

Упражнение 1. Всякий ли элемент в  $S_3$  является простым циклом? В  $S_4$ ?

Решение. В  $S_3$  — да, что проверяется перебором:

Перестановка	$a_1 \dots a_k$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\emptyset$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	2, 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1, 2
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	1, 2, 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	1, 2, 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	1, 2, 3

В  $S_4$  — нет, т.к.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  нельзя представить в виде простого цикла — на все элементы она действует не тождественно ( $\forall x \ g(x) \neq x$ ), следовательно все элементы  $\{1 \dots n\}$  в этом цикле. Пусть<sup>1</sup>  $1 = a_1$ , тогда  $a_2 = 2$ , тогда  $a_4$  это либо 3, либо 4, но ни для одного из них не верно  $g(x) = 1$ .  $\square$

Упражнение 2. Рассмотрим все  $g \in S_4$ , которые являются простыми циклами. Какие значения может принимать порядок  $g$ ?

Решение.

<sup>1</sup> Так можно говорить, т.к.  $a_1 \dots a_k$  можно циклически сдвинуть без потери общности.

Порядок	Пример перестановки с таким порядком
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

**Утверждение.** Элементов с порядком  $> 4$  нет.

*Proof.* Рассмотрим  $a_i$ . Оно отображается в себя же за максимум последовательных 4 шага  $g$ , т.к. так работает цикл.  $\square$

**Ответ:**  $\{1, 2, 3, 4\}$   $\square$

**Упражнение 3.** Показать, что любой элемент  $\rho \in S_4$  представим в виде произведения независимых простых циклов:

$$\rho = g_1 \cdots g_k$$

*Решение.* Предположим обратное, что есть  $\rho \in S_4$ , не представимый искомым образом. Пусть  $a_1 = 1, a_2 = \rho(a_1)$ .

Если  $a_2 = a_1$ , то  $\rho$  действует тождественно на первый элемент и тогда группа  $G$  всех таких  $\rho$  изоморфна  $S_3$ , а все элементы  $S_3$  — простые циклы, следовательно  $\rho$  есть простой цикл.

Рассмотрим случай  $a_1 \neq a_2$ . Пусть  $a_3 = \rho(a_2)$ .  $a_3 \neq a_2$ , т.к. иначе  $\rho$  не биективно. Если  $a_3 = a_1$ , то  $\rho$  действует как простой цикл длины 2 на элементы  $\{a_1, a_2\}$ . Группа всех таких  $\rho$  изоморфна  $S_2$ , т.к. осталось 2 не использованных элемента, а все элементы  $S_2$  — простые циклы (перебор).

Рассмотрим случай  $a_3 \neq a_1$ . Пусть  $a_4 = \rho(a_3)$ .  $a_4 \neq a_3$  и  $a_4 \neq a_2$  по соображениям выше. Если  $a_4 = a_1$ , то  $\rho$  — цикл длины 3 на элементах  $\{a_1, a_2, a_3\}$  и на оставшийся элемент не может не подействовать тривиально. Если  $a_4 \neq a_1$ , то  $a_5 = \rho(a_4)$ . По соображениям выше  $a_5 \notin \{a_2, a_3, a_4\}$ , следовательно  $a_5 = a_1$  и  $\rho$  — цикл длины 4.

Альтернативное доказательство: перебор.

$\rho$	Представление $\rho$ в виде произведения простых циклов
--------	---

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & 
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
 & 
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$


---

□

**Упражнение 4.** Показать, что если  $g, h \in S_n$  — независимые простые циклы, то они коммутируют. Что можно сказать об обратном? (если  $g, h$  — коммутирующие простые циклы, то ...)

*Решение.*

**Утверждение.** Если  $g(x) \neq x$ , то  $h(g(x)) = g(x)$ .

*Proof.*  $g(g(x)) \neq g(x)$  по биективности  $g$ .

□

$$\begin{aligned}
 g(h(x)) &= \begin{cases} g(x), & g(x) \neq x \\ h(x), & h(x) \neq x \\ x, & h(x) = g(x) = x \end{cases} \\
 h(g(x)) &= \begin{cases} g(x), & g(x) \neq x \\ h(x), & h(x) \neq x \\ x, & h(x) = g(x) = x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Итого  $gh = hg$ .

Если  $g, h$  — коммутирующие простые циклы, то они не обязательно независимы. Например, если  $g = h$ :  $gg = gg$ , но  $g$  зависит от себя (если это не тривиальный цикл). Также можно построить случай с  $g \neq h$ . Пусть дано  $g$  с  $\{a_i\}_{i=1}^n$ . Тогда пусть  $h(a_i) = \begin{cases} a_{i-1}, & i > 1 \\ a_n, & i = 1 \end{cases}$  □