

Доказательство. Доказательство несчётности отрезка с помощью компактности.

Рассмотрим произвольную точку отрезка x_k и её окрестность размером $\frac{1}{10^k}$. Все такие окрестности образуют открытое покрытие отрезка, но их суммарная длина $\leq \frac{1}{9}$, что меньше длины произвольного отрезка. Почему-то это даёт противоречие. \square

Следствие. (из теоремы о непрерывности монотонной функции) У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное (НБЧС) множество точек разрыва.

Пример. $\Theta(x) = \text{sign}(x)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

x_k это k -тое рациональное число

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \Theta(x - x_k)$$

$f(x)$ имеет скачок в каждом рациональном значении аргумента.

Доказательство. $f(x-0) < f(x+0)$

Создадим инъекцию $(f(x-0), f(x+0)) \rightsquigarrow q_x \in \mathbb{Q}$. Возьмём $q_x \in (f(x-0), f(x+0))$. Такая точка будет в силу плотности \mathbb{Q} в \mathbb{R} . Теперь докажем, что взятие q_x — инъекция. Рассмотрим другую точку разрыва — y .

$$\exists t \in (f(x), f(y))$$

$$f(x) \leq t \leq f(y)$$

$$f(x) \leq f(x+0) \leq t \leq f(y-0) \leq f(y)$$

Таким образом, $(f(x-0), f(x+0))$ и $(f(y-0), f(y+0))$ не имеют общих точек, тогда q_x все разные \Rightarrow взятие q_x — инъекция. Доказать инъективность достаточно, т.к. нам не нужна равномощность. \square

Упражнение. 1. Существует ли на плоскости более, чем счётное множество непересекающихся окружностей?

2. Существует ли на плоскости более, чем счётное множество восьмёрок?

3. Можно ли в счётном множестве задать такое континуальное семейство (A_α) , что: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ A_\alpha \subset A$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \neq A_{\alpha_2}$$

$$\forall \alpha, \beta : \alpha < \beta \ A_\alpha \subset A_\beta$$

Теорема 1. О существовании и непрерывности обратной функции.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., строго монот.

$m := \inf_{\langle a, b \rangle} f(x)$, $M := \sup_{\langle a, b \rangle} f(x)$. Тогда:

1. f — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$

2. f^{-1} строго монотонна и того же типа (возрастает или убывает)

3. f^{-1} непрерывна

Примечание. Тип промежутка в f и f^{-1} совпадают.

Доказательство. Пусть $f \uparrow$

$f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$ (типы скобок совпадают)

f — строго монот. $\Rightarrow f$ — инъекция. Тогда $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle m, M \rangle$ — биекция

$$\forall x_1 < x_2 \ f(x_1) < f(x_2)$$

$$\forall y_1 < y_2 \ f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

\square

1 Элементарные функции

Определение. Всё, для чего есть кнопки на калькуляторе — элементарные функции:

$const, x^a, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \arcsin, \arctan x$

+ конечное число арифметических действий и композиций

1.1 x^a

Свойства:

$$1. x^{r+s} = x^r x^s$$

$$2. (x^r)^s = x^{rs}$$

$$3. (xy)^s = x^s y^s$$

$$f_a(x) = x^a, a \in \mathbb{Q}$$

Докажем непрерывность:

$$1. a = 1 \quad f_1(x) = x - \text{непр.}$$

$$2. a \in \mathbb{N} \quad f_a(x) = f_1(x) \cdot f_1(x) \dots f_1(x) - \text{непр.}$$

$$3. a \in \mathbb{N}^+ \quad f_{-a}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{f_a(x)}$$

$$4. a = 0 \quad f_0(x) \equiv 1 \text{ (при } x \neq 0, \text{ доопределим } f_0(0) = 1) - \text{непр. в } \mathbb{R}$$

$$5. a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n - \text{нечётно}$$

$f_n \uparrow$ строго $\inf_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = -\infty \quad \sup f_n = +\infty, f_n - \text{непр.} \Rightarrow$ по теореме о непрерывности монотонной функции $f^{-1} - \text{непр.}$

$$\exists f_n^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) = f_n^{-1}(x)$$

$$6. a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n - \text{чётн.}$$

$$f_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) - \text{строго монот., непр.}$$

$$f(0) = 0 \quad \sup f_n = +\infty$$

$$\exists f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f_{\frac{1}{n}}(x) := f_n^{-1}(x)$$

$$7. a = \frac{p}{q} \text{ (несокр.)}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$f_a := f_{\frac{1}{q}} \circ f_p$$

2 Производная

Определение. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \langle a, b \rangle$
 f — дифференцируема. в точке x_0 , если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Определение. f — дифференцируема в точке x , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$$

A — производная f в точке x_0

Примечание. Второе определение не обобщимо на пространство произвольной размерности, в отличие от первого.

Теорема 2. Определение 1 \Leftrightarrow определению 2, т.е.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= B \in \mathbb{R} \\ A &= B \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем “ \Leftarrow ”.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем “ \Rightarrow ”.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

Примечание. 1. f — дифф. в $x_0 \Rightarrow f$ — непр. в x_0

2. $f'(x_0)$ — обозн. для производной

Если $x_0 \in (a, b)$ в опр. 1, 2 $x \rightarrow x_0 + 0$

f — дифф. справа $\Rightarrow A$ — правостор. производная $f'_+(x)$

$x \rightarrow x_0 - 0$ слева $f'_-(x_0)$

$$\exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f' \text{ — дифф. в } x_0$$

3. $A = \pm\infty : f'(x_0) = \pm\infty$, но f не дифф.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Определение.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

— называется **касательной** к графику $y = f(x)$ в точке x_0

Теорема 3. $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифф. в x_0

Тогда указанные ниже в левых частях дифференцируемы в x_0 и их производные равны.

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g(x_0) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Доказательство. Докажем 4 по определению.

$$\frac{\frac{f}{g}(x_0 + h) - \frac{f}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0) - f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{OK}$$

□

Теорема 4. О производной композиции.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle \quad x \in \langle a, b \rangle \quad f - \text{дифф. в } x$

$g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad g - \text{дифф. в } y = f(x)$

Тогда $g \circ f - \text{дифф. в } x$; $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Доказательство.

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k$$

$$]f'(x)h + \alpha(h)h = k; \quad k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} g(f(x + h)) &= g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h \\ &]g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h = \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 5. О производной обратной функции.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., строго монот. $x \in \langle a, b \rangle$ f — дифф. в x ; $f'(x) \neq 0$

По определению $f \exists f^{-1}$

Тогда f^{-1} — дифф. в $y = f(x)$ и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Примечание. f^{-1} — дифф. \Rightarrow ф-ция очев.: $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (f^{-1}(f(x)))' = (x)' = 1$

Доказательство. $\forall k \exists h : f(x+h) = y+k$

$$h = (x+h) - x = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x+\tau(k)) - x}} \xrightarrow[\tau(k) \rightarrow 0]{\substack{\text{по т.о непр. обр. ф} \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

Пример.

$$y = \sin x$$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Упражнение. $\arctan' y = 0$

3 Теоремы о среднем

Лемма 1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — дифф. в $x_0 \in (a, b)$; $f'(x_0) > 0$

Тогда $\exists \varepsilon > 0 \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x_0) < f(x)$

и $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) f(x_0) > f(x)$

Примечание. Это не монотонность.

Доказательство.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) > 0$$

$x \rightarrow x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ вблизи x_0 (по теор. о стабилизации знака)

$x \rightarrow x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$ вблизи x_0

□

Теорема 6. Ферма.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$ — точка максимума

f — дифференцируема в x_0

Тогда $f'(x_0) = 0$

Доказательство. Из леммы.

Если $f'(x_0) > 0$, то справа от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$

Если $f'(x_0) < 0$, то слева от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$

□

Теорема 7. Ролля.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

$f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса.

$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$

$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = \text{const}; f' \equiv 0$

Иначе: пусть $x_0 \in (a, b) \xrightarrow{\text{т. Ферма}} f'(x_0) = 0$

□

Примечание. $f(x) = (x - a)^k g(x)$, где $g(a) \neq 0$

$$f'(x) = k(x - a)^{k-1} g(x) + (x - a)^k g'(x) = (x - a)^{k-1} (k \cdot g(x) + (x - a) \cdot g'(x))$$

Пример. $n \in \mathbb{N}$

$\text{Ln}(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ — **полиномы Лежандра** (с точностью до умножения на константу)

$\deg \text{Ln} = n$

Утверждение: Ln имеет n различных вещественных корней.

Доказательство. Рассмотрим $(x^2 - 1)^n$. У этого многочлена 2 корня $\{-1, 1\}$, каждый кратности n . Возьмём производную. По т. Ролля у этого многочлена есть корень $\in (-1, 1)$. Кроме того, $\{-1, 1\}$ все ещё корни, у них кратность $n - 1$. Т.к. $\deg = 2n - 1$, кратность нового корня 1. На n -ом шаге получается n корней, каждый кратности 1. □