

## Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример:  $\lambda z.(\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e)\ f$  эквивалентно  $\lambda z.((\lambda x.(a\ b\ c\ (\lambda y.(d\ e))))\ f)$ . В аппликациях скобки расставляются слева направо:  $\lambda z.(\lambda x.(a\ b\ c\ (\lambda y.(d\ e))))\ f$  можно преобразовать в  $(\lambda z.((\lambda x.((((a\ b)\ c)\ (\lambda y.(d\ e))))))\ f)$ .

- (a) Расставьте скобки в выражении:  $\lambda z.\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e\ f$

Решение.

$$\lambda z.(\lambda x.(((a\ b)\ c)\ (\lambda y.((d\ e)\ f))))$$

□

- (b) Уберите все «лишние» скобки из выражения:  $(\lambda f.((\lambda x.(f\ (f\ (x\ (\lambda z.(z\ x))))))\ z))$

Решение.

$$\lambda f.\lambda x.(f\ f\ x\ (\lambda z.z\ x))\ z$$

Почему  $z$  не под  $\lambda z$ ?

□

- (c) Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

2. Напомним определения с лекций:

| Обозначение | лямбда-терм                   | название   |
|-------------|-------------------------------|------------|
| $T$         | $\lambda a.\lambda b.a$       | истина     |
| $F$         | $\lambda a.\lambda b.b$       | ложь       |
| $Not$       | $\lambda x.x\ F\ T$           | отрицание  |
| $And$       | $\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$ | конъюнкция |

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- (a)  $T\ F$

Решение.

$$T\ F \rightarrow_{\beta} (\lambda a.\lambda b.a)\ F \rightarrow_{\beta} \lambda b.F$$

□

- (b)  $(T\ Not\ (\lambda t.t))\ F$

Решение.

$$\begin{aligned} (T\ Not\ (\lambda t.t))\ F &\rightarrow_{\beta} \\ ((\lambda b.Not)\ (\lambda t.t))\ F &\rightarrow_{\beta} \\ Not\ F &\rightarrow_{\beta} \end{aligned}$$

$$F F T \rightarrow_{\beta} \\ (\lambda b.b) T \rightarrow_{\beta} T$$

□

(c)  $And (And F F) T$ *Решение.*

$$And (And F F) T \rightarrow_{\beta} \\ And ((\lambda y.F y F) F) T \rightarrow_{\beta} \\ And ((\lambda y.(\lambda b.b) F) F) T \rightarrow_{\beta} \\ And ((\lambda y.F) F) T \rightarrow_{\beta} \\ And F T \rightarrow_{\beta} \\ (\lambda y.F y F) T \rightarrow_{\beta} \\ F T F \rightarrow_{\beta} \\ (\lambda b.b) F \rightarrow_{\beta} F$$

□

3. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

(a) Дизъюнкция

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.a T b$ 

□

(b) Штрих Шеффера («и-не»)

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.a (Not b) T$ 

□

(c) Искключающее или

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.a (Not b) b$ 

□

4. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

| Обозначение | лямбда-терм                               | название           |
|-------------|---|--------------------|
| $\bar{n}$   | $\lambda f.\lambda x.f^{(n)} x$           | чёрчевский нумерал |
| $(+1)$      | $\lambda n.\lambda f.\lambda x.n f (f x)$ | прибавление 1      |
| $(+)$       | $\lambda a.\lambda b.a (+1) b$            | сложение           |
| $(\cdot)$   | $\lambda a.\lambda b.a ((+) b) \bar{0}$   | умножение          |

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Умножение на 2 (*Mul2*)

Решение.  $\lambda a.((+) a a)$

□

- (b) Возведение в степень

Решение.  $\lambda a.\lambda b.b ((\cdot) a) \bar{1}$

□

- (c) Проверка на чётность

Решение.  $\lambda a.a \text{ Not } T$

□

- (d) *IsZero*: возвращает  $T$ , если аргумент равен нулю, иначе  $F$

Решение.

- $\text{Flip} := \lambda a.a ((\cdot) \bar{0}) \bar{1}. \text{Flip}(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ 0, & a \neq 0 \end{cases}$
- $\text{IsZero} := \lambda a.(\text{Flip } a) \text{ Not } T$

□

#### 5. Напомним определения с лекций:

| Обозначение   | лямбда-терм                             | название        |
|---------------|---|-----------------|
| <i>MkPair</i> | $\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x a b)$ | создание пары   |
| <i>PrL</i>    | $\lambda p.p T$                         | левая проекция  |
| <i>PrR</i>    | $\lambda p.p F$                         | правая проекция |

- (a) Убедитесь, что  $\text{PrL } (\text{MkPair } a b) \rightarrow_{\beta} a$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 &\text{PrL } (\text{MkPair } a b) \rightarrow_{\beta} \\
 &\text{PrL } (\lambda x.x a b) \rightarrow_{\beta} \\
 &(\lambda p.p T) (\lambda x.x a b) \rightarrow_{\beta} \\
 &(\lambda x.x a b) T \rightarrow_{\beta} \\
 &T a b \rightarrow_{\beta} a
 \end{aligned}$$

□

- (b) Постройте операцию вычитания 1 из числа

Решение.  $\lambda a.a (\text{PrL } (\lambda p.(\text{MkPair } (\text{PrR } p) ((+1) (\text{PrR } p)))) (\text{MkPair } \bar{0} \bar{0}))$

□

- (c) Постройте операцию вычитания чисел

*Решение.*  $\lambda a.\lambda b.b (-1) a$ 

□

- (d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)

*Решение.*

□

- (e) Постройте операцию деления чисел

*Решение.* Пусть дробь  $\frac{n}{m}$  есть применение коллбека  $f$  к  $m$  аргументам  $n$  раз (распределенных равномерно) с комбинирующим коллбеком  $g$ :

$$\frac{4}{3} \leftrightarrow \lambda f.\lambda g.\lambda a_1.\lambda a_2.\lambda a_3.g (f (f a_1)) (f a_2) (f a_3)$$

Определим конвертер  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \text{FRAC}$ :

$$\text{Frac} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.\lambda g.n (m (\lambda t.\lambda z.\lambda v.t (\lambda q.z q v)) (\lambda x.x) (\lambda a.\lambda b.b (f a))) g$$

$$t_1 = \lambda z.\lambda v.(\lambda x.x) (\lambda q.z q v) \rightarrow_\beta \lambda z.\lambda v.\lambda q.z q v$$

$$t_2 = \lambda z_1.\lambda v_1.(\lambda z_2.\lambda v_2.\lambda q_2.z_2 q_2 v_2) (\lambda q_1.z_1 q_1 v_1) \rightarrow_\beta \lambda z_1.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda q_2.z_1 q_2 v_1 v_2$$

$$t_m = \lambda z.\lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.z q v_1 v_2 \dots v_m$$

$$r_m := t_m(\lambda a.\lambda b.b (f a)) = \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda a.\lambda b.b (f a)) q v_1 v_2 \dots v_m$$

$$= \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda b.b (f q)) v_1 v_2 \dots v_m$$

$$= \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.v_1 (f q) v_2 \dots v_m$$

$$r_m g = \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q.g (f q) v_2 \dots v_m$$

$$r_m (r_m g) = \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q_1.(r_m g) (f q_1) v_2 \dots v_m$$

$$= \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q_1.(\lambda v_3 \dots v_m.\lambda q_2.g (f q_2) (f q_1) v_3 \dots v_m) v_2 \dots v_m$$

$$= \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q_1.(\lambda q_2.g (f q_2) (f q_1) v_2 \dots v_{m-1}) v_m$$

$$= \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q.g (f v_m) (f q) v_2 \dots v_{m-1}$$

Если  $n < m$ :

$$r_m^n g = \lambda v_2 \dots \lambda v_m.\lambda q.g (f v_{m-n+1}) \dots (f v_m) (f q) v_2 \dots v_{m-n}$$

Если  $n \geq m$ , то мы начинаем строить новый слой в скобках. Это то, что нам нужно.

Если не верится, то в lci можно вбить следующее:  $(\backslash n.\backslash m.\backslash f.\backslash g.n (m (\backslash t.\backslash z.\backslash v.t (\backslash q.z q v)) (\backslash x.x) (\backslash a.\backslash b.b (f a))) g) (\backslash f.\backslash x.f(f(f(f(x)))) (\backslash f.\backslash x.f(f(f(x))))$  и получить  $\frac{4}{3}$  из примера выше.

Из дроби легко получить результат (с округлением *вверх*) подстановкой вместо  $g$  функции, которая берет первый из  $m$  аргументов,  $f$  оставить свободной, вынести все  $a_i$  как  $x$ . Для округления вниз надо вместо  $g$  подставить функцию, которая берёт последний аргумент.

$$\text{Call} = \lambda f. \lambda n. \lambda x. n (\lambda g. g x) f \leftrightarrow f \underbrace{x \dots x}_n$$

$$\text{Last} = \lambda n. n (\lambda x. \lambda t. x) (\lambda x. x) (\lambda x. x) \leftrightarrow \lambda t_1 \dots t_n. t_n$$

$$\text{Floor} = \lambda m. \lambda z. \lambda f. \lambda x. \text{Call} (z f \text{Last}) m x$$

$$\text{Div} = \lambda n. \lambda m. \lambda f. \lambda x. \text{Floor} m (\text{Frac } n m) f x$$

□

- (f) Сравнение двух чисел ( $\text{IsLess}$ ) — истина, если первый аргумент меньше второго.

*Решение.*  $\text{IsLess} = \lambda a. \lambda b. \text{IsZero} (- b a)$

□

6. Существует ли выражение  $A$ , что существуют такие выражения  $B$  и  $C$ , что  $A \rightarrow_\beta B$  и  $A \rightarrow_\beta C$ , но  $B$  и  $C$  различны?

*Решение.*

□

7. Будем говорить, что лямбда-выражение находится в нормальной форме, если в нём невозможно провести бета-редукции. Нормальной формой выражения называется результат (возможно, многократной) его бета-редукции, находящийся в нормальной форме. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

(a)  $\bar{2} \bar{2}$

(b)  $\bar{2} \bar{2} \bar{2}$

(c)  $\bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2} \bar{2}$

*Решение.* (a)

$$\begin{aligned} \bar{2} \bar{2} &\rightarrow_\beta \\ (\lambda f. \lambda x. f (f x)) \bar{2} &\rightarrow_\beta \\ \lambda x. \bar{2} (\bar{2} x) &\rightarrow_\beta \\ \lambda x. \bar{2} ((\lambda g. \lambda y. g (g y)) x) &\rightarrow_\beta \\ \lambda x. \bar{2} (\lambda y. x (x y)) &\rightarrow_\beta \\ \lambda x. (\lambda h. \lambda z. h (h z)) (\lambda y. x (x y)) &\rightarrow_\beta \\ \lambda x. \lambda z. (\lambda y. x (x y)) ((\lambda y. x (x y)) z) &\rightarrow_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda x.\lambda z.(\lambda y.x (x y)) (x (x z)) &\rightarrow_\beta \\ \lambda x.\lambda z.x (x (x (x z))) &\rightarrow_\beta \bar{4}\end{aligned}$$

□

8. Напомним определение Y-комбинатора:  $\lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))$ . Напомним, что отношение бета-эквивалентности ( $=_\beta$ ) есть транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции. Будем говорить, что выражение не имеет нормальной формы, если никакая конечная последовательность его бета-редукций не приводит к выражению в нормальной форме.

- (a) Покажите, что  $Y f =_\beta f (Y f)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}Y f &\rightarrow_\beta \\ (\lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))) f &\rightarrow_\beta \\ (\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x)) &\rightarrow_\beta \\ \underbrace{f ((\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x)))}_{\varphi} &\leftarrow_\beta f (Y f)\end{aligned}$$

$Y f \rightarrow_\beta \varphi \Rightarrow Y f =_\beta \varphi$  и  $f (Y f) \rightarrow_\beta \varphi \Rightarrow f (Y f) =_\beta \varphi$ , следовательно  $Y f =_\beta \varphi =_\beta f (Y f)$ . □

- (b) Покажите, что выражение  $Y f$  не имеет нормальной формы;  
 (c) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f.\bar{0})$  имеет нормальную форму.

*Решение.*

$$\begin{aligned}Y (\lambda f.\bar{0}) &\rightarrow_\beta \\ (\lambda f.\bar{0}) (Y (\lambda f.\bar{0})) &\rightarrow_\beta \bar{0}\end{aligned}$$

□

- (d) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) \bar{2}$  имеет нормальную форму.  
 (e) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} ((+1) (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?  
 (f) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?  
 (g) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления  $n$ -го числа Фибоначчи.

Решение.

$$(Y \lambda f. \lambda a. \lambda b. \lambda n. (\text{IsZero } n) a (f b (a + b) (n - 1))) 1$$

□

9. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)`. Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:

- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
  - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
  - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
  - (d) можно ли определить функцию вычитания 1 и вычитания двух чисел? Что получается, а что — нет?
10. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$L := \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\text{this is a fixed point combinator})$$

$$R := \text{LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL}$$

В данном определении терм  $R$  является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм  $F$ , выполнено  $R F =_{\beta} F (R F)$ .

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
  - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами (без ё) и осмысленной русской фразой в терме  $L$ ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z (y z)$$

$$K := \lambda x. \lambda y. x$$

$$I := \lambda x. x$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора  $X$  можно найти выражение  $P$  (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов  $S$  и  $K$ ), что  $X =_{\beta} P$ . Будем говорить, что комбинатор  $P$  *выражает* комбинатор  $X$  в базисе  $SK$ .

Выразите в базисе  $SK$ :

(a)  $F = \lambda x. \lambda y. y$

(b)  $\bar{1}$

(c)  $Not$

(d)  $Xor$

(e)  $InL$

(f)  $\bar{n}$