## Подгруппы в полугруппах

На прошлой практике мы остановились на моноиде, считающем число строк:

$$S := \{(l, n, r) \mid l, r \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$(l_1, n_1, r_1) \cdot (l_2, n_2, r_2) = (l_1, n_1 + n_2 + r_1 l_2, r_2)$$

Идемпотенты:

- 1.  $x_1 = (0, 0, 0)$
- 2.  $x_2 = (1, 0, 0)$
- 3.  $x_3 = (0, 0, 1)$

Рассмотрим  $H_2 = x_2 \cdot S \cdot x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_2 \cdot y \cdot x_2 \mid y \in S\} = \{(0, n, 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . В  $H_2$  выполняется  $zx = zy \Rightarrow x = y$ , т.к.  $H \sim (\mathbb{N}_0, +)$  с изоморфизмом  $(0, n, 1) \mapsto n$ .

Аналогично можно построить  $H_3 := x_3 S x_3, H_1 := x_1 S x_1$ . Такие подмножества являются подполугруппами S:

$$y, z \in H_1$$
  $yz = x_1 \hat{y} x_1 x_1 \hat{z} x_1 = x_1 \underbrace{(\hat{y} x_1 x_1 \hat{z})}_{\in S} x_1$ 

В  $H_1$  есть единица —  $x_1$ , т.к.  $yx_1 = x_1\hat{y}x_1x_1x_1x_1 = x_1\hat{y}x_1 = y$ 

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset$$

Рассмотрим полугруппу S и некоторый  $a \in S$ . Построим подмножество H, называемое **генератором** a, обозначаемое  $\langle a \rangle$ :

$$H = \langle a \rangle := \{a, a^2, a^3 \dots \}$$

Пример.  $\sphericalangle(\mathbb{Z},+), a=2.$  Тогда  $H=\{2n\mid n\geq 1\}.$ 

Может быть  $|H|<\infty$ . Тогда  $a^n=a^m$ . Выберем наименьшее такое n. Тогда у нас есть некоторый "хвост"  $a^1\dots a^n$  и цикл  $a^n, a^{n+1}\dots a^m$ . n называется индексом (также обозначается i) a,d=m-n—периодом.

Утверждение. Среди  $\langle a \rangle$  есть идемпотент, если  $|\langle a \rangle| < \infty$ 

Доказательство.

$$a^{k} = a^{k+\alpha d} \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_{1}$$
$$a^{k} \cdot a^{k} = a^{k} \Rightarrow 2k = k + \alpha d \Rightarrow k = \alpha d$$

M3137y2019 18.9.2021

Пусть 
$$e=a^k, e^2=e, G=eHe$$

Пример. i = 5, d = 3

$$G = \{a^6, a^5, a^7\}.$$

G является подгруппой, т.к. оно содержит все элементы цикла и обратное к  $a^j$  есть  $a^{k-j+d}$ 

## Отношения

$$X = \mathbb{R}, S = \mathbb{B}(X^2) = \{R \mid R \subseteq X \times X\}$$
$$\rho, \tau \in S \quad R = \rho \circ \tau : xRz \Leftrightarrow \exists y : x\rho y, y\tau z$$

Это определение согласовано с композицией функций.

Подполугруппы S:

- $H_1 = X o X функции$
- $H_2$  отношения эквивалентности не работает, т.к. есть контрпример:

$$X = \{a, b, c\}, \rho = \{(a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}, \tau = \{(b, c), (c, b), (b, b), (a, a), (c, c)\}$$

$$\rho^{-1} := \{ (b, a) \mid (a, b) \in \rho \}$$

$$\rho \circ \rho^{-1} = R \quad \rho^{-1} \circ \rho = L$$

## Внешние законы

Рассмотрим плоскость  $\mathbb{E}^2$  и множество трансляций  $T=\{\vec{v}\}$ . T действует на  $\mathbb{E}^2$ . Добавим в T закон сложения $^1$ .

Рассмотрим R — множество поворотов плоскости относительно точки P. R тоже действует на  $\mathbb{E}^2$ . Определим композицию в R — последовательное действие поворотов. Обозначим эту композицию "·".

 $\sphericalangle \rho \in R, \tau \in T$ . Можно делать  $\rho(\tau(P))$ , можно  $\tau(\rho(P))$ . Это не одно и то же (пример очевиден). Определим  $\hat{\tau}$  как  $\rho(\tau) = \hat{\tau}$ . Все эти внешние законы согласованы:

$$\rho(\tau(P_0)) = \hat{\tau}(\rho(P_0)) = \hat{\tau}(P_0)$$

$$\rho(\tau_1 + \tau_2) = \rho(\tau_1) + \rho(\tau_2)$$

M3137y2019 18.9.2021

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Обычное сложение векторов.