1 Линейный оператор

1.1 Основные определения

$\lhd \varphi : X \to Y$, X, Y — ЛП, $\dim X = n, \dim Y = m$

Определение. Отображение φ называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

Определение. Отображение φ, обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОп)

Пример.
- $\Theta : \Theta x = 0_Y$ — нулевой оператор
- $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$ — единичный *(тождественный)* оператор
- $X = L_1 \dot{+} L_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \ \ \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

  Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} : X \to L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} x = x_2$$

- $X = C^1[-1, 1]$ — первая производная $\exists$ и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(t) K(x, t) dt$$

  $K(x, t)$ — интегральное ядро, например $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис X, $\{h_k\}_{k=1}^m$ — базис Y, $\varphi(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_j^k h_k$

Определение. Набор коэффициентов $||a_j^k||$ образует матрицу $m \times n$, которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов $\{e_j\}$ и $\{h_k\}$

- $\Theta \to A_\Theta = 0_{m \times n}$
- $\mathcal{I} \to A_\mathcal{I} = E$

Теорема 1. Задание ЛОп φ эквивалентно заданию его матрицы в известной паре базисов пространств X и Y

Доказательство. “$\Rightarrow$” очевидно

“$\Leftarrow$” $]A$ – матрица ЛОп $\varphi \Rightarrow \lhd x \in X, x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j$

$$\lhd \varphi(x) = \varphi(\sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \xi^j a_j^k h_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi^j a_j^k \right) h_k$$

□

$\lhd \varphi, \psi : X \to Y$ – ЛОп

$\chi = \varphi + \psi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$\chi = \alpha\varphi$, если $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

Примечание.

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

Примечание. $]K_n^m$ – множество матриц $m \times n$

K_n^m – линейное пространство

$\dim K_n^m = m \cdot n \Rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \simeq K_n^m$

1.2 Алгебра операторов и матриц

$\lhd \varphi : X \to Y \quad \psi : Y \to Z$

X, Y, Z – ЛП: $\dim X = n, \dim Y = m, \dim Z = k$

$\lhd \sigma : X \to Z : \forall x \quad \sigma(x) = \psi(\varphi x)$

Определение. Отображение σ называется **произведением** *(композицией)* ψ и φ

Лемма 1. *σ – ЛОп*

Доказательство. $\lhd \sigma(x + y) = \psi(\varphi(x + y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi\varphi x + \psi\varphi y = \sigma x + \sigma y$ □

$]\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис X, $\{h_j\}_{j=1}^m$ – базис Y, $\{g_l\}_{l=1}^k$ – базис Z

$\varphi \to A = ||a_i^j|| \quad \psi \to B = ||b_j^l|| \quad \sigma \to C = ||c_i^l||$

Теорема 2. $\sigma = \psi\varphi \Leftrightarrow C = BA$

Доказательство. $\sigma(e_i) = \psi(\varphi(e_i)) = \psi(\sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j h_j) =, \sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j \psi(h_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j \sum\limits_{l=1}^{k} b_j^l g_l = \sum\limits_{l=1}^{k} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j b_j^l \right) g_l$

$c_i^l = \sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j b_j^l \Rightarrow C = BA$ □

$\lessdot \varphi, \psi : X \to X \Rightarrow \sigma = \psi\varphi : X \to X$

Свойства композиции:

1. $(\varphi + \psi)\sigma = \varphi\sigma + \psi\sigma$

   Доказательство. $(\varphi + \psi)\sigma x = (\varphi + \psi)(\sigma x) = \varphi\sigma x + \psi\sigma x$ □

2. $\varphi(\psi + \sigma) = \varphi\psi + \varphi\sigma$

   Примечание. $\varphi\psi \neq \psi\varphi$

3. $\varphi(\alpha\psi) = (\alpha\varphi)\psi = \alpha\varphi\psi$

4. $\varphi(\psi\sigma) = (\varphi\psi)\sigma = \psi\varphi\sigma$

Таким образом, ЛОп — алгебра, т.к. это мультипликативный моноид и аддитивная полугруппа.

Определение. Множество, наделенное согласованными структурами линейного пространства и мультипликативного моноида, называется алгеброй.

Теорема 3. $\mathcal{L}(X, X) = X \times X$ — алгебра.

Доказательство. См. выше □

$]A$ — алгебра

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис A

$$x, y \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k$$

$$\lessdot x \cdot y = \sum_{j,k=1}^n \xi^j \eta^k (e_j \cdot e_k) = \sum_{j,k=1}^n \xi^j \eta^k \sum_{l=1}^n m_{jk}^l e_l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n m_{jk}^l \xi^j \eta^k \right) e_l$$

Определение. Набор m_{jk}^l называется структуной константой алгебры A.

Пример. $\lessdot\mathbb{C} \quad \{1, i\}$ — базис $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} m_{jk}^l & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ i & i & -1 \end{bmatrix} \text{ — таблица Кэли}$$

Пример. $\mathbb{R}^4 \quad \{1\ i\ j\ k\}$

$$\begin{bmatrix} & 1 & i & j & k \\ 1 & 1 & i & j & k \\ i & i & -1 & k & -j \\ j & j & -k & -1 & i \\ k & k & j & -i & -1 \end{bmatrix}$$

$]A_1, A_2$ — алгебры

Определение. A_1 и A_2 называются **изоморфными**, если существует биекция, сохраняющая их алгебраическую структуру:

$$\forall x_1, x_2 \in A_1 \quad x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2 \Rightarrow (x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2) \quad \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1 \quad x_1 x_2 \leftrightarrow y_1 y_2$$