Функциональные последовательности и ряды

Пример. $\sum x^n, x \in (0,1)$ — нет равномерной сходимости

$\exists \varepsilon = 0.1 \;\; \forall N \;\; \exists n > N$ — подходит любое > 100 $\exists p = 1 \;\; \exists x = 1 - \frac{1}{n+1} : |u_{n+1}(x)| \geq \varepsilon$, т.е. $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \approx \frac{1}{e} > \frac{1}{10}$

Теорема 0.1 (признак Вейерштрасса).

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — сх. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in E \;\; c_{n+1} + \ldots c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$. Попытаемся применить признак.

$c_n := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$ — это минимальное возможное c_n, если для него не сработает признак, до ни для какого c_n не сработает.

sup достигается в точке $x_0 = \frac{1}{n}$, $\sup = \frac{1}{2n}$. $\sum \frac{1}{2n}$ расходится $\Rightarrow$ признак не сработал.

Построим отрицание критерия Больцано-Коши:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{6} \; \forall N \; \exists n > N \;\; p = n \in \mathbb{N} \; \exists x = \frac{1}{n} \;\; |u_{n+1}(x) + u_{2n}(x)| = \frac{\frac{1}{n}}{1 + (n+1)^2 \frac{1}{n^2}} + \ldots \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} \geq$$

$$\geq n \frac{\frac{1}{n}}{1 + (2n)^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{5} > \frac{1}{6} = \varepsilon$$

Пример. $\sum \frac{x}{1+x^2n^2}, x \in \left(\frac{1}{2020}, 2020\right)$

$$c_n := \sup \frac{x}{1+x^2n^2} \leq \frac{2020}{1 + \frac{1}{2020^2} n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{???}{n^2}$$

$\sum c_n$ сходится $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость.

Приложения равномерной сходимости для рядов

Теорема 1' (Стокса-Зайдля для рядов).

- $u_n : X \to Y$
- X — метрическое пространство
- Y — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- u_n — непрерывно в x_0
- $\sum u_n(x)$ **равномерно** сходится на X
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда $S(x)$ — непрерывно в x_0.

Доказательство. По теореме 1 $S_n(x) \rightrightarrows S(x), S_n(x)$ — непр. в $x_0 \overset{\text{т. 1}}{\Longrightarrow} S(x)$ непр. в x_0 □

Примечание. Достаточно равномерной сходимости $u_n(x)$ на некоторой окрестности x_0

Примечание. $u_n \in C(x), \sum u_n$ – равномерно сходится на $X \Rightarrow S(x) \in C(x)$

Теорема 2'. О почленном интегрировании ряда

- $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$
- u_n — непр. на $[a, b]$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ **равномерно** сходится на $[a, b]$
- $S(x) = \sum u_n(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$

Можно интегрировать, т.к. $S(x)$ — непр. на $[a, b]$ по теореме 1'

Доказательство. По теореме 2

$S_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$

По теореме 2 $\int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b S(x)dx$

$\int_a^b \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x)dx \to \sum\limits_{k=0}^{n}$??? □

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ — равномерно сходится при $|x| \leq q < 1$ по Вейерштрассу: $|(-1)^n x^n| \leq q^n$, $\sum q^n$ сходится.

Проинтегрируем от 0 до t ($|t| \leq q$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$
$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k}$$

Это верно при $t \in [-q, q]$ $\forall q : 0 < q < 1$, т.е. верно при $t \in (-1, 1)$

При $t = -1$ $\sum -\frac{1}{k}$ расходится

При $t \to 1$ ряд $\sum(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k}$ равномерно сходится на $[0, 1]$, слагаемые непрерывны в $t_0 = 1 \overset{\text{т. 1}}{\Longrightarrow}$ сумма ряда непрерывна в точке $t_0 = 1 \Rightarrow \ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$