Первые 40 минут пропущены

Степенные ряды

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Интегрируем:

$$f'(x) = \sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + C$$

При $x = 0$ $C = 0$

Ещё раз интегрируем:

$$\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\int \ln(1-x)dx = (1-x)\ln(1-x) + x + C$$

При $x = 0$ $C = 0$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x \to 1-0} (1-x)\ln(1-x) + x = 1$$

Следствие (т. Абеля).

- $\sum a_n = A$
- $\sum b_n = B$
- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
- $\sum c_n = C$

Тогда $C = AB$

Доказательство. $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1]$

При $x = 1$ есть абсолютная сходимость $f(x)$ и $g(x)$. Можно перемножать: $f(x)g(x) = h(x)$, при $x \to 1 - 0$ $A \cdot B = C$ $\square$

Экспонента (комплексной переменной)

Определение.

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Свойства:

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(z)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$

Возвращаем кредит: в первом семестре говорилось, что $\exists f_0$ — показательная функция, такая что $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ и $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f_0(x)-1}{x} = 1$

$f_0(x) := \exp(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp'(0) = 1$$

Теорема 0.1.

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$$

Упражнение. Доказать к следующей лекции

Теория меры

Системы множеств

Здесь и далее система $\iff$ множество, так говорится, чтобы избежать “множество множеств”

Обозначение. A_i — множества. Тогда $\bigsqcup\limits_i A_i$ — дизъюнктное объединение.

A_i — попарно не пересекаются $\iff$ “A_i — дизъюнктно”

Определение. X — множество, тогда 2^X — система всех подмножеств X.

$\mathcal{P} \subset 2^X$ — **полукольцо**, если:

- $\varnothing \subset \mathcal{P}$
- $\forall A, B \in \mathcal{P} \;\; A \cap B \in \mathcal{P}$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P} \;\; \exists$ кон. и дизъюнктные $B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup\limits_i B_i$

Пример. 1. 2^X — полукольцо

2. $X = \mathbb{R}^2, \mathcal{P} =$ ограниченные подмножества, в том числе $\varnothing$

3.

Определение. Ячейка в $\mathbb{R}^m$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \ \ x_i \in [a_i, b_i)\}$

$\mathcal{P}$ — множество ячеек в $\mathbb{R}^m$ — полукольцо.

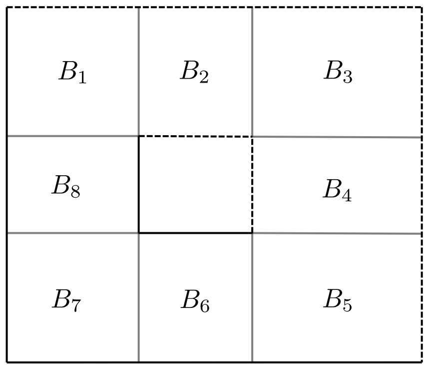
Доказательство. $\lhd m = 2$

(a) Очевидно

(b) $A \cap B = [a, a') \cap [b, b') = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall i = 1, 2 \ \ \max(a_i, b_i) \leq x_i < \min(a'_i, b'_i)\}$

(c) $A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{8} B_i$

$\square$



4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\forall i \ \ A_i := A$$

$$X = \bigotimes_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(a_1, a_2, a_3, \dots), \forall i \ \ a_i \in A_i\}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall l \ \ \alpha_l \in A_{i_l}$$

$$\mathcal{P} = \{X_\sigma\}_\sigma$$

$$X_\sigma = \{a \in X : a_{i_1} = \alpha_1, \dots, a_{i_k} = \alpha_k\}$$

$\mathcal{P}$ — полукольцо

(a) $\varnothing = X_\sigma, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cup \sigma'}$

(c) $X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \sigma' = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} 1$

$X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$ = на первой координате 6, на второй — не 1 = $X_{\sigma_2} \cap X_{\sigma_3} \cap \cdots \cap X_{\sigma_6}, \sigma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & k \end{pmatrix}$.

5. Ячейки с рациональными координатами.

Свойства:

1. Как показывают примеры:
   (a) $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{P}$
   (b) $A, B \in \mathcal{P}$, нельзя утверждать, что:
      - $A \cap B \notin \mathcal{P}$
      - $A \setminus B \notin \mathcal{P}$
      - $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \notin \mathcal{P}$

2. Модернизируем утверждение 3:

   $A, A_1 \dots A_n \in \mathcal{P}$. Тогда $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ — представимо в виде дизъюнктного объединения элементом $\mathcal{P}$

   Доказательство. Докажем по индукции по n.

   База ($n = 1$) — аксиома 3.

   Переход:

$$
\begin{aligned}
A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= (A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})) \setminus A_n \\
&= \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} B_i \right) \setminus A_n \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{k} (B_i \setminus A_n) \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{l_i} D_{ij}
\end{aligned}
$$

$\square$

Определение. $\vartheta \subset 2^X$ — алгебра подмножеств в X:

1. $\forall A, B \in \vartheta \;\; A \setminus B \in \vartheta$
2. $X \in \vartheta$

Свойства:

1. $\varnothing = X \setminus X \in \vartheta$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \vartheta$
3. $A^c = X \setminus A\vartheta$
4. $A \cup B \in \vartheta$, потому что $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
5. $A_1 \ldots A_n \in \vartheta \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \vartheta$ — по индукции
6. Всякая алгебра есть полукольцо

   Обратное неверно, см. пример 2.

Пример. 1. 2^X

2. $X = \mathbb{R}^2, \vartheta$ — ограниченные подмножества или их дополнения.