

Можно заметить, что  $\sup$  не определен для  $\emptyset$  и неограниченных множеств. Исправим это:

$$E = \emptyset \quad \sup E = -\infty \quad \sup E = +\infty$$

$$E - \text{не огр. сверху} \quad \sup E = +\infty$$

$$E - \text{не огр. снизу} \quad \inf E = -\infty$$

**Лемма 1.** О свойствах  $\sup, \inf$

$$1. \emptyset \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$$

$$2. \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$$

$$\text{Пусть } \lambda > 0, \text{ тогда } \sup \lambda E = \lambda \sup E$$

$$3. \sup(-E) = -\inf E$$

*Доказательство.* 1. Множество верхних границ  $E \subset$  множество верхних границ  $D$ .

2.  $\lambda \cdot$  Множество верхних границ  $E =$  множество верхних границ  $\lambda E$

3. Множество верхних границ  $-E = -$  множество нижних границ  $E$

□

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E \subset X$$

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{f(x), x \in E\}$$

$$\sup x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup x_n, n \in \mathbb{N}$$

**Аксиома 1.** Аксиома, альтернативная аксиоме Кантора:

$$L, R \subset \mathbb{R}$$

$$\forall l \in L \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad l \leq r$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall l, r \quad l \leq x \leq r$$

**Определение.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$D \subset X$   $f$  — **огр.** на множестве  $D$ , если  $f(D)$  — **огр.** в  $\mathbb{R}$

- сверху  $\forall M \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- снизу
- огр.

**Определение.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **возрастает**, если  $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

Если  $f(x_1) < f(x_2)$ ,  $f$  **строго возрастает**.

Если  $f$  возрастает или убывает, то  $f$  — **монотонна**.

Если  $f$  строго возрастает или строго убывает, то  $f$  — **строго монотонна**.

Аналогичное можно утверждать для последовательностей.

**Теорема 1.** О пределе монотонной последовательности.

1.  $x_n$  — вещ. посл., огр. сверху, возрастает.  $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2.  $x_n$  — убывает, огр. снизу.  $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3.  $x_n$  — монотонна, огр.  $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Секретное приложение:

1.  $\lim x_n = \sup x_n$
2.  $\lim x_n = \inf x_n$

*Доказательство.* Достаточно доказать 1.

Проверяем  $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению  $\sup$ :

$$\forall \varepsilon \exists N \quad M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \dots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \exists N \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению  $M = \lim x_n$

□

*Примечание.*  $x_n$  — возр., не огр. сверху.  $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

$x_n$  — убыв., не огр. снизу.  $\Rightarrow \lim x_n = -\infty$

Пример:  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$   $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

$x_n$  — возр.,  $y_n$  — убыв.

Докажем убывание  $y_n$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n+1})^{n+1} = (\frac{n^2}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = (1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\ &\geq (1 + \frac{n-1}{n^2-1}) \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

□

$$y_n \text{ — убыв., } y_n \geq 0 \Rightarrow \exists \lim (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \in \mathbb{R} = e \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow e$$

**Лемма 2.**  $x_n > 0$   $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = q < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$

$$\text{Для } \varepsilon = \frac{1-q}{2} \exists N \forall n \leq N \frac{x_{n+1}}{x_n} < q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} := \tilde{q}$$

$$\begin{aligned} x_{N+1} &< \tilde{q} x_N \\ x_{N+2} &< \tilde{q} x_{N+1} \\ &\vdots \\ x_{N+k} &< \tilde{q} x_{N+k-1} \end{aligned}$$

Перемножим:  $x_{N+k} < \tilde{q}^k x_N$

$$0 < x_{N+k} \leq \tilde{q}^k x_N$$

$$\tilde{q}^k x_N \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

**Следствие.** 1.  $a > 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$2. a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

*Доказательство.* Применить лемму.

1.

$$x_n = \frac{n^k}{a^n} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

Аналогично для остальных. □

Можно записать  $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow 1^\infty$ .  $1^\infty$  — неопределенность.

## 1 Компактность, принцип выбора, полнота

В этом параграфе рассматриваются метрические пространства.

**Лемма 3. Гейне-Бореля**

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha) \Rightarrow \exists \text{ конечн. набор: } [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

**Определение.**  $X$  — метрическое пространство.,  $K \subset X$   $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ , каждое  $G_\alpha$  — открыто.

Это открытое покрытие множества  $K$ .

**Определение.**  $K \subset X$  — компактное, если для любого открытого покрытия этого множества  $\exists$  конечное подпокрытие  $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$Y \subset X = (X, \rho) \Rightarrow (Y, \rho)$ ,  $Y$  — подпространство в  $X$

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho|_{Y \times Y}$

$B^X(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

$B^Y(a, r) = \{y \in Y : \rho(a, y) < r\} = B^X(a, r) \cap Y$

**Теорема 2.**  $Y \subset X$ ,  $X$  — метр.п.,  $Y$  — подпространство,  $D \subset Y \subset X$

1.  $D$  — откр. в  $Y \Leftrightarrow \exists G$  — откр. в  $X \quad D = G \cap Y$

2.  $D$  — замкн. в  $Y \Leftrightarrow \exists F$  — замкн. в  $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

$\forall$  точка  $D$  внутр. в  $Y$

$\forall x \in D \exists r_x B^Y(x, r_x) \subset D$

Очевидно  $D = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x)$   $G := \bigcup_{X \in D} B^X(x, r_x)$  — откp. в  $X$ .

$$G \cap Y = \left( \bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x) \right) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) = D$$

Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$G$  — откp. в  $X$   $D := G \cap Y$  ?  $D$  — откp. в  $Y$

$x \in D$  ?  $x$  — внутр. точка  $D$  (в  $Y$ )

$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$  □

Докажем 2.

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”

$D$  — замкн. в  $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$  — откp. в  $Y$

$\exists G$  — откp. в  $X$ , такое что  $D^c = G \cap Y$

Тогда  $G^c = X \setminus G$  — замкнуто в  $X$ , кроме того  $D = G^c \cap Y$ , т.к.  $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве  $F$   $G^c$ .

Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$F$  — замкн. в  $X$

$F \cap Y$  — замкн. в  $Y$ ?

$F^c = X \setminus F$  — откp. в  $X$

$F^c \cap Y$  — откp. в  $Y$

$Y \setminus (F^c \cap Y)$  — замкн. в  $Y$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$$

$$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cdot Y} = Y \cdot (\overline{\overline{F}} + \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

**Теорема 3.** О компактности в пространстве и подпространстве.

$(X, \rho)$  — метрич. пространство,  $Y \subset X$  — подпространство,  $K \subset Y$

Тогда  $K$  — комп. в  $Y \Leftrightarrow K$  — компактно в  $X$ .

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”

$$K \text{ — комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откp. в } X$$

Доказать:  $\exists$  кон.  $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда  $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Докажем “ $\Leftarrow$ ”

Дано:  $K$  — комп. в  $X$ , доказать:  $K$  — комп. в  $Y$ .

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha, O_\alpha \text{ — откp. в } Y$$

$$\exists G_\alpha : O_\alpha = G_\alpha \cap Y (G_\alpha \text{ — откp. в } X)$$

По двум выражениям выше:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \cap Y = Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Это открытое покрытие,  $K$  — компактно в  $X \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ .

Тогда  $K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$  — конечное подпокрытие в  $Y$ . □

## 2 Пределы и непрерывность отображений

### 2.1 Предел

**Определение.**  $(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \rightarrow Y$

$a \in X, a$  — пред. точка множества  $D, A \in Y$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне:  $\forall (x_n)$  — посл. в  $X$ :

$$(a) \quad x_n \rightarrow a$$

$$(b) \quad x_n \in D$$

$$(c) \quad x_n \neq a$$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

**Следствие.**  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R} \quad a$  — пред. точка  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

*Примечание.* 1.  $a$  — пр. точка  $\Rightarrow \exists x_n \rightarrow a \Rightarrow$  опр. Гейне содержательно.

2. Значение  $f(a)$  (если оно определено) не влияет на значение предела и факт его  $\exists$ .

3.  $f, g : D \rightarrow Y$   $f = g$  на некоторой окрестности  $\dot{W}(a) \cap D \Rightarrow$  их пределы  $\exists$  и  $\nexists$  одновременно, и если  $\exists$ , то равны.

4. Существование  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  по Гейне:  $\forall x_n$ , удовл. требованиям в опред. по Гейне,  $\exists \lim f(x_n)$

Предел на языке окружностей обобщим к  $\pm\infty$

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \forall E \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > E$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in D : x > \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$