

# Методы оптимизации

Михайлов Максим

29 ноября 2022 г.

# Оглавление

<b>Лекция 1</b>	<b>10 февраля</b>	<b>4</b>
1	Теория погрешности . . . . .	4
2	Задачи оптимизации. Вводное. . . . .	8
3	Одномерная минимизация функций. Прямые методы. . . . .	9
3.1	Метод дихотомии . . . . .	9
<b>Лекция 2</b>	<b>17 февраля</b>	<b>11</b>
3.2	Метод золотого сечения . . . . .	11
3.3	Метод Фибоначчи . . . . .	12
3.4	Метод парабол . . . . .	13
3.5	Комбинированный метод Брента . . . . .	14
<b>Лекция 3</b>	<b>24 февраля</b>	<b>15</b>
3.6	Метод равномерного перебора . . . . .	15
4	Методы оптимизации, использующие производную . . . . .	15
4.1	Методы средней точки . . . . .	15
4.2	Метод хорд ( <i>метод секущей</i> ) . . . . .	16
4.3	Метод Ньютона ( <i>метод касательной</i> ) . . . . .	17
<b>Лекция 4</b>	<b>3 марта</b>	<b>18</b>
4.3.1	Достаточное условие монотонной сходимости метода Ньютона . . . . .	19
4.4	Модификации метода Ньютона . . . . .	20
4.4.1	Метод Ньютона-Рафсона . . . . .	20
4.4.2	Метод Марквардта . . . . .	20
5	Метод минимизации многомерных функций ( <i>метод ломаных</i> ) . . . . .	20
<b>Лекция 5</b>	<b>10 марта</b>	<b>22</b>
6	Минимизация функций многих переменных . . . . .	22
6.1	Постановка задачи . . . . .	22
6.2	Свойства выпуклых множеств и выпуклых функций . . . . .	24
6.3	Необходимое и достаточное условие безусловного экстремума . . . . .	25
6.3.1	Необходимое условие экстремума первого порядка . . . . .	25
6.3.2	Необходимое условие экстремума второго порядка . . . . .	25
6.3.3	Достаточное условие экстремума . . . . .	25
6.3.4	Проверка выполнения условий экстремума . . . . .	25
<b>Лекция 6</b>	<b>17 марта</b>	<b>26</b>
6.3.5	Критерии Сильвестра проверки достаточных условий экстремума . . . . .	26
6.3.6	Критерии Сильвестра проверки необходимых условий экстремума . . . . .	26

6.4	Квадратичные функции . . . . .	26
6.5	Общие принципы многомерной оптимизации . . . . .	28
6.6	Скорость сходимости минимизирующей последовательности . . . . .	28
<b>Лекция 7</b>	<b>22 марта (дополнительная лекция)</b>	<b>30</b>
6.7	Метод градиентного спуска . . . . .	31
6.8	Метод наискорейшего спуска . . . . .	33
<b>Лекция 8</b>	<b>24 марта</b>	<b>35</b>
6.9	Метод сопряженных градиентов . . . . .	35
6.10	Метод стохастического градиентного спуска . . . . .	36
6.10.1	Adagrad . . . . .	36
6.11	Метод покоординатного спуска . . . . .	37
<b>Лекция 9</b>	<b>31 марта</b>	<b>38</b>
7	Форматы хранения матриц . . . . .	38
7.1	Диагональный формат . . . . .	38
7.2	Ленточный формат . . . . .	39
7.3	Профильный формат . . . . .	40
7.4	Разреженный формат . . . . .	41
<b>Лекция 10</b>	<b>7 апреля</b>	<b>43</b>
8	Решение СЛАУ. Метод Гаусса. . . . .	44
8.1	Модификация метода Гаусса ( <i>постолбцовый выбор главного элемента</i> ) . . . . .	46
<b>Лекция 11</b>	<b>14 апреля</b>	<b>47</b>
9	LU-метод . . . . .	47
9.1	Алгоритм разложения . . . . .	48
10	Дополнительные рассуждения о точности получаемого численного решения . . . . .	49
10.1	Близкие к нулю главные элементы . . . . .	49
10.2	Вектор ошибки и невязка . . . . .	49
10.2.1	Векторные нормы . . . . .	50
<b>Лекция 12</b>	<b>21 апреля</b>	<b>52</b>
10.2.2	Нормы и анализ ошибок . . . . .	52
10.2.3	Оценивание числа обусловленности . . . . .	53
11	Дополнительно о градиентных методах . . . . .	53
11.1	Метод градиентного спуска . . . . .	54
<b>Лекция 13</b>	<b>28 апреля</b>	<b>57</b>
12	Минимизация квадратичной функции . . . . .	57
12.1	Метод градиентного спуска . . . . .	57
12.2	Метод градиентного спуска с константным шагом . . . . .	59
12.3	Минимизация с использованием исчерпывающего спуска . . . . .	60
12.4	Метод сопряженных направлений . . . . .	61

# Лекция 1

## 10 февраля

Этот курс — о минимизации (*максимизации*) функционалов. Кроме конкретных методов оптимизации, планируется рассмотреть форматы хранения матриц, о методах работы с ними и рассмотреть 1-2 (*может быть 3*) СЛАУ с использованием различных форматов.

Т.к. значения, получаемые компьютерами — не точные, нам требуется теория погрешности.

### 1 Теория погрешности

Все погрешности разделяются на два класса:

1. Неустраняемая — обусловлена неточностью исходных данных. Например, неточное знание физических констант или других параметров задачи. Тем не менее, необходимо знать эту погрешность, чтобы ставить рамки погрешности для решения.
2. Устраняемая — погрешность процесса решения задачи. Эту погрешность можно уменьшить выбором метода решения задачи.

(a) Погрешность модели

(b) Остаточная погрешность (*погрешность аппроксимации*)

Например, аппроксимация ряда первыми  $n$  его членами или аппроксимация по теореме Вейерштрасса квадратичной функцией.

(c) Погрешность округления

(d) Накапливаемая погрешность

**2c** и **2d** часто объединяют в вычислительную погрешность.

**Определение.** Пусть  $X^*$  — точное решение, а  $X$  — найденное (*приближенное*) решение. Тогда  $X^* - X$  называется **погрешностью**, а её модуль  $\Delta X = |X^* - X|$  — **абсолютная погрешность**.

Разумеется,  $\Delta X$  представляет сугубо теоретический интерес, т.к.  $X^*$  неизвестна и  $\Delta X$  нельзя вычислить.

**Определение.** В качестве требования к решению часто предоставляется **предельная абсолютная погрешность**  $\Delta_X \geq |X^* - X|$ .

**Определение.** Также существует **относительная погрешность**  $\delta X = \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$

Относительная погрешность позволяет выражать погрешность относительно значений самой величины. Например, при измерении длины парты погрешность 1 см не очень хорошо, а при измерении расстояния между городами — приемлемо.

**Определение.** Предельная относительная погрешность  $\delta_X \geq \left| \frac{X^* - X}{|X|} \right|$

**Определение.** **Значащие цифры** некоторого числа — все цифры в его изображении, отличные от нуля, а также нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности.

**Определение.** Если значащая цифра приближенного значения  $a$ , находящаяся в разряде, в котором выполняется условие  $\Delta \leq 0.5 \cdot 10^k$ , т.е. абсолютное значение погрешности не превосходит половину единицы этого разряда ( $k$  — номер этого разряда), то такая цифра называется **верной в узком смысле**.

Цифра называется **верной в широком смысле**, если в определении выше используется 1 вместо 0.5.

*Пример.*  $a = 3.635$ ,  $\Delta a = 0.003$

- $k = 0 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^0 = \frac{1}{2} \geq \Delta a$
- $k = -1 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05 \geq \Delta a$
- $k = -2 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0.005 \geq \Delta a$
- $k = -3 \quad \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 < \Delta a$

Таким образом, цифра 5 является сомнительной, остальные — верные.

*Пример.* Рассмотрим следующие способы записи одного и того же выражения:

$$\left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^3 = (\sqrt{2} - 1)^6 = (3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$$

Посчитаем все выражения с различными приближениями  $\sqrt{2}$ :

- $\frac{7}{5} = 1.4$
- $\frac{17}{12} = 1.41666$
- $\frac{707}{500} = 1.414$
- $\sqrt{2} = 1.4142135624$

$\sqrt{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$	$(\sqrt{2}-1)^6$	$(3-2\sqrt{2})^3$	$99-70\sqrt{2}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{216} \approx 0.0046$	$\frac{64}{15625} \approx 0.0051$	$\frac{1}{125} = 0.008$	1
$\frac{17}{12}$	$\frac{125}{24389} \approx 0.00513$	$\frac{15625}{2985354} \approx 0.0052$	$\frac{1}{216} \approx 0.0046$	$-\frac{1}{6} = -0.6(6)$
$\frac{707}{500}$	$\frac{8869743}{1758416743} \approx 0.005044$	$\frac{78672340886049}{15625 \cdot 10^{12}} \approx 0.00504$	$\frac{636056}{125000000} \approx 0.00509$	0.02

$$\Delta_{(X \pm Y)} = \Delta_X + \Delta_Y$$

$$\Delta_{(X \cdot Y)} \approx |Y| \Delta_X + |X| \Delta_Y$$

$$\Delta_{(X/Y)} \approx \left| \frac{1}{Y} \right| \Delta_X + \left| \frac{X}{Y^2} \right| \Delta_Y$$

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1 \dots x_n)|$$

$$|\Delta u| \approx |df(x_1 \dots x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$|\delta u| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

$$\delta_{(X \pm Y)} = \left| \frac{X}{X \pm Y} \right| \delta_X + \left| \frac{Y}{X \pm Y} \right| \delta_Y$$

$$\delta_{(X \cdot Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

$$\delta_{(X/Y)} = \delta_X + \delta_Y$$

Вернемся к прошлому примеру и посчитаем относительную погрешность.

$$\triangleleft x = \frac{7}{5}$$

$$\delta_{f_1} = 3 \left| \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right| \cdot |\delta x| = 6.25|\delta x|$$

$$\delta_{f_2} = 6 \left| \frac{1}{x-1} \right| \cdot |\delta x| = 15|\delta x|$$

$$\delta_{f_3} = 6 \left| \frac{1}{3-2x} \right| \cdot |\delta x| = 30|\delta x|$$

$$\delta_{f_4} = \left| \frac{90}{99-70x} \right| \cdot |\delta x| = 70|\delta x|$$

Таким образом, наибольшую погрешность даёт  $f_4$ , наименьшую —  $f_1$ .

*Пример.*

$$y^2 - 140y + 1 = 0$$

$$y = 70 - \sqrt{4899}$$

$$\sqrt{4899} \approx 69.99$$

$$y \approx 70 - 69.99 = 0.01$$

Посчитаем другим методом — избавимся от вычитания похожих чисел.

$$y = \frac{1}{70 + \sqrt{4899}}$$

$$y = \frac{1}{139.99} \approx \frac{1}{140} = 0.00714285 \approx 0.007143$$

Можно заметить, что результат весьма точнее.

*Пример.* Рассмотрим задачу вычисления суммы  $S = \sum_{j=1}^{10^6} \frac{1}{j^2}$ .

Если суммировать по формуле  $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2}$ , то из-за того, что сначала суммируются большие числа, а потом малые, погрешность велика:  $\Delta = 10^6 \cdot 2^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-4}$

Если же суммировать с конца, то  $\Delta = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \approx 6 \cdot 10^{-8}$

Рекомендации для увеличения точности вычислений:

1. Если складывать или вычитать последовательность чисел, то лучше начинать с малых членов.
2. Желательно избавляться от вычитания двух почти равных чисел, по возможности преобразуя формулу.
3. Необходимо сводить к минимуму число математических операций. Это также способствует ускорению работы алгоритма.

4. Если ЯП и компьютер позволяют использовать числа разных типов, то числа с большим числом разрядов всегда повышают точность вычислений (*в ущерб памяти*).

Дробные числа нужно сравнивать с помощью  $\varepsilon$ , т.е.  $|a - b| \leq \varepsilon$

## 2 Задачи оптимизации. Вводное.

Здесь и далее **целевая функция** — функция, которую мы минимизируем.

*Обозначение.* Пусть целевая функция —  $f(x)$ . Это обозначается как  $f(x) \xrightarrow{x \in U} \min$ .

$f(x) \rightarrow \max \Rightarrow -f(x) \rightarrow \min$ . Таким образом, мы без потери общности рассматриваем задачу минимизации.

**Определение.** Если  $\exists x^* \in U \quad f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in U$ , то такой  $x^*$  называется **точкой (глобального) минимума**

*Обозначение.* Множество всех точек минимума обозначается  $U^* = \{x_i^* \mid i = 1 \dots k\}$

Мы рассматриваем класс функций таких, что  $U^* \neq \emptyset$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **унимодальной** на  $[a, b]$ , если она:

1. Непрерывна на  $[a, b]$
2.  $\exists \alpha, \beta : a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ , такие что:
  - (а) Если  $a < \alpha$ , то на  $[a, \alpha]$   $f(x)$  строго монотонно убывает.
  - (б) Если  $\beta < b$ , то на  $[\beta, b]$   $f(x)$  строго монотонно возрастает.
  - (с)  $\forall x \in [\alpha, \beta] \quad f(x) = f_* = \min_{[a, b]} f(x)$

*Свойства.*

1. Если функция унимодальна на  $[a, b]$ , то она унимодальна и на  $[c, d] \subset [a, b]$
2. Если  $f$  унимодальна на  $[a, b]$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , тогда:
  - (а) Если  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то  $x^* \in [a, x_2]$
  - (б) Если  $f(x_1) > f(x_2)$ , то  $x^* \in [x_1, b]$

**Определение.**  $f(x)$ , заданная на  $[a, b]$ , называется **выпуклой** на этом отрезке, если

$$\forall x', x'' \in [a, b], \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \leq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x'')$$

*Свойства.*

1. Если  $f(x)$  выпукло на  $[a, b]$ , то  $\forall [x', x''] \subset [a, b]$ , то её график расположен ниже хорды между  $x'$  и  $x''$



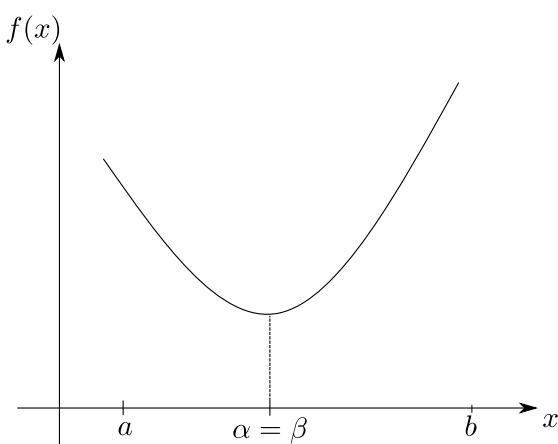


Рис. 1.1:  
Вырожденные  $\alpha$  и  $\beta$ ,  
унимодальная  
функция

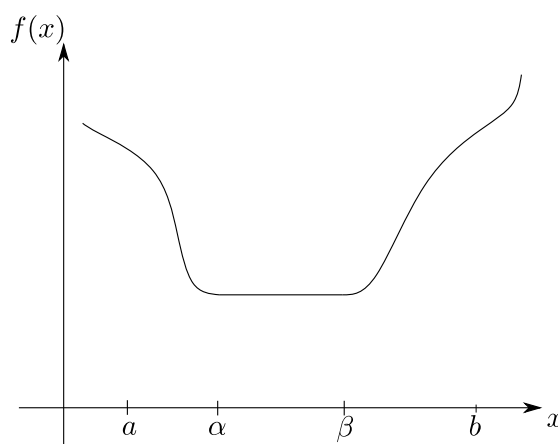


Рис. 1.2:  
Унимодальная  
функция

2. Всякая выпуклая функция на отрезке является унимодальной на нём.

**Определение. Стационарные точки** — точки  $x$ , для которых  $f'(x) = 0$ .

Мы будем рассматривать одномерные задачи оптимизации, т.к. многомерные задачи часто сводятся к одномерным.

### 3 Одномерная минимизация функций. Прямые методы.

Прямые методы — методы, не использующие производные целевой функции.

#### 3.1 Метод дихотомии

Этот метод — тернарный поиск.

$$x_1 = \frac{b + a - \delta}{2} \quad x_2 = \frac{b + a + \delta}{2}$$

$$\tau = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_2 - a}{b - a} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$x^* \in [a_i, b_i] \quad \forall i$$

Шаг 1: Находим  $x_1$  и  $x_2$ , вычисляем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$

Шаг 2: Сравниваем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

- Если  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , переходим к отрезку  $[a, x_2]$ , т.е.  $b = x_2$
- Иначе переходим к  $[x_1, b]$ , т.е.  $a = x_1$

Шаг 3:  $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ , где  $n$  — номер итерации.

- Если  $\varepsilon_n > \varepsilon$ , переходим к новой итерации.
- Если  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ , завершаем поиск и переходим к шагу 4.

Шаг 4:  $X^* \approx \bar{X} = \frac{a+b}{2}$

*Примечание.*  $\delta$  выбирается на интервале  $(0, 2\varepsilon)$ . Чем меньше  $\delta$ , тем больше относительное уменьшение длины отрезка на каждой итерации. При чрезмерно малом  $\delta$  сравнение  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$  будет затруднительно, т.к. они близки.

Мы можем оценить число необходимых итераций:

$$n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$$

## Лекция 2

# 17 февраля

### 3.2 Метод золотого сечения

Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$ . Пусть  $x_2 = \tau$ , тогда симметрично расположенная  $x_1 = 1 - \tau$ . Пусть дальше был выбран отрезок  $[0, \tau]$ , тогда пусть  $x'_2 = 1 - \tau$ . Чтобы новые точки делили отрезок в таком же соотношении, необходимо, чтобы  $\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau} \Rightarrow \tau^2 = 1 - \tau \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$ . Таким образом,  $x_1 = 1 - \tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

В общем случае для отрезка  $[a, b]$ :

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) \quad (1)$$

Вычислим погрешность:

$$\Delta_n = \tau^n(b - a) \quad \varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b - a)$$

Для заданного  $\varepsilon$  условия окончания  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ .

Результат метода:

$$x^* = \frac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2}$$

Оценка числа шагов для достижения искомой точности:

$$n \geq \ln \left( \frac{\frac{2\varepsilon}{b-a}}{\ln \tau} \right) \approx 2 \cdot 1 \cdot \ln \left( \frac{b-a}{2\varepsilon} \right)$$

Шаг 1: Находим  $x_1$  и  $x_2$  по формуле (1), вычисляем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .  $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$ ,  $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Шаг 2: – Если  $\varepsilon_n > \varepsilon$ , переходим к шагу 3.

– Если  $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ , переходим к шагу 4.

Шаг 3: Сравниваем  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$ .

– Если  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то  $b = x_2, x_2 = x_1, x_1 = b - \tau(b - a)$ . Мы запоминаем  $f(x_2)$  для следующего шага, т.к. оно равно  $f(x_1)$  на этом шаге.

– Иначе  $a = x_1, x_1 = x_2, f(x_1) = f(x_2)$ . Мы запоминаем  $f(x_1)$  для следующего шага, т.к. оно равно  $f(x_2)$  на этом шаге.

Шаг 4:  $X^* \approx \bar{X} = \frac{a_{(n)} + b_{(n)}}{2}$

### 3.3 Метод Фибоначчи

Мы знаем, что  $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ , а также при  $n \rightarrow +\infty$   $F_n \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим нулевую итерацию:

$$x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b - a) \quad x_2 = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b - a)$$

Рассмотрим  $k$ -тую итерацию:

$$x_1 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

$$x_2 = a_{(k)} + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Пусть  $k = n$ , тогда:

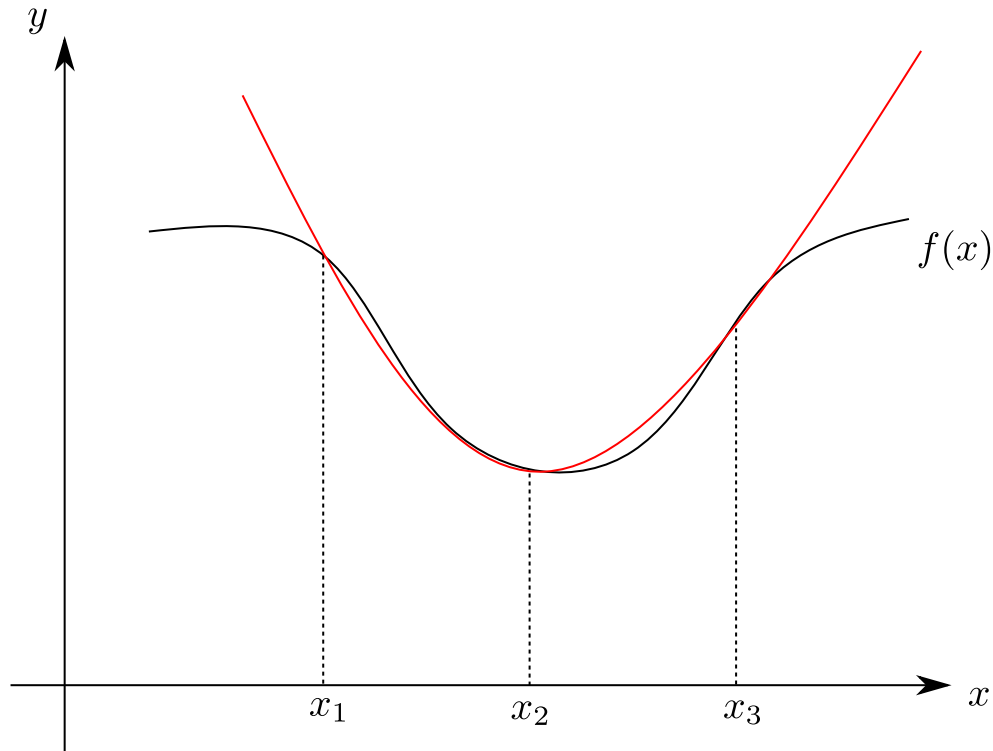
$$x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) \quad x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

Условие на погрешность:

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon$$

Какое брать  $n$ ? Такое, что  $\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}$

Есть проблема, при большом  $n$   $\frac{F_n}{F_{n+2}}$  есть бесконечная десятичная дробь, вследствие чего образуется погрешность.

Рис. 2.1: Функция  $f(x)$  и её приближение параболой.

### 3.4 Метод парабол

Пусть  $\exists x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ , такие что  $\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 \\ f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3) \end{cases}$

Тогда приближающая парабола имеет вид  $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$ .

Мы имеем условия на коэффициенты этой параболы:  $\begin{cases} q(x_1) = f(x_1) = f_1 \\ q(x_2) = f(x_2) = f_2 \\ q(x_3) = f(x_3) = f_3 \end{cases}$

Коэффициенты можно найти следующим образом:

$$a_0 = f_1 \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \quad a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Тогда результат итерации есть  $\bar{x} = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right)$ , на следующей лекции будет рассказан переход к следующей итерации.

Точки  $x_1, x_2, x_3$  для новой итерации выбираются следующим образом:

1. (а) Если  $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3$  и  $f(\bar{x}) \geq f(x_2)$ , то  $x^* \in [\bar{x}, x_3]$ ,  $x_1 = \bar{x}$ , точки  $x_2$  и  $x_3$  не меняются.

- (b) Если  $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3$  и  $f(\bar{x}) < f(x_2)$ , то  $x^* \in [x_1, x_2]$ ,  $x_3 = x_2$ ,  $x_2 = \bar{x}$ , точка  $x_1$  не меняется.
2. (a) Если  $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3$  и  $f(\bar{x}) \leq f(x_2)$ , то  $x^* \in [x_2, x_3]$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = \bar{x}$ , точка  $x_3$  не меняется.
- (b) Если  $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3$  и  $f(\bar{x}) > f(x_2)$ , то  $x^* \in [x_1, \bar{x}]$ ,  $x_3 = \bar{x}$ , точки  $x_1$  и  $x_2$  не меняются.

*Примечание.* Метод парабол имеет квадратичную сходимость.

*Примечание.* Метод парабол требует гладкость функции, что неверно для предыдущих методов.

### 3.5 Комбинированный метод Брента

Для собственного изучения.

# Лекция 3

## 24 февраля

### 3.6 Метод равномерного перебора

Шаг 1: Если  $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$ , то  $k = 1, x_1 = x_0 + \delta, h = \delta$

иначе  $x_1 = x_0, h = -\delta$

Шаг 2:  $h = 2h, x_{k+1} = x_k + h$

Шаг 3: Если  $f(x_k) > f(x_{k+1})$ , то  $k = k + 1$  и переходим к шагу 2. Иначе прекращаем поиск и искомое лежит в  $[x_{k-1}, x_{k+1}]$

## 4 Методы оптимизации, использующие производную

В рамках этой главы  $f(x)$  — дифференцируемая или дважды дифференцируемая выпуклая функция.

Есть три классических метода, использующих производную:

- Средней точки
- Метод хорд
- Метод Ньютона

$f'(x) = 0$  — необходимое и достаточное условие глобального минимума. Таким образом, условие остановки вычислений —  $f'(x) \approx 0$ , т.е.  $|f'(x)| \leq \varepsilon$

### 4.1 Методы средней точки

Средняя точка  $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ .

Общая идея алгоритма:

- Если  $f'(x) > 0$ , то  $\bar{x} \in$  участку монотонного возрастания  $f(x)$  и  $x^* < \bar{x}$ , т.е. минимум лежит на  $[a, \bar{x}]$
- Если  $f'(x) < 0$ , то аналогично можем вывести, что минимум лежит на  $[\bar{x}, b]$
- Если  $f'(x) = 0$ , то мы нашли решение.

Перепишем это в виде алгоритма:

Шаг 1:  $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ , вычислим  $f'(\bar{x})$

Шаг 2: Если  $|f'(x)| \leq \varepsilon$ , то  $x^* = \bar{x}$  и завершаем вычисление.

Шаг 3: Сравниваем  $f'(x)$  с нулём:

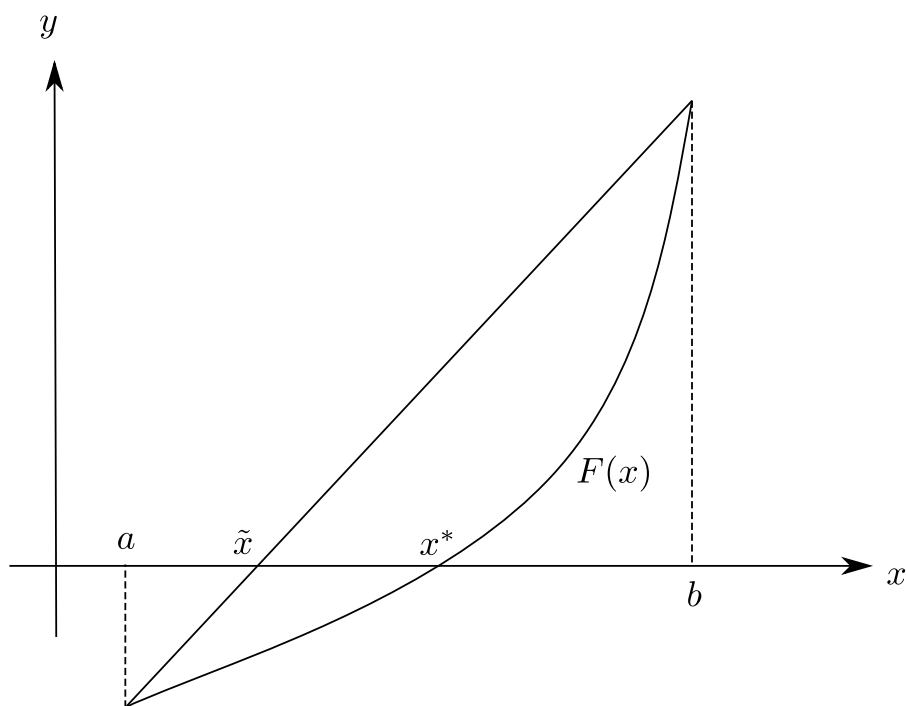
- Если  $f'(x) > 0$ , то  $x^* \in [a, \bar{x}]$  и  $b = \bar{x}$
- Иначе  $x^* \in [\bar{x}, b]$  и  $a = \bar{x}$

Длина отрезка после  $n$  итераций есть  $\Delta_n = \frac{b-a}{2^n}$

## 4.2 Метод хорд (метод секущей)

Если  $\exists f'(x)$  на  $[a, b]$ ,  $f'(a) \cdot f'(b) < 0$  и  $f'(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\exists x \in (a, b) : f'(x) = 0$ .

$F(x) = f'(x)$ . Пусть  $\tilde{x}$  — точка пересечения хорды  $F(x)$  с осью  $Ox$  на  $[a, b]$





Можем тривиально вывести  $\tilde{x}$  из уравнения прямой по двум точками:

$$\tilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) \quad (2)$$

Шаг 1: Считаем  $\tilde{x}$  по (2)

Шаг 2: Если  $|f'(\tilde{x})| \leq \varepsilon$ , то  $x^* = \tilde{x}$  и мы заканчиваем вычисление.

Иначе шаг 3.

Шаг 3: Переходим к новому отрезку:

- Если  $f'(\tilde{x}) > 0$ , то  $x^* \in [a, \tilde{x}]$ ,  $b = \tilde{x}$ ,  $f'(b) = f'(\tilde{x})$ , переходим к шагу 1
- иначе  $x^* \in [\tilde{x}, b]$ ,  $a = \tilde{x}$ ,  $f'(a) = f'(\tilde{x})$ , переходим к шагу 1

*Примечание.* Если  $f'(a) \cdot f'(b) \geq 0$ , то  $x^* = a$  или  $x^* = b$ .

### 4.3 Метод Ньютона (метод касательной)

Если  $f$  выпуклая на  $[a, b]$  и дважды непрерывно дифференцируемая, то уравнение  $f'(x) = 0$  решается методом Ньютона.

Пусть  $x_0 \in [a, b]$  — начальное приближение  $x^*$ .  $F(x) = f'(x)$  линеаризуема в окрестности  $x_0$ , т.е.

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

Пусть  $x_1$  — следующее приближение к  $x^*$ . Это будет пересечение касательной с  $Ox$ . Найдём эту точку.

$$\begin{aligned} F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0) &= 0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем получить  $\{x_k\}_{k=1}^n$  — итерационную последовательность.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Условие остановки такое же, как в предыдущих методах:  $|f'(x_k)| \leq \varepsilon$

# Лекция 4

## 3 марта

Пусть  $x_k$  — текущая оценка решения  $x^*$

Рассмотрим ряд Тейлора:

$$f(x_k + p) = f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_x f(x) \\ &= \min_p f(x_k + p) \\ &= \min_p \left( f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) + \dots \right) \\ &\approx \min_p \left( f(x_k) + pf'(x_k) + \frac{1}{2}p^2 f''(x_k) \right) \end{aligned}$$

Приравняем производную выражения под  $\min$  к нулю:

$$f'(x_k) + pf''(x_k) = 0$$

$$p = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Тогда  $x^* \approx x_k + p$  и  $x_{k+1} = x_k + p = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

Главное преимущество метода Ньютона — квадратичная скорость сходимости, т.е. если  $x_k$  достаточно близка к  $x^*$  и  $f''(x^*) > 0$ , то  $|x_{k+1} - x^*| \leq \beta |x_k - x^*|^2$

Метод Ньютона может потерпеть неудачу в следующих случаях:

1.  $f(x)$  плохо аппроксимируется первыми тремя членами в ряде Тейлора. Тогда  $x_{k+1}$  может быть хуже (как аппроксимация)  $x_k$ .
2.  $f''(x_k) = 0$ , тогда  $p$  не определен.
3. Кроме  $f$  нужно вычислять  $f'$  и  $f''$ , что затруднительно в реальных задачах.

Мы можем аппроксимировать производную по определению:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

Эта формула называется правой разностной схемой, у нее есть улучшение, называемое центральной разностной схемой:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}$$

Если  $f(x)$  — квадратичная функция, то метод Ньютона сходится за один шаг при любом выборе  $x_0$ .

#### 4.3.1 Достаточное условие монотонной сходимости метода Ньютона

Пусть  $x^* \in [a, b]$  и  $f(x)$  трижды непрерывно дифференцируемая и выпуклая на  $[a, b]$  функция. Тогда  $\{x_k\}$  будет сходиться к пределу  $x^*$  монотонно, если  $0 < \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} < 1$

$$f'(x^*) = 0 = f'(x_k) + f''(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f'''(x)}{2}(x^* - x_k)^2$$

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \frac{x^* - x_k + \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}{x^* - x_k} = 1 - \frac{2}{2 + \frac{f'''(x)(x^* - x_k)^2}{f'(x_k)}}$$

Последовательность итераций  $\{x_k\}$  монотонна, если  $\frac{f'''(x)}{f'(x_k)} > 0$ , таким образом условие монотонной сходимости метода Ньютона — постоянство на  $x \in [x^*, x_0]$  знака  $f'''(x)$  и его совпадение с  $f'(x_0)$ .

Пример.  $f(x) = x \cdot \arctg(x) - \frac{1}{2}???$

$$f'(x) = \arctg x \quad f''(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad f'''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x) \cdot f'''(x) < 0$ , таким образом не будет монотонной сходимости.

Пусть  $x_0 = 1$ .

$k$	$x_k$	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$
0	1	0.785	$\frac{1}{2}$
1	-0.57	-0.518	$a$
2	0.117	0.	
4	$9 \cdot 10^{-8}$		

## 4.4 Модификации метода Ньютона

### 4.4.1 Метод Ньютона-Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, 0 < \tau_k \leq 1$$

$\tau_k$  — константы. Если  $\tau = 1$ , то метод Ньютона-Рафсона вырождается в метод Ньютона.

Для нахождения  $\tau_k$  зададим  $\varphi(\tau)$ :

$$\varphi(\tau) = f\left(x_k - \tau \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\right) \rightarrow \min$$

Тогда

$$\tau_k = \frac{(f'(x_k))^2}{(f'(x_k))^2 + (f'(\tilde{x}))^2}, \text{ где } \tilde{x} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

### 4.4.2 Метод Марквардта

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k) + \mu_k}$$

, где  $\mu_k > 0$

$\mu_0$  выбирают на порядок выше значения  $f''(x_0)$ ,  $\mu_{k+1} = \begin{cases} \frac{m_k}{2} & , \text{ если } f(x_{k+1}) < f(x_k) \\ \mu_{k+1} = 2\mu_k & , \text{ если } f(x_{k+1}) \geq f(x_k) \end{cases}$

## 5 Метод минимизации многомодальных функций (метод ломаных)

**Определение.**  $f(x), x \in [a, b]$  удовлетворяет условию Липшица, если  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

Шаг 1 Возьмём  $x_1^* = \frac{1}{2L}(f(a) - f(b) + L(a+b))$  и  $p_1^* = \frac{1}{2}(f(a) + f(b) + L(a-b))$ . Добавим в рассматриваемое множество  $x'_1 = x_1^* - \Delta_1$  и  $x''_1 = x_1^* + \Delta_1$ , где  $\Delta_1 = \frac{1}{2L}(f(x_1^*) - p_1)$

Шаг 2 Из пар  $(x'_1, p_1)$  и  $(x''_1, p_1)$  выберем пару с минимальной  $p : (x_2^*, p_2^*)$  и исключим из рассматриваемого множества.

Шаг  $n$  В результате мы получим множество из  $n$  пар  $(x, p)$ . Исключаем пару с минимальной  $p$  и вместо неё

*Пример.*  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $[a, b] = [10, 15]$ ,  $\varepsilon = 0.01$

Проверим условие Липшица:

$$|f'(x)| = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| < \frac{|x| \cos x + \sin |x|}{x^2} < \frac{x + 1}{x^2} \leq 0.11$$

$n$	$x_n^*$	$p_n^*$	$2L\Delta_n$	$x'_n$	$x''_n$	$p_n$
1	12.056	-0.281	0.240	10.963	13.149	-0.161
2	10.963	-0.161	0.070	10.646	11.280	-0.126
3	13.149	-0.161	0.203	12.227	14.701	-0.096
4	10.646	-0.126	0.038	10.474	10.818	-0.107
5	11.280	-0.126	0.041	11.094	11.466	-0.106
6	10.474	-0.107	0.024	10.364	10.584	-0.095
7	10.818	-0.107	0.160	10.745	10.891	-0.099
8	11.094	-0.106	0.016	11.020	11.168	-0.098
9	11.466	-0.106	0.028	11.338	11.594	-0.092
10	10.891	-0.099	$0.008 < \varepsilon$			

# Лекция 5

## 10 марта

### 6 Минимизация функций многих переменных

#### 6.1 Постановка задачи

Необходимо найти  $x^* = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \in U \subset E_n$ , где  $U$  — множество допустимых значений, а  $E_n$  — евклидово пространство размера  $n$ , при этом  $f(x^*) = \min_{x \in U} f(x)$ .

*Примечание.*

1. Как и в одномерном случае, задача минимизации эквивалентна задачи максимизации и в общем случае называется задачей поиска экстремума.
2. Если  $U$  задается ограничениями на вектор  $x$ , то такая задача оптимизации называется задачей поиска условного экстремума.
3. Если  $U = E_n$ , т.е. не имеет ограничений, то такая задача оптимизации называется задачей поиска безусловного экстремума.
4. Решением задачи поиска экстремума называется пара  $(x^*, f(x^*))$ .

**Определение.** Если  $f(x^*) \leq f(x) \ \forall x \in U$ , то  $x^*$  называется **глобальным минимумом**.

**Определение.** Если  $\exists \varepsilon > 0 : \|x - x^*\| < \varepsilon \Rightarrow f(x^*) \leq f(x)$ , то  $x^*$  называется **локальным минимумом**.

*Примечание.*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

**Определение.** **Поверхностью уровня** функции  $f(x)$  называется множество точек, в которых функция принимает постоянное значение.

**Определение.** Градиентом  $\nabla f(x)$  непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$  в  $x$  называется:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

*Примечание.* Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, т.е. перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в точке  $x$  в сторону наибольшего возрастания функции.

**Определение.** Матрица Гессе  $\mathbf{H}(x)$  дважды непрерывно дифференцируемой в точке  $x$  функции  $f(x)$  называется матрица частных производных второго порядка, вычисленных в данной точке.

$$\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

1.  $\mathbf{H}(x)$  симметрична, имеет размер  $n \times n$ .
2. Можно определить антиградиент — вектор, равный по модулю градиенту и направленный противоположно. Антиградиент указывает в сторону наибольшего убывания  $f(x)$ .
3.  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$ , где  $o(\|\Delta x\|^2)$  есть сумма всех членов разложения, имеющих порядок выше второго. Можем заметить, что  $\Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x$  — квадратичная форма.

**Определение.** Квадратичная форма  $\Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x$ <sup>1</sup> называется:

- Положительно определенной, если  $\forall \Delta x \neq 0 \quad \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x > 0$
- Отрицательно определенной, если  $\forall \Delta x \neq 0 \quad \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x < 0$
- Положительно полуопределенной, если  $\forall \Delta x \quad \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x \geq 0$  и имеется  $\Delta x \neq 0 : \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x = 0$
- Отрицательно полуопределенной, если  $\forall \Delta x \quad \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x \leq 0$  и имеется  $\Delta x \neq 0 : \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x = 0$
- Неопределенной, если  $\exists \Delta x, \tilde{\Delta x} : \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x > 0, \tilde{\Delta x}^T \mathbf{H}(x) \tilde{\Delta x} < 0$
- Тождественно равной нулю, если  $\forall \Delta x \quad \Delta x^T \mathbf{H}(x) \Delta x = 0$

<sup>1</sup> и соответствующая ей матрица  $\mathbf{H}(x)$

## 6.2 Свойства выпуклых множеств и выпуклых функций

**Определение.** Пусть  $x, y \in E_n$ , множество точек вида  $\{z\} \subset E_n : z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ , т.е.  $z$  это отрезок  $[x, y]$ .

**Определение.**  $U \subset E_n$  выпуклое, если вместе с точками  $x, y \in U$  оно содержит весь отрезок  $z$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$ , заданная на выпуклом множестве  $U \subset E_n$ , называется:

- **выпуклой**, если:

$$\forall x, y \in U, \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

- **строго выпуклой**, если:

$$\forall x, y \in U, \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

- **сильно выпуклой** с константой  $l > 0$ , если:

$$\forall x, y \in U, \alpha \in [0, 1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \frac{l}{2}\alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2$$

*Свойства.*

1. Функция  $f(x)$  выпуклая, если её график целиком лежит не выше отрезка, соединяющего две её произвольные точки.
2. Функция  $f(x)$  строго выпуклая, если её график целиком лежит ниже отрезка, соединяющего две её произвольные, но не совпадающие точки.<sup>2</sup>
3. Если функция сильно выпуклая, то она одновременно строго выпуклая и выпуклая.
4. Если функция строго выпуклая, то она выпуклая.
5. Выпуклость функции можно определить по  $H(x)$ :
  - Если  $H(x) \geq 0 \quad \forall x \in E_n$ , то  $f(x)$  выпуклая.
  - Если  $H(x) > 0 \quad \forall x \in E_n$ , то  $f(x)$  строго выпуклая.
  - Если  $H(x) \geq lE^3 \quad \forall x \in E_n$ , то  $f(x)$  сильно выпуклая.

*Свойства (выпуклых функций).*

1. Если  $f(x)$  — выпуклая функция на множестве  $U$ , то всякая точка локального минимума — глобальный минимум на  $U$ .

<sup>2</sup> Пример будет на следующей лекции

<sup>3</sup> единичная матрица



2. Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух различных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти точки.
3. Если  $f(x)$  строго выпуклая функция на множестве  $U$ , то она может достигать своего глобального минимума на  $U$  не более чем в одной точке.

## 6.3 Необходимое и достаточное условие безусловного экстремума

### 6.3.1 Необходимое условие экстремума первого порядка

Пусть  $x^* \in E_n$  — точка локального минимума<sup>4</sup>  $f(x)$  на  $E_n$  и  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^*$ . Тогда  $\nabla f(x)$  в точке  $x^*$  равен нулю:  $\nabla f(x^*) = 0$  или  $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \in 1 \dots n$ . Точка  $x^*$  называется **стационарной**.

### 6.3.2 Необходимое условие экстремума второго порядка

Пусть  $x^* \in E_n$  — точка локального минимума<sup>5</sup>  $f(x)$  на  $E_n$  и  $f(x)$  дважды дифференцируема в точке  $x^*$ . Тогда  $\mathbf{H}(x^*)$  положительно полуопределена или отрицательно полуопределена.

### 6.3.3 Достаточное условие экстремума

Пусть  $f(x)$  в  $x^* \in E_n$  дважды дифференцируема,  $\nabla f(x^*) = 0$  и  $\mathbf{H}(x) > 0$  (или  $\mathbf{H}(x) < 0$ ). Тогда  $x^*$  — точка локального минимума<sup>6</sup>  $f(x)$  на  $E_n$ .

### 6.3.4 Проверка выполнений условий экстремума

- Вычисление угловых миноров  $\mathbf{H}(x)$
- Вычисление главных миноров  $\mathbf{H}(x)$

Есть два способа это сделать:

1. Исследование положительной или отрицательной определенности угловых и главных миноров  $\mathbf{H}(x)$ .
2. Анализ собственных значений  $\mathbf{H}(x)$ .

---

<sup>4</sup> или максимума

<sup>5</sup> или максимума

<sup>6</sup> или максимума

# Лекция 6

## 17 марта

### 6.3.5 Критерии Сильвестра проверки достаточных условий экстремума

1. Для того, чтобы  $\mathbf{H}(x^*) > 0$  и  $x^*$  являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы **угловые** миноры были строго положительными, т.е.  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \dots \Delta_n > 0$ .
2. Для того, чтобы  $\mathbf{H}(x^*) < 0$  и  $x^*$  являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки **угловых** миноров чередовались, т.е.  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \dots (-1)^n \Delta_n > 0$

### 6.3.6 Критерии Сильвестра проверки необходимых условий экстремума

1. Для того, чтобы  $\mathbf{H}(x^*) \geq 0$  и  $x^*$  мог быть точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы **главные** миноры были положительными, т.е.  $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots \Delta_n \geq 0$
2. Для того, чтобы  $\mathbf{H}(x^*) \leq 0$  и  $x^*$  мог быть точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки **главных** миноров чередовались, т.е.  $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots (-1)^n \Delta_n \geq 0$

**Определение. Собственные значения**  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbb{H}(x^*)$  находятся как корни характеристического уравнения  $|H(x^*) - \lambda E| = 0$

Если  $H(x)$  — вещественная, симметричная матрица, то  $\lambda_i$  тоже вещественные.

## 6.4 Квадратичные функции

**Определение.** Функция вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c$$

называется **квадратичной функцией**  $n$  переменных.

Положим  $a_{ij} = a_{ji}$ <sup>1</sup>, тогда  $a_{ij}$  задаёт симметричную матрицу  $A$ .

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c \quad (3)$$

, где  $b = (b_1 \ \dots \ b_n)^\top \in E_n$  — вектор коэффициентов,  $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^\top$

Свойства (квадратичных функций).

$$1. \nabla f(x) = Ax + b$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{ik} + a_{ki}) x_i + b_k \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + b_k \end{aligned}$$

$$2. \mathbf{H}(x) = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + b_k \right) = a_{kl}$$

3. Квадратичная функция  $f(x)$ , для которой выполнено (3), с положительно определенной матрицей  $A$  сильно выпуклая, т.к.  $\mathbf{H}(x) = A$  — симметричная и положительно определенная, а следовательно  $\lambda_i > 0$  и  $\exists$  ортонормированный базис из собственных векторов этой матрицы. В этом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad A - lE = \begin{pmatrix} \lambda_1 - l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - l \end{pmatrix}$$

В этом базисе все угловые миноры матрицы  $A$  и матрицы  $A - lE$  положительны при достаточно малом  $l : 0 < l < \lambda_{\min} \Rightarrow f$  сильно выпуклая.

<sup>1</sup> На лекции было дано  $a_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ , но это не похоже на правду, т.к. тогда  $a_{ji} = 0 \ \forall i, j$ . Нулевая матрица действительно симметрична, но вряд ли это подразумевалось.

## 6.5 Общие принципы многомерной оптимизации

Алгоритмы многомерной оптимизации обычно используют итерационную процедуру, описываемую следующим образом:  $x^{k+1} = \Phi(x^k, x^{k-1} \dots x^0)$ ,  $x^0 \in E_n$ . Эти алгоритмы строят последовательность промежуточных результатов  $\{x_k\}$ , которая обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) = f^* = \min_{E_n} f(x), & \text{если } U^* \neq \emptyset \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) = f^* = \inf_{E_n} f(x), & \text{если } U^* = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

, где  $U^*$  — множество точек глобального минимума функции  $f(x)$ .

**Определение.** Если для  $\{x^k\}$  выполняется условие (4), то эта последовательность называется **минимизирующей**.

**Определение.** Если для  $U^* \neq \emptyset$  выполняется условие  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(x^k, U^*) = 0$ , то  $\{x^k\}$  **сходится** к множеству  $U^*$

**Определение** (расстояние от точки до множества).  $\rho(x, U) = \inf_{y \in U} \rho(x, y)$

Если  $U^*$  состоит из одной точки  $x^*$ , то для  $\{x^k\}$ , сходящейся к  $U^*$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = x^*$ . Минимизирующая последовательность может и не сходиться к точке минимума.

**Теорема 1** (Вейерштрасса). Если  $f$  непрерывна в  $E_n$  и множество  $U^\alpha = \{x : f(x) \leq \alpha\}$  для некоторого  $\alpha$  непусто и ограничено, то  $f(x)$  достигает глобального минимума в  $E_n$ .

## 6.6 Скорость сходимости минимизирующей последовательности

**Определение.**  $\{x^k\}$  сходится к точке  $x^*$  **линейно** (со скоростью геометрической прогрессии), если

$$\exists q \in (0, 1) : \rho(x^k, x^*) = q \rho(x^{k-1}, x^*)$$

, т.е.  $\rho(x^k, x^*) \leq q^k \rho(x^0, x^*)$

**Определение.** Сходимость называется **сверхлинейной**, если

$$\rho(x^k, x^*) \leq q_k \rho(x^{k-1}, x^*)$$

и  $q_k \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow +\infty$

**Определение.** Сходимость называется **квадратичной**, если

$$\rho(x^k, x^*) \leq (c \rho(x^{k-1}, x^*))^2, c > 0$$

Критерий окончания итерационного процесса:

1.  $\rho(x^{k+1}, x^k) < \varepsilon_1$
2.  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$

$$3. \|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_3$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k \quad (5)$$

, где  $p^k$  — **направление поиска** из  $x^k$  в  $x^{k+1}$ , а  $\alpha_k$  — **величина шага**. Алгоритмы, которые мы будем рассматривать, различаются этими двумя величинами.

**Определение.** В итерационном процессе (5) производится **исчерпывающий спуск**, если величина шага  $\alpha_k$  находится из решения одномерной задачи минимизации

$$\Phi_k(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha}, \Phi_k(\alpha) = f(x^k + \alpha p^k)$$

**Теорема 2.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в  $E_n$ , то в итерационном процессе (5) с выбором шага с исчерпывающим спуском для любого  $k \geq 1$  выполняется следующее условие:

$$\langle \nabla f(x^{k+1}), p^k \rangle = 0$$

*Доказательство.* Для  $\Phi_k(\alpha)$  необходимое условие минимума функции:

$$\frac{d\Phi_k(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_j} \frac{dx_j^{k+1}}{d\alpha} = 0$$

Учитывая, что  $x_j^{k+1} = x_j^k + \alpha p_j^k$ , получаем, что  $\frac{dx_j^{k+1}}{d\alpha} = p_j^k$  □

**Теорема 3.** Для квадратичной функции  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$  величина  $\alpha_k$  исчерпывающего спуска в итерационном процессе (5) равна:

$$\alpha_k = -\frac{\langle \nabla f(x^k), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle} = -\frac{\langle Ax^k + b, p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k p^k \\ Ax^{k+1} + b &= Ax^k + b + \alpha_k Ap^k \\ \nabla f(x^{k+1}) &= \nabla f(x^k) + \alpha_k Ap^k \\ \langle \nabla f(x^{k+1}), p^k \rangle &= 0 \\ \langle \nabla f(x^k) + \alpha_k Ap^k, p^k \rangle &= 0 \\ \langle \nabla f(x^k), p^k \rangle + \langle \alpha_k Ap^k, p^k \rangle &= 0 \\ \langle \nabla f(x^k), p^k \rangle + \alpha_k \langle Ap^k, p^k \rangle &= 0 \\ \alpha_k &= -\frac{\langle \nabla f(x^k), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle} \end{aligned}$$

□

## Лекция 7

### 22 марта (дополнительная лекция)

**Определение.** Направление вектора  $p^k$  называется **направлением убывания** функции  $f(x)$  в точке  $x^k$ , если при всех достаточно малых положительных  $\alpha$  выполняется неравенство  $f(x^k + \alpha p^k) < f(x^k)$

**Теорема 4** (достаточное условие направления убывания). Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x^k$ . Если вектор  $p^k$  удовлетворяет условию  $\langle \nabla f(x^k), p^k \rangle < 0$ , то направление вектора  $p^k$  является направлением убывания.

*Доказательство.* Из свойства дифференцируемости функции и условия теоремы следует, что

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) = f(x^k + \alpha p^k) - f(x^k) = \langle \nabla f(x^k), \alpha p^k \rangle + o(\alpha) = \alpha \langle \nabla f(x^k), p^k \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha} < 0$$

при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ , т.е.  $p^k$  задает направление убывания  $f(x)$  в точке  $x^k$ .  $\square$

Геометрическая интерпретация:  $\langle \nabla f(x^k), p^k \rangle < 0 \Rightarrow p^k$  составляет тупой угол с  $\nabla f(x^k)$ .

Рассмотрим  $f(x)$ , дифференцируемую в  $E_n$  и запишем итерационную процедуру минимизации:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k \tag{6}$$

, где  $p^k$  определяется с учетом информации о частных производных, а величина  $\alpha_k$  такова, что:

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) \tag{7}$$

Условие остановки итерационного процесса:  $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon$ .

## 6.7 Метод градиентного спуска

Предположим, что в (6)  $p^k = -\nabla f(x^k)$ . Если  $\nabla f(x^k) \neq 0$ , то  $\langle \nabla f(x^k), p^k \rangle < 0$ , следовательно  $p^k$  — направление убывания  $f(x)$ , причём в малой окрестности точки  $x^k$  направление  $p^k$  обеспечивает наискорейшее **убывание** функции. Таким образом,  $\exists \alpha_k > 0$ , такое что (7) выполнено.

Алгоритм метода:

1. Выбрать  $\varepsilon > 0, \alpha > 0, x \in E_n$ , вычислить  $f(x)$ .
2. Вычислить  $\nabla f(x)$ . Проверить условие  $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon$ . Если оно выполнено, то завершить процесс, иначе перейти к шагу 3.
3. Найти  $y = x - \alpha \nabla f(x)$  и  $f(y)$ . Если  $f(y) < f(x)$ , то положить  $x = y, f(x) = f(y)$  и перейти к шагу 2, иначе — к 4.
4. Положить  $\alpha = \frac{\alpha}{2}$  и перейти к шагу 3.

*Примечание.* В окрестности стационарной точки величина градиента мала, вследствие чего сходимость процесса замедляется. Поэтому в (6) иногда полагают

$$p^k = -\frac{\nabla f(x^k)}{\|\nabla f(x^k)\|}$$

**Теорема 5.** Пусть симметричная матрица  $A$  квадратичной функции  $f(x)$  положительно определена,  $l$  и  $L$  — наименьшее и наибольшее собственные значения  $A$  ( $0 < l \leq L$ ). Тогда при любых  $\alpha \in (0, \frac{2}{L})$  и  $x^0 \in E_n$  (6) сходится к единственной точке глобального минимума  $x^*$  функции  $f(x)$  линейно:

$$\rho(x^k, x^*) \leq q^k \rho(x^0, x^*)$$

*Доказательство.* Т.к.  $A$  положительно определена, то  $f(x)$  сильно выпукла. Следовательно точка  $x^*$  существует и единственна.  $\nabla f(x^*) = 0$ , тогда:

$$\nabla f(x^k) = Ax^k + b = Ax^k + b - Ax^* - b = A(x^k - x^*)$$

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\| &= \|x^{k-1} - \alpha \nabla f(x^{k-1}) - x^*\| \\ &= \|x^{k-1} - x^* - \alpha A(x^{k-1} - x^*)\| \\ &= \|(E - \alpha A)(x^{k-1} - x^*)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\| &\leq \|E - \alpha A\| \cdot \|x^{k-1} - x^*\| \\ &\leq q \|x^{k-1} - x^*\| \\ &\leq q^k \|x^0 - x^*\| \end{aligned}$$

□

$q$  — оценка нормы матрицы через величину её собственных значений:  $\|E - \alpha A\| \leq q = \max\{|1 - \alpha l|, |1 - \alpha L|\}$ . Величина  $q$  принимает наименьшее значение при  $q^* = \frac{L-l}{L+l}$  при  $\alpha = \alpha^* = \frac{2}{L+l}$

*Доказательство.* Т.к.  $l < L$ , то  $1 - \alpha l = -(1 - \alpha L)$ . Тогда  $q = 1 - \alpha l = 1 - \frac{2l}{L+l} = \frac{L-l}{L+l}$   $\square$

От соотношения  $l$  и  $L$  существенно зависит число итераций градиентного метода при минимизации выпуклой квадратичной функции.

*Пример* ( $L = l > 0$ ).  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, x^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \alpha = \alpha^*$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow l = L = 2 \Rightarrow \alpha^* = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

$$x^1 = x^0 - \frac{1}{2} \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Несложно заметить, что  $x^1 = x^*$ .

Таким образом, точка минимума нашлась за один шаг.

При  $l = L$  линии уровня  $f(x)$  — концентрические окружности. При  $L \gg l > 0$  линии уровня  $f(x)$  — эллипсы:

*Пример* ( $L \gg l > 0$ ).  $f(x) = x_1^2 + 100x_2^2 \rightarrow \min, x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \alpha = \alpha^*$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix} \Rightarrow l = 2, L = 200$$

$$-\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & -200 \end{pmatrix}^T$$

$x^* - x^0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T$  — направление к точке глобального минимума, сильно отличается от направления спуска, минимизирующая последовательность сходится зигзагообразно.

**Определение.** Число обусловленности для симметричной положительно определенной матрицы:  $\mu = \frac{L}{l}$ . Оно характеризует степень вытянутости линий уровня  $f(x) = C$ .

- Если  $\mu$  велико, то линии уровня сильно вытянуты, функция имеет овражный характер, т.е. резко меняется по одним направлениям и слабо по другим. В таком случае задачу минимизации называют плохо обусловленной.
- Если  $\mu \sim 1$ , линии уровня близки к окружности и задача называется хорошо обусловленной.



## 6.8 Метод наискорейшего спуска

Идея: после вычисления в начальной точке градиента функции делает в направлении антиградиента не малый шаг, а передвигается до тех пор, пока функция убывает. Достигнув точки минимума на выбранном направлении, повторяет описанную процедуру.

$\alpha_k$  находится из решения задачи одномерной оптимизации:

$$\Phi_k(\alpha) \rightarrow \min, \Phi_k(\alpha) = f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)), \alpha > 0 \quad (8)$$

Алгоритм метода:

1. Выбрать  $\varepsilon > 0$ ,  $x^0 \in E_n$ , вычислить  $f(x^0)$
2. Вычислить  $\nabla f(x)$ . Проверить условие  $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon$ . Если оно выполнено, то завершить процесс, иначе перейти к шагу 3.
3. Решить задачу (8) для  $x^k = x$ , т.е. найти  $\alpha^*$ . Положить  $x = x - \alpha^* \nabla f(x)$ , перейти к шагу 2.

**Определение.** Ненулевые вектора  $p^1 \dots p^k$  называются **сопряженными** относительно матрицы  $A$  размера  $n \times n$  или  **$A$ -ортогональными**, если  $\langle Ap^i, p^j \rangle = 0$ , если  $i \neq j$ .

Система из  $n$  векторов  $p^1 \dots p^n$ , сопряженных относительно положительно определенной матрицы  $A$ , линейно независима и образует базис в  $E_n$ .

Рассмотрим минимизацию квадратичной функции  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$  в  $E_n$ , где  $A$  положительно определенная и итерационный процесс (6), где  $p^k$  —  $A$ -ортогональные.

Если в таком итерационном процессе на каждом шаге исчерпывающий спуск, то:

$$\alpha_k = - \frac{\langle \nabla f(x^0), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

*Доказательство.*

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k = x^0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i p^i$$

$$\nabla f(x) = Ax + b$$

$$\nabla f(x^k) = \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^k \alpha_i Ap^i$$

Домножим на  $p^k$ :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x^k), p^k \rangle &= \langle \nabla f(x^0), p^k \rangle + \langle \alpha_k Ap^k, p^k \rangle \\ \langle \nabla f(x^0), p^k \rangle + \langle \alpha_k Ap^k, p^k \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Т.к.  $A$  положительно определено,  $\langle Ap^k, p^k \rangle > 0$  и для  $\alpha_k$ :

$$\alpha_k = -\frac{\langle \nabla f(x^0), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

□

**Теорема 6.** Последовательный исчерпывающий спуск по  $A$ -ортогональным направлениям приводит квадратичной формы не более чем за  $n$  шагов.

# Лекция 8

## 24 марта

### 6.9 Метод сопряженных градиентов

$$p^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k p^k \quad (9)$$

$\beta_k$  выбираются так, чтобы получалась последовательность  $A$ -ортогональных векторов  $p^0, p^1, \dots$ . Из условия  $\langle Ap^{k+1}, p^k \rangle = 0$  имеем:

$$\beta_k = \frac{\langle A\nabla f(x^{k+1}), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

Для квадратичной функции:

$$\alpha_k = -\frac{\langle \nabla f(x^k), p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

Вышеуказанный итерационный процесс дает точки  $x^0 \dots x^k$  и векторы  $p^0 \dots p^k$ , такие, что если  $\nabla f(x^i) \neq 0$  при  $0 \leq i < k \leq n-1$ , то векторы  $p^0 \dots p^k$   $A$ -ортогональны, а  $\nabla f(x^0) \dots \nabla f(x^i)$  взаимно ортогональны.

Т.к. в (9)  $p^k$   $A$ -ортогональны, то метод гарантирует нахождение точки минимума сильно выпуклой функции не более, чем за  $n$  шагов.

Следующие формулы описывают итерационный процесс метода сопряженных градиентов:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k \quad x^0 \in E_n, p^0 = -\nabla f(x^0)$$

$$f(x^k + \alpha_k p^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha p^k)$$

$$p^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k p^k$$

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x^k)\|^2}$$

Можем заметить, что мы не используем матрицу  $A$ , поэтому этот метод может применяться для минимизации не только квадратичных функций. Но этот метод может не находить точку минимума не квадратичной функции за конечное число шагов.

Вектора  $p^k$  вообще говоря могут не образовывать  $A$ -ортогональную систему, вследствие чего реализация этого метода будет сопровождаться неизбежными накапливающимися погрешностями, из-за чего сходимость метода может нарушиться. Чтобы с этим бороться, через каждые  $N$  шагов производят обновление метода, т.е.  $\beta_{m \cdot N} = 0, m \in \mathbb{N}$ , где  $m \cdot N$  называются моментами обновления метода (*рестарта*), а  $N$  обычно принимают за  $n$  — размерность пространства  $E_n$ .

## 6.10 Метод стохастического градиентного спуска

Этот метод используется, когда дано множество пар  $(x, y)$ , называемых тренировочными наборами. Это множество разделяется на  $K$  подмножеств размера  $M$ , называемых minibatch.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \{x_i \mid i = M_k, \dots, (M_k + M - 1)\} \\ Y^{(k)} &= \{y_i \mid i = M_k, \dots, (M_k + M - 1)\} \\ L^{(k)}(w) &= \sum_{i=0}^M L(w, x_{M_k+i}, y_{M_k+i}) \end{aligned}$$

Есть большие итерации по  $p$ , называемые **эпохами** и малые итерации  $w_p^{(k+1)} = w_p^{(k)} - \eta \cdot \nabla L^{(k)}(w_p^{(k)})$ ,  $w_{p+1}^{(0)} = w_p^{(K)}$ , где  $\eta = \text{const}$ <sup>2</sup>. При переходе от одной эпохи к другой minibatch-и случайно перемешиваются.

### 6.10.1 Adagrad

*Примечание.* Куда более адекватная статья по adagrad и прочим модификациям стохастического спуска: <https://habr.com/ru/post/318970/>

*Примечание.* Лучшая модификация SGD — Adam, если не хочется думать, надо всегда использовать его.

Идея алгоритма — в покоординатном изменении  $\eta$ . Пусть  $\eta_p = \begin{pmatrix} \eta_p^{(1)} & \dots & \eta_p^{(d)} \end{pmatrix}$ ,  $\eta_0$  — константный вектор  $\eta_0^{(i)} = \eta \ \forall i$ .

Вспомогательные данные:

$$\nabla L(w_p) = \begin{pmatrix} g_p^{(1)} & \dots & g_p^{(d)} \end{pmatrix} \quad G_p^{(i)} = \sum_{j=1}^p (g_j^{(i)})^2$$

<sup>1</sup> Проще говоря, этот метод используется в машинном обучении

<sup>2</sup> И называется learning rate

Тогда пусть

$$\eta_p^{(i)} = \frac{\eta}{\sqrt{G_p^{(i)} + \epsilon}}$$

, где  $\epsilon \approx 10^{-8}$  — сглаживающий параметр, который позволяет избежать деления на 0.

Тогда правило перехода будет:

$$w_{p+1} = w_p - \eta_p \odot \nabla L(w_p)$$

, где  $\odot$  — поэлементное умножение векторов.

## 6.11 Метод покоординатного спуска

Алгоритм метода:

1. Фиксируем значения всех переменных вектора  $x = (x_1 \dots x_n)$ , кроме  $x_i$ .
2.  $f(x_i) \rightarrow \min$  методом одномерной оптимизации (*наиболее популярный метод — золотого сечения*).
3. Проверка критерия остановки:
  - $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon_1$
  - $\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\| \leq \varepsilon_2$

# Лекция 9

## 31 марта

### 7 Форматы хранения матриц

**Определение.** Матрица с большим количеством нулевых элементов называется **разреженной**. Такие матрицы хранятся особым образом.

**Определение.** Не разреженная матрица называется **плотной**.

Формат записи матриц зависит от алгоритма, который будет использовать данную матрицу. Наиболее распространены следующие 4 разреженных формата:

1. Диагональный
2. Ленточный
3. Профильный
4. Разреженный

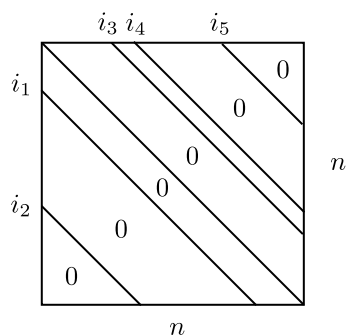
Мы будем рассматривать эти форматы только в применении к квадратным матрицам. Первые два формата используются реже и мы не будем их рассматривать в лабораторных работах.

Характеристики форматов:

- Учитывается ли симметрия матрицы.
- Используются ли отдельно верхний и нижний треугольники матрицы.
- Требуется ли ускоренный доступ к строкам или столбцам матрицы.

#### 7.1 Диагональный формат

Этот формат используется, когда все ненулевые элементы матрицы находятся на относительно небольшом числе диагоналей.

Рис. 9.1: Матрица с ненулевыми элементами на диагоналях,  $m = 5$ 

Матрица хранится в виде плотной матрицы  $n \times m$ , где  $n$  — размерность исходной матрицы, а  $m$  — количество ненулевых диагоналей. Также необходимо хранить одномерный массив размерностью  $m - 1$ , где для каждой диагонали указан сдвиг относительно главной диагонали. В примере значения этого массива  $(-i_2, -i_1, i_3, i_4, i_5)$ .

## 7.2 Ленточный формат

Этот формат используется, когда все ненулевые элементы матрицы расположены на диагоналях, прилегающих к главной диагонали, т.е.  $a_{ij} = 0$ , если  $|i - j| > k$ . При этом  $k$  называется **полушириной**, а ширина ленты  $m = 2k + 1$ .

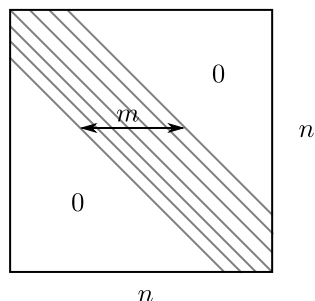


Рис. 9.2: Матрица ленточного типа

Хранить такие матрицы в виде  $m$  массивов различных длин не представляется возможным, т.к. требуется быстрый доступ к элементам матрицы.

Иногда главную диагональ хранят отдельно, в зависимости от алгоритма.

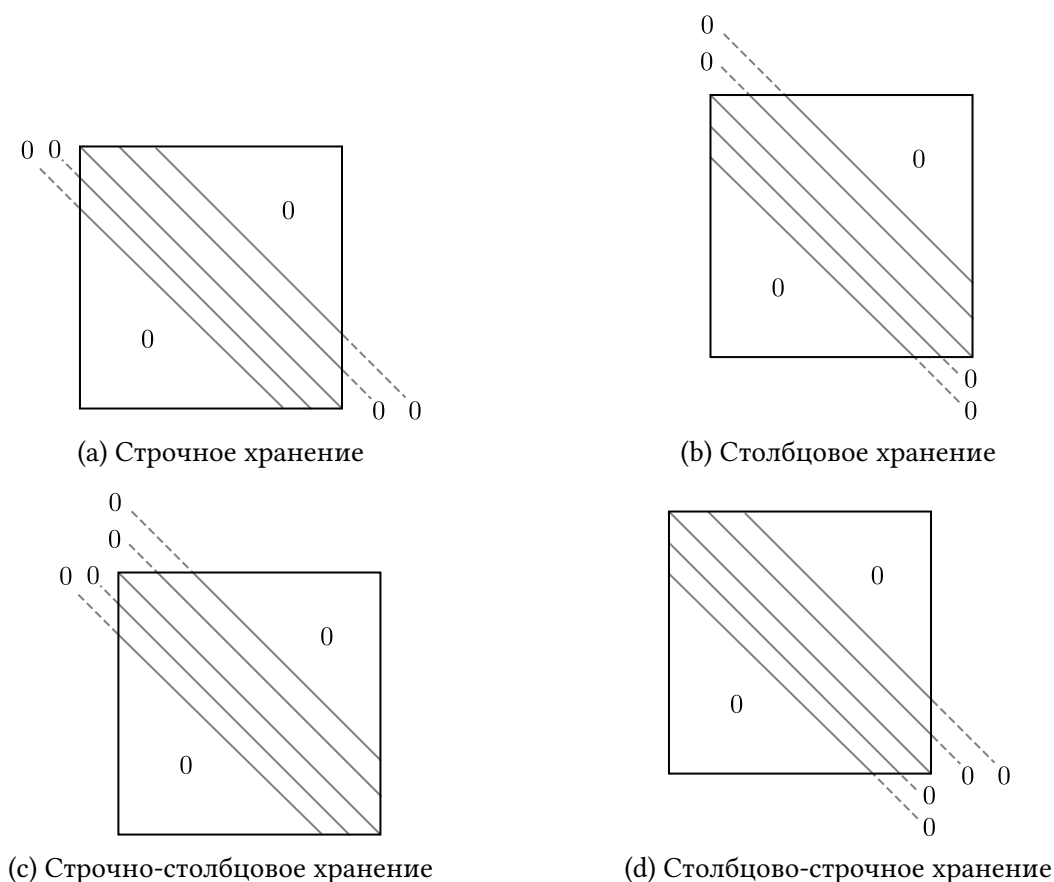


Рис. 9.3: Способы хранения матрицы в ленточном формате

### 7.3 Профильный формат

Профильные форматы хранения матриц используется, когда матрица не обладает определенной структурой и ненулевые элементы расположены в произвольном порядке, но при этом они сосредоточены у главной диагонали, так что в строке можно выделить **профиль** — часть строки от первого ненулевого элемента в строке до диагонального элемента.

Матрицы ленточного формата — матрицы профильного формата с фиксированным профилем.

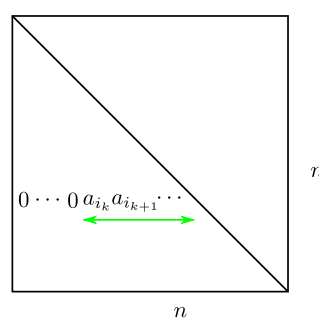


Рис. 9.4: Матрица профильного типа.  
Зеленым — профиль строки  $i$



Используемые структуры:

- Вещественный массив  $di[n]$
- Вещественные массивы:
  - $al$  — элементы нижнего треугольника по строкам
  - $au$  — элементы верхнего треугольника по столбцам.
- Целочисленный массив  $ia$  — информация о профиле:  $ia[k]$  = индекс (в нумерации с 1), с которого начинаются элементы  $k$ -той строки или столбца в массивах  $al$  или  $au$ .

$ia[n+1]$  = индекс первого незнаемого элемента в массивах  $al$  и  $au$ .

$ia[i+1] - ia[i]$  — значение профиля  $i$ -той строки (столбца) нижнего (верхнего) треугольника.

$ia[1] = ia[2] = 1$ .

*Примечание.* Если матрица симметрична по значениям, то  $al = au$ .

*Пример.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & & & \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & & & & \\ & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & a_{36} & & & & \\ & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & & & \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & a_{58} & a_{59} & \\ & & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & 0 & a_{68} & 0 & \\ & & & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} & 0 & a_{79} & \\ & & & & a_{85} & a_{86} & 0 & a_{88} & 0 & \\ & & & & a_{95} & 0 & a_{97} & 0 & a_{99} & \end{bmatrix}$$

$$di = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66}, a_{77}, a_{88}, a_{99}\}$$

$$ia = \{1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 19\}$$

$$al = \{a_{32}, a_{42}, 0, a_{53}, a_{54}, a_{63}, 0, a_{65}, a_{74}, 0, 0, a_{85}, a_{86}, 0, a_{95}, 0, a_{97}, 0\}$$

$$au = \{a_{23}, a_{24}, 0, a_{35}, a_{45}, a_{36}, 0, a_{56}, a_{47}, 0, 0, a_{58}, a_{68}, 0, a_{59}, 0, a_{79}, 0\}$$

Первый элемент для 6-ой строки:  $al[ia[6]] = al[6] = a_{63}$

Профиль 6-ой строки:  $ia[7] - ia[6] = 9 - 6 = 3$ .

## 7.4 Разреженный формат

Этот формат бывает:

- строчным

- столбцовым
- смешанным: строчно-столбцовым или столбцово-строчным.

# Лекция 10

## 7 апреля

Рассмотрим строчно-столбцовый формат.

Используемые структуры:

1. Вещественный массив  $di$  — диагональные элементы.
2. Вещественные массивы  $al$  (*по строкам*),  $au$  (*по столбцам*), хранящие внедиагональные элементы нижнего или верхнего треугольника соответственно.
3. Целочисленный массив  $ja$  — номера столбцов (*строк*) хранимых внедиагональных элементов нижнего или верхнего треугольника матрицы.  $ja[j]$  — номер столбца для  $al[j]$ , номер строки для  $au[j]$ .
4. Целочисленный массив  $ia$ , где  $ia[k]$  равен индексу (*в нумерации с 1*), с которого начинаются элементы  $k$ -той строки или столбца в массивах  $al$ ,  $au$ ,  $ja$ .

Размерность  $ja$ ,  $al$ ,  $au$  есть  $ia[n+1]-1$ .

$ia[i] - ia[i]$  — количество хранимых внедиагональных элементов  $i$ -той строки (*столбца*) нижнего (*верхнего*) треугольника.

$$ia[1] = ia[2] = 1.$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & & & & \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & & & & & \\ & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & a_{36} & & & & & \\ & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & & & & \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & a_{58} & a_{59} & & \\ & & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & 0 & a_{68} & 0 & & \\ & & & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} & 0 & a_{79} & & \\ & & & & a_{85} & a_{86} & 0 & a_{88} & 0 & & \\ & & & & a_{95} & 0 & a_{97} & 0 & a_{99} & & \end{bmatrix}$$

$$di = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66}, a_{77}, a_{88}, a_{99}\}$$

$$ia = \{1, 1, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$$

$$ja = \{2, 2, 3, 4, 3, 5, 4, 5, 6, 5, 7\}$$

$$al = \{a_{32}, a_{42}, a_{53}, a_{54}, a_{63}, a_{65}, a_{74}, a_{85}, a_{86}, a_{95}, a_{97}\}$$

$$au = \{a_{23}, a_{24}, a_{35}, a_{45}, a_{36}, a_{56}, a_{47}, a_{58}, a_{68}, a_{59}, a_{79}\}$$

Для 6-ой строки:  $ia[6] = 5$  — начало 6-ой строки в массивах  $ja$  и  $al$ .  $ia[6 + 1] - ia[6] = 7 - 5 = 2$  — количество элементов в 6-ой строке.

Первый элемент:  $ja[ia[6]] = ja[5] = 3$ , второй элемент:  $ja[ia[6] + 1] = ja[5 + 1] = 5$ .

## 8 Решение СЛАУ. Метод Гаусса.

СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

То же самое, но в матричной форме:

$$Ax = b$$

, где:

- $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  — вещественные числа
- $b = (b_1 \dots b_n)^T$
- $x = (x_1 \dots x_n)^T$

Эффективность способов решения СЛАУ зависит от структуры и свойств матрицы  $A$ , т.е. от размера, обусловленности, симметричности, заполненности и от её профиля.

Рассмотрим прямой ход метода Гаусса. Первый шаг — домножение уравнений на коэффициенты  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}} \dots -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1$$

На  $n - 1$  шаге метода система будет приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Далее производятся обратный ход метода Гаусса:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$\vdots$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)}x_n}{a_{22}^{(1)}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

В общем виде:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left( b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} \cdot x_j \right)$$

Алгоритм:

```

1  for  $k = 1 \dots n - 1$ :
2      for  $i = k + 1 \dots n$ :
3           $t_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
4           $b_i = b_i - t_{ik}b_k$ 

```

```
5      for  $j = k + 1 \dots n$ 
6           $a_{ij} = a_{ij} - t_{ik} \cdot a_{kj}$ 
7   $x_n = b_n / a_{nn}$ 
8  for  $k = n - 1 \dots 1$ 
9       $x_k = \left( b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} \cdot x_j \right) / a_{kk}$ 
```

У этого алгоритма есть проблема — арифметика компьютеров не точна. В частности, если  $a_{kk}$  мало, то при делении можно получить немалую ошибку. Чтобы бороться с этим, есть модификация:

### 8.1 Модификация метода Гаусса (*постолбцовый выбор главного элемента*)

Необходимо найти  $m \geq k$ , где  $k$  — номер рассматриваемого шага, а  $|a_{mk}| = \max_{i \geq k} \{|a_{ik}|\}$ .

- Если  $a_{mk} = 0 (\approx \varepsilon)$ , однозначного решения нет, остановка алгоритма.
- Если  $a_{mk} \neq 0$ , меняем местами  $b_k$  и  $b_m$ ;  $a_{kj}$  и  $a_{mj}$  при  $j = k \dots n$ .

При такой замене порядок  $x_i$  в общем векторе решения не меняются. Есть и другие модификации, которые его меняют. В таких алгоритмах необходимо поддерживать матрицу перестановок неизвестных и умножить ответ на эту матрицу.

# Лекция 11

## 14 апреля

Прямые методы основаны на разложениях матрицы  $L$ , например:

- $LU$ , где  $L$  — нижнетреугольная матрица, а  $U$  — верхнетреугольная матрица.
- $LL^T$  — метод квадратного корня
- $LDL^T$ , где  $L_{ii} = 1$ ,  $D$  — диагональная матрица.

Мы рассмотрим первый.

### 9 $LU$ -метод

$$AX = b$$

$$LUx = b$$

$$y := Ux \tag{10}$$

$$Ly = b \tag{11}$$

Таким образом, решение задачи сводится к трём этапам:

1. По  $A$  получить  $L, U$ .
2. Решить (11) прямым ходом метода Гаусса, тем самым найти  $y$ .
3. Решить (10) обратным ходом метода Гаусса, тем самым найти  $x$ .

Основные временные затраты происходят на первом этапе метода.

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ L_{21} & L_{22} & 0 & \cdots \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \cdots \\ 0 & 1 & U_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

*Пример.* Красным отмечены вычисляемые на данной итерации элементы:

$$\begin{aligned} A_{11} &= L_{11} \\ A_{21} &= L_{21} \\ A_{12} &= L_{11} \cdot U_{12} \\ A_{22} &= L_{21} \cdot U_{12} + L_{22} \\ A_{31} &= L_{31} \\ A_{13} &= L_{11} \cdot U_{13} \\ A_{32} &= L_{31} \cdot U_{12} + L_{32} \\ A_{23} &= L_{21} \cdot U_{13} + L_{22} \cdot U_{23} \\ A_{33} &= L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23} + L_{33} \end{aligned}$$

## 9.1 Алгоритм разложения

$L_{11} = A_{11}$ , для  $i$  от 2 до  $n$ :

$$L_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \cdot U_{kj} \quad j \in \overline{1, i-1}$$

$$U_{ji} = \frac{1}{L_{jj}} \left( A_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} \cdot U_{ki} \right) \quad j \in \overline{1, i-1}$$

$$L_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot U_{ki}$$

$$U_{ii} = 1$$



## 10 Дополнительные рассуждения о точности получаемого численного решения

### 10.1 Близкие к нулю главные элементы

Пример.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Точное решение:  $x = (0, -1, 1)^T$ .

Предположим, что мы решаем эту задачу на ЭВМ с десятичной пятиразрядной арифметикой с плавающей точкой.

Решим обычным методом Гаусса без модификаций.

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -1.0 \cdot 10^3 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$6.001 \cdot 2.5 \cdot 10^3 = 1.5002 \cdot 10^4 \approx 1.5003 \cdot 10^4$$

$$1.5005 \cdot 10^4 \cdot x_3 = 1.5004 \cdot 10^4$$

$$x_3 = \frac{1.5004 \cdot 10^4}{1.5005 \cdot 10^4} = 0.99993$$

$$x_2 = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{-1.0 \cdot 10^{-3}} = -1.5$$

$$x_1 = -0.35$$

Итого ошибка очень крупная, 0.5 для одного из элементов. Ошибка возникла на шаге исключения, т.к. не использовалась модификация метода.

### 10.2 Вектор ошибки и невязка

$$\begin{pmatrix} 0.78 & 0.563 \\ 0.457 & 0.330 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.127 \end{pmatrix}$$

$x^*$

Арифметика трёхразрядная.

Вычисления опущены.

$$x = (1.71, -1.98)^T$$

**Определение. Невязка**  $r = b - Ax$ .

$r = (-0.00206, -0.00107)^T$ , что, казалось бы, хорошо. Но при этом верное решение  $x^* = (1, -1)^T$  на несколько порядков больше отличается от полученного ответа. Таким образом, невязка не всегда показывает точность полученного решения.

Величина ошибки в решении  $\approx$  величина решения  $\times \text{cond}(A) \times \varepsilon_{\text{машины}}$ , где  $\text{cond}(A)$  — число обусловленности<sup>1</sup>  $A$ .

*Пример.* Если  $\text{cond}(A) = 10^5$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$ , то в решении три верных разряда.

### 10.2.1 Векторные нормы

Примеры:

- Евклидова или 2-норма:  $\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$
- 1-норма или Манхеттенское расстояние:  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- max-норма или  $\infty$ -норма:  $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Условия на норму:

- $\|x\| > 0$ , если  $x \neq 0$
- $\|0\| = 0$
- $\|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad \forall c$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Если матрица  $A$  **вырождена**, то решение уравнения  $Ax = b$  может не существовать для одних  $b$  и не быть единственным для других  $b$ . Если же матрица **почти вырождена**, то малые изменения  $A$  и  $b$  вызовут большие изменения в  $x$ .

**Определение.**

$$M = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq M \cdot \|x\|$$

$$m = \min_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \geq m \cdot \|x\|$$

$\frac{M}{m}$  — **число обусловленности матрицы**.

<sup>1</sup> Отношение максимального и минимального собственного числа матрицы.

$$\begin{aligned}Ax &= b \\ A(x + \Delta x) &= b + \Delta b\end{aligned}$$

Посмотрим, как ошибка в  $b$ , обозначенная  $\Delta b$ , влияет на  $\Delta x$  — ошибку в  $x$ .

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \|b\| \leq M \cdot \|x\| \\ \|A\Delta x\| &= \|\Delta b\| \geq m \cdot \|\Delta x\|\end{aligned}$$

Тогда при  $M \neq 0$ :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Свойства числа обусловленности:

1.  $\text{cond}(A) \geq 1, \text{cond}(I) = 1$

Если  $P$  — матрица перестановок, то  $\text{cond}(P) = 1$ .

2.  $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$

3.  $D$  — диагональная матрица, тогда  $\text{cond}(D) = \frac{\max |d_{ii}|}{\min |d_{ii}|}$

Пример.  $D = \text{diag}(0.1), n = 100$

$\det D = 10^{-100}$  — малое число.

При этом  $\text{cond}(A) = \frac{0.1}{0.1} = 1$ .

Таким образом, если рассмотреть определитель как меру вырожденности, то матрица очень близка к вырожденной, а если рассмотреть число обусловленности, то это не так.

# Лекция 12

## 21 апреля

Пример. Опущено.

### 10.2.2 Нормы и анализ ошибок

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Можем выразить другим образом:

$$\|A\| = M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|A\| = \max_j \|a_j\|$$

**Лемма 1** (результат Уилкинсона). Вычисленное решение  $x^*$  удовлетворяет системе  $(A + E)x^* = b$ , где элементы  $E$  имеют уровень ошибок округления.

$$(A + E)x^* = b$$

$$b - Ax^* = Ex^*$$

$$\|b - Ax^*\| = \|Ex^*\| \leq \|E\| \cdot \|x^*\|$$

$$\frac{\|b - Ax^*\|}{\|A\| \cdot \|x^*\|} \leq C \cdot \varepsilon_{\text{машины}}$$

Если  $A$  не вырождена, то:

$$x - x^* = A^{-1}(b - Ax)$$

$$\begin{aligned} \|x - x^*\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|E\| \cdot \|x^*\| \\ \frac{\|x - x^*\|}{\|x^*\|} &\leq C \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \varepsilon_{\text{машины}} \end{aligned}$$

Т.к.  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{m}$ , то:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

И таким образом:

$$\frac{\|x - x^*\|}{\|x^*\|} \leq C \cdot \text{cond}(A) \cdot \varepsilon_{\text{машины}}$$

Можно заметить, что вычисление  $\text{cond}(A)$  требует вычисления обратной матрицы. Это можно несколько упростить, заметив, что если  $a_j$  — столбцы  $A$ ,  $\tilde{a}_j$  — столбцы матрицы  $A^{-1}$ , то:

$$\text{cond}(A) = \max_j \|a_j\| \cdot \max_j \|\tilde{a}_j\|$$

Тем не менее, такое вычисление примерно утраивает время вычисления. Но на практике точное значение  $\text{cond}(A)$  не требуется и используются приближенные оценки.

### 10.2.3 Оценивание числа обусловленности

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} = \max_x \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \max_y \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|}$$

Решим систему  $Az = y$ , тогда

$$\frac{\|z\|}{\|y\|} = \underbrace{\frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|}}_{\text{оценка } \|A^{-1}\|}$$

Но если брать произвольный  $y$ , то оценка может быть неточной. Будем использовать такой  $y$ , что  $A^T y = C$ , где  $C$  — вектор с компонентами  $\pm 1$ .

*Пример. Опущено.*

## 11 Дополнительно о градиентных методах

Релаксационная последовательность задается рекуррентно как  $x^k = x^{k-1} + \alpha_k u^k$ ,  $k \in N$ ,  $u^k \in E_n$ . Условие спуска при этом  $\langle \nabla f(x), u \rangle < 0$ .

Какое брать  $\alpha_k$ ? Такое, чтобы выполнялось следующее:

$$f(x^{k-1}) + \alpha_k u^k \leq (1 - \lambda_k) f(x^{k-1}) + \lambda_k \min_{\alpha \in E} f(x^{k-1} + \alpha u^k) \quad (12)$$

Очевидно, что  $\lambda_k \in [0, 1]$ . Чтобы оценить это соотношение, используются эвристические приёмы. В частности, если

$$f(x^{k-1} + \alpha_k u^k) \leq f(x^{k-1})$$

, то  $\{x_k\}$  будет релаксационной. Несложно заметить, что мы рассмотрели (12) для случая  $\lambda_k = 0$ .

Если  $\lambda_k = 1$ , то для нахождения наилучшего значения  $\alpha_k^*$  необходимо решить задачу одномерной минимизации, что мы делали в лабораторной работе.

Если  $\lambda_k \in (0, 1)$ , то:

$$f(x^{k-1}) - f(x^k) \geq \lambda_k (f(x^{k-1}) - f(x^{k-1} + \alpha_k^* u^k))$$

Это равносильно (12) и из этого можно предположить, что  $\lambda_k$  характеризует наименьшую долю из максимально возможного уменьшения  $f(x)$  вдоль направления  $u^k$ , которое должна обеспечивать релаксационная последовательность  $\{x_k\}$ .

Будем обозначать антиградиент как  $\omega(x) = -\nabla f(x)$

### 11.1 Метод градиентного спуска

$$x^k = x^{k-1} + \beta_k \underbrace{\frac{\omega^k}{|\omega^k|}}_{u_k}$$

$$\beta_k = \underbrace{\alpha}_{\text{const}} |\omega^k|$$

Тогда можно переписать:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k \omega^k$$

Один из главных недостатков градиентного спуска состоит в том, что в окрестности стационарной точки  $\tilde{x}$  шаг может оказаться слишком большим, и тогда метод “проскакивает”  $\tilde{x}$ . Шаг также может быть настолько большим, что произойдёт  $f(x^k) > f(x^{k-1})$  и последовательность перестанет быть релаксационной. Можно уменьшить шаг, но тогда замедлится сходимость релаксационной последовательности. Все эти проблемы сводятся к задаче оценки возможной величины  $\alpha$ , которая обеспечивала бы высокую скорость сходимости без проскакивания стационарной точки.

**Теорема 7.** Пусть  $f(x)$  ограничена снизу и дифференцируема в пространстве  $E_n$ , а её градиент удовлетворяет условию Липшица, т.е.:

$$\forall x, y \in E_n \quad |\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq L|x - y|$$

, где  $L > 0 - \text{const}$ .

Тогда  $\{x_k\} : x^k = x^{k-1} + \alpha \omega^k$  с  $\alpha \in (0, \frac{2}{L})$  является релаксационной. При этом справедлива оценка:

$$f(x^k) \leq f(x^{k-1}) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right) |\nabla f(x^{k-1})|^2$$

и  $|\nabla f(x^k)| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ .

Мы уже рассматривали схожую теорему для квадратичных функций. В том случае  $L = \max \lambda_i$ , где  $\{\lambda_i\}$  — собственные значения. Эти теоремы согласованы.

Если  $f(x)$  удовлетворяет теореме 7, то при  $\lambda = \frac{1}{L}$   $\{x_k\}$  — релаксационная последовательность и не происходит “проскакивание” стационарной точки.

$$\|\omega^k\| = \|\nabla f(x^{k-1})\| \leq L \cdot |x^{k-1} - \tilde{x}|$$

Следовательно, при  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$|x^k - x^{k-1}| = \alpha |\omega^k| \leq |x^{k-1} - \tilde{x}|$$

Пусть  $f(x)$  ограничена снизу, а  $\{x^k\}$  такое, что  $\exists \gamma_0 > 0$ :

$$\begin{aligned} f(x^{k-1}) - f(x^k) &\geq \gamma_0 |\omega^k|^2 \\ f(x^0) - f(x^m) &\geq \gamma_0 \sum_{k=1}^m |\nabla f(x^{k-1})|^2 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\nabla f(x^{k-1})|^2 - \text{знакоположительный сходящийся ряд}$$

$\nabla f(x^k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Таким образом, при построении  $\{x_k\}$  если удастся выполнить условие (13), то последовательность градиентов  $\rightarrow 0$ , а следовательно  $\{x_k\}$  будет сходиться к стационарной точке.

Найти значение константы  $L$  в реальных функция бывает трудно, если не невозможно. Тогда градиентный метод не даст гарантий, что он сойдётся. В таком случае модифицируем рекуррентное соотношение:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k \omega^k$$

, т.е.  $\alpha$  меняется на каждом шаге. Есть разные методы выбора  $\alpha$ , например:

$$\varphi_k(\alpha) := f(x^{k-1} + \alpha \omega^k)$$

$$\varphi'_k(0) = \langle \nabla f(x), \omega^k \rangle = -|\omega^k|^2$$

В окрестности  $\alpha = 0$   $\varphi'_k$  убывает до  $\alpha_k^*$ .

Если рассматривать  $\alpha_k = \alpha_k^*$ , то такой метод называется **исчерпывающий спуск**. При этом если  $f(x)$  удовлетворяет теореме 7, то  $\{x_k\}$  по исчерпывающему спуску удовлетворяет условиям (13).

$$\begin{aligned}\varphi'_k(\alpha) &= \langle \nabla f(x^{k-1} + \alpha \omega^k), \omega^k \rangle \\ \langle \omega^{k+1}, \omega^k \rangle &= \langle -\nabla f(x^k), \omega^k \rangle = -\varphi'_k(\alpha_k^*) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\omega^k||^2 &= \langle \omega^k, \omega^k - \omega^{k+1} \rangle \\ &\leq |\omega^k| \cdot |\omega^k - \omega^{k+1}| \\ &= |\omega^k| \cdot |\nabla f(x^{k-1}) - \nabla f(x^k)| \\ &\leq L \cdot |\omega^k| \cdot |x^{k-1} - x^k| \\ &= L \cdot \alpha_k^* \cdot |\omega^k|^2\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}\alpha_k^* &\geq \frac{1}{L} \\ f(x^{k-1}) - f(x^k) &\geq f(x^{k-1}) - f(\tilde{x}^k) \geq \frac{1}{2L} |\omega^k|^2 \\ \tilde{x}^k &= x^{k-1} + \underbrace{\frac{1}{L}}_{\alpha} \omega^k\end{aligned}$$



# Лекция 13

## 28 апреля

### 12 Минимизация квадратичной функции

Квадратичные функции имеют вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + C$$

, где  $A$  — симметричная матрица, также являющейся матрицей Гессе  $H$  для  $f(x)$ . При этом  $\nabla f(x) = Ax + b$ .

Если матрица  $A$  невырождена, то в силу необходимого условия экстремума  $f(x)$  имеет единственную стационарную точку  $x^* = -A^{-1}b$ , что получается при  $\nabla f(x) = 0$

С другой стороны,  $x^*$  является точкой наименьшего значения  $f(x)$  тогда и только тогда, когда квадратичная функция  $\langle Ax, x \rangle$  положительно определена.

Не умаляя общности<sup>1</sup> допустим, что  $x^* = \vec{0}$ , т.е.  $b = 0$ . Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle, \quad x \in E_n \tag{14}$$

Т.к. мы рассматриваем положительно определенную  $A$ , то квадратичная функция  $\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$  неотрицательна в  $E_n$  и достигает наименьшего значения 0 в единственной точке  $x^* = 0$ .

#### 12.1 Метод градиентного спуска

Для  $f(x)$  из (14)  $\nabla f(x) = Ax$  в точке  $x$ . Пусть начальное приближение  $x^0 \neq 0$ , тогда антиградиент  $w^1 = -\nabla f(x^0) = -Ax^0$ , и в общем виде:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k w^k, \quad k \in N$$

---

<sup>1</sup> Сдвинув систему координат, если это требуется.

$$x^1 = x^0 + \alpha_1 w^1 = x^0 - \alpha_1 A x^0 = (I^2 - \alpha_1 A) x^0 \quad (15)$$

Из (15) следует, что точку минимума квадратичной функции можно достичь за одну итерацию, если  $x^0$  — собственный вектор матрицы  $A$ . Кроме того, т.к.  $Ax^0 = \lambda_j x^0$ , где  $x^0$  — собственный вектор  $A$ , а  $\lambda_j$  — соответствующее собственное значение,  $(A - \lambda_j I)x^0 = 0$ . Тогда если  $\alpha_1 = \frac{1}{\lambda_j}$ , то:

$$x^1 = \left( I - \frac{1}{\lambda_j} A \right) x^0 = -\frac{1}{\lambda_j} (A - \lambda_j I) x^0 = 0$$

, т.е.  $x^1 = x^* = 0$

Геометрическая интерпретация: в двумерном случае  $f(x)$  есть эллиптический параболоид с центром в начале координат. Метод градиентного спуска приведет в точку  $(0, 0)$  за одну итерацию, если начальная точка выбрана на одной из осей эллипсов, т.е. радиус-вектор точки является собственным вектором  $A$ .

В частности, если  $A = \lambda I$ , то каждый ненулевой вектор является собственным. Таким образом, для такой матрицы минимум достигается за одну итерацию при любом выборе  $x^0$ .

Квадратичную форму вида (14) можно привести к так называемому каноническому виду, т.е. к виду с единичной матрицей. Рассмотрим, как это сделать.

Применим ортогональное преобразование к форме  $f$  и получим  $f_1$ , тогда:

$$f_1(\xi) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j^2$$

, где  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_j$  — положительные собственные значения  $A$ ,  $n$  — количество оных.

Изменим масштаб переменных заменой

$$\eta_j = \sqrt{\lambda_j} \xi_j$$

, тогда

$$f_2(\eta) = \sum_{j=1}^n \eta_j^2$$

После этих замен минимизация функции выполняется за одну итерацию при любом выборе  $x^0$  по выкладкам выше.

---

<sup>2</sup> Единичная матрица

Казалось бы, этот подход очень помогает в минимизации функций. Однако для данных преобразований требуется решить сложную задачу вычисления собственных значений матрицы. В силу этого обычно используются более совершенные методы. Однако этот метод быстро сходится даже для функций овражного характера.

## 12.2 Метод градиентного спуска с константным шагом

Пусть  $\alpha_k = \alpha = \text{const}$  на всех итерациях.

На  $k$ -той итерации:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha w^k = (I - \alpha A)x^{k-1} \quad (16)$$

Оценивать сходимость релаксационной последовательности  $\{x^k\}$  можно с помощью **теоремы о неподвижной точке**. Согласно данной теореме  $\{x^k\}$  сходится к неподвижной точке  $x^*$  отображения  $f(x)$ , если данное отображение является **сжимающим**, то есть для него выполняется условие Липшица:

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$$

, где  $q = \text{const} < 1$

В (16)  $I - \alpha A$  есть сжимающее отображение, если норма этого отображения  $< 1$ . Для симметричных матриц норма равна спектральной норме, которая в свою очередь равна  $\max_i |\lambda_i|$ , где  $\lambda_i$  — собственные числа данной матрицы.

Таким образом, для сходимости релаксационной последовательности достаточно выполнения

$$q(\alpha) = \|I - \alpha A\| < 1$$

Упорядочим собственные значения матрицы  $A$  как:

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$$

Матрица  $I - \alpha A$  имеет собственные значения вида  $1 - \alpha \lambda_j$ , а следовательно:

$$1 - \alpha \lambda_n < 1 - \alpha \lambda_{n-1} < \dots < 1 - \alpha \lambda_1 < 1$$

и условие  $\|I - \alpha A\| < 1$  равносильно условию:

$$\begin{cases} 1 - \alpha \lambda_n > -1 \\ 1 - \alpha \lambda_n < 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$$

Кроме того, из теоремы о неподвижной точки следует, что для  $\{x^k\}$  выполнено  $|x^k - x^*| \leq q^k |x^0 - x^*|$ . Тогда для ускорения сходимости релаксационной последовательности  $q$  должно быть как можно меньше.

$q(\alpha)$  минимально, если  $1 - \alpha\lambda_n$  и  $1 - \alpha\lambda_1$  совпадают по абсолютны по знаку:

$$-(1 - \alpha\lambda_1) = 1 - \alpha\lambda_n$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \leq \frac{2}{\lambda_n}$$

При  $\alpha = \alpha^*$ :

$$q^* = q(\alpha^*) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} = \frac{\text{cond}A - 1}{\text{cond}A + 1}$$

Если  $\text{cond}A \gg 1$ , функция имеет овражную структуру и метод сходится медленно.

Если  $A = I$ , то все собственные значения 1,  $\text{cond}A = 1$  и  $q^* = 0$ , а следовательно минимум достигается за одну итерацию  $\forall x^0$ .

Если  $\alpha \notin \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$ ,  $\{x^k\}$  не релаксационная, а метод расходится или заикливается.

### 12.3 Минимизация с использованием исчерпывающего спуска

Этот метод нарушает условие  $\alpha \in \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$ .

Исчерпывающий спуск на  $k$ -той итерации ищет стационарную точку  $\varphi_k(\alpha) = f(x^{k-1} + \alpha w^k)$ .

$$\varphi_k(\alpha) = \frac{1}{2} \langle A(x^{k-1} + \alpha w^k), x^{k-1} + \alpha w^k \rangle = f(x^{k-1}) + \alpha \langle Ax^{k-1}, w^k \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle Aw^k, w^k \rangle$$

Эта функция имеет положительный коэффициент при старшей степени, следовательно она имеет единственную стационарную точку

$$\alpha_k = -\frac{\langle Ax^{k-1}, w^k \rangle}{\langle Aw^k, w^k \rangle} = \frac{|w^k|^2}{\langle Aw^k, w^k \rangle} \quad (17)$$

Из (17):

- $\alpha_k = \frac{1}{\lambda_n}$ , если  $x^{k-1}$  — собственный вектор  $A$  с собственным значением  $\lambda_n$
- $\alpha_k = \frac{1}{\lambda_1}$ , если  $x^{k-1}$  — собственный вектор  $A$  с собственным значением  $\lambda_1$

Если  $\text{cond}A = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} > 2$ , то  $\alpha_k \in \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$  нарушается при  $\alpha_k = \frac{1}{\lambda_1}$ .

Для квадратичной функции метод наискорейшего спуска эквивалентен градиентному методу с исчерпывающим спуском, т.к. квадратичная функция является строго выпуклой.

## 12.4 Метод сопряженных направлений

Правило перехода:

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k, \quad k \in N$$

, где  $\alpha_k$  — шаг,  $p^k$  — вектор спуска.

Если  $A$  — симметричная положительная определенная матрица, то  $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$  — скалярное произведение в  $E_n$ . Тогда задача приведения квадратичной формы к каноническому виду сводится к выбору ортонормированного базиса в евклидовом пространстве со скалярным произведением  $\langle x, y \rangle_A$

Плюсы подхода:

- Позволяет упростить вид квадратичной функции.
- Не требует нахождения собственных значений, позволяет использовать ортогонализацию.

**Определение.** Если  $p^1 \neq 0, p^2 \neq 0, \langle Ap^1, p^2 \rangle = 0$ , то такие вектора называются **сопряженными** относительно положительно определенной матрицы  $A$  или  **$A$ -ортогональными**. Направления, определенные  $p^1$  и  $p^2$ , также называются сопряженными.

Рассмотрим  $A$ -ортогональный базис  $p^j$ . В этом базисе  $f$  имеет канонический вид:

$$f_1(\xi) = \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2$$

, где  $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ ,  $\lambda_j = \frac{1}{2} \|p^j\|_A^2$

Функция  $f_1(\xi)$  — сепарабельна<sup>3</sup>, а следовательно:

- Исчерпывающий спуск в направлении  $p^j$  минимизирует одно из слагаемых такой функции.
- Последовательность из  $n$  исчерпывающих спусков в направлениях  $p^1 \dots p^n$  минимизирует все слагаемые, следовательно минимизирует искомую функцию.

Рассмотрим первый спуск.

$$x^1 = x^0 - \xi_1^1 p^1$$

, где  $\xi_1^0$  — первая координата  $x^0$  в ортогональном базисе  $p^j$ :

$$\xi_1^0 = \frac{\langle Ax^0, p^1 \rangle}{\langle Ap^1, p^1 \rangle}$$

Можем заметить, что рассмотренная формула и (16) отличаются только в знаке.

---

<sup>3</sup> Представима в виде  $\sum_{i=1}^n f_i(\xi_i)$

**Теорема 8.** Точка минимума квадратичной функции  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$  с положительно определенной матрицей  $A$  достигается не более чем за  $n$  итераций спуска, если направления спуска задаются векторами  $p^k \in E_n$ , сопряженными относительно матрицы  $A$ , а параметры  $\alpha_k$ , определяющие шаг спуска в (16), вычисляются по формуле исчерпывающего спуска

$$\alpha_k = -\frac{\langle Ax^{k-1}, p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

*Примечание.* Если  $p^j$  и  $-p^j$  в точке  $x^{j-1}$  не определяют направление спуска, то  $\langle Ax^{j-1}, p^j \rangle = 0$ , следовательно  $\alpha_j = 0$  и спуск в направлении  $p^j$  не производится, число итераций  $< n$ .

Координаты  $x^0$  в  $A$ -ортогональном базисе можно выразить через скалярное произведение

$$x^0 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle Ax^0, p^i \rangle}{\langle Ap^i, p^i \rangle} p^i \quad (18)$$

Если  $x^*$  — точка минимума квадратичной формы с положительно определенной матрицей  $A$ , то:

$$\begin{aligned} x^0 - x^* &= \sum_{i=1}^n \frac{\langle A(x^0 - x^*), p^i \rangle}{\langle Ap^i, p^i \rangle} p^i = \sum_{i=1}^n \frac{\nabla f(x^0), p^i}{\langle Ap^i, p^i \rangle} p^i \\ x^* &= x^0 - \sum_{i=1}^n \frac{\nabla f(x^0), p^i}{\langle Ap^i, p^i \rangle} p^i \end{aligned} \quad (19)$$

$$\langle Ax^0, p^i \rangle p^i = p^i \langle p^i, Ax^0 \rangle = p^i (p^i)^\top Ax^0$$

И тогда (18) можно записать как:

$$x^0 = \sum_{i=1}^n \frac{p^i (p^i)^\top}{\langle Ap^i, p^i \rangle} Ax^0$$

Т.к. это верно  $\forall x^0$ , то рассматриваемый оператор тождественный:

$$\sum_{i=1}^n \frac{p^i (p^i)^\top}{\langle Ap^i, p^i \rangle} A = \mathbf{1}$$

Следовательно:

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{p^i (p^i)^\top}{\langle Ap^i, p^i \rangle}$$

Таким образом, по  $p^i$  можно построить  $A^{-1}$  и (19) можно переписать как:

$$x^* = x^0 - \sum_{i=1}^n \frac{\nabla f(x^0), p^i}{\langle Ap^i, p^i \rangle} p^i$$

$$\begin{aligned}
&= x^0 - \sum_{i=1}^n \frac{p^i (p^i)^\top}{\langle Ap^i, p^i \rangle} \nabla f(x^0) \\
&= x^0 - A^{-1} \nabla f(x^0)
\end{aligned}$$

В итоге, выполнение всех  $n$  итераций исчерпывающего спуска есть один спуск вида

$$x^* = x^0 - A^{-1} \nabla f(x^0)$$

Основа метода сопряженных направлений — использование векторов  $p^j$ .

Различие в способах построения сопряженных векторов порождает несколько вариантов метода сопряженных направлений.

Теперь рассмотрим минимизацию функции

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$$

Мы можем ортогонализировать любой базис, но более эффективно исходить из системы антиградиентов, ортогонализуя базис в процессе спуска.

Выберем приближение  $x^0 \in E_n$ . Первая итерация:

$$\begin{aligned}
w^1 &= -\nabla f(x^0) = -Ax^0 - b \\
p^1 &:= w^1
\end{aligned}$$

Если  $|p^1| \neq 0$ , то  $p^1$  — направление спуска, иначе  $x^0 = x^*$  и процесс окончен.

Производим исчерпывающий спуск в направлении  $p^1$  по формуле (17):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{|w^1|^2}{\langle Aw^1, w^1 \rangle} = \frac{|p^1|^2}{\langle Ap^1, p^1 \rangle} \\
x^1 &= x^0 + \alpha_1 p^1
\end{aligned}$$

Вторая итерация:

$$w^2 = -Ax^1 - b$$

Если  $|w^2| = 0$ , то  $x^0 = x^*$  и процесс окончен, иначе проведем ортогонализацию  $p^1$  и  $w^2$  относительно скалярного произведения  $\langle x, y \rangle_A$ :

$$p^2 = w^2 - \frac{\langle Ap^1, w^2 \rangle}{\langle Ap^1, p^1 \rangle} p^1$$

$p^2$  — направление спуска из  $x^1$ :

$$\langle \nabla f(x^1), p^2 \rangle = -\langle w^2, \beta_1 p^1 + w^2 \rangle = -\langle w^2, w^2 \rangle = -|w^2|^2 < 0$$

, где  $\beta_1 = -\frac{\langle Ap^1, w^2 \rangle}{\langle Ap^1, p^1 \rangle}$

Дальнейшие итерации аналогичны.

Уточнения:

1. Каждый  $w^k$  ортогонален не только предпоследнему направлению спуска  $p^{k-1}$ , но и всем  $p^i, i < k-1$

**Доказательство опущено.**

2. Антиградиент  $w^k$  сопряжен с  $\forall p^i$ :

$$\alpha_i \langle Ap^i, w^k \rangle = \langle w^i - w^{i+1}, w^k \rangle = \langle w^i, w^k \rangle - \langle w^{i+1}, w^k \rangle = 0$$

Из этих уточнений следует, что процесс ортогонализации можно записать в виде:

$$p^k = w^k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle Ap^i, w^k \rangle}{\langle Ap^i, p^i \rangle} p^i$$

Следовательно:

$$p^k = w^k - \frac{\langle Ap^{k-1}, w^k \rangle}{\langle Ap^{k-1}, p^{k-1} \rangle} p^{k-1}$$

Это главный выигрыш в использовании системы антиградиентов.

Общая схема метода:

- $k = 1$ :

Выбираем  $x^0, w^1 = -Ax^0 - b, p^1 = w^1, \alpha_1 = \frac{|p^1|^2}{\langle Ap^1, p^1 \rangle}, x^1 = x^0 + \alpha_1 p^1$

- $k > 1$ :

$$\begin{cases} w^k = -Ax^{k-1} - b \\ p^k = w^k - \frac{\langle Ap^{k-1}, w^k \rangle}{\langle Ap^{k-1}, p^{k-1} \rangle} p^{k-1} \\ x^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k \end{cases}$$

$\alpha_k$  определяется из условия исчерпывающего спуска, например:

$$\alpha_k = \frac{\langle w^k, p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}$$

Метод сопряженных направлений также можно использовать для неквадратичных функций, если заменить  $A$  на матрицу Гессе.

**Не дописано**