

# 1 Представление информации

Направления развития:

1. Сжатие
2. Избыточное кодирование
3. Криптографическое кодирование

**Определение.** Алфавитом  $\Sigma$  называется непустое конечное множество. Множество из  $n$  элементов  $\Sigma$  обозначается  $\Sigma^n$ .

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^* \quad \Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$

**Определение.** Конкатенация:

$$\alpha \in \Sigma^* \quad \beta \in \Sigma^* \mapsto \alpha\beta \in \Sigma^*$$

Конкатенация транзитивна  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \Rightarrow$  алфавит — полугруппа.

$\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha \Rightarrow$  алфавит — моноид.

Т.к. алфавит — полугруппа и моноид, алфавит — свободный моноид.

**Определение.** Гомоморфизм  $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

*Пример.*

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow a, 1 \rightarrow ab \\ \varphi : \{0, 1\}^* &\rightarrow \{a, b\}^* \\ \varphi(001) &= aaab \end{aligned}$$

$$\varphi - \text{гомоморфизм} \Rightarrow \varphi(c_1, c_2 \dots c_n) = \varphi(c_1)\varphi(c_2) \dots \varphi(c_n)$$

**Определение.** Отображение из произвольного  $\Sigma^*$  в  $\Pi^*$  называется кодом.

Если  $\varphi$  — гомоморфизм,  $\varphi$  — **разделяемый**.

Если  $\Pi = \mathbb{B}$ ,  $\varphi$  — **бинарный/двоичный**.

*Пример.*

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{a, b, c\} \quad \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 1 \\ \varphi(abc) &= 0011 \quad \varphi(aacc) = 0011 \end{aligned}$$

**Определение.** Код называется **однозначно декодируемым**, если  $\forall x, y \in \Sigma^* \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

**Определение.** Кодом **постоянной длины** называется код, если  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Pi^k, k = \text{const}$

**Лемма 1.**  $\varphi$  — код постоянной длины

$$\forall c \neq d \in \Sigma \quad \varphi(c) \neq \varphi(d)$$

Тогда  $\varphi$  — однозначно декодируемый.

**Теорема 1.1.**  $\Sigma, \Pi, |\Sigma| = s, |\Pi| = p, \Sigma \rightarrow \Pi^k$

$$k = \lceil \log_p s \rceil$$

$$p^k < s$$

**Теорема 1.2.** Крафта, Мак-Милана.

$\exists$  двоичных разделяемый однозначно декодируемый код переменной длины с длинами кодовых слов  $l_1, l_2 \dots l_s \Leftrightarrow \sum_{i=1}^s 2^{-l_i} \leq 1, S \geq 2$

*Доказательство.* Докажем “ $\Rightarrow$ ”.

Пусть  $ab, abb, ab$  — все члены  $\Sigma$

$$(ab + abb + bb)^2 = abab + ababb + abbb + \dots$$

$$(ab + abb + bb)^k = S^k \text{ слов, при этом все слова разные}$$

$$]a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$ab + abb + bb = \sum 2^{-l_i}$$

$$\left(\sum 2^{-l_i}\right)^k = \sum_{j=0}^{k \max l_i} (2^{-j} + 2^{-j} + 2^{-j}) - \text{всего} \leq 2^j \text{ слов}$$

$$\sum_{j=0}^{k \max l_i} (2^{-j} + 2^{-j} + 2^{-j}) \leq k \max l_i$$

$$\forall k : x^k \leq k \max l_i \rightarrow x \leq 1$$

□

**Определение. Префиксный код:**  $\forall c \neq d \quad \varphi(c) \text{ — не префикс } \varphi(d)$

**Лемма 2.** Префиксный код — однозначно декодируем.

*Доказательство.* Докажем “ $\Leftarrow$ ”

$\sum 2^{-l_i} \leq 1 \Rightarrow \exists$  префиксный код с длинами  $l_1 \dots l_s$

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_s$$

$$2^{-l_1}$$

$$2^{-l_1} + 2^{-l_2}$$

$\vdots$

$$2^{-l_1} + 2^{-l_2} + \dots + 2^{-l_s}$$

$$S = 2 \quad 2^{-l_1} + 2^{-l_2} \leq 1$$

□

Тут автор сдох.

*Следствие.*  $\exists$  однозначно декодируемый код с длинами  $l_1 \dots l_s \Rightarrow \exists$  префиксный код с длинами  $l_1 \dots l_n$

## 1.1 Код Хаффмана

Дано:  $f_1, f_2 \dots f_s$  — как часто встречаются соответствующие слова. Найти  $l_1 \dots l_s$ , такие что  $\sum 2^{-l_i}$  и  $\sum l_i f_i \rightarrow \min$

$$S = 2 \Rightarrow l_1 = l_2 = 1$$

$S > 2$  Возьмём два символа  $x$  и  $y$ , такие что  $f_x$  и  $f_y \rightarrow \min$  ( $x, y$  — самые редкие). Заменяем их на  $z$ ,  $f_z = f_x + f_y$ .

Возьмём в качестве кодового слова для  $x$  слово для  $z + 0$ , а для  $y$  возьмём  $z + 1$ .