1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество “индексов”, тогда $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ - **семейство элементов** X. $(\forall \alpha \in I \;\; x_\alpha \in X)$

Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b).

Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксоимы сложения *(здесь и далее* $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$*)*:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксоима комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

Дальнейшие аксиомы в следующем вопросе.

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

$\mathcal{R}$ - не архимедово поле

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ не удволетворяет этой аксиоме, в отличие от $\mathbb{R}$.

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$ — не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A, если $\forall a \in A \ \ a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \to Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \to Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$

Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \ \ f(x) = y$ имеет решение относительно x.

Инъекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \ \ f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \ \ f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x.

Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \ \ f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x.

1.10 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если $F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** *(значения функции - вектора)*

$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \to Y, g : Y \to Z$, тогда **композиция** f и g *(обозначается* $g \circ f$*)* — такое отображение, что $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$.

Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \to Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \to Y$ f — **сужение** g на множество A, если $f : A \subset X \to Y,\ \forall a \in A\ g(a) = f(a)$

g называется **продолжением** f.

1.14 ! Предел последовательности *(эпсилон-дельта определение)*

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n), обозначается $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколотая окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$

Проколотая окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a)\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n \in U(a)$$

1.17 ! Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y\ \ \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\forall x, y \;\; \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \;\; \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ), где X — множество, ρ — метрика на X.

Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A \times A})$, если $A \subset X$

1.18 ! Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар *(открытый шар)* $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле *($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*, X — множество, то X называется **линейным пространством** над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+ : X \times X \to X$ — сложение векторов
2. $\cdot : K \times X \to X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы *(здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$)*:

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} \in X : A + \mathbf{0} = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$

4. $\exists \mathbf{1} \in K : \mathbf{1} \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$, если X - линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и выполняется следующее:

1. $\forall x \ \ ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \ \ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \ \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, || \cdot ||)$, где $||||$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \ \ \exists R > 0 \ \ A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X.

1.22 ! Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.23 ! Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если

$$\forall \dot{U}(a) \ \ \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

1.24 ! Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек D) — замыкание.

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается ∂D

1.25 ! Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная точка** D, если $a \in D$ и a — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

a — **граничная точка** D, если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D
3. D — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее D.

1.28 ! Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in E \ \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$.

Для E — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.

Для E — огр. снизу **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E.

1.29 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

1.30 ! Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ x_n > E$

2. $x_n \to -\infty \quad \forall E \ \exists N \ \forall n > N \ x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

1.31 ! Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A $\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

1.33 ! Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \to Y$

$a \in X$, a — пред. точка множества D, $A \in Y$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$
2. На языке окрестностей:
$$\forall U(A) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \ \ f(x) \in U(A)$$
3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X:
    (a) $x_n \to a$
    (b) $x_n \in D$
    (c) $x_n \neq a$

    $f(x_n) \to A$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $X = \mathbb{R}, Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \ \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) > E$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \ \exists\delta > 0 \ \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \ \ f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta \ \forall x \in X : x > \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta \ \forall x \in X : x < \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$

1.35 Предел по множеству

$f : D \subset X \to Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка D_1

Тогда **предел по множеству** D_1 в точке x_0 — это $\lim\limits_{x\to x_0} f|_{D_1}(x)$

1.36 Односторонние пределы

В $\mathbb{R}$ одностор. = { левостор., правостор. }

Левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D\cap(-\infty, x_0)}$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

1.37 ! Непрерывное отображение

$f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$

f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \in D \ \ \rho(x, x_0) < \delta \ \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \ \exists V(x_0) \ \forall x \in V(x_0) \cap D \ \ f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \in D \ \ f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

1.38 Непрерывность слева

f — непр. слева в x_0, если $f|_{(-\infty, x_0]\cap D}$ — непрерывно в x_0

1.39 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.

Пусть $\exists f(x_0-0), f(x_0+0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0-0), f(x_0), f(x_0+0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

Примечание.

$$f(x_0-0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

1.40 ! О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R}$ x_0 — пр. точка D

Если $\exists V(x_0)$ $\exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R}$ $f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. φ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$

   “f **ограничена** по сравнению с g при $x \to x_0$”
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ f — **беск. малая** по отношению к g при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$ f **и** g **экв. при** $x \to x_0$ $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$

Примечание. О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

1.41 ! Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x \\
\operatorname{sh} x &\sim x \\
\operatorname{tg} x &\sim x \\
\operatorname{arctg} x &\sim x \\
1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\
e^x - 1 &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
a^x - 1 &\sim x \ln a
\end{aligned}$$

1.42 Асимптотически равные *(сравнимые)* функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве D, “величины одного порядка”.

1.43 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пред. точка D

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$

Пример. $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \dots \quad x \to 0 \quad g_{n+1} = xg_n, x \to 0$

(g_n) называется **шкала асимптотического разложения**.

$f : D \to \mathbb{R}$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение f по шкале (g_n)

1.44 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$

Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику f при $x \to +\infty$

1.45 Путь в метрическом пространстве

Y — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$

= **путь** в пространстве Y

1.46 Линейно связное множество

$E \subset Y$

E — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E\ \exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

1.47 ! Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

f — **дифференцируема**. в точке x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

При этом A называется **производной** f в точке x_0

Примечание. Это два разных билета.

1.48 Счётное множество

A — **счётное множество** $\Leftrightarrow$ равномощно $\mathbb{N}$

1.49 ! Мощность континуума

A равномощно $[0, 1] \Rightarrow A$ имеет мощность **континуума**.

1.50 Фундаментальная последовательность

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1.51 Полное метрическое пространство

X — метрическое пространство называется **полным**, если в нём любая фундаментальная последовательность — сходящаяся.

1.52 Классы функций $C^n([a, b])$

f — n-**гладкая**, если $\forall i = 1 \dots n \ \ \exists \ i$-ная непрерывная производная.

Класс функций $C^n([a, b])$ — множество функций, n-гладких на $[a, b]$

1.53 Производная n-го порядка

Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$ — множество D_{n-1} и $f^{(n-1)} : D_{n-1} \to \mathbb{R}$ определены. Пусть D_n — множество точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует $\delta > 0$, такое что:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0. Если $x_0 \in D_n$, то f — дифференцируема n раз в точке x_0. Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'_{D_n} : D_n \to \mathbb{R}$$

называется производной порядка n.

1.54 Многочлен Тейлора n-го порядка

Многочленом Тейлора n-той степени *(порядка)* функции f в точке a называется:

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1.55 ! Разложения Тейлора основных элементарных функций

Некоторые разложения по Тейлору:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

1. $Y \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ①
2. $Y \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$ ②

Вариант 2:

1. $Y \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha)$
2. $Y \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha)$

Доказательство. $\triangleleft x \in$ левая часть ①

$$x \in Y; x \notin \bigcup X_\alpha$$

$$x \in Y; x \notin \{y : \exists \alpha : y \in X_\alpha\}$$

$$x \in Y; \forall \alpha \in A : x \notin X_\alpha$$

$\lhd x \in$ правая часть ①

$$\forall \alpha : x \in Y \setminus X_\alpha$$

$$x \in Y; \forall \alpha \ \ x \notin X_\alpha$$

Из чего левая и правая части эквивалентны. Аналогично доказывается ② $\square$

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_k^2\right)$$

2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из тождества Лагранжа. Докажем его:

Доказательство.

$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_k - a_kb_i)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_i^2b_k^2 + a_k^2b_i^2 - 2a_ia_kb_ib_k) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_k^2b_i^2 - \sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_ia_kb_k =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 -$$
$$\sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_i\sum_{(i,k)\in A\times B}a_kb_k =$$
$$\sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 - \left(\sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_i\right)^2$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{(i,k)\in A\times B}a_ib_i\right)^2 = \sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in A\times B}(a_ib_k - a_kb_i)^2 \leq \sum_{(i,k)\in A\times B}a_i^2\sum_{(i,k)\in A\times B}b_k^2$$

□

Доказательство. Альтернативное:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 =$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i^2b_j^2 - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib_ia_jb_j =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 - 2a_ib_ia_jb_j\right) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(a_ib_j - a_jb_i)^2 \geq 0$$

□

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \;\; (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

В любом интервале в $\mathbb{R}$ содержится число $\in \mathbb{Q}$.

Доказательство. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

Возьмем $n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$. Тогда $\frac{1}{n} < b - a$

$q := \frac{[na]+1}{n} \in \mathbb{Q}$

$q \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b \Rightarrow q < b$

$q > \frac{na}{n} = a \Rightarrow q > a$ □

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} \text{ — более сложная версия}$$

Доказательство. База: $n = 1 : \;(1 + x)^1 \geq 1 + x$

Переход: Дано неравенство $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, оно верно при каком-то n. Докажем, что $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

□

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

2.5.1 Единственность предела

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, тогда $a = b$

Доказательство.

$$\text{Докажем от противного — пусть } a \neq b\text{. Возьмем } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$$

$$\exists N(\varepsilon)\ \ \forall n > N(\varepsilon)\ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon)\ \ \forall n > K(\varepsilon)\ \ \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b) \text{ — противоречие}$$

□

2.5.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Если (x, ρ) — метрическое пр-во, (x_n) — послед. в X, x_n сходится, **тогда** x_n - ограничен.

Доказательство.

$$\text{Пусть } a = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

$$\forall U(a)\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n \in U(a)$$

$$U(a) = B(a, \varepsilon)$$

$$r := max(\varepsilon, \rho(x_1, a), \rho(x_2, a) \ldots \rho(x_N, a)) + 1$$

$$\text{тогда } \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \in B(a, r)$$

□

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

2.6.1 Для последовательностей

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \to a, y_n \to b$, $\exists N\ \ \forall n > N\ x_n \leq y_n$, **тогда** $a \leq b$.

2.6.2 Для функций

Если $f, g : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, и $\forall x \in X \;\; f(x) \le g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство.

$$\text{Докажем от противного. Пусть } a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}.$$

$$\exists N(\varepsilon) \;\; \forall n > N \;\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \;\; \forall n > K \;\; b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

$$\text{При } n > \max(N, K) \;\; y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n \text{ — противоречие}$$

□

Доказательство. По Гейне.

$\forall (x_n) \to a, x_n \in X, x_n \ne a$:

$$f(x_n) \to A, g(x_n) \to B, \forall x \;\; f(x) \le g(x) \Rightarrow f(x_n) \le g(x_n) \Rightarrow A \le B$$

□

2.7 ! Теорема о двух городовых

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \;\; x_n \le y_n \le z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, **тогда** $\exists \lim y_n = a$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall n > K \;\; a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 = max(N, K) \;\; \forall n > N_0 \;\; a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

$$\text{По определению } \lim y_n = a$$

□

2.8 Бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая последовательность, т.е. (x_n) — беск. малая, (y_n) — ограничена $\Rightarrow$ $x_n y_n$ — беск. малая

Доказательство. Возьмём K такое, что $\forall n \;\; |y_n| \leq K$.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; |x_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x_n y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow x_n y_n \to 0$$

□

2.9 ! Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в $\mathbb{R}$

Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.

Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X, λ_n — посл. скаляров, и $x_n \to x_0, y_n \to y_0, \lambda_n \to \lambda_0$, **тогда**:

1. $x_n \pm y_n \to x_0 \pm y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $||x_n|| \to ||x_0||$

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon \;\; \exists N_1 \;\; \forall n > N_1 \;\; ||x_n - x_0|| < \varepsilon$

   $\forall \varepsilon \;\; \exists N_2 \;\; \forall n > N_2 \;\; ||y_n - y_0|| < \varepsilon$

   $N := \max(N_1, N_2)$

   $\forall \varepsilon \;\; \forall n > N \;\; ||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| \leq ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| \leq 2\varepsilon$

2. $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n|| = ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0|| \leq ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n|| + ||(x_n - x_0)\lambda_0|| = ||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$

   $|\lambda_n - \lambda_0|$ и $||x_n - x_0||$ — бесконечно малые, $||x_n||$ и $|\lambda_n|$ — ограниченные $\Rightarrow$ $||x_n|||\lambda_n - \lambda_0| + ||x_n - x_0|||\lambda_0|$ — бесконечно малая

3. Докажем, что $|||x_n|| - ||x_0||| \leq ||x_n - x_0||$.

$$||x_n|| = ||x_0 + (x_n - x_0)|| \leq ||x_0|| + ||x_n - x_0|| \Rightarrow ||x_n|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0||$$

Аналогично $||x_0|| - ||x_n|| \le ||x_n - x_0||$.

Тогда $|||x_n|| - ||x_0||| \le ||x_n - x_0||$

$\square$

Об арифметических свойствах пределов в $\mathbb{R}$.

Для $(x_n), (y_n)$ — вещ.посл., $\forall n \;\; y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство взято из воздуха.

Доказательство. Докажем, что $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_0}$, если $\forall n \;\; y_n \neq 0, y_0 \neq 0$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y_0 - y_n}{y_n y_0}\right|$$

В числителе бесконечно малая последовательность, в знаменателе ограниченная $\Rightarrow$ дробь — бесконечно малая последовательность. $\square$

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

2.10.1 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве

Для X — линейного пространства *(над* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*)*

$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

Доказательство. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Заметим, что $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

При $y = 0$ тривиально, пусть $y \neq 0$

$$0 \le \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}, \overline{\lambda} = \overline{\left(-\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right)} = -\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

$$0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle$$

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle \le \langle x, x\rangle$$

$$\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

□

2.10.2 Норма, порожденная скалярным произведением

Для лин. пространства X, скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot\rangle$

$\rho : X \to \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ – норма

Доказательство. Докажем, что ρ удовлетворяет всем леммам нормы.

1. $\rho(x) \ge 0 \quad \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\rho(\alpha x) = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\rho(x)$
3. $\rho(x + y) \le \rho(x) + \rho(y)$

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \overset{?}{\le} \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$$\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \overset{?}{\le} \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

Пояснение следующего перехода: пусть $\langle x, y\rangle = a$. Тогда $a = \Re a + \Im a$, $\overline{a} = \Re a - \Im a$ *(разложение на вещественную и мнимую части).* $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = \Re\langle x, y\rangle + \Im\langle x, y\rangle + \Re\langle x, y\rangle - \Im\langle x, y\rangle = 2\Re\langle x, y\rangle$.

$$2\Re\langle x, y\rangle \overset{?}{\le} 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

$$\Re\langle x, y\rangle \le |\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$$

□

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

2.11.1 О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в $\mathbb{R}^m$

в $\mathbb{R}^m$ задано евклидово скалярное произведение и норма.

Тогда $(x^{(n)}) \to x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots m\}\ \ x_i^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} x_i$

Доказательство. Модуль координаты $\leq$ нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq ||x^{(n)} - x|| \leq \sqrt{m} \max_{1\leq i\leq m} |x_i^n - x_i|$$

Первое неравенство доказывает $\Rightarrow$, второе неравенство доказывает $\Leftarrow$ □

2.11.2 О непрерывности скалярного произведения

X - лин. пространство со скалярным произведением, $||\cdot||$ — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда $\forall (x_n) : x_n \to x,\ \ \forall (y_n) : y_n \to y, \quad \langle x_n, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle$

Доказательство.

$$|\langle x_n, y_m\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| =$$

$$|\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$$

По теореме о двух городовых чтд. □

2.12 Открытость открытого шара

$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ — открыт

Доказательство. $x_0 \in B(a, r)$

Докажем, что x_0 — внутренняя, т.е. $\exists U(x_0) \subset B(a, r)$

$k := r - \rho(a, x_0)$

Докажем, что $B(x_0, k) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(x_0, k) \quad \rho(x, x_0) < k$$

$$\rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

$$\rho(x, a) \le \rho(a, x_0) + \rho(x, x_0) < r$$

□

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ - семейство открытых множеств в (X, ρ)

   Тогда $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ - открыто в X.

2. $G_1, G_2, \dots G_n$ - открыто в X.

   Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ - открыто в X.

Доказательство. 1. $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

   $\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$

   G_{α_0} — открыто $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внтуренняя точка $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$ $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2. $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

   $\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$

   $\forall \alpha \in A \;\; G_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$

   $\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min\limits_\alpha r_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$ — внутренняя точка $\bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ *(дополнение)* — открыто.

Свойства:

1. $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcap F_\alpha$ — замкн. в X

2. $F_1 \dots F_n$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcup F_i$ — замкн. в X

Доказательство. Докажем $\Rightarrow$: D — замкн. $\Rightarrow^?$ $X \setminus D$

$x \in X \setminus D \Rightarrow x$ — не пред. точка D, т.к. D содержит все свои пред. точки и $x \notin D$

$\Rightarrow \exists r : B(x,r) \subset X \setminus D$

Докажем $\Leftarrow$: $X \setminus D$ — откр., D — замкн.?, т.е. $\forall x \in \{\text{пр.точки D}\}\ \ ?x \in D$

Если $x \in D$ — тривиально.

$x \notin D \quad x \in X \setminus D$

$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$ - не пред. точка ☐

Доказательство.

1. $(\bigcap F_\alpha)^c = X \setminus (\bigcap F_\alpha) = \bigcup(X \setminus F_\alpha)$

   F_α — закрыто $\Rightarrow X \setminus F_\alpha$ — открыто $\Rightarrow \bigcup(X \setminus F_\alpha)$ — открыто

   $(\bigcap F_\alpha)^c$ — открыто $\Rightarrow \bigcap F_\alpha$ — замкнуто

2. $(\bigcup F_i)^c = \bigcap(F_i)^c$

   $\bigcap(F_i)^c$ — открыто, т.к. F_i^c — открыто $\Rightarrow (\bigcup F_i)^c$ — открыто $\Rightarrow \bigcup F_i$ — замкнуто

☐

2.15 ! Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

2.15.1 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

2.15.1.1 По Кохасю

$(x_n), (y_n)$ — вещ., $x_n \to a, y_n \to b, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда:

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n y_n \to ab$
3. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$, *если* $\forall n\ \ y_n \neq 0; b \neq 0$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

2.15.1.2 По Виноградову

1. $x_n \to +\infty, \{y_n\}$ — огр. снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
2. $x_n \to -\infty, \{y_n\}$ — огр. сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$
3. $x_n \to \infty, \{y_n\}$ — огр. $\Rightarrow x_n + y_n \to \infty$
4. $x_n \to \pm\infty, \forall n \;\; y_n > 0$ **или** $y_n \to b > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \pm\infty$
5. $x_n \to \pm\infty, \forall n \;\; y_n < 0$ **или** $y_n \to b < 0 \Rightarrow x_n y_n \to \mp\infty$
6. $x_n \to \infty, \forall n \;\; |y_n| > 0$ **или** $y_n \to b \neq 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$
7. $x_n \to a \neq 0, y_n \to 0, \forall n \;\; y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$
8. $x_n \to a \in \mathbb{R}, y_n \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$
9. $x_n \to \infty, y_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

Доказательство. Тривиально. □

2.15.2 Неопределенности

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\frac{0}{0}$

2.16 ! Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\to 0$, т.е. $(b_n - a_n) \to_{n \to +\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \to_{n \to +\infty} c, b_n \to_{n \to +\infty} c$

Доказательство. Берем из аксиомы Кантора $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$

$$\begin{cases} 0 \le b_n - c \le b_n - a_n \\ 0 \le c - a_n \le b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n - c \to 0 \\ c - a_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n \to c \\ a_n \to c \end{cases}$$

По теореме об единственности предела c однозначно определено. □

2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing, E$ — огр. сверху.

Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

Доказательство. Строим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$ со свойствами:

1. b_k — верхняя граница E
2. $[a_k, b_k]$ содержит точки E.

a_1 — берём любую точку E, b_1 — любая верхняя граница.

Границы следующего отрезка найдём бинпоиском *(математики это называют половинное деление).*

Если $\frac{a_1+b_1}{2}$ — верхняя граница E, $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.

Иначе на $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ есть элементы E, $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$

Длина $[a_k, b_k] = b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0$

$\exists! c \in \bigcap [a_k, b_k]$

Проверим: $c = \sup E$ по техническому описанию супремума:

1. $\forall x \in E \ \ \forall n \ \ x \leq c$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \ c - \varepsilon$ — не верхн. гран., т.е. $\exists n : c - \varepsilon < a_n$

Доказательство 1: $\forall n \ \ x \leq b_n, x \to x, b_n \to c \Rightarrow x \leq c$ *(предельный переход)*

Доказательство 2: $\forall \varepsilon > 0$ возьмём n : длина отрезка $= b_n - a_n < \varepsilon$.

$$c - a_n < b_n - a_n < \varepsilon$$

$$c - \varepsilon < a_n$$

□

2.18 Лемма о свойствах супремума

О свойствах $\sup, \inf$

1. $\varnothing \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$

   Пусть $\lambda > 0$, тогда $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

Доказательство.

1. Множество верхних границ $E \subset$ множество верхних границ D.
2. $\lambda\cdot$ Множество верхних границ $E =$ множество верхних границ λE
3. Множество верхних границ $-E = -$ множество нижних границ E

□

2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Доказательство. Достаточно доказать 1.

Проверяем $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению sup:

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \ M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \ldots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \ \exists \ N \ \forall n > N \ \ M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению $M = \lim x_n$ □

2.20 Определение числа e, соответствующий замечательный предел

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

Доказательство. Докажем "$\Rightarrow$".

$\forall$ точка D внутр. в Y

$\forall x \in D \ \exists r_x \ \ B^Y(x, r_x) \subset D$

Очевидно $D = \bigcup\limits_{x \in D} B^Y(x, r_x) \quad G := \bigcup\limits_{X \in D} B^X(x, r_x)$ – откр. в X.

$$G \cap Y = (\bigcup_{x \in D} B^X(r, r_x)) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) = D$$

Докажем "$\Leftarrow$".

G – откр. в $X \quad D := G \cap Y \quad ?D$ – откр. в Y

$x \in D$? x – внутр. точка D (в Y)

$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D$ □

Докажем 2.

Доказательство. Докажем "$\Rightarrow$"

D – замкн. в $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$ – откр. в Y

$\exists G$ – откр. в X, такое что $D^c = G \cap Y$

Тогда $G^c = X \setminus G$ – замкнуто в X, кроме того $D = G^c \cap Y$, т.к. $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве F G^c.

Докажем "$\Leftarrow$".

$$F \text{ – замкн. в } X$$

$$F \cap Y \text{ – замкн. в } Y?$$

$$F^c = X \setminus F \text{ – откр. в } X$$

$$F^c \cap Y \text{ – откр. в } Y$$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) \text{ – замкн. в } Y$$

$$Y \setminus (F^c \cap Y) =^? F \cap Y$$

$$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) =^? F \cap Y$$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cdot Y} = Y \cdot (\overline{\overline{F}} + \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

2.22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X.

Доказательство. Докажем "$\Rightarrow$"

$$K - \text{комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha - \text{откр. в } X$$

Доказать: $\exists$ кон. $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

Докажем "$\Leftarrow$"

Дано: K — комп. в X, доказать: K — комп. в Y.

$$K \in \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha, O_\alpha - \text{откр. в } Y$$

$$\exists G_\alpha : O_\alpha = G_\alpha \cap Y (G_\alpha - \textit{откр. в } X)$$

По двум выражениям выше:

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \cap Y = Y \cap \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

Это открытое покрытие, K — компактно в $X \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие в Y. □

2.23 Простейшие свойства компактных множеств

(X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1. K — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., K — огр.
2. X — комп, K — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

Доказательство. 1. $?K$ — замкн. $?K^c$ — откр.

$a \notin K$, проверим, что $\exists U(a) \subset K^c$

$K \subset \bigcup\limits_{x\in K} B(x, \frac{1}{2}\rho(x,a))$ — откр. покрытие

K — комп. $\Rightarrow \exists x_1 \dots x_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i, a))$ — открытое покрытие

$r := \min(\frac{1}{2}\rho(x_1,a)) \dots \frac{1}{2}\rho(x_n,a)))$

$B(a, r)$ не пересекается ни с одним $B(x_i, \frac{1}{2}\rho(x_i,a)) \Rightarrow B(a,r) \subset K^c$

$?K$ — огр.

$b \in X$

$K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B(b, n) = X$

K — комп. $\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} \Rightarrow K \subset B(b, \max(n_1 \dots n_m))$

2. $?K$ — комп.

$$\begin{cases} K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha, G_\alpha - \text{откр.} \\ K - \text{замкн.}, K^c - \text{откр.} \end{cases} \Rightarrow K^c \cup \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha - \text{откр. покрытие } X \Rightarrow$$

$\Rightarrow X \subset (\text{может быть } K^c) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

$\square$

2.24 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \leq x_i \leq b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \varnothing$

Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

Доказательство. $\forall i = 1 \dots m \quad [a_i^1, b_i^1] \supset [a_i^2, b_i^2] \supset \dots \quad \exists c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n]$. $c = (c_1 \dots c_m)$ — общая точка всех параллелепипедов.

$|a_i^n - b_i^n| \leq ||a^n - b^n|| \to 0 \Rightarrow_{\text{т. Кантора}} \exists! c_i \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_i^n, b_i^n] \Rightarrow \exists! c = (c_1 \dots c_m)$ $\square$

2.25 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a, b]$ — компактное множество в $\mathbb{R}^m$

Доказательство. Докажем, что $\exists$ кон. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) : [a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

Допустим, что не $\exists$

$[a^1, b^1] := [a, b] \Rightarrow [a^1, b^1]$ нельзя покрыть кон. набором

$[a^2, b^2]$:= делим $[a^1, b^1]$ на 2^m частей, берем любую "часть", которую нельзя покрыть конечным набором G_α

$\vdots$

$$diam = [a^n, b^n] = \frac{1}{2} diam[a^{n-1}, b^{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}} diam[a^1, b^1]$$

$$\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a^n, b^n]$$

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$\exists \alpha_0 \quad c \in G_{\alpha_0} - \text{откр.}$$

$$\exists U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

$$\exists n \quad diam[a^n, b^n] \ll \varepsilon$$

$$\text{и тогда } [a^n, b^n] \subset U_\varepsilon(c) \subset G_{\alpha_0}$$

□

2.26 ! Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

Доказательство. Докажем $1 \Rightarrow 2$

K — огр. $\Rightarrow K$ содержится в $[a, b]$

K — замкн. в $\mathbb{R}^m \Rightarrow K$ — замкн. в $[a, b]$

Т.к. $[a, b]$ — комп., по простейшему свойству компактов K — комп. □

Доказательство. Докажем $2 \Rightarrow 3$

$\forall (x_n)$ — точки из K.

?сходящаяся последовательность

Если множество значений $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ — конечно, то $\exists$ сход. подпосл. очевидно.

Пусть D — бесконечно

Если D имеет предельную точку, то $x_{m_k} \to a$

Если D — бесконечно и не имеет предельных точек, $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$, радиус такой, что в этом шаре нет точек D, кроме x *(его может тоже не быть)*. Тогда $\bigcup\limits_{x \in K} B(x, \varepsilon_x)$ — открытое покрытие K. Так как каждый шар содержит 0 или 1 точку, конечное число шаров не может покрыть K, т.к. в K бесконечное число точек *(т.к. бесконечное число различных значений D)*. Таким образом, мы нашли открытое покрытие K, у которого нет конечного подпокрытия — противоречие.

Пусть $a \in K$ — предельная точка. Возьмём из $B(a, r_1)$ точку x_{n_1}. Возьмём $r_2 < r_1$ и из соответствующего шара возьмём x_{n_2}. При $r_n \to 0$ $x_{n_k} \to a$.

Почему вблизи a будет точка из произвольной последовательности? □

Доказательство. Продолжим доказательство из прошлой лекции, докажем, $3 \Rightarrow 1$.

Рассмотрим секвенциально компактное K и пусть K — не ограничено. *(случай ограниченного множества тривиален)*

$\exists x_n : ||x_n|| \to +\infty$

Тогда в этой последовательности нет сходящейся последовательности, т.к. любая $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$ ограничена. Противоречие $\Rightarrow K$ — не секвенциально компактно.

Таким образом, если K — секвенциально компактно, то K ограничено.

Докажем замкнутость K.

Пусть $\exists$ предельная точка $x_0 \notin K$

$\exists x_n \to x_0$

По секвенциальности $\exists$ подпоследовательность $x_{n_k} \to a \in K$.

Не дописано. □

2.27 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

Доказательство. Докажем "$\Rightarrow$".

Если дана (x_n), удовл. определению Коши, доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ 0 < \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

$$\text{Для этого } \delta \ \exists N \ \forall n > N \rho(x_n, a) < \delta$$

, где $x_n \in D, x_n \neq a$

$\Rightarrow \rho(f(x_n), A) < \varepsilon$ □

Доказательство. Докажем "$\Leftarrow$"

Пусть определение Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \ 0 < \rho(x, a) < \delta \ \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n \in D \ 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \ \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Построена последовательность $(x_n) : x_n \in D \ x_n \neq a \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow x_n \to a$. Кроме того, $\rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$ — противоречит утверждению Гейне, что $f(x_n) \to A$. ☐

2.28 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

2.28.1 Единственность предела

оединственностипредела

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n)$:

- $x_n \to a$
- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) \to A, f(x_n) \to B \xRightarrow[\text{теор. о ед. предела посл.}]{} A = B$ ☐

2.28.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Если $\nexists f(a)$, ограниченность доказана. Иначе:

$\forall x \in V(a) \cap D \ f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(A)$, где $\tilde{\varepsilon} = \max(\varepsilon, \rho(A, f(a)) + 1)$ ☐

2.28.3 Теорема о стабилизации знака

О стабилизации знака.

$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

Тогда $\exists V(a) \ \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ \ f(x) \neq B$

Доказательство. Для

$$0 < \varepsilon < \rho(A, B) \ \ \exists V(a) \ \ \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$U_\varepsilon(A)$ не содержит B. □

2.29 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \to Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над $\mathbb{R}$, a — пред. точка D

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$

$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \lambda_0$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim\limits_{x \to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

   $\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

   a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \ \ \forall x \in V(a) \cap D \ \ g(x)$ — того же знака, что и B, т.е. $g(x) \neq 0$

   $\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для D'

Доказательство. По Гейне. $\forall (x_n)$:

- $x_n \to a$

- $x_n \in D$
- $x_n \neq a$

$f(x_n) + g(x_n) \to^? A + B$ верно по теореме последовательности.

Аналогично прочие пункты, кроме 4.

$f(x_n) \to A$

$g(x_n) \to B \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\; g(x_n) \neq 0$

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ корректно задано при $n > n_0$. □

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно "разрешить" случай $A, B = \pm\infty$ Тогда 3. тривиально, 1., 2. и 4. верно, если выражения $A \pm B$, $\lambda_0 A$, $\frac{A}{B}$ корректны.

Докажем 1. как в теореме об арифметических свойствах последовательности.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_1 \;\; \exists \delta_1 > 0 \;\; \forall x \in D \cap V_{\delta_1}(a) \;\; f(x) > E_1 \;\; \forall E_2 \;\; \exists \delta_2 > 0 \;\; \forall x \in D \cap V_{\delta_2}(a) \;\; g(x) > E_2$

2.30 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в $\mathbb{R}^m$ (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. x_n — огр. $\Rightarrow$ x_n содержится в замкнутом кубе. Так как куб секвенциально компактен, x_{n_k} сходится. □

2.31 Сходимость в себе и ее свойства

x_n — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m, n > N \;\; \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. x_n — фунд. $\Rightarrow$ x_n — ограничена
2. x_n — фунд; $\exists x_{n_k}$ — сходящ. Тогда x_n сходится.

Доказательство. 1. $\varepsilon := 1 \;\; \exists N \;\; \forall m, n := N + 1 > N \;\; \rho(x_m, x_{N+1}) < 1$

$R := \max(1; \rho(x_1, x_{N+1}), \ldots, \rho(x_N, x_{N+1}))$

$\forall n \;\; x_n \in B(x_{N+1}, R) \Rightarrow x_n$ ограничена.

2. $\begin{cases} \varepsilon > 0 \ \exists K \ \ \forall k > K \ \ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} x_n \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{N} := \max(N, K)$ при $k > \tilde{N}$ выполняется $k > K$, значит $n_k \geq k > K \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

При $n > \tilde{N} \geq N \ \ m := n_k > \tilde{N} \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon$

Итого $\forall n > \tilde{N} \ \ \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_n, x_{n_k}) < 2\varepsilon$

□

2.32 Критерий Коши для последовательностей и отображений

2.32.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве x_n — сходящ. $\Rightarrow x_n$ — фунд.
2. В $\mathbb{R}^m$ x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — сходящ.

Доказательство. 1. $x_n \to a \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$

$x_n \to a \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < 2\varepsilon$

2. x_n — фунд. $\Rightarrow x_n$ — огр. $\xRightarrow{\text{Б.-В.}} \exists x_{n_k}$ — сходящ.

$\begin{cases} \exists x_{n_k} \text{ — сходящ.} \\ x_n \text{ — фунд.} \end{cases} \Rightarrow x_n$ — сходящ.

□

2.32.2 Для отображений

$f : D \subset X \to Y$, a — пр. точка D, Y — полное метрическое пространство.

Тогда

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D \ \ \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta \ \ \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Доказательство. "$\Rightarrow$" как для последовательностей.

Докажем "$\Leftarrow$" по Гейне.

Заметим, что последовательность $f(x_n)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall m, n > N \ \ \rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

$$x_n \to a \Rightarrow \exists N \;\; \forall n > N \;\; \rho(x_n, a) < \delta$$

$$\forall m, n > N \;\; \rho(x_n, a) < \delta; \rho(x_m, a) < \delta \xRightarrow{\text{Фунд.}} \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

□

2.33 ! Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a), a$ — пред. точка D_1. Тогда:

1. f — возрастает, огр. сверху на D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$
2. f — убывает, огр. снизу на D_1. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

Доказательство. 1. $L := \sup\limits_{D_1} f \quad L \stackrel{?}{=} \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; L - \varepsilon$ — не верхн. граница для $\{f(x) : x \in D_1\} \;\; \exists x_1 : L - \varepsilon < f(x_1)$.

Тогда при $x \in (x_1, a) \cap D_1 \;\; L - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq L$

$\exists \delta := |x_1 - a| \;\; \forall x : x \in (x_1, a) \;\; L - \varepsilon \leq f(x) < L + \varepsilon$

Аналогично доказывается пункт 2.

□

2.34 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

2.34.1 Арифметические

1. $f, g : D \subset X \to Y \;\; x_0 \in D$ (Y — норм. пространство)

   f, g — непр. в x_0; $\lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. x_0

   Тогда $f \pm g, ||f||, \lambda f$ — непр. x_0
2. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \;\; x_0 \in D$

   f, g — непр. в x_0

   Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в x_0

   $g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. x_0

Доказательство отсутствует

2.34.2 Стабилизация знака

Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign} f(x) = \text{sign} f(x_0)$$

Доказательство. Докажем для $f(x_0) > 0$.

Докажем от противного:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in U_{x_0}\left(\frac{1}{n}\right) \cap D : g(x_n) \leq 0$$

Противоречие. □

2.34.3 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$

f — непр. в $x_0 \in D$, g — непр. в $f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ непр. в x_0

Доказательство. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \to x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

$y_n \in E$

$\Rightarrow g(y_n) \to g(y_0)$ □

2.35 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

2.35.1 Непрерывность композиции

Дана выше.

2.35.2 Соответствующая теорема для пределов

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$

a — предельн. точка $D \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$

A — предельн. точка E $\quad g(y) \xrightarrow[y\to A]{} B$

$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$

Тогда $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} B$

Доказательство. По Гейне.

Проверяем, что $\forall (x_n) : \substack{x_n \in D \\ x_n \to a \\ x_n \neq a} \quad g(f(x_n)) \overset{?}{\to} B$

$y_n := f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$

$y_n \in E$

При больших N $\quad y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$

$\Rightarrow g(y_n) \to B$ $\square$

2.36 ! Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

2.36.1 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}$

x_0 — предельная точка D

$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \to x_0$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если $\exists$ один из пределов, то $\exists$ и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если x_0 лежит в области определения $\frac{f}{g}$

Доказательство.

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\frac{f}{\tilde{f}}\frac{g}{\tilde{g}} \to \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$

$\square$

2.36.2 Таблица эквивалентных

Дана выше. (1.41, стр. 10)

2.37 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — предельная точка D

$\forall n \;\; g_{n+1} = o(g_n), x \to x_0$

$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \;\; \forall i \;\; g_i(x) \neq 0$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$

$f(x) = d_0 g_0(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

$]n \leq m$

Тогда $\forall i \;\; c_i = d_i$

Доказательство. $k := min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0 g_0 + \ldots + c_{k-1} g_{k-1} + c_k g_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0 g_0 + \ldots + c_{k-1} g_{k-1} + d_k g_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k) g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

□

2.38 ! Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \to Y$ — непр. на $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$, откр. $f^{-1}(G)$ — откр. в X.

Доказательство. "$\Rightarrow$" $x_0 \in f^{-1}(G) \quad ?\exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$

f — непр. в $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x \in W \quad f(x) \in U$

$f(x_0) \in G$ — откр. $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$

Для $U_1 \quad \exists W(x_0) : x \in W \quad f(x) \in U_1 \subset G$

$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$

"$\Leftarrow$" $x_0 \in X$? непр. f в x_0

$\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$ — надо проверить

$U(f(x_0))$ — откр. $\Rightarrow$ $f^{-1}(U(f(x_0)))$ — откр., а $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$, значит $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$

Для любого $x \in W(x_0)$ будет выполняться $f(x) \in U(f(x_0))$ □

2.39 ! Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \to Y$ — непр. на X

Если X — комп., то $f(X)$ — комп.

Доказательство. $?f(X)$ — комп.

$f(X) \subset \bigcup G_\alpha \quad G_\alpha$ — откр. в Y.

$X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha)$ — откр. т.к. f — непр. $\xRightarrow[X\text{ — комп.}]{}$

$$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

□

Следствие. Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.

Тогда f — огр.

Следствие. $f : X \to \mathbb{R}$

X — комп., f — непр. на X

Тогда $\exists \max\limits_X f, \min\limits_X f$

$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$

Следствие. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.

$\exists \max f, \min f$

2.40 Лемма о связности отрезка

Промежуток $\langle a, b\rangle$ *(границы могут входить, могут не входить)* — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \cap G_1 \neq \varnothing \quad \langle a, b\rangle \cap G_2 \neq \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$

Доказательство. От противного: $\alpha \in \langle a, b\rangle \cap G_1 \quad \beta \in \langle a, b\rangle \cap G_2$, пусть $\alpha < \beta$

$$t := \sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$t \in G_1$? нет, т.к. если да, то $t \neq \beta$ и $\exists U(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_1 \cap [\alpha, \beta]$, это противоречит определению t:

$[\alpha, t - \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$

$(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_1$

$[\alpha, t + \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$

$t \in G_2$? нет, т.к. если лежит, то $t \neq \alpha \quad \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G_2 \cap [\alpha, \beta)$

$\sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \leq t - \varepsilon$ □

2.41 ! Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \;\; \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

Традиционное доказательство — бинпоиск.

Доказательство. Сразу следует из леммы о связности отрезка и топологического определения
непрерывности.

Если нашлось t, для которого доказуемое утверждение неверно, то

$$[a, b] = f^{-1}(-\infty, t) \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

Оба множества открыты, т.к. они — прообразы открытых множеств. Кроме того, они непусты, т.к. одно из них содержит a, другое содержит b. Итого, мы представили отрезок $[a, b]$ в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, противоречие по предыдущей лемме. □

2.42 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непр.

Тогда $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток.

Доказательство. Не по Кохасю.

$m := \inf f, M := \sup f$. Докажем, что $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$ путем доказательства, что $f(\langle a, b\rangle) \subset \langle m, M\rangle$ и $f(\langle a, b\rangle) \supset \langle m, M\rangle$.

1. $f(\langle a, b\rangle) \subset \langle m, M\rangle$

$$\forall x \ \ m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f(\langle a, b\rangle) \subset \langle m, M\rangle$$

2. $f(\langle a, b\rangle) \supset \langle m, M\rangle$

   $\lhd k \in \langle m, M\rangle$. По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении $\exists c \in \langle a, b\rangle$: $f(c) = k \Rightarrow k \in f(\langle a, b\rangle) \Rightarrow \langle m, M\rangle \subset f(\langle a, b\rangle)$

□

2.43 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности

X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывное и сюръекция

X — линейно связное множество. Тогда Y — линейно связное множество.

Доказательство. Надо доказать, что $\exists$ путь $[a, b] \to [A, B]$

$f(a) = A; f(b) = B$

X — линейно связное $\Rightarrow \exists\gamma : [\alpha, \beta] \to X, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b, \gamma$ — непрерывное

$$f \circ \gamma[a, b] \to Y; f \circ \gamma(\alpha) = A, f \circ \gamma(\beta) = B$$

Т.к. композиция непрерывных функций непрерывна, $f \circ \gamma$ — непрерывна. □

2.44 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

В $\mathbb{R}$ линейно связанными множествами являются только промежутки.

Доказательство. 1. Промежуток линейно связен.

$$\forall A, B \in \langle a, b\rangle \quad \exists \text{ путь: } \gamma : [A, B] \Rightarrow \langle a, b\rangle; t \mapsto t$$

2. $E \subset \mathbb{R}$ — линейно связное $\overset{?}{\Rightarrow}$ E — промежуток

   Пусть E — не промежуток

   $\exists a, b, t : a, b \in E; a < b \quad a < t < b; t \notin E$

   Линейная связность: $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$

   $\gamma(\alpha) = a \quad \gamma(\beta) = b \quad \gamma$ — непр.

□

2.45 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

Доказательство. Рассмотрим угол φ и разделим прямой под углом φ колбасу на две равные по площади части. Это можно сделать для произвольного φ по теореме о разделении колбасы.

$S(\varphi) = S_\text{л} - S_\text{п}$ *(для хлеба)*

S — непр.

Берём произвольный угол $\varphi_0; \varphi_0 + \pi$

$\varphi_0 : S_\text{л} - S_\text{п}$

$\varphi_0 + \pi : S_\text{п} - S_\text{л}$

$\exists \varphi \;\; S(\varphi) = 0$ по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении. □

2.46 Теорема о вписанном n-угольнике максимальной площади

Вписанный n-угольник максимальной площади — правильный.

Доказательство. Докажем, что если такой n-угольник существует, то он правильный. Предположим обратное — он не правильный $\Rightarrow$ не все стороны равны. Возьмём точки этого n-угольника A, B, C на окружности такие, что $AB \neq BC$. Сдвинем B таким образом, что $AB = BC$. Площадь треугольника увеличилась *(т.к. основание не изменилось)*, а высота увеличилась $\Rightarrow$ n-угольник правильный.

Докажем, что такой n-угольник существует, т.е. $\exists \max S$. Зададим n-угольник углами между соседними вершинами α_i. Заметим, что $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha = 2\pi$. Совпадающие вершины разрешены, искомый n-угольник содержит центр окружности *(очевидно)*. Таким образом, мы задали n-угольник в $\mathbb{R}^n$ — пространстве углов. Множество всех многоугольников ограничено гиперкубом со стороной π. Кроме того, оно замкнуто $\Rightarrow$ по характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$ оно компактно.

$S := \sum \frac{1}{2}R^2 \sin \alpha_i$ — непрерывна на компакте $\Rightarrow \exists \max S$ $\square$

2.47 ! Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

2.47.1 Теорема о непрерывности монотонной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. Точки разрыва f (если есть) — I рода
2. f — непр. на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток

Доказательство. Рассмотрим $f \uparrow$

1. $\triangleleft x_1 \in \langle a, b\rangle$

$$\lim_{x\to x_1-0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_1} f(x)|_{\langle a,x_1)}$$

   $f(x)|_{\langle a,x_1)} \uparrow$ и ограничена значением $f(x) \Rightarrow$ по теореме о пределе монотонной функции $\exists \lim\limits_{x\to x_1} f(x)|_{\langle a,x_1)} = \sup f(x)|_{\langle a,x_1)}$. Аналогично $\exists \lim\limits_{x\to x_1+0}$. Таким образом, для каждой точки существует предел слева и справа.

2. "$\Rightarrow$" следует из теоремы о сохранении промежутка.

   "$\Leftarrow$"

   Пусть f имеет разрыв в x_0. Тогда либо $f(x_0 - 0) < f(x_0)$, либо $f(x_0) < f(x_0 + 0)$. Рассмотрим $f(x_0) < f(x_0 + 0)$. В силу монотонности f не принимает значений между $f(x_0)$ и $f(x_0 + 0) \Rightarrow$ множество значений — не промежуток. Противоречие.

$\square$

2.47.2 Следствие о множестве точек разрыва

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное *(НБЧС)* множество точек разрыва.

Доказательство. $f(x - 0) < f(x + 0)$

Создадим инъекцию $(f(x-0), f(x+0)) \rightsquigarrow q_x \in \mathbb{Q}$. Возьмём $q_x \in (f(x-0), f(x+0))$. Такая точка будет в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Теперь докажем, что взятие q_x — инъекция. Рассмотрим другую точку разрыва — y.

$$\exists t \in (f(x), f(y))$$

$$f(x) \leq t \leq f(y)$$

$$f(x) \leq f(x+0) \leq t \leq f(y-0) \leq f(y)$$

Таким образом, $(f(x-0), f(x+0))$ и $(f(y-0), f(y+0))$ не имеют общих точек, тогда q_x все разные $\Rightarrow$ взятие q_x — инъекция. Доказать инъективность достаточно, т.к. нам не нужна равномощность. □

2.48 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот.

$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x), M := \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда:

1. f — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$
2. f^{-1} строго монотонна и того же типа *(возрастает или убывает)*
3. f^{-1} непрерывна

Доказательство. Пусть $f \uparrow$

$f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток $\langle m, M\rangle$ *(типы скобок совпадают)*

f — строго монот. $\Rightarrow$ f — инъекция. Тогда $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ — биекция

$\forall x_1 < x_2 \;\; f(x_1) < f(x_2)$

$\forall y_1 < y_2 \;\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ □

2.49 Счетность множества рациональных чисел

$\mathbb{Q}$ — счётное

Доказательство.

$$\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \;\; \mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

$$\forall q \in \mathbb{N} \;\; Q_p = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q} \dots \right\} \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q}_- \text{ — счётно}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \text{ — счётно}$$

□

2.50 Несчетность отрезка

$[0, 1]$ — несчётно

Доказательство. Пусть $\exists \varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$ — биекция

$[a_1, b_1]$ — любая из частей, где нет $\varphi(1)$

$[a_2, b_2]$ — любая из частей, где нет $\varphi(2)$ и $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$

$\bigcap [a_k, b_k] \supset \{x\} \quad x$ — не имеет номера

$\forall k \;\; x \in [a_k, b_k] \Rightarrow x \neq \varphi(k)$ □

2.51 Континуальность множества бинарных последовательностей

$Bin =$ множество бинарных последовательностей

Bin имеет мощность континуума

Доказательство. $\varphi : Bin \to [0, 1] \cup Bin_{\text{кон.}}$

$0101\ldots \mapsto 0.0101\ldots$ — это отображение не иньективно ($0100\ldots \mapsto 0.01; 0011\ldots \mapsto 0.01$)

Иньекция достигается тем, что конечные дроби идут в $Bin_{\text{кон.}}$, а бесконечные в $[0, 1]$ □

2.52 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования.

2.52.1 Равносильность двух определений производной

Определение 1 $\Leftrightarrow$ определению 2, т.е.

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \in \mathbb{R}$$

$$A = B$$

Доказательство. Докажем "$\Leftarrow$".

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

Докажем "$\Rightarrow$".

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$\square$

2.52.2 Правила дифференцирования

$f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, дифф. в x_0

Тогда указанные ниже в левых частях дифференцируемы в x_0 и их производные равны.

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g(x_0) \neq 0$:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Доказательство. Докажем 4 по определению.

$$\frac{\frac{f}{g}(x_0) + h - \frac{f}{g}(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)} \xrightarrow[h \to 0]{} \text{ОК}$$

$\square$

2.53 Дифференцирование композиции и обратной функции

2.53.1 Дифференцирование композиции

$f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle \quad x \in \langle a, b\rangle \quad f$ — дифф. в x

$g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R} \quad g$ — дифф. $y = f(x)$

Тогда $g \circ f$ — дифф. в x; $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Доказательство.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h, \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k$$

$$]f'(x)h + \alpha(h)h = k; \quad k \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(k)(f'(x)h + \alpha(h)h) =$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h$$

$$]g'(f(x))\alpha(h)h + \beta(k)f'(x)h + \beta(k)\alpha(h)h = \gamma(h) \cdot h; \quad \gamma(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

□

2.53.2 Дифференцирование обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот. $x \in \langle a, b\rangle$ f — дифф. в x; $f'(x) \neq 0$

По определению $f \quad \exists f^{-1}$

Тогда f^{-1} — дифф. в $y = f(x)$ и

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Доказательство. $\forall k \;\; \exists h : f(x+h) = y + k$

$$h = (x+h) - x = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x+\tau(k)) - f(x)}{(x+\tau(k)) - x}} \xrightarrow[\substack{k\to 0\\ \tau(k)\to 0}]{\text{по т.о непр. обр. ф}} \frac{1}{f'(x)}$$

□

2.54 Теорема Ферма *(с леммой)*

2.54.1 Лемма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — дифф. в $x_0 \in (a, b)$; $f'(x_0) > 0$

Тогда $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall x : x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)\ \ f(x_0) < f(x)$

и $\forall x : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\ \ f(x_0) > f(x)$

Примечание. Это не монотонность.

Доказательство.
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) > 0$$

$$x \to x_0 + 0 \quad x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \text{ вблизи } x_0 \textit{ (по теор. о стабилизации знака)}$$

$$x \to x_0 - 0 \quad x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \text{ вблизи } x_0$$

□

2.54.2 Теорема Ферма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$ — точка максимума

f — дифференцируема в x_0

Тогда $f'(x_0) = 0$

Доказательство. Из леммы.

Если $f'(x_0) > 0$, то справа от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$

Если $f'(x_0) < 0$, то слева от x_0 есть $x : f(x) > f(x_0)$ □

2.55 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра

2.55.1 Теорема Ролля

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

$f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса.

$x_0 = \max f(x); x_1 = \min f(x)$

$\{x_0, x_1\} = \{a, b\} \Rightarrow f = const; f' \equiv 0$

Иначе: пусть $x_0 \in (a, b) \xRightarrow[\text{т. Ферма}]{} f'(x_0) = 0$ □

2.55.2 Вещественность корней многочлена Лежандра

$n \in \mathbb{N}$

$L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$ — **полиномы Лежандра** *(с точностью до умножения на константу)*

$\deg L_n = n$

Утверждение: L_n имеет n различных вещественных корней.

Доказательство. Рассмотрим $(x^2 - 1)^n$. У этого многочлена 2 корня $\{-1, 1\}$, каждый кратности n.

Возьмём производную. По т. Ролля у этого многочлена есть корень $\in (-1, 1)$. Кроме того, $\{-1, 1\}$ все ещё корни, у них кратность $n - 1$. Т.к. $\deg = 2n - 1$, кратность нового корня 1. На n-ном шаге получается n корней, каждый кратности 1. □

2.56 ! Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной

2.56.1 Теорема Лагранжа

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр., дифф. в (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Примечание. Теорему Лагранжа можно интерпретировать как следующее: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — тангенс угла между хордой графика и горизонталью, а $f'(c)$ — касательная. Таким образом, если провести хорду графика, то можно найти точку между точками пересечения графика и хорды такую, что касательная к графику будет параллельна этой хорде.

Доказательство. Следует из теоремы Коши при $g(x) = x$ □

2.56.2 Теорема Коши

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

f, g — дифф. в (a, b); $g' \neq 0$ на (a, b). Тогда

$\exists c \in (a, b)$, такое что:
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Теоремы Коши.

$F(x) := f(x) - kg(x)$

Подберем k такое, что $F(b) = F(a)$

$$f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$$
$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По т. Ролля $\exists c : F'(c) = 0$
$$f'(c) - kg'(c) = 0$$
$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

2.56.3 Следствия об оценке приращения и о пределе производной

1. f непр. на $[a, b]$, дифф. в (a, b)

   $\exists M : \forall x \ \ |f'(x)| \le M$

   Тогда $\forall x, x + h \in [a, b]$

$$|f(x + h) - f(x)| \le M|h|$$

2. f — непр. на $[a, b\rangle$, дифф. на $(a, b\rangle$

   $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = k \in \overline{\mathbb{R}}$

   Тогда $f'_+(a) = k$

Доказательство. Следствия 2.

$\exists a < c < a + h$, такой что:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(c) \xrightarrow[h \to 0]{} k$$

□

2.57 Теорема Дарбу. Следствия

2.57.1 Теорема Дарбу

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — дифф. на $[a, b]$

Тогда $\forall C$ лежащего между $f'(a), f'(b)$

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$$

Доказательство. $F(x) := f(x) - C \cdot x$ — у неё $\exists \max\limits_{[a,b]}$ *(в силу непрерывности)*

$F'(x) = f'(x) - C \quad F'(a)$ и $F'(b)$ разных знаков.

1. $F'(a) > 0 \;\; F'(b) < 0$

   По лемме при $x > a$, близких к $a \;\; f(x) > f(a) \Rightarrow \max f$ достигается в $c \in (a, b)$

□

2.57.2 Следствия

Следствие. 1. Функция f' обладает свойством “сохранять промежуток”

2. f' не может иметь разрывов вида “скачок”

2.58 Теорема о свойствах показательной функции

f — показ. ф-ция

Тогда:

1. $\forall x \;\; f(x) > 0; f(0) = 1$
2. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$
3. f — строго монот.: $a := f(1)$

   Тогда $a \neq 1$, если $a > 1$ — возр., если $a < 1$ — убыв.
4. Множество значений $f \quad (0, +\infty)$
5. $\tilde{f}(1) = f(1)$, тогда $f = \tilde{f}$

Доказательство. 1. $f \not\equiv 0 \;\; \exists f(x_0) \neq 0$

   $x = x_0, y = 0 \quad f(x_0 + 0) = f(x_0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$

Если $f(x_1) = 0$, тогда

$$\forall x \quad f(x) = f(x - x_1) \cdot f(x_1) = 0$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

2. Как в опр. ст. с рациональным показателем
   (a) $r = 1$
   (b) $r \in \mathbb{N}$
   $$f(2x) = f(x + x) = f(x) \cdot f(x) = f(x^2)$$
   $$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$$
   (c) $r \in$“$-\mathbb{N}$”
   $$1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx) \cdot f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$$
   (d) $r = 0$
   $$f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$$
   (e) $r = \frac{1}{n}$
   $$f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = (f(\frac{x}{n}))^n$$
   $$f(\frac{1}{n}x) = (f(x))^{\frac{1}{n}}$$
   (f) $r = \frac{m}{n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
   $$f(\frac{m}{n}x) = f(m \cdot (\frac{1}{n}x)) = (f(\frac{1}{n}x))^m = (f(x)^{\frac{1}{n}})^m$$

3. $a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \;\; f(r) = 1^r = 1$

   f – непр. и $f(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \equiv 1$

   $a > 1$. Тогда $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$

   $$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r > 1$$

   Значит $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ берем $r_k \to x (r_k \in \mathbb{Q})$

   $f(r_k) \to f(x)$, значит $f(x) \geq 1$

   $$f(x) = f((x - r) + r) = f(x - r) \cdot f(r) > 1$$

$\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$

возр. $x \in \mathbb{R}, h > 0$

$f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$

$f(h) > 1 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$

$a < 1$ — аналогично.

4. $f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$

   $\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$

   $f(1) = a > 1$

   $a^n, n \in \mathbb{Z}$

5. $\tilde{f}(1) = f(1) \Rightarrow \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$

   $\forall x \quad r_k \to x$

   $\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$

   $\tilde{f}(r_k) \to \tilde{f}(x); f(r_k) \to f(x) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$

□

2.59 Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия

$\exists$ показательная функция f_0, удовлетворяющая

$$\frac{f_0(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

f — произвольная показательная функция. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x : f(x) = f_0(\alpha x)$

Доказательство. $a := f(1), \exists \alpha : f_0(\alpha) = a$

$f_0(\alpha x)$ и есть $f(x)$, т.к. у них совпадает значение в 0.

Докажем, что $f_0(\alpha x)$ — показ. функция.

$$f_0(\alpha(x+y)) = f_0(\alpha x + \alpha y) = f_0(\alpha x) f_0(\alpha y)$$

□

Следствие. f_0 — единственна.

Доказательство. Пусть $h(x)$ — ещё одна такая функция $\Rightarrow \exists\alpha : h(x) = f_0(\alpha x)$

$$1 \xleftarrow[x\to 0]{} \frac{h(x)-1}{x} = \frac{f_0(\alpha x)-1}{x} = \frac{f_0(\alpha x)-1}{\alpha x}\cdot\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

□

Следствие. $\forall a > 0, a \neq 1 \quad \exists! f : f(1) = a$

Доказательство. Для этого a $\exists!\alpha : f_0(\alpha) = a$

$f(x) := f_0(\alpha x)$

$f(1) = a = f(\alpha)$ □

2.60 Показательная функция от произведения

f — показ. ф-ция. $\forall r \in \mathbb{R} \quad f(rx) = (f(x))^r$

Доказательство. Для $r \in \mathbb{Q}$ доказано выше. (2.58, стр. 54)

$\lhd r \in \mathbb{R}$. $\exists a_n \in \mathbb{Q} \to r$

$f(a_n x) = f(x)^{a_n} \to f(x)^r$ □

2.61 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Остаток: $T_n := o((x-x_0)^{n+1}), x \to x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^{n+1})$$

Доказательство.

Лемма 1. *$\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle, \varphi$ n раз дифференциируема в x_0 и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$.*

Тогда $\varphi(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0$

Доказательство. База: $n = 1$.

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0)$$

Переход:

$\varphi'(x) = o((x-x_0)^n)$ по индукционному переходу.

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = 0 + o((x-x_0)^n)(x-x_0) + o(x-x_0) =$$
$$= o((x-x_0)^{n+1}) + o(x-x_0) = o((x-x_0)^{n+1})$$

□

$T_n := f(x) - f(x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ — подходит в лемму $\Rightarrow T_n = o((x-x_0)^{n+1})$ □

2.62 ! Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Остаток: $R_n := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $c \in (x_0, x)$ *(или наоборот, если $x < x_0$).*

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство.

$$g(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$g(x) = 0, g(x_0) \overset{\text{def}}{=} R_n$

$$g'(t) = \left(f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)'$$

$$g'(t) = 0 - f'(t) - (f''(t)(x-t) - f'(t)) - \ldots - \left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)'$$

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$h(x) := (x_0 - x)^{n+1}, n+1 > 0$

По т. Коши: *(можно применить, т.к. $h' \neq 0$, g, h — дифф. на (x, x_0))*

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$$

и при этом $c \in (x, x_0)$.

$$\frac{0 - R_n}{0 - (x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□

2.63 Метод Ньютона

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — дважды дифф.

$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} |f'| > 0$

$M := \sup |f''|$

$\xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$

$x_1 \in (a, b) : |x_1 - \xi|\frac{M}{2m} < 1$

Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Тогда $\exists \lim x_n = \xi$ и при этом !. Кроме того, оно очень быстро сходится.

$$|x_n - \xi| \le \left(\frac{M}{2m}|x_1 - \xi|\right)^{2^n}$$

2.64 Иррациональность числа e^2

e^2 — ирр.

Доказательство. Предположим обратное: e^2 — рационально. Тогда e^2 представимо следующим образом:

$$e^2 = \frac{2k}{n}$$

$$ne = 2ke^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = (2k)!e^{-1}$$

$$n(2k-1)!e = n(2k-1)!\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{e^c}{(2k)!}\right) = \text{целое число} + \frac{ne^c}{2k}$$

$$\frac{ne^c}{2k} \le \frac{ne}{2k} = e \cdot e^{-2} = e^{-1} \le \frac{1}{2}$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)!\left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{(2k)!} - \frac{e^d}{(2k+1)!}\right) = \text{целое число} - \frac{e^d}{2k+1}$$

Заметим, что $d \in [-1, 0]$

$$\frac{e^d}{2k+1} \leq \frac{e^d}{3} \leq \frac{e^0}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Дробная часть левой части $\leq \frac{1}{2}$, дробная часть правой $\geq \frac{2}{3}$ — противоречие. $\square$

2.65 Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры

$|f^{(n+1)}| \leq M$

$$|R_n(x_0)f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Пусть $f \in C^\infty\langle a,b\rangle, \exists M > 0 : \forall n \in N, t \in \langle a,b\rangle \quad |f^{(n)}(t)| \leq M$. Тогда

$$T_n(x_0)f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

2.66 Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби

$P(x), Q(x)$ — многочлен $\deg P < \deg Q = n$

$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_m)^{k_m} \quad (k_1 + \ldots + k_m = n; a_i \neq a_j)$

Тогда $\exists$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right) + \left(\frac{B_1}{(x-a_2)} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}\right) +$$
$$+ \ldots + \left(\frac{C_1}{(x-a_m)} + \frac{C_2}{(x-a_m)^2} + \ldots + \frac{C_{k_m}}{(x-a_m)^{k_m}}\right)$$

Доказательство.

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_m)^{k_m}} = \frac{1}{(x-a_1)^{k_1}} \frac{P(x)}{(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_m)^{k_m}} =$$

$$= \frac{1}{(x-a_1)^{k_1}} (A_{k_1} + A_{k_1+1}(x-a_1) + A_{k_1-2}(x-a_1)^2 + \ldots + A_1(x-a_1)^{k_1} + o((x-a_1)^{k_1}))$$

$$\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}\right) = \frac{o((x-a_1)^{k_1})}{(x-a_1)^{k_1}}$$

$\frac{P}{Q}$— (Пр. часть) = знам. сократится $\Rightarrow$ многочлен $\equiv 0$ $\square$