Домашнее задание №7: «типовая система Хиндли-Милнера»

1. *О выразительной силе HM.* Заметим, что список — это «параметризованные» числа в аксиоматике Пеано. Число — это длина списка, а к каждому штриху мы присоединяем какое-то значение. Операции добавления и удаления элемента из списка — это операции прибавления и вычитания единицы к числу.

   Рассмотрим тип «бинарного списка» (расширение Окамля):

   ```
   type 'a bin_list = Nil | Zero of (('a*'a) bin_list) |
       One of 'a * (('a*'a) bin_list);;
   ```

   и операцию добавления элемента к списку:

   ```
   let rec add elem lst = match lst wi th
       Nil → One (elem,Nil)
     | Zero tl → One (elem,tl)
     | One (hd,tl) → Zero (add (elem,hd) tl)
   ```

   (a) Какой тип имеет `add` (обратите внимание на ключевое слово `rec`: для точного указания соответствующего лямбда-выражения и вывода типа необходимо использовать Y-комбинатор)? Считайте, что семейство типов `bin_list 'a` предопределено и обозначается как τ_α. Выразим ли этот тип в системе Хиндли-Милнера?

   (b) Реализуйте предложенный тип и функцию `add` на Хаскеле (используйте опцию `RankNTypes`). Также реализуйте функцию для удаления элемента списка (головы).

   (c) Предложите функцию для эффективного соединения двух списков (источник для вдохновения — сложение двух чисел в столбик).

   (d) Предложите функцию для эффективного выделения n-го элемента из списка.

2. На занятии мы рассмотрели функцию `strange_pair x = (x 1, x "a")`. Покажите, что данную функцию невозможно типизировать в типовой системе Хиндли-Милнера. Указания: (а) ограничение мономорфизма отношения к делу не имеет; (б) ограничение на правило введения квантора всеобщности может оказаться существенным.

3. Покажем, что алгоритм W действительно находит корректный тип для лямбда-выражения (доказательство, что он находит наиболее общий тип, мы оставим в стороне). Для этого докажем по индукции, что $W(\Gamma, X)$ действительно находит такие тип τ и подстановку S, что $S\Gamma \vdash X : \tau$:

   (a) покажите базу индукции: $W(\Gamma, x)$;

$$\frac{\Gamma, x : \forall\alpha_1 \dots \alpha_n.\tau : x \vdash \forall\alpha_1 \dots \alpha_n.\tau}{\Gamma \vdash x : \forall\beta_1 \dots \beta_n.\tau}$$

(b) покажите случай аппликации: $W(\Gamma, P\ Q)$;

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{W(\Gamma,P)=(\tau_p,S_1)}{S_1\Gamma\vdash P:\tau_p}}{S_{21}\Gamma\vdash P:S_2\tau_p}}{S_{321}\Gamma\vdash P:S_3(S_2\tau_p)}}{S_{321}\Gamma\vdash P:S_3(\tau_q\to\gamma)}}{S_{321}\Gamma\vdash P:(S_3\tau_q)\to S_3\gamma} \quad \dfrac{\dfrac{W(S_1\Gamma,Q)=(\tau_q,S_2)}{S_{21}\Gamma\vdash Q:\tau_q}}{S_{321}\Gamma\vdash Q:S_3\tau_q}}{(S_3\circ S_2\circ S_1)\Gamma\vdash P\ Q:S_3\gamma}$$

(c) покажите случай лямбда-абстракции: $W(\Gamma, \lambda x.P)$;

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{W(\Gamma\cup\{x:\tau_x\},P)=(\tau_p,S_1)}{S_1(\Gamma\cup\{x:\tau_x\})\vdash P:S_1\tau_p}}{S_1\Gamma,x:S_1\tau_x\vdash P:S_1\tau_p}}{S_1\Gamma\vdash\lambda x.P:S_1\tau_x\to S_1\tau_p}}{S_1\Gamma\vdash\lambda x.P:S_1(\tau_x\to\tau_p)}$$

(d) покажите случай `let`-выражения: $W(\Gamma, \texttt{let}\ x = P\ \texttt{in}\ Q)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{W(\Gamma,P)=(\tau_p,S_1)}{S_1\Gamma\vdash P:S_1\tau_p}}{S_{21}\Gamma\vdash P:S_{21}\tau_p} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{W(S_1\Gamma\cup\{x:\forall\{\alpha_i\}.\tau_p\},Q)=(\tau_q,S_2),\ \{\alpha_i\}\in FV(\tau_p)}{S_2(S_1\Gamma\cup\{x:\forall\{\alpha_i\}.\tau_p\})\vdash Q:\tau_q,\ \{\alpha_i\}\in FV(\tau_p)}}{\dots}}{S_2(S_1\Gamma\cup\{x:S_1\tau_p\})\vdash Q:\tau_q}}{S_{21}\Gamma,x:S_{21}\tau_p\vdash Q:\tau_q}}{S_{21}\Gamma\vdash let\ x=P\ in\ Q:\tau_q}$$

4. Покажите, что в Хаскеле выражается $Y : \forall\alpha.(\alpha\to\alpha)\to\alpha$ и правило исключённого третьего $E : \alpha \vee \neg\alpha$.

```haskell
magic :: a
magic = magic

Y :: (a → a) → a
Y = magic

E :: Either a (a → Void)
E = magic
```

5. Возможно ли в C++ построить выражения с типами ранга два и выше (включая конструкции с темплейтами)? Приведите пример, если да.