Теорема 0.1 (Лагранжа для отображений).

- E открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ $(c = a + \Theta(b - a)), \Theta \in [0, 1]$:

$$|F(b) - F(a)| \leq ||F'(c)|||b - a|$$

Доказательство. $f(t) := F(a + t(b - a)), t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$

Тогда по теореме Лагранжа для векторнозначных функций

$$|f(1) - f(0)| \leq |f'(c)||1 - 0|$$

$$|F(b) - F(a)| \leq |F'(a + c(b - a))(b - a)| \leq ||F'(a + c(b - a))|||b - a|$$

□

Примечание. Особенно удобная оценка происходит, когда E выпукло, тогда

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in E} ||F'(x)|||b - a|$$

$\Omega_m := \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\}$

Лемма 1.

- $B \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\exists c > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^m \;\; |Bx| \geq c|x|$

Тогда $B \in \Omega_m$ *и* $||B^{-1}|| \leq \dfrac{1}{c}$

Доказательство. B — биекция, т.к. его ядро $\{0_m\} \Rightarrow \exists B^{-1}$.

$$|B^{-1}y| \leq ||B^{-1}|| \cdot |y|$$

$$x := B^{-1}y$$

$$|y| \geq c \cdot |B^{-1}y|$$

$$|B^{-1}y| \leq \frac{1}{c}|y| \Rightarrow ||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$$

□

Примечание. Есть геометрическое доказательство, отталкивающееся от того, что B сжимает пространство на c.

Примечание. $A \in \Omega_m$. Тогда $\exists c : |Ax| \geq c|x|$

Доказательство.

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq ||A^{-1}|| \cdot |Ax| \quad c := \frac{1}{||A^{-1}||}$$

□

Теорема 0.2 (об обратимости оператора, близкого к обратимому).

- $L \in \Omega_m$ — обратимый
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $||L - M|| < \dfrac{1}{||L^{-1}||}$, т.е. M "близкий" к L

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m открыто в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $||M^{-1}|| \leq \dfrac{1}{||L^{-1}||^{-1} - ||L - M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \leq \dfrac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L - M||}||L - M||$

Доказательство. По неравенству треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{||L||^{-1}}|x| - ||M - L|| \cdot |x| \\ &\geq \left(||L^{-1}||^{-1} - ||M - L||\right)|x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в $\mathbb{R}$ выполняется следующее равенство в Ω_m:

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на M слева и на L справа:

Доказательство.

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L-M)L^{-1}$$
$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L-M)L^{-1}$$
$$L - M = L - M$$

□

$$||M^{-1} - L^{-1}|| = ||M^{-1}(L-M)L^{-1}|| \le \frac{||L^{-1}||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}||L-M||$$

□

Теорема 0.3 (о непрерывно дифференцируемом отображении).

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. $\exists$ все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на E
2. $F' : E \to \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \ \ \forall \overline{x} : |\overline{x} - x| < \delta \quad ||F'(x) - F'(\overline{x})|| \le \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$:
  Берем x, ε. $\exists \delta > 0 : \forall \overline{x} \ \ \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех i, j.

$$||F'(x)| - F'(\overline{x})|| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \overline{x} : |x - \overline{x}| < \delta \quad ||F'(x) - F'(\overline{x})|| < \varepsilon$$

$\lhd h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$

$$|F'(x)h - F'(\overline{x})h| \le ||F'(x) - F'(\overline{x})|| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\overline{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \varepsilon$$

□

1 Экстремумы

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in E$ — **локальный максимум**, если

$$\exists U(a) \subset E \;\; \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

Теорема 1.1 (Ферма).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in IntE$
- a — точка локального экстремума
- f — дифф. в точке a

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \dfrac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f\Big|_{\text{прямая}(a,u)}$ a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. □

Следствие (необходимое условие экстремума). a — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- f дифф. в $IntK$
- f непрерывно на K

- $f\Big|_{\text{граница} K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in IntK : f'(a) = \vec{0}$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо f на K const, либо $\exists a \in IntK$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ □

Определение. **Квадратичная форма** $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$$

Определение. **Положительно определенная кв. форма**: $\forall h \neq 0 \;\; Q(h) > 0$

Определение. **Отрицательно определенная кв. форма**: $\forall h \neq 0 \;\; Q(h) < 0$

Определение. **Незнакоопределенная кв. форма**: $\exists \overline{h} : Q(h) < 0, \exists \tilde{h} : Q(h) > 0$

Определение. **Полуопределенная (*положительно определенная вырожденная*) кв. форма**: $Q(h) \ge 0 \;\; \exists \overline{h} \neq 0 : Q(\overline{h}) = 0$

Лемма 2.

- Q — *положительно определенная*

Тогда $\exists \gamma_Q > 0 \;\; \forall h \quad Q(h) \ge \gamma_Q |h|^2$

Доказательство. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$, поэтому min и max достигается по т. Вейерштрасса.

$$\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$$

$$Q(h) = Q\left(|h| \frac{h}{|h|}\right) \overset{(*)}{=} |h^2| Q \underbrace{\left(\frac{h}{|h|}\right)}_{\text{ед. вектор}} \ge \gamma_Q |h|^2$$

Переход $(*)$ работает, т.к. Q - квадратичная форма, поэтому:

$$\sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j} a_{ij} |h| \frac{h_i}{|h|} |h| \frac{h_j}{|h|} = |h|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h_i}{|h|} \frac{h_j}{|h|}$$

□

Лемма 3.

- $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — *норма*

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \ \ \forall x \ \ C_2|x| \le p(x) \le C_1|x|$

Доказательство.

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x|p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \ge C_2|x| \\ \le C_1|x| \end{cases}$$

Существование C_1 и C_2 гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что p непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\le \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\le |x-y|\sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\le |x-y|M \end{aligned}$$

□

Напоминание

$$d^2 f(a,h) = f''_{x_1x_1}(a)h_1^2 + \ldots + f''_{x_mx_m}(a)h_m^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le m} f''_{x_ix_j} h_i h_j$$

Формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = f(a) + df(a, x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a, x-a) + o(|x-a|^2)$$

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$f(a+h) = f(a) + df(a,h) + \frac{1}{2}d^2 f(a + \Theta h, h) \quad 0 \le \Theta \le 1$$

Теорема 1.2 (достаточное условие экстремума).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

- $a \in IntE$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, a — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — локальный максимум
- Если $Q(h)$ незнакоопределена, a — не экстремум
- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) \\ &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(f''_{x_i x_i}(a+\Theta h) - f''_{x_i x_i}(a)\right)}_{\to 0} \underbrace{h_i^2}_{\le |h|^2} + 2 \sum_{i<j} \underbrace{\left(f''_{x_i x_i}(a+\Theta h) - f''_{x_i x_i}(a)\right)}_{\to 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\le |h|^2 \\ \text{по модулю}}}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2} \right) \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \ge \frac{1}{2}\left(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2\right) \ge \frac{1}{4}\gamma_Q |h|^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \lhd \overline{h} : Q(\overline{h}) > 0 \Rightarrow f(a + t\overline{h}) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\overline{h}, \overline{h}) t^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{t^2 Q(\overline{h})}_{Q(t\overline{h})} + t^2 \underbrace{\left(\sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta th) - f''_{x_i x_i}(a)) \overline{h}_i^2 + 2 \sum_{i<j} \ldots \right)}_{\text{б.м. при } t \to 0} \right) \\ &\ge \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0 \end{aligned}$$

Т.е. $f(a + t\overline{h}) > f(a)$ при t, близких к 0.

Аналогично $f(a + t\overline{\overline{h}}) < f(a)$ при t, близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$

$\overline{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$

$a = (0, 0, \dots)$

$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$

$d^2 f(a, h) = h_1^2$

$d^2 \overline{f}(a, h) = 2h_1^2$

Итого f не имеет экстремума в a, но для $\overline{f}$ a — локальный минимум. $\square$

Примечание. Если f подходит под условие теоремы и $d^2 f(a, h)$ — положительно определенный вырожденный $\Rightarrow$ a — не точка максимума.