

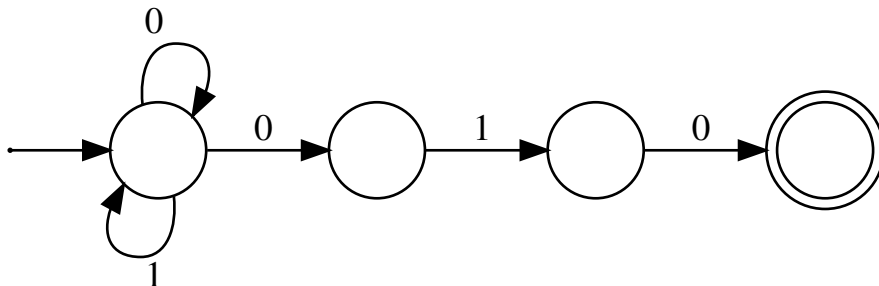
## НКА

Уберем ограничение на единственность перехода по символу, тогда получим **недетерминированный КА**:



Кроме того, уберем ограничение на существование перехода, тогда если перехода нет, то слово не допускается в искомый язык. Слово допускается, если существует последовательность недетерминированных выборов, приводящая к допуску.

*Пример.* Автомат для слов с суффиксом 010:



## Алгоритм проверки допуска НКА

$Q = \{1, 2 \dots q\}$  — все вершины

`term` — массив булевых переменных терминальности состояний.

`go[c][i]` — вектор вершин, в которые можно попасть из вершины  $i$  по символу  $c$

Построим динамику `can[i][u]` — можно ли за  $i$  шагов попасть в состояние  $u$ .

`accept(x)`

`can[0][s] = true`

    for  $i = 0 \dots \text{len}(x) - 1$

$c = x[i]$

        for  $u = 1 \dots q$

```

        if (can[i][u])
            for v : go[u][c]
                can[i + 1][v] = true
    for u = 1...q
        if (can[len(x)][u] and term[u])
            return true
    return false

```

Применим для автомата слов с суффиксом 010 и слова 01010:

	1	2	3	4
0	+			
1	+	+		
2	+		+	
3	+	+		+
4	+		+	
5	+	+		$\oplus$

Заметим, что 2 строка = 4 строка и 3 символ равен 5 символу, поэтому 3 строка = 5 строка.

Построим по этой динамике ДКА с булевыми векторами строк в вершинах.

```

ds = 1 << s
for du = 0...2**q-1
    for c - symbol
        dv = 0
        for u = 0...q-1
            if (du & (1 << u)) != 0
                for v : go[u][c]
                    dv |= (1 << v)
        dgo[du][c] = dv
    if (du & term != 0)
        dterm[du] = true

```

Для ускорения можно перебирать не все маски, а только те, которые встретились, т.е. DFS/BFS. Без этого  $\mathcal{O}(2^q \cdot \text{poly}(q, \sigma))$ , с оптимизацией  $\mathcal{O}(\text{ans} \cdot \text{poly}(q, \sigma))$ ,  $\text{ans}$  = число состояний ДКА.

Таким образом, мы по любому НКА можем построить ДКА с таким же языком, т.е. выполняются следующие:

**Теорема 1.**  $\forall$  НКА  $A \exists$  ДКА  $A_D : L(A) = L(A_D)$

Создадим в НКА ребра, по которым можно перейти, не считав символа, и будем обозначать такое ребро  $\varepsilon$ . Эта конструкция называется  $\varepsilon$ -НКА.

Докажем, что  $\varepsilon$ -НКА эквивалентен ДКА построением:

1. Построим граф  $\varepsilon$ -переходов и создадим его транзитивное замыкание. Добавленные замыканием ребра добавим в исходный автомат. Язык автомата от этого не изменился, т.к. переход по новому ребру эквивалентен  $n$  переходов по  $\varepsilon$ -ребрам в исходном графе. Теперь можно не делать два  $\varepsilon$ -перехода подряд.
2. Если из обычной вершины есть  $\varepsilon$ -переход в терминальную вершину, то сделаем эту вершину терминальной. Язык автомата от этого преобразования не изменился. Теперь последний переход происходит не по  $\varepsilon$ .

## 3. Преобразуем



в



Теперь можно не делать  $\varepsilon$ -переходы.

4. Удалим  $\varepsilon$ -переходы.

**Теорема 2. Клини.**

$$L - \text{регулярный} \Leftrightarrow \exists \text{ ДКА } A : L = L(A)$$

Докажем " $\Rightarrow$ "

Докажем " $\Leftarrow$ ".

*Доказательство.*  $Q := \{1, 2, \dots, q\}$

Построим  $\sim q^3$  регулярных выражений, занумеруем их как  $\xi_{ijk}, i = 1 \dots q, j = 1 \dots q, k = 0 \dots q$ .

$\xi_{ijk}$  задает слова, переводящие автомат из состояния  $i$  в  $j$ , используя промежуточные состояния с номерами  $\leq k$

$\leq 0, i = j, \xi_{ii0} = \varepsilon |c_1|c_2| \dots$  — из  $i$  в  $i$  без промежуточных состояний, т.к. состояний  $\leq 0$   $\nexists$ .  $c_i$  — петли в  $i$ .

$\xi_{ij0} = c_1|c_2| \dots, c_i$  — переход  $i \rightarrow j$

$\xi_{ijk+1} = \xi_{ijk} | \xi_{ik+1k} (\xi_{k+1k+1k})^* \xi_{k+1jk}$  — можем либо идти по пути с промежуточными  $\leq k$ , либо дойти  $i \rightarrow k+1$ , после чего  $n \geq 0$  раз пройти  $k+1 \rightarrow k+1$  с промежуточными  $\leq k$ , после чего дойти  $k+1 \rightarrow j$  с промежуточными  $k$  ( $k$ , а не  $k+1$ , т.к. номера состояний уникальны, а в  $k+1$  мы уже не заходим)  $\square$

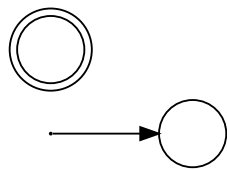


Рис. 1: Автомат для  $\{\emptyset\}$

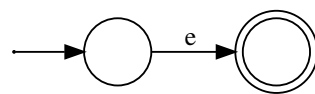


Рис. 2: Автомат  $\{\varepsilon\}$

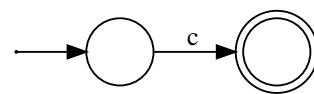


Рис. 3: Автомат  $\{c\}$

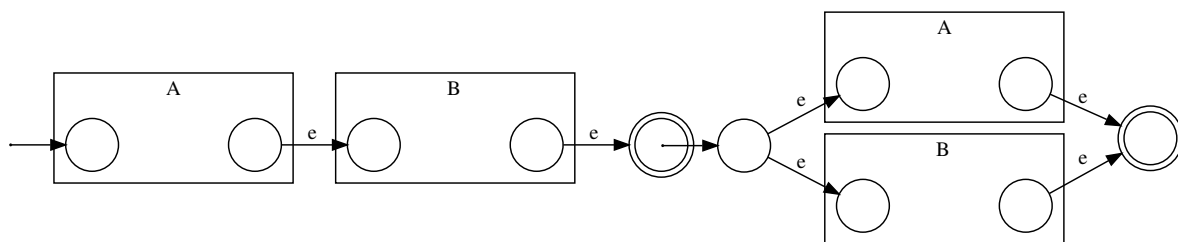


Рис. 4: Автомат  $AB$

Рис. 5: Автомат  $A \cup B$

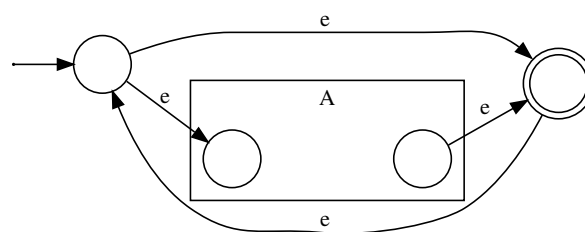


Рис. 6: Автомат  $A^*$