

## Подгруппы в полугруппах

На прошлой практике мы остановились на моноиде, считающем число строк:

$$S := \{(l, n, r) \mid l, r \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$(l_1, n_1, r_1) \cdot (l_2, n_2, r_2) = (l_1, n_1 + n_2 + r_1 l_2, r_2)$$

Идемпотенты:

1.  $x_1 = (0, 0, 0)$
2.  $x_2 = (1, 0, 0)$
3.  $x_3 = (0, 0, 1)$

Рассмотрим  $H_2 = x_2 \cdot S \cdot x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_2 \cdot y \cdot x_2 \mid y \in S\} = \{(0, n, 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . В  $H_2$  выполняется  $zx = zy \Rightarrow x = y$ , т.к.  $H \sim (\mathbb{N}_0, +)$  с изоморфизмом  $(0, n, 1) \mapsto n$ .

Аналогично можно построить  $H_3 := x_3 S x_3$ ,  $H_1 := x_1 S x_1$ . Такие подмножества являются подполугруппами  $S$ :

$$y, z \in H_1 \quad yz = x_1 \hat{y} x_1 x_1 \hat{z} x_1 = x_1 \underbrace{(\hat{y} x_1 x_1 \hat{z})}_{\in S} x_1$$

В  $H_1$  есть единица —  $x_1$ , т.к.  $yx_1 = x_1 \hat{y} x_1 x_1 x_1 x_1 = x_1 \hat{y} x_1 = y$

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset$$

Рассмотрим полугруппу  $S$  и некоторый  $a \in S$ . Построим подмножество  $H$ , называемое **генератором**  $a$ , обозначаемое  $\langle a \rangle$ :

$$H = \langle a \rangle := \{a, a^2, a^3 \dots\}$$

*Пример.*  $\langle (\mathbb{Z}, +), a = 2 \rangle$ . Тогда  $H = \{2n \mid n \geq 1\}$ .

Может быть  $|H| < \infty$ . Тогда  $a^n = a^m$ . Выберем наименьшее такое  $n$ . Тогда у нас есть некоторый “хвост”  $a^1 \dots a^n$  и цикл  $a^n, a^{n+1} \dots a^m$ .  $n$  называется **индексом** (также обозначается  $i$ )  $a$ ,  $d = m - n$  — **периодом**.

*Утверждение.* Среди  $\langle a \rangle$  есть идемпотент, если  $|\langle a \rangle| < \infty$

*Доказательство.*

$$a^k = a^{k+\alpha d} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_1$$

$$a^k \cdot a^k = a^k \Rightarrow 2k = k + \alpha d \Rightarrow k = \alpha d$$

□

Пусть  $e = a^k, e^2 = e, G = eHe$

Пример.  $i = 5, d = 3$

$$G = \{a^6, a^5, a^7\}.$$

$G$  является подгруппой, т.к. оно содержит все элементы цикла и обратное к  $a^j$  есть  $a^{k-j+d}$

## Отношения

$$X = \mathbb{R}, S = \mathbb{B}(X^2) = \{R \mid R \subseteq X \times X\}$$

$$\rho, \tau \in S \quad R = \rho \circ \tau : xRz \Leftrightarrow \exists y : x\rho y, y\tau z$$

Это определение согласовано с композицией функций.

Подполугруппы  $S$ :

- $H_1 = X \rightarrow X$  — функции
- $H_2$  — отношения эквивалентности — не работает, т.к. есть контрпример:  
 $X = \{a, b, c\}, \rho = \{(a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}, \tau = \{(b, c), (c, b), (b, b), (a, a), (c, c)\}$

$$\rho^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$

$$\rho \circ \rho^{-1} = R \quad \rho^{-1} \circ \rho = L$$

$$\triangleleft \rho(x) = x^2, x\rho^{-1}y \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

$$\rho \circ \rho^{-1} = R \quad aRb \Leftrightarrow a\rho a^2, a^2\rho^{-1}b \Leftrightarrow a = \pm b$$

## Внешние законы

Рассмотрим плоскость  $\mathbb{E}^2$  и множество трансляций  $T = \{\vec{v}\}$ .  $T$  действует на  $\mathbb{E}^2$ . Добавим в  $T$  закон сложения<sup>1</sup>.

Рассмотрим  $R$  — множество поворотов плоскости относительно точки  $P$ .  $R$  тоже действует на  $\mathbb{E}^2$ . Определим композицию в  $R$  — последовательное действие поворотов. Обозначим эту композицию “.”.

$\triangleleft \rho \in R, \tau \in T$ . Можно делать  $\rho(\tau(P))$ , можно  $\tau(\rho(P))$ . Это не одно и то же (пример очевиден). Определим  $\hat{\tau}$  как  $\rho(\tau) = \hat{\tau}$ . Все эти внешние законы согласованы:

$$\rho(\tau(P_0)) = \hat{\tau}(\rho(P_0)) = \hat{\tau}(P_0)$$

$$\rho(\tau_1 + \tau_2) = \rho(\tau_1) + \rho(\tau_2)$$

<sup>1</sup> Обычное сложение векторов.