Алгоритмы в математике *(теория чисел)*

Михайлов Максим

27 сентября 2021 г.

Оглавление

Лекция 1

4 сентября

1 Вводная лекция

Хотя этот курс формально называется “теория чисел”, мы не будем рассматривать только теорию чисел. Теория чисел, разумеется, про числа, делители, простоту, алгоритм Евклида и т.д.. Однако, её можно обобщить на произвольные полугруппы, группы, кольца и поля. Поэтому мы будем рассматривать теорию чисел через призму общей алгебры.

Например, в кольце целых чисел есть понятие “простое число”. А в каких ещё кольцах есть “простые” элементы и каким условиям эти кольца удовлетворяют? Оказывается, кольцо многочленов содержит простые элементы и поэтому там применим алгоритм Евклида.

Мы также затронем теорию категорий *(терминальные объекты)*, алгебраическую геометрию *(криптографию на эллиптических кривых)*.

Лекция 2

11 сентября

План курса:

- Полугруппа
- Группа
  - Гомоморфизм
  - Фактор-группа
  - Теорема о ядре
  - Произведение групп
- Кольцо
  - $\mathbb{Z}$
  - Остатки
  - Китайская теорема об остатках
  - Алгоритм Евклида
  - Кольцо многочленов
  - Алгебра многочленов
- Поле
  - Поля Галуа
  - Расширения Галуа
  - Алгебраические кривые
  - Диофантовы уравнения

Начиная с групп мы будем использовать формализм теории категорий.

2 Алгебраические структуры

2.1 Структуры с одним законом композиции

Пусть M — множество с законом композиции $T : \forall x, y \in M \ \ \exists x T y \in M$.

Примечание. Такой закон называется **внутренним**, т.к. оба его аргумента $\in M$.

Обозначение. $x \cdot y, x \circ y, x + y, x^y, x * y$

Закон задает структуру на множестве.

Определение. $e_L \in M : \forall x \in M \ \ e_L \cdot x = x$ — **левый нейтральный** элемент

$e_R \in M : \forall x \in M \ \ x \cdot e_R = x$ — **правый нейтральный** элемент

Лемма 1. $\exists e_L, e_R \in M \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\text{def}}{=} e$

Доказательство. $e_L = e_L \cdot e_R = e_R$ □

Лемма 2. e, e' — нейтральные элементы $\Rightarrow e = e'$.

Доказательство. $e = e \cdot e' = e'$ □

Определение. $p \in M : p \cdot p = p$ — **идемпотент**

Определение. $z \in M : z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$ — **регулярный** элемент *(левый)*

Определение. $x \in M, \exists e \in M$. Элемент $z \in M : z \cdot x = e$ — **левый обратный** элемент к x.

$y \in M : x \cdot y = e$ — **правый обратный** элемент к x.

Лемма 3. Если $\exists y, z$, то $y = z \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}$ — **обратный** элемент.

Доказательство. $z = z \cdot e = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = e \cdot y = y$. Здесь мы воспользовались **ассоциативностью** закона композиции. □

Определение. $\Theta_L : \forall x \in M \ \ \Theta_L \cdot x = \Theta_L$ — **поглощающий** *(слева)* элемент

$\Theta_R : \forall x \in M \ \ x \cdot \Theta_R = \Theta_R$ — **поглощающий** *(справа)* элемент

Лемма 4. $\exists \Theta_L, \Theta_R \Rightarrow \Theta_L = \Theta_R \stackrel{\text{def}}{=} \Theta$

Доказательство. $\Theta_L = \Theta_L \cdot \Theta_R = \Theta_R$ □

$\lhd x, y, z \in M, x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$ **или** $x \cdot (y \cdot z)$. Какое выбрать? Без ассоциативности непонятно. Поэтому мы требуем ассоциативность в рамках этого курса.

То же самое можно сказать для семейства элементов.

Теорема 1 (об ассоциативном законе). $1 \leq k \leq n \Rightarrow T_{i=1}^{n} x_i = \left(T_{i=1}^{k} x_i\right) T \left(T_{i=k+1}^{n} x_i\right)$

Определение. $\lhd \forall x, y \in M \;\; xTy = yTx$. Тогда T называется **коммутативным**.

Определение. $\exists x, y \in M : xTy = yTx$. Тогда x, y называются **перестановочными** относительно закона.

Теорема 2 (об ассоциативном, коммутативном законе). Аргументы ассоциативного, коммутативного закона можно переставлять как угодно.

2.2 Структуры с двумя законами композиции

Пусть M — множество с законами композиции $*, \circ$. Нас интересует случай, когда эти два закона взаимосвязаны.

Как воспринимать $x * y \circ z$? Может иметь место **дистрибутивность** $*$ относительно $\circ$ *(слева)*: $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$\lhd e$ — нейтральный элемент по $\circ$. $\lhd x * y = x * (e \circ y) = (x * e) \circ (x * y) \Rightarrow x * e = e$. Поэтому из поля нельзя убрать ноль.

2.3 Основные алгебраические структуры

- **Полугруппа** — множество с ассоциативным законом
- **Моноид** — полугруппа с единицей
- **Группа** — моноид с обратным элементом для любого
- **Абелева группа** — группа с коммутативным законом
- **Кольцо** — два закона, по первому — абелева группа, по второму — полугруппа
- **Поле** — по двум законам группа

Лекция 3

18 сентября

3 Внешний закон композиции

Пусть Ω — множество.

Определение. Внешний закон композиции — бинарная операция $g : \Omega \times M \to M$:

$$\forall \alpha \in \Omega, x \in M \quad g : (\alpha, x) \mapsto \alpha \perp x \in M$$

Пример. X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Тогда $g(\alpha, x) = \alpha \cdot x$.

Обозначение. $g(\alpha, x)$ обозначается как:

- $\alpha(x)$
- αx
- x^α

Пример. $M = \mathbb{Z}$ — абелева группа по сложению. $\lhd z \in \mathbb{Z}$.

$$\underbrace{z + z + z + \cdots + z}_{n} = nz$$

Слева написано применение внутреннего закона $n-1$ раз, а справа — применение внешнего закона. Не всегда внешний закон можно представить в виде внутреннего, иначе внешний закон был бы не содержательным.

Пусть M имеет внутренний закон композиции $\top$, множество Ω имеет внешний[1] закон $\perp$.

Обозначение.

[1] Относительно M.

- $\top = \circ$
- $\perp(\alpha, x) = \alpha x$

Определение. Внешний закон **согласован** с внутренним законом, если:

$$\alpha(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y)$$

Пример. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, где $\alpha \in \mathbb{R}$

$\lhd$ алгебраические структуры $(M, \circ), (\Omega, *)$ и $\perp$ — внешний закон Ω по M.

Определение.

$$\lhd \alpha, \beta \in \Omega, x \in M \quad (\alpha * \beta)x = \alpha(\beta(x))$$

Такой способ согласования мы называем **действием** Ω на M.

$$(\alpha * \beta)(x \circ y) \overset{\text{согл.}}{=} (\alpha * \beta)(x) \circ (\alpha * \beta)(y)$$
$$\overset{\text{действ.}}{=} \alpha(\beta(x)) \circ \alpha(\beta(y)) = \alpha(\beta(x \circ y))$$

Пример. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$

$\lhd n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2$

$(n \cdot m)(z_1 + z_2)$

Определение. Пусть есть множества $\{M, N \dots \Omega\}$ со своими внутренними законами композиции. Кроме того, некоторые из них могут являться носителями внешнего закона для других множеств. Этот набор множеств, внутренних и внешних законов есть **алгебраическая структура**.

3.1 Фактор-структуры

$\lhd M$, бинарное отношение[2] R

Свойства бинарного отношения:

- $\forall x \ \exists y : xRy$ — полнота
- $\forall x, y \ \ xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRz$ — евклидовость

Определение. R — отношение **эквивалентности**, если оно:

- Рефлексивно
- Симметрично

[2] Над M.

- Транзитивно

Определение. $\lhd(M, R)$ — множество с отношением эквивалентности. Тогда M/R — **фактор-множество**, состоящее из классов эквивалентности M по R. Каждому $x \in M$ сопоставляется класс эквивалентности $[x] \in M/R$

Пример. $\lhd M = \mathbb{N}$ с операцией сложения, $x, y \in M, \lhd(x, y) \in M \times M$.

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

Несложно заметить, что фактор-множество $(M \times M)/\sim$ соответствует $\mathbb{Z}$:

Определение. $x \in M, y \in M$

$$[x \circ y] \overset{?}{=} [x] * [y]$$

Здесь $*$ — **фактор-закон** закона $\circ$.

Пример.

$$(a_1, b_1) \overset{\sim}{+} (a_2, b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Чтобы рассмотреть $\overset{\wedge}{+}$ — фактор-закон операции $\overset{\sim}{+}$, нужно показать, что для $z = [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]$ верно $z = z_1 \overset{\wedge}{+} z_2$

Определение. Закон $\circ$ **согласован** с отношением R, если:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x, x_1 \in M \;\; xRx_1 \\ \forall y, y_1 \in M \;\; yRy_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x \circ y)R(x_1 \circ y_1)$$

Теорема 3. Если закон композиции согласован с отношением эквивалентности, то он совпадает со своим фактор-законом.

$$[x] * [y] \overset{\text{def}}{=} [x \circ y] = [x] \circ [y]$$

Обозначение.

$$M \cdot N \coloneqq \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$$

Пример.

- $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M \times M$
- $(c_1, d_1) \sim (a_1, b_1) \Leftrightarrow c_1 + b_1 = d_1 + a_1$
- $(a_1, b_1) \to [(a_1, b_1)] = z_1 \ni (c_1, d_1)$
- $(a_2, b_2) \to [(a_2, b_2)] = z_2 \ni (c_2, d_2)$
- $(a_1, b_1) \overset{\sim}{+} (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \to [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)] = z$

Выполнено ли $(c_1 + c_2, d_1 + d_2) \in z$?

$$c_1 + c_2 + (b_1 + b_2) = d_1 + d_2 + (a_1 + a_2)$$
$$a_1 + d_1 = b_1 + c_1$$
$$a_2 + d_2 = b_2 + c_2$$

Таким образом, наша операция согласована.

Лекция 4

25 сентября

4 Структура групп

Определение (группа). G — множество с внутренним законом $\cdot$, таким что:

1. $\forall x, y, z \in G \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $\exists e \in G : \forall x \in G \;\; e \cdot x = x \cdot e = x$
3. $\forall x \in G \;\; \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$

Пример. Пусть S — множество, G — группа. Будем обозначать множество отображений $S \to G$ как $M(SG)$. Наделим его структурой группы:

$$f, g \in M(SG) \Rightarrow \begin{cases} (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \\ f_e(x) = e_G \end{cases}$$

Определение. $G, G, \sigma : G \to G'$.

σ — **гомоморфизм** группы G в группу G', если:

$$\forall x, y \in G \;\; \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \sigma(e_G) = e_{G'}$$

Лемма 5. $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$

Доказательство.

$$e_{G'} = \sigma(e_G) = \sigma(xx^{-1}) = \sigma(x)\sigma(x^{-1})$$
$$\sigma(x)^{-1}e_{G'} = \sigma(x)^{-1}\sigma(x)\sigma(x^{-1})$$
$$\sigma(x)^{-1} = \sigma(x^{-1})$$

□

Обозначение.

- $\hom(G\ G')$ — множество всех гомоморфизмов $G \to G'$.
- $\mathrm{End}(G) \coloneqq \hom(G\ G)$.

Определение. $\sigma \in \hom(G\ G')$ называется **изоморфизмом**, если:

$$\chi \in \hom(G'\ G) : \sigma \circ \chi = \mathrm{id}_{G'}, \chi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$$

Обозначение.

- $\mathrm{Iso}(G\ G')$ — множество всех изоморфизмов
- $\mathrm{Aut}(G) \coloneqq \mathrm{Iso}(G\ G)$ — множество **автоморфизмов**

Лемма 6. $\sigma \in \hom(G\ G'), \chi \in \hom(G'\ G'') \Rightarrow \zeta = \chi \circ \sigma \in \hom(G\ G'')$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\forall x, y \in G\ \ \zeta(x \cdot y) &= (\chi \circ \sigma)(x \cdot y) \\ &= \chi(\sigma(x \cdot y)) \\ &= \chi(\sigma(x) \cdot \sigma(y)) \\ &= (\chi \circ \sigma)(x) \cdot (\chi \circ \sigma)(y) \\ &= \zeta(x) \cdot \zeta(y)\end{aligned}$$

□

Примечание. $\mathrm{Aut}(G)$ — группа относительно $\circ$.

Определение. G — группа.

$\lhd S_G = \{S_i\}_{i \in I}$:

$$\forall g \in G\ \ a = \prod_{j \in J \subseteq I} S_i$$

S_G тогда называется **множеством образующих группы** G.

Лемма 7. Мы проиграли, вернемся к этой лемме позже.

Определение (ядро гомоморфизма).

$$\mathrm{Ker}\ \sigma \coloneqq \{g \in G : \sigma(g) = e\}$$

Лемма 8. Если $\mathrm{Ker}\ \sigma = \{e\}$, то $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$, т.е. σ иньективно.

Доказательство.

$$\sigma(x)\sigma(y^{-1}) = \sigma(y)\sigma(y^{-1}) = e_{G'}$$

Таким образом, x есть обратный к y^{-1}, т.е. $x = y$. □

Определение (образ гомоморфизма).

$$\text{Im } \sigma = \{g' \in G' : \exists g \in G : \sigma(g) = g'\}$$

Лемма 9. $\text{Im } \sigma = G' \Rightarrow \sigma$ сюръективно.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Im } \sigma = G' \\ \text{Ker } \sigma = \{e\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma - \text{изоморфизм}$$

Определение. **Подгруппой** H группы G называется подмножество элементов G, на котором групповой закон G индуцирует структуру группы.

Определение. **Несобственные** подгруппы: $\{e_G\}, G$.

Иначе подгруппа **собственная**.

Пример. $\sigma \in \hom(G\ G')$. Тогда Ker σ — подгруппа G, Im σ — подгруппа G'.

4.1 Смежные классы

Пусть G — группа, H — подгруппа G.

Определение. $gH, g \in G$ — **левый смежный класс** группы G по подгруппе H.

Лемма 10. Пусть $\exists z : z \in gH, z \in g'H$. Тогда $gH = g'H$

Доказательство. $z = gh, z = g'h' \Rightarrow gh = g'h' \Rightarrow g = g'h'h^{-1}$

$$gH = (g'h'h^{-1})H = g'h'h^{-1}H$$

□

Лемма 11.

$$\forall g, g' \in G\ \ |gH| = |g'H|$$

Доказательство. Отображение $h \mapsto gg^{-1}h$ есть биекция между gH и $g'H$ □

Обозначение. $(G : H)$ — индекс группы G по H — количество смежных классов.

Примечание. В общем случае это кардинальное число, но мы будем рассматривать только конечные индексы.

$(G:1)$ — количество элементов G *(порядок группы).*

Лемма 12.

$$(G:1)\vdots(G:H)$$

Теорема 4. H — подгруппа G, K — подгруппа H.

$$(G:H)(H:K)=(G:K)$$

Доказательство.

$$G=\bigcup_i g_iH \quad H=\bigcup_j h_jK$$

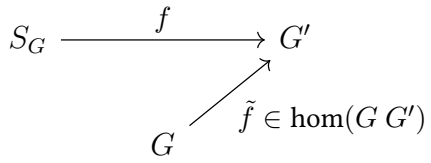
$$G=\bigcup_i\bigcup_j g_ih_jK$$

$$g_ih_jK=g_i'h_j'K\Rightarrow\begin{cases}g_iH=g_i'H\\h_jK=h_j'K\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_i=g_i'\\h_j=h_j'\end{cases}$$

□

Лемма 13 (проигранная). Дано: G, G' — группы, S_G — множество производящих G, $f: S_G\to G'$.

Если $\exists\tilde{f}\in\hom(G\,G')$, то $\tilde{f}\Big|_{S_G}=f\Rightarrow\tilde{f}$ единственно.



Доказательство. $\lhd g\in G, g':=\tilde{f}(g)$

$$g=\prod_{i\in I}S_i\quad\tilde{f}(g)=\tilde{f}\left(\prod_{i\in I}S_i\right)=\prod_{i\in I}\tilde{f}(S_i)=\prod_{i\in I}f(S_i)$$

□

Определение. Подгруппа H группы G называется **нормальной** или инвариантной, если $\forall g\in G\ \ gH=Hg$. Аналогично можно определить через $H=g^{-1}Hg$

Обозначение. $H\lhd G$

Лемма 14.

- G — группа

- $\sigma \in \hom(G\, G')$

Тогда Ker σ — нормальная подгруппа G.

Доказательство. $H \coloneqq \text{Ker } \sigma$

$$\sigma(e) = \sigma(g^{-1}g) = \sigma(g^{-1})\sigma(g) = \sigma(g^{-1})e\sigma(g) = \sigma(g^{-1})\sigma(H)\sigma(g) = \sigma(g^{-1}Hg) = e_{G'}$$

Таким образом, $g^{-1}Hg \subset H$. Заменим g на g^{-1}: $H \subset g^{-1}Hg \Rightarrow H = g^{-1}Hg$. □

$\triangleleft G$ — группа, H — подгруппа G.

Рассмотрим отношение $\sim$: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in H$. Это отношение эквивалентности:

1. $g_1 g_1^{-1} = e \in H$
2. $g_1 g_2^{-1} \in H \Rightarrow (g_1 g_2^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$
3. $g_1 g_2^{-1} \in H, g_2 g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1 g_3^{-1} \in H$

Кроме того, $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H$, поэтому $\sim$ это отношение эквивалентности на смежных классах, будем обозначат фактор-множество как G/H.

Для каких H выполняется следующее: если $x_1 \sim y_1$ и $x_2 \sim y_2$, тогда $(x_1 x_2) \sim (y_1 y_2)$? $x_1 H = y_1 H, x_2 H = y_2 H$. Тогда H — нормальная подгруппа.

$\triangleleft G/H, H \triangleleft G, \cdot : [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$. Свойства "$\cdot$":

1. $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$
2. $\exists [e] : [x][e] = [e][x] = [x], [e] = H$
3. $[x]^{-1} = [x^{-1}]$

Примечание. G/H — фактор-группа.

$\triangleleft \sigma : \text{Ker } \sigma = H$

Тогда пусть $\sigma : G \to G/H, g \mapsto [g]$.