

# 1 Линейные операторы

## 1.1 Линейные операторы и их матричная запись, примеры.

$\varphi : X \rightarrow Y, X, Y - \text{ЛП}, \dim X = n, \dim Y = m$

**Определение.** Отображение  $\varphi$  называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

**Определение.** Отображение  $\varphi$ , обладающее свойством линейности называется **линейным оператором (ЛОп)**

**Пример.** •  $\Theta : \Theta x = 0_Y$  — нулевой оператор

- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$  — единичный (тождественный) оператор
- $X = L_1 + L_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \exists ! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} : X \rightarrow L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} : X \rightarrow L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{\parallel L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$  — первая производная  $\exists$  и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int_{-1}^1 f(t)K(x, t)dt$$

$K(x, t)$  — интегральное ядро, например  $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$ ,  $\{h_k\}_{k=1}^m$  — базис  $Y$ ,  $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$

**Определение.** Набор коэффициентов  $\|a_j^k\|$  образует матрицу  $m \times n$ , которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов  $\{e_j\}$  и  $\{h_k\}$

## 1.2 Пространство линейных операторов.

$\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  — ЛОп

$\chi = \varphi + \psi$ , если  $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$$\chi = \alpha\varphi, \text{ если } \forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$$

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

### 1.3 Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.

**Алгебра** — модуль над коммутативным кольцом с единицей, являющийся кольцом.

**Кольцо** — множество, на котором заданы бинарные операции  $+$  и  $\cdot$  с следующими свойствами:

1.  $a + b = b + a$
2.  $a + (b + c) = (a + b) + c$
3.  $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
4.  $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
7.  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

**Коммутативное кольцо** — кольцо с коммутативным умножением:  $a \cdot b = b \cdot a$

**Кольцо с единицей** — кольцо с нейтральным элементом по умножению:  $\exists 1 \in R : a \cdot 1 = a$

**Модуль над кольцом** (коммутативным, с единицей)  $R$  — множество  $M$  с операциями:

1.  $+: M \times M \rightarrow M$ 
  - (a)  $a + b = b + a$
  - (b)  $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - (c)  $\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
  - (d)  $\forall x \in R : \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
2.  $\cdot: M \times R \rightarrow M$ 
  - (a)  $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$
  - (b)  $1m = m$
  - (c)  $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
  - (d)  $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Примеры:

1.  $\mathbb{R}^3$  с векторным произведением — алгебра над  $\mathbb{R}$
2.  $\mathbb{C}$  — алгебра над  $\mathbb{R}$
3.  $\mathbb{H}$  (кватернионы)
4. Многочлены

**Изоморфизм алгебр** — биекция  $F : A \rightarrow B$ , где  $A$  и  $B$  — алгебры, сохраняющая “+” и “.”:

1.  $F(kx) = kF(x)$
2.  $F(x + y) = F(x) + F(y)$
3.  $F(xy) = F(x)F(y)$

Из этого следует, что  $F(0_X) = 0_Y$

#### 1.4 Алгебра операторов и матриц.

Умножение ЛОП:  $(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$

Умножение матриц:  $(A \cdot B)_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$

**Теорема 1.**

$$\underbrace{C}_C = \underbrace{B}_B \underbrace{A}_A \Leftrightarrow C = BA$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{C}e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji}e_j\right) = \sum_j a_{ji}\mathcal{B}e_j = \sum_j a_{ji} \sum_k b_{kj}e_k$$

$$c_{il} = (\mathcal{C}e_i)_l = \sum_j a_{ji}b_{lj} \Rightarrow C = BA$$

□

Пространство ЛОП  $\mathcal{F} : X \rightarrow X$  — алгебра, пространство квадратных матриц  $\mathbb{R}_n^n$  — алгебра.

#### 1.5 Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.

В алгебре  $A$  выполняется  $a_1 \cdot a_2 = e$ , где  $e$  — единичный элемент матрицы. Тогда:

1.  $a_1$  — левый обратный элемент для  $a_2$

2.  $a_2$  — **правый обратный** элемент для  $a_1$

Если  $a_1$  — и левый, и правый обратный к  $a_2$ , то он называется **обратным** элементом к  $a_2$ .

**Теорема 2.**  $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

*Доказательство.* “ $\Leftarrow$ ”

$$\det A \neq 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \exists A^{-1} : AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$$

$$\sum_j a_{ij} a_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$$

Это система Крамера, т.к.  $\det A \neq 0 \stackrel{def}{\Rightarrow}$  вектора  $\in A$  ЛНЗ  $\Rightarrow$  единственное решение.

“ $\Rightarrow$ ” то же самое, но наоборот. 😊

□

$$[A | E] \sim [E | A^{-1}]$$

*Доказательство.*

$$[A | E] = [T_1 A | T_1 E] = [T_2 T_1 A | T_2 T_1 E] = \dots = [T_n \dots T_1 A | T_n \dots T_1 E] = [E | T_n \dots T_1 A]$$

$$\triangleleft T_n \dots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \dots T_1$$

□

Здесь  $T_i$  — матрица элементарного преобразования.

## 1.6 Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Критерий обратимости: Дано выше. (1.5, стр. 4)

**Теорема 3.**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

*Доказательство.*  $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$  — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$[\delta_{k_0}^i = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1_{k_0} \ 0 \ \dots \ 0)^T = b$$

$$\beta_{k_0}^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

$$\Delta_j = \det A(a_j \rightarrow b)$$

□

$A(a_j \rightarrow b)$  — матрица  $A$ , где заменили  $j$ -тый вектор на  $b$

$$\det A(a_j \rightarrow b) = 0 \cdot M_j^1 + \dots + 1 \cdot M_j^k + \dots + 0 = M_j^k$$

$$b_{jk} = \frac{(\tilde{A}^T)_k^j}{\det A} \Rightarrow B = \frac{\tilde{A}_k^j}{\det A}$$

### 1.7 Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

**Определение. Ядро  $\varphi$ :**

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

*Примечание.*  $\text{Ker } \varphi \subset X$

**Лемма 1.**  $\text{Ker } \varphi$  — ЛП

**Определение. Образ  $\varphi$ :**

$$\text{Im } \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

*Примечание.*

$$\text{Im } \varphi \subset Y$$

**Лемма 2.**  $\text{Im } \varphi$  — ЛП

**Теорема 4.** О ядре и образе

$$\dim \varphi : X \rightarrow X \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim X$$

*Доказательство.*  $\dim \text{Ker } \varphi = K$

$\{e_1 \dots e_k\}$  – базис  $\text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \quad \forall j = 1..k$

$\{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$  – базис  $X$

$$\varphi x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=k+1}^n \xi^j \varphi(e_j)$$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$  – полный для  $\text{Im } \varphi$ , т.к. любой  $x \in \text{Im } \varphi$  можно по нему разложить.  
Докажем ЛНЗ от обратного:

$$\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n \text{ – ЛЗ} \Rightarrow \exists \alpha^j : \sum_{j=k+1}^n \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi \left( \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k \text{ – противоречие} \\ \text{или } \sum_{j=k+1}^n \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^n \text{ – базис } \text{Im } \varphi. \quad \square$$

## 1.8 Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

**Определение.** Обратным к оператору  $\varphi$  называется оператор  $\varphi^{-1}$ :

$$\varphi^{-1} \varphi = \varphi \varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

**Теорема 5.** Оператор  $\varphi$  обратим, если  $\exists$  базис, в котором его матрица невырождена

**Теорема 6.**  $\varphi : X \rightarrow X$

$$\exists \varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim \text{Im } \varphi = \dim X \text{ или } \dim \text{Ker } \varphi = 0$$

*Доказательство.*  $\dim \text{Im } \varphi = \dim X \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$  – сюръекция,  $\dim \text{Ker } \varphi = 0 \Rightarrow \forall y \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$  – инъекция  $\square$

## 2 Тензорная алгебра

### 2.1 Преобразование координат векторов $X$ и $X^*$ при замене базиса.

$\{e_j\}$  – базис  $X$

$\{\tilde{e}_k\}$  – базис  $X^*$

$$\Rightarrow \forall k \quad \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n t_k^j e_j$$

**Определение.** Набор  $T = ||t_j^i||$  образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от базиса  $\{e_j\}$  к базису  $\{\tilde{e}_k\}$

*Примечание.*  $\triangleleft E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n], \tilde{E} = [\tilde{e}_1 \ \tilde{e}_2 \ \dots \ \tilde{e}_n] \Rightarrow \tilde{E} = ET$

**Лемма 3.**  $]\xi$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $\{e_j\}$

$]\tilde{\xi}$  — координаты вектора  $x$  в базисе  $\{\tilde{e}_k\}$

Тогда  $\xi = T\tilde{\xi}$  или  $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

*Доказательство.*  $x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{x}^k \sum_{j=1}^n t_k^j e_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k t_k^j) e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi} \quad \square$

**Лемма 4.**  $]\{f^l\}$  — базис  $X^*$ , сопряженный  $\{e_j\}$ , т.е.  $f^l(e_j) = \delta_j^l$

$]\{\tilde{f}^m\}$  — базис  $X^*$ , сопряженный  $\{\tilde{e}_k\}$ , т.е.  $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta_k^m$

$]F = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^n]^T, \tilde{F} = [\tilde{f}^1 \ \tilde{f}^2 \ \dots \ \tilde{f}^n]^T$

Тогда  $F = T\tilde{F}$  или  $f^l = \sum_{m=1}^n t_m^l \tilde{f}^m$

*Доказательство.*  $\triangleleft (\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta_k^m = (\tilde{f}^m, \sum_{j=1}^n t_k^j e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j (\tilde{f}^m, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \sum_{l=1}^n a_l^m (f^l, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j a_j^m$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j^m t_k^j = \delta_k^m$  или  $AT = I$  — единичная матрица  $\Rightarrow A = T^{-1} \quad \square$

**Лемма 5.**  $]\varphi$  — коэфф. ЛФ в  $\{e_j\}$

$]\tilde{\varphi}$  — коэфф. ЛФ в  $\{\tilde{e}_k\}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$

*Доказательство.*  $]g$  — ЛФ,  $\varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^n t_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n t_k^j g(e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \varphi_j$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T \quad \square$

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

## 2.2 Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Преобразование подобия.

$$\bar{\mathcal{A}} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}, \mathcal{A} : X \rightarrow Y$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \bar{\mathcal{A}} \leftrightarrow \bar{A}$$

$\mathcal{X}$  — матрица перехода  $\bar{X} \rightarrow X$ ,  $\mathcal{Y}$  — матрица перехода  $\bar{Y} \rightarrow Y$

$$x \in X, y := \mathcal{A}x, \bar{x} := \mathcal{X}x, \bar{y} := \mathcal{Y}y$$

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{x} = \bar{y} &\Rightarrow Ax = y = \mathcal{Y}^{-1}\bar{y} = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\bar{x} = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\mathcal{X}x \\ \forall x \quad Ax = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\mathcal{X}x &\Leftrightarrow A = \mathcal{Y}^{-1}\bar{A}\mathcal{X} \end{aligned}$$

## 2.3 Тензоры (ковариантность, независимое от ПЛФ определение). Пространство тензоров.

**Определение.** Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными величинами**.

Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными величинами**.

*Примечание.*  $\xi$  — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$$]W \in \Omega_q^p - \text{ПЛФ } (p, q)$$

$$\{e_j\}_{j=1}^n - \text{базис } X, \{f^k\}_{k=1}^n - \text{базис } X^*$$

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_n} f^{j_1} \dots f^{j_n})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов  $\{\tilde{e}_k\}$  и  $\{\tilde{f}^m\}$  ПЛФ  $W$  имеет тензор  $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$\begin{aligned} &= \triangle W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) = \\ &= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q}) \end{aligned}$$

**Определение.** 1. Вектором называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону

2. Линейной формой называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону



3. **Тензором** типа  $(p, q)$  называется величина, преобразующаяся  $p$  раз по ковариантному закону и  $q$  раз по контравариантному.

- Сложение тензоров и умножение тензора на скаляр — поэлементное
- Нулевой элемент по сложению — тензор, принимающий значение 0 на любом входе
- Очевидно  $w + \alpha v$  — тензор того же типа, что и  $w \Rightarrow$  тензоры образуют линейное пространство  $T_q^p$ ,  $\dim T_q^p = p + q$

## 2.4 Свертка тензора.

Свертка:

$$\omega_{i_1 \dots i_n}^{k \wedge s j_1 \dots j_n} = \sum_{m=1}^n \omega_{i_1 \dots i_{n-1} i_n}^{j_1 \dots j_{n-1} j_n} \delta_{i_n}^{k \wedge s}$$

*Примечание.* Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

**Лемма 6.** *Свертка сохраняет тензорную природу*

**Лемма 7.**

$$\omega_{i_1 \dots i_p}^{l \wedge m k \wedge s} = \omega_{i_1 \dots i_p}^{k \wedge s l \wedge m}$$

*Доказательство.* От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется.  $\square$

## 2.5 Транспонирование тензора.

Транспонирование

$$t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$$

*Примечание.* Транспонировать можно только по индексам одного типа

**Лемма 8.** *Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.*

## 2.6 Определитель линейного оператора. Внешняя степень оператора.

$\langle \Lambda^p \quad \{i_1 \dots i_p F\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \rangle$  — базис  $\Lambda^p$

$$i_1 \dots i_p F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \quad \dim \Lambda^p = C_n^p$$

$\{x_i\}_{i=1}^n$  — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n)$$

$\langle \Lambda_p \quad \{_{i_1 \dots i_p} F\} \rangle_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$  — базис  $\Lambda_p$

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad _{i_1 \dots i_p} F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$\begin{aligned} _{1 \dots n} F &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \\ &= \det[\xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n] (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \end{aligned}$$

**Определение.** Определителем набора векторов  $\{x_i\}_{i=1}^n$  называется число  $\det[x_1 \dots x_n]$ , такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

**Лемма 9.**

$$om \Lambda^p \quad \det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1 \dots x_n] \quad om \Lambda_p$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \det\{x_1 \dots x_n\} &= _{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \\ &= \det\{x_1 \dots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \det[x_1 \dots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

**Определение.**  $\varphi : X \rightarrow X$

**Внешней степенью**  $\varphi^{\Lambda_p}$  оператора  $\varphi$  называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p} (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_p)$$

*Примечание.*

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_p$$

$$\varphi^{\Lambda_p} = n$$

$$\begin{aligned} \varphi^{\Lambda_n} (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \dots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} = \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_n}^n e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

**Определение.** Определителем линейного оператора  $\varphi$  называется число, такое что:

$$\det \varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \dots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

*Примечание.*

$$\forall \omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n} \omega = \det \varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n} \omega = \alpha \varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \alpha \det \varphi e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det \varphi \cdot \omega$$

## 2.7 Независимость определителя оператора от базиса. Теорема умножения определителей.

*Пример.*  $\det \varphi$  — инвариант

$$\varphi^{\Lambda_n} z = \det \varphi \cdot z \quad \forall z \in \Lambda_n$$

$\det \varphi = \det A_\varphi$  — в некотором фиксированном базисе

$$\tilde{A}_\varphi = T^{-1} A_\varphi T \quad \det \tilde{A}_\varphi = \det T^{-1} \det A_\varphi \det T = \det A_\varphi$$

**Теорема 7.**

$$\det(\varphi\psi) = \det \varphi \det \psi$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \triangleleft \det(\varphi\psi)e_1 \wedge \dots \wedge e_n &= (\varphi\psi)^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \dots \wedge \varphi(\psi(e_n)) = \\ &= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \dots \wedge \psi(e_n)) = \det \varphi \det \psi e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

□

## 3 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерных пространствах

### 3.1 Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

**Определение.** Инвариантом линейного оператора  $\varphi$  называется его числовая функция значений, которая не зависит от выбора базиса

$\triangleleft \varphi : X \rightarrow X$  — автоморфизм

**Определение.** Подпространство  $L$  линейного пространства  $X$  называется **инвариантным подпространством**  $\varphi$ , если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L$$

*Пример.* 1.  $\varphi : X \rightarrow X$ , тогда инвариантные подпространства:

- $X$
- $\{0\}$

2.  $\varphi = \mathfrak{I}, \quad \forall x \quad \mathfrak{I}x = x \Rightarrow$  любое подпространство  $X$  — инвариантное

3.  $\varphi = \Theta, \quad \forall x \quad \Theta x = 0 \Rightarrow$  любое подпространство  $X$  — инвариантное

$$4. \quad \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$$

$\angle \{e_j\}$  — базис  $X \Rightarrow \forall j \quad A_\varphi e_j = \lambda_j e_j \quad e_j \rightarrow \mathcal{L}\{e_j\}$  — инв.

Всего  $2^n$  инвариантных подпространств

5.  $]X = L_1 \dot{+} L_2$

$$\forall x! = x_1 + x_2 \quad \varphi x = \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x_1 \in L_1$$

$L_1$  — инв.,  $\forall x \in L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = x \quad \forall$  подпространство  $L_1$  инвариантно

$L_2$  — инв.,  $\forall x \in L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2} x = 0 \quad \forall$  подпространство  $L_2$  инвариантно

### 3.2 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: основные определения и свойства.

$$\varphi : X \rightarrow X$$

**Определение.**  $x \in X$  — собственный вектор  $\varphi$ , если

$$x \neq 0 \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in K$$

$\lambda$  — собственное значение  $\varphi$ , соответствующее  $x$

**Определение.** Спектр  $\sigma_\varphi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$  — множество всех собственных значений вектора

**Определение.**  $x \in X$  — собственный вектор  $\varphi$ , если этот вектор ненулевой и принадлежит одномерному инвариантному подпространству:  $x \neq 0, x \in L^{(1)}$

**Лемма 10.** Эти определения собственного вектора эквивалентны.

*Доказательство.* Опр. 1  $\Rightarrow$  Опр. 2:

$$\angle x : \varphi x = \lambda x, L^{(1)} = \mathcal{L}(x)$$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \beta x \Rightarrow \varphi y = \varphi \beta x = \beta \varphi x = \beta \lambda x$$

Опр. 2  $\Rightarrow$  Опр. 1:

$$\triangleleft x \in L^{(1)} = \mathcal{L}v \xrightarrow{\text{def}} \varphi x \in L^{(1)}$$

$$\forall y \in L^{(1)} \quad y = \alpha v \quad \varphi y = \alpha \varphi v = \beta v$$

□

**Лемма 11.** Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейно независимы:

$$\lambda_i \rightarrow x_i, \lambda_i \neq \lambda_{j \neq i} \Rightarrow \{x_i\} \text{ ЛНЗ}$$

*Доказательство.* По индукции:

База:  $m = 1 \Rightarrow \{x_1\}$  ЛНЗ, т.к.  $x_1 \neq 0$

Переход:  $\{x_i\}_{i=1}^m$  — ЛНЗ, тогда  $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$

$$\triangleleft \{\alpha_i\} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

$$0 = \mathcal{A}0 = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) = \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_{n+1} \left( \sum \alpha_i x_i \right)$$

Вычтем второе выражение из первого:

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) + 0$$

Т.к.  $\{x_i\}_{i=1}^n$  ЛНЗ,  $\forall i \in [1, n] \quad \alpha_i = 0$

$$0 = \alpha_{n+1} x_{n+1}, x_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$$

□

**Лемма 12.** Линейный оператор в конечномерном пространстве не может иметь более  $n$  различных собственных значений.

*Доказательство.* Тривиально в силу ЛНЗ соответствующих векторов.

□

### 3.3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора: существование, вычисление.

Вычислим СВ и СЗ.

$$x = \sum \xi^i e_i \quad \xi = (\xi^1 \ \dots \ \xi^n)^T \quad A \leftrightarrow A = \|a_j^i\|$$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\xi = \lambda \xi \Leftrightarrow A\xi - \lambda E\xi = 0$$

Таким образом, задача нахождения СЗ сводится к нахождению  $\lambda$ , для которых существуют нетривиальные решения СЛАУ  $A - \lambda E$ , что эквивалентно нахождению корней характеристического полинома  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Нахождение СВ  $\Leftrightarrow$  нахождение нетривиальных решений СЛАУ  $A - \lambda E$  для каждого СЗ  $\lambda$

**Лемма 13.**  $\triangleleft A : X \rightarrow X$ ,  $X$  — ЛП над  $\mathbb{C}$ , тогда у  $A$  существует по крайней мере один собственный вектор и одно собственное значение.

*Доказательство.* У любого многочлена есть хотя бы один корень  $\in \mathbb{C}$ . □

### 3.4 Спектральный анализ линейного оператора с простым спектром: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

**Определение.** Собственное значение  $\lambda$  — простое, если оно — корень  $\chi_A(\lambda)$  единичной кратности.

**Определение.** Спектр  $\sigma$  называется простым, если все собственные значения в нём простые.

**Теорема 8.**  $\triangleleft A : X \rightarrow X$  — ЛОП с простым спектром  $\sigma_A = \{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n$  — СВ.

Тогда  $A$  можно привести к диагональной форме  $A^d$ :

$$A^d = T^{-1}AT$$

где  $T$  — матрица перехода от базиса  $\{e_i\}$  к  $\{x_i\}$

*Доказательство.* Очевидно, т.к.  $A$  в базисе  $\{x_i\}$  имеет диагональную матрицу  $diag\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$  □

**Определение.**  $\triangleleft \lambda_i$  — собственное значение ЛОП  $A : X \rightarrow X$ .

**Спектральным проектором**  $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel}$  называется оператор проектирования на подпространство  $L_{\lambda_i}$  (множество векторов, отвечающих  $\lambda_i$ )

**Лемма 14.** *Спектральные проекторы оператора с простым спектром имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = x_i \cdot f^i$$

где  $\{x_i\}$  — базис  $X$  из СВ,  $\{f^i\}$  — сопряженный ему базис.

*Доказательство.* Необходимо показать, что для  $x \in L_{\lambda_i}$   $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x = x$ , для  $y \in \mathcal{L}\{x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n\}$   $\mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} y = 0$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} x = x_i \cdot f^i x = x_i \cdot \alpha f^i x_i = \alpha x_i$$

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} y = x_i \cdot f^i \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j x_j \right) = x_i \cdot 0$$

□

**Теорема 9.** *Спектральная теорема для скалярного оператора:*

$$A = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

*Доказательство.*

$$Ax = A \left( \sum_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x \right) = \sum_i A \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i}^{\parallel} x$$

□

### 3.5 Спектральный анализ скалярного оператора: спектр, диагональный вид матрицы, спектральные проекторы, спектральная теорема.

Спектр, диагональный вид матрицы, спектральная теорема: см. выше.

**Лемма 15.** *Спектральные проекторы оператора скалярного типа имеют вид:*

$$\mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{m_j} x_j^{(i)} \cdot f_{(i)}^j$$

где  $\{x_j^{(i)}\}_{j=1}^{m_j}$  — СВ, отвечающие  $\lambda_i$ ,  $\{f_{(i)}^j\}_{j=1}^{m_j}$  — сопряженный ему базис.

### 3.6 Спектральная теорема и функциональное исчисление для скалярного оператора.

Спектральная теорема: см. выше

$p(\lambda)$  — скалярный полином. Тогда

$$p(\mathcal{A}) = \sum p(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = \sum (\lambda_i + \lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = 2\mathcal{A}$$

$$\alpha \mathcal{A} = \sum (\alpha \lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \left( \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_{\lambda_i} \right) \left( \sum_j \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_j} \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \mathcal{P}_{\lambda_j} = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_{\lambda_i} \delta_j^i = \sum_i \lambda_i^2 \mathcal{P}_{\lambda_i} = \mathcal{A}^2$$

□

### 3.7 Спектральная теорема и инварианты скалярного оператора. Тожество Кэли.

Спектральная теорема, инварианты скалярного оператора: см. выше.

**Лемма 16.** *Тожество Кэли.*

$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$  — характеристический полином ЛОП  $\mathcal{A}$ , то  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$

*Доказательство.*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \sum \chi_{\mathcal{A}}(\lambda_i) \mathcal{P}_{\lambda_i} = \sum 0 \mathcal{P}_{\lambda_i} = 0$$

□

## 4 Спектральный анализ линейных операторов в конечномерном пространстве: операторы общего вида

### 4.1 Ультраинвариантные подпространства.

$\varphi : X \rightarrow X, \dim X = n$

$L \subset X$  — инвариантное подпространство  $\varphi$ , если  $\varphi(L) \subset L$

**Определение.** Инвариантное подпространство называется ультраинвариантным подпространством, если существует его дополнение  $L'$ , такое что:

$$L \dot{+} L' = X \quad L' \text{ — инвариантное подпространство } \varphi$$



**Определение.** Оператор  $\varphi_L : L \rightarrow L$ , такой что:

$$\varphi_L x = \varphi x \quad \forall x \in L$$

называется **сужением** оператора  $\varphi$  на  $L$ .

Если  $L$  — ультраинвариантное подпространство, то  $\varphi_L$  называется **компонентой**  $\varphi$  в  $L$

**Лемма 17.** Дополнение  $L'$  ультраинвариантного подпространства  $L$  является ультраинвариантным подпространством.

**Лемма 18.**  $X = L \dot{+} L'$   $L, L'$  — ультраинвариантные подпространства  $\Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L}$$

*Доказательство.*

$$X = L \dot{+} L' \Rightarrow \forall x! = x_1 + x_2 = \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x$$

$$\begin{aligned} \varphi x &= \varphi \mathcal{P}_L^{\|L'} x + \varphi \mathcal{P}_{L'}^{\|L} x \quad \forall x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi = \varphi_L \mathcal{P}_L^{\|L'} + \varphi_{L'} \mathcal{P}_{L'}^{\|L} \quad (*) \end{aligned}$$

□

## 4.2 Алгебра скалярных полиномов. Идеал. Минимальный полином.

$\triangleleft K$  — поле, над которым задано множество полиномов  $K_\infty[\lambda]$ , также обозначается  $P_\infty[K]$

$$P_\infty[K] = \{p_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda^i \quad \forall n\}$$

*Примечание.*  $P_\infty[K]$  — линейное пространство:

$$p, q \in P_\infty[K]; \lambda \in K \Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\lambda) = p(\lambda) + q(\lambda) \\ (\lambda p)(\lambda) = \lambda p(\lambda) \end{cases} \Rightarrow P_\infty[K] \text{ — линейное пространство}$$

*Примечание.*  $P_\infty[K]$  — коммутативная алгебра

Зададим операцию умножения в  $P_\infty[K]$ :

$$\begin{aligned} \forall p, q \in P_\infty[K] \quad (p \cdot q)(\lambda) &= p(\lambda)q(\lambda) \\ (p \cdot q)(\lambda) &= p(\lambda)q(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) = (qp)(\lambda) \Rightarrow \text{коммутативность} \\ (p \cdot q) \cdot r &= p \cdot (q \cdot r) = p \cdot q \cdot r \\ (p+q)r &= pr + qr \\ (\lambda p)q &= p(\lambda q) = \lambda(pq) \end{aligned}$$

Нейтральный элемент:

- по сложению:  $0(\lambda) = 0$
- по умножению:  $1(\lambda) = 1$

*Примечание.*  $\{1, t, t^2 \dots t^n \dots\}$  — базис  $P_\infty[K] \Rightarrow \dim P_\infty[K] = \infty$

**Определение.** Идеалом  $J$  алгебры  $P_\infty[K]$  называется такое её подпространство, что

$$\forall q \in J \quad \forall p \in P_\infty[K] \quad q \cdot p \in J$$

*Пример.* Тривиальные идеалы:

- $\{0\}$
- $P_\infty[K]$

**Лемма 19.**  $J$  — линейное подпространство  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*  $]q_1, q_2 \in J \quad q_1 + q_2 \in J?$

$$q_1, q_2 \in J \Rightarrow \forall p \quad q_1 p, q_2 p \in J$$

$$q_1 = r\tilde{q}_1, q_2 = r\tilde{q}_2 \quad (q_1 + q_2)p = r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p$$

$$(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in P_\infty[K] \Rightarrow r(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)p \in J$$

□

**Лемма 20.**  $J$  — подалгебра  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*

$$(q_1 \cdot q_2)p = q_1(q_2 p) \in J$$

□

*Пример.*  $J_\alpha = \{p \in P_\infty[K] : p(\alpha) = 0\}$  — идеал

**Лемма 21.**  $]q \in P_\infty[K] \Rightarrow J_q = q \cdot P_\infty[K]$  — идеал в  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*  $]r \in J_q \Rightarrow \exists p \in P_\infty[K] : r = q \cdot p$

$$] \tilde{p} \in P_\infty[K]$$

$$r\tilde{p} = (qp)\tilde{p} = q(p\tilde{p})$$

$$p\tilde{p} \in P_\infty[K] \Rightarrow q(p\tilde{p}) \in q \cdot P_\infty[K] = J_q \Rightarrow J_q \text{ — идеал}$$

□

**Определение.** Полином  $q : J_q = q \cdot P_\infty[K]$  называется **порождающим полиномом** идеала  $J_q$

*Примечание.* Если идеал содержит  $1(\lambda)$ , то данный идеал совпадает с  $P_\infty[K]$ :

$$J_1 = 1 \cdot P_\infty[K] = P_\infty[K]$$

**Определение.**  $J_1$  и  $J_2$  — идеалы в  $P_\infty[K]$

1. Суммой  $J_1 + J_2$  называется множество

$$J_s = \{p \in P_\infty[K] : p = p_1 + p_2 \quad p_1 \in J_1, p_2 \in J_2\}$$

2. Пересечением  $J_1 \cap J_2$  называется множество:

$$J_r = \{p \in P_\infty[K] : p \in J_1 \wedge p \in J_2\}$$

**Лемма 22.**  $J_s$  и  $J_r$  — идеалы в  $P_\infty[K]$

*Доказательство.*  $J_s = J_1 + J_2$  — идеал?

$$]q \in J_s \Rightarrow q = q_1 + q_2 \quad q_1 \in J_1, q_2 \in J_2$$

$$]p \in P_\infty[K] \quad qp = (q_1 + q_2)p = q_1p + q_2p$$

$$q_1p \in J_1, q_2p \in J_2 \Rightarrow q_1p + q_2p \in J_s$$

$$J_r = J_1 \cap J_2 \text{ — идеал?}$$

$$]q \in J_r \Rightarrow q \in J_1; q \in J_2$$

$$]p \in P_\infty[K] \quad qp \in J_1; qp \in J_2 \Rightarrow qp \in J_r \quad \square$$

**Определение.** Нетривиальный полином минимальной степени, содержащийся в идеале, называется **минимальным полиномом** идеала.

**Лемма 23.** Любой полином идеала  $J$  делится на  $p_J$  без остатка:

$$]p \in J \Rightarrow p \mid p_J$$

*Доказательство.*  $]\exists p : p \nmid p_J \Rightarrow p = qp_J + r; \deg r < \deg p_J \Rightarrow r = p - qp_J : \text{min полином} \text{ — противоречие.} \quad \square$

*Примечание.* Если  $p_1$  и  $p_2$  — минимальные полиномы  $J \Rightarrow p_1 = \alpha p_2; \alpha \in K$

**Теорема 10.** Минимальный полином идеала является его порождающим полиномом.

*Доказательство.*  $\forall p \in J \quad p \mid p_J \Rightarrow p = p_J \cdot q \in p_J \cdot P_\infty[K]$

$$\forall p \in q \cdot P_\infty[K] \Rightarrow p = qr; r \in P_\infty[K] \Rightarrow \forall p \mid q \Rightarrow q = p_J \quad \square$$

**Лемма 24.** Сравнение идеалов:

$$J_1 \subset J_2 \Leftrightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ”

$$J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid p_{J_2}$$

“ $\Leftarrow$ ”

$$\mid p_{J_1} \mid p_{J_2} \Rightarrow p_{J_1} = r p_{J_2}$$

$$\forall q \in J_1 \quad q = \tilde{q} p_{J_1} = \tilde{r} p_{J_2} \Rightarrow q \mid p_{J_2} \Rightarrow J_1 \subset J_2 \quad \square$$

**Лемма 25.** *О минимальном полиноме пересечения*

$$J_1 \leftrightarrow p_{J_1} \quad J_2 \leftrightarrow p_{J_2} \Rightarrow J_r = J_1 \cap J_2 \leftrightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

*Доказательство.*  $J_r = J_1 \cap J_2 \Rightarrow J_r \subset J_1 \wedge J_r \subset J_2 \Rightarrow r_J \mid p_{J_1} \wedge r_J \mid p_{J_2} \Rightarrow r_J = \text{НОК}(p_{J_1}, p_{J_2}) \quad \square$

**Лемма 26.** *О минимальном полиноме суммы*

$$J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2})$$

*Доказательство.*  $J_s = J_1 + J_2 \Rightarrow J_s \supset J_1 \wedge J_s \supset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \mid S_J \wedge p_{J_2} \mid S_J \Rightarrow S_J = \text{НОД}(p_{J_1}, p_{J_2}) \quad \square$

**Теорема 11.** *О взаимно простых полиномах*

$$\mid p_1, p_2 \text{ — взаимно простые, т.е. } \text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in P_\infty[K] : p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$$

$$\text{Доказательство. } p_1 \leftrightarrow J_1 = p_1 P_\infty[K]$$

$$p_2 \leftrightarrow J_2 = p_2 P_\infty[K]$$

$$\text{НОД}(p_1, p_2) = 1 \leftrightarrow J_1 + J_2 = P_\infty[K]$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1 \quad \square$$

**Теорема 12.** *Обобщение*

$$p_1 \dots p_k \in P_\infty[K], \text{НОД}(p_1 \dots p_k) = 1 \Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : \sum_{i=1}^k p_i q_i = 1$$

*Доказательство.* Аналогично.  $\square$

*Примечание.*  $\mid p = p_1 \cdot p_2 \dots p_k, \{p_i\} \text{ взаимно простые} \Rightarrow \exists q_1 \dots q_k : p'_1 q_1 + p'_2 q_2 + \dots + p'_k q_k = 1, p'_j = \frac{p}{p_j}$

### 4.3 Алгебра операторных полиномов. Минимальный полином линейного оператора.

**Определение.** Операторный полином  $p \in \mathcal{P}_\infty[K]$  называется аннулирующим полиномом линейного оператора  $\varphi$ , если  $p(\varphi) = 0$

*Примечание.* Множество аннулирующих полиномов операторов  $\varphi$  — ядро гомоморфизма  $S_\varphi$  по определению.

**Теорема 13.** Аннулирующий полином существует.

*Доказательство.*  $\dim \mathcal{P}[\varphi] = n^2 \Rightarrow \exists n^2$  ЛНЗ элементов. Эти элементы :  $\varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}$ . Тогда  $\{\mathcal{I}, \varphi, \varphi^2 \dots \varphi^{n^2}\}$  — ЛЗ

$$\Rightarrow \exists p[\varphi] = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \varphi^i = 0 \Rightarrow \exists$$

□

$J_\varphi$  — множество аннулирующих полиномов оператора  $\varphi$

**Лемма 27.**  $J_\varphi$  — идеал в  $\mathcal{P}_\infty[K]$

*Доказательство.*  $p \in J_\varphi \Rightarrow p(\varphi) = 0$

$q \in \mathcal{P}_\infty[K]$

$\triangleleft p(\lambda)q(\lambda) \xrightarrow{S_\varphi} p(\varphi)q(\varphi) = 0 \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) - \text{аннулирующий} \Rightarrow p(\lambda)q(\lambda) \in J_\varphi$

□

**Определение.** Минимальным аннулирующим полиномом оператора  $\varphi$  называется минимальный полином  $J_\varphi$

*Примечание.* Обозначение минимального полинома:  $p_\varphi(\lambda) \leftrightarrow p_\varphi(\varphi) = 0$

*Пример.*  $\varphi : X \rightarrow X$  — оператор с простым спектром

$\chi_\varphi(\lambda)$  — характеристический полином  $\varphi \Rightarrow \chi_\varphi(\lambda) = p_\varphi(\lambda)$

*Доказательство.*

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{P}_i \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^n \chi_\varphi(\lambda_i) \mathcal{P}_i = 0$$

Предположим обратное:  $p_\varphi(\lambda)$  — минимальный полином, такой что  $\deg p_\varphi < \deg \chi_\varphi$

$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)p_\varphi(\lambda)$

$$\triangleleft p_\varphi(\varphi) = \sum_{i=1}^n p_\varphi(\lambda_i) \mathcal{P}_i = p_\varphi(\lambda_k) \mathcal{P}_k \Rightarrow p_\varphi(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

**Лемма 28.**  $]p(\varphi) = q(\varphi) \Leftrightarrow [p(\lambda) - q(\lambda)] \mid p_\varphi(\lambda)$

*Доказательство.*  $\triangleleft p(\lambda) - q(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) - q(\lambda) \in J_\varphi$

□

**Лемма 29.**  $]p(\lambda) = q(\lambda)p_\varphi(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = r(\varphi)$

#### 4.4 Разложение линейного пространства в сумму подпространств. 2я теорема о ядре и образе. Теорема о проекторах.

**Теорема 14.**  $\triangleleft p_\varphi = p_1 \dots p_k, p_1 \dots p_k$  — взаимно простые

$$\Rightarrow \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi) = X$$

*Доказательство.*

$$\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \dot{+} \sum_{j=1}^k \text{Ker } p_j(\varphi)$$

$$\text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } 0 = X$$

□

**Теорема 15.** О ядре и образе.

$$]p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \Rightarrow \text{Ker } p_1(\varphi) = \text{Im } p_2(\varphi)$$

*Доказательство.* Покажем, что:

$$1. \text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$2. \dim \text{Im } p_2(\varphi) = \dim \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$1. \text{Im } p_2(\varphi) \subset \text{Ker } p_1(\varphi)$$

$$]y \in \text{Im } p_2(\varphi) \Rightarrow \exists x \in X : y = p_2(\varphi)x$$

$$\triangleleft p_1(\varphi)y = p_1(\varphi)p_2(\varphi)x = p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$2. \text{Ker } p_\varphi(\varphi) = \text{Ker } p_1(\varphi) \dot{+} \text{Ker } p_2(\varphi) \Rightarrow$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_1(\varphi) + \dim \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$$\dim X = \dim \text{Ker } p_2(\varphi) + \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

$$\dim \text{Ker } p_1(\varphi) = \dim \text{Im } p_2(\varphi)$$

□

**Теорема 16.**  $]p_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k p_i(\lambda)$  — минимальный аннулирующий полином  $\varphi$ ,  $p_1 \dots p_k$  — взаимно простые делители

$\Rightarrow$

1.  $\sum_{j=1}^k p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}, \quad p'_j = \frac{p_\varphi}{p_j}$
2.  $p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{P}_{L_j} \quad L_j = \text{Ker } p_j(\varphi)$

*Доказательство.*  $\triangleleft p_\varphi(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) \dots p_k(\lambda) \quad \exists q_1 \dots q_k :$

$$\sum_{j=1}^k p'_j(\lambda)q_j(\lambda) = 1 \xrightarrow{S_\varphi} \sum_{j=1}^k p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \mathcal{I}$$

$$]p_1(\lambda) = p_i(\lambda), p_2(\lambda) = p'_i(\lambda) \Rightarrow \text{Im } p_1(\varphi) = \text{Ker } p_2(\varphi)$$

$\triangleleft \mathcal{P}_{L_1}x = p'_i(\varphi)q(\varphi) \in \text{Ker } p_i(\varphi)$ , т.к.

$$p_i(\varphi)[p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x] = p_i(\varphi)p'_i(\varphi)q_i(\varphi)x = p_\varphi(\varphi)q_i(\varphi)x = 0$$

Осталось доказать, что  $\mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = \delta_i^j \mathcal{P}_{L_i}$

$$]i \neq j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_j} = p'_i(\varphi)q_i(\varphi)p'_j(\varphi)q_j(\varphi) = \frac{p_\varphi(\varphi)}{p_i(\varphi)p_j(\varphi)}q_i(\varphi)q_j(\varphi)p_\varphi(\varphi) = 0$$

$$]i = j \Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}(x) = \mathcal{P}_{L_i}(\mathcal{I} \cdot x) = \mathcal{P}_{L_i}\left(\sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{L_j}\right)x = \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i}x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{L_i}\mathcal{P}_{L_i} = \mathcal{P}_{L_i}$$

□

#### 4.5 Минимальный полином и инвариантные подпространства. Спектральная теорема для линейного оператора произвольного вида.

Минимальный полином и инвариантные пространства: см. выше.

**Теорема 17.** Спектральная теорема.

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{m_j} = p_1(\lambda) \dots p_k(\lambda) \quad p_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \lambda \neq \lambda_{i \neq j}$$

$$\Rightarrow L_j = \text{Ker } p_j(\varphi) = \text{Ker } (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} \text{ — ультраинвариантное подпространство}$$

$$\Rightarrow X = \dot{+} \sum_{j=1}^n \text{Ker} (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{m_j} = \dot{+} \sum_{j=1}^k L_j$$

$$\varphi = \dot{+} \sum_{j=1}^k \varphi_j \quad \varphi_j = \varphi|_{L_j}$$

- 4.6 Нильпотентные операторы (определение, простейшие свойства). Жорданова клетка.
- 4.7 Структура нильпотентного оператора. Базис Жордана (обзор).
- 4.8 Жорданова форма матрицы линейного оператора.
- 4.9 Кратности собственных чисел (алгебраическая, геометрическая, полная). Теорема Гамильтона-Кэли.