Следствие 1 (из 5 свойства меры Лебега). $\forall A \in \mathfrak{M}^m \ \ \exists B, C$ — борелевские:

$$B \subset A \subset C \quad \lambda(C \setminus A) = 0, \lambda(A \setminus B) = 0$$

Доказательство.

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_{\frac{1}{n}} \quad B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{\frac{1}{n}}$$

□

Следствие 2. $\forall A \in \mathfrak{M}^m \ \ \exists B, \mathcal{N} : B$ — борелевское, $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}^m, \lambda\mathcal{N} = 0$.
Тогда $A = B \cup \mathcal{N}$

Доказательство. $\exists B$ из следствия 1, $\mathcal{N} := A \setminus B$ □

Примечание. Обозначим $|X|$ — мощность множества X.

$$\forall X \ \ |2^X| > |X|$$

$$|2^{\mathbb{R}^m}| > \text{континуум}$$

$$\mathcal{B} \subset 2^{\mathbb{R}^m} \text{ — борелевская } \sigma\text{-алгебра } \ |\mathcal{B}| = \text{континуум}$$

$$\mathfrak{M}^m > \text{континуум}$$

$\mathcal{K}$ — Канторово множество, тогда $|\mathcal{K}| =$ континуум, $\lambda\mathcal{K} = 0$

$$\forall D \subset \mathcal{K} \ \ D \in \mathfrak{M}^m, \lambda D = 0 \ \ 2^{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{M}^m$$

Следствие 3. $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \lambda(F) \overset{(*)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{ — комп.}}} \lambda(K)$$

Доказательство. $(*)$ следует из σ-конечности $\mathbb{R}^m = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} Q(0, n)$, где $Q(a, R) = \times_{i=1}^{n} [a_i - R, a_i + R]$ — куб с центром в a и ребром R.

$\lambda(A \cap Q(0, n)) \to \lambda A$ по непрерывности снизу, т.к. $A \cap Q(0, n)$ хорошо аппроксимируется замкнутым множеством. □

Определение. Свойства из следствия 3 называются **регулярностью** меры Лебега.

Преобразование меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

Лемма 1.

- $(X', \mathfrak{A}', \mu')$ — *пространство с мерой.*
- $(X, \mathfrak{A}, \_)$ — *"заготовка" пространства с мерой*
- $\exists T : X \to X'$ — *биекция;* $\forall A \in \mathfrak{A}\ \ TA \in \mathfrak{A}'$ *и* $T\varnothing = \varnothing$

Положим $\mu A = \mu'(TA)$. *Тогда* μ — *мера.*

Доказательство. Проверим счётную аддитивность $\mu : A = \bigsqcup A_i$

$$\mu A = \mu'(TA) = \mu'\left(\bigsqcup TA_i\right) = \sum \mu'(TA_i) = \sum \mu A_i$$

□

Лемма 2.

- $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — *непр.*
- $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$ *выполняется* $\lambda TE = 0$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m\ \ TA \in \mathfrak{M}^m$

Доказательство.

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N}$$

, где K_j — компакт, $\lambda\mathcal{N} = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} TK_j \cup T\mathcal{N}$$

TK_j компакт как образ компакта при непрерывном отображении. $\Rightarrow TA$ измеримо. □

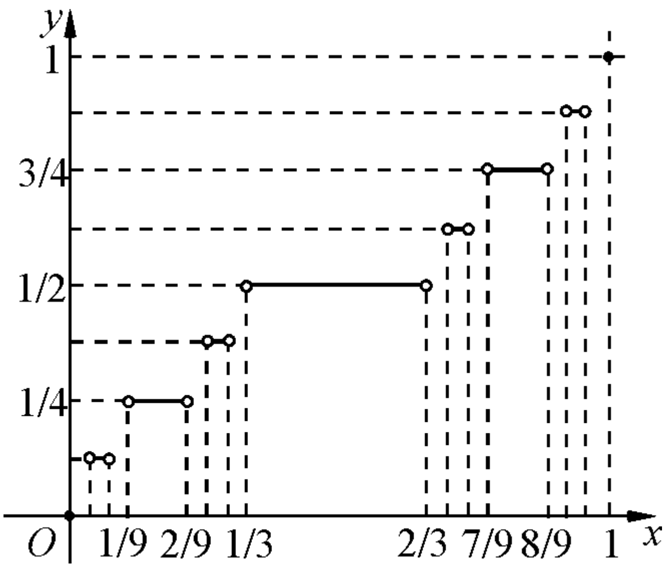
Пример (Канторова лестница).

$$\Delta = [0, 1]$$

$$\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \Delta_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad \Delta_{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \Delta_{10} = \ldots, \Delta_{11} = \ldots$$

$$\mathcal{K}_0 = \Delta$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= \Delta_0 \cup \Delta_1 \\
\mathcal{K}_2 &= \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11} \\
&\vdots \\
\mathcal{K}_n &= \bigcup_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{K} := \bigcap \mathcal{K}_n$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \Delta \setminus \mathcal{K}_1 \\ \frac{1}{4} & , x \in \Delta_0 \setminus \mathcal{K}_2 \\ \frac{3}{4} & , x \in \Delta_1 \setminus \mathcal{K}_2 \\ \vdots & \\ \sup f(t) & , t \le x, t \notin \mathcal{K} \end{cases}$$

$f([0,1] \setminus \mathcal{K}$ — счётное = множество двоично-рациональных чисел из $[0,1]$

$\lambda f([0,1] \setminus \mathcal{K}) = 0$

$\lambda f(\mathcal{K}) = 1$, т.к. $\forall y \in [0,1] \ \ \exists x : f(x) = y$, при этом f непрерывна, т.к. она — сюръекция.

Тогда пусть $E \subset [0,1] \notin \mathfrak{M}^m : f^{-1}(E)$ — подмножество $\mathcal{K}$ и промежутки — прообразы двоично рациональных точек $\in E$, при этом это множество измеримо, т.к. $\lambda \mathcal{K} = 0$

Ещё наблюдение: $x \notin \mathcal{K} \Rightarrow f$ — дифференцируема в x и $f' = 0$