Ряды Тейлора

Пример.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \; x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \; x \in (-1, 1)$$

Теорема 1. $\forall \sigma \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots$$

Доказательство. При $|x| < 1$ ряд сходится по признаку Даламбера.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(\sigma - n)x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \to +\infty} |x| < 1$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$.

Наблюдение: $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} x^n + \dots$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\begin{aligned}(1+x)S' &= \dots + \left(\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} n \right) x^n + \dots \\ &= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \sigma x^n + \dots\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S'(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0$$

$\Rightarrow f = \text{const}, f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1$ □

Следствие 1.

$$\arcsin x = \sum{}^{**} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1, 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} (-x^2)^n \Big|_{\sigma=-\frac{1}{2}} = \sum{}^{*} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

При $n = 0$ * это 1, и тогда **: $\arcsin x = x + \ldots$

Следствие 2.

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}, \ |t| < 1$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

Дифференцируем m раз, получим искомое. Слагаемые с $n < m$ пропадут, т.к. они $=$ 0 □

Теорема 2. $f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$

Тогда f — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности $x_0 \iff$

$$\exists \delta, C, A > 0 \ \forall n \ \forall x : |x - x_0| < \delta \ |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$$

Примечание. В "Кошмарном сне" *(см. лекцию 12)* $f^{(n)} \approx n!2n! \Rightarrow f$ не раскладывается.

Доказательство.

$\Leftarrow$ формула Тейлора в $x_0 : f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \right| \le C|A(x-x_0)^n| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Разложение имеет место при $|x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$

$\Rightarrow$ $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Возьмём $x_1 \neq x_0$, для которого это верно

(a) при $x = x_1$, ряд сходится $\Rightarrow$ слагаемые $\to 0 \Rightarrow$ огр.

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n\right| \leq C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! B^n$$

, где $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

(b)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x_1) &= \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\dots(n-m+1)x^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x - x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Пусть $|x - x_0| < \frac{1}{2B}$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}|x - x_0|^{n-m}\right| \\ &\leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!}|x - x_0|^{n-m} \\ &= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!}(\underbrace{B|x - x_0|}_{\leq \frac{1}{2}})^{n-m} \\ &= \frac{C_1 B^m m!}{(\underbrace{1 - B|x - x_0|}_{> \frac{1}{2}})^{m+1}} \qquad (1) \\ &< C_1 2^{m+1} B^m m! \\ &= \underbrace{(2C_1)}_{C}(\underbrace{2B}_{A})^m m! \end{aligned}$$

1: по следствию 2.

Эта оценка выполняется при $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

□