Интеграл локального потенциального векторного поля по непрерывному пути

Лемма 1 (о гусенице).

- $\gamma : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — *непр.*

Тогда $\exists$ *дробление* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *и* $\exists$ *шары* $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.

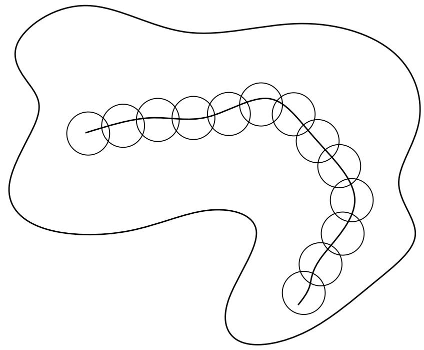

Рис. 1: "Гусеница" — покрытие пути шарами

Доказательство. $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$\overline{\alpha_c} := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$

$\overline{\beta_c} := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо α_c, β_c брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$ — компактно $\implies [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

Не умаляя общности ни один интервал не накрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$, принадлежащая "только этому" интервалу.

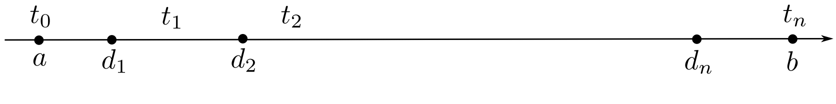

Рис. 2: Выбор точек t_k

Точка t_k выбирается на d_k, d_{k+1} и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1})$.

$\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$ $\square$

Примечание. $\forall \delta > 0$ мы можем требовать, чтобы все $r_k < \delta$

Примечание. В силу произвольности r_c можно требовать, чтобы шары B_c удовлетворяют некоторому локальному условию.

Например пусть V — локально потенциальное поле в O. Мы можем требовать, чтобы во всех шарах существовал потенциал V. Тогда будем называть $\{B_k\}$ V-гусеницей.

Определение.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ называются похожими *(V-похожими)*, если у них есть общая V-гусеница:

$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b \;\; \exists$ шары $B_k \subset O$:

$$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k, \tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$$

Следствие 1.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда любой путь V-похож на ломаную:

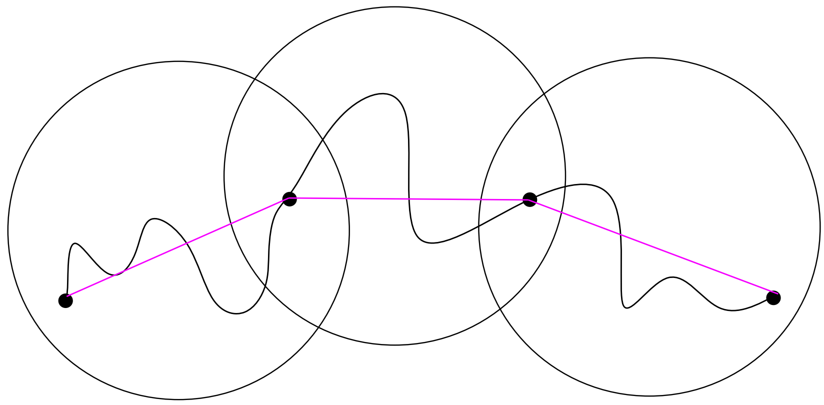

Рис. 3: Построение ломаной *(розовая)* по пути *(чёрный)* с помощью V-гусеницы *(круги)*

.

Лемма 2 (о равенстве интегралов локально-потенциальных векторных путей по похожим путям).

- *V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$*
- *$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — V-похожие, кусочно гладкие*
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда $\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Рассмотрим общую V-гусеницу. Пусть f_k — потенциал V в шаре B_k, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \qquad (1) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a))\end{aligned}$$

1: По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k\Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}\Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

Примечание. Вместо условия "$\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$" можно взять условие: $\gamma, \tilde{\gamma}$ — петли. Тогда утверждение леммы тоже верно.

Лемма 3.

- $\gamma : [a, b] \to O$ — *непр.*
- V — *локально-потенциальное векторное поле в* $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \delta > 0$: *если* $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \to O$ *таковы, что:*

$$\forall t \in [a, b] \ \ |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ V*-похожи.*

Доказательство. Берём V-гусеницу для γ.

δ_k-окрестность множества $A := \{x : \exists a \in A \ \ \rho(a, x) < \delta\} = \bigcap\limits_{a \in A} B(a, \delta)$

$$\forall k \ \ \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k_1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1} m \, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна $\Rightarrow$ достигается max, $\rho(\gamma(t), w) \le r_0 < r$

$\delta_k := \frac{r - r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$ □

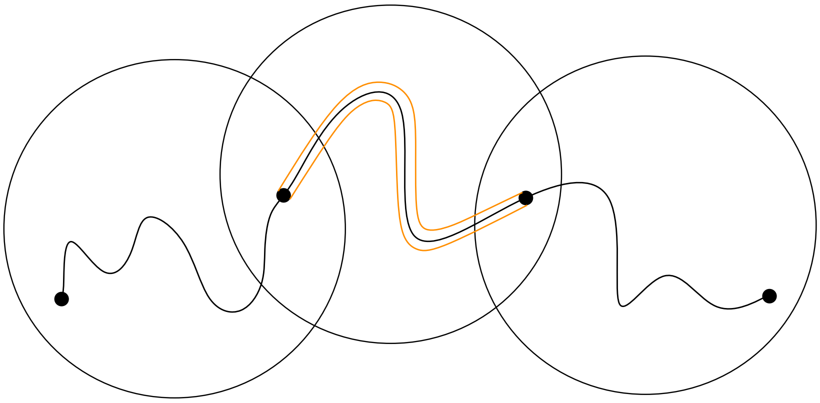

Рис. 4: δ_k-окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

Определение (Интеграл локального потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ). Возьмём $\delta > 0$ из леммы 3.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ-близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t \ \ |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность *(нет произвольности)* следует из лемм 3 и 2

Равномерная сходимость функциональных рядов *(продолжение)*

Теорема 1 (признак Дирихле).

- $\sum a_n(x) b_n(x)$ — вещественный ряд.
- $x \in X$
- Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничены :

$$\exists C_a \ \ \forall N \ \ \forall x \in X \ \ \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \right| \leq C_a$$

- $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \underset{n \to +\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$

Тогда ряд $\sum a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство. Преобразование Абеля *(суммирование по частям)*

$$\sum_{M \leq k \leq N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{M \leq k \leq N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{N} a_k(x)b_k(x)\right| &\le C_A|b_N| + C_A|b_{M-1}| + \sum_{M\le k\le N-1} C_A|b_k - b_{k+1}| \\ &\le C_A\left(|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1}|b_k - b_{k+1}|\right) \\ &\le C_A\left(2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|\right)\end{aligned} \tag{2}$$

2 : Все разности одного знака $\Rightarrow$ телескопически $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K : \forall l > K\ \ \forall x \in X\ \ |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при $M, N > K\ \ \forall x \in X$:

$$\left|\sum_{k=m}^{N} a_k(x)b_k(x)\right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

Пример. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$

1. $f(x)$ — непр. на $\mathbb{R}$

   $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \sum\dfrac{1}{n^2}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ряд f — непр. на $\mathbb{R}$

2. f — дифф.?

   По теореме 3' $\sum f_n'(x)$ — ? равномерно сходится в окрестности x_0. Если да, то $f \in C^1(V(x_0))$.

   $f' = \sum\dfrac{\cos nx}{n}$, но при $x = 2\pi k$ $\sum$ расходится.

   Применим признак Дирихле для $a_n = \cos nx, b_n = \frac{1}{n}, x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

$$\begin{aligned}|\cos x + \cos 2n + \cdots + \cos nx| &= |\Re(e^{ix} + e^{2ix} + .. + e^{nix}) \\ &\le \left|e^{ix}\frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1}\right| \\ &= |e^{ix}|\frac{|e^{nix} - 1|}{|e^{ix} - 1|}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|}$$
$$\leq \frac{2}{e^{i\varepsilon} - 1}$$
$$=: C_A$$

b_n — монотонно, $\to 0$, не зависит от x, поэтому $\rightrightarrows 0$

Таким образом, призак Дирихле сработал и $f'(x) = \sum \frac{\cos nx}{n}$ при $x \in (0, 2\pi)$

Упражнение.

1. При $x = 2\pi k$ $f(x)$ не дифференцируемая.
2. Существует ли $f''(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$?
3. Если $q(x) = \sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in (0, 2\pi)$:
   (a) Непрерывна?
   (b) Дифференцируема?

Степенные ряды

$B(r_0, r) \subset \mathbb{C}$ — открытый круг

Определение. Степенной ряд: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}, a_n \in C, z$ — переменная $\in C$

Теорема 2 (о круге сходимости степенных рядов).

- $\sum a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in C$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, +\infty)$:
   (a) при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится
   (b) при $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Примечание. Ряд не может никогда не сходиться, т.к. при $z = z_0$ ряд$= a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$.

Доказательство. Применим признак Коши: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, если $r < 1$, ряд сходится, если $r > 1$, ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| = |z - z_0|\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. $\overline{\lim} = 0$. Тогда $r = 0$, есть абсолютная сходимость при всех z.
2. $\overline{\lim} = +\infty$. Тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$. При $z = z_0$ сходимость очевидна.
3. $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$. Тогда $|z - z_0|\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \overset{\text{def}}{=} R$

$\square$

Определение. $\sum a_n(z - z_0)^n$, тогда число $R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Это **формула Адамара**.