Домашнее задание №4: «просто-типизированное лямбда исчисление»

1. Сформулируйте аксиомы для просто типизированного исчисления по Чёрчу. *Указание:* аксиомы должны быть согласованы с типами аргументов лямбда-абстракций.

   Решение.

   (a) $\dfrac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$

   (b) $\dfrac{\Gamma \vdash A : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A\,B : \tau}$

   (c) $\dfrac{\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^\tau . A : \tau \to \sigma}$

   □

2. Рассмотрим типизацию по Чёрчу. Определим стирающее преобразование $|\cdot| : \Lambda \to \Lambda_ч$:

$$|A| = \begin{cases} \alpha, & A = \alpha \\ |P||Q|, & A = PQ \\ \lambda x.|P|, & A = \lambda x^\tau.P \end{cases}$$

   Верно ли следующее: если $P \to_\beta Q$ и $|P'| = P$, $|Q'| = Q$, то $P' \to_\beta Q'$.

   Решение. Кажется, преобразование $|\cdot| : \Lambda_ч \to \Lambda_к$.

   Нет. Пусть $Q' = \lambda x^\tau.x, P' = \lambda x^\sigma.(\lambda x^\sigma.x)\ x$. $|Q'| \equiv \lambda x.x, |P'| \equiv \lambda x.(\lambda x.x)\ x$, тогда $|P'| \to_\beta \lambda x.x \equiv |Q'|$. Но $P' \not\to_\beta Q'$, т.к. единственный возможный шаг это $P' \to_\beta \lambda x^\sigma.x \neq_\alpha \lambda x^\tau.x$

   Иначе переберём как было сделано $P \to_\beta Q$:

   (a) $P \equiv A\ B, Q = C\ D$ и либо $A \to_\beta C$ и $B =_\alpha D$ либо $A =_\alpha C$ и $B \to_\beta D$. Тогда индукция даёт $P' \equiv A'\ B'$

   □

3. Покажите, что если $A =_\alpha B$ и $\Gamma \vdash A : \tau$, то $\Gamma \vdash B : \tau$ (или, иными словами, доказательство не зависит от выбора пред-лямбда-терма).

   Решение.

   (a) $A \equiv x, B \equiv x$. Тогда искомое очевидно.

   (b) $A \equiv P\ Q, B \equiv R\ S, P =_\alpha R, Q =_\alpha S$ — индукция:

$\Gamma \vdash P\ Q : \tau$, тогда $\Gamma \vdash P : \sigma \to \tau, \Gamma \vdash Q : \sigma$. По индукционному предположению будет $\Gamma \vdash R : \sigma \to \tau, \Gamma \vdash S : \sigma$ и следовательно по второму правилу вывода искомое верно.

(c) $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda y.Q$ и существует t — новая переменная, такая что $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$ — опять индукция:

$\Gamma \vdash \lambda x.P : \tau \to \sigma$, тогда $\Gamma, x : \tau \vdash P : \sigma$, но тогда и $\Gamma, t : \tau \vdash P[x := t] : \sigma$, т.к. это просто переименование и следовательно $\Gamma, t : \tau \vdash Q[y := t] : \sigma$ по индукционному предположению. Опять же $\Gamma, y : \tau \vdash Q : \sigma$ и тогда по правилу вывода $\Gamma \vdash \lambda y.Q : \tau \to \sigma$.

$\square$