

1 Определения

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

1.3 n -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$

- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \leq k \leq r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

□

2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{(\alpha + 1)!} (x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = f(a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-a|^{r+1})}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. **Отсутствует**

□

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \mapsto \|A\|$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:

- (a) $\|A\| \geq 0$
- (b) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
- (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
- (d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

$$1. \|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

a, b, c — очевидно.

$$d: |(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$$

По замечанию 3 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. |BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

□

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $\|A\|$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.

2. $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 \quad |x_1 - x_0| < \delta$$

□