

Упражнение 1. Существуют ли некоммутативные группы порядка 4? Порядка 5?

Решение.

1. Порядка 4.

Пусть  $G = \{e, a, b, c\}$  — некоммутативная группа порядка 4, где  $a$  и  $b$  не коммутируют.<sup>1</sup>

**Лемма 1.** Пусть  $a$  и  $b$  не коммутируют. Тогда  $a \neq b^{-1}$  (и наоборот).

*Proof.* Пусть  $a = b^{-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} a &= b^{-1} \\ ab &= e \\ bab &= be \\ (ba)b &= b \\ ba &= e = ab, !!! \end{aligned}$$

□

По лемме  $ab \neq e$  и  $ba \neq e$ . Кроме того,  $ab \neq a$  и  $ba \neq a$ , т.к. иначе  $b = e$ . Аналогично  $ab \neq b$  и  $ba \neq b$ . Итого,  $ab, ba \notin \{e, a, b\}$  и при этом  $ab \neq ba$ . Тогда  $ab$  и  $ba$  различные элементы и  $|G| \geq 5$ , противоречие.

2. Порядка 5.

Пусть  $G = \{e, a, b, c, d\}$  — некоммутативная группа порядка 5, где  $a$  и  $b$  не коммутируют.

Аналогично предыдущему случаю,  $ab, ba \notin \{e, a, b\}$ . Пусть  $ab = c$  и  $ba = d$  (без потери общности).

$$\begin{aligned} ca &= (ab)a = a(ba) = ad \\ bc &= b(ab) = (ba)b = db \end{aligned}$$

Т.к.  $c \neq e, a \neq e, ca \notin \{c, a\}$ . Аналогично,  $ad \notin \{a, d\}$  и по их равенству  $ca \notin \{a, c, d\}$ . Кроме того,  $ca \neq e$ , т.к. иначе  $c = a^{-1}$  и  $d = a^{-1}$ , но доказано, что  $c \neq d$  — противоречие. Итого,  $ca \notin \{a, c, d, e\}$ , следовательно  $ca = b$ . Аналогично  $bc = a$ .

$$b^2 = b(ca) = (bc)a = a^2$$

Рассмотрим  $a^2$ .

- $a^2 \neq a$ , т.к. иначе  $a = e$ .

<sup>1</sup>  $e$  всегда коммутирует, а разницы между  $a, b, c$  нет, поэтому общность не теряется.

<sup>2</sup> Здесь (и далее) подразумевается, что и  $ab$ , и  $ba \notin \dots$

- Аналогично  $a^2 = b^2 \neq b$ .
- $a^2 \neq c = ab$ , т.к. иначе  $a = b$ .
- $a^2 = b^2 \neq d = ba$ , т.к. иначе  $b = a$ .

Единственный оставшийся вариант —  $a^2 = e$ , но тогда:

$$cb = ab^2 = a = db \Rightarrow c = d, !!!$$

□

Упражнение 2. Рассмотрим группу  $(\mathbb{Z}, +)$  по сложению. Выделим два подмножества:

$$A = \{1337n \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n : 1528\}$$

Показать, что  $A, B$  есть подгруппы, а также  $H = A + B$  — тоже подгруппа. Найти индекс  $H$  относительно левых смежных классов.

Решение.  $A$  — подгруппа:

1.  $0 \in A$
2.  $\forall 1337n, 1337m \in A \quad 1337n + 1337m = 1337(n + m) \in A$
3.  $\forall 1337n \in A \quad \exists 1337(-n) \in A : 1337n + 1337(-n) = 1337 \cdot 0 = 0$

Аналогичными выкладками  $B$  — подгруппа.

$H$  — подгруппа:

1.  $\underbrace{0}_{\in A} + \underbrace{0}_{\in B} \in H$
2.  $\forall (1337n + 1528m), (1337k + 1528l) \in H \quad 1337n + 1528m + 1337k + 1528l = 1337(n + k) + 1528(m + l) \in H$
3.  $\forall 1337n + 1528m \in H \quad \exists 1337(-n) + 1528(-m) \in H : 1337n + 1528m + 1337(-n) + 1528(-m) = 0$

Несложно посчитать, что  $\text{НОД}(1337, 1528) = 191$  и тогда  $H = 191\mathbb{Z}$ , т.к.

$$1337n + 1528m = 191(7n + 8m)$$

и  $7n + 8m$  пробегает всё  $\mathbb{Z}$ . Кроме того, очевидно, что  $[\mathbb{Z} : 191\mathbb{Z}] = 191$ , т.к. левые смежные классы будут иметь вид  $191\mathbb{Z} + n$ , два класса для  $n_1$  и  $n_2$  совпадают  $\Leftrightarrow n_1 \equiv n_2 \pmod{191}$ . □

Упражнение 3. Рассмотрим группу  $G$  (не обязательно конечную) и некоторую её подгруппу  $H$ . Показать, что условия  $[G : H] = 2$  достаточно для нормальности  $H$ . Найти  $G/H$  в таком случае.

*Решение.* Т.к.  $[G : H] = 2$ , все левые смежные классы равны либо  $H$ , либо  $aH$  для некоторого фиксированного  $a \in G$ . Кроме того,  $aH \neq H \Rightarrow a \notin H$ . Т.к. левые смежные классы делят группу на непересекающиеся множества,  $aH = G \setminus H$ .

Докажем, что  $\forall g \in G \quad gH = Hg$ . Если  $g \in H$ , то искомое очевидно. Иначе  $gH = G \setminus H$ , т.к.  $H \not\ni g = ge \in gH$ . Аналогично  $Hg = G \setminus H$ .  $\square$

**Упражнение 4.** Определить все подгруппы групп:  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6$

**Замечание:** операция " $\hat{\oplus}$ " в  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  определяется покомпонентно:

$$z, w \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$z = (a, b), \quad w = (u, v)$$

$$z \hat{\oplus} w = (a, b) \hat{\oplus} (u, v) = (a \oplus u, b \oplus v)$$

где " $\oplus$ " есть операция в  $\mathbb{Z}_2$

*Решение.*

1.  $\mathbb{Z}_4$

$\mathbb{Z}_4, \{0\}$  — тривиальные подгруппы.

Здесь и далее  $H$  — подгруппа рассматриваемой группы.

Пусть  $1 \in H$ . По замкнутости  $2 = 1 + 1 \in H, 3 = 2 + 1 \in H$ , т.е. если  $1 \in H$ , то  $H = \mathbb{Z}_4$ .

Пусть  $2 \in H$ . Тогда все искомые свойства выполнены без добавления каких-либо элементов<sup>3</sup>, т.к.  $2 + 2 = 0 \in H, 2^{-1} = 2, \{0, 2\}$  — подгруппа  $\mathbb{Z}_4$ .

Пусть  $3 \in H$ .  $3^{-1} = 1 \Rightarrow 1 \in H \Rightarrow H = \mathbb{Z}_4$

**Ответ:**  $\{0\}, \mathbb{Z}_4, \{0, 2\}$

2.  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{(0, 0)\}$  — тривиальные подгруппы.

Пусть  $(1, 1) \in H$ . Тогда все искомые свойства выполнены без добавления элементов, т.к.  $(1, 1) + (1, 1) = (0, 0) \in H, (1, 1)^{-1} = (1, 1), \{(0, 0), (1, 1)\}$  — подгруппа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Пусть  $(1, 0) \in H$ .  $(1, 0) + (1, 0) = (0, 0) \in H, (1, 0)^{-1} = (1, 0) \Rightarrow \{(0, 0), (1, 0)\}$  — подгруппа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Аналогичное верно для  $(0, 1)$ .

Пусть и  $(1, 0)$ , и  $(0, 1) \in H$ . Тогда  $(1, 1) \in H$  по замкнутости и следовательно  $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

---

<sup>3</sup> Кроме нейтрального.

Пусть и  $(1, 1)$ , и  $(0, 1) \in H$ . Тогда  $(1, 1) + (0, 1) = (1, 0) \in H$  по замкнутости и  $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Аналогично для  $(1, 1)$  и  $(0, 1)$ .

**Ответ:**  $\{(0, 0)\}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}$

3.  $\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_6, \{0\}$  — тривиальные подгруппы.

Пусть  $1 \in H$ . Тогда  $H = \mathbb{Z}_6$ , аналогично первому случаю.

Пусть  $2 \in H$ . Тогда  $2 + 2 = 4 \in H$ .  $2^{-1} = 4, 4^{-1} = 2, 2 + 4 = 0, 4 + 4 = 2$ ,  $H$  — подгруппа.

Пусть  $3 \in H$ . Тогда  $3 + 3 = 0, 3^{-1} = 3$ ,  $H$  — подгруппа.

Пусть  $4 \in H$ . Тогда  $4^{-1} = 2 \in H$ , см. тот случай.

Пусть  $5 \in H$ . Тогда  $5 + 5 = 4 \in H \Rightarrow 2 \in H \Rightarrow 2 + 5 = 1 \in H \Rightarrow H = \mathbb{Z}_6$ .

Если  $2, 3 \in H$ , то  $2 + 3 + 2 = 1 \in H \Rightarrow H = \mathbb{Z}_6$ .

Если  $2, 5 \in H$ , то  $2 + 5 = 1 \in H \Rightarrow H = \mathbb{Z}_6$ .

Все случаи для  $2 \in H$  разобраны, остался случай  $3 \in H (2 \notin H)$ . Если  $5 \in H$ , то  $3 + 5 = 2 \in H$ , !!!.

**Ответ:**  $\{0\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3\}, \mathbb{Z}_6$ .

□

**Упражнение 5.** Рассмотрим циклическую группу порядка 129. Найти все её подгруппы.

**Решение.** Рассмотрим  $H$  — подгруппу  $C_{129}$ . Пусть  $C_{129} = \langle a \rangle$ . Тогда  $a^k \in H$ . По замкнутости  $\forall i \in \mathbb{Z} \ a^{ik} \in H$ . Если  $\gcd(129, k) = 1$ , то  $ik$  пробегает все элементы  $\mathbb{Z}_{129}$  и тогда  $H = C_{129}$ . Если же  $\gcd(129, k) \neq 1$ , то  $H$  не обязательно  $= C_{129}$ . Нетривиальных делителей 129 всего два: 3 и 43. Им соответствуют подгруппы  $\{1, g^{43}, g^{126}\}$  и  $\{1, g^3, g^6 \dots g^{126}\}$ .

**Ответ:**  $\{1, g^{43}, g^{126}\}, \{1, g^3, g^6 \dots g^{126}\}, \{e\}, C_{129}$ .

□