Полиномиальная формула

Определение. Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

$|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

$x^\alpha \overset{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

$\alpha! \overset{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$

$f^{(\alpha)}_{(x)} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^r = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} = \sum_{\alpha : |\alpha| = r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

Это обобщение следующих формул:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a_1 + a_2)^n = \sum\limits_{\alpha_1 + \alpha_2 = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}$ *(биномиальная формула)*

Лемма 1.

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — *это подразумевает, что E открыто*
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \le k \le r$*:*

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j : |j| = k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \ldots \right)$$

$$\varphi^{(r)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\ldots\sum_{i_r=1}^{m}\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_r}}h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_r}$$

$\square$

Теорема 1 (Формула Тейлора в терминах мультииндекса).

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \to \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha:0\le|\alpha|\le r}\frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r+1}\frac{f^{(\alpha)}(a+t(x-a))}{(\alpha+1)!}(x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Раскроем мультииндексы:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{\substack{(\alpha_1\ldots\alpha_m):\\ \alpha_i\ge 0\\ \sum\alpha_i=k}}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x_m)^{\alpha_m}}(x_1-a_1)^{\alpha_1}(x_2-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x_m-a_m)^{\alpha_m}\right)$$

Ещё + аналогичный остаток.

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r}\sum\ldots\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\frac{\partial^k f(a)}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x_m)^{\alpha_m}}h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\ldots h_m^{\alpha_m}$$

Тут тоже + аналогичный остаток.

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1}$$

$$f(x) = \sum_{\alpha:0\le|\alpha|\le r}\frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1}\frac{f^{(\alpha)}(a+\Theta(x-a))}{(\alpha+1)!}(x-a)^\alpha$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

$\square$

Примечание.

$$\sum_{\alpha:|\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \overset{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } k \overset{\text{def}}{=} d^k f(a,h)$$

Перепишем $f(x)$ через дифференциал:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a+\Theta h, h)$$

$f(a)$ это $d^k f(a,h)$ при $k=0$, поэтому он зашел под сумму.

Пример. $\lhd k = 2$

$$d^2 f = f''_{x_1,x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_2,x_2}(a)h_2^2 + \ldots + f''_{x_m,x_m}(a)h_m^2 + 2\sum_{i<j} f''_{x_i,x_j} h_i h_j$$

Заметим, что $k!/\alpha!$ - число способов реализовать дифференцирование, т.е. в каком порядке брать частные производные.

В дифференциалах работает композиция: $d^{k+1}f = d(d^k f)$

Покажем это на примере:

$$df = f'_{x_1}h_1 + f'_{x_2}h_2 + \ldots + f'_{x_m}h_m$$

$$d^2 f = (f''_{x_1x_1}h_1 + f''_{x_1x_2}h_2 + \ldots + f''_{x_1x_m}h_m)h_1 + (f''_{x_2x_1}h_1 + f''_{x_2x_2}h_2 + \ldots + f''_{x_2x_m}h_m)h_2 + \ldots =$$
$$= (f'_{x_1})'h_1 + (f'_{x_2})'h_2 + \ldots = d(df)$$