

Алгоритмы в математике (*теория чисел*)

Михайлов Максим

2 ноября 2021 г.

Оглавление

Лекция 1	4 сентября	3
1	Вводная лекция	3
Лекция 2	11 сентября	4
2	Алгебраические структуры	5
2.1	Структуры с одним законом композиции	5
2.2	Структуры с двумя законами композиции	6
2.3	Основные алгебраические структуры	6
Лекция 3	18 сентября	7
3	Внешний закон композиции	7
3.1	Фактор-структуры	8
Лекция 4	25 сентября	11
4	Структура групп	11
4.1	Смежные классы	13
Лекция 5	2 октября	16
4.2	Цепочки гомоморфизмов	16
5	Действие группы	18
5.1	Орбиты	19
Лекция 6	9 октября	20
6	Действие группы на себя	20
6.1	Сопряжение	20
6.2	Левая трансляция	22
7	Циклические группы	22
Лекция 7	16 октября	23
8	Силовские группы	24
Лекция 8	23 октября	27
8.1	Теоремы Силова	27

Лекция 1

4 сентября

1 Вводная лекция

Хотя этот курс формально называется “теория чисел”, мы не будем рассматривать только теорию чисел. Теория чисел, разумеется, про числа, делители, простоту, алгоритм Евклида и т.д.. Однако, её можно обобщить на произвольные полугруппы, группы, кольца и поля. Поэтому мы будем рассматривать теорию чисел через призму общей алгебры.

Например, в кольце целых чисел есть понятие “простое число”. А в каких ещё кольцах есть “простые” элементы и каким условиям эти кольца удовлетворяют? Оказывается, кольцо многочленов содержит простые элементы и поэтому там применим алгоритм Евклида.

Мы также затронем теорию категорий (*терминальные объекты*), алгебраическую геометрию (*криптографию на эллиптических кривых*).

Лекция 2

11 сентября

План курса:

- Полугруппа
- Группа
 - Гомоморфизм
 - Фактор-группа
 - Теорема о ядре
 - Произведение групп
- Кольцо
 - \mathbb{Z}
 - Остатки
 - Китайская теорема об остатках
 - Алгоритм Евклида
 - Кольцо многочленов
 - Алгебра многочленов
- Поле
 - Поля Галуа
 - Расширения Галуа
 - Алгебраические кривые
 - Диофантовы уравнения

Начиная с групп мы будем использовать формализм теории категорий.

2 Алгебраические структуры

2.1 Структуры с одним законом композиции

Пусть M — множество с законом композиции $T : \forall x, y \in M \exists xTy \in M$.

Примечание. Такой закон называется **внутренним**, т.к. оба его аргумента $\in M$.

Обозначение. $x \cdot y, x \circ y, x + y, x^y, x * y$

Закон задает структуру на множестве.

Определение. $e_L \in M : \forall x \in M \ e_L \cdot x = x$ — **левый нейтральный элемент**

$e_R \in M : \forall x \in M \ x \cdot e_R = x$ — **правый нейтральный элемент**

Лемма 1. $\exists e_L, e_R \in M \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\text{def}}{=} e$

Доказательство. $e_L = e_L \cdot e_R = e_R$ □

Лемма 2. $e, e' — нейтральные элементы \Rightarrow e = e'$.

Доказательство. $e = e \cdot e' = e'$ □

Определение. $p \in M : p \cdot p = p$ — **идемпотент**

Определение. $z \in M : z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$ — **регулярный элемент (левый)**

Определение. $x \in M, \exists e \in M$. Элемент $z \in M : z \cdot x = e$ — **левый обратный элемент к x** .

$y \in M : x \cdot y = e$ — **правый обратный элемент к x** .

Лемма 3. Если $\exists y, z$, то $y = z \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}$ — **обратный элемент**.

Доказательство. $z = z \cdot e = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = e \cdot y = y$. Здесь мы воспользовались **ассоциативностью** закона композиции. □

Определение. $\Theta_L : \forall x \in M \ \Theta_L \cdot x = \Theta_L$ — **поглощающий (слева) элемент**

$\Theta_R : \forall x \in M \ x \cdot \Theta_R = \Theta_R$ — **поглощающий (справа) элемент**

Лемма 4. $\exists \Theta_L, \Theta_R \Rightarrow \Theta_L = \Theta_R \stackrel{\text{def}}{=} \Theta$

Доказательство. $\Theta_L = \Theta_L \cdot \Theta_R = \Theta_R$ □

$\triangleleft x, y, z \in M, x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$ или $x \cdot (y \cdot z)$. Какое выбрать? Без ассоциативности непонятно. Поэтому мы требуем ассоциативность в рамках этого курса.

То же самое можно сказать для семейства элементов.

Теорема 1 (об ассоциативном законе). $1 \leq k \leq n \Rightarrow T_{i=1}^n x_i = (T_{i=1}^k x_i) T (T_{i=k+1}^n x_i)$

Определение. $\triangleleft \forall x, y \in M \ xTy = yTx$. Тогда T называется **коммутативным**.

Определение. $\exists x, y \in M : xTy = yTx$. Тогда x, y называются **перестановочными** относительно закона.

Теорема 2 (об ассоциативном, коммутативном законе). Аргументы ассоциативного, коммутативного закона можно переставлять как угодно.

2.2 Структуры с двумя законами композиции

Пусть M — множество с законами композиции $*$, \circ . Нас интересует случай, когда эти два закона взаимосвязаны.

Как воспринимать $x * y \circ z$? Может иметь место **дистрибутивность** $*$ относительно \circ (слева): $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$\triangleleft e$ — нейтральный элемент по \circ . $\triangleleft x * y = x * (e \circ y) = (x * e) \circ (x * y) \Rightarrow x * e = e$. Поэтому из поля нельзя убрать ноль.

2.3 Основные алгебраические структуры

- **Полугруппа** — множество с ассоциативным законом
- **Моноид** — полугруппа с единицей
- **Группа** — моноид с обратным элементом для любого
- **Абелева группа** — группа с коммутативным законом
- **Кольцо** — два закона, по первому — абелева группа, по второму — полугруппа
- **Поле** — по двум законам группа

Лекция 3

18 сентября

3 Внешний закон композиции

Пусть Ω — множество.

Определение. Внешний закон композиции — бинарная операция $g : \Omega \times M \rightarrow M$:

$$\forall \alpha \in \Omega, x \in M \quad g : (\alpha, x) \mapsto \alpha \perp x \in M$$

Пример. X — линейное пространство над \mathbb{R} . Тогда $g(\alpha, x) = \alpha \cdot x$.

Обозначение. $g(\alpha, x)$ обозначается как:

- $\alpha(x)$
- αx
- x^α

Пример. $M = \mathbb{Z}$ — абелева группа по сложению. $\triangleleft z \in \mathbb{Z}$.

$$\underbrace{z + z + z + \cdots + z}_n = nz$$

Слева написано применение внутреннего закона $n-1$ раз, а справа — применение внешнего закона. Не всегда внешний закон можно представить в виде внутреннего, иначе внешний закон был бы не содержательным.

Пусть M имеет внутренний закон композиции \top , множество Ω имеет внешний¹ закон \perp .

Обозначение.

¹ Относительно M .

- $\top = \circ$
- $\perp(\alpha, x) = \alpha x$

Определение. Внешний закон согласован с внутренним законом, если:

$$\alpha(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y)$$

Пример. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, где $\alpha \in \mathbb{R}$

\triangleleft алгебраические структуры (M, \circ) , $(\Omega, *)$ и \perp — внешний закон Ω по M .

Определение.

$$\triangleleft \alpha, \beta \in \Omega, x \in M \quad (\alpha * \beta)x = \alpha(\beta(x))$$

Такой способ согласования мы называем **действием** Ω на M .

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(x \circ y) &\stackrel{\text{согл.}}{=} (\alpha * \beta)(x) \circ (\alpha * \beta)(y) \\ &\stackrel{\text{действ.}}{=} \alpha(\beta(x)) \circ \alpha(\beta(y)) = \alpha(\beta(x \circ y)) \end{aligned}$$

Пример. $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot)

$$\triangleleft n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2$$

$$(n \cdot m)(z_1 + z_2)$$

Определение. Пусть есть множества $\{M, N \dots \Omega\}$ со своими внутренними законами композиции. Кроме того, некоторые из них могут являться носителями внешнего закона для других множеств. Этот набор множеств, внутренних и внешних законов есть алгебраическая структура.

3.1 Фактор-структуры

$\triangleleft M$, бинарное отношение² R

Свойства бинарного отношения:

- $\forall x \exists y : xRy$ — полнота
- $\forall x, y \ xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRz$ — евклидовость

Определение. R — отношение эквивалентности, если оно:

- Рефлексивно
- Симметрично

² Над M .

- Транзитивно

Определение. $\triangleleft(M, R)$ — множество с отношением эквивалентности. Тогда M/R — фактор-множество, состоящее из классов эквивалентности M по R . Каждому $x \in M$ сопоставляется класс эквивалентности $[x] \in M/R$

Пример. $\triangleleft M = \mathbb{N}$ с операцией сложения, $x, y \in M, \triangleleft(x, y) \in M \times M$.

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

Несложно заметить, что фактор-множество $(M \times M)/\sim$ соответствует \mathbb{Z} :

Определение. $x \in M, y \in M$

$$[x \circ y] \stackrel{?}{=} [x] * [y]$$

Здесь $*$ — фактор-закон закона \circ .

Пример.

$$(a_1, b_1) \tilde{+} (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Чтобы рассмотреть $\hat{+}$ — фактор-закон операции $\tilde{+}$, нужно показать, что для $z = [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]$ верно $z = z_1 \hat{+} z_2$

Определение. Закон \circ согласован с отношением R , если:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, x_1 \in M \quad x R x_1 \\ \forall y, y_1 \in M \quad y R y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x \circ y) R (x_1 \circ y_1)$$

Теорема 3. Если закон композиции согласован с отношением эквивалентности, то он совпадает со своим фактор-законом.

$$[x] * [y] \stackrel{\text{def}}{=} [x \circ y] = [x] \circ [y]$$

Обозначение.

$$M \cdot N := \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$$

Пример.

- $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M \times M$
- $(c_1, d_1) \sim (a_1, b_1) \Leftrightarrow c_1 + b_1 = d_1 + a_1$
- $(a_1, b_1) \rightarrow [(a_1, b_1)] = z_1 \ni (c_1, d_1)$
- $(a_2, b_2) \rightarrow [(a_2, b_2)] = z_2 \ni (c_2, d_2)$
- $(a_1, b_1) \tilde{+} (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \rightarrow [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)] = z$

Выполнено ли $(c_1 + c_2, d_1 + d_2) \in z$?

$$c_1 + c_2 + (b_1 + b_2) = d_1 + d_2 + (a_1 + a_2)$$

$$a_1 + d_1 = b_1 + c_1$$

$$a_2 + d_2 = b_2 + c_2$$

Таким образом, наша операция согласована.

Лекция 4

25 сентября

4 Структура групп

Определение (группа). G — множество с внутренним законом \cdot , таким что:

1. $\forall x, y, z \in G \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $\exists e \in G : \forall x \in G \quad e \cdot x = x \cdot e = x$
3. $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$

Пример. Пусть S — множество, G — группа. Будем обозначать множество отображений $S \rightarrow G$ как $M(SG)$. Наделим его структурой группы:

$$f, g \in M(SG) \Rightarrow \begin{cases} (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \\ f_e(x) = e_G \end{cases}$$

Определение. $G, G, \sigma : G \rightarrow G'$.

σ — гомоморфизм группы G в группу G' , если:

$$\forall x, y \in G \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \sigma(e_G) = e_{G'}$$

Лемма 5. $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e_{G'} &= \sigma(e_G) = \sigma(xx^{-1}) = \sigma(x)\sigma(x^{-1}) \\ \sigma(x)^{-1}e_{G'} &= \sigma(x)^{-1}\sigma(x)\sigma(x^{-1}) \\ \sigma(x)^{-1} &= \sigma(x^{-1}) \end{aligned}$$

□

Обозначение.

- $\text{hom}(G \rightarrow G')$ — множество всех гомоморфизмов $G \rightarrow G'$.
- $\text{End}(G) := \text{hom}(G \rightarrow G)$.

Определение. $\sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G')$ называется **изоморфизмом**, если:

$$\chi \in \text{hom}(G' \rightarrow G) : \sigma \circ \chi = \text{id}_{G'}, \chi \circ \sigma = \text{id}_G$$

Обозначение.

- $\text{Iso}(G \rightarrow G')$ — множество всех изоморфизмов
- $\text{Aut}(G) := \text{Iso}(G \rightarrow G)$ — множество **автоморфизмов**

Лемма 6. $\sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G'), \chi \in \text{hom}(G' \rightarrow G'') \Rightarrow \zeta = \chi \circ \sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G'')$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in G \quad \zeta(x \cdot y) &= (\chi \circ \sigma)(x \cdot y) \\ &= \chi(\sigma(x \cdot y)) \\ &= \chi(\sigma(x) \cdot \sigma(y)) \\ &= (\chi \circ \sigma)(x) \cdot (\chi \circ \sigma)(y) \\ &= \zeta(x) \cdot \zeta(y) \end{aligned}$$

□

Примечание. $\text{Aut}(G)$ — группа относительно \circ .

Определение. G — группа.

$\triangleleft S_G = \{S_i\}_{i \in I}$:

$$\forall g \in G \quad a = \prod_{j \in J \subseteq I} S_j$$

S_G тогда называется **множеством образующих группы G** .

Лемма 7. Мы проиграли, вернемся к этой лемме позже.

Определение (ядро гомоморфизма).

$$\text{Ker } \sigma := \{g \in G : \sigma(g) = e\}$$

Лемма 8. Если $\text{Ker } \sigma = \{e\}$, то $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$, т.е. σ инъективно.

Доказательство.

$$\sigma(x)\sigma(y^{-1}) = \sigma(y)\sigma(y^{-1}) = e_{G'}$$

Таким образом, x есть обратный к y^{-1} , т.е. $x = y$. □

Определение (образ гомоморфизма).

$$\text{Im } \sigma = \{g' \in G' : \exists g \in G : \sigma(g) = g'\}$$

Лемма 9. $\text{Im } \sigma = G' \Rightarrow \sigma$ сюръективно.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } \sigma = G' \\ \text{Ker } \sigma = \{e\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma - \text{изоморфизм}$$

Определение. Подгруппой H группы G называется подмножество элементов G , на котором групповой закон G индуцирует структуру группы.

Определение. Несобственные подгруппы: $\{e_G\}, G$.

Иначе подгруппа **собственная**.

Пример. $\sigma \in \text{hom}(G, G')$. Тогда $\text{Ker } \sigma$ — подгруппа G , $\text{Im } \sigma$ — подгруппа G' .

4.1 Смежные классы

Пусть G — группа, H — подгруппа G .

Определение. $gH, g \in G$ — левый смежный класс группы G по подгруппе H .

Лемма 10. Пусть $\exists z : z \in gH, z \in g'H$. Тогда $gH = g'H$

Доказательство. $z = gh, z = g'h' \Rightarrow gh = g'h' \Rightarrow g = g'h'h^{-1}$

$$gH = (g'h'h^{-1})H = g'h'h^{-1}H$$

□

Лемма 11.

$$\forall g, g' \in G \quad |gH| = |g'H|$$

Доказательство. Отображение $h \mapsto gg^{-1}h$ есть биекция между gH и $g'H$ □

Обозначение. $(G : H)$ — индекс группы G по H — количество смежных классов.

Примечание. В общем случае это кардинальное число, но мы будем рассматривать только конечные индексы.

$(G : 1)$ — количество элементов G (порядок группы).

Лемма 12.

$$(G : 1) \cdot (G : H)$$

Теорема 4. H — подгруппа G , K — подгруппа H .

$$(G : H)(H : K) = (G : K)$$

Доказательство.

$$G = \bigcup_i g_i H \quad H = \bigcup_j h_j K$$

$$G = \bigcup_i \bigcup_j g_i h_j K$$

$$g_i h_j K = g'_i h'_j K \Rightarrow \begin{cases} g_i H = g'_i H \\ h_j K = h'_j K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_i = g'_i \\ h_j = h'_j \end{cases}$$

□

Лемма 13 (проигранная). Дано: G, G' — группы, S_G — множество производящих G , $f : S_G \rightarrow G'$.

Если $\exists \tilde{f} \in \text{hom}(G, G')$, то $\tilde{f}|_{S_G} = f \Rightarrow \tilde{f}$ единственно.

$$\begin{array}{ccc} S_G & \xrightarrow{f} & G' \\ & \nearrow \tilde{f} \in \text{hom}(G, G') & \\ G & & \end{array}$$

Доказательство. $\triangleleft g \in G, g' := \tilde{f}(g)$

$$g = \prod_{i \in I} S_i \quad \tilde{f}(g) = \tilde{f}\left(\prod_{i \in I} S_i\right) = \prod_{i \in I} \tilde{f}(S_i) = \prod_{i \in I} f(S_i)$$

□

Определение. Подгруппа H группы G называется **нормальной** или **инвариантной**, если $\forall g \in G \quad gH = Hg$. Аналогично можно определить через $H = g^{-1}Hg$

Обозначение. $H \triangleleft G$

Лемма 14.

- G — группа

$$\bullet \sigma \in \text{hom}(G, G')$$

Тогда $\text{Ker } \sigma$ — нормальная подгруппа G .

Доказательство. $H := \text{Ker } \sigma$

$$\sigma(e) = \sigma(g^{-1}g) = \sigma(g^{-1})\sigma(g) = \sigma(g^{-1})e\sigma(g) = \sigma(g^{-1})\sigma(H)\sigma(g) = \sigma(g^{-1}Hg) = e_{G'}$$

Таким образом, $g^{-1}Hg \subset H$. Заменяем g на g^{-1} : $H \subset g^{-1}Hg \Rightarrow H = g^{-1}Hg$. \square

$\triangleleft G$ — группа, H — подгруппа G .

Рассмотрим отношение \sim : $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in H$. Это отношение эквивалентности:

1. $g_1g_1^{-1} = e \in H$
2. $g_1g_2^{-1} \in H \Rightarrow (g_1g_2^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$
3. $g_1g_2^{-1} \in H, g_2g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1g_3^{-1} \in H$

Кроме того, $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1H = g_2H$, поэтому \sim это отношение эквивалентности на смежных классах, будем обозначать фактор-множество как G/H .

Для каких H выполняется следующее: если $x_1 \sim y_1$ и $x_2 \sim y_2$, тогда $(x_1x_2) \sim (y_1y_2)$? $x_1H = y_1H, x_2H = y_2H$. Тогда H — нормальная подгруппа.

$\triangleleft G/H, H \triangleleft G, \cdot : [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$. Свойства “ \cdot ”:

1. $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$
2. $\exists [e] : [x][e] = [e][x] = [x], [e] = H$
3. $[x]^{-1} = [x^{-1}]$

Примечание. G/H — фактор-группа.

$$\triangleleft \sigma : \text{Ker } \sigma = H$$

Тогда пусть $\sigma : G \rightarrow G/H, g \mapsto [g]$.

Лекция 5

2 октября

Определение.

- G — группа
- $S \subset G$ — подмножество элементов G

Нормализатор S : $N_S := \{g \in G : gS = Sg\}$

Определение.

- G — группа
- $x \in G$
- $S \subset G$

Централизатор x : $Z_x := \{g \in G : gx = xg\}$

$Z_S := \{g \in G : \forall y \in S \quad gy = yg\}$

Z_G — центр группы G .

Пример. В группе $GL(n, \mathbb{R})$ инвертируемых матриц $n \times n$ центр — единичная матрица.

4.2 Цепочки гомоморфизмов

Определение.

- G, G', G'' — группы
- $\sigma \in \text{hom}(G, G')$
- $\chi \in \text{hom}(G', G'')$

Рассмотрим цепочку $G \xrightarrow{\sigma} G' \xrightarrow{\chi} G''$. Такая последовательность называется **точной**, если $\text{Ker } \chi = \text{Im } \sigma$.

$$(G/K)/(H/K) = G/H$$

5 Действие группы

Определение.

- G — группа
- S — множество

G действует на S , если существует отображение

$$T : G \times S \rightarrow S$$

, при этом $(g_1 g_2)s = g_1(g_2 s)$

Примечание.

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2} \quad T_e = \text{id} \quad T_{g^{-1}} = T_g^{-1}$$

G действует на S как группа перестановок.

Определение.

- $s \in S$
- G — группа

$G_s := \{g \in G : gs = s\}$ — стабилизатор элемента s .

Пример. \mathbb{Q} действует на \mathbb{R}^3 через T .

Лемма 15. $G_s \subset G$ — подгруппа

Доказательство. $g_1, g_2 \in G_s \Rightarrow g_1 s = s, g_2 s = s$

$$(g_1 g_2) \cdot s = g_1(g_2 s) = g_1 s = s$$

□

G/G_s — фактор-множество.

Лемма 16. $s, s' \in S, s' = xs, x \in G$. Тогда $G_{s'} = xG_s x^{-1}$ и $G_{s'}$ вместе с G_s называются сопряженными

Доказательство.

$$g' s' = s' = xs = xgs = xgx^{-1} s'$$

$$g' = xgx^{-1}$$

□

Определение. Преобразование вида xAx^{-1} , где $A \subset G$ — подгруппа G , называется сопряжением.

Лемма 17. $gG_s, g'G_s \in G/G_s$

$$gs = g's \Leftrightarrow gG_s = g'G_s$$

5.1 Орбиты

Определение. $\mathcal{O}_G(S) := \{gs : g \in G\}$ — орбита

Лемма 18. $|\mathcal{O}_G(S)| = (G : G_S)$

Доказательство. Из предыдущей леммы. □

Остаётся на следующую лекцию:

1. $S = \bigsqcup_{S \in C} \mathcal{O}_G(S)$, где C — непересекающиеся орбиты
2. Действия группы на себя

Лекция 6

9 октября

Лемма 19. Орбиты элементов $\mathcal{O}_G(s)$ и $\mathcal{O}_G(s')$ или непересекаются или совпадают.

Доказательство. Пусть орбиты пересекаются, т.е. $\exists s_0 : s_0 \in \mathcal{O}_G(s)$ и $s_0 \in \mathcal{O}_G(s')$. Тогда $\exists g \in G : s_0 = gs, \exists g' \in G : s_0 = g's'$

$$\mathcal{O}_G(s') = \mathcal{O}_G(g's') = \mathcal{O}_G(s_0) = \mathcal{O}_G(gs) = \mathcal{O}_G(s)$$

Таким образом, $\mathcal{O}_G(s') = \mathcal{O}_G(s)$. □

Примечание.

$$S = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(S_i)$$

Примечание. Если S — конечно, то

$$|S| = \sum_{i \in I} |\mathcal{O}_G(s_i)|$$

6 Действие группы на себя

Пусть $S_G = G$, т.е. группа действует сама на себя.

6.1 Сопряжение

Пусть $x \in G$. $\sigma : x \mapsto \sigma_x : \sigma_x(y) = xyx^{-1}$

Пусть $y, y' \in G$.

$$\sigma_x(y \cdot y') = xy'y^{-1} = xyx^{-1}xy'x^{-1} = \sigma_x(y)\sigma_x(y')$$

$$\sigma_x(e) = e$$

Таким образом, σ_x — гомоморфизм.

$$\sigma_x^{-1} = \sigma_{x^{-1}}$$

$$\sigma_x^{-1} \circ \sigma_x = \text{id}_G$$

$$\sigma_x^{-1} \circ \sigma_x(y) = G_x^{-1}(xyx^{-1}) = x^{-1}xyx^{-1}x = y \quad \forall y$$

$$\sigma_x \in \text{Aut}(G) \quad \forall x$$

$$\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(G).$$

$$\sigma_x \sigma_y = \sigma_{xy} \quad \sigma_e = \text{id}_G$$

Таким образом, $\sigma \in \text{hom}(G, \text{Aut}(G))$

$$\text{Ker } \sigma = \{x \in G : \forall y \quad \sigma_x y = y\}$$

$$xyx^{-1} = y$$

$$xy = yx$$

Таким образом, $\text{Ker } \sigma = Z_G$

Рассмотрим G как множество. $A \subset G$ — подмножество G .

$$\sigma_x(A) = xAx^{-1} \subset G$$

$$\sigma_x(H) = xHx^{-1} \subset G \text{ — подгруппа } G.$$

Пусть S — множество подгрупп группы G , H — подгруппа G , рассмотрим G/H .

Пусть $x \in G$.

$$G_x := \{g \in G : \sigma_g(x) = x\} = Z_x$$

$$\mathcal{O}_G(x) = \{\sigma_g(x), g \in G\}$$

$$|\mathcal{O}_G(x)| = (G : Z_x)$$

$$G = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(x_i)$$

$$\boxed{|G| = \sum_{i \in I} (G : Z_{x_i})}$$

$$G_H = \{g \in G : \sigma_g H = H\} \stackrel{\text{def}}{=} N_H$$

$$G = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(H_i) \quad |G| = \sum_{i \in I} (G : N_i)$$

6.2 Левая трансляция

Пусть $x \in G$. $\tau : x \mapsto \tau_x : y \mapsto xy$.

$\tau_x(yu') = xyu'$ — не гомоморфизм.

Пусть $H \subset G$ — подгруппа G . Сопряжение не определяло действие, а трансляция определяет: $\triangleleft G/H : [g] = gH$, тогда $\tau_x(gH) = xgH = g'H \in G/H$.

7 Циклические группы

Определение. Группа G называется **циклической**, если $\exists g : \forall h \in G \ h = g^m = \underbrace{g \cdot g \cdots}_m$.

Обозначение. $G = \langle g \rangle$

Определение. Показатель элемента g в $G = \langle g \rangle$ это число $m > 0$, такое что $g^m = e$.

Определение. Показатель группы $\langle g \rangle$ — число $k > 0$, такое что $\forall x \in G \ x^k = e$.

Пример. $(\mathbb{Z}, +)$ — бесконечная циклическая группа.

Если H — подгруппа \mathbb{Z} , то $H = \{mz\}_{m \in \mathbb{Z}}$, $z := \min\{t \in \mathbb{Z} \mid t > 0\}$

Лекция 7

16 октября

Пусть G — произвольная группа, $\triangleleft \sigma : \mathbb{Z} \rightarrow G, \sigma : z \mapsto a^z$

$\text{Im } \sigma = \langle a \rangle \subset G$

Есть два случая:

1. $\text{Ker } \sigma = \{0\} \Rightarrow \text{Im } \sigma \cong \mathbb{Z}$ и G содержит бесконечную циклическую подгруппу.
2. $\text{Ker } \sigma \neq \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \sigma = H \subset \mathbb{Z} \Rightarrow H = \{nh\}_{n \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \mathbb{Z}/H = \{[0], [1], [2] \dots [h-1]\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}/H \xrightarrow{\sigma^*} G \\ & \searrow \sigma & \nearrow \end{array}$$

Разложили $\sigma = \sigma^* \circ \varphi$, где φ — канонический гомоморфизм.

Тогда σ^* отображает \mathbb{Z}/H в $a^0, a^1, a^2 \dots a^{h-1}$, где $a^h = a^0 = e$.

Утверждение. Все элементы различны, т.е. $\triangleleft s, r : a^s = a^r$. Тогда $s = r$.

Доказательство. $a^{s-r} = e \Rightarrow s - r = kh = 0 \Rightarrow s = r$. □

Определение. Пусть G — циклическая группа $a^0, a^1 \dots a^{h-1}$. Тогда h — **период** элемента a . Это не то же самое, что показатель: показатель имеет вид qh .

Лемма 20. G — конечная \Rightarrow период $\forall g \in G$ делит порядок группы.

Доказательство. Пусть d — период $g \in G$, тогда $g^d = e$.

$\triangleleft H = \langle g \rangle$ — подгруппа G и $|H| = d$

$$|G| = (G : 1) = (G : H)(H : 1) = (G : H)|H|$$

□

Лемма 21. Пусть $|G| = p$ — простое число, $\triangleleft g \in G, g \neq e$.

Тогда $G = \langle g \rangle$.

Доказательство. $\triangleleft g \in G, g \neq e$

$\triangleleft H = \langle g \rangle \Rightarrow |H| \neq 1$, т.к. $e \in H, g \in H$.

$p = (G : 1) = (G : H)(H : 1)$. Но тогда $(G : H) = 1$ по простоте p , следовательно $G = \langle g \rangle$ \square

Лемма 22. G — циклическая группа. Тогда

1. $H \subset G$ — циклическая
2. $\sigma(G)$ — циклическая, если $\sigma \in \text{Hom}(G)$

Доказательство. G — циклическая группа

1. (a) G — бесконечная циклическая группа.

Тогда $G \cong \mathbb{Z}$ — знаем все подгруппы (они циклические).

- (b) G — конечная циклическая группа.

$\triangleleft H \subset G$ — подгруппа.

$|G| : |H| \Rightarrow |H|$ конечна.

$\triangleleft a \in H \Rightarrow a = g^n \Rightarrow a^k = g^{kn} \Rightarrow H = \langle a \rangle$

2. Пусть $G = \langle g \rangle$, тогда $\sigma(g)$ — образующая для $\sigma(G)$ и значит $\sigma(G) = \langle \sigma(g) \rangle$

\square

Лемма 23. G — бесконечная циклическая группа. Тогда у G есть две образующие: g и g^{-1} .

8 Силовские группы

Определение. Группа называется p -группой, если ее порядок является степенью простого числа p .

Определение. Подгруппа H называется p -подгруппой группы G , если $H \subset G$, H — p -группа.

Определение. H называется силовой подгруппой G , если H — p -подгруппа G и $|H| = p^n$, где p^n — максимальный порядок в группе.

Пусть n — порядок группы G . Мы знаем¹, что $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots$, где p_i — простые. n_i — максимальная степень p_i , которая встречается в n , т.е. $n \not\equiv p_i^{n_i+1}$. Т.к. порядок подгруппы делит порядок группы, то найдутся подгруппы, порядки которых соответствуют этому разложению.

Лемма 24.

- $|G| = m$
- Показатель $G = n$
- G — коммутативная группа

Тогда порядок G делит некоторую степень показателя:

$$\exists k : n^k \vdots m$$

Доказательство. По индукции (по порядку группы)

$\triangleleft H \triangleleft G, H = \langle b \rangle$. Т.к. показатель $G = n, b^n = e$.

$\triangleleft |G/H|$

Так как $n \vdots (H : 1)$ и по индукции $n^k \vdots (G : H)$, то $n^{k+1} \vdots (G : 1) = (G : H)(H : 1)$ □

Лемма 25.

- G — конечная абелева группа
- $|G| \vdots p$ (p — простое)

Тогда $\exists H \subset G : |H| = p$.

Доказательство. $|G| \vdots p$ по условию.

$\triangleleft H = \langle x \rangle, x^n = e$

Пусть показатель группы G есть n, m — порядок группы.

$$m \vdots p \Rightarrow \exists s : m = sp$$

Некоторая степень показателя делится на порядок группы: $n^k \vdots m \Rightarrow \exists z : n^k = z \cdot m = zsp$

$$x^{zs} =: y, \quad y^p = e \Rightarrow H' = \langle y \rangle \text{ — искомая группа}$$

□

¹ Но докажем потом.

Теорема 5.

- G — конечная группа
- $|G| \vdots p$ (p — простое)

Тогда в $G \exists$ силовская подгруппа.

Доказательство. По индукции.

Если $|G| = p$, искомое очевидно.

Пусть искомое доказано для всех порядков меньших G .

Пусть $H \subset G \Rightarrow (G : 1) = (G : H)(H : 1)$

1. Если $|H| \vdots p$, то силовская подгруппа для G будет силовской подгруппой для H , которая существует по индукционному предположению.
2. Если $(G : H) \vdots p$

Пусть G действует на себя.

$$(G : 1) = |Z_G| + \sum_x (G : G_x)$$

Так как $(G : 1) \vdots p$ и $\forall x : (G : G_x) \vdots p \Rightarrow |Z_G| \vdots p$, т.е. центр нетривиальный. Кроме того, центр абелев, следовательно по лемме 25 $\exists H \subset Z_G$ - абелева подгруппа, такая что $|H| = p$.

Т.к. $H \subset G$, $H \triangleleft G \Rightarrow G/H$. В G/H существует силовская подгруппа p^{n-1} по индукционному предположению, назовём её K' .

$|K'| = p^{n-1}$, $|K'H| = p^{n-1} \cdot p = p^n$, при этом $K'H$ — подгруппа, т.к. H — нормальная подгруппа. $K'H$ — искомая подгруппа.

□

Лекция 8

23 октября

8.1 Теоремы Силова

Примечание.

- G — произвольная группа
- H, K — подгруппы G
- $H \subset N_K = \{g \in G : gKg^{-1} = K\}$

Тогда:

1. HK — подгруппа G

Доказательство. $\triangleleft h_1k_1, h_2k_2 \in HK$

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1k_1h_2k_2 = \underbrace{h_1h_2}_h \underbrace{k_1k_2}_k$$

□

2. $K \triangleleft HK \Rightarrow \exists HK/K$

$\triangleleft \varphi : HK \rightarrow HK/K$ — канонический гомоморфизм

$\text{Ker } \varphi = K$, т.к. $1 \cdot K \cdot K = K^2 = K$, что есть нейтральный элемент фактор-группы.

Мы запутались, но каким-то образом $HK/K \cong H/H \cap K$.

Не дописано

Теорема 6 (первая теорема Силова). Каждая p -подгруппа содержится в силовой p -подгруппе.

Доказательство. Пусть G — группа, S — множество силовских p -подгрупп и G действует на S сопряжением.

$$\langle \mathcal{P} \in S, S = S_G$$

$$S_0 := O_G(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \{g\mathcal{P}g^{-1}\}_{g \in G} = \{\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2 \dots \tilde{\mathcal{P}}_m\}$$

Сколько элементов в S_0 ? $(G : \mathcal{P}) \not\equiv p \Rightarrow |S_0| \not\equiv p$

Пусть H — p -подгруппа G , действующая на S_0 сопряжением.

Примечание. $|H| = p^k \Rightarrow \forall \tilde{H} \subset H \quad |\tilde{H}| \not\equiv p$

$$|S_0| = \sum_C (H : \tilde{H}_x)$$

Т.к. H — p -подгруппа, остатки от деления $(H : \tilde{H}_x)$ либо $\equiv p$, либо $= 1$. Т.к. $|S_0| \not\equiv p$, существуют слагаемые, не делящиеся на p и по предыдущему утверждению они равны единице. Рассмотрим одну из таких групп, \tilde{H}' . Ей соответствует \mathcal{P}' , причём $O_H(\mathcal{P}') = \mathcal{P}', \forall h \in H \quad h\mathcal{P}'h^{-1} = \mathcal{P}' \Rightarrow h\mathcal{P}' = \mathcal{P}'h$, а следовательно $H \subset N_{\mathcal{P}'}$.

Так как $HK/K \cong H/H \cap K, H\mathcal{P}'/\mathcal{P}' \cong H/(H \cap \mathcal{P}') \Rightarrow \mathcal{P}'H \cong \mathcal{P}' \Rightarrow H \subset \mathcal{P}' \quad \square$

Теорема 7 (вторая теорема Силова). Силоские p -подгруппы сопряжены.

Теорема 8 (третья теорема Силова). Число силоских p -подгрупп $\equiv 1 \pmod p$.

Не дописано