

1 Определения

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

1.3 n -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. Положительно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

Определение. Отрицательно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

Определение. Неопределенная кв. форма: $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

Определение. Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма: $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$ — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо

1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : T|_U$ — диффеоморфизм, т.е. $\exists T^{-1}$

1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть (x^0, y^0) — решение этой системы, $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$. Тогда $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$ система имеет решение, C^r гладко зависящее от y .

1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

Дана система из n функций, $f_i \in C^r$.

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть $(a, b) = (a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n)$ — решение системы и $\det \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$. Тогда $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists! \Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$ такие, что $\forall x \in U(a)$ $x, \Phi(x)$ — тоже решение системы.

1.11 ! Простое k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m , если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \ \text{rg} \Phi'(x) = k$

1.12 Касательное пространство к k -мерному многообразию в \mathbb{R}^m

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k -мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m . Оно не зависит от Φ .

$\Phi'(t^0)$ — касательное пространство к M в точке p , обозначается $T_p M$.

1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

x_0 — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \quad f(x_0) \geq f(x)$, остальные — аналогично.

Уравнения $\Phi(x) = 0$ называются **уравнениями связи**.

1.14 ! Формулировка достаточного условия относительного экстремума

Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$: если $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$.

Рассмотрим квадратную форму $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

Тогда:

1. Если $Q(h)$ положительно определена, a — точка минимума
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — точка максимума
3. Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум
4. Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

Пусть $E \subset X$. Последовательность f_n **сходится поточечно** к f на множестве E , если $\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$, т.е.:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

1.16 ! Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

f_n равномерно сходится к f на $E \subset X$, если $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n > N \quad 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n \xrightarrow[E]{} f$

1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

- X — произвольное множество
- $u_n : X \rightarrow Y$ — нормированное пространство

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $E \subset X : S_N \xrightarrow[E]{N \rightarrow +\infty} S$

1.18 Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости

Остаток ряда: $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$, $S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на $E \Leftrightarrow R_N \xrightarrow[E]{} 0$

1.19 ! Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

Степенной ряд: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, z — переменная $\in \mathbb{C}$ $\sum a_n(z - z_0)^n$,
тогда число $R = \frac{1}{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$. Это формула Адамара.

1.20 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

???

1.21

???

1.22

???

1.23 Кусочно-гладкий путь

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Кусочно-гладкое отображение — отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва — I рода и $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое $\forall k$, где t_k — точка разрыва.

1.24 Векторное поле

Векторное поле — непрерывное отображение $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$ — вектор, “приложенный к точке x ”.

1.25 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned} \quad (1)$$

Также используется обозначение $I(V, \gamma) = \int_{\gamma} V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

1.26 ! Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

1.27 Локально потенциальное векторное поле

V — **локально потенциальное** векторное поле в O , если $\forall x \in O \quad \exists U(x) : V$ — потенциально в $U(x)$

1.28 ! Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Возьмём $\delta > 0$ из леммы 2.45.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ -близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность (нет произвольности) следует из лемм 2.45 и 2.44

1.29 Гомотопия путей связанная и петельная

Гомотопия двух (непрерывных) путей $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ это непрерывное отображение $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_t \times \underbrace{[0, 1]}_u \rightarrow O$, такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гомотопия связанная (не связанная), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$



Рис. 1: Связанная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

Гомотопия петельная, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Рис. 2: Петельная гомотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

1.30 Односвязная область

Область $O \subset \mathbb{R}^m$ — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в O нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.



Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \leq k \leq r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}\end{aligned}$$

□

2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{(\alpha + 1)!} (x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1} \\ f(x) &= \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x - a))}{\alpha!} (x - a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-a|^{r+1})}\end{aligned}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. **Отсутствует**

□

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \rightarrow \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:

(a) $\|A\| \geq 0$

(b) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

(d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1. $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$

a, b, c — очевидно.

d: $|(A+B)x| = |Ax+Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$

По замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. $|BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

□

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $\|A\|$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.
2. $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 \quad |x_1 - x_0| < \delta$$

□

2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- E открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ ($c = a + \Theta(b - a)$), $\Theta \in [0, 1]$:

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$

$$\bullet \quad \|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|} - M \text{ “близкий” к } L$$

Тогда:

$$1. \quad M \in \Omega_m, \text{ т.е. } \Omega_m \text{ открыто в } \mathcal{L}_{m,m}$$

$$2. \quad \|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$$

$$3. \quad \|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

Доказательство. По неравенству треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}} |x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в \mathbb{R} выполняется следующее равенство в Ω_m :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на M слева и на L справа:

Доказательство.

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. \exists все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на E
2. $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$:

Берем x, ε . $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех i, j .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- a — точка локального экстремума
- f — дифф. в точке a

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. \square

Следствие (необходимое условие экстремума). a — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- f дифф. в $\text{Int}K$
- f непрерывно на K
- $f|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in \text{Int}K : f'(a) = \vec{0}$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо f на K const, либо $\exists a \in \text{Int}K$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ \square

2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \quad C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

Доказательство.

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2 |x| \\ \leq C_1 |x| \end{cases}$$

Существование C_1 и C_2 гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что p непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k) e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k) e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq |x - y| \sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y| M \end{aligned}$$

□

2.10 ! Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int} E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, a — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — локальный максимум
- Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум
- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 f(a+h) &= f(a) \\
 &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\
 &= \frac{1}{2} \left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

$$\begin{aligned}
 \angle \bar{h} : Q(\bar{h}) > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left(\sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0
 \end{aligned}$$

Т.е. $f(a + t\bar{h}) > f(a)$ при t , близких к 0.

Аналогично $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$ при t , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого f не имеет экстремума в a , но для \bar{f} a — локальный минимум. □

2.11 Лемма о “почти локальной инъективности”

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- F дифф. в $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists c > 0, \delta > 0 \ \forall h < \delta \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

Доказательство. Если F — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \|F'(x_0)\| \cdot |h| \geq \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|} |h|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

2.12 Теорема о сохранении области

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- F дифф.
- $\forall x \in O \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открыто.

Доказательство. $x_0 \in O \Rightarrow F(x_0) \in F(O)$ — внутренняя? в $F(O)$

По лемме $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

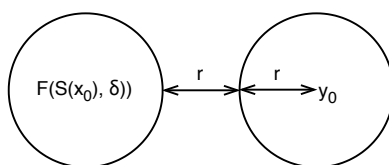
В частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2} \rho(y_0, F(S(x_0, \delta)))$$

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$

Т.к. S — компакт, $\exists \min$.

Если $y \in B(y_0, r)$, то $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$:



Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$, т.е. $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) F(x) = y$

Рассмотрим функцию $g(x) = |F(x) - y|^2$ при $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

Мы хотим показать, что $\exists x : g(x) = 0$. Найдем $\min g$.

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$ не лежит на границе шара \Rightarrow он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$

$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$

$$\forall x \quad \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\text{rg} F'(x) = l \quad \forall x \in O$

Тогда $F(O)$ открыто.

Доказательство. Зафиксируем точку x_0 . Пусть ранг реализуется на столбцах $1 \dots l$, т.е. определитель матрицы из столбцов $1 \dots l \neq 0$, т.е.:

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots l}}_{A(x_0)}(x_0) \neq 0$$

И для близких точек тоже $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[\begin{array}{c|c} F'(x) & \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array} \right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда $\tilde{F}|_{U(x_0)}$ удовлетворяет теореме $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$ — открытое множество в \mathbb{R}^m

$$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$$

□

2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- T обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \quad \forall x \in O$

Тогда $T^{-1} \in C^r(0, \mathbb{R}^m)$ и $(T^{-1})'_{y_0} = (T'(x_0))^{-1}$, где $y_0 = T(x_0)$

Доказательство. Докажем по индукции по r .

База: $r = 1$

$S := T^{-1}$ — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему?

$f : X \rightarrow Y$ непр. $\Leftrightarrow \forall B$ — откp. $\subset Y \quad f^{-1}(B)$ — открыто.

$T'(x_0) = A$ — невырожденный оператор.

По лемме о локальной инъективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$

$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах y и S :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y \rightarrow 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно $\rightarrow 0$, то S дифференцируемо по определению.

Пусть y близко к y_0 , тогда $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}\omega(S(y))| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{C} |y - y_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |w(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что S дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что S' непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

“Алгоритм” получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому S' непрерывно.

Переход

$$\begin{aligned} T \in C^{r+1} \quad T' : O \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ? S \in C^{r+1} \\ y \stackrel{\in C^r}{\mapsto} \text{по инд.} S(y) \stackrel{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \stackrel{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})' \end{aligned}$$

□

2.15 ! Теорема о неявном отображении

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- O откp.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$

$$\bullet \det F'_y(a, b) \neq 0$$

Тогда:

1. \exists откp. $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$
 \exists откp. $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$
 $\exists! \Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$
2. $\Phi'(x) = - (F'_y(x, \Phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

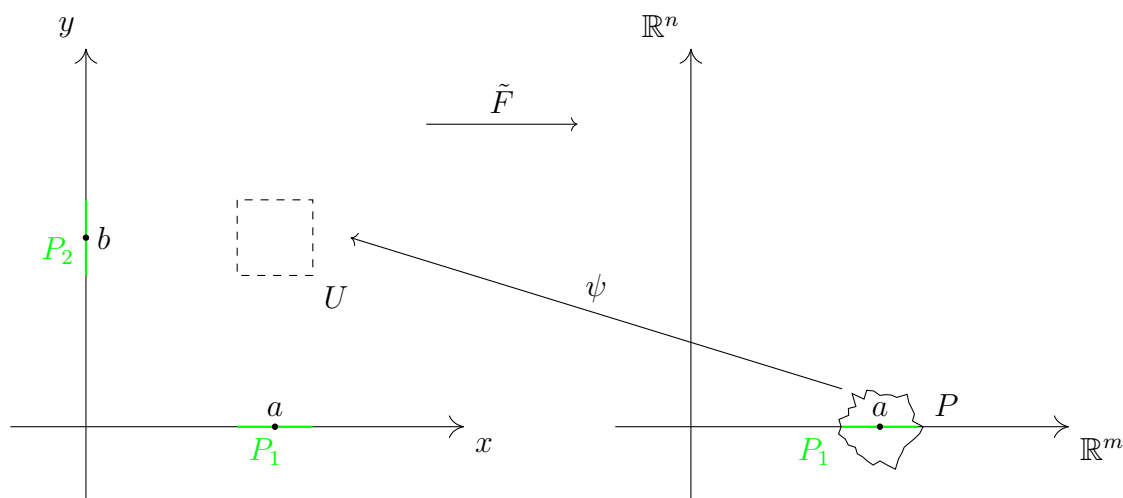
Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2: F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$$

$$1: \tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$$

$$F' = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right)$$

Очевидно $\det \tilde{F}' \neq 0$ в (a, b) , значит $\exists U(a, b) : \tilde{F}|_U$ — диффеоморфизм



1. $U = P_1 \times Q$ — можно так считать
2. $V = \tilde{F}(U)$
3. \tilde{F} — диффеоморфизм на $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$
4. \tilde{F} не меняет первые m координат $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$.
5. “Ось x ” \Leftrightarrow “ось y ”, $P :=$ “ось u ” $= \mathbb{R}^m \times a \cap V, P$ — откp. в $\mathbb{R}^m, P = P_1$

$$6. \Phi(x) := H(x, 0)$$

$$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$$

$$\text{Единственность: } (x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$$

□

2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$ (случай $k = m$ тривиален)
- $1 \leq r \leq \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность p в \mathbb{R}^m : $M \cap U$ — k -мерное C^r -гладкое многообразие.
2. $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и функции $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, все $f_i \in C^r$
 $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$, при этом $\text{grad} f_1(p) \dots \text{grad} f_{m-k}(p)$ — ЛНЗ.

Доказательство.

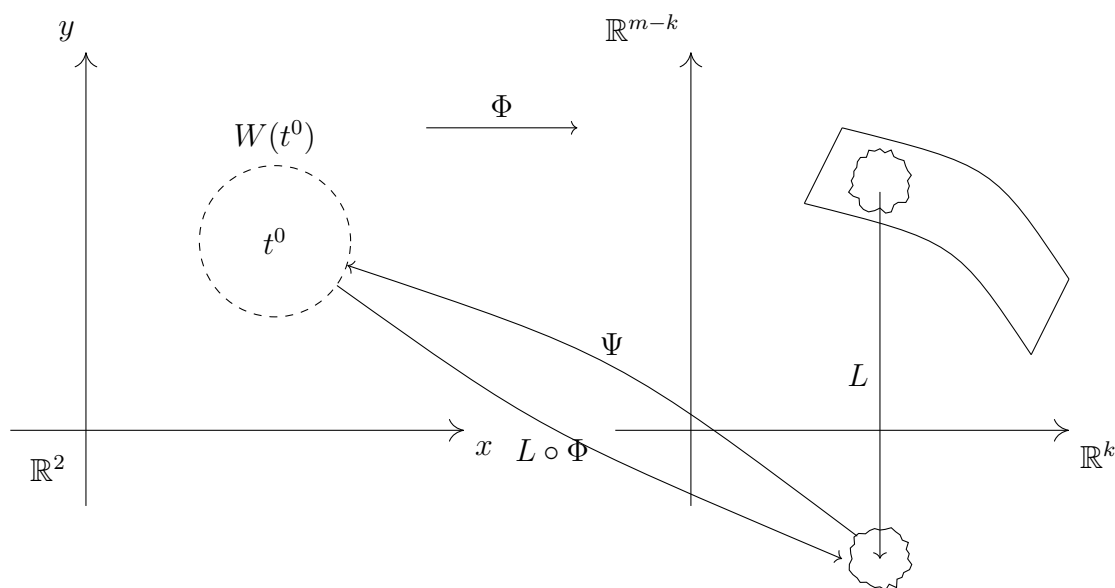
1 \Rightarrow 2: Φ — параметризация $O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$$\text{rg} \Phi'(t^0) = k$$

$$\text{Пусть } \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1 \dots k} \neq 0$$

Пусть $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ — проекция на первые k координат: $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда $(L \circ \Phi)'$ — невырожденный оператор \Rightarrow локальный диффеоморфизм. Тогда если $W(t^0)$ — окрестность точки t^0 , то $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ — диффеоморфизм.



Множество $\Phi(W)$ – график некоторого отображения $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем $x' \in V$, тогда $(x', U(x')) = \Phi(\Psi(x'))$, т.е. $H \in C^r$

Множество $\Phi(W)$ открыто в $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$, где \tilde{U} открыто в \mathbb{R}^m

$\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$. Тогда $x \in M \cap \tilde{U} (= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow \text{ЛНЗ}$

$2 \Rightarrow 1: F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$.

Пусть ранг реализуется на последних $m - k$ столбцах, т.е.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$$

$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$ при $x \in U$

По т. о неявном отображении:

$\exists P - \text{окр. } (x_1 \dots x_k) \text{ в } \mathbb{R}^m$

$\exists Q - \text{окр. } (x_{k+1} \dots x_m) \text{ в } \mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H \in C^r : P \rightarrow Q : F(x', H(x')) = 0 \text{ для } x' \in P$

Тогда $\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$

$\Phi - \text{гомеоморфизм } P \text{ и } M \cap \tilde{U}, \Phi - \text{фактически проекция.}$

□

2.17 Следствие о двух параметризациях

- $M \subset \mathbb{R}^m - k\text{-мерное } C^r\text{-гладкое многообразие}$
- $p \in M$
- \exists две параметризации:

$$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$$

$$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$$

Тогда \exists диффеоморфизм $\Psi : O_1 \rightarrow O_2$, такой что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

Доказательство.

Частный случай: Пусть $\text{rg} \Phi'_1(t^0), \text{rg} \Phi'_2(s^0)$ достигается на первых k столбцах.

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta - \text{искомый диффеоморфизм}}$$

Общий случай: $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$

$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□

2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$

- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k -мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m . Оно не зависит от Φ .

$\Phi'(t^0)$ — касательное пространство к M в точке p , обозначается $T_p M$.

Доказательство. $\text{rg} \Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации \Rightarrow искомое очевидно. Если взять другую параметризацию Φ_1 , то

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

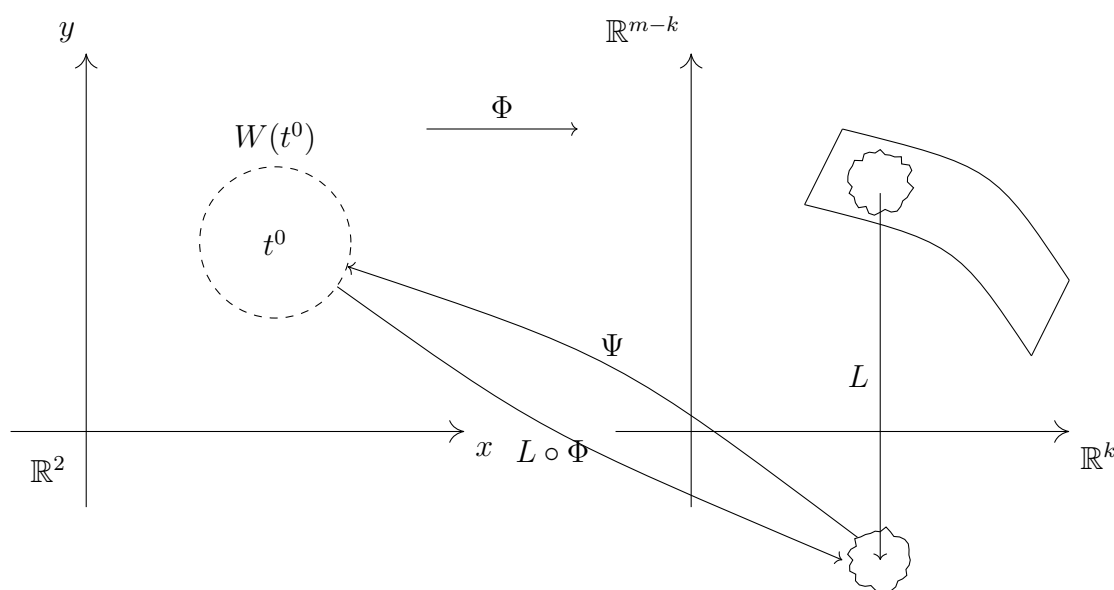
$$\Phi' = \Phi'_1 \Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор \Rightarrow образ $\Phi' =$ образ Φ'_1

□

2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M, \gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$



Доказательство. Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi' \Psi' L' \gamma'(0) = \Phi'(\gamma(0)) = \Phi'(p) \in T_p M$$

□

2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ — поверхность в \mathbb{R}^{m+1} , задается точками (x, y) .

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a, b) задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит образу Φ' ?

$$\Phi' \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m}$ □

$$\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$$

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(a) = 0$$

Тогда уравнение касательной к плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

Доказательство. γ — путь в $M : \Phi(\gamma(s)) = 0, \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$. По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору x в касательном пространстве можно сопоставить $\gamma : \gamma'(s) = x$. Поэтому любой касательный вектор от точки a , он должен быть подчинён искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости Φ в точке a :

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + o(\|x - a\|)$$

Мы игнорируем o , потому что оно компенсируется тем, что мы берем не с поверхности Φ , а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение. \square

2.21 ! Необходимое условие относительного локального экстремума

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

$$\text{В координатах: } \begin{cases} f'_{x_1} - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} - \dots - \lambda_m(\Phi_m)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} - \dots - \lambda_m(\Phi_m)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны $a_1 \dots a_{m+n}, \lambda_1 \dots \lambda_n$, поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

Доказательство. $\text{rg} \Phi'(a) = n$. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1} \dots x_{m+n}$.

Обозначим $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$.

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y).$$

$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists U(a_x) \exists V(a_y) \exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация простого гладкого многообразия $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$.

a — точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ — точка локального экстремума функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$, потому что $(x, \varphi(x)) \in U(a)$.

Необходимое свойство экстремума для a_x :

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0 \quad (2)$$

Примечание. Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется a и a_x , но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi(x)) &\equiv 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' &= 0 \end{aligned}$$

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0 \quad (3)$$

$$f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0 \quad (2 + 3)$$

Пусть $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$.

Тогда $f'_y + \lambda \Phi'_y = f'_y - f'_y (\Phi'_y(a))^{-1} \Phi'_y(a) = 0$ и $f'_x + \lambda \Phi'_x = 0$ в силу (2 + 3). \square

2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

- $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda - \text{собственное число } A^T A\}$

Такое число существует, т.к. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \Rightarrow \langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

Доказательство. $\triangleleft x \in S^{m-1}$.

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T Ax, x \rangle}_{\text{СИММ.}} \\ \max |Ax|^2 &= \max \langle A^T Ax, x \rangle = \lambda_{\max} \end{aligned}$$

\square

2.23 ! Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функции. Следствие для рядов

- $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- f_n непрерывна в x_0
- $f_n \xrightarrow[X]{} f$

Тогда f непрерывна в x_0

Доказательство. $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ — верно $\forall x, \forall n$

$$f_n \xrightarrow[X]{} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Берем $\forall \varepsilon > 0$ возьмём любой n , для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для этого n подбираем $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

- X компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$, где $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство $C(X)$ — полное метрическое пространство с метрикой ρ .

Доказательство. f_n — фундаментальная в $C(X) \stackrel{\text{def}}{\iff}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (*)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$ вещественная последовательность $(f_n(x_0))$ фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$, тогда f — поточечный предел f_n . Проверим это.

В $(*)$ перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow[X]{} f \stackrel{\text{сл. из Стокс}}{\implies} f \in C(X)$$

□

2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a,b]} |f_n - f| (b - a) = \rho(f_n, f)(b - a) \rightarrow 0$$

□

2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
- f, f'_y — непр. на $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Тогда Φ дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство.

$$\frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int_a^b \frac{f\left(y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \quad (4)$$

$$= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \quad (5)$$

$$= \int_a^b g_n(x, y) dx \quad (6)$$

5: по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_y(x, y)$ на $x \in [a, b]$ по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем y фиксированным.

Таким образом, $\Phi'(y) \leftarrow \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y) dx$

□

2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

- $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $f_n \rightarrow f$ поточечно на $\langle a, b \rangle$
- $f'_n \xrightarrow[\langle a, b \rangle]{} \varphi$

Тогда $f \in C^1\langle a, b \rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ D \downarrow & & \vdots \\ f'_n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство. $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$:

$$\begin{aligned} f'_n \xrightarrow{[x_0, x_1]} \varphi &\xrightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ &\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ f(x_1) - f(x_0) &\xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\ &f(x_1) - f(x_0) \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi \end{aligned}$$

Тогда $\begin{cases} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$

□

Дифференцирование функционального ряда?

2.28 ! Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть $\exists c_n$ — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$ при $x \in E$
- $\sum c_n$ — сходится

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство. $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p}$ — тривиально

$\sum c_n$ — сх. $\Rightarrow c_n$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда $\sum u_n(x)$ удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости. \square

2.29 Дифференцируемость Γ функции

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \left(\frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \right)$$

Изучив равномерную сходимость $\left(\frac{x}{(x+k)k} \right)'$, получаем, что $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$ и т.д. $\Rightarrow \Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

2.30 Теорема о предельном переходе в суммах

- $u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- X — метрическое пространство
- x_0 — предельная точка E
- $\forall n \quad \exists \text{конечный } \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E .

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

Доказательство.

1. $\sum a_n$ — сходится

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Проверим, что S_n^a — фундаментальная:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| \quad (7)$$

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

Зададим ε по N , выберем $n, n+p$ и возьмём x близко к x_0 : $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выполнено 7, т.е. $|S_{n+p} - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

2. $\sum a_n \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$

Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases} \text{ — задано на } U \cup \{x_0\}, \text{ непрерывно в } x_0.$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$ — равномерно сходится на $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$ сумма ряда непрерывна в x_0 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n \\ \sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| &\leq \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

□

2.31 Теорема о перестановке двух предельных переходов

- $f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- x_0 — предельная точка E
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A_n$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{\quad} & S(x) \\ \downarrow x \rightarrow x_0 & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ f'_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство. $u_1 = f_1, \dots, u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$$a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$$

Тогда $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

В эти обозначениях $\sum u_k(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$.

$$u_k(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} a_k$$

Тогда по т. 4' $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ имеет конечный предел при $n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

2.32 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum a_n(x)b_n(x)$ — вещественный ряд.
- $x \in X$

- Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничены :

$$\exists C_a \quad \forall N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq C_a$$

- $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{X} 0$

Тогда ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство. Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$\sum_{M \leq k \leq N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{M \leq k \leq N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_A |b_N| + C_A |b_{M-1}| + \sum_{M \leq k \leq N-1} C_A |b_k - b_{k+1}| \\ &\leq C_A \left(|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \\ &\leq C_A (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|) \end{aligned} \quad (8)$$

8 : Все разности одного знака \Rightarrow телескопически $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : \forall l > K \quad \forall x \in X \quad |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при $M, N > K \quad \forall x \in X$:

$$\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

2.33 Теорема о круге сходимости степенного ряда

- $\sum a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in C$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$

3. $\exists R \in (0, +\infty)$:

(a) при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится

(b) при $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Доказательство. Применим признак Коши: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, если $r < 1$, ряд сходится, если $r > 1$, ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. $\overline{\lim} = 0$. Тогда $r = 0$, есть абсолютная сходимость при всех z .

2. $\overline{\lim} = +\infty$. Тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$. При $z = z_0$ сходимость очевидна.

3. $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$. Тогда $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{def}}{=} R$

□

2.34 Теорема о непрерывности степенного ряда

- $\sum a_n (z - z_0)^n$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:

1. $\forall r : 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ — непрерывна в $B(z_0, r)$

Доказательство.

1. Если $0 < r < R$, то при $z = r$ ряд абсолютно сходится, т.е. $\sum |a_n| r^n < +\infty$

Признак Вейерштрасса:

(a) При $|z - z_0| \leq r$ $|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$

(b) $\sum |a_n| r^n < +\infty$

\Rightarrow есть сходимость на $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следствие из пункта 1 и теоремы Стокса-Зайдля.

Если z удовлетворяет $|z - z_0| < R$, то $\exists r_0 < R : z \in B(z_0, r_0)$

На $B(z_0, r_0)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow f$ непр. в точке z .

□

2.35 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

$$(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 < R < +\infty$$

$$(A') \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Тогда:

1. Радиус сходимости (A') равен R
2. $\forall r \in B(z_0, R) \exists f'(z)$ и $f'(z) = \sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$

Доказательство.

1. По формуле Адамара.

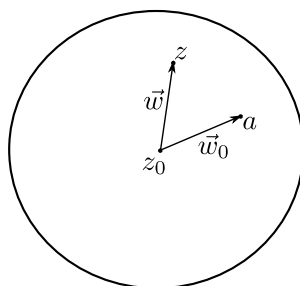
Ряд (A') сходится при каком-то $z \Leftrightarrow \sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$ — сходится.

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{1 \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

2. $a \in B(z_0, R), \exists r < R : a \in B(z_0, r)$

$$a = z_0 + w_0, |w_0| < r$$

$$z = z_0 + w$$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}}_{\substack{\text{модуль по лемме} \\ n r^{n-1} |a_n|}} \quad (9)$$

$\sum n r^{n-1} |a_n|$ сходится по пункту 1.

То есть ряд 9 в круге $z \in B(z_0, r)$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum n a_n (a - z_0)^{n-1}$$

□

Следствие об интегрировании?

Пример?

2.36

???

2.37

???

2.38

???

2.39 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall U, V - \text{векторные поля} \quad I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

Доказательство. Очевидно из формулы 1 в определении. □

2. Аддитивность при дроблении пути

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $c \in (a, b)$
- $\gamma^1 = \gamma|_{[a, c]}$
- $\gamma^2 = \gamma|_{[c, b]}$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

Доказательство. Очевидно из линейности интеграла в 1. □

3. Замена параметра

- $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$
- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(p) = a$

- $\varphi(q) = b$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Тогда $I(V, \varphi) = I(V, \tilde{\varphi})$

Доказательство. Это замена переменной в интеграле.

$$\begin{aligned}
 I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s) \rangle ds \\
 &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\
 t &:= \varphi(s) \\
 &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \tilde{\gamma}'(t) \rangle dt \\
 &= I(V, \gamma)
 \end{aligned}$$

□

Примечание. $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — то же самое

По теореме о двух параметризациях: \exists диффеоморфизм $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

4. Объединение носителей

- $\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

Зададим путь $\gamma = \gamma^2 \gamma^1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b + d - c] \end{cases}$

В точке b возможен излом, т.е. нет $\gamma'(b)$, но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

Если γ^1, γ^2 — кусочно-гладкие, то γ — кусочно-гладкое.

Тогда $I(V, \gamma^2 \gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 I(V, \gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 \tau &:= t - b + c \\
 &= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1'}(t) \rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2'}(\tau) \rangle d\tau \\
 &= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)
 \end{aligned}$$

□

5. Противоположный путь

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \gamma(a + b - t)$, т.е. мы идём от b к a , а не наоборот.

Тогда $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \\
 t &:= a + b - \tau \\
 &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle (-dt) \\
 &= -I(V, \gamma)
 \end{aligned}$$

□

6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

, где $L = \gamma[a, b]$ — носитель пути.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) \end{aligned} \quad (11)$$

10: Неравенство Коши-Буняковского

11: V — непр., L — компакт \Rightarrow \sup достигается □

2.40 ! Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- V — потенциально
- f — потенциал V
- $\gamma[a, b] \rightarrow O$
- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. γ — гладкий

$$\Phi(t) = f(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t)) \gamma'_m(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t) dt \\
 &= \Phi(b) - \Phi(a) \\
 &= f(B) - f(A)
 \end{aligned}$$

2. γ — кусочно-гладкий

\exists дробление: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b : \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — гладкое

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \varphi'(t) \rangle dt \\
 &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \\
 &= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\
 &= f(B) - f(A)
 \end{aligned} \tag{12}$$

12: по пункту 1.

□

2.41 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

V — векторное поле в области O . Тогда эквивалентны следующие:

1. V — потенциально
2. $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i$ не зависит от пути в O
3. $\forall \gamma$ — кусочно-гладкий, замкнутый в O $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i = 0$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

2 \Rightarrow 3 γ — петля: $[a, b] \rightarrow O$. $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O, t \mapsto A$. По свойству 2: $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

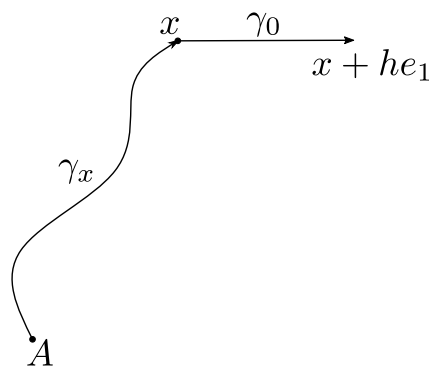
$3 \Rightarrow 2$ γ_1, γ_2 — пути с общим началом и концом. Тогда $\gamma := \gamma_2^{-1} \gamma_1$ — петля. γ — кусочно гладкий $\Rightarrow \int_{\gamma} = 0$

$2 \Rightarrow 1$ Фиксируем $A \in O$.

$\forall x \in O$ выберем кусочно-гладкий путь γ_x из A в x . Проверим, что $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$ — потенциал.

Достаточно проверить, что $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$ в O .

Фиксируем $x \in O$. $\gamma_0(t) = x + t h e_1, t \in [0, 1], \gamma'_0(t) = (h, 0 \dots 0) = h e_1$



$$\begin{aligned}
 f(x + h e_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h e_1}} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0} \\
 &= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
 &= h V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n)
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + h e_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x)$$

□

2.42 ! Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

V — гладкое, потенциальное в O

Тогда

$$\forall x \in O \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \quad (13)$$

Доказательство. Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

Лемма Пуанкаре:

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклая область
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- V удовлетворяет 13, в т.ч. V — гладкое.

Тогда V — потенциальное.

Доказательство. Фиксируем $A \in O$

$$\forall x \in O \quad \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma'_x(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k) dt$$

Проверим, что f — потенциал.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \text{правило Лейбница} \\
 &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\
 &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\dots) t(x_k - A_k) dt \quad (14) \\
 &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt \\
 &= tV_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\
 &= V_j(x)
 \end{aligned}$$

14: по 13.

□

2.43 Лемма о гусенице

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Тогда \exists дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и \exists шары $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.

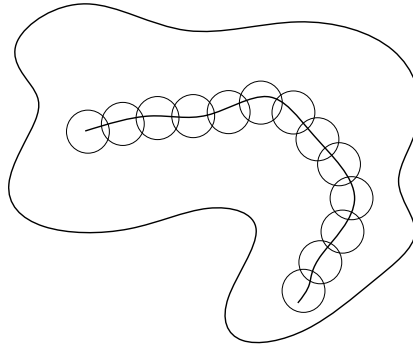


Рис. 4: “Гусеница” — покрытие пути шарами

Доказательство. $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$$\overline{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

$\overline{\beta}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо α_c, β_c брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$ — компактно $\Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

??? ни один интервал не покрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$, принадлежащая “только этому” интервалу.

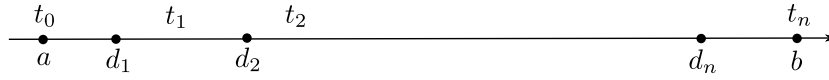


Рис. 5: Выбор точек t_k

Точка t_k выбирается на d_k, d_{k+1} и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1})$.

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$$

□

2.44 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$ — V -похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$$

Доказательство. Рассмотрим общую V -гусеницу. Пусть f_k — потенциал V в шаре B_k , $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \end{aligned} \tag{15}$$

15: По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k \Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1} \Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

2.45 Лемма о похожести путей, близких к данному

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ — непр.
- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \delta > 0$: если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$ таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ V -похожи.

Доказательство. Берём V -гусеницу для γ .

δ_k -окрестность множества $A := \{x : \exists a \in A \quad \rho(a, x) < \delta\} = \bigcap_{a \in A} B(a, \delta)$

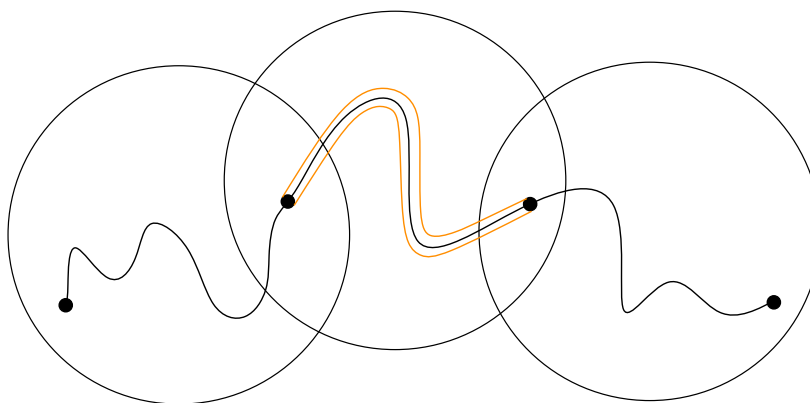


Рис. 6: δ_k -окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

$$\forall k \quad \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1}m \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна \Rightarrow достигается $\max, \rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

$$\delta_k := \frac{r-r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$$

□

2.46 Равенство интегралов по гомотопным путям

- V — локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Доказательство. $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что $\Phi(u) = \text{const}$. Докажем более простой факт, что Φ — локально постоянна, тогда в силу компактности отрезка Φ будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

Γ — непр. на $[a, b] \times [0, 1]$ — комп. $\Rightarrow \Gamma$ равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём δ из леммы о похожести близких путей (2.45) для пути γ_{u_0} .

Если $|u - u_0| < \delta$ $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$ при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по γ_u и γ_{u_0} таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}, \frac{\delta}{4}$ -близкий к γ_{u_0} , т.е.

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_u, \frac{\delta}{4}$ -близкий к γ_u . Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ — δ -близкие к $\gamma_{u_0} \Rightarrow$ они V -похожи \Rightarrow

$$\int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

Таким образом, $\Phi(u) = \Phi(u_0)$ при $|u - u_0| < \delta$, т.е. Φ — локально постоянна. \square

2.47 Теорема Пуанкаре для односвязной области

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
- V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. V — локально потенциально, γ_0 — кусочно-гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути $\gamma_1 \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеристизации потенциальных векторных полей в терминах интегралов V потенциально. \square

2.48 Теорема о веревочке

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O, t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля нестягиваема.

Неформальная формулировка: пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?

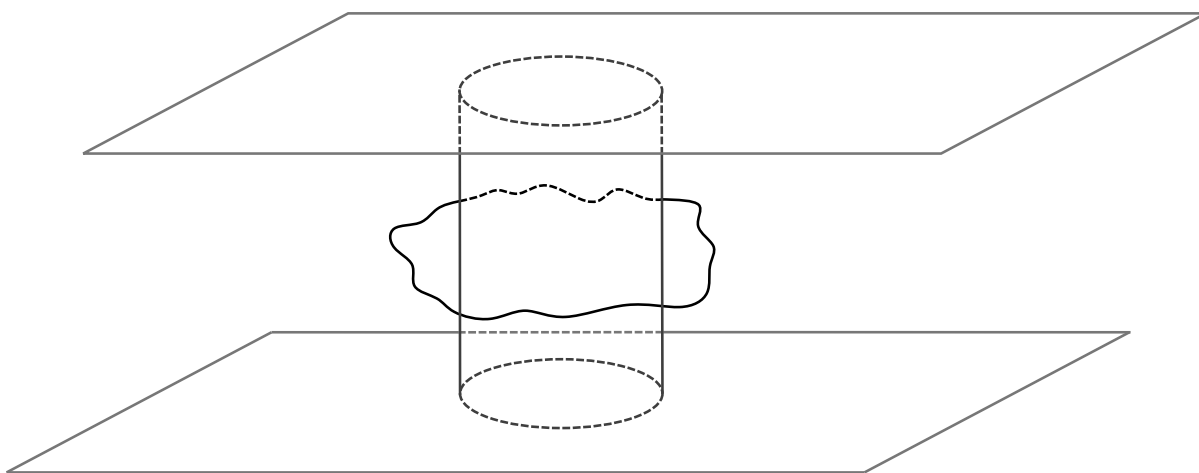


Рис. 7: Веревочка (жирным), надетая на “гвоздь” (цилиндр)

Доказательство. $V(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ — векторное поле в \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Тогда V — локально потенциально.

При этом

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum V_i dx_i &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{1} \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Таким образом, если бы существовал постоянный путь $\tilde{\gamma}$, которому γ гомотопен, то $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} = 0$, но это не так. \square