

**Упражнение 1.** Пусть  $H, K$  — некоторые группы (вообще говоря неабелевы). Рассмотрим  $G = H \times K$  — их прямое произведение. Показать, что подгруппа  $F = H \times \{e_K\}$  нормальна в  $G$ :

$$F = \{(h, e_K) \mid h \in G\} \triangleleft G$$

**Решение.**

$$(h_1, k) \circ (h_2, e_K) \circ (h_1^{-1}, k^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, k k^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, e_K) \in F$$

□

**Упражнение 2.** Пусть  $G$  — некоторая конечная абелева группа. Доказать, что существует набор циклических групп  $H_1 \dots H_k$ , таких что их произведение изоморфно  $G$ :

$$H_1 \times \dots \times H_k \cong G$$

**Решение.** Факторизуем  $n = |G|$ :

$$n = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k}$$

По теореме Силова существуют  $p$ -подгруппы  $G$  порядков  $p_i^{q_i}$ , обозначим их  $\mathcal{P}_i$ . Т.к.  $G$  абелева,  $\mathcal{P}_i$  нормальны.

Докажем по индукции по  $k$ , что  $G \cong \times_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ .

**База.**  $k = 1$ : очевидно.

**Переход.** По индукционному предположению для любой абелевой  $G : |G| = n = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k}$  верно  $G \cong \times_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ .

$$\triangleleft G' : |G'| = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k} \cdot p_{k+1}^{q_{k+1}} = t \cdot p_{k+1}^{q_{k+1}} = t \cdot r.$$

Покажем, что  $G' \cong H \times K$ , где  $|K| = r, |H| = t$ . Тогда по индукционному предположению искомое будет верно.

Пусть  $H = \{x \in G' \mid x^r = e\}, K = \{x \in G' \mid x^t = e\}$ .

$$\text{Утверждение. } G \cong H \times K \Leftrightarrow \begin{cases} G = HK \\ H \cap K = \{e\} \\ H, K \triangleleft G \end{cases}$$

Покажем все, что все три пункта этого утверждения выполнены для наших  $H, K, G'$ :

1. По какой-то теореме из теории чисел  $\exists a, b \in \mathbb{Z} : at + br = 1$ .

$$\forall x \in G' \quad x = x^{at+br} = x^{at} x^{br}$$

$$(x^{at})^r = (x^{tr})^a = e^a = e \Rightarrow x^{at} \in H$$

$$(x^{br})^t = (x^{tr})^b = e^b = e \Rightarrow x^{br} \in K$$

$$\text{Итого } \forall x \in G' \quad x = \underbrace{x^{at}}_{\in H} \underbrace{x^{br}}_{\in K} \Rightarrow G' = HK$$

$$2. \triangleleft g \in H \cap K$$

$$g^t = e = g^r, \text{ следовательно, порядок } g \text{ есть } \gcd(t, r) = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$$

3. Очевидно, т.к.  $G'$  нормальна.

Таким образом, мы доказали, что  $G$  раскладывается на прямое произведение силовских  $p$ -подгрупп. Однако они необязательно циклические. Покажем, что каждая из таких подгрупп есть прямое произведение циклических.

**Утверждение.**  $\triangleleft \mathcal{P}_i, |\mathcal{P}_i| = p_i^{q_i}$ . Рассмотрим произвольный элемент максимального порядка  $g$ . Тогда  $\mathcal{P}_i \cong \langle g \rangle \times K$ , где  $K$  — подгруппа  $G$ .

*Proof.* Докажем по индукции по  $q_i$ .

**База.**  $\mathcal{P}_i = \langle g \rangle \cong \langle g \rangle \times \langle e \rangle$

**Переход.** Пусть  $g$  — элемент максимального порядка в  $\mathcal{P}_i$  и этот порядок равен  $a$ . Рассмотрим какую-нибудь подгруппу  $H$ , не содержащую  $a$ . Такую подгруппу можно получить как  $\langle h \rangle$ , где  $h \notin \langle a \rangle, h \neq e$ . Фактор-группа  $\mathcal{P}_i/H$  имеет порядок меньше  $\mathcal{P}_i$ , следовательно, для неё выполняется утверждение и  $\mathcal{P}_i/H = \langle g' \rangle \times K'$ .

С помощью прообразов естественного гомоморфизма фактор-группы искомое выполнено, технические детали здесь опущены.

□

Применяя это утверждение к  $K$  рекурсивно, получим искомое:

$$\mathcal{P}_i \cong \langle g_1^{(i)} \rangle \times K \cong \langle g_1^{(i)} \rangle \times (\langle g_2^{(i)} \rangle \times K') \cong \langle g_1^{(i)} \rangle \times \langle g_2^{(i)} \rangle \times \cdots \times \langle g_{r_i}^{(i)} \rangle$$

Очевидно, что  $\langle g_j^{(i)} \rangle$  есть циклическая группа и тогда:

$$G \cong \bigtimes_{i=1}^k \mathcal{P}_i \cong \bigtimes_{i=1}^k \bigtimes_{j=1}^{r_i} \langle g_j^{(i)} \rangle$$

□

**Упражнение 3.** Рассмотрим аффинные преобразования плоскости. Пусть  $T$  — множество всех трансляций, пусть  $R$  — множество всех поворотов вокруг фиксированной точки  $O$  (одной для всех поворотов). Рассмотрим группу  $G = \langle T \cup R \rangle$ , порождённую всеми трансляциями и поворотами вокруг  $O$ . Показать, что  $T$  нормальна в  $G$ . Показать, что  $G = T \cdot R$ :

$$G = \{\tau \rho \mid \tau \in T, \rho \in R\}$$

**Решение.** Очевидно  $T$  и  $R$  замкнуты.

Обозначение.  $\tau \in T \leftrightarrow \langle x', y' \rangle$  — сдвиг на  $x'$  по оси  $x$  и на  $y'$  по оси  $y$ .

Рассмотрим действие  $\tau \rho$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \langle x', y' \rangle \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + x' & y + y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x + x') \cos \theta + (y + y') \sin \theta & -(x + x') \sin \theta + (y + y') \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рассмотрим действие  $\rho \tau$ : после поворота на  $\theta$   $\langle x', y' \rangle$  заменится на

$$\langle x' \cos \theta + y' \sin \theta, -x' \sin \theta + y' \cos \theta \rangle$$

и после сложения с повернутым вектором  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  мы получим тот же самый вектор, что и при  $\tau \rho$ . Таким образом, множество  $T \cup R$  абелево<sup>1</sup>.

Поворот на  $\theta$ , сдвиг на  $\langle x, y \rangle$  и поворот на  $\theta'$  есть то же самое, что сдвиг на повернутое на  $\theta$   $\langle x, y \rangle$  и поворот на  $\theta + \theta'$ .

Сдвиг на  $\langle x, y \rangle$ , поворот на  $\theta$  и сдвиг на  $\langle x', y' \rangle$  есть то же самое, что сдвиг на повернутое на  $\theta$   $\langle x, y \rangle +$  повернутое на  $\theta$   $\langle x', y' \rangle$  и поворот на  $\theta$ .

Итого,  $\langle T \cup R \rangle = T \cdot R \cup R \cdot T$ , т.к. было показано, что нельзя поворотами и сдвигами получить что-либо кроме поворотов и сдвигов, а также тождественное действие  $e \in T, e \in R \Rightarrow T = T \cdot e \Rightarrow T \subset T \cdot R$  и аналогично  $R \subset T \cdot R$ . Т.к. множество  $T \cup R$  абелево, то  $T \cdot R = R \cdot T \Rightarrow \langle T \cup R \rangle = T \cdot R$ .

$$\triangleleft \rho \tau \rho^{-1}$$

Примечание.  $\left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow \langle x', y' \rangle$ , используется, чтобы формулы не были слишком широкими.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} &= \left\langle \begin{pmatrix} x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} (x' \cos \theta + y' \sin \theta) \cos \theta - (-x' \sin \theta + y' \cos \theta) \sin \theta \\ (x' \cos \theta + y' \sin \theta) \sin \theta + (-x' \sin \theta + y' \cos \theta) \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x' + y' \sin \theta \cos \theta - y' \cos \theta \sin \theta \\ y' + x' \cos \theta \sin \theta - x' \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Абелево как группа, но ещё не доказано, что это группа.

Таким образом,  $T$  нормально в  $G$ , т.к. случай  $\tau'\tau\tau'^{-1} \in T$  тривиален.

□