# Математический анализ

Михайлов Максим

7 октября 2022 г.

# Оглавление

# Лекция 1

# 8 февраля

**Лемма 1** (о структуре компактного оператора)**.**

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

*Примечание.* Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

*Доказательство.* $W := V^* V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в $\mathbb{C}^m$)*, $^*$ есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \overset{(??)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \overset{(??)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

(??): т.к. $g_i$ — собственный вектор для $W$ с собственным значением $c_i$.

- (??): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def}\, h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(??)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(??)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(??)}{=} \delta_{ij}$$

*Примечание.* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def}\, x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i\right) \stackrel{(??)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def}\, h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(??)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def}\, W}{=} \det W \stackrel{(??)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

**Теорема 1** (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \;\; V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

(??): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
(??): т.к. $g_i$ — собственный вектор для $W$ с собственным значением $c_i$.
(??): при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$
(??): в силу линейности $V$
(??): в силу мультипликативности $\det$ и инвариантности относительно транспонирования.
(??): т.к. $\det$ инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

*Доказательство.*

1. Если $\det V = 0 \quad \mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\mathrm{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \ \ V(E) \subset \mathrm{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$

2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти $k$, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ — единичный куб на векторах $g_i$.

По 1 $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом, $k = |\det V|$

$\square$

# 1 Интеграл

## 1.1 Измеримые функции

**Определение.**

1. $E$ — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.

2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ \ f\Big|_{e_i} = \mathrm{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

*Пример.*

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$

2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

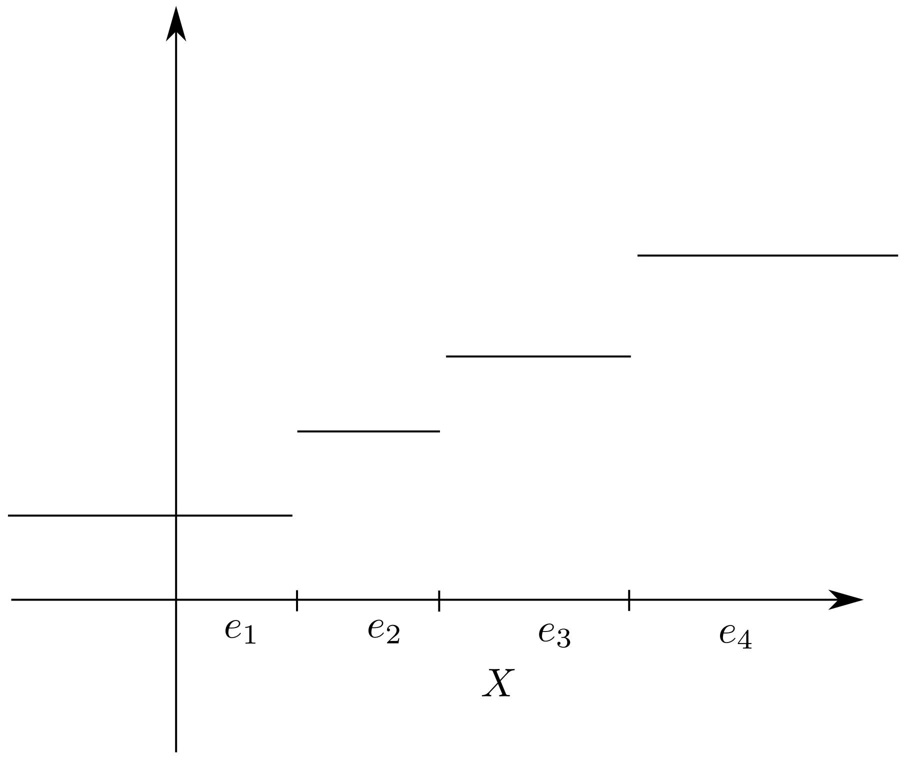



Рис. 1.1: Ступенчатая функция

*Свойства.*

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

   $\exists$ разбиение $X$, допустимое и для $f$, и для $g$:

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$
$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2. $f, g$ — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

   Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые.

**Определение.** $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — **лебегово множество** функции $f$

Аналогично можно использовать $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

*Примечание.*

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \le a) = \bigcap_{b>a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$ **измерима** на множестве $E$, если $\forall a \in \mathbb{R}\ \ E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо "$f$ измерима на $X$" говорят просто "измерима".

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда $f$ — измеримо по Лебегу.

*Примечание.* Эквивалентны:

1. $\forall a\ \ E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a\ \ E(f \le a)$ — измеримо
3. $\forall a\ \ E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a\ \ E(f \ge a)$ — измеримо

*Доказательство.* Тривиально по соображениям выше. □

*Пример.*

1. $E \subset X, E$ — измеримо $\Rightarrow \chi_E$ — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \varnothing, & a \le 0 \\ X \setminus E, & 0 < a \le 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывно. Тогда $f$ — измеримо по Лебегу.

   *Доказательство.* $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению непрерывности, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

*Свойства.*

1. $f$ измеримо на $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \ E(f = a)$ измеримо.

   В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2. $f$ — измеримо $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \alpha f$ — измеримо.

*Доказательство.* $E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \varnothing, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases}$ □

3. $f$ — измеримо на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ измеримо на $E = \bigcup E_k$
4. $f$ — измеримо на $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$ измеримо на $E'$

   *Доказательство.* $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$ □

5. $f \neq 0$, измеримо на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ измеримо на $E$.
6. $f \geq 0$, измеримо на $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на $E$.

   Это неверно, т.к. при $f \equiv 0, \alpha = -1 \ \nexists f^\alpha$

**Теорема 2.** $f_n$ — измеримо на $X$. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x \ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

*Доказательство.*

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(??)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   (??):

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

     $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n(s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. sup и inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.
3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

## 1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — $\sigma$-конечный объем *(и даже $\sigma$-конечная мера на $\mathcal{P}^1$)*

Также можно определить для монотонной, но не непрерывной $g$. Тогда в точках разрыва $\exists g(a + 0), g(a - 0)$. Пусть $\mu[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное $\mu$ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру $\mu_g$ на некоторой $\sigma$—алгебре. Это мера **Лебега-Стилтьеса**.

*Пример.* $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если $\mu_g$ определена на борелевской $\sigma$-алгебре, то она называется мерой **Бореля-Стилтьеса**.

# Лекция 2

# 15 февраля

**Теорема 3** (о характеризации измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$ измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \;\; f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

*Доказательство.*

$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \quad k = 1 \dots n^2$$

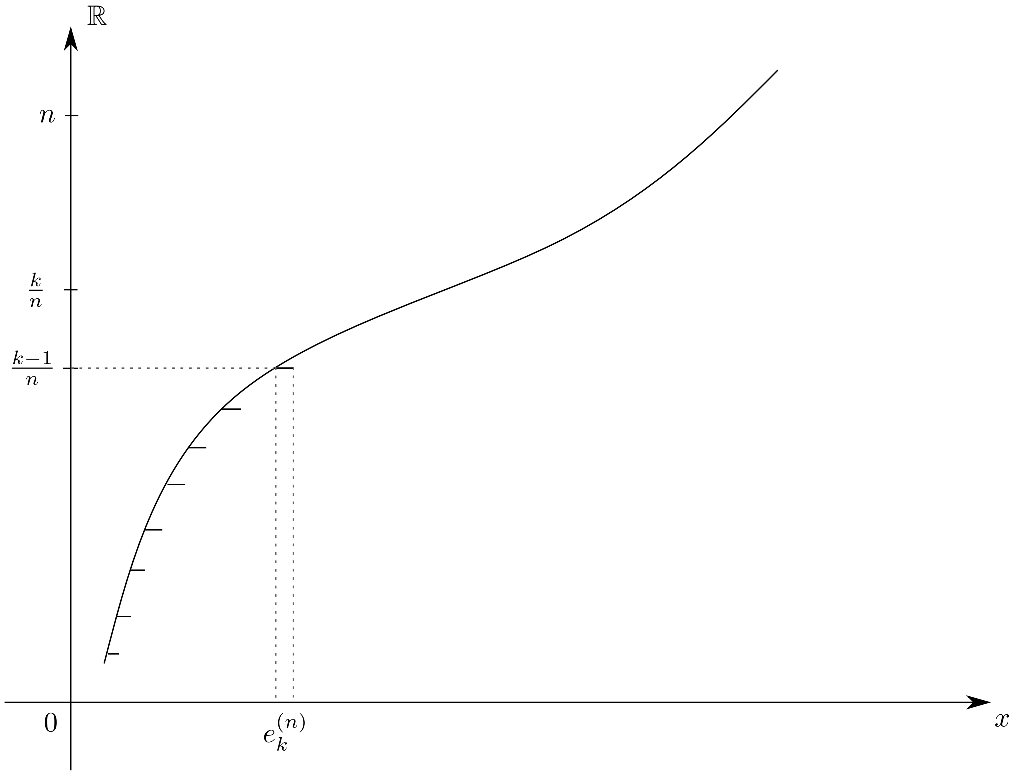
$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x) : \begin{cases} g_n(x) \leq f(x) \\ f(x) = +\infty : \;\forall n \;\; x \in e_{n^2+1}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n \\ f(x) < +\infty : \;|g_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$




$$f_n = \max(g_1, ..., g_n)$$
$$g_n(x) \le f_n(x) \le f(x)$$
$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

$\square$

*Следствие* 3.1.

- $f$ — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

*Доказательство.* Рассмотрим срезки $f^+, f^-$, дальше очевидно. $\square$

*Следствие* 3.2.

- $f, g$ — измеримо

Тогда $fg$ — измеримо (пусть $0 \cdot \infty = 0$).

*Доказательство.*

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \to f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \to g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \to fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. □

*Следствие* 3.3.

- $f, g$ — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

*Примечание.* Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

*Доказательство.*

$$f_n + g_n \to f + g$$

□

**Теорема 4** (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры)**.**

*Примечание.* $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$ — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда $f$ — измеримо.

*Доказательство.* $f$ — измеримо на $E'$, т.к. $E'(f < a)$ открыто в $E'$ по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, $\lambda_m$ — полная в $\mathbb{R}^m$[1] $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в $E$.

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. □

*Пример.* $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. $f$ непр. на Irr и разрывно на $\mathbb{R}$.

*Следствие* 4.1.

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$

[1] Любое подмножество множества нулевой меры измеримо.

- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- $f$ измеримо на $E'$

Тогда можно так переопределить $f$ на $e$, что полученная функция $\tilde{f}$ будет измерима.

*Доказательство.* Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in E' \\ \text{const}, x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f<a)} \cup \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\varnothing \text{ или } e}$$

□

*Следствие* 4.2. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда $f$ измерима.

*Доказательство.* $f$ — непрерывно на $\langle a, b \rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. □

*Упражнение* 1. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

*Упражнение* 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x - y)$ — измеримо.

*Упражнение* 3. Доказать, что $\exists$ измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$, если $f$ непрерывно на $e$, то полученная $\tilde{f}$ разрывна всюду.

## 1.3 Сходимость почти везде и по мере

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно **при почти всех** $x$ из $E$ = **почти всюду** на $E$ = **почти везде** на $E$ = **п.в.** $E$, если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$ и $W(x)$ истинно при $\forall x \in E \setminus e$

*Пример.* $X = \mathbb{R}$, $W$ = иррационально.

**Определение.** Если $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ при п.в. $x \in E$, тогда говорят, что $f_n$ **сходится на** $E$ **почти везде**.

*Свойства.*

1. 
   - $\mu$ — полная
   - $f_n, f : X \to \overline{R}$
   - $f_n \to f$ п.в. $X$
   - $f_n$ измеримо

   Тогда $f$ измеримо.

   *Доказательство.* $f_n \to f$ на $X'$, где $e = X \setminus X'$, $\mu e = 0$

   $f$ — измеримо на $X'$

   $\mu$ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на $X$, т.к. $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$ $\square$

2. В условии пункта один можно переопределить $f$ на множестве $e$. Тогда получится $\tilde{f}$ и $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$ почти везде и $\tilde{f}$ измеримо.
3. Пусть $\forall n \;\; W_n(x)$ истинно при почти всех $x$.

   Тогда утверждение “ $\forall n \;\; W_n(x)$ истинно” — верно при почти всех $x$

   *Доказательство.* $\lhd e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} e_i\right)$, $\mu(\bigcup e_i) = 0$ $\square$

**Определение.** Будем говорить, что $f$ эквивалентна $g$ если $f = g$ почти всюду.

**Определение.** $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

$f_n$ **сходится к** $f$ **по мере** $\mu$, обозначается $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \;\; \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

*Примечание.* $f_n$ и $f$ можно изменить на множестве меры $0$, т.е. предел не задан однозначно.

*Упражнение* 4. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$; $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} g$. Тогда $f$ и $g$ эквивалентны.

*Доказательство.* Пусть существует множество $X(|f - g| > \varepsilon)$ положительной меры.

$$X(|f - g| > \varepsilon) \subset X(|f - f_n| > \varepsilon) \cup X(|g - f_n| > \varepsilon)$$

$$\mu X(|f-g|>\varepsilon) \le \underbrace{\mu X(|f-f_n|>\varepsilon)+\mu X(|g-f_n|>\varepsilon)}_{\to 0}$$

Следовательно предположение неверно. Но тогда $\mu(\bigcup X(|f-g|>\varepsilon)) = 0$, а следовательно $f \sim g$.

Аналогичное доказательство есть в более подробном виде по следующей ссылке □

*Пример.*

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$

   $f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$

   $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$

$$X(|f_n - f| \ge \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \ge \varepsilon\right) = X\left(x \le \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \to 0$$

2. $f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$

   $f_n(x) \to 0$ при всех $x$

   $f_n(x) \not\Rightarrow 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \ge \varepsilon)) = \text{const} \not\to 0$$

3. $n = 2^k + l, 0 \le l < 2^k, X = [0,1], \lambda$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

   $\lim f_n(x)$ не существует ни при каком $x$![2]

$$X(f_n \ge \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \to 0 \Rightarrow f_n \xRightarrow[\lambda]{} 0$$

**Теорема 5** (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$ конечно
- $f_n, f$ — измеримо, п.в. конечно

[2] Это восклицательный знак, а не факториал.

- $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

*Доказательство.* Переопределим $f_n, f$ на множестве меры $0$, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к $0$, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$

$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \varnothing$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \to 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \to f$, $\varphi_n(x) := \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \to 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

**Теорема 6** (Рисс)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f$ — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде.

*Доказательство.*

$$\forall k \ \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \ \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \overset{(??)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$
$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при $x \notin E$ $f_{n_k} \to f$.

$$x \notin E \ \exists N \ \ x \notin E_k \text{ при } k > N \ \ |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

*Следствие* 6.1. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$ $|f_n| \leq g$ почти всюду. Тогда $|f| \leq g$ почти всюду.

*Доказательство.* $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ почти всюду.

□

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \ \forall x \Rightarrow f_n \Longrightarrow f$$

**Теорема 7** (Егорова)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$ — почти везде конечно, измеримо
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

*Доказательство.*

*Примечание.* Кажется, доказательство знать не нужно, т.к. нам его не давали.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$E_{n,k} = \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

(??): по счётной полуаддитивности меры.

Т.к. $f_n \to f$ почти везде:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{n,k}\right) = 0$$

Т.к. $\mu X < +\infty$, то $\mu$ непрерывно сверху, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} \mu E_{n,k} = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{n,k}\right) = 0$$

Тогда по определению предела $\exists (n_k)$ :

$$\mu E_{n_k,k} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Пусть $e = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k,k}$. По $\sigma$-аддитивности $\mu$:

$$\mu(e) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Кроме того, $f_n \underset{X\setminus e}{\rightrightarrows} f$. $\square$

# 2 Интеграл

$\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

**Определение** (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$ — допустимое разбиение
- $\alpha_k \ge 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

*Свойства.*

1. Не зависит от представления $f$ в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

*Примечание.* При $E_k \cap E'_j \ne \varnothing$ $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$ можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu(E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

2. $\underbrace{f}_{\text{ст.}} \le \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \le \int_X g$

**Определение** (2)**.**

- $f \ge 0$
- $f$ измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ступ.} \\ 0 \le g \le f}} \int g d\mu$$

*Свойства.*

- Если $f$ ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \le \int_X f \le +\infty$
- $g \le f, f$ — измеримая, $g$ — ступенчатая $\Rightarrow \int_X g \le \int_X f$

**Определение** (3)**.**

- $f$ измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

**Теорема 8** (Тонелли)**.**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \ge 0$
- $f$ измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

*Обозначение.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \;\; E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на $\mathbb{R}^n$
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$, измерима и корректно задана.
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

*Примечание.* Неформально говоря, можно разбить $\mathbb{R}^{m+n}$ на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

# Лекция 3

# 22 февраля

**Определение.** Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то $f$ называется **суммируемой**.

*Примечание.*

1. Если $f$ измеримо и $\geq$, то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

**Определение** (4)**.**

- $E \subset X$ — измеримо
- $f$ измеримо на $X$

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

*Примечание.*

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f$ на $E, g$ — ступ.$\}$ и мы считаем, что $g \equiv 0$ вне $E$.
- $\int_E f$ не зависит от значений $f$ вне множества $E$.

*Свойства.* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, $g, f$ — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

   *Доказательство.*

   (a) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.

   (b) При произвольных $f, g$ $\ f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ *(очевидно из определения).* Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

   $\square$

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$
3. $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

   *Доказательство.*

   (a) $f$ — ступ. Тривиально.

   (b) $f$ — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

   (c) $\int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$

   □

   *Примечание.* $f$ — измерима. Тогда $f$ суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

   *Доказательство.*

   $\Leftarrow$ следует из $f^+, f^- \leq |f|$

   $\Rightarrow$ будет доказано позже на этой лекции.

   □

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$

   *Доказательство.*

   (a) $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

   (b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \geq 0$ тривиально.

   □

5. $\exists \int_E f d\mu$. Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

   *Доказательство.*

$$-|f| \leq f \leq |f|$$
$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$$
$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

   □

6. $\mu E < +\infty, a \leq f \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

*Следствие* 8.1. $f$ — измеримо на $E$, $f$ — ограничено на $E$, $\mu E < +\infty$. Тогда $f$ суммируемо на $E$

7. $f$ суммируема на $E$. Тогда $f$ почти везде конечна.

   *Доказательство.*

   (a) $f \geq 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \geq n\mu A \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

   (b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

**Лемма 2.**

- $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- $g$ — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\overset{(??)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu\end{aligned}$$

□

**Теорема 9.**

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на $A$
- $f \geq 0$

(??): переставлять можно, т.к. члены суммы $\geq 0$.

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

*Доказательство.* Докажем, что части равенства $\leq$ и $\geq$, тогда равенство выполнено.

$\leq$ $\lessdot$ ступенчатую $g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \overset{(??)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\int_A f d = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$\geq$ 1. $A = A_1 \sqcup A_2$

$\lessdot$ ступенчатые $g_1, g_2 : 0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$. Пусть $E_k$ — совместное разбиение, у $g_1$ коэффициенты $\alpha_k$, у $g_2$ — $\beta_k$.

$$0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 \overset{(??)}{\leq} \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \overset{(??)}{\leq} \int_A f$$

2. Для $n \in \mathbb{N} : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ тривиально по индукции.
3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$\int_{B_n} f \geq 0$, т.к. $f \geq 0$. Таким образом:

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

$\square$

*Следствие* 9.1. $f \geq 0$ — измеримо. Пусть $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu E := \int_E f d\mu$. Тогда $\nu$ — мера.

(??): по лемме 2.
(??) и (??): переход к $\sup$

*Следствие* 9.2 (Счётная аддитивность интеграла). $f$ суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

*Доказательство.* Очевидно, если рассмотреть срезки. □

*Следствие* 9.3. $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

## 2.1 Предельный переход под знаком интеграла

Пусть $f_n \to f$. Можно ли утверждать, что $\int_E f_n \to \int_E f$?

*Пример* (контр).

$$f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \to f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

**Теорема 10** (Леви).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n$ измеримо
- $\forall n \ \ 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде.
- $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Примечание.* $f$ задано везде, кроме множества $e$ меры $0$. Считаем, что $f = 0$ на $e$. Тогда $f$ измеримо на $X$.

*Доказательство.*

$\leq$ очевидно, т.к. $f_n \leq f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_{0} = \int_{X\setminus e} f_n \leq \int_{X\setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$ достаточно проверить, что $\forall$ ступенчатой $g : 0 \leq g \leq f$ выполняется следующее $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что $\forall c \in (0,1) \ \ \lim \int_X f_n \geq c\int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \overset{(??)}{=} c \int_X g$

$\square$

**Теорема 11.**

- $f, g \geq 0$
- $f, g$ измеримо на $E$

Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

*Доказательство.*

1. $f, g$ — ступенчатые, т.е. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$

   $g \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g$$

$$\int_E f + \int_E g \xleftarrow{\text{т. Леви}} \int_E f_n + \int_E g_n \overset{\text{пункт 1}}{=\!=\!=} \int_E f_n + g_n \xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g$$

$\square$

*Следствие* 11.1. $f, g$ суммируемы на $E$. Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

*Доказательство суммируемости.* $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$
$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$

(??): по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

□

**Определение.** $\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых на $X$ функций

*Следствие* 11.2 (следствия). $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ это линейный функционал[1] на $\mathcal{L}(X)$ , т.е.:

$$\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \;\; \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X) \text{ и } \int_X \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_X f_k$$

**Теорема 12** (об интегрировании положительных рядов)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде
- $u_n$ измеримо

Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

*Доказательство.* По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

$S_n \to S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$, тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \int_E S \leftarrow \int_E S_n \xlongequal{\text{линейность } \int} \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k$$

□

*Следствие* 12.1. $u_n$ измеримо и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех $x$.

[1] т.е. функция функций

*Доказательство.*

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

*Пример.* $x_n \in \mathbb{R}$ — произвольная последовательность, $\sum a_n$ абсолютно сходится.

Тогда $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ абсолютно сходится при почти всех $x$.

*Доказательство.* Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде.

$$\begin{aligned}
\int_{[-N,N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\
&= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\
&\overset{(??)}{\leq} |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\
&= 4\sqrt{N}|a_n| \\
\sum_n \int_{[-N,N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &\leq 4\sqrt{N} \sum |a_n| < +\infty
\end{aligned}$$

□

(??): Т.к. $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ чётна и при этом для $x \geq 0$ убывает, площадь под симметричным относительно $0$ отрезком максимальна среди всех отрезков такой же длины.

# Лекция 4

# 1 марта

**Теорема 13** (об абсолютной непрерывности интеграла)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f$ суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall E$ — изм., $\mu E < \delta : \left|\int_E f\right| < \varepsilon$

*Следствие* 13.1. $f$ суммируемо на $X$, $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \to 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \to 0$

*Доказательство.* [1]

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcap X_n\right) \overset{(??)}{=} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \overset{(??)}{\leq} \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{<\delta} \cdot n_\varepsilon < \varepsilon$$

□

[1] Теоремы, не следствия
(??): Т.к. $f$ на $\bigcap X_n$ бесконечна и $f$ почти везде конечна.
(1): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
(??): Т.к. $|f|$ на $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$ не превосходит $n_\varepsilon$ по построению $X_{n_\varepsilon}$

*Примечание.* Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \overset{\lambda}{\Rightarrow} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех $n$.

Из 2 следует 1, т.к.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

**Теорема 14** (Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f$ — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$, называемое "суммируемая мажоранта":
  1. $\forall n \ \ |f_n| \overset{(??)}{\leq} g$ почти везде
  2. $g$ — суммируемо на $X$

Тогда: $f_n, f$ — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

*Примечание.* Почти везде конечность $f_n$ и $f$ следует из (**??**), поэтому в условии этого можно не требовать.

*Доказательство.* $f_n$ — суммируемы в силу неравенства (**??**), $f$ суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$

   Зафиксируем $\varepsilon$. $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \tag{2}$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[\text{сл. т. об абс. непр.}]{n \to +\infty} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

   Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \subset X$, изм., конечной меры : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$. Докажем его.

$$\int_X g = \sup \left\{ \int g_n \,\middle|\, 0 \le g_n \le g, g_n - \text{ступ.} \right\}$$

   Возьмём достаточно большое $n$ и положим:

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

$$0 \le \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon$$

$$\int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g = \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon \implies \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

   Вернёмся к теореме. Зафиксируем $\varepsilon > 0$:

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \le \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\to 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

**Теорема 15** (Лебега)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f$ — измеримо
- $f_n \overset{(??)}{\to} f$ почти везде
- $\exists g$, называемое "суммируемая мажоранта":
  1. $\forall n \;\; |f_n| \le g$ почти везде
  2. $g$ — суммируемо на $X$

Тогда $f_n, f$ — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, и тем более $\int_X f_n \to \int_X f$

*Доказательство.* Суммируемость $f_n, f$, а также утверждение "и тем более" доказываются так же, как в теореме Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$

$$0 \overset{(??)}{\le} h_n \overset{(??)}{\le} 2g$$

$h_n$ монотонно убывает, что очевидно по определению $\sup$.

$$\lim h_n \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim}|f_n - f| \overset{(??)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \geq 0$ и возрастает как последовательность функций, $2g - h_n \to 2g$ почти везде. Тогда по теореме Леви:

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$$

□

*Пример.* $\sphericalangle x > 0, x_0 > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1}e^{-t}dt$$

Равенство выполнено, т.к. $t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow{x \to x_0} t^{x_0-1}e^{-t}$ при $t > 0$ и суммируемая мажоранта $t^{\alpha-1}e^{-t} + t^{\beta-1}e^{-t}$, где $0 < \alpha < x_0, 0 < \beta$

**Теорема 16** (Фату)**.**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- $f_n$ измеримо
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \ \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

*Примечание.* Странность: здесь не требуется, чтобы $\int_X f_n \to \int_X f$ и это может быть неверно.

*Пример.*

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \to 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \leq 1$$

По теореме Фату $\int_{\mathbb{R}} f \leq 1$, что верно, т.к. $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \leq 1$

(??): по построению
(??): по (2)
(??): по (??)

*Пример.* Условие $f_n \geq 0$ важно:

$$f_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \to 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = -1 \leq -1, \text{ но } \int_{\mathbb{R}} f = 0 \not\leq -1$$

*Доказательство.*

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}$$

$$\lim g_n \overset{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \tag{3}$$

$$\int_X g_n \overset{(??)}{\to} \int_X f$$

Значит $\int_X f \leq C$ по предельному переходу в (3) ☐

*Следствие* 16.1.

- $f_n, f \geq 0$
- $f_n, f$ измеримы
- $f_n, f$ почти везде конечны
- $f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows} f$
- $\exists C > 0 \ \ \forall n \ \ \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

*Доказательство.*

$$f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows} f \xRightarrow[\text{Т. Рисса}]{} \exists (n_k) : f_{n_k} \to f \text{ п.в.}$$

По теореме Фату получим искомое. ☐

*Следствие* 16.2.

- $f_n \geq 0$
- $f_n$ измеримо

Тогда $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

(??): по теореме Леви

*Доказательство.* Возьмём $g_n$ как в теореме, тогда выполняется неравенство $\int_X g_n \leq \int_X f_n$. Выберем $(n_k) : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n\to+\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{array}{c} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \\ \downarrow \\ \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n \end{array}$$

□

# 3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.

$\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathfrak{B}, \ ), \Phi : X \to Y$

Пусть $\Phi$ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

*Упражнение* 5. Проверить, что $\Phi^{-1}$ — $\sigma$-алгебра.

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$. Тогда $\nu$ — мера:

$$\nu\left(\bigsqcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера $\nu$ называется **образом** $\mu$ при отображении $\Phi$ и $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

*Наблюдение* 1. $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо относительно $\mathfrak{B}$. Тогда $f \circ \Phi$ — измеримо относительно $\mathfrak{A}$.

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \overset{(??)}{\in} \mathfrak{A}$$

**Определение.** $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримо на $X$.

$$\forall B \in \mathfrak{B} \ \ \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда $\nu$ называется “**взвешенный образ меры** $\mu$ при отображении $\Phi$”, $\omega$ называется **весом**.

(??): т.к. $Y(f < a) \in \mathfrak{B}$

**Теорема 17** (о вычислении интеграла по взвешенному образу меры)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространство с мерой
- $\Phi : X \to Y$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$ измеримо на $X$
- $\nu$ взвешенный образ $\mu$ при отображении $\Phi$ с весом $\omega$

Тогда $\forall$ измеримой относительно $\mathfrak{B}$ $f$ на $Y$, $f \geq 0$ выполнено следующее:

1. $f \circ \Phi$ измеримо на $X$ относительно $\mathfrak{A}$
2. $$\int_Y f(y)d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x)d\mu(x) \tag{4}$$

То же самое верно для суммируемой $f$.

*Доказательство.* Измеримость $f \circ \Phi$ выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

   $$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда (4) это:

   $$\int_Y \chi_B d\nu = \int_B 1 \cdot d\nu = \nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

   Это выполнено по определению $\nu B$

1. Пусть $f$ — ступенчатая

   (4) следует из линейности интеграла.

2. Пусть $f \geq 0$, измеримая

   По теореме о характеризации измеримых функций с помощью ступенчатых и теореме Леви $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots$ — ступенчатые, $h_i \leq f, h_i \to f$

   $$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \to +\infty} (4)$$

3. Пусть $f$ измерима.

   Тогда для $|f|$ выполнено (4); $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_- = f_- \circ \Phi \cdot \omega$$

   Таким образом, искомое выполнено для $f_+$ и $f_-$, а следовательно и для $f$.

□

*Следствие* 17.1 (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- $f$ суммируемо на $Y$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x)d\mu$$

*Доказательство.* В условие теоремы подставим $f \cdot \chi_B$ □

**Определение.** Рассмотрим частный случай: $X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$ - тождественное отображение. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё $\omega$.

$$\nu(B) = \int_B \omega(x)d\mu$$

В этой ситуации $\omega$ называется **плотностью** меры $\nu$ относительно меры $\mu$ и тогда по теореме о вычислении интеграла по взвешенному образу меры:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x)\omega(x)d\mu$$

# Лекция 5

# 15 марта

**Определение.**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера

**Плотность меры** $\nu$ относительно $\mu$ есть положительная измеримая функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, такая что:

$$\forall B \in \mathfrak{A} \ \ \nu B = \int_B \omega d\mu$$

**Теорема 18** (критерий плотности)**.**

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- $\nu$ — мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$ измеримо

Тогда $\omega$ — плотность $\nu$ относительно $\mu \Leftrightarrow$:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \ \ \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом $0 \cdot \infty$ считается $= 0$.

*Пример* (отсутствие плотности). $X = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1, \mu = \lambda_1$

$\nu$ — одноточечная мера: $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$. Тогда $\nu(\{0\}) = 1$, но $\int_{\{0\}} \omega d\mu = 0$ — несостыковка.

Необходимое условие существования плотности — $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Это и достаточное условие по теореме Радона-Никодима[1].

*Доказательство теоремы критерий плотности.*

"$\Rightarrow$"

$$\nu(A) \overset{\text{def}}{=} \int_A \omega(x) d\mu(x)$$

$$\inf \omega \cdot \mu A = \int_A \inf \omega d\mu \le \int_A \omega(x) d\mu(x) \le \int_A \sup \omega d\mu = \sup \omega \cdot \mu A$$

"$\Leftarrow$" Рассмотрим $\omega > 0$. Общность не умаляется, т.к. пусть $e = X(\omega = 0)$, тогда $\nu(e) \overset{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$, поэтому в случае $A \cap e \ne \varnothing$ всё ещё только лучше.

Фиксируем число $q \in (0, 1)$.

$$A_j := A(q^j \le \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \overset{(??)}{\le} \nu A_j \overset{(??)}{\le} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \overset{(??)}{\le} \int_{A_j} \omega d\mu \overset{(??)}{\le} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &= q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\overset{(??)}{\le} \sum q^j \mu A_j \\ &\overset{(??)}{\le} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\overset{(??)}{\le} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\overset{(??)}{\le} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

[1] Возможно, мы разберём её в конце семестра.

То есть:

$$q\int_A \omega d\mu \le \nu A \le \frac{1}{q}\int_A \omega d\mu$$

Тогда предельный переход при $q \to 1-0$ дает искомое.

$\square$

**Лемма 3.**

- $f, g$ суммируемы
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде.

*Доказательство.* $h := f - g$. Дано: $\forall A \quad \int_A h = 0$; доказать: $h = 0$ почти везде.

$$A_+ := X(h \ge 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$
$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

$\square$

*Примечание.* Если $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, отображение $l_A : f \mapsto \int_A f$ есть линейный функционал. Таким образом, множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ разделяет точки, т.е. $\forall f \ne g \in \mathcal{L}(X) \;\; \exists A : l_A(f) \ne l_A(g)$

*Примечание.* В $\mathbb{R}^m$ $a = (a_1 \dots a_m)$, $l_a : x \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \;\; \exists a : l_a(x) =$ [2] $l_a(y)$.

# 4 Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$

**Лемма 4** (о мере образа малых кубических ячеек)**.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $O$ открыто

(??): по (??)
(??): по (??)
(??): по (??)
(??): по (??)

[2] Кажется, здесь должно быть “$\ne$”

- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется неравенство $\lambda\Phi(Q) < c\lambda Q$

*Примечание.* Здесь можно считать, что $Q$ — замкнутые кубы.

*Доказательство.* $L := \Phi'(a)$ — обратимо[3]

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x-a) + o(x-a)$$

$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o^{4}(x-a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^5}(a) \ \forall x \in B_\varepsilon(a) \ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a), a \in Q, Q$ — куб со стороной $h$.

При $x \in Q$:

$$|x - a| \leq \sqrt{m}h^6$$

$$|\Psi(x) - x| \overset{(??)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a| \leq \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$, т.к. при $x, y \in Q$

$$\begin{aligned} |\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\leq (1+2\varepsilon)h \end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

$\Psi$ и $\Phi$ отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем $\varepsilon$ такое, чтобы $|\det L|(1+2\varepsilon)^m < c$, потом берём $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ $\square$

[3] Т.к. $\det \Phi'(a) \neq 0$.
[4] Это не то же самое $o$, что строчкой выше.
[5] Это не радиус шара, а параметр.
[6] Это диагональ куба со стороной $h$ в $\mathbb{R}^m$.
(??): т.к. $x \in B_\varepsilon(a)$

**Лемма 5.**

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $O$ открыто
- $f$ непрерывна
- $A$ измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- $Q$ — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр.} \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

*Доказательство.* Упражнение. $\square$

**Теорема 19.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi$ диффеоморфизм

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \ \ \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

*Доказательство.*

*Обозначение.*

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера

Надо доказать, что $J_\Phi$ — плотность $\nu$ относительно $\lambda$.

Достаточно проверить условие теоремы критерий плотности, что $\forall$ измеримого $A$:

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \le \nu(A) \overset{(??)}{\le} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для $\Phi(A)$ и отображения $\Phi^{-1}$

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \le \lambda A$$

$$\lambda\Phi(A) \le \lambda A \cdot \frac{1}{\inf \frac{1}{|\det \Phi'|}}$$
$$\lambda\Phi(A) \le \lambda A \cdot \sup |\det \Phi'|$$

1. Проверяем (??) для случая $A$ — кубическая ячейка, $A \subset \overline{A} \subset O$

   От противного: $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

   Возьмём $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$.

   Запускаем половинное деление: режем $Q$ на $2^m$ более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую" ячейку $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на $2^m$ частей, берём $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и т.д.

   $a \in \bigcap \overline{Q}_i$

   $$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \qquad \forall n \;\; C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{5}$$

   $C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi$, в частности $c > |\det \Phi'(a)|$. Мы получили противоречие с леммой о мере образа малых кубических ячеек: в сколько угодно малой окрестности $a$ имеются кубы $\overline{Q}_n$, где выполнено (5)

2. Проверяем (??) для случая $A$ открыто.

   Это очевидно, т.к. $A = \bigsqcup Q_j, Q_j$ — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset A$

   $$\nu A = \sum \lambda Q_j \le \sum \lambda Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \le \sup_A J_\Phi \cdot \sum \lambda Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{6}$$

3. По лемме 5 неравенство (??) выполнено для всех измеримых $A$:

   $O = \bigsqcup Q_j$ — кубы $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset O$, $A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$

   $$\nu A_j \le \nu G \le \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \le \inf_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} J_\Phi \cdot \lambda A_j$$

   Аналогично формуле (6) получаем $\nu A \le \sup_A f \cdot \lambda A$

□

**Теорема 20.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi$ - диффеоморфизм

Тогда $\forall$ измеримой $f \geq 0$, заданной на $O' = \Phi(O)$:

$$\int_{O'} f(y)d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой $f$.

*Доказательство.* Применяем теорему о вычислении интеграла по взвешенному образу меры при $X = Y = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m, \mu = \lambda, \nu(A) = \lambda(\Phi(A))$:

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x))\omega(x)d\mu$$

По теореме 19 $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} J_\Phi d\lambda$, т.е. $\lambda$ — взвешенный образ исходной меры по отношению к $\Phi$. $\square$

*Пример.*

1. Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}^2$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \det\Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_\Omega f(x, y)d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r d\lambda_2$$

2. Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} \quad J_\Phi = r^2\cos\psi$$

$$\det\Phi' = r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi$$

# Лекция 6

# 22 марта

## 4.1 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

Координаты задаются $r, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}$. Зададим их по индукции:

- $\varphi_1$ — угол между $\overline{e}_1$ и $\overline{OX} \in [0, \pi]$
- $\varphi_2$ — угол между $\overline{e}_2$ и $P_{2_{(e_2 \dots e_n)}}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- $\varphi_{m-1}$ — полярный угол в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1} \\
x_n &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$

*Примечание.* В $\mathbb{R}^3$ "географические" координаты имеют якобиан $J = r^2 \cos \psi$

Поймём, почему якобиан именно такой. Можно его посчитать руками, но это трудно.

1 шаг

$$x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$$

$$(x_1 \dots x_m) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$$

$$J = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & J_2 \end{vmatrix} = \rho_{m-1}$$

2 шаг

$$\rho_{m-1} = \rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}$$
$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$$

$$(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$$

последний шаг

$$(x_1 \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$$

$$\rho_2 = r \sin \varphi_1$$
$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(\Omega) &= \int_\Omega 1 d\lambda_m \\
&\overset{1\text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \\
&\overset{2\text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \underbrace{\rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}}_{\text{замена } \rho_{m-1}} \cdot \underbrace{\rho_{m_2}}_{J} \\
&\overset{3\text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \underbrace{\rho_{m-3}^2 \sin^2 \varphi_{m-3}}_{\text{замена } \rho_{m-2}^2} \cdot \underbrace{\sin \varphi_{m-2}}_{\text{с прошлого шага}} \cdot \underbrace{\rho_{m_3}}_{J} \\
&= \dots \\
&= \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} d\lambda
\end{aligned}$$

Тогда по теореме о единственности плотности искомое верно.

# 5 Произведение мер

$\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой

**Лемма 6.** $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — полукольца $\Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ — полукольцо.

*Доказательство.* Тривиально. □

*Обозначение.* $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — называем **измеримыми прямоугольниками**.

$m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, при этом $0 \cdot \infty$ принимаем за $0$.

**Теорема 21.**

1. $m_0$ — мера на $\mathcal{P}$
2. $\mu, \nu$ — $\sigma$-конечны $\Rightarrow m_0$ тоже $\sigma$-конечно[1].

*Доказательство.*

1. Проверим счётную аддитивность $m_0$, т.е. $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k$[2], если $A \times B = P = \bigsqcup P_k$, где $P_k = A_k \times B_k$

   Заметим, что $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$.

   Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, где $\forall x \in X, y \in Y \;\; \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$

   Слева измеримая функция, справа — неотрицательный ряд $\Rightarrow$ можем интегрировать.

   Проинтегрируем по $y$ по мере $\nu$ по пространству $Y$:

   $$\chi_A(x)\nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

   Проинтегрируем по $x$ по мере $\mu$ по пространству $X$:

   $$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

   Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

   - $\mu$ $\sigma$-конечно $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k$ — конечно $\forall k$
   - $\nu$ $\sigma$-конечно $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n$ — конечно $\forall n$

   Тогда $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$. Конечное произведение конечных конечно, поэтому $m_0$ $\sigma$-конечно.

□

**Определение.**

- $\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой

[1] Т.е. пространство можно представить в виде счётного объединения множеств конечной меры.
[2] Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

- $\mu, \nu$ $\sigma$-конечны

Пусть $m$ — лебеговское продолжение меры $m_0$ на $\sigma$-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$[3]

*Обозначение.* $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ — **произведение пространств с мерой** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

*Примечание.*

- Это произведение ассоциативно.
- $\sigma$-конечность нужна для единственности произведения, которая выполняется по теореме о продолжении меры.

**Теорема 22.** $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$

*Доказательство.* Не будет. □

**Определение.** $X, Y$ — множества, $C \subset X \times Y$

$$\forall x \in X \ \ C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$
$$\forall y \in Y \ \ C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

$C_x, C^y$ называется **сечением**.

*Примечание.*

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup (C_\alpha)_x \quad \left(\bigcap C_\alpha\right)_x = \bigcap (C_\alpha)_x \quad (C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

**Теорема 23** (принцип Кавальери). [4]

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$ — $\sigma$-конечны.
- $\mu, \nu$ — полные.
- $m = \mu \times \nu$
- $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

[3] $\otimes$ — не тензорное произведение

[4] Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех $x$
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[5] функция на $X$
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для $C^y$.

*Пример.* ???

*Доказательство.* Пусть $\mathfrak{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1. $C = A \times B$, где $A$ и $B$ измеримы в соответствующих пространствах $\Rightarrow C \in \mathfrak{D}$, так как:
   (a) $C_x = \begin{cases} \varnothing, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases}$ и оба случая очевидно $\in \mathfrak{B}$
   (b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — функция $\nu B \cdot \chi_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in \mathfrak{D}$, дизъюнктны $\overset{?}{\Rightarrow} \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$. Обозначим $E = \bigsqcup E_i$

   $E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x$ измеримы почти везде $\Rightarrow$ при почти всех $x$ все $(E_i)_x$ измеримы.

   Тогда при этих $x$ $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$ по определению $\sigma$-алгебры — это 1.

   $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow$ Функция $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

   $\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)x = \sum_i mE_i = mE$ — это 3.
3. $E_i \in \mathfrak{D}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty$. Тогда $E \in \mathfrak{D}$.

   $\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x$ — конечно при почти всех $x$.

   $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$

   Тогда $E_x$ измеримо п.в. *(это 1.)* и $\lim_{i \to +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при п.в. $x$ — непрерывность сверху $\nu$.

   Таким образом, $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

   $\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ — это 3.

   По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $|\nu(E_i)x| \le \nu(E_i)x$ суммируемо.

[5] Функция задана при почти всех $X$; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду.

Итого: Если $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$. Строго говоря, мы это не доказали, т.к. ещё нужно упомянуть процесс дизъюнктнизации в полукольце и то, что пересечение множеств лежит в полукольце, следовательно любое пересечение можно свести к тому, которое мы рассматривали.

4. $E \subset X \times Y, mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

   $mE = \inf \{\sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P}\}$ — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

   $\exists$ множество $H$ вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$, т.е. пересечение аппроксимаций. По пункту 3 $H \in \mathfrak{D}$. При этом $E \subset H, mH = mE = 0$.

   $0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ про почти всех $x$.

   $E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow E_x$ — измеримо при почти всех $x$ — это 1 и $\nu E_x = 0$ почти везде, это 2.

   $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$ — это 3.

5. $C$ — $m$-измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in \mathfrak{D}$.

   $C = H \setminus e$, где $H$ имеет вид $\bigcap \bigcup P_{kl}, me = 0$. Почему? Из предыдущих соображений $C \subset H$, а нулевая мера $H \setminus C$ следует из того, что мера $C$ конечна. Как оно следует?

   $mC = mH - 0 = mH$

   (a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — оба "слагаемых" измеримы при почти всех $x$, т.к. $H_x$ по третьему пункту $\in \mathfrak{B}$, а $e_x$ измеримы по полноте $\nu$. В силу замкнутости по вычитанию $C_x \in \mathfrak{B}$ п.в.

   (b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu E_x = \nu H_x$ п.в. $\Rightarrow$ измеримо.

   (c) $\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. $C$ — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

   $X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$ по полноте обеих мер.

   $C = \bigsqcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{m(\dots) < +\infty}$, тогда по пункту 5 все элементы объединения $\in \mathfrak{D}$ и по пункту 2 объединение лежит в $\mathfrak{D}$.

$\square$

*Следствие* 23.1. $C$ измеримо в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \varnothing\}$ — проекция $C$ на $X$.

Если $P_1(C)$ измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Аналогично для проекции на $y$.

*Доказательство.* При $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$ $\square$

*Примечание.*

1. $C$ измеримо $\not\Rightarrow$ $P_1(C)$ измеримо.

   *Пример.* Пусть $C =$ ( неизмеримое множество в $X$) $\times \{y\}$, где $y$ — фиксированный элемент в $Y$. Тогда $C$ измеримо в $X \times Y$ и имеет меру $0$.

2. $C$ измеримо $\not\Rightarrow$ $\forall x$ $C_x$ измеримо.

   *Пример.* Пусть $C = \{\tilde{x}\} \times$ ( неизмеримое множество в $y$), где $\tilde{x}$ — фиксированный элемент в $X$. Тогда $C$ измеримо в $X \times Y$ и имеет меру $0$, но при этом $C_{\tilde{x}}$ неизмеримо.

3. $\forall x, \forall y$ $C_x, C^y$ измеримо $\not\Rightarrow$ $C$ измеримо.

   Пример Серпинского.

# Лекция 7

## 29 марта

*Следствие* 23.2.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- $f$ непрерывно

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

*Доказательство.* Рассмотрим случай $f > 0$. $C = \text{ПГ}$[1]$(f, [a, b])$ — измеримое в $\mathbb{R}^2$ множество. Доказать это — упражнение.

$C_x = [0, f(x)]$, $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\text{ПГ}) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

*Примечание.*

- $\lambda_2$ можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением конечной аддитивности и это продолжение можно сделать не единственным образом.
- Для $\lambda_m, m > 2$ аналогичным образом продолжить невозможно.

Для обоих случаев требуется инвариантность меры относительно движения $\mathbb{R}^m$.

В множествах размерности $> 2$ действует парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского, вследствие чего аддитивность невозможна.

**Определение.**

[1] подграфик

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in X \;\; f_x$ — функция $f_x(y) = f(x, y)$

$\forall y \in Y \;\; f_y$ — функция $f_y(x) = f(x, y)$

**Теорема 24** (Тонелли)**.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$ — $\sigma$-конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$ измеримо относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. При почти всех $x$ $f_x$ измерима на $Y$.
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измерима[2] на $X$
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Аналогичные утверждения верны, если поменять местами $X$ и $Y$:

1. $f^y$ измеримо на $X$ почти везде.
2. $y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$ — измерима[3] на $Y$
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

*Доказательство.*

1. $f = \chi_{C_x}, C \subset X \times Y$, измеримо. Тогда $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$

   $C_x$ измеримо при почти всех $x$ по принцип Кавальери $\Rightarrow$ $f_x$ измеримо при почти всех $x$

   $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$ — измеримая[4] функция по принцип Кавальери

[2] почти везде
[3] почти везде
[4] почти везде

$$\int_X \varphi(x)d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \overset{(??)}{=} mC = \int_{X\times Y} f dm$$

2. $f$ — ступенчатая, $f \geq 0, f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{C_k}, f_x = \sum \alpha_k \chi_{(C_k)_x}$ — измеримо почти везде.

   $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x$ — измерима[5]

$$\int_X \varphi(x) = \sum \int_X \alpha_k \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k m C_k = \int_{X\times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$, измеримо.

   $f = \lim g_n, g_n \uparrow f, g_n \geq 0$, ступенчатые

   $f_x = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ — измеримо на $y$ по теореме об измеримости пределов.

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \overset{(??)}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)} \implies \varphi \text{ — измерима}^{6}$$

   $\varphi_n(x)$ измерима почти везде по пункту 2, поэтому $\varphi$ измерима почти везде.

$$\int_X \varphi(x) \overset{(??)}{=} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X\times Y} g_n \overset{(??)}{=} \int_{X\times Y} f dm$$

□

*Следствие* 24.1. Если в условиях теоремы Тонелли $C \subset X \times Y, P_1(C)$ измеримо, то $\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

*Доказательство.* Очевидно, т.к. вместо $f$ можно взять $f \cdot \chi_C$ □

**Теорема 25** (Фубини).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$ — $\sigma$-конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$

(??): по принцип Кавальери

[5] почти везде

(??), (??), (??): по теореме Леви

- $f$ — суммируемо на $X \times Y$

Тогда:

1. $f_x$ — суммируема на $Y$ при почти всех $x$
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ — суммируема на $Y$
3. $\int_{X\times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$

*Доказательство.* Слишком неинтересно.

Общий подход: берём $f_+$ и $f_-$. $\square$

***Пример.*** $B(s,t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx,\ s,t > 0.$

Тогда $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{t-1}e^{-x}e^{-y}dy\right)dx \\
y := u - x \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx \\
&= \int \ldots d\lambda_2 \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\right)du \\
x := u \cdot v \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1} (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1}e^{-u}\cdot udv\right)du \\
&= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}\left(\int_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv\right)du \\
&= B(s,t)\Gamma(s+t)
\end{aligned}$$

$\square$

***Пример*** (Объём[7] шара в $\mathbb{R}^m$). $\alpha_m := \lambda_m(B(0,1)), \lambda_m(B(0,r)) = r^m \cdot \alpha_m$ — получается заменой координат.

[7] на самом деле мера

$$B(0,1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le 1 \right\}$$

$$B(0,1)_{x_m} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \le 1 - x_m^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \int_{-1}^{1} \lambda_{m-1} \left( B\left(0, \sqrt{1-y^2}\right) \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \alpha_{m-1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\
&= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= B\left( \frac{m+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \alpha_{m-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \alpha_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \underbrace{\alpha_1}_{=2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)^{m-1}} \cdot 2 \\
&= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

В случае $m = 3$ $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$

*Примечание.*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{I}$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

Переход в полярные координаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\\
&\vdots\\
x_{m-1} &= r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{m-1}\\
x_m &= r\sin\varphi_1\ldots\cos\varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(B(0,R)) &= \int_{B(0,R)} 1 d\lambda_m\\
&= \int_0^R dr\int_0^\pi d\varphi_1\int_0^\pi d\varphi_2\cdots\int_0^\pi d\varphi_{m-2}\int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1}\cdot r^{m-1}\cdot\sin^{m-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{m-2}\\
&\overset{\text{по (7)}}{=} 2\pi\frac{R^m}{m}\prod_{k=1}^{m-2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}\\
&= \pi\frac{R^m}{m}\frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)}\\
&\overset{(??)}{=} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}R^m}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin^k\alpha d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} t=\sin^2\alpha\\ dt=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt\end{bmatrix} = B\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

Мы потеряли двойку в (??).

# 6 Поверхностный интеграл

## 6.1 Поверхностный интеграл I рода

**Определение.**

- $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие
- $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация $M$, т.е. $\varphi(G) = M$

$E \subset M$ — **измеримо по Лебегу**, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу.

*Обозначение.* $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M : E \text{ изм.}\} = \{\varphi(A), A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

**Определение** (Мера на $\mathfrak{A}_M$)**.**

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| dudv$$

т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении $\varphi$.

*Примечание.*

1. $\mathfrak{A}_m$ — $\sigma$-алебра, $S$ — мера.
2. $E \subset M$ — компакт $\Rightarrow \varphi^{-1}(E)$ — компакт, т.к. непрерывный образ компакта компактен $\Rightarrow$ измерим $\Rightarrow$ замкнутые множества измеримы $\Rightarrow$ открытые относительно $M$ множества измеримы, т.к. их дополнения замкнуты и следовательно измеримы, а также $\sigma$-алгебра замкнута по дополнению.
3. $\mathfrak{A}_m$ не зависит от параметризации $\varphi$ по теореме о двух параметризациях[8].
4. $S$ не зависит от $\varphi$![9]

$$\begin{aligned}
|\vec{\varphi}'_s \times \vec{\varphi}'_t| &= |(\vec{\varphi}'_u \cdot u'_s + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_s) \times (\vec{\varphi}'_i \cdot u'_t + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_t)| \\
&= |\overrightarrow{(\varphi'_u \times \varphi'_v)}(u'_s v'_t - v'_s u'_t)| \\
&= |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot |\det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_u \end{pmatrix}|
\end{aligned}$$

5. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, если $M(f < a)$ измеримо относительно $\mathfrak{A}_m$, что в свою очередь $\Leftrightarrow M(f \circ \varphi < a)$ измеримо относительно $\mathfrak{M}^2$.

   $f$ измеримо относительно $\mathfrak{A}_m \Leftrightarrow f \circ \varphi$ измеримо относительно $\mathfrak{M}^2$.

**Определение** (поверхностный интеграл первого рода)**.**

[8] Которая гласит, что треугольник коммутирует.
[9] Это восклицательный знак, а не факториал.

- $M$ — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$
- $\varphi$ — параметризация $M$
- $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемо по мере $S$ на $M$

Тогда $\iint_M f dS = \iint_M f(x,y,z) dS$ называется **интегралом первого рода** от $f$ по многообразию $M$.

*Примечание.* Как вычислять этот интеграл? По теореме о вычислении интеграла по взвешенному образу меры:

$$\iint_M f dS = \iint_G f(\varphi(u,v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{vmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin\alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 |\varphi'_v|^2 (1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$
$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

*Пример.* $M$ — график функции $f = \{(x,y,z) : (x,y) \in G, z = f(x,y)\}$

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \quad \varphi'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \quad \varphi'_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}$$
$$\iint_M g dS = \iint_G g(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy$$

# Лекция 8

# 5 апреля

**Определение.** $M \subset \mathbb{R}^3$ — **кусочно-гладкое двумерное многообразие**, если $M$ — конечное объединение:

- Простых гладких многообразий $M_i$
- Гладких кривых
- Точек

**Определение.** $E \subset M$ измеримо, если $E \cap M_i$ измеримо.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

## 6.2 Поверхностный интеграл II рода

*Обозначение.* Будем называть простое двумерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^3$ поверхностью.

**Определение. Сторона поверхности** есть непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности.

Для поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ сторона есть отображение

$$W : M \to \mathbb{R}^3 \quad \forall x \ \ |W(x)| = 1, W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$$

*Примечание.* Локально каждая поверхность двусторонняя. В общем случае сторон либо две, либо одна *(лента Мёбиуса)*. Для поверхностей с одной стороной нельзя задать сторону поверхности. Формально мы это не доказали и это требует трюков с топологией. В $\mathbb{R}^4$

можно сделать дырку в окружности и заткнуть её лентой Мёбиуса и тогда всё станет совсем странно.

*Пример.* График функции $z(x, y)$.

$$\Phi : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Phi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix}$$

$$n := \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_0 = \pm \begin{pmatrix} -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \\ -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \end{pmatrix}$$

Другие способы задания стороны:

1. $u, v$ — касательные непараллельные вектора к $M$. Тогда $(u, v)$ будем называть **касательным репéром**. Нормаль в таком случае можно восстановить векторным произведением $u \times v$. После нормировки по полю реперов мы получаем поле единичных нормалей, т.е. сторону поверхности.

2. Пусть задана петля и задано направление движения, то бишь **ориентированный контур**. Тогда с помощью гомотопий его можно стянуть в любую точку нашего многообразия $M$. Заметим, что направление движения на самом деле задаёт два вектора — касательный вектор и вектор нормали “внутрь” петли. Тогда мы по ориентированному контуру получим поле касательных реперов, а следовательно зададим и сторону поверхности.

**Определение.**

- $M$ — поверхность в $\mathbb{R}^3$
- $n_0$ — сторона
- $\gamma$ — контур *(петля)* в $M$, ориентированная
- $N_{\text{внутр.}}$ — вектор нормали, направленный внутрь петли

Говорят, что сторона поверхности $n_0$ согласована с ориентацией $\gamma$, если:

$$(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$$

Т.е. если ориентация $\gamma$ задаёт сторону $n_0$.

**Определение** (интеграл II рода).

- $M$ — простое двумерное гладкое многообразие
- $n_0$ — сторона $M$
- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — непрерывное векторное поле

Тогда $\int_M \langle F, n_0 \rangle \, dS$ — **интеграл II рода** векторного поля $F$ по поверхности $M$.

*Примечание.*

- Смена стороны = смена знака
- Не зависит от параметризации
- $F = (P, Q, R)$, тогда интеграл обозначается $\iint_M Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$
- $\Phi$ - параметризация, $n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$ - нормирование

  Пусть $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{aligned}
\int_M \langle F, n_0 \rangle \, ds &= \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| dudv \\
&= \int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\substack{\text{смешанное} \\ \text{произведение: (8)}}} dudv \\
&= \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv
\end{aligned}$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \begin{vmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{vmatrix} \tag{8}$$

Сторона поверхности учитывается в порядке переменных $u, v$.

*Пример.* Рассмотрим график функции $z(x, y)$ над областью $G$ по верхней стороне.

$$n_0 = \left( -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \right)$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_z} Rdxdy &= \int_{\Gamma_z} 0dydz + 0dzdx + R(x,y,z)dxdy \\
&\overset{\text{def}}{=} \iint_{\Gamma_z} R(x,y,z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} dS \\
&= \iint_G R(x,y,z(x,y))dxdy \\
&= \iint_G Rdxdy
\end{aligned}
$$

Т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции.

*Следствие.* $V \subset \mathbb{R}^3$, $M = \partial^1 V$ — гладкая двумерная поверхность, $n_0$ — внешняя нормаль.

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} zdxdy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

*Следствие.* $\Omega$ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $M$ — цилиндр над $\Omega$, т.е. $M = \Omega \times [z_0, z_1]$

Тогда $\int_M Rdxdy = 0$ по любой стороне.

*Доказательство.* $n_0 \perp (0,0,R)$ □

# 7 Ряды Фурье

## 7.1 Пространства $L^p$

1. 
   - $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
   - $f : X \to \mathbb{C}$, т.е. $x = f(x) = u(x) + iv(x), u = \Re f, v = \Im f$

   $f$ **измеримо**, если $u$ и $v$ измеримы[2].

   $f$ **суммируемо**, если $u$ и $v$ суммируемы.

   Если $f$ суммируемо, то $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

   *Упражнение* 6.
   $$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

2. Неравенство Гёльдера.
   - $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

[1] Это не дифференциал, а граница.
[2] Или измеримы почти везде.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E$ — измеримо
- $f, g : E \to \mathbb{C}$
- $f, g$ — измеримы

Тогда $\int_E |fg| d\mu \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

*Доказательство.* Не будет, но общая идея следующая:

(a) Для ступенчатых функций — из неравенства Гёльдера для сумм[3]

(b) Для суммируемых функций — по теореме Леви.

□

3. Неравенство Минковского.

   В тех же условиях $\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

   *Доказательство.* Не будет, можно вывести аналогично выводу во втором семестре.

   □

   *Примечание.* Для $p = 1$ тоже верно.

4. Определение пространства $L^p, 1 \le p < +\infty$

   - $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
   - $E \subset X$ — измеримо.

   $\mathcal{L}^p(E, \mu) := \{f :$ почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}$[4]$), f$ — изм.[5], $\int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$ — это линейное пространство по неравенству Минковского.

   Зададим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathcal{L}^p(E, \mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ почти везде.

   $\mathcal{L}^p/_\sim = L^p(E, \mu)$ — линейное пространство.

   Задаём норму на $L^p$: $||f||_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, обозначается $||f||_p$

   Эта функция корректно определена, т.к. для $f \sim g : ||f||_p = ||g||_p$. Кроме того, она является нормой, т.к.:

   (a) $||f||_p \ge 0$ — очевидно, т.к. $\int |f|^p \ge 0$

   (b) $||f||_p = 0 \Rightarrow \int |f|^p = 0 \Rightarrow \int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow f \sim 0$.

[3] Мы его рассматривали во втором семестре.
[4] $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
[5] Или измерима почти везде.

(c) $||f \cdot \alpha||_p = \left(\int |f \cdot \alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \cdot ||f||_p$

(d) $||f + g||_p = ||f||_p + ||g||_p$ по неравенству Минковского.

5. $L^\infty(E, \mu)$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
- $E \subset X$ — измеримо.
- $f$ : почти везде на $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо

**Определение** (существенный супремум[6]).

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}}, f \leq A \text{ почти везде}\}$$

При этом $A$ называется существенной вещественной границей.

*Свойства.*

- ess sup $f \leq \sup f$ — очевидно.
- $f \leq$ ess sup $f$ почти везде — пусть $B =$ ess sup $f$, тогда $\forall n \;\; f \leq B + \frac{1}{n}$ почти везде.
- $f$ — суммируемо, $f, g$ — почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, ess sup$_E |g| < +\infty$. Тогда $|\int_E fg| \leq$ ess sup $|g| \cdot \int_E |f|$

  *Доказательство.*

  $$\left|\int_E fg\right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \text{ess sup}\, |g| \cdot |f| = \text{ess sup}\, |g| \cdot \int_E |f| \tag{9}$$

  □

$L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{почти везде } E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), \text{ изм., ess sup}\, |f| < +\infty\}/_\sim$ — линейное пространство.

$||f||_{L^\infty(E,\mu)} :=$ ess sup$_E |f| = ||f||_\infty$

*Примечание.*

(a) В новых обозначениях неравенство Гёльдера: $||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$ — здесь можно брать $p = 1, q = +\infty$ — это (9).

(b) $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечно, если $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow$ можно считать, что $f$ задана всюду на $E$ и всюду конечна.

[6] Также называется истинным супремумом

# Лекция 9

# 12 апреля

В третьем семестре у нас был криволинейный интеграл функции и векторного поля вдоль кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$:

$$\int_\gamma f \underbrace{dS}_{|\gamma'| dt} \qquad \int \langle F, \gamma' \rangle \, dt$$

Мера на кривой, т.е. гладком одномерном многообразии, с параметризацией $\gamma$, является мерой Лебега в $\mathbb{R}^1$ с весом $|\gamma'|$. Такой интеграл — первого рода.

В общем случае интеграл II рода по $m-1$-мерной поверхности в $\mathbb{R}^m$ от векторного поля $F$ есть: $\int \langle F, n_0 \rangle \, dS_{m-1}$

**Определение** (мера Лебега на $k$-мерном многообразии в $\mathbb{R}^m$)**.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\exists \Phi_1' \dots \Phi_k'$

$\lambda_k(\text{ПРЛП}(\Phi_1' \dots \Phi_k'))$[1] — это и будет плотность меры.

## 8 Формула Грина

**Теорема 26** (формула грина)**.**

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное[2], ограниченное множество.
- $D$ ограничено кусочно-гладкой кривой $\partial D$
- $(P, Q)$ — гладкое векторное поле в окрестности $D$

[1] Объём параллелепипеда на этих векторах
[2] Любая петля стягиваема

Пусть $\partial D$ ориентирована согласованно с ориентацией $D$ *(против часовой стрелки)* — обозначим $\partial D^+$. Тогда:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy$$

*Доказательство.* Ограничимся случаем $D$ — “криволинейный четырёхугольник”.

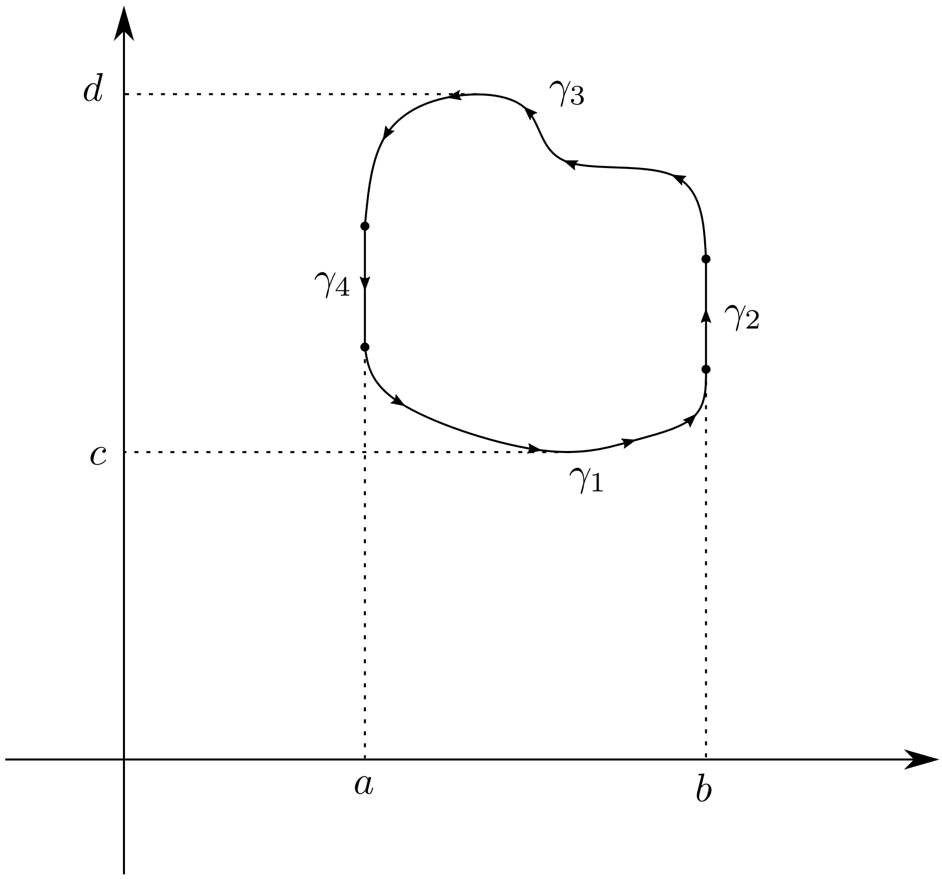



Рис. 9.1: Криволинейный четырёхугольник с $\partial D$

$\partial D$ состоит из путей $\gamma_1 \dots \gamma_4$, где $\gamma_2$ и $\gamma_4$ — вертикальные отрезки[3], $\gamma_1$ и $\gamma_3$ — гладкие кривые — можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$.

Аналогично можно описать $\partial D$ по отрезкам, параллельным оси $OY$.

Проверим, что $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + 0dy$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

[3] Возможно, вырожденные

$$= -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x))dx$$

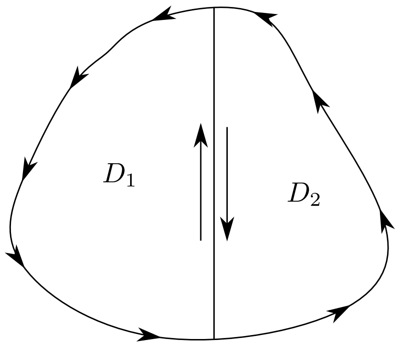
$$\int_{\partial D^+} Pdx + 0dy = \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_{0}$$

$$= \int_a^b P(x, \gamma_1(x))dx - \int_a^b P(x, \gamma_3(x))dx$$

Таким образом, искомое доказано. □

*Примечание.* Теорема верна для любой области $D$ с кусочно-гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные четырёхугольники.

Такой разрез — безобидное действие, которое можно выполнить вертикальным разрезанием по середине:




Кажется, такими разрезами можно достичь искомого в любой области, но мы не будем это утверждать.

**Теорема 27** (формула Стокса)**.**

- $\Omega$ — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ *(двустороннее)*
- $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация $\Omega$
- $L^+$ – граница $G$
- $n_0$ — сторона $\Omega$
- $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — кривая с согласованной ориентацией
- $(P, Q, R)$ — гладкое векторное поле в окрестности $\Omega$

Тогда:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

*Примечание.* $dxdy = -dydx, dxdx = 0$

$$dPdx + dQdy + dRdz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + \dots$$

*Доказательство.* Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$, т.е. параметризация $\Omega$ дважды гладко дифференцируема.

Достаточно показать, что:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Пусть $\Phi = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Запараметризуем $L^+$ как $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (u(t), v(t))$. Тогда $\Phi \circ \gamma$ — параметризация $\partial\Omega^+$. Тогда $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_{L^+} P\left(\frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v'\right) dt \\
&= \int_{L^+} P\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \\
&\overset{(??)}{=} \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv \\
&\overset{(??)}{=} \iint_G (\cancel{P'_x x'_u} + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + \cancel{P \cdot x''_{uv}} - (\cancel{P'_x x'_v} + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u - \cancel{P x''_{uv}} dudv \\
&= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv \\
&= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial x} dxdy
\end{aligned}$$

□

# 9 Ряды Фурье *(возвращение)*

**Теорема 28.**

(??): по формула грина
(??): это дифференцирование произведения

- $\mu E < +\infty$
- $1 \le s < r \le +\infty$

Тогда:

1. $L^r(E,\mu) \subset L^s(E,\mu)$
2. $||f||_s \le \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$

*Доказательство.* 1 следует из 2, т.к. если $f \in L^r(E,\mu)$, то $||f||_s$ конечно. Докажем 2.

При $r = \infty$ очевидно:

$$\left(\int_E |f|^S d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \text{ess sup}\,|f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

При $r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}, q := \frac{r}{r-s}$

$$\begin{aligned} ||f||_s^s &= \int_E |f|^s d\mu \\ &= \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \\ &\le \left(\int_E |f|^{s\cdot\frac{r}{s}} d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\le ||f||_r^s \mu E^{1-\frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

*Следствие* 28.1. $\mu E < +\infty, 1 \le s, r \le +\infty, f_n \xrightarrow{L^r} f$. Тогда $f_n \xrightarrow{L^s} f$

*Доказательство.* $||f_n - f||_s \le \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot ||f_n - f||_r \to 0$ □

**Теорема 29** (о сходиомсти в $L^p$ и по мере)**.**

- $1 \le p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X,\mu)$

Тогда

1. $f \in L^p, f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
2. - $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо $f_n \to f$ п.в.)
   - $|f_n| \le g$

- $g \in L^p$

Тогда $f \in L^p$ и $f_n \to f$ в $L^p$

*Доказательство.*

1. Пусть $X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} ||f_n - f||_p^p \to 0$$

2. Пусть $f_n \rightrightarrows f$. Тогда по теореме Рисса $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде. $|f| \leq g$ почти везде. $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ — суммируема, т.к. $g \in L^p$.

$$||f_n - f||_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

## 9.1 Напоминание

- Фундаментальная последовательность : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k, n > N \ ||f_n - f_k|| < \varepsilon$, т.е. $||f_n - f_k|| \xrightarrow{n,k \to +\infty} 0$
- $f_n \to f \Rightarrow (f_n)$ — фундаментальная, т.к. $||f_n - f_k|| \leq \underbrace{||f_n - f||}_{\to 0} + \underbrace{||f - f_k||}_{\to 0}$
- $C(K)$ — пространство непрерывных функций на компакте $K$.

  $||f|| = \max_K |f|$. Утверждение: $C(K)$ — полное, т.е. любая фундаментальная последовательность сходится.

*Упражнение* 7. $L^\infty(X, \mu)$ — полное

**Теорема 30.** $L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$ — полное.

*Доказательство.* Рассмотрим $f_n$ — фундаментальную. Куда бы она могла сходиться?

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\exists N_1 \ \forall n_1, k > N_1 \ ||f_{n_1} - f_k||_p < \frac{1}{2}$. Зафиксируем какой-либо $n_1$.

Аналогично для $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

В общем случае $\sum_k ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \sum_k \frac{1}{2^k} = 1$. Рассмотрим ряд $S(x) = \sum |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, S(x) \in [0, +\infty]$ и его частичные суммы $S_N$.

$$||S_N||_p \leq \sum_{k=1}^{N} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < 1$$

Таким образом, $\int_X S_N^p < 1$. По теореме Фату $\int_X S^p d\mu < 1$, т.е. $S^p$ — суммируемо $\Rightarrow S$ почти везде конечно.

$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ — его частичные суммы это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. сходимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Таким образом, кандидат — $f$. Проверим, что $||f_n - f||_p \to 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m,n > N \ \ ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$$

Берём $m = n_k > N$.

$$||f_n - f_{n_k}||_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Это выполнено при всех достаточно больших $k$. Тогда по теореме Фату $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$, т.е. $||f_n - f||_p < \varepsilon$. □

**Определение.** $Y$ — метрическое пространство, $A \subset Y$, $A$ — ***(всюду)* плотно** в $Y$, если:

$$\forall y \in Y \ \ \forall U(y) \ \ \exists a \in A : a \in U(y)$$

*Пример.* $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

**Лемма 7.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций *(из $L^p$)* плотно в $L^p$.

*Доказательство.*

1. $p = \infty$

   $\lhd f \in L^\infty$. Изменив $f$ на множестве меры $0$, считаем, что $|f| \leq ||f||_\infty$, т.к. $f > A$ на множестве меры $0$.

   Тогда из доказательство теоремы о характеризации неотрицательных функций с помощью ступенчатых $\exists$ ступенчатые функции $\varphi_n$, такие что $0 \leq \varphi_n \rightrightarrows f^+$ и $\psi_n$, такие что $0 \leq \psi_n \rightrightarrows f^-$

   Тогда сколь угодно близко к $f$ можно найти ступенчатую функцию вида $\varphi_n + \psi_n$, т.е. $|f - \varphi_n - \psi_n| \leq \frac{1}{n}$, что и требовалось показать.

2. $p < +\infty$. Пусть $f \geq 0$.

   $\exists \varphi_n \geq 0$ ступенчатые : $\varphi_n \uparrow f$

$$||\varphi_n - f||_p^p = \int_X \underbrace{|\varphi_n - f|^p}_{\leq |f|^p \text{ — мажоранта}} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

Если $f$ любого знака, то при рассмотрении срезок искомое очевидно.

$\square$

*Примечание.* $\varphi \in L^p$ — ступенчатая $\Rightarrow \mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$

**Определение.** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0, r) : f \equiv 0$ вне $B(0, r)$.

*Обозначение.* $C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции

Очевидно, что $\forall p \geq 1 \;\; C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

**Определение.** Топологическое пространство $X$ **нормальное**, если:

1. Точки $X$ суть замкнутые множества
2. $\forall F_1, F_2 \subset X$ — замкнутых[4], тогда $\exists U(F_1), U(F_2)$ — открыты, $U(F_1) \cap U(F_2) = \varnothing$

Загадка: $\mathbb{R}^m$ — нормальные.[5]

[4] И непересекающихся, но это не было сказано на лекции.

[5] Если очень хочется, то здесь можно почитать доказательство того, что все метрические пространства *(коим $\mathbb{R}^m$ является)* нормальные.

# Лекция 10

# 19 апреля

## 10 Формула Остроградского

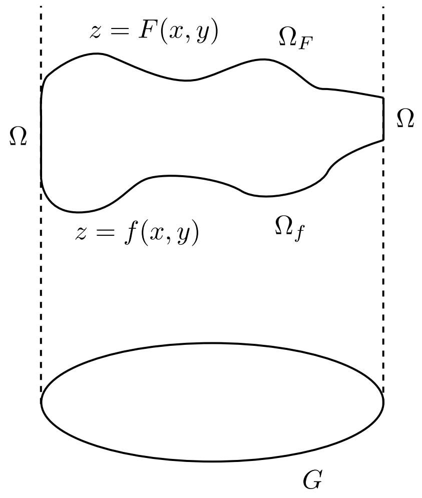
**Теорема 31** (Формула Остроградского)**.**

- $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2 \;\; f(x, y) \le z \le F(x, y)\}$
- $G$ — компакт
- $\partial G$ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- $R$ : окрестность $V \to \mathbb{R}, R \in C^1$

Тогда
$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} Rdxdy = \iint_{\partial V} 0dydz + 0dzdx + Rdxdy$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dxdy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\
&= \iint_G R(x, y, F(x, y))dxdy - \iint_G R(x, y, f(x, y))dxdy \\
&= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z)dxdy \overset{(??)}{+} \iint_{\Omega_f} Rdxdy + \underbrace{\iint_\Omega Rdxdy}_{0} \\
&= \iint_{\partial V} Rdxdy
\end{aligned}$$




□

*Следствие* 31.1 (обощенная формула Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

**Определение.** $V$ — гладкое векторное поле. Тогда **дивергенция** $\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Наблюдение:

$$\operatorname{div} V(a) \overset{(??)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V dxdydz \overset{(??)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, n_0 \rangle \, dS$$

— не зависит от координат.

Физический смысл — мы измеряем поток воды и обнаруживаем, что поток по замкнутой поверхности пропадает или же появляется. Тогда $\operatorname{div} V$ — мера[1] интенсивности стока/истока.

*Следствие* 31.2. $l \in \mathbb{R}^3, f \in C^1(\text{окр.}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dxdydz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle l, n_0 \rangle \, dS$$

*Доказательство.* Загадка. □

**Определение. Ротор *(вихрь)***

$$\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

(??): "-" спрятан в нормали, направленной вниз.
(??): по непрерывности div
(??): по формуле Стокса
[1] Не та, что в теории меры; "измерение"

Аналогично можно определить ротор:

$$\operatorname{rot} F(a) = \lim_{\Omega \to x_0} \frac{1}{S(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} A, n_0 \rangle \, dS$$

*Примечание.* Поле $V = (P, Q, R)$ — потенциально $\Leftrightarrow \exists f : V = \nabla f$. По теореме Пуанкаре при $\Omega$ — односвязной: $V$ — потенциально $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$, т.к. $\operatorname{rot}(\nabla f) \equiv 0$

**Определение.** Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если $\exists$ гладкое векторное поле $B$ в $\Omega$, такое что $A = \operatorname{rot} B$.

**Теорема 32** (Пуанкаре$'$)**.**

- $\Omega$ — открытый параллелепипед
- $A$ — векторное поле в $\Omega$
- $A \in C^1$

Тогда $A$ — соленоидально $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ $\operatorname{div}\ \operatorname{rot} B \equiv 0$, что всегда выполнено.

$\Leftarrow$ Дано:

$$A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0 \tag{10}$$

Найдём векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, где $A = \operatorname{rot} B$.

Пусть $B_3 \equiv 0$.

$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

$$-B'_{2z} = A_1 \tag{11}$$

$$-B'_{1z} = A_2 \tag{12}$$

$$B'_{2x} - B'_{2y} = A_3 \tag{13}$$

$$(12) \quad B_1 = \int_{z_0}^{z} A_2 dz$$

$$(11) \quad B_2 = -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$$

$$(13)\quad A_3 = -\int_{z_0}^{z} A'_{1x}dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A'_{2y}dz$$

По (10):

$$\int_{z_0}^{z} A'_{3z} + \varphi'_x = A_3$$
$$A_3(x,y,z) - A_3(x,y,z_0) + \varphi'_x = A_3(x,y,z)$$
$$\varphi'_x = A_3(x,y,z_0)$$

Отсюда найдём $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x,y,z_0)dx$

□

**Лемма 8** (Урысона)**.**

- $X$ нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутые
- $F_0 \cap F_1 = \varnothing$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ непрерывное, $0 \le f \le 1$, $f\Big|_{F_0} \equiv 0$, $f\Big|_{F_1} \equiv 1$

*Доказательство.* Переформулируем нормальность: если $F \subset G$, $F$ замкнутое, $G$ открытое, то $\exists U(F)$ — открытое, такое что $F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$. Почему это нормальность? Первое замкнутое множество — $F$, а второе замкнутое — $G^c$.

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^c \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^c}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}}$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом, $\forall$ двоично рациональной $\alpha \in [0,1]$ задаётся открытое множество $G_\alpha$.

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональная } : x \in G_\alpha\}$$

$f$ — непрерывно $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $f^{-1}(a,b)$ — всегда открыто.

Достаточно проверить:

1. $\forall b \;\; f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a \;\; f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

, так как:

$$f^{-1}(a,b) = f^{-1}(-\infty,b) \setminus f^{-1}(-\infty,a]$$

1. $f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup\limits_{\substack{q<b \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q$ — открыто. Почему это так?

   $f^{-1}(-\infty,b) \subset \bigcup$, т.к. $f(x) = b_0 < b$. Возьмём $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

   $f^{-1}(-\infty,b) \supset \bigcup$ очевидно, т.к. при $x \in G_q \;\; f(x) \leq q < b$.

2. $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q>a} G_q = \bigcap_{q>a} \overline{G_q}$ — замкнуто

   $(\supset)$ — тривиально

   $(\subset)$ Для двоично рациональных $q, r$:

$$\bigcap_{\substack{q>a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

   , так как $\forall \alpha < \beta : G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$ по построению.

□

**Теорема 33.**

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_m)$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_m)$, $1 \leq p < +\infty$ множество непрерывных финитных функция плотно.

*Доказательство.* По уже доказанной теореме множество ступенчатых функций плотно в $L^p(E, \lambda_m)$. Достаточно научиться приближать характеристические функции финитными, т.е.:

$$\forall A - \text{огр. } \exists f - \text{финитная непрерывная} : ||f - \chi_A||_p < \varepsilon$$

Тогда можно будет приближать ступенчатые функции финитными, а следовательно искомое будет верно.

По регулярности меры лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{F}_{\text{замкн.}} \subset A \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}} \ \lambda_m(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists$ непрерывное $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$: $f\Big|_F \equiv 1, f\Big|_{G^c} \equiv 0$

$$||f - \chi_A||_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \chi_A|^p d\lambda_m = \int_{G \setminus F} |f - \chi_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_m(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

*Примечание.* При $p = +\infty$ утверждение теоремы неверно!

*Упражнение* 8. $\lhd L^{+\infty}(\mathbb{R}, \lambda), B(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2})$ не содержит непрерывных функций, т.к. $\sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| \geq \max(\lim_{x \to a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \to a-0} |f(x) - \chi_A|) \geq \frac{1}{2}$.

В $L^p(E, \lambda_m)$ плотны:

- Линейные комбинации характеристических функций ячеек
- Гладкие финитные функции
- Рациональные линейные комбинации характеристических функций рациональных ячеек, а это множество счётно.
- Непрерывные функции

Вопрос: что-либо из упомянутого плотно ли в $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$?

Ответ не совсем на этот вопрос: в $L^{+\infty}$ нет счётного плотного множества, зато конечные линейные комбинации характеристических функций плотны.

# Лекция 11

# 26 апреля

*Соглашение.* $L^p[0,T], T \in \mathbb{R}$ можно понимать как пространство $T$-периодических функций, т.е. $\forall x \;\; f(x) = f(x+T)$.

Удобство: $\int_0^{\mathsf{T}} f = \int_a^{a+T} f$.

*Соглашение.* $f \in C[a,b] \Rightarrow ||f|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

$\widetilde{C}[0,T]$ — непрерывные $T$-периодические функции.

- $f \in C[0,T]$ или $f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна по теореме Кантора о непрерывной на компакте функции.
- В $L^p[0,T]$ функции из $\widetilde{C}$ образуют плотное множество.

Линейная функция на $L^p(X,\mu)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Берём $g \in L^q(x,\mu)$ и строим отображение $L^p \to \mathbb{R}$, $\alpha : f \mapsto \int_X fgd\mu$. Нам известно неравенство $|\int_X fg| \le (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^p)^{\frac{1}{q}}$, поэтому интеграл конечен. Несложно заметить, что $\alpha$ действительно линейно. Непрерывно ли $\alpha$? Сходится ли $\alpha(f_n)$ к $\alpha(f)$? Да, т.к.:

$$|\alpha(f_n) - \alpha(f)| = \left| \int_X (f_n - f) \cdot g \right| \le ||f_n - f||_p \cdot ||g||_q$$

**Определение.**

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) := f(x+h)$ — сдвиг.

**Теорема 34** (о непрерывности сдвига).

1. $f$ — равномерно непрерывно на $\mathbb{R}^m$. Тогда $||f_h - f||_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$[1]
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m), 1 \le p < +\infty$. Тогда $||f_h - f||_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
3. $f \in \widetilde{C}[0,T]$. Тогда $||f_h - f||_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$[2]
4. $1 \le p < +\infty, f \in L^p[0,T] \Rightarrow ||f_h - f||_p \to 0$

*Примечание.*

1. Для $L^\infty$ непрерывности сдвига нет: $f = \chi_{[0,1]}, f_n = \chi_{[-h,1-h]}$, ess sup $|f - f_n| = 1$
2. В случаях 2 и 4 $h \mapsto ||f_h - f||_p$ непрерывно в нуле $\Rightarrow$ непрерывно всюду.

$$|||f_n - f||_p - ||f_{h_0} - f||_p| \le ||f_n - f_{h_0}||_p = ||f_{h-h_0} - f||_p \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

*Доказательство.* Пункты 1 и 3 очевидны по определению равномерной непрерывности.

Докажем пункты 2 и 4.

По плотности непрерывных функций в $L^p$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall f \in L^p[0,T] \ \ \exists g - \text{непр.} \in \widetilde{C}[0,T] \ \ ||f - g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$||f_h - f||_p \le ||f - g||_p + ||g - g_h||_p + ||g_h - f_h||_p \le \frac{\varepsilon}{3} + ||g - g_h||_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

Покажем, что $||g - g_h||_p \le \frac{\varepsilon}{3}$

4:

$$\begin{aligned} ||g_h - g||_p &= \left(\int_0^{\mathsf{T}} |g(x+h) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(||g_h - g||_\infty^p \cdot \int_0^{\mathsf{T}} 1 dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= T^{\frac{1}{p}} ||g_h - g||_\infty \end{aligned}$$

, что $< \frac{\varepsilon}{3}$ для достаточно малых $h$.

2: $g$ — финитное, носитель[3] $g \subset B(0,R)$, пусть $|h| < 1$.

$$||g_h - g||_p = ||g_h - g||_{L^p(B(0,R+1),\lambda_m)} \le ||g_n - g||_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}}$$

□

[1] Т.е. $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \to 0$
[2] Или $||f_n - f||_{\widetilde{C}} \to 0$
[3] Множество точек, где $g \ne 0$

# 11 Гильбертово пространство

Пусть $X$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) со скалярным произведением $X \times X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) со следующими свойствами:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ или $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ в $\mathbb{C}$.

Нам известно неравенство Коши-Буняковского: $| \langle x, y \rangle |^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$||x|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма порожденная, скалярным произведением.

**Определение.** $\mathcal{H}$ — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при этом $\mathcal{H}$ — полное, то оно называется **Гильбертовым**.

*Пример.*

1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$
2. $L^2(X, \mu), \langle f, g \rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$

   Корректно по неравенству КБШ для интегралов: $| \int_X f\overline{g}| \leq \left(\int_X |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\overline{g}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

   Это скалярное произведение:

   $$\langle g, f \rangle = \int_X g\overline{f} = \overline{\left(\int_X fg\right)}$$

   $||f|| = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$ — норма, порожденная скалярным произведением. Именно эту норму мы и рассматривали с самого начала.
3. Антипример: $L^p, p \neq 2$ не Гильбертово.
4. $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\text{или } \mathbb{C})\} : \sum |x_j|^2 < +\infty$

   $$\langle x, y \rangle := \sum_j x_j \overline{y_j}$$

   $$||x|| = \sqrt{\sum |x_j|^2}$$

**Определение. Сходящийся ряд**: $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H}$: $S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$, если $\exists S \in \mathcal{H} : S_N \underset{\text{в } \mathcal{H}}{\longrightarrow} S$

**Определение.** $x, y \in \mathcal{H}$. $x$ **ортогонален** $y$, если $\langle x, y \rangle = 0$ и обозначается $x \perp y$

**Определение.** $A \subset \mathcal{H}$ $x \perp A : \forall a \in A \ \ \langle x, a \rangle = 0$

**Определение.** Ряд $\sum a_k$ **ортогональный**, если $\forall k, l \ \ a_k \perp a_l$.

*Пример.* $a_k \in l^2 : (0 \dots 0, \frac{1}{k}, 0 \dots)$

**Теорема 35** (свойства сходимости в Гильбертовом пространстве).

1. $x_n \to x, y_n \to y$ в $\mathcal{H}$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, т.е. скалярное произведение непрерывно в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.
2. $\sum x_k$ сходится. Тогда:
$$\forall y \in \mathcal{H} \ \ \left\langle \sum x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle \tag{14}$$
3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum ||x_k||^2$ сходится.

*Доказательство.*

1. $$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\le |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\le \underbrace{||x_n - x||}_{\text{бесконечно малое}} \cdot \underbrace{||y_n||}_{\text{огр.}} + \underbrace{||x||}_{\text{const}} \cdot \underbrace{||y_n - y||}_{\text{бесконечно малое}} \to 0 \end{aligned}$$
2. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$
$$\langle S_n, y \rangle \to \langle S, y \rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$
$$\langle S_n, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, y \rangle$$
Это член суммы ряда из правой части (14).
3. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k$
$$||S_N||^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{j=1}^N x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n ||x_k||^2 =: C_N$$
$\Rightarrow$ Очевидно

$\Leftarrow$ Аналогично формуле выше: $||S_M - S_N||^2 = |C_M - C_N|$. Таким образом, если $C_N$ сходится, то $C_N$ фундаментально $\Rightarrow S_N$ фундаментально в $\mathcal{H}$.

$\square$

*Примечание.* Равенство $||S_N||^2 = \sum ||x_k||^2$ — теорема Пифагора.

**Определение.** $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — **ортогональное семейство**, если:

1. $\forall k, l \;\; e_k \perp e_l$
2. $\forall k \;\; e_k \neq 0$

Если потребовать $||e_k|| = 1$, то такое семейство называется **ортонормированным**.

*Примечание.* $\{e_k\}$ — ортогональное семейство $\Rightarrow \{\frac{e_k}{||e_k||}\}$ — ортонормированное семейство.

*Пример.*

1. $l^2, e_k := (0 \dots 0, 1, 0 \dots)$ — ортонормированное семейство.
2. $L^2$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ — ортогональное семейство:
$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos lt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(kt - lt) + \cos(kt + lt) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \end{cases}$$
Можно разобрать остальные случаи и подтвердить искомое.
Если поделить все элементы[4] на $\sqrt{\pi}$, то мы получим ортонормированное семейство.
3. $L^2[0, 2\pi]$ над $\mathbb{C}$, $\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\}$ — ортогонормированное семейство.
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ilt}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt \overset{k \neq l}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(k-l)i} e^{i(k-l)t}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$
4. $L^2[0, 2\pi], \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2t \dots\}$ — ортонормированное семейство.

**Теорема 36.**

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — ЛНЗ
2. $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$
3. $c_k e_k$ — проекция $x$ на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$.

*Доказательство.*

[4] Кроме единицы, её на $\sqrt{2\pi}$

1. $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0 \Rightarrow \alpha_n ||e_n||^2 = 0$
2. $\langle x, e_k \rangle = \langle \sum c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot ||e_k||^2$
3. $\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$

$\square$

**Определение.**

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

$c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$ — называется **коэффициентом Фурье** по системе $\{e_k\}$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$ — ряд Фурье вектора $x$ по системе $e_k$.

*Примечание.* При замене ортогонального семейства на ортонормированное семейство $\{\frac{e_k}{||e_k||} = \tilde{e}_k\}$ ряд Фурье не изменится.

$$\tilde{c}_k = \frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{||\tilde{e}_k||^2} = \frac{\left\langle x, \frac{e_k}{||e_k||} \right\rangle}{1} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||}$$

$$\tilde{c}_k \cdot \tilde{e}_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||} \cdot \frac{e_k}{||e_k||} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2} \cdot e^k = c_k(x) \cdot e_k$$

**Теорема 37** (о свойствах частичных сумм ряда Фурье)**.**

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$
- $\mathcal{L}_n = \mathrm{Lin}(e_1 \dots e_n)$

Тогда:

1. $S_n$ — проекция $x$ на $\mathcal{L}_n$, т.е. $x = S_n + z \Rightarrow z \perp \mathcal{L}_n$
2. $S_n$ — элемент наилучшего приближения дял $x$ в $\mathcal{L}_n$:
$$||x - S_n|| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} ||x - y||$$
3. $||S_n|| \leq ||x||$

*Доказательство.*

1. $k = 1 \dots n$
$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) ||e_k||^2 = 0$$

2. $x = S_n + z$
$$||x - y||^2 = ||\underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n}|| = ||S_n - y||^2 + ||z||^2 \geq ||z||^2 = ||x - S_n||^2$$

3. $||x||^2 = ||S_n||^2 + ||z||^2 \geq ||S_n||^2$

$\square$

# Лекция 12

# 3 мая

Неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 \leq ||x||^2$$

**Теорема 38** (Рисс, Фишер)**.**

- $\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье вектора $x$ сходится в $\mathcal{H}$.
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k + z, z \perp e_k \ \ \forall k$
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$

*Доказательство.*

1. Ряд Фурье ортогонален. Тогда по теореме о свойствах сходимости сходимость ряда Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость $\sum |c_k(x)|^2 ||e_k||^2$, что выполнено по неравенству Бесселя.
2. $z = x - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$

   $$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k(x)e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x)||e_n||^2 = 0$$

3. $\Rightarrow$ по теореме о свойствах сходимости, пункт 3.

$\Leftarrow$ из пункта 2:

$$||x||^2 = ||\sum c_k(x)e_k||^2 + ||z||^2 = \sum |c_k(x)|^2||e_k||^2 + ||z||^2$$

Дано: $||x||^2 = \sum |c_k(x)|^2||e_k||^2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = \sum c_k(x)e_k$

□

*Примечание.*

1. $\mathcal{L} := \mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots))$
2. $\mathcal{H}, e_k$ — ортонормированная система. Тогда последовательность $(c_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \in l_2$. Обратное тоже верно:
$$\forall (c_k) \in l_2 \ \exists x \in \mathcal{H} \ \ c_k = c_k(x)$$
   *Доказательство.* Берём в качестве $x$ ряд $\sum c_k e_k$, который сходится по теореме. □
3. *Упражнение* 9. Если ортогональный ряд сходится, то он является рядом Фурье своей суммы.

Равенство $\sum_k |c_k(x)|^2||e_k||^2 = ||x||^2$ называется уравнением замкнутости или **равенством Персиваля**.

**Определение.** Ортогональная система $\{e_k\}$ — **базис** $\mathcal{H}$, если $\forall x \in \mathcal{H} \ \ x = \sum c_k(x)e_k$

**Определение.** Ортогональная система **полная** *(нечего добавить)*, если $\nexists z \neq 0 : z \perp c_k \ \forall k$.

**Определение.** Ортогональная система **замкнутая**, если $\forall x \ \ \sum |c_k(x)|^2||e_k||^2 = ||x||^2$

**Теорема 39** (о характеристике базиса)**.**

- $\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathcal{H}$.

Тогда эквивалентно следующее:

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполняется обобщенное уравнение замкнутости:
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)} \cdot ||e_k||^2$$
3. $\{e_k\}$ замкнуто
4. $\{e_k\}$ полно
5. $\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots)$ плотна в $\mathcal{H}$, т.е. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots)) = \mathcal{H}$.

*Доказательство.*

1⇒2 Берём $x$, раскладываем его по базису и скалярно умножаем на $y$:

$$\langle e_k, y\rangle = \overline{\langle y, e_k\rangle} = \overline{c_k(y)\cdot ||e_k||^2} = \overline{c_k(y)}\cdot ||e_k||^2$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_k c_k(x)\overline{c_k(y)}\cdot ||e_k||^2$$

2⇒3 Из обобщенного следует частное при подстановке $y$ вместо $x$.

3⇒4 Если $\exists z : \forall n \ \ \langle z, e_n\rangle = 0$, то $c_n(z) = 0$, но тогда по уравнению замкнутости для $z$ выполняется $||z||^2 = \sum |c_k(z)|^2 \cdot ||e_k||^2 = 0$, а следовательно $z = 0$.

4⇒1 По теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x)e_k + z$, где $z \perp$ всем $e_k$. По полноте $z = 0$.

4⇒5 $\mathcal{L} := \mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots))$. Надо проверить, что $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера $\exists z : \forall k \ \ z \perp e_k$.

5⇒4 Если $z \perp e_k \ \ \forall k$, то $z \perp \mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots) \Rightarrow z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow z \perp z$, т.е. $\langle z, z\rangle = 0$, но тогда $z = 0$.

$\square$

*Примечание.* В $\mathcal{H}$ существование ортогональной системы ⇔ $\mathcal{H}$ сепарабельно, т.е. “счётномерно”, т.е. имеет счётное плотное подмножество.

# 12 Тригонометрические ряды Фурье

**Определение.**

- $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический полином степени не выше** $n$.
- $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический ряд**, где $a_k, b_k$ — коэффициенты тригонометрического ряда.
- $$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

  Тогда при подстановке этих формул в $T_n(x)$ получается $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ — **тригонометрический полином в комплексной записи**.
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ — **тригонометрический ряд в комплексной записи**, понимается как $\lim_{n\to+\infty} T_n(x)$.

**Лемма 9.**

- Дан тригонометрический ряд *(вещественный или комплексный)*
- Пусть $S_n \to f$ в $L^1[-\pi, \pi]$, т.е. $||S_n - f||_1 = \int_{-\pi,\pi} |S_n - f| \to 0$

Тогда:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt$, в том числе при $k = 0$
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt$
- $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

*Доказательство.* Докажем для $a_k$. Пусть $n \geq k$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos ktdt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt = \pi a_k$$

$$\left| \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t)) \cos kt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| dt = ||S_n - f||_1 \to 0$$

$\square$

**Определение.** $f \in L^1[-\pi, \pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$, заданные в лемме, называются **коэффициентами Фурье** функции $f$, а ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ или $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ называется **рядом Фурье** этой функции.

*Примечание.* В $L^1[0, 2\pi]$ всё то же самое.

*Примечание.* $\lhd f \in L^1[-\pi, \pi]$

- $f$ — чётная $\Rightarrow \forall k \;\; b_k(f) = 0, a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ktdt$
- $f$ — нечётная $\Rightarrow \forall k \;\; a_k(f) = 0, b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ktdt$

*Примечание.* $\lhd f \in L^1[0, \pi]$ — для таких функций рассматриваются два ряда Фурье — для чётного и нечётного продолжения $f$:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k(f) \cos kx \quad f \sim \sum b_k(f) \sin kx$$

*Обозначение.* $A_k(f, x) := \begin{cases} \frac{1}{2} a_0(f) & k = 0 \\ a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx & k = 1, 2 \ldots \end{cases}$

Тогда:

**Лемма 10.**

$$A_k(f, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) dt, & k = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \cos ktdt & k = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

*Доказательство.*

$$
\begin{aligned}
A_k(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx + f(t)\sin kt\sin kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(t-x))dt \\
t := x+\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\cos k\tau d\tau
\end{aligned}
$$

При сдвиге промежуток интегрирования не изменился, т.к. функция периодична. ☐

Не дописано

Несколько “контрпримеров”, где ряд Фурье ведёт себя странно:

| Чей | Какое пространство | Что странно |
|---|---|---|
| До Буа Реймонд | $\widetilde{C}$ | Расходится в некоторой точке |
| Лебег | $\widetilde{C}$ | Сходится неравномерно |
| Колмогоров | $L^1$ | Расходится в каждой точке |
| Карлесон | $L^2$ | Сходится почти везде |
| Хант | $L^p, 1 < p < +\infty$ | Сходится почти везде |

**Теорема 40** (Римана-Лебега).

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\int_E f(t)e^{i\lambda t}dt \xrightarrow{\lambda\to 0} 0$$

$$\int_E f(t)\cos\lambda t dt \to 0$$

$$\int_E f(t)\sin\lambda t dt \to 0$$

В частности для $f \in L^1[-\pi,\pi] : a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

*Доказательство.* Не умаляя общности $E = \mathbb{R}$, т.к. иначе дополним $f$ до $\mathbb{R}$ так, что $f = 0$ вне $E$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt \overset{t:=\tau+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\tau}\cdot e^{i\pi} = -\int_{\mathbb{R}} f\left(\tau+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\tau}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt = \frac{1}{2}\left(\int + \int\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt\right| = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1}dt \to 0$$

, что выполнено по лемме о непрерывности сдвига. □

*Следствие* 40.1. Пусть $\omega(f,h) = \sup_{\substack{x,y\in E \\ |x-y|\le h}} |f(x)-f(y)|$ — модуль непрерывности. Если $f \in \widetilde{C}[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$ при $k \ne 0$.

*Доказательство.*

$$|2c_{-k}(f)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{k}\right)\right|dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)dt = \omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$$

□

*Примечание.* $\omega(f,h) \xrightarrow{h\to 0} 0$. Тогда $f$ равномерно непрерывна.

*Следствие* 40.2. $E \subset \mathbb{R}, E = \langle a,b\rangle$[1]

*Определение.* **Класс Липшица** для $M > 0, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0,1]$:

$$\mathrm{Lip}_M\alpha(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \forall x,y\ \ |f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha\}$$

Пусть $f \in \mathrm{Lip}_M\alpha$, тогда при $k \ne 0$ $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$

*Доказательство.* Аналогично. □

*Примечание.* $f \in \mathrm{Lip}_M\alpha \Rightarrow \omega(f,h) \le M\cdot h^\alpha$

*Наблюдение* 2. $f \in \widetilde{C}^1[-\pi,\pi]$. Тогда при $k \ne 0$ $a_k(f') = kb_k(f), b_k(f') = -ka_k(f), c_k(f') = ikc_k(f)$

*Доказательство.* Интегрирование по частям:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot ike^{-ikt}dt\right) = ikc_k(f)$$

□

[1] Промежуток с любым видом скобки, а не скалярное произведение.

*Следствие* 40.3.

1. $f \in \widetilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\mathrm{const}}{|k|^r}$.
2. $f \in \widetilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$, $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}_m \alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$.

*Доказательство.* Очевидно из наблюдения выше. □

# Лекция 13

## 10 мая

**Определение.** 1. Ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right)$$

2. Ядро Фейера:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

**Лемма 11.**

1. $$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\cdot\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + \cos nt\right)$$

2. $$\Phi_n = \frac{1}{2\pi(n+1)}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

3. $D_n, \Phi_n$ — чётные, $\Phi_n \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$

4. $\lhd f \in L^1[-\pi,\pi]$

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$$

, где $S_n$ — частичная сумма ряда Фурье.

*Доказательство.*

1. $$2\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t$$

   Тогда при домножении $D_n$ на $\sin\frac{t}{2}$ благодаря телескопической сумме получается искомое.

2. Достаточно проверить, что

   $$\sum \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

   Это очевидно из того факта, что:

   $$\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{1}{2}\left(\cos kt - \cos(k+1)t\right)$$

   И по телескопической сумме получается $\frac{1}{2}(1-\cos(n+1)t) = \sin^2\frac{n+1}{2}t$.

3. Очевидно, т.к. чётные функции замкнуты по линейной комбинации, по пункту 2 ядро Фейера неотрицательно и $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt = 0$, поэтому $\int D_n = \int\frac{1}{2\pi} = 1$. Арифметическое среднее единиц равно единице, поэтому это выполнено и для $\Phi_n$ тоже.

4. $$S_n(f,x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x) \xlongequal{\text{по лемме}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)$$

□

**Теорема 41** (принцип локализации Римана)**.**

- $f, g \in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ \ f(x) = g(x)$[1]

Тогда ряды Фурье $f$ и $g$ ведут себя одинаково в точке $x_0$:

$$S_n(f,x_0) - S_n(g,x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Переформулировка:

- $h := f - g, h \in L^1[-\pi,\pi]$

[1] С оговоркой, что либо почти везде, либо существуют такие представители данного класса эквивалентности.

- $h \equiv 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда $S_n(h, x_0) \to 0$

*Доказательство переформулировки.*

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где:

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

Так можно сказать, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$.

- Для $h_2$ это очевидно.
- Для $h_1$: $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta, \delta)$, поэтому:

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда $b_n(h_1) \to 0, a_n(h_2) \to 0$ по теореме Римана-Лебега. □

*Примечание.*

1. Если $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то $S_n(h, x) \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$.
2. Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi, \pi]$ по лемме о вычислении коэффициентов Фурье, а его поведение в точке $x_0$ зависит лишь от его окрестности.
3. $f \in L^1[0, \pi]$ — можно разложить по $\sin$ или по $\cos$. Фокус: эти разложения в $(0, \pi)$ ведут себя одинаково.

**Теорема 42** (признак Дини).

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$
- $$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0 + t) - 2s + f(x_0 - t)|}{t} dt < +\infty \tag{15}$$

Тогда ряд Фурье $f$ сходится к $S$ в точке $x_0$, т.е. $S_n(f, x_0) \to S$.

*Доказательство.* Пусть $\varphi(t) = f(x_0 + t) - 2s + f(x_0 - t)$.

$$S_n(f, x_0) - S \overset{(??)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} \dots =$$

$$= \int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t), & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Искомое следует из теоремы Римана-Лебега, если $h_1$ и $h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$.

- Для $h_2$ это очевидно.
- Для $h_1$: по формуле (15):

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t}$$

  при $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^{\pi} |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} \overset{(??)}{<} +\infty$$

□

*Примечание.*

1. (15) $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$
2. $\sphericalangle f(x) = \frac{1}{\ln |x|}, x \in [-\pi, \pi]$. Тогда $\forall S$ интеграл (15) расходится при $x_0 = 0$.

*Следствие* 42.1.

- $f \in L^1$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$
- Существуют четыре конечных предела: $f(x_0{+}0), f(x_0{-}0), \alpha_{\pm} := \lim\limits_{t \to \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда ряд Фурье в точке $x_0$ сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

*Доказательство.*

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \xrightarrow[t \to +0]{} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ — ограничена вблизи $0$ на $[0, \pi] \implies$ по замечанию 1, интеграл (15) сходится. □

(??): т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$

(??): по условию дини

*Следствие* 42.2.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $f$ — непрерывно в точке $x_0$.
- $\exists$ конечные односторонние производные в точке $x_0$

Тогда $S_n(f, x_0) \to f(x_0)$.

*Доказательство.* Следует из следствия 1. $\square$

# 13 Свертки и аппроксимационные единицы

**Определение.** $f, K \in L^1[-\pi, \pi]$. $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$ называется **сверткой** функций $f, K$.

**Лемма 12.** Свертка корректно задана.

*Доказательство.*

$$g(x,t) := f(x-t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что $\varphi(x,y) := f(x-t)$ измерима как функция $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$. Если это так, то $g$ тоже измерима как произведение измеримых.

   Обозначим $\forall a \in \mathbb{R} \;\; E_a := \mathbb{R}(f(x) < a), v(x,t) = \langle x-t, t\rangle$. Тогда $V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$ измеримо в $\mathbb{R}^2$, т.к. это декартово произведение измеримых множеств. Следовательно $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$ тоже измеримо в $\mathbb{R}^2$.

2. Лежит ли $g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$?

   $$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g(x,t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1 < +\infty$$

   Тогда по теореме Фубини для интеграла:

   $$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)dt$$

   — при почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ этот интеграл сходится и задает по $x$ функцию из $L^1[-\pi, \pi]$, т.е. $f * k$ определен при почти всех $x$, и при этом $\in L^1[-\pi, \pi]$

$\square$

*Свойства.*

1. $f * K = K * f$

   *Доказательство.* Очевидно после замены $t$ на $-t$ под интегралом. $\square$

2. $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) \cdot c_k(K)$

   *Доказательство.*
   $$2\pi c_k(f * K) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\cdot e^{-inx}dtdx =$$
   $$= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-int}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}dxdt = 2\pi c_n(f)\cdot 2\pi c_n(K)$$
   □

3. - $f \in L^p[-\pi,\pi]$
   - $K \in L^q[-\pi,\pi]$
   - $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \quad 1 \le p \le +\infty$

   Тогда $f * K$ — непрерывная функция и $\|f * K\|_\infty \le \|K\|_q \cdot \|f\|_p$

   *Доказательство.* Неравенство очевидно, т.к. это неравенство Гёльдера:
   $$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\cdot|K(t)|\,dt \le$$
   $$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p\cdot\|K\|_q$$
   Если $p$ или $q = +\infty$, то это неравенство надо модифицировать.

   Непрерывность:
   $$|f{*}K(x{+}h) - f{*}K(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+h-t)-f(x-t)\right)K(t)\,dt\right| \le \|K\|_q \cdot \underbrace{\|f_h(x)-f(x)\|_p}_{\to 0 \text{ по т. о непр. сдвига}}$$
   Это всё верно, если $p < +\infty$. Если же $p = +\infty$, то поменяем местами $f$ и $K$. □

4. - $1 \le p \le +\infty$
   - $f \in L^p[-\pi,\pi]$
   - $K \in L^1[-\pi,\pi]$

   Тогда $f * K \in L^p[-\pi,\pi]$ и $\|f * K\|_p \le \|K\|_1 \cdot \|f\|_p$

*Примечание.* $*$ похоже на умножение, т.к. $(f_1+f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ и можно сделать вывод, что $L^1$ — алгебра.

*Примечание.* Линейный оператор $A : L^p \to L^p, f \mapsto f * K$:
$$\forall f \;\; \|Af\| \le C\cdot\|f\|$$
Это значит, что оператор ограничен: $\|A\| \le C$.

# Лекция 14

## 17 мая

*Обозначение.* $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

**Определение** (аппроксимативная единица).

- $D \subset \mathbb{R}$
- $h_0$ — предельная точка $D$ в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$, удовлетворяющее нижеуказанным аксиомам, называется **аппроксимативной единицей**.

**Аксиома 1.** $\forall h \in D \;\; K_h \in L^1[-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

**Аксиома 2.** $L_1$ нормы функций $K_h$ ограничены в совокупности:

$$\exists M \;\; \forall h \;\; \int_{[-\pi,\pi]} |K_h| \leq M$$

**Аксиома 3.** $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| \, dx \xrightarrow[h \to h_0]{} 0$$

*Примечание.*

1. Если $K_h \geq 0 \;\; \forall h$, то аксиома 1 $\Rightarrow$ аксиома 2.
2. Рассмотрим аксиому 3': $K_h \in L^{+\infty}[-\pi, \pi]$ и $\forall \delta \in (0, \pi) \;\;\; \operatorname{ess\,sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \to h_0} 0$

   *Утверждение.* Аксиома 3' $\Rightarrow$ аксиома 3.

   *Определение.* Семейство функций, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3' называется **усиленной аппроксимативной единицей**.

3. Если $K_h$ — *(возможно усиленная)* аппроксимативная единица, то $\frac{|K_h|}{\|K_h\|_1}$ — тоже *(возможно усиленная)* аппроксимативная единица.

   *Доказательство.* Первая аксиома очевидна.

   Вторая аксиома следует из того, что $\|K_h\|_1 \geq 1$, т.к. $\int K_n = 1$. Аксиомы 3 и 3' тоже следуют из этого соображения. □

**Теорема 43.**

- $K_h$ — аппроксимативная единица

Тогда:

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow f * K_h \overset{[-\pi,\pi]}{\underset{h \to h_0}{\rightrightarrows}} f$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \to +\infty} 0$
3. $K$ — усиленная аппроксимативная единица, $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $f$ непрерывно в $x$.

   Тогда $f * K_h$ непрерывно в $x$ и $f * K_h(x) \xrightarrow{h \to h_0} f(x)$

*Доказательство.*

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\, dt$$

1. $\lhd \varepsilon > 0, f$ — равномерно непрерывна, т.к. $[-\pi, \pi]$ — компакт.

   $$\exists \delta > 0 \;\; \forall t : |t| < \delta \;\; \forall x \;\; |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

   $M$ взято из аксиомы 2.

   $$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||K_h(t)|\, dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon?$$

   $$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   $$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[\text{акс. 3}]{h \to h_0} 0$$

   Тогда $\exists V(h_0) \;\; \forall h \in V(h_0) \;\; I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3. $f \in L^1$, $K_h \in L^\infty \Rightarrow f * K_h$ — непрерывна *(в том числе и в $x$)*.

   Для данного $x$ проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0)\ \forall h \in V(h_0)$

   $f$ непрерывна в $x$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall t : |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

   Как в пункте 1:

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)|\, dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)|\, dt$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi |f(x)|) \xrightarrow[h \to h_0]{\text{акс. 3'}} 0$$

   Тогда $\exists V(h_0)\ \ \forall h \in V(h_0)\ \ I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2.
$$\|f * K_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h\, dt \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)|\, dx\, dt =$$

$$= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}\, dt$$

   , где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$\stackrel{\text{def}}{=} \|K_h\|_1 \underbrace{\left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|}\right)(0)}_{\to g(0) = 0 \text{ по п.1}}$$

□

*Примечание* (модификация пункта 2). $f \in L^p[-\pi, \pi] \Rightarrow ||f * K_h - f||_p \xrightarrow{h \to h_0} 0$

*Доказательство.* Аналогично пункту 2, но хуже. □

*Примечание* (модификация пункта 3). $f \in L^1, \exists f(x-0), f(x+0)$. $K_h$ — усиленная аппроксимативная единица, $\forall h\ \ K_h$ чётная. Тогда $(f * K_h)(x) \to \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$

# 14 Суммирование рядов Фурье

## 14.1 Метод средних арифметических *(Чезаро)*

**Определение.**

$$\sum a_n \quad S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sigma_n \coloneqq \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \xlongequal{\text{сред. арифм.}} S$$

, если $\sigma_n \to S$

**Теорема 44** (о перманентности метода средних арифметических).

$$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n \xlongequal{\text{сред. арифм.}} S$$

**Определение** (суммы Фейера). $f \in L^1[-\pi, \pi], S_n(f)$ — част. сумма ряда Фурье.

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)$$

*Примечание.*

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt \xlongequal{\Phi_n \text{ чётно}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt$$

*Пример.* Для расходящегося факта $1 - 1 + 1 - 1 \dots \sigma_n \to \frac{1}{2}$

*Доказательство теоремы.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k - S) \right| \le \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |S_k - S|}{n+1}}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

□

**Теорема 45** (Фейера).

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi]$. Тогда $\sigma_n(f) \xrightarrow[]{[-\pi,\pi]} f$
2. $f \in L^p[-\pi, \pi], 1 \leq p \leq +\infty$. Тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$
3. $f \in L^1, f$ непрерывно в $x$. Тогда $\sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x)$

Не дописано