Упражнение 1. Всякий ли элемент в S_3 является простым циклом? В S_4?

Решение. В S_3 — да, что проверяется перебором:

Перестановка	$a_1 \dots a_k$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$\varnothing$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	$2, 3$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$1, 2$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	$1, 2, 3$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$1, 2, 3$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$1, 2, 3$

В S_4 — нет, т.к. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ нельзя представить в виде простого цикла — на все элементы она действует не тождественно ($\forall x \;\; g(x) \neq x$), следовательно все элементы $\{1 \dots n\}$ в этом цикле. Пусть[1] $1 = a_1$, тогда $a_2 = 2$, тогда a_4 это либо 3, либо 4, но ни для одного из них не верно $g(x) = 1$. $\square$

Упражнение 2. Рассмотрим все $g \in S_4$, которые являются простыми циклами. Какие значения может принимать порядок g?

Решение.

[1] Так можно говорить, т.к. $a_1 \dots a_k$ можно циклически сдвинуть без потери общности.

Порядок	Пример перестановки с таким порядком
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Утверждение. Элементов с порядком > 4 нет.

Proof. Рассмотрим a_i. Оно отображается в себя же за максимум последовательных 4 шага g, т.к. так работает цикл. □

Ответ: $\{1, 2, 3, 4\}$ □

Упражнение 3. Показать, что любой элемент $\rho \in S_4$ представим в виде произведения независимых простых циклов:

$$\rho = g_1 \cdots g_k$$

Решение. Предположим обратное, что есть $\rho \in S_4$, не представимый искомым образом. Пусть $a_1 = 1, a_2 = \rho(a_1)$.

Если $a_2 = a_1$, то ρ действует тождественно на первый элемент и тогда группа G всех таких ρ изоморфна S_3, а все элементы S_3 — простые циклы, следовательно ρ есть простой цикл.

Рассмотрим случай $a_1 \neq a_2$. Пусть $a_3 = \rho(a_2)$. $a_3 \neq a_2$, т.к. иначе ρ не биективно. Если $a_3 = a_1$, то ρ действует как простой цикл длины 2 на элементы $\{a_1, a_2\}$. Группа всех таких ρ изоморфна S_2, т.к. осталось 2 не использованных элемента, а все элементы S_2 — простые циклы (перебор).

Рассмотрим случай $a_3 \neq a_1$. Пусть $a_4 = \rho(a_3)$. $a_4 \neq a_3$ и $a_4 \neq a_2$ по соображениям выше. Если $a_4 = a_1$, то ρ — цикл длины 3 на элементах $\{a_1, a_2, a_3\}$ и на оставшийся элемент не может не подействовать тривиально. Если $a_4 \neq a_1$, то $\lhd a_5 = \rho(a_4)$. По соображениям выше $a_5 \notin \{a_2, a_3, a_4\}$, следовательно $a_5 = a_1$ и ρ — цикл длины 4.

Альтернативное доказательство: перебор.

ρ	Представление ρ в виде произведения простых циклов

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\\
\hline
\end{array}
$$

□

Упражнение 4. Показать, что если $g, h \in S_n$ — независимые простые циклы, то они коммутируют. Что можно сказать об обратном? (если g, h — коммутирующие простые циклы, то $\ldots$)

Решение.

Утверждение. Если $g(x) \neq x$, то $h(g(x)) = g(x)$.

Proof. $g(g(x)) \neq g(x)$ по биективности g. □

$$
g(h(x)) = \begin{cases} g(x), & g(x) \neq x\\ h(x), & h(x) \neq x\\ x, & h(x) = g(x) = x\end{cases}
$$

$$
h(g(x)) = \begin{cases} g(x), & g(x) \neq x\\ h(x), & h(x) \neq x\\ x, & h(x) = g(x) = x\end{cases}
$$

Итого $gh = hg$.

Если g, h — коммутирующие простые циклы, то они не обязательно независимы. Например, если $g = h$: $gg = gg$, но g зависит от себя *(если это не тривиальный цикл)*. Также можно построить случай с $g \neq h$. Пусть дано g с $\{a_i\}_{i=1}^{n}$. Тогда пусть $h(a_i) = \begin{cases} a_{i-1}, & i > 1\\ a_n, & i = 1\end{cases}$ □