имеется выборка  $(X_1 \dots X_n)$  неизвестного распределения  $\mathcal{F}$ . Проверяется простая гипотеза  $H_0 : \mathcal{F} = \mathcal{F}_1$  против  $H_1 : \mathcal{F} \neq \mathcal{F}_1$ . Пусть  $F_1(x)$  — непрерывная функция распределения  $\mathcal{F}_1$ . Тогда применяем критерий:

$$K = \sqrt{n} \sup_x |F^*(x) - F_1(x)|$$

, где  $F^*(x)$  — выборочная функция распределения.

**Теорема 17.** Если гипотеза  $H_0$  верна, то

$$K = \sqrt{n} \sup_x |F^*(x) - F_1(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}$$

, где  $\mathcal{K}$  — распределение Колмогорова с функцией распределения  $F_{\mathcal{K}}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 x^2}$ .

Для уровня значимости находим  $t_k$  и дальше как обычно.

В некоторых статистических пакетах это распределение есть, в Excel — нет. Исторически оно не распространилось.

Недостаток этого критерия в том, что он не применим в дискретном случае.

## 9.7 Критерии для проверки однородности

Мы хотим узнать, случайна ли эта выборка, или её кто-то неправильно собрал данные.

### 9.7.1 Критерий Колмогорова-Смирнова

Также используется редко.

Пусть имеются две независимых выборки  $(X_1 \dots X_n)$  и  $(Y_1 \dots Y_m)$  объёмов  $n$  и  $m$  соответственно неизвестных непрерывных распределений  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ . Проверяется гипотеза  $H_0 : \mathcal{F} = \mathcal{G}$  против гипотезы  $H_1 : \mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ . В качестве статистики берётся:

$$K = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_x |F^*(x) - G^*(x)|$$

, где  $F^*(x)$  и  $G^*(x)$  — соответствующие выборочные функции распределения.

**Теорема 18.** Если гипотеза  $H_0$  верна, то

$$K = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_x |F^*(x) - G^*(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} \mathcal{K}$$

*Примечание.* Чаще всего в случае нормальных распределений используются критерии Фишера и Стьюдента. Сначала применяем критерий Фишера и если он не отвергает основную гипотезу, то применяем критерий Стьюдента.

Ещё часто применяется ранговый критерий Уилкоксона-Манна-Уитни. Мы его не рассмотрим, но общая идея в следующем: рассматривается только одна выборка и если выборка составлялась не случайно, то порядок возрастания/убывания нарушен.

### 9.7.2 Критерий Фишера

Пусть имеются две независимых выборки  $(X_1 \dots X_n)$  и  $(Y_1 \dots Y_m)$  объёмов  $n$  и  $m$  соответственно из нормальных распределений  $N(a_1, \sigma_1^2)$  и  $N(a_2, \sigma_2^2)$ . Проверяется гипотеза  $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$  против гипотезы  $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ . В качестве статистики берётся:

$$K = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

, где  $S_x^2, S_y^2$  — соответствующие исправленные дисперсии, причём  $S_x^2 \geq S_y^2$

**Теорема 19.** Если  $H_0$  верна, то  $\frac{S_x^2}{S_y^2} \in F(n-1, m-1)$  — распределение Фишера с  $n-1, m-1$  степенями свободы.

*Доказательство.* По пункту 3 основной теоремы  $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$  или  $\frac{S_x^2}{\sigma^2} \in \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}$ .

При  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ :

$$\frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{S_x^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{S_y^2} = \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} \cdot \frac{m-1}{\chi_{m-1}^2} \stackrel{\text{def}}{=} F(n-1, m-1)$$

□

Критерий по статистике очевиден.

*Примечание.* При  $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ , т.е.  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,  $K = \frac{S_x^2}{S_y^2} \rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

При  $H_0$  выполнено  $K \rightarrow 1$ .

### 9.7.3 Критерий Стьюдента

Пусть имеются две независимых выборки  $(X_1 \dots X_n)$  и  $(Y_1 \dots Y_m)$  объёмов  $n$  и  $m$  соответственно из нормальных распределений  $N(a_1, \sigma^2)$  и  $N(a_2, \sigma^2)$  с одинаковой дисперсией  $\sigma^2$ . Проверяется гипотеза  $H_0 : a_1 = a_2$  против гипотезы  $H_1 : a_1 \neq a_2$ .

**Теорема 20.** Случайная величина

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{(\bar{X} - a_1) - (\bar{Y} - a_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}} \in T_{n+m-2}$$

, где  $T_{n+m-2}$  — распределение Стьюдента с  $n+m-2$  степенями свободы. Это не зависит от того, верна гипотеза или нет.

В качестве статистики берётся:

$$K = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}}$$

Из теоремы видим, что если  $H_0$  верна, то  $K \in T_{n+m-2}$ , если нет, то  $K \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} \infty$ .

Критерий: пусть  $t_k$  — квантиль распределения Стьюдента  $|T_{n+m-2}|$  уровня значимости  $\alpha$ .

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = a_2, & K < t_k \\ H_1 : a_1 \neq a_2, & K \geq t_k \end{cases}$$

Существует масса других критериев, но все они строятся похожим образом.

# Лекция 8

## 25 октября

### 10 Статистическая зависимость

**Определение.** Функциональная зависимость имеет место, когда две величины связаны жесткими законами природы.

**Определение.** Зависимость называется **статистической**, если изменение одной величины влияет на распределение другой. Если при этом изменяется среднее значение<sup>1</sup> другой случайной величины, то зависимость называется **корреляционной**. Если среднее значение *увеличивается* при увеличении первой случайной величины, то корреляция *прямая*, а если *уменьшается* — *обратная*.

#### 10.1 Корреляционное облако

Пусть в ходе экспериментов получились значения случайных величин  $X$  и  $Y : (X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n$ . Нанося эти точки на координатную плоскость  $XOY$ , получим корреляционное облако. По его виду можно сделать предположение о зависимости.

*Пример.*  $X, Y$  имеют нормальное распределение с одинаковыми параметрами.

- Если корреляционное облако имеет форму круга, то величины *независимы*.
- Если корреляционное облако имеет форму эллипса с большой осью параллельной прямой вида  $y = kx + b, k > 0$ , то скорее всего *зависимость прямая*.

#### 10.2 Корреляционная таблица

Экспериментальные данные представляем в виде таблицы:

---

<sup>1</sup> Математическое ожидание.

| $X_i \backslash Y_i$ | $Y_1$    | $Y_2$    | $\dots$  | $Y_m$    |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| $X_1$                | $n_{11}$ | $n_{12}$ | $\dots$  | $n_{1m}$ |
| $X_2$                | $n_{21}$ | $n_{22}$ | $\dots$  | $n_{2m}$ |
| $\vdots$             | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $X_n$                | $n_{n1}$ | $n_{n2}$ | $\dots$  | $n_{nm}$ |

Пример.

| $X_i \backslash Y_i$ | 10 | 20 | 30 | 40 | $n_x$ | $\overline{y_x}$ |
|----------------------|----|----|----|----|-------|------------------|
| 2                    | 7  | 3  | 0  | 0  | 10    | 13               |
| 4                    | 3  | 10 | 10 | 2  | 25    | 24.4             |
| 6                    | 0  | 2  | 10 | 3  | 15    | 30.67            |
| $n_y$                | 10 | 15 | 20 | 5  | 50    |                  |

- $n_x$  — частота значения  $x$
- $n_y$  — частота значения  $y$
- $\overline{y_x}$  — условное среднее случайной величины  $y$ :

$$\overline{y_x} = \frac{1}{n_x} \sum_i n_{xy_i} y_i$$

В нашем примере условное матожидание  $\overline{y_x}$  увеличивается при увеличении  $x$ , следовательно, скорее всего есть прямая корреляция.

*Примечание.* При большом числе данных удобнее составлять интервальную корреляционную таблицу и заменить интервалы на средние значения в этих интервалах.

### 10.3 Критерий $\chi^2$ для проверки независимости

Пусть выборка  $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$  случайных величин  $X$  и  $Y$  представлена в виде интервальной корреляционной таблицы. Случайная величина  $X$  при этом разбита на  $k$  интервалов, а  $Y$  на  $m$  интервалов. Обозначим  $v_{i\cdot}$  = число значений случайной величины  $X$ , попавших в  $i$ -тый интервал  $[a_{i-1}, a_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Обозначим  $v_{\cdot j}$  = число значений случайной величины  $Y$ , попавших в  $j$ -тый интервал  $[b_{j-1}, b_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Обозначим  $v_{ij}$  = число точек  $(X, Y)$ , попавших в  $[a_{i-1}, a_i) \times [b_{j-1}, b_j)$ .

| $X_i \backslash Y_i$        | $[b_0; b_1)$ | $[b_1; b_2)$ | $\dots$  | $[b_{m-1}; b_m)$ | $v_i = \sum_{j=1}^n v_{ij}$ |
|-----------------------------|--------------|--------------|----------|------------------|-----------------------------|
| $[a_0; a_1)$                | $v_{11}$     | $v_{12}$     | $\dots$  | $v_{1m}$         | $v_{1.}$                    |
| $[a_1; a_2)$                | $v_{21}$     | $v_{22}$     | $\dots$  | $v_{2m}$         | $v_{2.}$                    |
| $\vdots$                    | $\vdots$     | $\vdots$     | $\ddots$ | $\vdots$         |                             |
| $[a_{n-1}; a_n)$            | $v_{n1}$     | $v_{n2}$     | $\dots$  | $v_{nm}$         | $v_{n.}$                    |
| $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij}$ | $v_{.1}$     | $v_{.2}$     | $\dots$  | $v_{.m}$         |                             |

По этой таблице проверяется основная гипотеза  $H_0 : X$  и  $Y$  независимы против  $H_1 : X$  и  $Y$  зависимы.

Вспомним определение независимых случайных величин:

$$P(X \in \mathfrak{B}_1, Y \in \mathfrak{B}_2) = P(X \in \mathfrak{B}_1) \cdot P(Y \in \mathfrak{B}_2)$$

Согласно этому определению, если гипотеза  $H_0$  верна, то вероятность попадания пары  $(X, Y)$  в любой прямоугольник равна произведению теоретических вероятностей попасть случайным величинам в эти интервалы.

$$p_{ij} = P(X \in [a_{i-1}; a_i), Y \in [b_{j-1}; b_j)) = P(X \in [a_{i-1}; a_i)) \cdot P(Y \in [b_{j-1}; b_j)) = p_i \cdot p_j$$

По закону больших чисел при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{v_{i.}}{n} \xrightarrow{P} p_i \quad \frac{v_{.j}}{n} \xrightarrow{P} p_j \quad \frac{v_{ij}}{n} \xrightarrow{P} p_{ij}$$

Поэтому основанием для отклонения гипотезы служит заметная разница между величинами между  $\frac{v_{ij}}{n}$  и  $\frac{v_i}{n} \cdot \frac{v_j}{n}$ , т.е. между  $v_{ij}$  и  $\frac{v_i v_j}{n}$ .

В качестве статистики критерия берётся функция:

$$K = n \sum_{i,j} \frac{\left(v_{ij} - \frac{v_i v_j}{n}\right)^2}{v_i \cdot v_j}$$

**Теорема 21.** Если гипотеза  $H_0$  верна, то  $K \Rightarrow \chi^2_{(k-1)(m-1)}$

Получили критерий согласия:  $t_k$  — квантиль распределения  $H_{(k-1)(m-1)}$

$$\begin{cases} H_0, & K < t_k \\ H_1, & K \geq t_k \end{cases}$$

## 10.4 Однофакторный дисперсионный анализ

Предположим, что на случайную величину  $X$  (*признак-результат*) может влиять фактор  $Z$  (*признак-фактор*).  $Z$  — не обязательно случайная величина.

*Пример.* Хотим проверить, как влияет температура на разложение ???. Проводим измерения при разных температурах, регулируя термостат. Тогда температура — не случайная величина, она управляема.

Пусть при различных  $k$  уровнях фактора  $Z$  получены  $k$  независимых выборок случайной величины  $X$  :  $X^{(1)} = (X_1^{(1)} \dots X_{n_1}^{(1)}) \dots X^{(k)} = (X_1^{(k)} \dots X_{n_k}^{(k)})$ . В общем случае размеры выборок могут быть различны.

### 10.4.1 Общая, межгрупповая и внутригрупповая дисперсия

$$\bar{X}^{(j)} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_i^{(j)} \quad \mathbb{D}^{(j)} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (X_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)})^2$$

Объединив все данные в одну общую выборку, получим выборку объёма  $n = n_1 + \dots + n_k$ . Вычислим общее выборочное среднее как

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} X_i^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \bar{X}^{(j)} n_j$$

и общую выборочную дисперсию:

$$D_o = \frac{1}{n} \sum_{i,j} (X_i^{(j)} - \bar{X})^2$$

**Определение.** Внутригрупповой (*остаточной*) дисперсией называется среднее<sup>2</sup> групповых дисперсий:

$$D_b = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{D}^{(j)} n_j$$

**Определение.** Межгрупповой (*факторной*) дисперсией или дисперсией выборочных средних называется величина

$$D_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (\bar{X}^{(j)} - \bar{X})^2 n_j$$

**Теорема 22** (о разложении дисперсий). Общая дисперсия равна сумме межгрупповой и внутригрупповой дисперсий:

$$D_o = D_b + D_m$$

---

<sup>2</sup> взвешенное



Доказательство. Неинтересное, алгебраическое. □

Смысл:

- Внутригрупповая дисперсия показывает средний разброс внутри выборок.
- Межгрупповая дисперсия показывает, насколько отличны выборочные средние при различных уровнях фактора. Таким образом, её величина в общей сумме отражает влияние фактора.

#### 10.4.2 Проверка гипотезы о влиянии фактора

Предположим, что случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение и фактор  $Z$  может влиять только на математическое ожидание, но не на дисперсию и тип распределения.

Может показаться, что ограничение слишком строгое, но в реальной жизни это условие выполняется часто.

Поэтому можно считать, что данные независимые выборки при разных уровнях  $Z$  также имеют нормальное распределение с одинаковым параметром  $\sigma^2$ :

$$X_i^{(j)} \in N(a_i, \sigma^2)$$

Проверяется основная гипотеза  $H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_k$ , т.е. фактор  $Z$  не влияет на  $X$ .  $H_1 : Z$  влияет на  $X$ . По пункту 3 основной теоремы:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{nD_B}{S^2} \in H_{n-1}$$

Отсюда для каждой из  $k$  выборок:

$$\frac{n_j D^{(j)}}{\sigma} \in H_{n_j-1}, 1 \leq j \leq k$$

Т.к. распределение  $\chi^2$  устойчиво по суммированию, то получаем:

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_j D^{(j)}}{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j D^{(j)}}{\sigma^2} = \frac{nD_B}{\sigma^2} \in H_{n-k}$$

, т.к.  $\sum_{j=1}^k (n_j - 1) = n - k$ .

Все это выполнено вне зависимости от того, верна  $H_0$  или нет. Пусть  $H_0$  верна, тогда все выборки можно считать одной выборкой объёма  $n$  и по тому же свойству:

$$\frac{nD_o}{\sigma^2} \in H_{n-1}$$

---

На записи все эти формулы видны примерно как “Ыаыаыаацпы”, так что за достоверность конспекта не отвечаю.

Согласно теореме о разложении дисперсии:

$$\underbrace{\frac{nD_o}{\sigma^2}}_{\in H_{n-1}} = \frac{nD_B}{\sigma^2} + \underbrace{\frac{nD_M}{\sigma^2}}_{\in H_{n-k}}$$

Следовательно,  $\frac{nD_B}{\sigma^2} \in H_{k-1}$ <sup>3</sup>. В итоге при верной гипотезе  $H_0$  мы получили  $\frac{nD_B}{\sigma^2} \in H_{k-1}$ , а  $\frac{nD_M}{\sigma^2} \in H_{n-k}$ . Тогда:

$$\frac{\frac{nD_B}{\sigma^2(k-1)}}{\frac{nD_M}{\sigma^2(n-k)}} = \frac{\frac{D_B}{k-1}}{\frac{D_M}{n-k}} \in F(k-1, n-k)$$

В результате имеем критерий  $K = \frac{n-k}{n-1} \frac{D_B}{D_M}$ , находим  $t_k$  — квантиль  $F(k-1, n-k)$  уровня значимости  $\alpha$ , искомое очевидно строится.

---

<sup>3</sup> Это неочевидный факт, но мы его доказывать не будем.

# Лекция 9

## 1 ноября

### 11 Исследование статистической зависимости

Требуется определить, как зависит наблюдаемая случайная величина от одной или нескольких других величин, причём необязательно все величины случайные. Хотелось бы построить математическую модель, которая будет с некоторой надежностью предсказывать значение искомой величины при известных прочих величинах.

*Примечание.* Предсказывать мы можем лишь среднее значение наблюдаемых случайных величин.

#### 11.1 Математическая модель регрессии

Пусть случайная величина  $X$  зависит от случайной величины  $Z$ . Значение  $Z$  мы либо наблюдаем, либо задаём.

**Определение.** Регрессией  $X$  на  $Z$  называется функция  $f(z) = \mathbb{E}(X \mid Z = z)$ . Она показывает зависимость среднего значения  $X$  от значения  $Z$ .

**Определение.** Уравнение  $X = f(Z)$  называется **уравнением регрессии**, а её график — **линией регрессии**.

Пусть при  $n$  экспериментах при значениях  $z_1 \dots z_n$  случайной величины  $Z$  наблюдались значения  $X_1 \dots X_n$  случайной величины  $X$ . Обозначим через  $\varepsilon_i$  разницу между экспериментальными и теоретическими значениями случайной величины  $X$ :

$$\varepsilon_i = X_i - \mathbb{E}(X \mid Z = z_i) = X_i - f(z_i)$$

Тогда  $X_i = f(z_i) + \varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\varepsilon_i$  можно понимать, как ошибку эксперимента.

*Примечание.* Обычно можно считать, что  $\varepsilon_i$  — независимая одинаковая нормальная случайная величина:  $\varepsilon_i \in N(0; \sigma^2)$ .  $a = 0$ , т.к.

$$\mathbb{E} \varepsilon_i = \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(f(z_i)) = \mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(X \mid Z = z_i) = 0$$

*Примечание.* В реальности  $\varepsilon_i$  могут быть зависимыми, это явление называется автокорреляция, особенно часто проявляется во временных рядах.

*Цель:* по данным значениям  $z_1 \dots z_n$  и  $X_1 \dots X_n$  как можно более точно оценить функцию  $f(z)$ .

*Примечание.* При этом предполагается (из теории), что  $f(z)$  — функция определенного типа, параметры которой неизвестны.

### 11.1.1 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов состоит в выборе параметров функции  $f(z)$  таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов ошибок:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - f(z_i))^2 \rightarrow \min$$

**Определение.** Пусть  $\theta = (\theta_1 \dots \theta_k)$  — набор неизвестных параметров функции  $f(z)$ . Оценка  $\hat{\theta}$ , при которой достигается минимум суммы квадратов ошибок, называется **оценкой метода наименьших квадратов (ОМНК)**.

### 11.1.2 Линейная парная регрессия

Пусть имеется линейная регрессия  $f(z) = a + bz$ . Тогда  $X_i = a + bz_i + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n$ , найдём оценки неизвестных параметров  $a$  и  $b$  методом наименьших квадратов (МНК):

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - a - bz_i)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n (X_i - a - bz_i) \cdot (-1) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n X_i + 2 \sum_{i=1}^n a + 2 \sum_{i=1}^n bz_i \\ &= -2 (n\bar{X} - na - bn\bar{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n (X_i - a - bz_i) \cdot (-z_i) \\ &= -2 (n\bar{X}\bar{Z} - an\bar{Z} - bn\bar{Z}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n\bar{X} - na - bn\bar{Z} = 0 \\ n\bar{X}\bar{Z} - na\bar{Z} - bn\bar{Z}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X} - a - b\bar{Z} = 0 \\ \bar{X}\bar{Z} - a\bar{Z} - b\bar{Z}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{Z} = \bar{X} \\ a\bar{Z} + b\bar{Z}^2 = \bar{X}\bar{Z} \end{cases}$$

Система такого вида называется системой нормальных уравнений.

$$\begin{cases} a = \bar{X} - b\bar{Z} \\ (\bar{X} - b\bar{Z})\bar{Z} + b\bar{Z}^2 = \bar{X}\bar{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \bar{X} - b\bar{Z} \\ b(\bar{Z}^2 - \bar{Z}^2) = \bar{X}\bar{Z} - \bar{X} \cdot \bar{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \bar{X} - b\bar{Z} \\ b = \frac{\bar{X}\bar{Z} - \bar{X} \cdot \bar{Z}}{\bar{Z}^2 - \bar{Z}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \bar{X} - b\bar{Z} \\ b = \frac{\bar{X}\bar{Z} - \bar{X} \cdot \bar{Z}}{\hat{\sigma}_z^2} \end{cases}$$

, где  $\hat{\sigma}_z^2$  — выборочная дисперсия  $Z$  (неисправленная).

Запишем уравнение линейной регрессии в удобном виде.

$$\begin{aligned} \bar{X}_z &:= \mathbb{E}(\bar{X} \mid Z = z) = f(z) \\ \bar{X}_z &= a + bz \\ \bar{X}_z &= \bar{X} - b\bar{Z} + bz \\ \bar{X}_z - \bar{X} &= -b\bar{Z} + bz \\ \bar{X}_z - \bar{X} &= b(z - \bar{Z}) \\ \bar{X}_z - \bar{X} &= \frac{\bar{X}\bar{Z} - \bar{X} \cdot \bar{Z}}{\hat{\sigma}_z^2} (z - \bar{Z}) \\ \bar{X}_z - \bar{X} &= \frac{\bar{X}\bar{Z} - \bar{X} \cdot \bar{Z}}{\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x} \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{\sigma}_z} (z - \bar{Z}) \\ \frac{\bar{X}_z - \bar{X}}{\hat{\sigma}_x} &= \frac{\bar{X}\bar{Z} - \bar{X} \cdot \bar{Z}}{\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x} \cdot \frac{z - \bar{Z}}{\hat{\sigma}_z} \\ \frac{\bar{X}_z - \bar{X}}{\hat{\sigma}_x} &= r_b \frac{z - \bar{Z}}{\hat{\sigma}_z} \end{aligned}$$

, где  $r_b = \frac{\overline{XZ} - \overline{X} \cdot \overline{Z}}{\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x}$  — выборочный коэффициент линейной корреляции, а само уравнение называется выборочным уравнением линейной регрессии.

*Примечание.* Прямая регрессии проходит через точку  $\overline{Z}, \overline{X}$ .

### 11.1.3 Геометрический смысл прямой линейной регрессии



Прямая регрессии строится таким образом, чтобы сумма квадратов длин отрезков от прямой до точек распределения была наименьшей.

## 11.2 Выборочный коэффициент линейной корреляции

**Определение.**

$$r_b := \frac{\overline{XZ} - \overline{X} \cdot \overline{Z}}{\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x}$$

*Примечание.* Из прошлого семестра:

$$r_{\xi, \eta} = \frac{\mathbb{E} \xi \eta - \mathbb{E} \xi \cdot \mathbb{E} \eta}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

Отсюда видим, что выборочный коэффициент линейной корреляции является оценкой теоретического коэффициента линейной корреляции, полученной по методу моментов. Поэтому выборочный коэффициент линейной корреляции характеризует силу линейной связи между двумя случайными величинами. Знак  $r_b$  показывает, является ли корреляция прямой или обратной.

| $ r_{\text{в}} $ | Сила связи    |
|------------------|---------------|
| 0.1 – 0.3        | слабая        |
| 0.3 – 0.5        | умеренная     |
| 0.5 – 0.7        | заметная      |
| 0.7 – 0.9        | высокая       |
| > 0.9            | очень высокая |

Рис. 9.1: Шкала Чеддока

### 11.2.1 Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная случайная величина  $(Z, X)$  распределена нормально. По выборке объёма  $n$  вычислим  $r_{\text{в}}$ , а  $r$  — теоретический коэффициент линейной корреляции. Проверяется основная гипотеза  $H_0 : r = 0$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : r \neq 0$ , т.е. коэффициент  $r_{\text{в}}$  статистически значим.

**Теорема 23.** Если  $H_0$  верна, то статистика

$$K = \frac{r_{\text{в}} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}} \in T_{n-2}$$

Критерий: пусть  $t_k$  — квантиль  $T_{n-2}$  уровня значимости  $\alpha$ .

$$\begin{cases} H_0 : r = 0, & |K| < t_k \\ H_1 : r \neq 0, & |K| \geq t_k \end{cases}$$

В Excel  $r_{\text{в}} = \text{КОРРЕЛ}(Z, X)$

## 11.3 Исторический смысл понятия регрессии

Не дописано

*Примечание.*

- Из корреляции не следует зависимость.
- Зависимость и корреляция не транзитивны.
- Нулевая корреляция не гарантирует отсутствие зависимости

## 11.4 Выборочное корреляционное отношение

Пусть имеется  $k$  выборок случайной величины  $X$ , полученных при уровнях фактора  $Z : Z_1 \dots Z_k$ . Вычислены общая дисперсия  $D_o$ , межгрупповая дисперсия  $D_{\text{м}}$  и  $D_{\text{в}}$  —

внутригрупповая дисперсия. По теореме о разложении дисперсий  $D_o = D_b + D_m$ . Обозначим:

- $\sigma_{\bar{X}_z} = \sqrt{D_m}$  – межгрупповое среднее квадратическое отклонение
- $\hat{\sigma}_X = \sqrt{D_o}$  – выборочное среднее квадратическое отклонение

**Определение.** Выборочным корреляционным отношением  $\eta_{XZ}$  случайной величины  $X$  на  $Z$  называется величина

$$\eta_{XZ} = \frac{\sigma_{\bar{X}_z}}{\hat{\sigma}_X} = \sqrt{\frac{D_m}{D_o}}$$

*Свойства.*

1.  $0 \leq \eta \leq 1$

*Доказательство.*

$$D_o = D_b + D_m, 0 \leq D_m \leq D_o \Rightarrow 0 \leq \frac{D_m}{D_o} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \eta = \sqrt{\frac{D_m}{D_o}} \leq 1$$

□

2. Если  $\eta = 1$ , то  $X$  функционально зависит от  $Z$ .

*Доказательство.*  $\eta = 1 \Rightarrow D_b = 0 \Rightarrow X = X(Z)$  – функция от переменной  $Z$  □

3. Если  $\eta = 0$ , то нет корреляционной зависимости.

*Доказательство.* Если  $\eta = 0$ , то  $D_m = 0$ , следовательно значения  $\bar{X}^{(i)}$  не зависят от  $Z_i$ . □

4.  $\eta \geq |r_b|$

5.  $\eta = |r_b| \Leftrightarrow$  когда имеет место точная линейная корреляционная зависимость, т.е. все точки экспериментальных данных лежат на одной прямой, которая совпадёт с прямой регрессии.



# Лекция 10

## 8 ноября

На этой лекции мы более подробно обсудим уравнение линейной парной регрессии, которое мы вывели на предыдущей лекции.

**Определение.**

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)(Y - \mathbb{E} Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$\text{cov}(X, Y)_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

*Свойства.*

1.  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
2.  $\text{cov}(X, a) = 0$
3.  $\text{cov}(X, bY) = b \text{cov}(X, Y)$
4.  $\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(X, Y)$
5.  $\text{cov}(X, X) = \mathbb{D} X$
6.  $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$

*Доказательство.* Элементарно из определения и свойств математического ожидания и дисперсии.  $\square$

Пусть при  $n$  экспериментах получены точки  $(Z_1, X_1) \dots (Z_n, X_n)$ , при этом  $X$  — признак-результат, а  $Z$  — признак-фактор. Пусть  $X = \alpha + \beta Z + e$  — теоретическая модель регрессии. Здесь  $\alpha, \beta$  — неизвестные теоретические значения,  $e$  — неизвестная случайная величина, которая отражает:

- Влияние неучтённых факторов.

- Вероятность того, что модель нелинейная.
- Случайность.

Получим выборочное уравнение линейной регрессии:

$$\hat{X} = a + bZ$$

Тогда экспериментальные данные можно представить так:

$$X_i = \hat{X} + \varepsilon_i$$

Константы  $a$  и  $b$  можно рассматривать как точечные оценки  $\alpha$  и  $\beta$ . Нас интересует, насколько качественны эти оценки и что можно сказать про распределение ошибки  $e$ .

Свойства  $\varepsilon_i$ :

$$1. \overline{\varepsilon_i} = 0$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} a &= \overline{X} - b\overline{Z} \Rightarrow \overline{X} = a + b\overline{Z} \\ \overline{\varepsilon_i} &= \overline{X_i - \hat{X}} = \overline{X} - \overline{a + bZ_i} = \overline{X} - \overline{X} = 0 \end{aligned}$$

□

$$2. \text{cov}(\hat{X}_i, \varepsilon_i) = 0, \text{ т.е. эти величины не коррелируют.}$$

*Доказательство.*

*Примечание.* Дальше будем обозначать выборочную дисперсию как  $\mathbb{D}$ , а не  $\mathbb{D}_B$

$$b = \frac{\overline{XZ} - \overline{X} \overline{Z}}{\hat{\sigma}_z^2} = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\mathbb{D}(Z)} \Rightarrow \text{cov}(X, Z) = b \mathbb{D}(Z) \Rightarrow \text{cov}(X, Z) - b \mathbb{D}(Z) = 0$$

Т.к.  $\hat{X} = a + bZ, \varepsilon = X - a - bZ$ , то:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{X}, \varepsilon) &= \text{cov}(a + bZ, X - a - bZ) \\ &= \text{cov}(bZ, X - bZ) \\ &= \text{cov}(bZ, X) - \text{cov}(bZ, bZ) \\ &= b \text{cov}(Z, X) - b^2 \cdot \mathbb{D}(Z) \\ &= b(\text{cov}(Z, X) - b \cdot \mathbb{D}(Z)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

С помощью второго свойства можем провести анализ модели, анализируя дисперсии.

Обозначение.

$$\mathbb{D}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Дисперсия расчётных значений:

$$\mathbb{D}(\hat{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \bar{X})^2$$

$$\mathbb{D}(\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

$$X = \hat{X} + \varepsilon$$

$$\mathbb{D} X = \mathbb{D}(\hat{X} + \varepsilon)$$

$$\mathbb{D} X = \mathbb{D} \hat{X} + \mathbb{D} \varepsilon + 2 \underbrace{\text{cov}(\hat{x}, \varepsilon)}_0$$

$$\boxed{\mathbb{D} X = \mathbb{D} \hat{X} + \mathbb{D} \varepsilon}$$

## 11.5 Коэффициент детерминации

**Определение.**  $R^2 = \frac{\mathbb{D} \hat{X}}{\mathbb{D} X}$  — коэффициент детерминации.

Свойства.

1.  $0 \leq R^2 \leq 1$
2.  $R = 1 \Rightarrow$  ошибок нет и все точки экспериментальных данных лежат на найденной прямой.
3.  $R = 0 \Rightarrow$  расчётное значение  $\hat{X}$  постоянно, т.е. найденная прямая постоянна с уровнем  $\bar{X}$  и  $b = 0$ .

Таким образом, чем ближе  $R^2$  к 1, тем качественнее модель.

Поскольку  $R^2$  — доля дисперсии расчётных значений,  $R^2$  объясняет долю дисперсии экспериментальных данных. Соответственно  $1 - R^2$  — доля необъясненной дисперсии.

Пусть мы хотим проверить, является ли  $R^2$  статистически значимым, т.е. проверяем основную гипотезу  $H_0 : R_T^2 = 0$  против гипотезы  $H_1 : R_T^2 \neq 0$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup>  $R_T$  — теоретический коэффициент детерминации.

**Теорема 24.**

$$K = \frac{R^2(n-2)}{1-n^2} \in F(1, n-2)$$

Пусть  $t_{\text{кр.}}$  — квантиль  $F(1, n-2)$  уровня значимости  $\alpha$ . Тогда если  $K < t_{\text{кр.}}$ , то принимается гипотеза  $H_0$ , иначе  $H_1$ .

Если взять корень из  $K$ , то полученная величина должна иметь распределение Стьюдента. Для похожей<sup>2</sup> величины мы это доказывали при проверке статистической значимости коэффициента линейной корреляции.

Проверить  $R_T^2 \neq 0$  — то же самое, что проверить гипотезу  $b = 0$ .

$$1. \sqrt{R^2} = r_{\hat{X}, X}$$

*Доказательство.*

$$\text{cov}(\hat{X}, X) = \text{cov}(\hat{X}, \hat{X} + \varepsilon) = \underbrace{\text{cov}(\hat{X}, \hat{X})}_{\mathbb{D} \hat{X}} + \underbrace{\text{cov}(\hat{X}, \varepsilon)}_0 = \mathbb{D} \hat{X}$$

$$r_{\hat{X}, X} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(\hat{X}, X)}{\sqrt{\mathbb{D}(\hat{X}) \cdot \mathbb{D}(X)}} = \frac{\mathbb{D}(\hat{X})}{\sqrt{\mathbb{D}(\hat{X}) \cdot \mathbb{D}(X)}} = \sqrt{\frac{\mathbb{D}(\hat{X})}{\mathbb{D}(X)}} = \sqrt{R^2}$$

□

$$2. \sqrt{R^2} = r_{Z, X}$$

*Доказательство.*

$$\text{cov}(\hat{X}, X) = \text{cov}(a + bZ, X) = b \text{cov}(Z, X)$$

$$\mathbb{D}(\hat{X}) = \mathbb{D}(a + bZ) = 0 + b^2 \mathbb{D}(Z) = b^2 \mathbb{D}(Z)$$

$$r_{\hat{X}, X} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(\hat{X}, X)}{\sqrt{\mathbb{D}(\hat{X}) \cdot \mathbb{D}(X)}} = \frac{b \text{cov}(Z, X)}{\sqrt{b^2 \mathbb{D}(Z) \cdot \mathbb{D}(X)}} = \frac{\text{cov}(Z, X)}{\sqrt{\mathbb{D}(Z) \cdot \mathbb{D}(X)}} \stackrel{\text{def}}{=} r_{Z, X}$$

□

Таким образом, квадрат коэффициента линейной корреляции равен коэффициенту детерминации. Поэтому и результат проверки гипотез будет одинаковым. Этот факт верен только для модели парной регрессии.

---

<sup>2</sup> Вместо  $R$  было  $r$ .

## 11.6 Качество моделей линейной регрессии

Обсудим, насколько качественные оценки коэффициентов линейной регрессии мы находим методом наименьших квадратов.

**Теорема 25 (Гаусса–Маркова).**

- $X = \alpha + \beta Z + e$
- $\hat{X} = a + bZ$
- $e_i$  — независимые случайные величины,  $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$
- $Z_i$  и  $e_i$  независимы<sup>34</sup>

Тогда оценки  $a$  и  $b$  коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  будут:

1. Несмещёнными:  $\mathbb{E} a = \alpha, \mathbb{E} b = \beta$
2. Состоятельными:  $a \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \alpha$  и  $b \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \beta$
3. Эффективными в классе линейных несмещённых оценок, т.е. их дисперсии в этом классе минимальны и при этом равны:

$$\mathbb{D}(a) = \frac{\overline{Z^2} \cdot \sigma^2}{n \mathbb{D}(Z)} \quad \mathbb{D}(b) = \frac{\sigma^2}{n \mathbb{D}(Z)}$$

Третье условие нужно для несмещённости, а четвертое — для состоятельности.

Дадим оценку дисперсии  $\sigma^2$  величины  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\varepsilon) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \\ \mathbb{E}(\mathbb{D}(\varepsilon)) &= \frac{n-2}{n} \sigma^2 \\ S^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \end{aligned}$$

$S^2$  — несмещённая оценка  $\sigma^2$ , мы не будем это доказывать.

**Определение.**  $S$  — стандартная ошибка регрессии.

<sup>3</sup> Также используют условие  $Z_i$  — не случайная величина. Это условие слабее указанного.

<sup>4</sup> Обратное к этому условию называется автокорреляцией. Автокорреляция распространена во временных рядах.

Если в  $\mathbb{D}(a)$  и в  $\mathbb{D}(b)$  подставим вместо  $\sigma^2$  его оценку  $S^2$ , то получим стандартные ошибки коэффициентов  $a$  и  $b$ .

$$S_a^2 = \frac{\overline{Z^2} \cdot S^2}{n \mathbb{D}(Z)} \quad S_b^2 = \frac{S^2}{n \mathbb{D}(Z)}$$

Т.к.  $e_i$  имеет нормальное распределение, то и  $\varepsilon_i$  имеет нормальное распределение. Тогда пусть  $t_\gamma$  — квантиль двухстороннего распределения Стьюдента  $|T_{n-2}|$ . Тогда будут доверительные интервалы:

- Для  $\alpha$ :  $(a - t_\gamma \cdot S_a; a + t_\gamma \cdot S_a)$
- Для  $\beta$ :  $(b - t_\gamma \cdot S_b; a + t_\gamma \cdot S_b)$

$X = \alpha + \beta Z + e$  — теоретическая неизвестная модель,  $X = a + bZ$  — выборочная модель, которую нашли по экспериментальным данным.

Пусть требуется составить прогноз при  $Z = Z_p$ . Тогда в теории  $X_p = \alpha + \beta Z_p + e$ , на практике  $\hat{X}_p = a + bZ_p$ . Обозначим  $\Delta_p = \hat{X}_p - X_p$ .

*Свойства.*

$$1. \mathbb{E} \Delta_p = 0$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Delta_p &= \mathbb{E}(\hat{X}_p - X_p) \\ &= \mathbb{E}(a + bZ_p) - \mathbb{E}(\alpha + \beta Z_p + e) \\ &= \mathbb{E}(a) + Z_p \mathbb{E}(b) - \alpha - \beta Z_p - \underbrace{\mathbb{E} e}_0 \\ &= \alpha + \beta Z_p - \alpha - \beta Z_p \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

2.

$$\mathbb{D} \Delta_p = \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(Z_p - \bar{Z})^2}{n \mathbb{D}(Z)} \right) \sigma^2$$

*Доказательство.* Несложно, но занудно. Поэтому не будем.

□

$$S^2 \Delta_p = \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(Z_p - \bar{Z})^2}{n \mathbb{D}(Z)} \right) S^2$$

$$S \Delta_p = S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(Z_p - \bar{Z})^2}{n \mathbb{D}(Z)}}$$

$$(a) \mathbb{D} \Delta_p > \sigma^2$$

(b) При  $n \rightarrow \infty, \mathbb{D} \Delta_p \rightarrow \sigma^2$ .

(c) Чем дальше  $Z_p$  от  $\bar{Z}$ , тем выше будет ошибка модели. Таким образом, качественно предсказывать далеко от среднего никакая модель не может.

Доверительный интервал прогноза будет  $(\hat{X} - t_\gamma \cdot S\Delta_p, \hat{X} + t_\gamma \cdot S\Delta_p)$ , где  $t_k$  — квантиль распределения Стьюдента  $T_{n-2}$  уровня  $\gamma$ . Это согласно моей интерпретации [этого учебника](#), на лекции это не говорилось.

# Лекция 11

## 15 ноября

### 12 Общая модель линейной регрессии

Пусть признак-результат  $X$  зависит от  $k$  факторов  $Z_1 \dots Z_k$ . Рассматривается теоретическая модель линейной регрессии  $\mathbb{E}(X \mid \vec{Z}) = \beta_1 Z_1 + \dots + \beta_k Z_k$

*Обозначение.*

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

Пусть проведено  $n \geq k$  экспериментов,  $\vec{Z}^{(i)} = (Z_1^{(i)} \dots Z_k^{(i)})$  — значение фактора при  $i$ -том эксперименте (возможно заранее заданные).  $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$  — полученные экспериментальные данные признака-результата  $X$ . Согласно модели:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_1 Z_1^{(1)} + \dots + \beta_k Z_k^{(1)} + \varepsilon_1 \\ X_2 = \beta_1 Z_1^{(2)} + \dots + \beta_k Z_k^{(2)} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ X_n = \beta_1 Z_1^{(n)} + \dots + \beta_k Z_k^{(n)} + \varepsilon_n \end{cases}$$

, где  $\varepsilon_i$  — случайная теоретическая ошибка при  $i$ -том эксперименте.

*Обозначение* (вектор случайных ошибок).

$$\vec{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$



Обозначение (матрица плана).

$$Z_{k \times n} := \begin{pmatrix} Z_1^{(1)} & Z_1^{(2)} & \dots & Z_1^{(n)} \\ Z_2^{(1)} & Z_2^{(2)} & \dots & Z_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_k^{(1)} & Z_k^{(2)} & \dots & Z_k^{(n)} \end{pmatrix}$$

Тогда теоретическую модель можно записать в матричной форме:

$$\vec{X} = Z^T \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$$

Требуется по данной матрице плана  $Z$  и вектору результатов  $\vec{X}$  найти оценки  $\vec{B} = (b_1 \dots b_k)$  для параметров регрессии  $\vec{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_k)$  и параметров распределения ошибок  $\varepsilon_i$

*Примечание.* Заметим, что в данной модели мы не теряем свободный член  $a$ , т.к. можно считать, что  $Z_1 = \mathbb{1}$  и ей соответствует строка из единиц.

## 12.1 Метод наименьших квадратов и нормальные уравнения

Будем считать, что выполнено два условия:

1.  $\text{rank } Z = k$ , т.е. все строки матрицы плана линейно независимы.<sup>1</sup>
2. Случайные ошибки  $\varepsilon_i$  независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с параметром  $a = 0$ .<sup>2</sup>

Обозначение.  $A_{k \times k} := ZZ^T$

Свойства.

1.  $A$  — симметричная.
2.  $A$  — положительно определенная.
3. Существует вещественная симметрическая матрица  $\sqrt{A}$ , такая что  $(\sqrt{A})^2 = A$ .

Найдём оценку  $\vec{B} = (b_1 \dots b_k)$ , которая минимизирует функцию

$$L(\vec{B}) = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \|\hat{\varepsilon}\|^2 = \|\vec{X} - Z^T \vec{B}\|^2$$

Заметим, что  $\|\vec{X} - Z^T \vec{B}\|^2$  — квадрат расстояния от точки  $\vec{X}$  до точки  $Z^T \vec{B}$ , которая является точкой подпространства  $\langle Z^T \vec{t} \rangle$ , где  $\vec{t} \in \mathbb{R}^k$ . Таким образом, искомое минимальное

<sup>1</sup> Это условие тривиально выполнить путём отброса линейно зависимых экспериментов.

<sup>2</sup> Это условие уже было в теореме Гаусса–Маркова

расстояние это расстояние до данного подпространства  $\langle Z^T \vec{t} \rangle$ . Это расстояние получаем при условии, что вектор  $\vec{X} - Z^T \vec{B}$  будет ортогонален всем векторам подпространства, т.е. скалярное произведение  $\langle Z^T \vec{t}, \vec{X} - Z^T \vec{B} \rangle = 0 \quad \forall \vec{t}$

$$\begin{aligned} \langle Z^T \vec{t}, \vec{X} - Z^T \vec{B} \rangle &= (Z^T \vec{t})^T \cdot (\vec{X} - Z^T \vec{B}) \\ &= \vec{t}^T \cdot Z \cdot (\vec{X} - Z^T \vec{B}) \\ &= \vec{t}^T \cdot (Z\vec{X} - ZZ^T \vec{B}) \end{aligned}$$

Т.к. скалярное произведение вектора со всеми другими векторами равно нулю тогда и только тогда, когда он является нулевым, то:

$$\begin{aligned} Z\vec{X} - ZZ^T \vec{B} &= 0 \\ ZZ^T \vec{B} &= Z\vec{X} \\ A\vec{B} &= Z\vec{X} \end{aligned}$$

Это система из  $k$  линейных нормальных уравнений, из которой можно найти оценки  $\vec{B}$  неизвестных параметров. По свойству 2 матрица невырожденная, поэтому эта система имеет единственное решение:

$$\vec{B} = A^{-1} Z\vec{X}$$

**Определение.** Матрицей ковариации случайного вектора  $\vec{X}$  называется матрица  $\mathbb{D} \vec{X} = \mathbb{E}(\vec{X} - \mathbb{E} \vec{X})(\vec{X} - \mathbb{E} \vec{X})^T$ , состоящая из элементов  $\text{cov}(X_i, X_j)$

*Свойства (оценок метода наименьших квадратов).*

$$1. \vec{B} - \vec{\beta} = A^{-1} Z\vec{\varepsilon}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \vec{B} - \vec{\beta} &= A^{-1} Z\vec{X} - \vec{\beta} \\ &= A^{-1} Z(Z^T \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}) - \vec{\beta} \\ &= A^{-1} \underbrace{ZZ^T}_A \vec{\beta} + A^{-1} Z\vec{\varepsilon} - \vec{\beta} \\ &= A^{-1} Z\vec{\varepsilon} \end{aligned}$$

□

$$2. \vec{B} - \text{несмещённая оценка параметров } \vec{\beta}$$

*Доказательство.*

$$\mathbb{E} \vec{B} = \mathbb{E}(A^{-1} Z\vec{\varepsilon} + \vec{\beta})$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(A^{-1}Z\vec{\varepsilon}) + \mathbb{E}\vec{\beta} \\
&= A^{-1}Z \underbrace{\mathbb{E}\vec{\varepsilon}}_0 + \vec{\beta} \\
&= \vec{\beta}
\end{aligned}$$

□

Кроме того, если  $\mathbb{E}\vec{\varepsilon} \neq 0$ , то оценка смещённая.

$$3. \mathbb{D}\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 E_n^3$$

*Доказательство.* По условию  $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$  и независимы, следовательно,  $d_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $d_{ii} = \sigma^2$  □

$$4. \mathbb{D}(\sqrt{A} \cdot \vec{B}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 E_k$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(\sqrt{A} \cdot \vec{B}) &= \mathbb{E}(\sqrt{A} \cdot \vec{B} - \mathbb{E}\sqrt{A} \cdot \vec{B})(\sqrt{A} \cdot \vec{B} - \mathbb{E}\sqrt{A} \cdot \vec{B})^\top \\
&= \mathbb{E}(\sqrt{A}(\vec{B} - \mathbb{E}\vec{B})) \cdot (\sqrt{A}(\vec{B} - \mathbb{E}\vec{B}))^\top \\
&= \mathbb{E}(\sqrt{A}(\vec{B} - \vec{\beta})) \cdot (\sqrt{A}(\vec{B} - \vec{\beta}))^\top \\
&= \mathbb{E}(\sqrt{A}A^{-1}Z\vec{\varepsilon}) \cdot (\sqrt{A}A^{-1}Z\vec{\varepsilon})^\top \\
&= \sqrt{A}A^{-1}Z \mathbb{E}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}^\top) Z^\top (A^{-1})^\top (\sqrt{A})^\top \\
&= \sqrt{A}A^{-1}Z \sigma^2 E_n Z^\top A^{-1} \sqrt{A} \\
&= \sigma^2 \sqrt{A}A^{-1} \underbrace{ZZ^\top}_A A^{-1} \sqrt{A} \\
&= \sigma^2 \sqrt{A}A^{-1} \sqrt{A} \\
&= \sigma^2 \sqrt{A} \sqrt{A^{-1}} \sqrt{A^{-1}} \sqrt{A} \\
&= \sigma^2 E_k
\end{aligned}$$

□

*Следствие 25.1.* Координаты вектора  $\sqrt{A} \cdot \vec{B}$  некоррелированы.

$$5. \mathbb{D}\vec{B} = \sigma^2 A^{-1}$$

---

<sup>3</sup>  $E_n$  — единичная матрица  $n \times n$

*Доказательство.* По свойству 4  $\mathbb{D}(\sqrt{A} \cdot \vec{B}) = \sigma^2 E_k$ . В силу билинейности ковариации:

$$\sigma^2 E_k = \mathbb{D}(\sqrt{A} \cdot \vec{B}) = (\sqrt{A})^2 \mathbb{D} \vec{B} = A \mathbb{D} \vec{B}$$

□

Отсюда можем получить дисперсии оценок  $b_i$  по формулам:

$$\mathbb{D} b_i = \sigma^2 (A^{-1})_{ii}$$

Обозначим через  $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\vec{X} - Z^T \vec{B})^2$ . Заметим, что  $\hat{\sigma}^2$  — точная оценка неизвестного параметра  $\sigma^2$ .

**Теорема 26.** Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда:

1. Вектор  $\frac{1}{\sigma} \sqrt{A}(\vec{B} - \vec{\beta})$  состоит из  $k$  независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением.
2.  $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \in H_{n-k}$  и не зависит от  $\vec{B}$ .
3. Исправленная оценка  $S^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-k} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i^2$  — несмещённая оценка для  $\sigma^2$ .

*Доказательство.*

1. Вектор  $\sqrt{A}(\vec{B} - \vec{\beta}) = \sqrt{A}A^{-1}Z\vec{\varepsilon} = (\sqrt{A})^{-1}Z\vec{\varepsilon}$  является линейным преобразованием нормального вектора  $\vec{\varepsilon}$ , поэтому имеет нормальное совместное распределение, т.е. его координаты — нормальные случайные величины.

По свойству 2  $\mathbb{E}(\sqrt{A}(\vec{B} - \vec{\beta})) = 0$ , а его матрица ковариаций по свойству 4:

$$\mathbb{D}(\sqrt{A}(\vec{B} - \vec{\beta})) = \mathbb{D}(\sqrt{A}\vec{B}) = \sigma^2 E_k$$

Отсюда видим, что координаты данного вектора не коррелированы и, следовательно, независимы. Тогда  $\mathbb{D}\left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{A}\vec{B}\right) = E_k$

2. Нудно.
3. Т.к.  $\mathbb{E}(\chi_{n-k}^2) = n - k$ , то:

$$\mathbb{E} \hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \mathbb{E} \left( \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \right) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot (n - k) = \frac{n - k}{n} \sigma^2$$

Это смещённая оценка, следовательно,  $S^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n - k}$

□

**Упражнение 2.** Используя результаты этой лекции, получить в качестве частного случая уравнение парной линейной регрессии, доказать теорему Гаусса–Маркова и критерии проверки гипотез.

# Лекция 12

## 22 ноября

### 12.2 Построение и анализ уравнения множественной линейной регрессии

Пусть выявлена зависимость признака–результата  $X$  от факторов  $Z_1 \dots Z_k$ . При  $n \geq k$  экспериментов получены экспериментальные результаты  $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$  при значениях факторов  $\vec{Z}^{(i)} = (Z_1^{(i)} \dots Z_k^{(i)})$  — значения при  $i$ -том эксперименте,  $1 \leq i \leq n$ . Предполагаем, что зависимость  $X$  ото всех факторов — линейная. Цель: по этим данным построить модель, наилучшим образом объясняющую и предсказывающую поведение  $X$ .

#### 12.2.1 Мультиколлинеарность

**Определение.** Мультиколлинеарность — наличие заметной линейной связи между всеми или несколькими факторами.

Неприятные последствия:

1. Оценки параметров становятся ненадежными — имеют большие стандартные ошибки и малую значимость<sup>1</sup>.
2. Небольшое изменение исходных данных существенно влияет на изменение оценок регрессии.
3. Трудно выявить изолированное влияние конкретного фактора на результат и физический (экономический) смысл этого влияния.

---

<sup>1</sup> Об этом — в конце лекции.

### 12.2.2 Начальный отбор факторов модели

Находим корреляционную матрицу, состоящую из коэффициентов линейной корреляции:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{X,Z_1} & r_{X,Z_2} & \dots & r_{X,Z_k} \\ r_{X,Z_1} & 1 & r_{Z_1,Z_2} & \dots & r_{Z_1,Z_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{X,Z_k} & r_{Z_1,Z_k} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Алгоритм:

1. Берём фактор, наиболее коррелирующий с  $X$ .
2. По очереди добавляем факторы со свойствами:
  - (а) Корреляция с  $X$  как можно большая.
  - (б) Корреляция с ранее введенными факторами как можно меньше.

Пример.

|       | $X$   | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $X$   | 1     | —     | —     | —     |
| $Z_1$ | 0.85  | 1     | —     | —     |
| $Z_2$ | 0.81  | 0.93  | 1     | —     |
| $Z_3$ | -0.65 | -0.43 | -0.19 | 1     |

В модель вводится  $Z_1, Z_3$

### 12.2.3 Анализ уравнения линейной регрессии

Пусть:

- $X = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \dots + \beta_k Z_k + \varepsilon$  — теоретическая модель.
- $\hat{X} = b_0 + b_1 Z_1 + \dots + b_k Z_k$  — уравнение, полученное методом наименьших квадратов.

Как и раньше, считаем, что  $\varepsilon \in N(0, \sigma^2)$ .

Согласно пункту 3 теоремы 26  $S^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i^2$  — несмещённая оценка для  $\sigma^2$ , где  $\varepsilon_i = X_i - \hat{X}_i$ .

**Определение.**  $S$  — стандартная ошибка регрессии.

<sup>2</sup> Из-за свободного члена.

Из свойства 5 имеем  $\mathbb{D} b_i = \sigma^2 (A^{-1})_{ii}$ , где  $A = ZZ^T$ ,  $Z$  — матрица плана. Соответственно  $\hat{\mathbb{D}} b_i = S^2 (A^{-1})_{ii}$  — оценка  $\mathbb{D} b_i$ .

$S_{b_i} = S \sqrt{(A^{-1})_{ii}}$  — стандартная ошибка коэффициента  $b_i$ .

#### 12.2.4 Уравнение регрессии в стандартных масштабах

Так как факторы имеют различную природу и измеряются в различных единицах, то по коэффициентам уравнения МНК нельзя судить о силе влияния каждого фактора. Поэтому удобно стандартизовать исследуемые величины:

$$t_X := \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X} \quad t_j := \frac{Z_j^{(i)} - \bar{Z}_j}{\sigma_{Z_j}}, 1 \leq j \leq k$$

Если в уравнении регрессии заменить величины стандартизованными величинами, то получим уравнение стандартных масштабов:

$$t_X = \gamma_1 t_1 + \dots + \gamma_k t_k$$

*Примечание.*  $\gamma_0 = 0$ , т.к.  $\underbrace{\bar{t}_k}_{=0} = \gamma_1 \underbrace{\bar{t}_1}_{=0} + \dots + \gamma_k \underbrace{\bar{t}_k}_{=0} + \gamma_0$

При этом система нормальных уравнений приобретает простой вид:

$$\begin{cases} \gamma_1 + r_{Z_1, Z_2} \gamma_2 + r_{Z_1, Z_3} \gamma_3 + \dots + r_{Z_1, Z_k} \gamma_k = r_{Z_1, X} \\ r_{Z_2, Z_1} \gamma_1 + \gamma_2 + r_{Z_2, Z_3} \gamma_3 + \dots + r_{Z_2, Z_k} \gamma_k = r_{Z_2, X} \\ \vdots \\ r_{Z_k, Z_1} \gamma_1 + r_{Z_k, Z_2} \gamma_2 + \dots + \gamma_k = r_{Z_k, X} \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$R\Gamma = R_X$$

, где  $R$  — матрица корреляции,  $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix}$ ,  $R_X = \begin{pmatrix} r_{X, Z_1} \\ \vdots \\ r_{X, Z_k} \end{pmatrix}$

$\gamma_i$  и  $b_i$  связаны соотношением:

$$b_i = \gamma_i \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_{Z_i}}$$

Частный случай — уравнение парной линейной регрессии:

$$\frac{X - \bar{X}}{\sigma_X} = r_{\text{в}} \cdot \frac{Z - \bar{Z}}{\sigma_Z}$$

В данном случае  $\gamma_1 = r_{\text{в}}$

Смысл стандартизованных коэффициентов  $\gamma_i$ :  $\gamma_i$  показывает, на какую часть своего среднего отклонения  $\sigma_X$  изменится результат  $X$  при изменении фактора  $Z_i$  на величину своего среднего отклонения  $\sigma_{Z_i}$ .

При мультиколлинеарности факторы результата оказывают не только прямое воздействие на результат, но и косвенное через влияние других факторов. Стандартизованный коэффициент  $\gamma_i$  можно трактовать как показатель прямого влияния фактора  $Z_i$  на результат. Косвенное влияние этого фактора показывают остальные слагаемые:  $\sum_{j \neq i} \gamma_j r_{Z_i, Z_j}$ .

$$\overbrace{r_{Z_i, Z_1} \gamma_1 + r_{Z_i, Z_2} \gamma_2 + \dots}^{\text{косвенное влияние}} + \underbrace{\gamma_i}_{\text{прямое влияние}} + \overbrace{r_{Z_i, Z_{i+1}} \gamma_{i+1} + \dots + r_{Z_i, Z_k} \gamma_k}^{\text{косвенное влияние}} = r_{Z_i, X}$$

*Примечание.* Для измерения тесноты линейной связи между конкретным фактором и результатом при устранении других факторов есть понятие коэффициента частной корреляции.

### 12.3 Частные коэффициенты эластичности

**Определение.** Пусть имеется уравнение регрессии  $X = f(Z_1 \dots Z_k)$ . Частными коэффициентами эластичности называются величины

$$\mathcal{E}_i = \frac{\partial f}{\partial Z_i} \cdot \frac{\bar{Z}_i}{\bar{X}}$$

Смысл:  $\mathcal{E}_i$  показывает, на сколько процентов от среднего изменится  $X$  при изменении  $Z_i$  на 1% от своего среднего уровня при фиксированных значениях других факторов. В случае линейной регрессии:

$$\mathcal{E}_i = b_i \cdot \frac{\bar{Z}_i}{\bar{X}}$$

*Примечание.* Коэффициенты эластичности и стандартизованные коэффициенты могут привести к противоположным выводам. Причины:

1. Вариация фактора очень велика.
2. Воздействие факторов разнонаправленно.
3. Мультиколлинеарность.



## 12.4 Коэффициенты детерминации и множественной корреляции

Допустим, что дисперсию результата  $X$  можно разложить на объясненную моделью дисперсию и дисперсию остатков:

$$\mathbb{D} X = \mathbb{D} \hat{X} + \mathbb{D} \varepsilon$$

**Определение.** Коэффициентом детерминации  $R^2$  называется:

$$R^2 = \frac{\mathbb{D} \hat{X}}{\mathbb{D} X}$$

или

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbb{D} \varepsilon}{\mathbb{D} X}$$

*Свойства.*

1.  $0 \leq R^2 \leq 1$
2. Если  $R^2 = 1$ , то  $\mathbb{D} \varepsilon = 0$  и т.к.  $\bar{\varepsilon} = 0$ , то  $\varepsilon_i = 0$  для всех  $i$ , т.е. все наблюдаемые точки лежат в гиперплоскости регрессии.
3. Если  $R^2 = 0$ , то  $\mathbb{D} \hat{X} = 0$ ,  $\forall i \ X_i = \bar{X}$  и  $b_1 = \dots = b_k = 0$ .
4. Чем больше  $R^2$ , тем лучше модель.
5. В случае линейного уравнения регрессии:

$$R^2 = \sum_{i=1}^k \gamma_i r_{X, Z_i}$$

**Определение.**  $R = \sqrt{R^2}$  — коэффициент множественной корреляции.

*Примечание.* При добавлении в модель нового фактора  $R^2$  почти всегда увеличивается. Поэтому для выяснения необходимости введения новых факторов в модель используется скорректированный коэффициент детерминации:

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \frac{\mathbb{D} \varepsilon}{\mathbb{D} X}$$

, где  $n$  — число экспериментов,  $k$  — число факторов в модели.

## 12.5 Проверка гипотезы о значимости уравнения регрессии в целом

Проверяется гипотеза  $H_0 : R_T^2 = 0$  против гипотезы  $H_1 : R_T^2 \neq 0$ , т.е. уравнение статистически значимо.

**Теорема 27.** Если  $H_0$  верна, то:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - k - 1}{k} \in F(k, n - k - 1)$$

Критерий:  $t_{кр}$  — квантиль  $F(k, n - k - 1)$  уровня значимости  $\alpha$ . Тогда:

$$\begin{cases} H_0, & F < t_{кр} \\ H_1, & F \geq t_{кр} \end{cases}$$

*Примечание.* По свойству 3 это эквивалентно проверке гипотезы  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$

## 12.6 Проверка гипотезы о значимости отдельного коэффициента регрессии

Проверяется основная гипотеза  $H_0 : \beta_i = 0$  против  $H_1 : \beta_i \neq 0$ .

**Теорема 28.** Если  $H_0$  верна, то  $T_i = \frac{b_i}{S_{b_i}} \in T_{n-k-1}$ , где  $T_{n-k-1}$  — распределение Стьюдента с  $n - k - 1$  степенями свободы, а  $S_{b_i}$  — стандартная ошибка коэффициента  $b_i$ .

Критерий:  $t_{кр}$  — квантиль  $|T_{n-k-1}|$  уровня значимости  $\alpha$ . Тогда:

$$\begin{cases} H_0 : T_i < t_{кр} \Rightarrow Z_i \text{ можно выкинуть из модели} \\ H_1 : T_i \geq t_{кр} \Rightarrow Z_i \text{ можно оставить в модели} \end{cases}$$

При большой мультиколлинеарности может случиться так, что все коэффициенты статистически не значимы, а уравнение в целом значимо.

# Лекция 13

## 29 ноября

Начало лекции возможно записано с ошибками, т.к. в записи не было звука.

Пусть имеется уравнение множественной регрессии в векторной форме:  $\vec{X} = Z^T \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$ , где  $\vec{X} = (X_1 \dots X_k)^T$  — наблюдаемые значения переменной,  $Z = \begin{pmatrix} Z_i^{(j)} \end{pmatrix}$  — матрица плана,  $\vec{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_k)^T$  — ??? коэффициенты,  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$  — ??? ошибки (случайные).

???, если<sup>1</sup>:

1. Строки  $Z$  — ??? независимые
2.  $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$  — независимы

### 12.7 Некоррелированные наблюдения

Пусть  $\mathbb{E} \varepsilon_i = 0$ ,  $\mathbb{D} \varepsilon_i = \sigma^2 v_i$ , но ошибки  $\varepsilon_i$  — некоррелированные, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  при  $i \neq j$ .

$\mathbb{D} \vec{\varepsilon} = \sigma^2 V$ , где  $V$  — диагональная матрица с элементами  $v_i$  на главной диагонали.

*Примечание.* Логично придать наблюдениям с меньшим разбросом больший “вес”. Делается это изменением масштаба следующим образом: положим  $w_i = \frac{1}{v_i}$ ,  $\tilde{X}_i = \sqrt{w_i} X_i$ .

Тогда получим новую модель  $\vec{\tilde{X}} = \tilde{Z}^T \vec{\beta} + \vec{\tilde{\varepsilon}}$ , где  $\tilde{Z}_i^{(j)} = \sqrt{w_j} Z_i^{(j)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{w_i} \varepsilon_i$ . При этом:

1.  $\mathbb{E} \tilde{\varepsilon}_i = 0$
2.  $\mathbb{D} \tilde{\varepsilon}_i = \mathbb{D} \sqrt{w_i} \varepsilon_i = \frac{1}{v_i} \mathbb{D} \varepsilon_i = \frac{1}{v_i} v_i \sigma^2 = \sigma^2$

Таким образом, получили прежнюю (классическую) ситуацию. Далее находим оценки  $\vec{B} = (b_1 \dots b_k)^T$  параметров  $\vec{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_k)^T$ , как и раньше.

*Пример.*

---

<sup>1</sup> Моя вольная интерпретация: это наши предположения.

1. Модель:  $X = \beta_0 + \varepsilon$ .

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum w_i Z_i X_i}{\sum w_i Z_i^2}$$

В частности, при  $Z_i = 1$ , то  $\hat{\beta}_0 = \frac{\sum w_i X_i}{\sum w_i}$  — взвешенное среднее.

2. Пропорция (прямая проходит через начало координат).

Пусть  $X$  — потери тепла в квартире,  $Z$  — разность внутренней и наружной температуры.  $X = \beta Z + \varepsilon$

(а) Допустим, что  $\mathbb{D} \varepsilon_i = c Z_i$ . Тогда  $w_i = \frac{\sigma^2}{c Z_i}$  и после вычислений получим

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i}{\sum Z_i} = \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}$$

(б) Допустим, что  $\mathbb{D} \varepsilon_i = c Z_i^2$ . Тогда

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{Z_i}$$

3. Повторные наблюдения.

Пусть проводилось  $n$  серий из  $k_i$  экспериментов,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $X_i$  — средний результат экспериментов этой серии,  $\mathbb{E} X_{ij} = a$ ,  $\mathbb{D} \varepsilon_{ij} = \sigma^2$ . Тогда  $\mathbb{D} \varepsilon_i = \frac{\sigma^2}{k_i}$ . Берём  $w_i = \frac{1}{k_i}$  и далее как раньше. То есть мы присваиваем больший вес сериям из большего числа экспериментов.

## 12.8 Коррелированные наблюдения

Пусть дисперсия ошибок  $\mathbb{D} \varepsilon_i$  не только различны, но и зависимы между собой, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2 v_{ij}$ . Пусть  $V = (v_{ij})$ . Тогда матрица ковариаций  $\mathbb{D} \vec{\varepsilon} = \sigma^2 V$ . Известно, что такая матрица симметричная и положительно определенная, следовательно, существует матрица  $\sqrt{V}$ . Итак, имеем модель  $\vec{X} = Z^T \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}$ . Умножим обе части слева на  $\sqrt{V}^{-1}$ , после чего получим новую модель:

$$\vec{\tilde{X}} = \tilde{Z}^T \vec{\beta} + \vec{\tilde{\varepsilon}}$$

, где  $\vec{\tilde{X}} = \sqrt{V}^{-1} \vec{X}$ ,  $\tilde{Z}^T = \sqrt{V}^{-1} Z$ ,  $\vec{\tilde{\varepsilon}} = \sqrt{V}^{-1} \vec{\varepsilon}$ . Заметим, что:

$$1. \mathbb{E} \vec{\tilde{\varepsilon}} = \mathbb{E} \sqrt{V}^{-1} \vec{\varepsilon} = \sqrt{V}^{-1} \mathbb{E} \vec{\varepsilon} = 0$$

$$2. \mathbb{D} \vec{\tilde{\varepsilon}} = \mathbb{E} \left( \left( \vec{\tilde{\varepsilon}} - \mathbb{E} \vec{\tilde{\varepsilon}} \right) \left( \vec{\tilde{\varepsilon}} - \mathbb{E} \vec{\tilde{\varepsilon}} \right)^T \right) = \mathbb{E} \left( \vec{\tilde{\varepsilon}} \vec{\tilde{\varepsilon}}^T \right) = \mathbb{E} \left( \sqrt{V}^{-1} \vec{\varepsilon} \left( \sqrt{V}^{-1} \vec{\varepsilon} \right)^T \right) = \sigma^2 I$$

Таким образом, мы получили стандартную ситуацию.

## 13 Нелинейная парная регрессия

### 13.1 Модель очень быстрого роста

$$\begin{aligned}X &= ae^{bZ} \cdot \varepsilon \\ \ln X &= \ln a + bZ + \ln \varepsilon \\ X' &= a' + bZ + \varepsilon'\end{aligned}$$

### 13.2 Модель быстрого роста

$$b > 1$$

$$\begin{aligned}X &= aZ^b \cdot \varepsilon \\ \ln X &= \ln a + b \ln Z + \ln \varepsilon \\ X' &= a' + bZ' + \varepsilon'\end{aligned}$$

### 13.3 Модель медленного роста

$$0 < b < 1$$

$$X = aZ^b \cdot \varepsilon$$

Аналогично.

### 13.4 Модель очень медленного роста

$$\begin{aligned}X &= a + b \ln Z + \varepsilon \\ X &= a + bZ' + \varepsilon\end{aligned}$$

### 13.5 Модель медленной стабилизации

$$\begin{aligned}X &= a + \frac{b}{Z} + \varepsilon \\ X &= a + Z' + \varepsilon\end{aligned}$$

### 13.6 Модель быстрой стабилизации

$$\begin{aligned}X &= a + \frac{b}{e^Z} + \varepsilon \\ X &= a + Z' + \varepsilon\end{aligned}$$

### 13.7 Зависимость в виде полинома

$$X = \beta_0 + \beta_1 Z + \beta_2 Z^2 + \dots + \beta_k Z^k$$

Сводим к линейной множественной регрессии:  $Z_i = Z^i$

*Примечание.* Т.к.  $Z_i$  функционально зависимы, то обычно берут  $k \leq 4$ . Модель неустойчива.

## 14 Метод главных компонент (приведение к главным осям)

Идея:  $A = ZZ^T$  — симметричная, положительно определенная, то есть это матрица квадратичной формы, причём все собственные числа  $\lambda_i > 0$ . Ранжируем собственные числа  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$ . Находим соответствующие собственные вектора  $X_1, X_2 \dots X_k$ .

$X_1$  показывает направление главной оси эллипсоида, дисперсия проекций результатов экспериментов на эту ось будет наибольшей. Прямую регрессии проводим через эту ось.

*Примечание.* Эта прямая не обязана совпадать с прямой МНК и считается менее точной.

**Иллюстрация МНК против метода главных компонент не сделана.**

## 15 Метод Тейла

Иногда применяется, если в экспериментальных данных наблюдаются выбросы.

Для регрессии  $X = a + bZ + \varepsilon$ :

$$\tilde{b} := \text{med} \left\{ \frac{X_i - X_j}{Z_i - Z_j} \right\}, 1 \leq i, j \leq n$$

$$r = \text{med} \left\{ X_i - \tilde{b}Z_i \right\}, 1 \leq i \leq n$$

## 16 Ортогональная матрица плана $Z$

Пусть эксперимент управляем, то есть можем выбирать значения факторов  $Z_1 \dots Z_k$ . Тогда желательно составить матрицу плана  $Z$  составить так, чтобы она была ортогональной. Тогда матрица  $A = ZZ^T$  будет диагональной,  $A^{-1}$  элементарно находится и все формулы упрощаются. Кроме того, при добавлении новых факторов в модель коэффициенты при старых не меняются. Дисперсии оценок при этом будут наименьшие из возможных, следовательно, оценки будут эффективными.

# Лекция 14

6 декабря

## 17 Моделирование случайных величин

### 17.1 Датчики случайных чисел

**Определение.** Пусть случайная величина  $\eta \in U(0, 1)$ . Пусть члены последовательности  $y_1 \dots y_n$  можно рассматривать, как экспериментальные значения данной величин. Тогда члены этой последовательности называются **псевдослучайными числами**, а устройство (или алгоритм для их получения) называется **датчиком случайных чисел**.

#### 17.1.1 Физические датчики

- Рулетка (из казино), часы в миллисекундах
- Монета

**Теорема 29.** Случайная величина  $\eta \in U(0, 1)$  тогда и только тогда, когда разряды её двоичной записи  $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \xi_i$  — схема Бернулли с  $p = \frac{1}{2}$ .

*Следствие 29.1.* Если требуется точность  $2^{-n}$ , то  $n$  раз бросаем монету и в двоичной записи пишем в  $i$ -тый разряд ставим единицу, если орёл, и ноль иначе.

#### 17.1.2 Таблица случайных чисел

Пусть имеется таблица чисел (обычно двухзначных) — результат работы некоторого датчика случайных чисел. Наугад выбираем номер строки и столбца и начиная с этого числа выписываем последовательность чисел нужной длины. Если требуется большая точность, то приписываем соответствующие цифры из соседнего столбца.

#### 17.1.3 Математические датчики

Наиболее популярны мультипликативные датчики.

Задается начальное число  $k_0$ , множитель  $a$  и  $m$  — делитель (модуль). При этом  $\gcd(k_0, m) = \gcd(a, m) = 1, 0 < a, k_0 < m$ . Последовательность случайных чисел задается следующим образом:

$$k_n = ak_{n-1} \pmod{m}$$

Псевдослучайным числом тогда будет  $\frac{k_n}{m}$ .

*Примечание.* Эта процедура заикнется не более, чем за  $m - 1$  итераций. Точнее, не более, чем за  $\varphi^1(m)$ .

#### 17.1.4 Рекомендации

Для 32-х битных компьютеров:

- $m = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$
- $a = 630\,360\,016$  или  $a = 764\,261\,123$
- $k_0$  — не важно.

#### 17.1.5 Датчик Уичмана и Хилла

Одновременно запускаются три мультипликативных датчика с параметрами:

| $a$ | $m$    |
|-----|--------|
| 171 | 30 269 |
| 172 | 30 307 |
| 170 | 30 323 |

На  $n$ -том шаге получаем три числа:  $y'_n, y''_n, y'''_n$ . Тогда  $y_n := \{y'_n + y''_n + y'''_n\}$  — дробная часть их суммы.

Преимущества:

1. Период  $3 \cdot 10^{13}$ , а у предыдущего  $1 \cdot 10^9$ .
2. Быстрее вычисляется.

## 17.2 Моделирование непрерывных распределений

### 17.2.1 Метод обратных функций (квантильное преобразование)

**Теорема 30.** Пусть  $F(x)$  — непрерывная строго возрастающая функция распределения. Если случайная величина  $\theta$  имеет равномерное стандартное распределение, то случайная величина  $\xi = F^{-1}(\theta)$  имеет функцию распределения  $F(x)$ .

---

<sup>1</sup> Функция Эйлера.



*Пример.* Показательное распределение  $E_\alpha$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x\alpha} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - e^{-x\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\alpha} \in E_\alpha \Rightarrow x_i = -\frac{1}{\alpha} \ln \eta_i$$

Тогда  $x_i$  — значения  $E_\alpha$  при  $\eta_i \in U(0, 1)$ .

*Пример.* Нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ . Достаточно смоделировать стандартное нормальное распределение  $N(0, 1)$ .

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$x_i = F_0^{-1}(\eta_i), \eta_i \in U(0, 1)$$

- Достоинства: простота и универсальность
- Недостаток: неэффективность

### 17.2.2 Нормальные случайные числа на основе ЦПТ

Пусть  $\eta_i \in U(0, 1)$ ,  $\mathbb{E} \eta_i = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{D} \eta_i = \frac{1}{12}$ ,  $S_n := \eta_1 + \dots + \eta_n$ . Согласно ЦПТ<sup>2</sup>:

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n \mathbb{D} \xi}} = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Z \in N(0, 1)$$

Уже при  $n = 12$  распределение  $S_n - 6$  неплохо приближается к  $N(0, 1)$ .

### 17.2.3 Точное моделирование пары независимых случайных величин $N(0, 1)$

**Теорема 31.** Пусть независимые случайные величины  $\eta_1, \eta_2 \in U(0, 1)$ . Тогда следующие случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и  $\in N(0, 1)$ :

$$X := \sqrt{-2 \ln \eta_1} \cos(2\pi \eta_2) \quad Y := \sqrt{-2 \ln \eta_1} \sin(2\pi \eta_2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим независимые случайные величины  $X, Y \in N(0, 1)$ . Тогда плотность их совместного распределения это

$$f_{X,Y} = f_X(X) = f_Y(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

<sup>2</sup> Центральной предельной теореме

Перейдём к полярным координатам, где радиус  $R$ , а угол —  $\phi$ , тогда  $X = R \cos \phi$ ,  $Y = R \sin \phi$ ,  $J = r$ . Плотность в этих координатах:

$$f_{X,Y} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\substack{f_\phi(\phi) \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi}} \underbrace{e^{-\frac{r^2}{2}} r}_{\substack{f_R(r) \\ r \geq 0}}$$

Таким образом,  $R$  и  $\phi$  — независимые случайные величины. Их функции распределения:

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^r \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$F_\phi(\phi) = \frac{\phi}{2\pi}$$

$$F_R^{-1}(r) = \sqrt{-2 \ln(1 - y)} \quad F_\phi^{-1}(\phi) = 2\pi y$$

Тогда  $r_i := \sqrt{-2 \ln \eta_1}$ ,  $\phi = 2\pi \eta_2$ . Итого

$$X = \sqrt{-2 \ln \eta_1} \cos(2\pi \eta_2) \quad Y = \sqrt{-2 \ln \eta_1} \sin(2\pi \eta_2)$$

□

#### 17.2.4 Быстрый показательный датчик

**Теорема 32.** Пусть независимые случайные величины  $\eta_1 \dots \eta_{2n-1} \in U(0, 1)$ . Обозначим  $\xi_1 \dots \xi_n$  за расставленные по возрастанию величины  $\eta_{n+1} \dots \eta_{2n-1}$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_n = 1$ . Тогда случайные величины

$$\mu_i = -\frac{1}{\alpha}(\xi_i - \xi_{i+1}) \ln(\eta_1 \dots \eta_n), 1 \leq i \leq n$$

независимы и имеют показательное распределение с параметром  $\alpha$ .

*Доказательство.* Не будем.

□

*Пример.* При  $n = 5$ , пусть  $\eta_5 > \eta_4$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{1}{\alpha} \eta_4 \ln(\eta_1 \eta_2 \eta_3) \\ \mu_2 &= -\frac{1}{\alpha} (\eta_5 - \eta_4) \ln(\eta_1 \eta_2 \eta_3) \\ \mu_3 &= -\frac{1}{\alpha} (1 - \eta_5) \ln(\eta_1 \eta_2 \eta_3) \end{aligned}$$

Преимущество по сравнению с методом обратной функции — нужно вычислять только один логарифм. Минус — требуется сортировка. Способ наиболее эффективен при  $n = 3$ , при этом он примерно вдвое эффективнее метода обратной функции.

## 17.3 Моделирование дискретных распределений

### 17.3.1 Общий метод

Пусть имеется дискретное распределение,  $p_k = P(\xi = c_k), k = 1, 2, \dots, r_0 := 0, r_m = \sum_{k=1}^m p_k$  — концы отрезков разбиения.

Пусть  $y_i \in U(0, 1)$  — псевдослучайное число. Если  $y_i \in [r_{i-1}, r_i)$ , то  $x_i = c_i$ . На самом деле это тот же метод обратной функции. В частности, если моделируем распределение

Бернулли  $B_p$ , тогда  $x_i = \begin{cases} 0, & y_i \in [0, 1-p) \\ 1, & y_i \in [1-p, 1] \end{cases}$

### 17.3.2 Биномиальное распределение

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

Смысл: число успехов при  $n$  испытаниях. Будем на это опираться.

Берём  $n$  значений датчика  $y_i, 1 \leq i \leq n$  и положим  $z_i := \begin{cases} 0, & y_i \in [0, 1-p) \\ 1, & y_i \in [1-p, 1] \end{cases}$ . Тогда  $x = \sum_{i=1}^n z_i$  — смоделированное значение  $\in B_{n,p}$

### 17.3.3 Геометрическое распределение

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Смысл: номер первого успешного испытания.

Берём последовательные значения датчика  $y_i$  до тех пор, пока  $y_i \in [1-p, p]$ . Ответ — индекс последнего опыта.

### 17.3.4 Распределение Пуассона

$$\Pi_\lambda : P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \geq 0$$

**Теорема 33.** Пусть  $\mu_1, \mu_2, \dots \in E_\lambda$  — независимые случайные величины. Положим  $S_n = \mu_1 + \dots + \mu_n, N = \max\{n \mid S_n \in [0, 1]\}$ . Тогда  $N \in \Pi_\lambda$ .

На основе теоремы и метода обратных функций получаем формулу для моделирования:

$$\begin{aligned} N &= \max\{k \mid S_k \in [0, 1]\} \\ &= \max\{k \mid \sum_{j=1}^k \mu_j \leq 1\} \end{aligned}$$

По методу обратных функций, если  $y_j \in N(0, 1)$ :

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k \frac{-\ln(1-y_j)}{\lambda} \leq 1 \right\} \\
&= \max \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k -\ln(1-y_j) \leq \lambda \right\} \\
&= \max \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k -\ln(y_j) \leq \lambda \right\} \\
&= \max \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k \ln(y_j) \geq -\lambda \right\} \\
&= \max \left\{ k \mid e^{\sum_{j=1}^k \ln(y_j)} \geq e^{-\lambda} \right\} \\
&= \max \left\{ k \mid \prod_{j=1}^k y_{ij} \geq e^{-\lambda} \right\} \\
&= \min \left\{ k+1 \mid \prod_{j=1}^k y_j < e^{-\lambda} \right\} \\
&= \min \left\{ k \mid \prod_{j=0}^k y_j < e^{-\lambda} \right\}
\end{aligned}$$

Добавив индекс  $j$ :

$$N_{ij} = \min \left\{ k \mid \prod_{j=0}^k y_{ij} < e^{-\lambda} \right\}$$

, где  $y_{ij}$  — псевдослучайные числа  $\in N(0, 1)$   $i$ -той серии.

# Лекция 15

## 13 декабря

### 18 Метод Монте-Карло

*Пример (Бюффона).* Вероятность того, что игла длины  $l$  пересечёт стык досок ширины  $l$  равна  $\frac{2}{\pi}$ .

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p = \frac{2}{\pi}$$

Таким образом, бросая иголки, можно посчитать  $\frac{n_A}{n} \approx \frac{2}{\pi}$  и примерно посчитать  $\pi$ .

Общая постановка метода: пусть требуется найти  $a$  и имеется случайная величина  $\xi$ , такая что  $\mathbb{E} \xi = a$ . Тогда согласно сильному закону больших чисел

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} a$$

Поэтому при достаточно больших  $n$  среднее выборочное  $\bar{X}$  будет неплохой оценкой  $a$ .

Оценим погрешность вычислений. Пусть  $\mathbb{D} \xi$  конечна, тогда по ЦПТ

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n \mathbb{D} \xi}} = \frac{n(\bar{X} - a)}{\sqrt{n \mathbb{D} \xi}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{\sqrt{\mathbb{D} \xi}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Z \in N(0, 1)$$

По правилу трёх сигм  $P(|Z| < 3 \cdot 1) = 0,9973$ . Тогда:

$$P\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - a|}{\sqrt{\mathbb{D} \xi}} < 3\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,9973$$

и поэтому можно считать, что  $\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - a|}{\sqrt{\mathbb{D} \xi}} < 3$  и, следовательно:

$$|\bar{X} - a| < \frac{3\sqrt{\mathbb{D} \xi}}{\sqrt{n}}$$

По возможности надо брать  $\xi$  с минимальной дисперсией.

## 18.1 Вычисление определенных интегралов

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(c_i)\Delta x_i$$

, где  $\Delta x_i$  — длина отрезка разбиения,  $c_i \in i$ -тый отрезок разбиения.

### 18.1.1 Квадратурные формулы

#### 1. Формула прямоугольников

Разбиваем  $[a, b]$  на  $n$  равных частей,  $l = \frac{b-a}{n}$  — длина интервала,  $x_i$  — середине  $i$ -го интервала.

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) = I_n$$

Погрешность:  $|I - I_n| \leq \frac{M^1}{n^2}$

#### 2. Формула трапеций

Разбиваем на  $n$  частей  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0 \dots n-1$ ,  $y_i = \varphi(x_i)$ .

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{2n} (y_0 + y_n + 2(y_1 + \dots + y_{n-1})) = I_n$$

Погрешность:  $|I - I_n| \leq \frac{\frac{M}{2}}{n^2}$

#### 3. Формула Симпсона

Разбиваем  $[a, b]$  на чётное число отрезков  $n = 2m$ ,  $l = \frac{b-a}{n}$ ,  $y_i = \varphi(x_i)$

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{3n} (y_1 + y_n + 4(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) = I_n$$

Погрешность:  $|I - I_n| \leq \frac{C}{n^4}$

#### 4. Метод Монте-Карло

Отличается от метода прямоугольников тем, что в качестве узлов берутся случайные числа.

---

<sup>1</sup> Число, зависящее от  $\varphi, a$  и  $b$ .

Пусть нужно посчитать  $\int_0^1 \varphi(x) dx$ ,  $\eta_i \in U(0, 1)$ . Тогда  $\xi_i := \varphi(\eta_i)$ , плотность  $f_\eta(y) = 1$ ,  $y \in [0, 1]$ , 0 иначе.

$$\mathbb{E} \xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) f_\eta(y) dy = \int_0^1 \varphi(y) dy = I$$

$$I \approx \tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(\eta_i)$$

Погрешность:  $|I - I_n| \leq \frac{3\sqrt{\mathbb{D}\xi_1}}{\sqrt{n}}$ , где  $\mathbb{D}\xi_1 = \int_0^1 \varphi^2(y) dy = I^2$

Недостатки:

- (a) Медленная сходимость (корень вместо квадрата или четвёртой степени).
- (b) Для оценки погрешности надо вычислить дисперсию.
- (c) Оценка справедлива лишь с вероятностью, пусть и близкой к единице.

В силу этого метод Монте-Карло не применяется для вычисления интегралов.

## 18.2 Вычисление кратных интегралов

По квадратурным формулам (при достаточно высокой кратности интеграла) погрешность  $\leq Cn^{-1+\varepsilon}$

Пусть требуется вычислить интеграл  $\int \cdots \int_0^1 \varphi(x_1 \dots x_k) dx_1 \dots dx_k$ . При методе Монте-Карло здесь достаточно набросать  $n$  случайных равномерно распределённых точек и взять среднее арифметическое значения  $\varphi$  в этих точках.

*Пример.* Для вычисления объёма фигуры можем брать индикатор.

## 18.3 Метод Монте-Карло расслоенной выборкой

Пусть требуется вычислить интеграл  $\int \cdots \int_0^1 \varphi(x_1 \dots x_k) dx_1 \dots dx_k$ . Каждую из сторон  $k$ -мерного куба разобьём на  $N$  равных частей. Тогда куб разобьётся на  $N^k$  кубиков  $\Delta_i$  и в каждом из  $\Delta_i$  возьмём  $k$ -мерную равномерно распределённую точку  $\eta_i = (\eta_i^{(1)} \dots \eta_i^{(k)})$ . Интеграл оценивается при помощи суммы

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(\eta_i)$$

Погрешность:  $|\tilde{I}_n - I| \leq Cn^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{k}}$

*Пример.* При  $k = 1$   $|\tilde{I}_n - I| \leq Cn^{-\frac{3}{2}}$

## 19 Равномерность по Вейлю

**Определение.** Числовая последовательность  $X_0 \dots X_n \dots$  **равномерна по Вейлю**, если частота попадания точек на любой отрезок  $[a, b] \subseteq [0, 1]$  стремится к его длине.

**Теорема 34.** Последовательность  $X_n = \{n \cdot \alpha\}$ , где  $\alpha$  — иррациональное число, а  $\{ \}$  — дробная часть. Тогда эта последовательность равномерна по Вейлю.

*Пример.*  $\{n\sqrt{2}\}, \{ne\}$

**Теорема 35.** Если  $X_m$  равномерна по Вейлю, то  $\int_0^1 \varphi(x) dx$  можно считать как  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$ .

*Примечание.* Возможны ситуации, что последовательность  $X_n$  равномерна по Вейлю, но:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_{2i-1}, X_{2i}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \neq \iint_0^1 \varphi(x, y) dx dy$$

## 20 Парадокс первой цифры

Рассмотрим множество степеней двойки. Оценим вероятность того, что 7 будет первой цифрой. По интуиции эта вероятность  $\frac{1}{9}$ . Пусть  $m$  — первая цифра числа  $2^n$ . Тогда  $m \cdot 10^b \leq 2^n < (m+1) \cdot 10^b$

$$m \cdot 10^b \leq 2^n < (m+1) \cdot 10^b$$

$$\log_{10} m + b \leq n \log_{10} 2 < \log_{10}(m+1) + b$$

$$\log_{10} m \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10}(m+1)$$

$\log_{10} 2$  — иррациональное, поэтому по теореме 35 эта последовательность равномерна по Вейлю. Тогда  $p_m = \log_{10}(m+1) - \log_{10} m$ . В частности, при  $m = 7$   $p_7 = 0,056$ .



# Лекция 16

20 декабря.

## 21 Энтропия

Пусть  $\xi$  — результат некоторого эксперимента с возможными исходами  $A_1 \dots A_N$ , вероятности которых  $p_1 \dots p_N$  соответственно.

**Определение.** Энтропией эксперимента называется величина

$$H(\xi) := - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$

*Примечание.* При  $p_i = 0$  полагаем  $p_i \log_2 p_i = 0$ , т.к.  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log_2 x = 0$ .

*Свойства.*

- $H(\xi) \geq 0$ , т.к.  $\log_2 p_i \leq 0$ , т.к.  $p_i < 1$ .
- $H(\xi) = 0 \Leftrightarrow \exists i : p_i = 1$ , т.е. результат эксперимента предопределен.
- Максимум энтропии, равный  $H_0 = \log_2 N$ , достигается  $p_1 = \dots p_N = \frac{1}{N}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $y = x \cdot \log_2 x$ . При  $x > 0$

$$y'' = \left( \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right)' = \frac{1}{x \ln 2} > 0$$

Следовательно, функция  $\varphi(x)$  выпукла вниз.

Рассмотрим дискретную случайную величину  $\eta$  с  $N$  равновероятными исходами  $p_1 \dots p_N$ . Тогда по неравенству Йенсена:

$$\varphi(\mathbb{E} \eta) = \varphi \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= -\frac{1}{N} \log_2 N \\
&\leq \mathbb{E} \varphi(n) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} p_i \log_2 p_i \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{N} \log_2 N &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \\
\log_2 N &\geq H
\end{aligned}$$

□

Вывод:  $H$  можно рассматривать как количественную характеристику меры неопределенности эксперимента.

- Если  $H = H_{\min} = 0$ , то результат предопределен.
- Если  $H = H_{\max} = \log_2 N$ , то неопределенность максимальна.

*Пример.*  $\xi \in B_p$ ,  $H(\xi) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ . Максимальная энтропия при  $p = \frac{1}{2}$ .

Оказалось, что таким образом определенная энтропия является числовой характеристикой реальных процессов природы и техники, связанных с передачей информации.

*Пример.*

1. Время реакции человека на (одну из  $N$ ) загоревшуюся лампочку прямо пропорционально  $\log_2 N$ .
2. Понятие энтропии пришло из физики.

Второй закон термодинамики: энтропия замкнутой системы возрастает.

3. Теория кодирования информации.

Для кодирования каждого из  $N$  символов нужно  $\log_2 N$  бит.

Часть лекции про теоркод опущена.Ы

## 21.1 Непрерывные распределения с наибольшей энтропией

**Определение.** Пусть  $\xi$  — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $f(x)$  и носителем  $A = \{x \mid f(x) > 0\}$ . Тогда **энтропией** называется величина

$$H(\xi) = - \int_A f(x) \log_2 f(x) dx$$

Следующие распределения имеет наибольшую энтропию:

1. Если  $A = (0; 1)$ , то  $U(0; 1)$
2. Если  $A = (0; \infty)$  и  $\mathbb{E} \xi = 1$ , то  $E_1$  (показательное распределение)
3. Если  $A = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{E} \xi = 0$ ,  $\mathbb{D} \xi = 1$ , то  $N(0, 1)$

## 22 Задача о ???

Пусть  $q = 1 - p$  — вероятность проигрыша. Ставка 1. Пусть у первого игрока капитал  $k$ , у второго —  $m - k$ . Игра прекращается, когда один из игроков теряет весь капитал. Найти вероятность разорения первого игрока.

Пусть  $r_k$  — вероятность разорения первого игрока при капитале  $k$ . Разложим её по результатам первого шага:  $r_k = pr_{k+1} + qr_{k-1}$ .

$$pr_{k+1} - r_k + (1 - p)r_{k-1} = 0 \quad r_0 = 1 \quad r_m = 0$$

$$p\lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$$

Не дописано