Лемма 1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ *— параметризация многообразия* $U(p) \cap M$*, где* $p \in M$*,* M *— гладкое* k*-мерное многообразие* $\Rightarrow U(p) \cap M$ *— простое многообразие*

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *есть* k*-мерное линейное подпространство в* $\mathbb{R}^m$*. Оно не зависит от* Φ*.*

Доказательство. $\mathrm{rg}\Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации $\Rightarrow$ искомое очевидно. Если взять другую параметризацию Φ_1, то

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi_1'\Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор $\Rightarrow$ образ Φ' = образ Φ_1' $\square$

Определение. k-мерное пространство из леммы — касательное пространство к M в точке p, обозначается T_pM.

Пример. M — окружность в $\mathbb{R}^2$, задается параметризацией $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t^0 := \frac{\pi}{4}$

$$\Phi'(t^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда $h \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$

Пример. Афинное подпространство $\{p + v, v \in T_pM\}$ — называется афинным касательным подпространством.

Примечание.

1. $v \in T_pM$. Тогда $\exists$ путь $\gamma_V : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, такой что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$
2. Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M, \gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$
3. $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, y = f(x)$ — поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}$, задается точками (x, y).

   Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a, b) задается уравнением

   $$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

4. $\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$

   $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

   $\Phi(a) = 0$

   Уравнение касательной к плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

   По определению дифференцируемости Φ в точке a:

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + \cancel{O()}$$

   ???

Доказательство. 1. $h := (\Phi'(t_0))^{-1}(v)$

$$\tilde{\gamma}_v(s) := t_0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$
$$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$$
$$\gamma'_v(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0))\tilde{\gamma}_v(0)' = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0))u = v$$

2.
$$\gamma(s) = \Phi\Psi L\gamma(\delta)$$
$$\gamma' = \Phi'\Psi'L'\gamma'(\delta) \in T_{???}M \text{ при } s = 0$$

3. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$

   $\Phi(x) = (x, f(x))$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

   Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит образу Φ'?

$$\Phi'\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix} = ???$$

□

Примечание. $y(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$

1 Относительный экстремум

Пример. Найти наибольшее/наименьшее значение выражения $f(x, y) = x+y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Рассмотрим линии уровня, т.е. $f(x, y) = C$:

Не дописано