Теория делимости

Будем рассматривать $\mathbb{Z}$.

Определение. $q \in \mathbb{Z}$ **делит** $n \in \mathbb{Z}$, если $\exists t \in \mathbb{Z} : n = qt$

Обозначение. $q \mid n, n \vdots q$.

Пример. $m^5 - m \vdots 5$

Решение. **Случай 1:** $m = 5k$
Тривиально.

Случай 2: $m = 5k + 1$

$$\begin{aligned}(5k+1)^5 - (5k+1) &= (5k+1)((5k+1)^2-1)((5k+1)^2+1) \\ &= (5k+1)(5k+1-1)(5k+1+1)((5k+1)^2+1) \vdots 5\end{aligned}$$

Случай 3: $m = 5k + 2$

$$\begin{aligned}(5k+2)^5 - (5k+2) &= (5k+2)(5k+2-1)(5k+3)((5k+2)^2+1) \\ &= \ldots (25k + 20k + 4 + 1) \vdots 5\end{aligned}$$

Остальные случаи опущены. □

Определение. $n, m \in Z, d : n \vdots d, m \vdots d$

d называется **общим делителем** n, m.

Определение. n, m **взаимно простые**, если:

$$n \vdots d, m \vdots d \Rightarrow d = \pm 1$$

Теорема 1. $n \vdots ab \Leftrightarrow n \vdots a, n \vdots b$ и a, b взаимно простые.

Упражнение.

$$m(m+1)(2m+1) \vdots 6$$

Решение.

$$m(m+1) \vdots 2$$

Докажем $m(m+1)(2m+1) \vdots 3$

Случай 1: $m = 3k$
Тривиально.

Случай 2: $m = 3k+1$
$2m+1 = 6k+3 \vdots 3$

Случай 3: $m = 3k+2$
Тривиально.

□

Упражнение. $\forall n \ \exists k : n^2 + (n+1)^2 = 4k+1$

Решение.

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 &= 4k+1 \\ 2n^2 + 2n + 1 &= 4k+1 \\ 2n^2 + 2n &= 4k \\ n^2 + n &= 2k \\ \underbrace{n(n+1)}_{\vdots 2} &= 2k \end{aligned}$$

□

Упражнение.

$$n^3(n^2+3) \vdots 4$$

Решение. Для чётных n $n^3 \vdots 4$. Для $n = 2k+1$ $(2k+1)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 \vdots 4$. □

Определение. $a, b \in \mathbb{Z}$ **сравнимы** по модулю n, если $a - b \vdots n$.

Обозначение. $a \equiv b \pmod n$

Пример. $4 \equiv 1 \pmod 3, 8 \equiv 2 \pmod 3, 151 \equiv 11 \pmod{10}$

$$\left.\begin{array}{l} a - c \,\vdots\, n \\ b - d \,\vdots\, n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = nk + c \\ b = nj + d \end{cases}$$

$$\lessdot ab = \underbrace{n^2kj + nkd + njc}_{\vdots n} + cd$$

1. $a \equiv c \pmod n, b \equiv d \pmod n \Rightarrow a + b \equiv c + d \pmod n, ab \equiv cd \pmod n$

Упражнение. $a^7 - a + 56 \,\vdots\, 7$

Решение. **Случай 1:** $a \equiv 0$
$0 + 0 + 56 \equiv 0$

Случай 2: $a \equiv 1$
$1 - 1 + 56 \equiv 0$

Случай 3: $a \equiv 2$
$128 - 2 + 56 \equiv 70 + 56 \equiv 0$

Остальные случаи опущены. □

Упражнение.

$$m^2 + n^2 \,\vdots\, 7 \Rightarrow n \,\vdots\, 7, m \,\vdots\, 7$$

Решение.

$m \equiv$	$m^2 \equiv$
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

□

Определение. $\{a_1 \dots a_n\}$ называется **полной системой вычетов** $\mod n$, если $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists j : a \equiv a_j \mod n$

Теорема 2.

- $\{a_1 \ldots a_n\}$ — полная система вычетов $\mod n$
- k взаимно просто с n

Тогда $\{ka_1 \ldots ka_n\}$ — полная система вычетов $\mod n$.