

## Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример:  $\lambda z.(\lambda x.a b c \lambda y.d e) f$  эквивалентно  $\lambda z.((\lambda x.(a b c (\lambda y.(d e)))) f)$ . В аппликациях скобки расставляются слева направо:  $\lambda z.(\lambda x.(a b c (\lambda y.(d e)))) f$  можно преобразовать в  $(\lambda z.((\lambda x.(((a b) c) (\lambda y.(d e)))))) f)$ .

(a) Расставьте скобки в выражении:  $\lambda z.\lambda x.a b c \lambda y.d e f$

Решение.

$$\lambda z.(\lambda x.(((a b) c) (\lambda y.((d e) f))))$$

□

(b) Уберите все «лишние» скобки из выражения:  $(\lambda f.((\lambda x.(f (f (x (\lambda z.(z x)))))) z))$

Решение.

$$\lambda f.\lambda x.(f f x (\lambda z.z x)) z$$

Почему  $z$  не под  $\lambda z$ ?

□

(c) Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

2. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$T$	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
$F$	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
$Not$	$\lambda x.x F T$	отрицание
$And$	$\lambda x.\lambda y.x y F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

(a)  $T F$

Решение.

$$T F \rightarrow_{\beta} (\lambda a.\lambda b.a) F \rightarrow_{\beta} \lambda b.F$$

□

(b)  $(T Not (\lambda t.t)) F$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 (T \text{ Not } (\lambda t.t)) F &\rightarrow_{\beta} \\
 ((\lambda b.\text{Not}) (\lambda t.t)) F &\rightarrow_{\beta} \\
 \text{Not } F &\rightarrow_{\beta} \\
 F F T &\rightarrow_{\beta} \\
 (\lambda b.b) T &\rightarrow_{\beta} T
 \end{aligned}$$

□

(c)  $\text{And } (\text{And } F F) T$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \text{And } (\text{And } F F) T &\rightarrow_{\beta} \\
 \text{And } ((\lambda y.F y F) F) T &\rightarrow_{\beta} \\
 \text{And } ((\lambda y.(\lambda b.b) F) F) T &\rightarrow_{\beta} \\
 \text{And } ((\lambda y.F) F) T &\rightarrow_{\beta} \\
 \text{And } F T &\rightarrow_{\beta} \\
 (\lambda y.F y F) T &\rightarrow_{\beta} \\
 F T F &\rightarrow_{\beta} \\
 (\lambda b.b) F &\rightarrow_{\beta} F
 \end{aligned}$$

□

3. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

(a) Дизъюнкция

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.a T b$

□

(b) Штрих Шеффера («и-не»)

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.a (\text{Not } b) T$

□

(c) Исключающее или

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.a (\text{Not } b) b$

□

## 4. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\bar{n}$	$\lambda f. \lambda x. f^{(n)} x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n. \lambda f. \lambda x. n f (f x)$	прибавление 1
$(+)$	$\lambda a. \lambda b. a (+1) b$	сложение
$(\cdot)$	$\lambda a. \lambda b. a ((+) b) \bar{0}$	умножение

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

(a) Умножение на 2 (*Mul2*)

Решение.  $\lambda a. ((+) a a)$  □

(b) Возведение в степень

Решение.  $\lambda a. \lambda b. b ((\cdot) a) \bar{1}$  □

(c) Проверка на чётность

Решение.  $\lambda a. a \text{ Not } T$  □

(d) *IsZero*: возвращает *T*, если аргумент равен нулю, иначе *F*

Решение.

$$\bullet \text{ Flip} := \lambda a. a ((\cdot) \bar{0}) \bar{1}. \text{ Flip}(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ 0, & a \neq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ IsZero} := \lambda a. (\text{Flip } a) \text{ Not } T$$

□

## 5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
<i>MkPair</i>	$\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x a b)$	создание пары
<i>PrL</i>	$\lambda p. p T$	левая проекция
<i>PrR</i>	$\lambda p. p F$	правая проекция

(a) Убедитесь, что  $PrL (MkPair\ a\ b) \rightarrow_{\beta} a$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} PrL (MkPair\ a\ b) &\rightarrow_{\beta} \\ PrL (\lambda x.x\ a\ b) &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda p.p\ T) (\lambda x.x\ a\ b) &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda x.x\ a\ b)\ T &\rightarrow_{\beta} \\ T\ a\ b &\rightarrow_{\beta} a \end{aligned}$$

□

(b) Постройте операцию вычитания 1 из числа

$$\text{Решение. } \lambda a.a\ (PrL\ (\lambda p.(MkPair\ (PrR\ p)\ ((+1)\ (PrR\ p))))\ (MkPair\ \bar{0}\ \bar{0}))$$

□

(c) Постройте операцию вычитания чисел

$$\text{Решение. } \lambda a.\lambda b.b\ (-1)\ a$$

□

(d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)

*Решение.*

□

(e) Постройте операцию деления чисел

*Решение.* Пусть дробь  $\frac{n}{m}$  есть применение коллбека  $f$  к  $m$  аргументам  $n$  раз (распределенных равномерно) с комбинирующим коллбеком  $g$ :

$$\frac{4}{3} \leftrightarrow \lambda f.\lambda g.\lambda a_1.\lambda a_2.\lambda a_3.g\ (f\ (f\ a_1))\ (f\ a_2)\ (f\ a_3)$$

Определим конвертер  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \text{FRAC}$ :

$$\text{Frac} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.\lambda g.n\ (m\ (\lambda t.\lambda z.\lambda v.t\ (\lambda q.z\ q\ v))\ (\lambda x.x)\ (\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a))))\ g$$

$$t_1 = \lambda z.\lambda v.(\lambda x.x)\ (\lambda q.z\ q\ v) \rightarrow_{\beta} \lambda z.\lambda v.\lambda q.z\ q\ v$$

$$t_2 = \lambda z_1.\lambda v_1.(\lambda z_2.\lambda v_2.\lambda q_2.z_2\ q_2\ v_2)\ (\lambda q_1.z_1\ q_1\ v_1) \rightarrow_{\beta} \lambda z_1.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda q_2.z_1\ q_2\ v_1\ v_2$$

$$t_m = \lambda z.\lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.z\ q\ v_1\ v_2 \dots v_m$$

$$r_m := t_m(\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a)) = \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a))\ q\ v_1\ v_2 \dots v_m$$

$$= \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda b.b\ (f\ q))\ v_1\ v_2 \dots v_m$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda v_1 \dots v_m. \lambda q. v_1 (f q) v_2 \dots v_m \\
r_m g &= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q. g (f q) v_2 \dots v_m \\
r_m (r_m g) &= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q_1. (r_m g) (f q_1) v_2 \dots v_m \\
&= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q_1. (\lambda v_3 \dots v_m. \lambda q_2. g (f q_2) (f q_1) v_3 \dots v_m) v_2 \dots v_m \\
&= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q_1. (\lambda q_2. g (f q_2) (f q_1) v_2 \dots v_{m-1}) v_m \\
&= \lambda v_2 \dots v_m. \lambda q. g (f v_m) (f q) v_2 \dots v_{m-1}
\end{aligned}$$

Если  $n < m$ :

$$r_m^n g = \lambda v_2 \dots \lambda v_m. \lambda q. g (f v_{m-n+1}) \dots (f v_m) (f q) v_2 \dots v_{m-n}$$

Если  $n \geq m$ , то мы начинаем строить новый слой в скобках. Это то, что нам нужно.

Если не верится, то в lci можно вбить следующее:  $(\backslash n. \backslash m. \backslash f. \backslash g. n (m (\backslash t. \backslash z. \backslash v. t (\backslash q. z q v)) (\backslash x. x) (\backslash a. \backslash b. b (f a))) g) (\backslash f. \backslash x. f(f(f(x)))) (\backslash f. \backslash x. f(f(f(x))))$  и получить  $\frac{4}{3}$  из примера выше.

Из дроби легко получить результат (с округлением вверх) подстановкой вместо  $g$  функции, которая берет первый из  $m$  аргументов,  $f$  оставить свободной, вынести все  $a_i$  как  $x$ . Для округления вниз надо вместо  $g$  подставить функцию, которая берёт последний аргумент.

$$\text{Call} = \lambda f. \lambda n. \lambda x. n (\lambda g. g x) f \leftrightarrow f \underbrace{x \dots x}_n$$

$$\text{Last} = \lambda n. n (\lambda x. \lambda t. x) (\lambda x. x) (\lambda x. x) \leftrightarrow \lambda t_1 \dots t_n. t_n$$

$$\text{Floor} = \lambda m. \lambda z. \lambda f. \lambda x. \text{Call} (z f \text{Last}) m x$$

$$\text{Div} = \lambda n. \lambda m. \lambda f. \lambda x. \text{Floor} m (\text{Frac } n m) f x$$

□

(f) Сравнение двух чисел ( $IsLess$ ) — истина, если первый аргумент меньше второго.

$$\text{Решение. } IsLess = \lambda a. \lambda b. IsZero (- b a)$$

□

6. Существует ли выражение  $A$ , что существуют такие выражения  $B$  и  $C$ , что  $A \rightarrow_\beta B$  и  $A \rightarrow_\beta C$ , но  $B$  и  $C$  различны?

Решение.

□

7. Будем говорить, что лямбда-выражение находится в нормальной форме, если в нём невозможно провести бета-редукции. Нормальной формой выражения называется результат (возможно, многократной) его бета-редукции, находящийся в нормальной форме. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

(a)  $\bar{2} \bar{2}$

(b)  $\bar{2} \bar{2} \bar{2}$

(c)  $\bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2}$

Решение. (a)

$$\begin{aligned}
 & \bar{2} \bar{2} \rightarrow_{\beta} \\
 & (\lambda f. \lambda x. f (f x)) \bar{2} \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \bar{2} (\bar{2} x) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \bar{2} ((\lambda g. \lambda y. g (g y)) x) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \bar{2} (\lambda y. x (x y)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. (\lambda h. \lambda z. h (h z)) (\lambda y. x (x y)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \lambda z. (\lambda y. x (x y)) ((\lambda y. x (x y)) z) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \lambda z. (\lambda y. x (x y)) (x (x z)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \lambda x. \lambda z. x (x (x (x z))) \rightarrow_{\beta} \bar{4}
 \end{aligned}$$

□

8. Напомним определение Y-комбинатора:  $\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$ . Напомним, что отношение бета-эквивалентности ( $=_{\beta}$ ) есть транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции. Будем говорить, что выражение не имеет нормальной формы, если никакая конечная последовательность его бета-редукций не приводит к выражению в нормальной форме.

- (a) Покажите, что  $Y f =_{\beta} f (Y f)$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 & Y f \rightarrow_{\beta} \\
 & (\lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))) f \rightarrow_{\beta} \\
 & (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x)) \rightarrow_{\beta} \\
 & \underbrace{f ((\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x)))}_{\varphi} \leftarrow_{\beta} f (Y f)
 \end{aligned}$$

$Y f \rightarrow_{\beta} \varphi \Rightarrow Y f =_{\beta} \varphi$  и  $f (Y f) \rightarrow_{\beta} \varphi \Rightarrow f (Y f) =_{\beta} \varphi$ , следовательно  $Y f =_{\beta} \varphi =_{\beta} f (Y f)$ .  $\square$

- (b) Покажите, что выражение  $Y f$  не имеет нормальной формы;  
 (c) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f. \bar{0})$  имеет нормальную форму.

*Решение.*

$$Y (\lambda f. \bar{0}) \rightarrow_{\beta} (\lambda f. \bar{0}) (Y (\lambda f. \bar{0})) \rightarrow_{\beta} \bar{0}$$

$\square$

- (d) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) \bar{2}$  имеет нормальную форму.  
 (e) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero x) \bar{0} ((+1) (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?  
 (f) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?  
 (g) Определите с помощью  $Y$ -комбинатора функцию для вычисления  $n$ -го числа Фибоначчи.

*Решение.*

$$(Y \lambda f. \lambda a. \lambda b. \lambda n. (IsZero n) a (f b (a + b) (n - 1))) 1$$

$\square$

9. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)`  
 Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
  - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
  - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
  - (d) можно ли определить функцию вычитания 1 и вычитания двух чисел? Что получается, а что — нет?

10. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$L := \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\text{this is a fixed point combinator})$$

$$R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

В данном определении терм  $R$  является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм  $F$ , выполнено  $R F =_{\beta} F (R F)$ .

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
  - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами (без ё) и осмысленной русской фразой в терме  $L$ ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x z (y z)$$

$$K := \lambda x.\lambda y.x$$

$$I := \lambda x.x$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора  $X$  можно найти выражение  $P$  (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов  $S$  и  $K$ ), что  $X =_{\beta} P$ . Будем говорить, что комбинатор  $P$  *выражает* комбинатор  $X$  в базисе  $SK$ .

Выразите в базисе  $SK$ :

- (a)  $F = \lambda x.\lambda y.y$
- (b)  $\bar{I}$
- (c)  $Not$
- (d)  $Xor$
- (e)  $InL$
- (f)  $\bar{n}$