

# 1 Определения

## 1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1.  $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2.  $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3.  $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4.  $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

## 1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + o(|h|^r)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

## 1.3 $n$ -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \text{ относительно } h \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

## 1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

## 1.5 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Определение. Квадратичная форма  $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

**Определение.** Положительно определенная кв. форма:  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

**Определение.** Отрицательно определенная кв. форма:  $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

**Определение.** Незнакоопределенная кв. форма:  $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

**Определение.** Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма:  $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

## 1.6 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$  — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

## 1.7 Диффеоморфизм

$F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — диффеоморфизм, если:

- $F$  обратимо
- $F$  дифференцируемо
- $F^{-1}$  дифференцируемо

## 1.8 Формулировка теоремы о локальной обратимости

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $x_0 \in O$
- $\det T'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0) : T|_U$  — диффеоморфизм, т.е.  $\exists T^{-1}$

## 1.9 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_m) = y_m \end{cases}$$

Пусть  $(x^0, y^0)$  — решение этой системы,  $F = (f_1 \dots f_m)$

$\det F'(x^0) \neq 0$ . Тогда  $\exists U(y^0) : \forall y \in U(y^0)$  система имеет решение,  $C^r$  гладко зависящее от  $y$ .

### 1.10 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

Дана система из  $n$  функций,  $f_i \in C^r$ .

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть  $(a, b) = (a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n)$  — решение системы и  $\det \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \neq 0$ . Тогда  $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m$  и  $\exists! \Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$  такие, что  $\forall x \in U(a)$   $x, \Phi(x)$  — тоже решение системы.

### 1.11 ! Простое $k$ -мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если:

- $\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi(O) = M$
- $\Phi \in C^r$
- $\forall x \in O \ \text{rg} \Phi'(x) = k$

### 1.12 Касательное пространство к $k$ -мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- $\Phi$  — параметризация многообразия  $U(p) \cap M$ , где  $p \in M$ ,  $M$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие  $\Rightarrow U(p) \cap M$  — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ  $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть  $k$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ . Оно не зависит от  $\Phi$ .

$\Phi'(t^0)$  — касательное пространство к  $M$  в точке  $p$ , обозначается  $T_p M$ .

### 1.13 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

$x_0$  — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если  $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \quad f(x_0) \geq f(x)$ , остальные — аналогично.

Уравнения  $\Phi(x) = 0$  называются **уравнениями связи**.

### 1.14 ! Формулировка достаточного условия относительного экстремума

Выполняется условие теоремы о необходимом условии экстремума, то есть:

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое в  $O$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$  — гладкое в  $O$
- $a \in O$  — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$\forall h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ : если  $\Phi'(a)h = 0$ , то можно выразить  $h_y = \Psi(h_x)$ .

Рассмотрим квадратную форму  $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$ .

Тогда:

1. Если  $Q(h)$  положительно определена,  $a$  — точка минимума
2. Если  $Q(h)$  отрицательно определена,  $a$  — точка максимума
3. Если  $Q(h)$  не знакоопределена,  $a$  — не экстремум
4. Если  $Q(h)$  положительно определена, но вырождена, недостаточно информации

### 1.15 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

Пусть  $E \subset X$ . Последовательность  $f_n$  **сходится поточечно** к  $f$  на множестве  $E$ , если  $\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$ , т.е.:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

### 1.16 ! Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

$f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $E \subset X$ , если  $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n > N \quad 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается  $f_n \xrightarrow[E]{} f$

### 1.17 Равномерная сходимость функционального ряда

- $X$  — произвольное множество
- $u_n : X \rightarrow Y$  — нормированное пространство

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  сходится к  $S(x)$  равномерно на  $E \subset X : S_N \xrightarrow[E]{N \rightarrow +\infty} S$

### 1.18 Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости

Остаток ряда:  $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$ ,  $S(x) = S_N(x) + R_N(x)$

Ряд сходится на  $E \Leftrightarrow R_N \xrightarrow[E]{} 0$  — тождественный ноль.

### 1.19 ! Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

Степенной ряд:  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ , где  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $z$  — переменная  $\in \mathbb{C}$

$\sum a_n(z - z_0)^n$ , тогда число  $R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Это формула Адамара.

### 1.20 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

???

### 1.21

???

### 1.22

???

### 1.23 Кусочно-гладкий путь

Путь — непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

Кусочно-гладкое отображение — отображение, имеющее не более, чем счётное число точек разрыва, все точки разрыва — I рода и  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  — гладкое  $\forall k$ , где  $t_k$  — точка разрыва.

### 1.24 Векторное поле

Векторное поле — непрерывное отображение  $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall x \in E \quad V(x) \in \mathbb{R}^m$  — вектор, “приложенный к точке  $x$ ”.

### 1.25 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m \end{aligned}$$

Также используется обозначение  $I(V, \gamma) = \int_{\gamma} V_1 d\gamma_1 + \dots + V_m d\gamma_m$

### 1.26 ! Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — векторное поле **потенциально**, если оно имеет потенциал:

$$\exists f \in C^1(O), \nabla f = V$$

### 1.27 Локально потенциальное векторное поле

$V$  — **локально потенциальное** векторное поле в  $O$ , если  $\forall x \in O \quad \exists U(x) : V$  — потенциально в  $U(x)$

### 1.28 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Возьмём  $\delta > 0$  из леммы 2.47.

Пусть  $\tilde{\gamma}$  —  $\delta$ -близкий кусочно-гладкий путь, т.е.  $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$ .

Полагаем  $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$ .

Корректность (*нет произвольности*) следует из лемм 2.47 и 2.46

### 1.29 Гомотопия путей связанная и петельная

Гомотопия двух (*непрерывных*) путей  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$  это непрерывное отображение  $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_t \times \underbrace{[0, 1]}_u \rightarrow O$ , такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гомотопия **связанная** (*не связанная*), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$



Рис. 1: Связанная гомотопия.  
Пунктиром —  $\Gamma(\circ, u)$  для различных  $u$

Гомотопия **петельная**, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$



Рис. 2: Петельная гомотопия.  
Пунктиром —  $\Gamma(\circ, u)$  для различных  $u$

### 1.30 Односвязная область

Область  $O \subset \mathbb{R}^m$  — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в  $O$  нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.



Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

### 1.31 ! Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

$\mathcal{P} \subset 2^X$  — **полукольцо**, если:

- $\emptyset \in \mathcal{P}$
- $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P} \quad \exists \text{ кон. и дизъюнктные } B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup_i B_i$

$\mathfrak{A} \subset 2^X$  — **алгебра подмножеств** в  $X$ , если:

1.  $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$



2.  $X \in \mathfrak{A}$

$\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{A} \subset 2^X$ :

1.  $\mathfrak{A}$  — алгебра

2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

### 1.32 ! Объем

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем, если  $\mu \geq 0$  и  $\mu$  — аддитивная.

### 1.33 ! Ячейка

Ячейка в  $\mathbb{R}^m$  это  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$

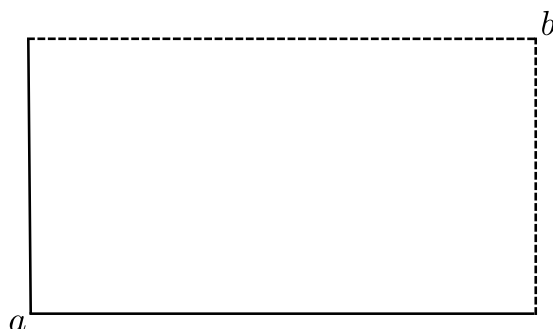


Рис. 4:  $[a, b)$  — ячейка в  $\mathbb{R}^2$

### 1.34 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

Классический объем в  $\mathbb{R}^m$   $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

Этот объем не конечный.

### 1.35 Формулировка теорема о непрерывности снизу

- $\mathfrak{A}$  — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем.

Тогда эквивалентно:

1.  $\mu$  — мера

2.  $\mu$  — непрерывна снизу:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$$

### 1.36 ! Мера, пространство с мерой

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера, если  $\mu$  — объем и  $\mu$  счётно-аддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_i \mu A_i$$

Пространство с мерой — тройка  $(\underbrace{X}_{\text{множество}}, \underbrace{\mathfrak{A}}_{\sigma\text{-алгебра}}, \underbrace{\mu}_{\text{мера на } \mathfrak{A}})$

### 1.37 Полная мера

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера.

$\mu$  — полная в  $\mathcal{P}$ , если  $\forall A \in \mathcal{P} \quad \mu A = 0 \quad \forall B \subset A$  выполняется:  $B \in \mathcal{P}$  и (тогда автоматически)  $\mu B = 0$  (по монотонности)

Это совместное свойство  $\mu$  и  $\mathcal{P}$ .

### 1.38 ! Сигма-конечная мера

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера,  $\mathcal{P} \subset 2^X$

$\mu$  —  $\sigma$ -конечна, если  $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} : X = \bigcup A_i, \mu A_i < +\infty$

### 1.39 Дискретная мера

$X$  — (бесконечное) множество.

$a_1, a_2, a_3, \dots$  — набор попарно различных точек.

$h_1, h_2, h_3, \dots$  — положительные числа.

Для  $A \subset X \quad \mu A := \sum_{k: a_k \in A} h_k.$

Физический смысл  $\mu$ : каждой точке  $a_i$  сопоставляется “масса”  $h_i$ . Объем множества точек есть сумма “масс” точек.

Счётная аддитивность  $\mu \Leftrightarrow$  теореме о группировке слагаемых (в ряду можно ставить скобки).

Эта мера называется дискретной.

### 1.40 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

- $\mathcal{P}_0 \subset X$  — полукольцо
- $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  —  $\sigma$ -конечная мера

Тогда  $\exists \sigma$ -алгебра  $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$ ,  $\exists \mu$  — мера на  $\mathfrak{A}$ :

1.  $\mu$  — продолжение  $\mu_0$  на  $\mathfrak{A}$
2.  $\mu$  — полная мера
3. Если  $\tilde{\mu}$  — полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}}$  и  $\tilde{\mu}$  — продолжение  $\mu_0$ , то  $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$  и при этом  $\tilde{\mu}$  продолжает  $\mu : \tilde{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если  $\mathcal{P}$  — полукольцо, такое что  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$  и мера  $\nu$  — продолжение  $\mu_0$  на  $\mathcal{P}$ , то  $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
5.  $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A = \inf \left\{ \sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \right\}$

*Доказательство.* Не будет, это слишком сложно.

Общая идея следующая:  $\forall A \subset X$  положим  $\mu^*(A) = \inf \{ \dots \}$  — не аддитивна.  $A \subset \bigcup A_k \quad \mu^* A = \sum \mu^* A_k$  □

### 1.41 Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

Мера Лебега в  $\mathbb{R}^m$  — лебеговское продолжение классического объема.

$\mathfrak{M}^m$  —  $\sigma$ -алгебра, на которой задана мера Лебега. Тогда множество называется **измеримым по Лебегу**

### 1.42 Борелевская сигма-алгебра

$\mathfrak{B}$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра (в  $\mathbb{R}^m$  или в метрическом пространстве) — минимальная  $\sigma$ -алгебра, которая содержит все открытые множества.

$$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$$

### 1.43 Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

$\mu$  — мера на  $\mathfrak{M}^m$ :

1.  $\mu$  — инвариантно относительно сдвигов:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \quad \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$$

2. Для любого ограниченного  $E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E) < +\infty$

Тогда  $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$ , т.е.:

$$\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E$$

и пусть  $0 \cdot \infty = 0$  в данном контексте.

*Доказательство.* Нет и не будет.

Общая идея: Как мера  $\mu$  задается на рациональных ячейках?

В  $\mathbb{R}^2$   $Q_1$  — единичная квадратная ячейка,  $\mu Q_1 = v$

$Q_2$  — ячейка  $2 \times 2$ ,  $\mu Q_2 = 4v$ . Аналогично  $\mu Q_n = n^2 v$ ,  $\mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} v$

Тогда  $k = v$  и  $\mu$  пропорционально  $\lambda$ . □

## 2 Теоремы

### 2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$  — это подразумевает, что  $E$  открыто
- $a \in E$
- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при  $1 \leq k \leq r$ :

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

*Доказательство.* Как на лекции:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

Формальное доказательство по индукции:

Индукционное предположение:

$$\varphi^k(t) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}$$

База:

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1}$$

Переход:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k+1)}(t) &= (\varphi^k(t))' \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \right)' \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \left( \frac{\partial^k f(a+th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)' h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \sum_{i_{k+1}=1}^m \frac{\partial^{k+1} f(a+th)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} h_{i_{k+1}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

□

## 2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

### 2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$  — это подразумевает  $E \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда  $\exists t \in (0, 1)$ :

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+t(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

*Доказательство.* Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$ , где  $h = x - a$ . Тогда  $\varphi(0) = f(a)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!}t^{r+1} \\ f(x) &= \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{o(|x-a|^r)} \end{aligned}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

### 2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

*Доказательство.* **Отсутствует**

□

## 2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение  $A \rightarrow \|A\|$  в  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  — норма, т.е.:

- (a)  $\|A\| \geq 0$
- (b)  $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
- (c)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
- (d)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2.  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

*Доказательство.*

1.  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$

a, b, c — очевидно.

d:  $|(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$

По замечанию 3  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$2. \quad |BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

□

## 2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- $X, Y$  — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $A$  — ограниченный оператор, т.е.  $\|A\|$  — конечно
2.  $A$  — непрерывно в нуле
3.  $A$  — непрерывно всюду в  $X$
4.  $A$  — равномерно непрерывно

*Доказательство.*

1.  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  — очевидно.
2.  $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0:  $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3.  $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 : |x_1 - x_0| < \delta$$

$$|Ax_1 - Ax_0| = |A(x_1 - x_0)| \leq \|A\| \cdot |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

□

## 2.5 Теорема Лагранжа для отображений

- $E$  открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F$  дифф. на  $E$
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда  $\exists c \in [a, b]$  ( $c = a + \Theta(b - a)$ ),  $\Theta \in [0, 1]$  :

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

*Доказательство.*  $f(t) := F(a + t(b - a))$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Тогда по теореме Лагранжа для векторнозначных функций

$$|f(1) - f(0)| \leq \|f'(c)\| |1 - 0|$$

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(a + c(b - a))(b - a)\| \leq \|F'(a + c(b - a))\| |b - a|$$

□

## 2.6 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

- $L \in \Omega_m$  — обратимый
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$ , т.е.  $M$  “близкий” к  $L$

Тогда:

1.  $M \in \Omega_m$ , т.е.  $\Omega_m$  открыто в  $\mathcal{L}_{m,m}$

$$2. \|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$$

$$3. \|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

*Доказательство.* По неравенству треугольника  $|a + b| \geq |a| - |b|$ :

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}} |x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 ( $M$  — биекция, т.к.  $\text{Ker } M = \{0\}$ ) и 2, докажем 3:



Аналогично равенству  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$  в  $\mathbb{R}$  выполняется следующее равенство в  $\Omega_m$ :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на  $M$  слева и на  $L$  справа:

*Доказательство.*

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

## 2.7 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F$  дифф. на  $E$

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1.  $F \in C^1(E)$ , т.е.  $\exists$  все  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  и они непрерывны на  $E$
2.  $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$  — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

*Доказательство.*

- $1 \Rightarrow 2$ :

Берем  $x, \varepsilon$ .  $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$  для всех  $i, j$ .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$\triangleleft h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

## 2.8 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- $a$  — точка локального экстремума
- $f$  — дифф. в точке  $a$

Тогда  $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

*Доказательство.* Для  $f|_{\text{прямая}(a,u)}$   $a$  остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. □

*Следствие 1* (необходимое условие экстремума).  $a$  — локальный экстремум  $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

*Следствие 2* (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$  компакт
- $f$  дифф. в  $\text{Int}K$
- $f$  непрерывно на  $K$
- $f|_{\text{граница}K} = \text{const}$

Тогда  $\exists a \in \text{Int}K : f'(a) = \vec{0}$

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо  $f$  на  $K$  const, либо  $\exists a \in \text{Int}K$  — точка экстремума. В первом случае  $f' \equiv 0$ , во втором по т. Ферма  $f'(a) = 0$   $\square$

## 2.9 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

**Лемма 1** (об оценке формы).

- $Q$  — положительно определенная

Тогда  $\exists \gamma_Q > 0 \quad \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

*Доказательство.*  $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ , поэтому  $\min$  и  $\max$  достигается по т. Вейерштрасса.

$$\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$$

$$Q(h) = Q\left(|h| \frac{h}{|h|}\right) \stackrel{(*)}{=} |h|^2 \underbrace{Q\left(\frac{h}{|h|}\right)}_{\text{ед. вектор}} \geq \gamma_Q |h|^2$$

Переход  $(*)$  работает, т.к.  $Q$  — квадратичная форма, поэтому:

$$\sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j} a_{ij} |h| \frac{h_i}{|h|} |h| \frac{h_j}{|h|} = |h|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h_i}{|h|} \frac{h_j}{|h|}$$

$\square$

**Лемма 2** (об эквивалентных нормах).

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — норма

Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \quad C_2 |x| \leq p(x) \leq C_1 |x|$

*Доказательство.*

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2 |x| \\ \leq C_1 |x| \end{cases}$$

Существование  $C_1$  и  $C_2$  гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности  $p(x)$ .

Докажем, что  $p$  непрерывна.

Введем базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k|p(e_k) \\ &\leq |x - y|\sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y|M \end{aligned}$$

□

## 2.10 ! Достаточное условие экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если  $Q(h)$  положительно определена,  $a$  — локальный минимум
- Если  $Q(h)$  отрицательно определена,  $a$  — локальный максимум
- Если  $Q(h)$  не знакоопределена,  $a$  — не экстремум
- Если  $Q(h)$  положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

*Доказательство.* Для положительно определенной формы:

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\ &= \frac{1}{2} \left( Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right) \end{aligned}$$

$$f(a + h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left( \gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

Аналогично для отрицательно определенной формы.

Для не знакоопределенной формы:

$$\begin{aligned} \langle \bar{h} : Q(\bar{h}) \rangle > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left( \sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0 \end{aligned}$$

Т.е.  $f(a + t\bar{h}) > f(a)$  при  $t$ , близких к 0.

Аналогично  $f(a + t\bar{\bar{h}}) < f(a)$  при  $t$ , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = 2h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого  $f$  не имеет экстремума в  $a$ , но для  $\bar{f}$   $a$  — локальный минимум. □

## 2.11 Лемма о “почти локальной инъективности”

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  дифф. в  $x_0 \in O$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists c > 0, \delta > 0 \ \forall h \in B(0, \delta) \ |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

*Доказательство.* Если  $F$  — линейное отображение:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F(h)| = |F'(x_0)h| \geq \|F'(x_0)\| \cdot |h| \geq \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|} |h|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| \geq \frac{c}{2}|h|$$

□

## 2.12 Теорема о сохранении области

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  дифф.
- $\forall x \in O \quad \det F'(x) \neq 0$

Тогда  $F(O)$  — открыто.

*Доказательство.*  $x_0 \in O \Rightarrow F(x_0) \in F(O)$  — внутренняя? в  $F(O)$

По лемме  $\exists c, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| > C|h|$

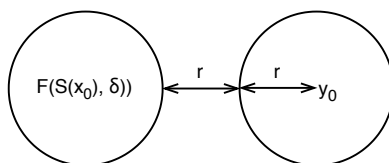
В частности  $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$  при  $|h| = \delta$

$$r := \frac{1}{2} \rho(y_0, F(S(x_0, \delta)))$$

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b)$$

Т.к.  $S$  — компакт,  $\exists \min$ .

Если  $y \in B(y_0, r)$ , то  $\rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$ :



Проверим, что  $B(y_0, r) \subset F(O)$ , т.е.  $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) F(x) = y$

Рассмотрим функцию  $g(x) = |F(x) - y|^2$  при  $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ .

Мы хотим показать, что  $\exists x : g(x) = 0$ . Найдем  $\min g$ .

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$$

При  $x \in S(x_0, \delta) : g(x) > r^2 \Rightarrow \min g$  не лежит на границе шара  $\Rightarrow$  он лежит внутри шара.

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\forall i \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$2(F_1(x) - y)F'_{1x_i}(x) + \dots + 2(F_m(x) - y)F'_{mx_i}(x) = 0$$

$$F'_x 2(F(x) - y) = 0$$

$$\forall x \quad \det F' \neq 0 \Rightarrow F(x) - y = 0$$

□

### 2.13 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $F \in C^1(O)$
- $l < m$
- $\operatorname{rg} F'(x) = l \quad \forall x \in O$

Тогда  $F(O)$  открыто.

*Доказательство.* Зафиксируем точку  $x_0$ . Пусть ранг реализуется на столбцах  $1 \dots l$ , т.е. определитель матрицы из столбцов  $1 \dots l \neq 0$ , т.е.:

$$\det \underbrace{\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots l}}_{A(x_0)}(x_0) \neq 0$$

И для близких точек тоже  $\neq 0$

$$\tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}'(x) = \left[ \begin{array}{c|c} F'(x) & \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array} \right]$$

$$\det \tilde{F}'(x) = \det A(x) \det E_{m-l} \neq 0 \quad \text{в окрестности } x_0$$

Тогда  $\tilde{F}|_{U(x_0)}$  удовлетворяет теореме  $\Rightarrow \tilde{F}(U(x_0))$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^m$

$$F(U(x_0)) = \tilde{F}(U(x_0)) \cap \mathbb{R}^l$$

□

## 2.14 Теорема о гладкости обратного отображения

- $T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$
- $O \subset \mathbb{R}^m$
- $r = 1, 2, \dots + \infty$
- $T$  обратимо
- $\det T'(x) \neq 0 \quad \forall x \in O$

Тогда  $T^{-1} \in C^r(0, \mathbb{R}^m)$  и  $(T^{-1})'_{y_0} = (T'(x_0))^{-1}$ , где  $y_0 = T(x_0)$

*Доказательство.* Докажем по индукции по  $r$ .

**База:**  $r = 1$

$S := T^{-1}$  — непрерывно по теореме о сохранении области. Почему?

$f : X \rightarrow Y$  непр.  $\Leftrightarrow \forall B$  — откр.  $\subset Y \quad f^{-1}(B)$  — открыто.

$T'(x_0) = A$  — невырожденный оператор.

По лемме о локальной инъективности

$$\exists c, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |T(x) - T(x_0)| > C|x - x_0| \quad (*)$$

По определению дифференцируемости  $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)|x - x_0|$



$$T(x) = y \quad T(x_0) = y_0 \quad x = S(y) \quad x_0 = S(y_0)$$

В терминах  $y$  и  $S$ :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\xrightarrow[y \rightarrow 0]{?} 0 \text{ быстрее, чем } |y - y_0|}$$

Если действительно  $\rightarrow 0$ , то  $S$  дифференцируемо по определению.

Пусть  $y$  близко к  $y_0$ , тогда  $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$

$$\begin{aligned} |A^{-1}\omega(S(y))|S(y) - S(y_0)| &= |S(y) - S(y_0)| \cdot |A^{-1}\omega(S(y))| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\omega(S(y))| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{C} |y - y_0| \cdot \|A^{-1}\| \cdot |w(S(y))| \end{aligned}$$

Мы доказали, что  $S$  дифференцируемо, теперь необходимо доказать, что  $S'$  непрерывно.

$$S'(y_0) = A^{-1}$$

“Алгоритм” получения обратного оператора:

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1}$$

Здесь все шаги непрерывны, поэтому  $S'$  непрерывно.

**Переход**

$$\begin{aligned} T \in C^{r+1} \quad T' : O \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad T' \in C^r \quad ? S \in C^{r+1} \\ y \stackrel{\in C^r}{\mapsto} \text{по инд.} S(y) \stackrel{\in C^r}{\mapsto} T'(x) \stackrel{\in C^\infty}{\mapsto} (S^{-1})' \end{aligned}$$

□

## 2.15 ! Теорема о неявном отображении

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $O$  откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a, b) \in O$
- $F(a, b) = 0$

$$\bullet \det F'_y(a, b) \neq 0$$

Тогда:

1.  $\exists$  откp.  $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$   
 $\exists$  откp.  $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$   
 $\exists! \Phi : P \rightarrow Q \in C^r : \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$
2.  $\Phi'(x) = - (F'_y(x, \Phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$

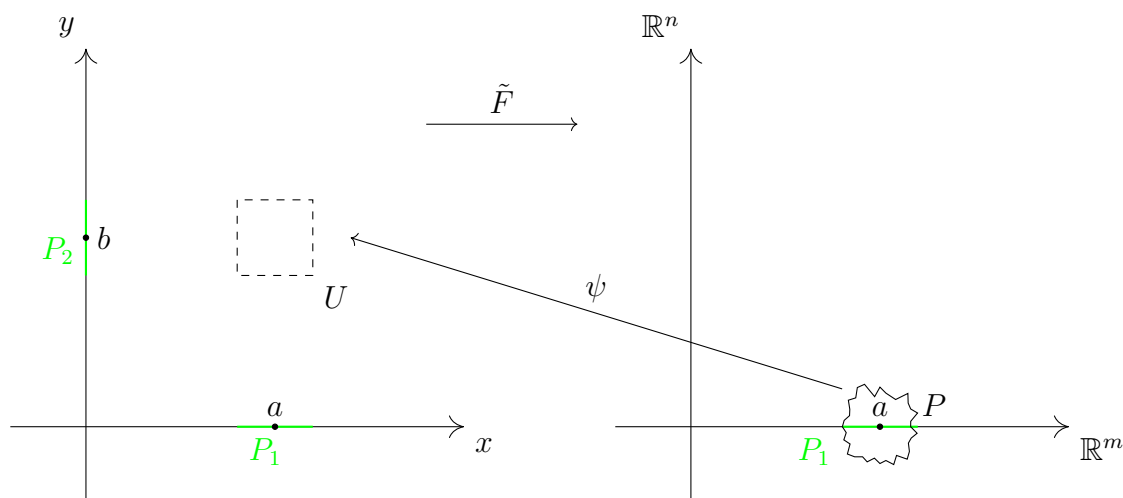
Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2: F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$$

$$1: \tilde{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} : (x, y) \mapsto (x, F(x, y)), \tilde{F}(a, b) = (a, 0)$$

$$F' = \left( \begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right)$$

Очевидно  $\det \tilde{F}' \neq 0$  в  $(a, b)$ , значит  $\exists U(a, b) : \tilde{F}|_U$  — диффеоморфизм



1.  $U = P_1 \times Q$  — можно так считать
2.  $V = \tilde{F}(U)$
3.  $\tilde{F}$  — диффеоморфизм на  $U \Rightarrow \exists \Psi = \tilde{F}^{-1} : V \rightarrow U$
4.  $\tilde{F}$  не меняет первые  $m$  координат  $\Rightarrow \Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
5. “Ось  $x$ ”  $\Leftrightarrow$  “ось  $y$ ”,  $P :=$  “ось  $u$ ”  $= \mathbb{R}^m \times a \cap V, P$  — откp. в  $\mathbb{R}^m, P = P_1$

$$6. \Phi(x) := H(x, 0)$$

$$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$$

$$\text{Единственность: } (x, y) = \Psi(\tilde{F}(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \Phi(x))$$

□

## 2.16 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$  (случай  $k = m$  тривиален)
- $1 \leq r \leq \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$  — окрестность  $p$  в  $\mathbb{R}^m$  :  $M \cap U$  —  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие.
2.  $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$  и функции  $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , все  $f_i \in C^r$   
 $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$ , при этом  $\text{grad} f_1(p) \dots \text{grad} f_{m-k}(p)$  — ЛНЗ.

*Доказательство.*

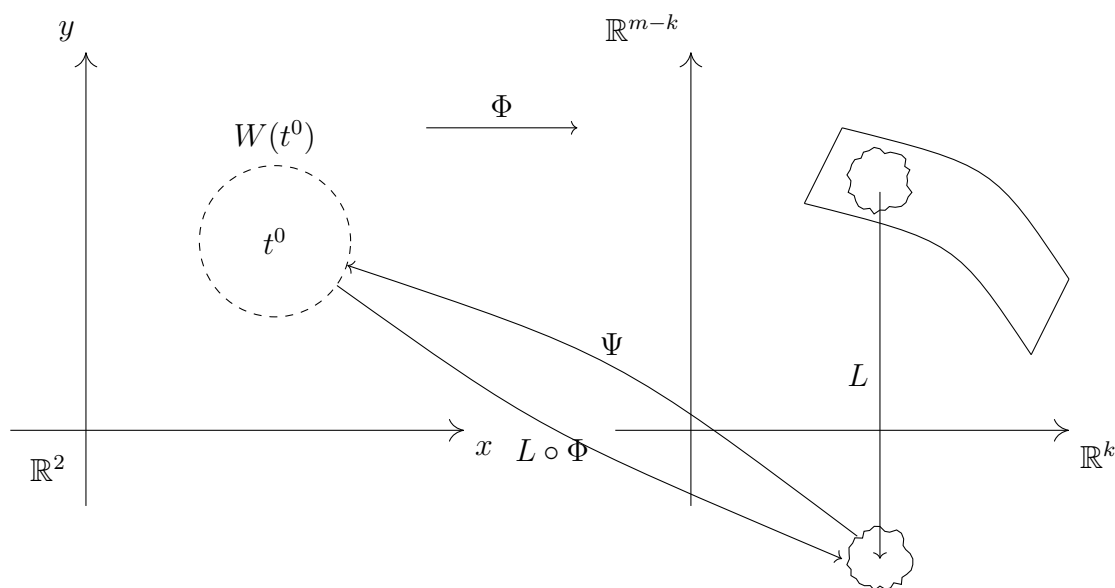
1  $\Rightarrow$  2:  $\Phi$  — параметризация  $O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r, p = \Phi(t^0)$

$$\text{rg} \Phi'(t^0) = k$$

$$\text{Пусть } \det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1 \dots k} \neq 0$$

Пусть  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проекция на первые  $k$  координат:  $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$

Тогда  $(L \circ \Phi)'$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  локальный диффеоморфизм. Тогда если  $W(t^0)$  — окрестность точки  $t^0$ , то  $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  — диффеоморфизм.



Множество  $\Phi(W)$  – график некоторого отображения  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть  $\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$

Берем  $x' \in V$ , тогда  $(x', U(x')) = \Phi(\Psi(x'))$ , т.е.  $H \in C^r$

Множество  $\Phi(W)$  открыто в  $M \Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$ , где  $\tilde{U}$  открыто в  $\mathbb{R}^m$

$\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$

Пусть  $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto H_j(L(x)) - x_{k+j}$ . Тогда  $x \in M \cap \tilde{U} (= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = k \Rightarrow \text{ЛНЗ}$

$2 \Rightarrow 1: F := (f_1 \dots f_{m-k})$

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ  $\Rightarrow \text{rg} I = m - k$ .

Пусть ранг реализуется на последних  $m - k$  столбцах, т.е.

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1 \dots m-k} \neq 0$$

$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$  при  $x \in U$

По т. о неявном отображении:

$\exists P - \text{окр. } (x_1 \dots x_k) \text{ в } \mathbb{R}^m$

$\exists Q - \text{окр. } (x_{k+1} \dots x_m) \text{ в } \mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H \in C^r : P \rightarrow Q : F(x', H(x')) = 0 \text{ для } x' \in P$

Тогда  $\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$

$\Phi - \text{гомеоморфизм } P \text{ и } M \cap \tilde{U}, \Phi - \text{фактически проекция.}$

□

## 2.17 Следствие о двух параметризациях

- $M \subset \mathbb{R}^m - k\text{-мерное } C^r\text{-гладкое многообразие}$
- $p \in M$
- $\exists$  две параметризации:

$$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$$

$$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$$

Тогда  $\exists$  диффеоморфизм  $\Psi : O_1 \rightarrow O_2$ , такой что  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

*Доказательство.*

Частный случай: Пусть  $\text{rg} \Phi'_1(t^0), \text{rg} \Phi'_2(s^0)$  достигается на первых  $k$  столбцах.

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_2 \circ \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)}_{\Theta - \text{искомый диффеоморфизм}}$$

Общий случай:  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$

$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.

□

## 2.18 Лемма о корректности определения касательного пространства

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$

- $\Phi$  — параметризация многообразия  $U(p) \cap M$ , где  $p \in M$ ,  $M$  — гладкое  $k$ -мерное многообразие  $\Rightarrow U(p) \cap M$  — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ  $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть  $k$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ . Оно не зависит от  $\Phi$ .

$\Phi'(t^0)$  — касательное пространство к  $M$  в точке  $p$ , обозначается  $T_p M$ .

*Доказательство.*  $\text{rg} \Phi'(t^0) = k$  по определению параметризации  $\Rightarrow$  искомое очевидно. Если взять другую параметризацию  $\Phi_1$ , то

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

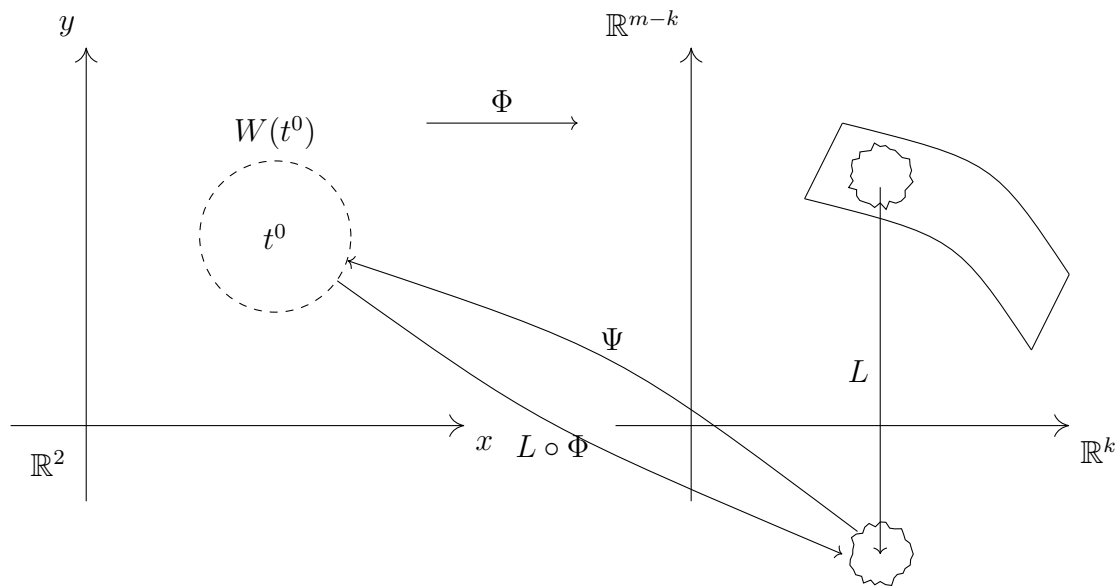
$$\Phi' = \Phi'_1 \Psi'$$

$\Psi'(t^0)$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  образ  $\Phi' =$  образ  $\Phi'_1$

□

## 2.19 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Пусть  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M, \gamma(0) = p$  — гладкий путь. Тогда  $\gamma'(0) \in T_p M$



*Доказательство.* Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi' \Psi' L' \gamma'(0) = \Phi'(\gamma(0)) = \Phi'(p) \in T_p M$$

□

## 2.20 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$  — поверхность в  $\mathbb{R}^{m+1}$ , задается точками  $(x, y)$ .

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке  $(a, b)$  задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

*Доказательство.*  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$ . В каких случаях он принадлежит образу  $\Phi'$ ?

$$\Phi' \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если  $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m}$  □

$$\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$$

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(a) = 0$$

Тогда уравнение касательной к плоскости  $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

*Доказательство.*  $\gamma$  — путь в  $M : \Phi(\gamma(s)) = 0, \Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$ . По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору  $x$  в касательном пространстве можно сопоставить  $\gamma : \gamma'(s) = x$ . Поэтому любой касательный вектор от точки  $a$ , он должен быть подчинён искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости  $\Phi$  в точке  $a$ :

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(x_m - a_m) + o(\|x - a\|)$$

Мы игнорируем  $o$ , потому что оно компенсируется тем, что мы берем не с поверхности  $\Phi$ , а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение.  $\square$

## 2.21 ! Необходимое условие относительного локального экстремума

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое в  $O$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$  — гладкое в  $O$
- $a \in O$  — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

Тогда  $\exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

$$\text{В координатах: } \begin{cases} f'_{x_1} - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} - \dots - \lambda_m(\Phi_m)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} - \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} - \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} - \dots - \lambda_m(\Phi_m)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны  $a_1 \dots a_{m+n}, \lambda_1 \dots \lambda_n$ , поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

*Доказательство.*  $\text{rg} \Phi'(a) = n$ . Пусть ранг реализуется на столбцах  $x_{m+1} \dots x_{m+n}$ .

Обозначим  $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$ .

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y).$$

$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$ . Тогда по теореме о неявном отображении  $\exists U(a_x) \exists V(a_y) \exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$  и отображение  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  есть параметризация простого гладкого многообразия  $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$ .



$a$  — точка относительного локального экстремума  $\Rightarrow a_x$  — точка локального экстремума функции  $g(x) = f(x, \varphi(x))$ , потому что  $(x, \varphi(x)) \in U(a)$ .

Необходимое свойство экстремума для  $a_x$ :

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0 \quad (1)$$

*Примечание.* Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется  $a$  и  $a_x$ , но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi(x)) &\equiv 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' &= 0 \end{aligned}$$

Тогда  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ :

$$\lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0 \quad (2)$$

$$f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0 \quad (3)$$

(3) это (2) + (1)

Пусть  $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$ .

Тогда  $f'_y + \lambda \Phi'_y = f'_y - f'_y(\Phi'_y(a))^{-1} \Phi'_y(a) = 0$  и  $f'_x + \lambda \Phi'_x = 0$  в силу (3).  $\square$

## 2.22 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

- $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Тогда  $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda - \text{собственное число } A^T A\}$

Такое число существует, т.к.  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \Rightarrow \langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ .

*Доказательство.*  $\triangleleft x \in S^{m-1}$ .

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T Ax, x \rangle}_{\text{симм.}} \\ \max |Ax|^2 &= \max \langle A^T Ax, x \rangle = \lambda_{\max} \end{aligned}$$

$\square$

## 2.23 ! Теорема Стокса-Зайдля о непрерывности предельной функции. Следствие для рядов

**Теорема 1** (Стокса-Зайдля).

- $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $X$  — метрическое пространство
- $x_0 \in X$
- $f_n$  непрерывна в  $x_0$
- $f_n \xrightarrow[X]{} f$

Тогда  $f$  непрерывна в  $x_0$ .

*Доказательство.*  $|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$  — верно  $\forall x, \forall n$

$$f_n \xrightarrow[X]{} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \sup_X |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

Берем  $\forall \varepsilon > 0$  возьмём любой  $n$ , для которого выполняется (1). Тогда подчеркнутые слагаемые  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Теперь для этого  $n$  подбираем  $U(x_0) : \forall x \in U(x_0) |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

**Теорема 1'** (Стокса-Зайдля для рядов).

- $u_n : X \rightarrow Y$
- $X$  — метрическое пространство
- $Y$  — нормированное пространство
- $x_0 \in X$
- $u_n$  непрерывно в  $x_0$
- $\sum u_n(x)$  **равномерно** сходится на  $X$
- $S(x) := \sum u_n(x)$

Тогда  $S(x)$  непрерывно в  $x_0$ .

*Доказательство.* По теореме 1  $S_n(x) \Rightarrow S(x)$ ,  $S_n(x)$  — непр. в  $x_0 \xrightarrow{\text{т.1}} S(x)$  непр. в  $x_0$  □

## 2.24 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

- $X$  компакт
- $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ , где  $f_1, f_2 \in C(X)$

Тогда пространство  $C(X)$  — полное метрическое пространство с метрикой  $\rho$ .

Доказательство.  $f_n$  — фундаментальная в  $C(X) \stackrel{\text{def}}{\iff}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (4)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in X$  вещественная последовательность  $(f_n(x_0))$  фундаментальная  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$ , тогда  $f$  — поточечный предел  $f_n$ . Проверим это.

В (4) перейдем к пределу при  $m \rightarrow +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow[X]{} f \xrightarrow[\text{сл. из Стокса}]{} f \in C(X)$$

□

## 2.25 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

- $f, f_n \in C[a, b]$
- $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$

Тогда  $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Доказательство.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a, b]} |f_n - f| (b - a) = \rho(f_n, f)(b - a) \rightarrow 0$$

□

## 2.26 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f, f'_y$  — непр. на  $[a, b] \times [c, d]$
- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Тогда  $\Phi$  дифференцируема на  $[c, d]$  и  $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} &= \int_a^b \frac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx \\
 &= \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx \\
 &= \int_a^b g_n(x, y) dx
 \end{aligned} \tag{5}$$

(5): по т. Лагранжа.

$g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_y(x, y)$  на  $x \in [a, b]$  по теореме Кантора о равномерной непрерывности, и мы считаем  $y$  фиксированным.

Таким образом,  $\Phi'(y) \leftarrow \frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y) dx$  □

## 2.27 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

- $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $f_n \rightarrow f$  поточечно на  $\langle a, b \rangle$
- $f'_n \xrightarrow{\langle a, b \rangle} \varphi$

Тогда  $f \in C^1\langle a, b \rangle$

То есть пунктирное преобразование верно:

$$\begin{array}{ccc}
 f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\
 D \downarrow & & \downarrow \\
 f'_n & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \varphi
 \end{array}$$

Доказательство.  $\forall x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 f'_n \xrightarrow{[x_0, x_1]} \varphi &\xrightarrow{\text{теорема 2}} \int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi \\
 &\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi
 \end{aligned}$$

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f(x_1) - f(x_0) \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Тогда  $\begin{cases} f - \text{первообразная } \varphi \\ \varphi - \text{непр.} \end{cases} \Rightarrow f' = \varphi$  □

**Теорема 3'** (о дифференцировании ряда по параметру).

- $u_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$  (поточечная сходимость)
- $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$  (равномерная сходимость)

Тогда:

1.  $S(x) \in C^1\langle a, b \rangle$
2.  $S' = \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$

То есть  $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

*Доказательство.* Следует из теоремы 3.

$S_n \rightarrow S$  поточечно,  $S'_n \rightrightarrows \varphi$  □

## 2.28 ! Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum u_n(x)$
- $x \in X$

Пусть  $\exists c_n$  — вещественная:

- $|u_n(x)| \leq c_n$  при  $x \in E$
- $\sum c_n$  — сходится

Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$

*Доказательство.*  $|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p}$  — тривиально

$\sum c_n$  — сх.  $\Rightarrow c_n$  удовлетворяет критерию Больцано-Коши :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$$

Тогда  $\sum u_n(x)$  удовлетворяет критерию Больцано-Коши равномерной сходимости.  $\square$

## 2.29 Дифференцируемость $\Gamma$ функции

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k}$$

$$\Gamma'(x) = -\Gamma(x) \left( \frac{1}{x} + \gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{(x+k)k} \right)$$

Изучив равномерную сходимость  $\left( \frac{x}{(x+k)k} \right)'$ , получаем, что  $\Gamma \in C^2(0, +\infty)$  и т.д.  $\Rightarrow \Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$

## 2.30 Теорема о предельном переходе в суммах

- $u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- $X$  — метрическое пространство
- $x_0$  — предельная точка  $E$
- $\forall n \exists$  конечный  $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

Тогда:

1.  $\sum a_n$  — сходится

2.  $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

*Доказательство.*

1.  $\sum a_n$  — сходится

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), S_n^a = \sum_{k=0}^n a_k$$

Проверим, что  $S_n^a$  — фундаментальная:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Из равномерной сходимости  $\sum u_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad |S_{n+p} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Это критерий Больцано-Коши для равномерной сходимости)

Зададим  $\varepsilon$  по  $N$ , выберем  $n, n+p$  и возьмём  $x$  близко к  $x_0$  :  $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|S_n^a - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выполнено 1, т.е.  $|S_{n+p} - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$$2. \sum a_n \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$$

Сведём к теореме Стокса-Зайдля.

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ a_n, & x = x_0 \end{cases} \text{ — задано на } U \cup \{x_0\}, \text{ непрерывно в } x_0.$$

$\sum \tilde{u}_n(x)$  — равномерно сходится на  $E \cup \{x_0\} \Rightarrow$  сумма ряда непрерывна в  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum \tilde{u}_n(x) = \sum \tilde{u}_n(x_0) = \sum a_n$$

$$\sup_x \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right|}_{\rightarrow 0}$$

□

## 2.31 Теорема о перестановке двух предельных переходов

- $f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$
- $x_0$  — предельная точка  $E$
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{E} S(x)$
- $f_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A_n$

Тогда:

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2.  $S(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} A$

То есть пунктирные преобразования верны:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & S(x) \\ x \rightarrow x_0 \downarrow & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ A_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & A \end{array}$$

*Доказательство.*  $u_1 = f_1, \dots, u_k = f_k - f_{k-1} \dots$

$$a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$$

Тогда  $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ,  $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

В эти обозначениях  $\sum u_k(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$ .

$$u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k$$

Тогда по т. 4'  $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$  имеет конечный предел при  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum a_k = A$$

□

## 2.32 ! Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

- $\sum a_n(x)b_n(x)$  — вещественный ряд.
- $x \in X$
- Частичные суммы ряда  $\sum a_n$  равномерно ограничены :

$$\exists C_a \quad \forall N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq C_a$$

- $\forall x$  последовательность  $b_n(x)$  — монотонна по  $n$  и  $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{X} 0$

Тогда ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  равномерно сходится на  $X$

*Доказательство.* Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$\sum_{M \leq k \leq N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{M \leq k \leq N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$



$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_A |b_N| + C_A |b_{M-1}| + \sum_{M \leq k \leq N-1} C_A |b_k - b_{k+1}| \\
&\leq C_A \left( |b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \\
&\leq C_A (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|)
\end{aligned} \tag{6}$$

(6) : Все разности одного знака  $\Rightarrow$  телескопически  $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : \forall l > K \quad \forall x \in X \quad |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при  $M, N > K \quad \forall x \in X$ :

$$\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

### 2.33 Теорема о круге сходимости степенного ряда

- $\sum a_n(z - z_0)^n$  — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех  $z \in C$
2. Ряд сходится только при  $z = z_0$
3.  $\exists R \in (0, +\infty)$  :
  - (a) при  $|z - z_0| < R$  ряд абсолютно сходится
  - (b) при  $|z - z_0| > R$  ряд расходится

*Доказательство.* Применим признак Коши:  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ , если  $r < 1$ , ряд сходится, если  $r > 1$ , ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|^n = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1.  $\overline{\lim} = 0$ . Тогда  $r = 0$ , есть абсолютная сходимость при всех  $z$ .
2.  $\overline{\lim} = +\infty$ . Тогда  $r = +\infty$  при  $z \neq z_0$ . При  $z = z_0$  сходимость очевидна.
3.  $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$ . Тогда  $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{def}}{=} R$

□

### 2.34 Теорема о непрерывности степенного ряда

- $\sum a_n(z - z_0)^n$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:

1.  $\forall r : 0 < r < R$  ряд сходится равномерно на  $\overline{B(z_0, r)}$
2.  $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$  — непрерывна в  $B(z_0, r)$

*Доказательство.*

1. Если  $0 < r < R$ , то при  $z = r$  ряд абсолютно сходится, т.е.  $\sum |a_n|r^n < +\infty$

Признак Вейерштрасса:

(а) При  $|z - z_0| \leq r$   $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n$

(б)  $\sum |a_n|r^n < +\infty$

$\Rightarrow$  есть сходимость на  $\overline{B(z_0, r)}$

2. Следствие из пункта 1 и теоремы Стокса-Зайдля.

Если  $z$  удовлетворяет  $|z - z_0| < R$ , то  $\exists r_0 < R : z \in B(z_0, r_0)$

На  $B(z_0, r_0)$  есть равномерная сходимость  $\Rightarrow f$  непр. в точке  $z$ .

□

### 2.35 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

(A)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, 0 < R < +\infty$

(A')  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$

Тогда:

1. Радиус сходимости (A') равен  $R$
2.  $\forall z \in B(z_0, R) \exists f'(z)$  и  $f'(z) = \sum n a_n(z - z_0)^{n-1}$

*Доказательство.*

1. По формуле Адамара.

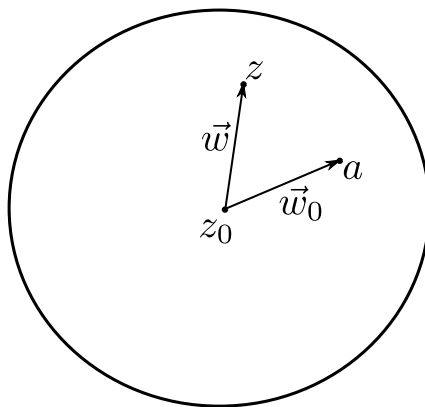
Ряд (A') сходится при каком-то  $z \Leftrightarrow \sum n a_n(z - z_0)^{n-1}$  — сходится.

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{1 \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

$$2. \triangleleft a \in B(z_0, R), \exists r < R : a \in B(z_0, r)$$

$$a = z_0 + w_0, |w_0| < r$$

$$z = z_0 + w$$



$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}}_{\text{модуль по лемме } nr^{n-1}|a_n|} \quad (7)$$

$\sum nr^{n-1}|a_n|$  сходится по пункту 1.

То есть ряд (7) в круге  $z \in B(z_0, r)$

$$\lim \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum na_n(a - z_0)^{n-1}$$

□

*Следствие 3.*

- $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$
- $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1.  $\sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$  имеет тот же радиус сходимости, что и  $f$
2.  $\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$

*Пример.*

$$\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + C$$

$$f(x) := \operatorname{arcctg} x$$

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arcctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} 0 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

То же самое можно получить, взяв определенный интеграл.

Возможно, это не то следствие и пример.

## 2.36 Свойства экспоненты

$$1. \exp(0) = 1$$

$$2. \exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$$

Доказательство?

## 2.37 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

- $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  — сходится
- $c_n \in \mathbb{C}$
- $f(x) = \sum c_n x^n$
- $R \geq 1$
- $-1 < x < 1$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum c_n$

*Доказательство.* Ряд  $\sum c_n x^n$  равномерно сходится на  $[0, 1]$  по признаку Абеля при  $a_n(x) = c_n, b_n(x) = x^n$ .

Функции  $c_n x^n$  непрерывны на  $[0, 1]$   $\xrightarrow{\text{Стокса-Зайдля}} \sum c_n x^n$  — непр. на  $[0, 1]$  □

*Следствие 4 (т. Абеля).*

- $\sum a_n = A$

- $\sum b_n = B$
- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
- $\sum c_n = C$

Тогда  $C = AB$

*Доказательство.*  $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1]$

При  $x < 1$  есть абсолютная сходимость  $f(x)$  и  $g(x)$ . Можно перемножать:  $f(x)g(x) = h(x)$ , при  $x \rightarrow 1 - 0$   $A \cdot B = C$   $\square$

## 2.38 Единственность разложения функции в ряд

$f$  — разлагается в степенной ряд в окрестности  $x_0$ , если:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists C_n - \text{вещ. посл.} \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - x_0)^n \quad (8)$$

**Теорема 1** (о единственности).  $f$  разлагается в степенной ряд в окрестности  $x_0$ . Тогда разложение единственно.

*Доказательство.* Выполняется (8).

База:

$$C_0 = f(x_0) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n C_n (x - x_0)^{n-1}$$

Переход:

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) C_n (x - x_0)^{n-k} \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$\square$

## 2.39 Разложение бинома в ряд Тейлора

$\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\sigma}{n} x^n + \dots$$

*Доказательство.* При  $|x| < 1$  ряд сходится по признаку Даламбера:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{\sigma!}{(n+1)!(n+1-\sigma)!} x^{n+1}}{\frac{\sigma!}{n!(n-\sigma)!} x^n} \right| = \left| \frac{(\sigma - n)x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| < 1$$

Обозначим сумму ряда через  $S(x)$ .

Наблюдение:  $S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$$S'(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} x^n + \dots$$

$$S(x) = \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\begin{aligned} (1+x)S' &= \dots + \left( \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n)}{n!} + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} n \right) x^n + \dots \\ &= \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!} \sigma x^n + \dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} \quad f'(x) = \frac{S'(1+x)^\sigma - \sigma(1+x)^{\sigma-1}S}{(1+x)^{2\sigma}} = 0$$

$$\Rightarrow f = \text{const}, f(0) = 1 \Rightarrow f \equiv 1 \Rightarrow S(x) = (1+x)^\sigma$$

□

## 2.40 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$$f \in C^\infty(x_0 - h, x_0 + h)$$

Тогда  $f$  — раскладывается в ряд Тейлора в окрестности  $x_0 \iff$

$$\exists \delta, C, A > 0 \quad \forall n \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$$

*Доказательство.*

$$\Leftarrow \text{ формула Тейлора в } x_0 : f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

Если

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

, то  $f$  раскладывается в ряд Тейлора. Из условия мы знаем:

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq C |A(x - x_0)|^n$$

Тогда при  $C|A(x - x_0)|^n \rightarrow 0$   $f$  раскладывается в ряд Тейлора.

$$C|A(x - x_0)|^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$$

Таким образом,  $f$  раскладывается в ряд Тейлора в области  $(x_0 - \min(\delta, \frac{1}{A}), x_0 + \min(\delta, \frac{1}{A}))$

$$\Rightarrow f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Возьмём  $x_1 \neq x_0$ , для которого разложение верно.

(а) при  $x = x_1$ , ряд сходится  $\Rightarrow$  слагаемые  $\rightarrow 0 \Rightarrow$  слагаемые ограничены:

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \leq C_1 \Leftrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! B^n$$

, где  $B = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$

Таким образом, мы оценили производную в  $x_0$ , но нужно уметь оценивать и производную в окрестности  $x_0$ .

(b)

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1) \dots (n-m+1) (x - x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Пусть  $|x - x_0| < \frac{1}{2B}$

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \right| \\ &\leq \sum \frac{C_1 n! B^n}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \\ &= C_1 B^m \sum \frac{n!}{(n-m)!} \underbrace{(B|x - x_0|)^{n-m}}_{< \frac{1}{2}} \\ &= \frac{C_1 B^m m!}{\underbrace{(1 - B|x - x_0|)^{m+1}}_{> \frac{1}{2}}} \\ &< C_1 2^{m+1} B^m m! \end{aligned} \tag{9}$$

$$= \underbrace{(2C_1)}_C \underbrace{(2B)}_A^m m!$$

(9): по следствию 2.

Эта оценка выполняется при  $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2B}$

□

## 2.41 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность интеграла по полю.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall U, V - \text{векторные поля} \quad I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$$

*Доказательство.* Очевидно из формулы 1.25 в определении. □

2. Аддитивность при дроблении пути

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $c \in (a, b)$
- $\gamma^1 = \gamma|_{[a, c]}$
- $\gamma^2 = \gamma|_{[c, b]}$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

*Доказательство.* Очевидно из линейности интеграла в 1.25. □

3. Замена параметра

- $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$
- $\varphi \in C^1$
- $\varphi(p) = a$
- $\varphi(q) = b$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

*Доказательство.* Это замена переменной в интеграле.



$$\begin{aligned}
I(V, \tilde{\gamma}) &= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(s) \rangle ds \\
&= \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \tilde{\gamma}'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\
t &:= \varphi(s) \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \tilde{\gamma}'(t) \rangle dt \\
&= I(V, \gamma)
\end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — параметризация гладкого одномерного простого многообразия

$\tilde{\varphi} : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — то же самое

По теореме о двух параметризациях:  $\exists$  диффеоморфизм  $\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b]$   $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

#### 4. Объединение носителей

- $\gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\gamma^1(b) = \gamma^2(c)$

Зададим путь  $\gamma = \gamma^2 \gamma^1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma^2(t + c - b), & t \in [b + d - c] \end{cases}$

В точке  $b$  возможен излом, т.е. нет  $\gamma'(b)$ , но есть левосторонняя и правосторонняя производные.

Если  $\gamma^1, \gamma^2$  — кусочно-гладкие, то  $\gamma$  — кусочно-гладкое.

Тогда  $I(V, \gamma^2 \gamma^1) = I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
I(V, \gamma) &= \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
\tau &:= t - b + c \\
&= \int_a^b \langle V(\gamma^1(t)), \gamma^{1'}(t) \rangle dt + \int_c^d \langle V(\gamma^2(\tau)), \gamma^{2'}(\tau) \rangle d\tau
\end{aligned}$$

$$= I(V, \gamma^1) + I(V, \gamma^2)$$

□

### 5. Противоположный путь

$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto \gamma(a + b - t)$ , т.е. мы идём от  $b$  к  $a$ , а не наоборот.

Тогда  $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^-) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - \tau)), -\gamma'(a + b - \tau) \rangle d\tau \\ t &:= a + b - \tau \\ &= \int_b^a \langle V(\gamma(t)), -\gamma'(t) \rangle (-dt) \\ &= -I(V, \gamma) \end{aligned}$$

□

### 6. Оценка интеграла векторного поля пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

, где  $L = \gamma[a, b]$  — носитель пути.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{x \in L} |V(x)| l(\gamma) \end{aligned} \tag{11}$$

(10): Неравенство Коши-Буняковского

(11):  $V$  — непр.,  $L$  — компакт  $\Rightarrow$   $\sup$  достигается

□

## 2.42 ! Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $V$  — потенциально
- $f$  — потенциал  $V$
- $\gamma[a, b] \rightarrow O$
- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

Тогда

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = f(B) - f(A)$$

*Доказательство.* Рассмотрим случаи:

1.  $\gamma$  — гладкий

$$\Phi(t) = f(\gamma(t))$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\gamma'_m(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum v_k dx_k &= \int_a^b \Phi'(t) dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

2.  $\gamma$  — кусочно-гладкий

$\exists$  дробление:  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b : \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$  — гладкое

$$\int_{\gamma} \sum v_k dx_k = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) \\
 &= f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) \\
 &= f(B) - f(A)
 \end{aligned} \tag{12}$$

(12): по пункту 1.

□

## 2.43 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

$V$  — векторное поле в области  $O$ . Тогда эквивалентны следующие:

1.  $V$  — потенциально
2.  $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i$  не зависит от пути в  $O$
3.  $\forall \gamma$  — кусочно-гладкий, замкнутый в  $O$   $\int_{\gamma} \sum v_i dx_i = 0$

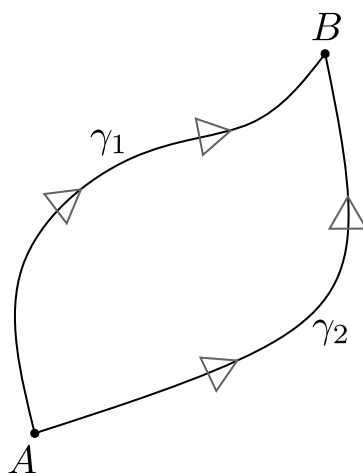
*Доказательство.*

1 $\Rightarrow$ 2 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

2 $\Rightarrow$ 3  $\gamma$  — петля:  $[a, b] \rightarrow O$ .  $\gamma(a) = \gamma(b) = A$

Рассмотрим постоянный путь  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O, t \mapsto A$ . По свойству 2:  $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V, \gamma' \rangle dt = 0$

3 $\Rightarrow$ 2  $\gamma_1, \gamma_2$  — пути с общим началом и концом. Тогда  $\gamma := \gamma_2^{-1} \gamma_1$  — петля.  $\gamma$  — кусочно гладкий  $\Rightarrow \int_{\gamma} = 0$

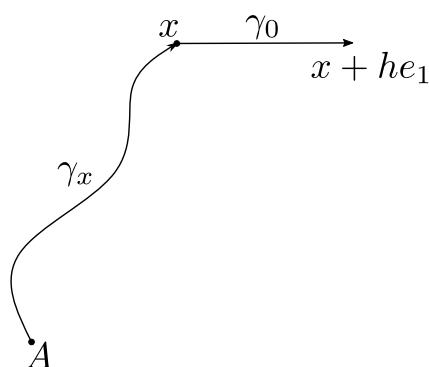


$2 \Rightarrow 1$  Фиксируем  $A \in O$ .

$\forall x \in O$  выберем кусочно-гладкий путь  $\gamma_x$  из  $A$  в  $x$ . Проверим, что  $f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i$  — потенциал.

Достаточно проверить, что  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1$  в  $O$ .

Фиксируем  $x \in O$ .  $\gamma_0(t) = x + t h e_1, t \in [0, 1], \gamma'_0(t) = (h, 0 \dots 0) = h e_1$



$$\begin{aligned}
 f(x + h e_1) - f(x) &= \int_{\gamma_{x+h e_1}} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} \\
 &= \int_{\gamma_0} \\
 &= \int_0^1 V_1(\gamma_0(t)) h dt \\
 &= h V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n)
 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{f(x + h e_1) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x_1 + c h_1, x_2 \dots x_n) \xrightarrow{h \rightarrow 0} V_1(x)$$

□

## 2.44 ! Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

$V$  — гладкое, потенциальное в  $O$

Тогда

$$\forall x \in O \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \quad (13)$$

*Доказательство.* Непрерывные производные не изменяются при порядке дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)$$

□

Лемма Пуанкаре:

- $O \subset \mathbb{R}^m$  — **выпуклая область**
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  — **векторное поле**
- $V$  удовлетворяет 13, в т.ч.  $V$  — гладкое.

Тогда  $V$  — потенциальное.

*Доказательство.* Фиксируем  $A \in O$

$$\forall x \in O \quad \gamma_x(t) := A + t(x - A), t \in [0, 1]$$

$$\gamma'_x(t) = x - A$$

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(A + t(x - A))(x_k - A_k) dt$$

Проверим, что  $f$  — потенциал.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \text{правило Лейбница}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 V_j(A + t(x - A)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\dots) t(x_k - A_k) dt \\ &= \int_0^1 (tV_j(A + t(x - A)))'_t dt \\ &= tV_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= V_j(x) \end{aligned} \quad (14)$$

(14): по (13).

□

Лемма Пуанкаре о локальной потенциальности:

- $O \subset \mathbb{R}^m$  — любая область
- $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  — векторное поле
- $V$  удовлетворяет 13.

Тогда  $V$  — локально потенциально.

## 2.45 Лемма о гусенице

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$  — непр.

Тогда  $\exists$  дробление  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  и  $\exists$  шары  $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$ .

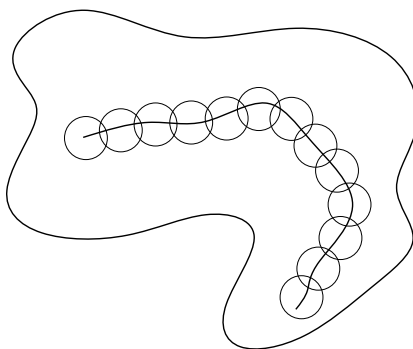


Рис. 5: “Гусеница” — покрытие пути шарами

*Доказательство.*  $\forall c \in [a, b]$  возьмём  $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$ .

$$\overline{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

$$\overline{\beta}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[c, \alpha] \subset B_c\} \text{ — момент первого выхода после посещения точки } \gamma(c)$$

Возьмём  $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом  $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$  — открытое покрытие  $[a, b]$ , если для  $c = a$  или  $c = b$  вместо  $\alpha_c, \beta_c$  брать  $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$$[a, b] \text{ — компактно} \implies [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$$

Не умаляя общности ни один интервал не накрывается целиком остальными  $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$ , принадлежащая “только этому” интервалу.



Рис. 6: Выбор точек  $t_k$

Точка  $t_k$  выбирается на  $d_k, d_{k+1}$  и  $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1})$ .

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$$

□

## 2.46 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

- $V$  — локально-потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$  —  $V$ -похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$$

*Доказательство.* Рассмотрим общую  $V$ -гусеницу. Пусть  $f_k$  — потенциал  $V$  в шаре  $B_k$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что  $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$  при  $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (15)$$

(15): По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для  $\tilde{\gamma}$  воспользуемся свойством:  $f_k|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}|_{B_k \cap B_{k+1}}$  и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

## 2.47 Лемма о похожести путей, близких к данному

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O$  — непр.
- $V$  — локально-потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда  $\exists \delta > 0$  : если  $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$  таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда  $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$   $V$ -похожи.



*Доказательство.* Берём  $V$ -гусеницу для  $\gamma$ .

$$\delta_k\text{-окрестность множества } A := \{x : \exists a \in A \ \rho(a, x) < \delta\} = \bigcap_{a \in A} B(a, \delta)$$

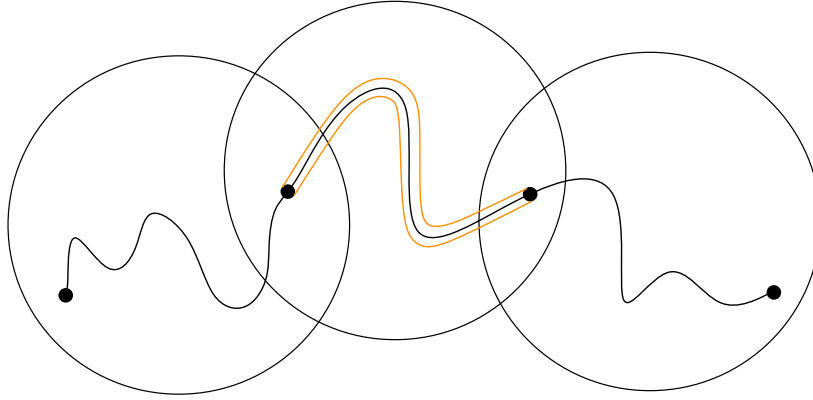


Рис. 7:  $\delta_k$ -окрестность множества  $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

$$\forall k \ \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть  $B_k = B(w, r)$ , функция  $t \in [\gamma_{k-1}m, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$  непрерывна  $\Rightarrow$  достигается  $\max, \rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

$$\delta_k := \frac{r-r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$$

□

## 2.48 Равенство интегралов по гомотопным путям

- $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma_0, \gamma_1$  — связанно гомотопные пути

$$\text{Тогда } \int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$$

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma$  — гомотопия  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

$$\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что  $\Phi(u) = \text{const}$ . Докажем более простой факт, что  $\Phi$  — локально постоянна, тогда в силу компактности отрезка  $\Phi$  будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \ \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

$\Gamma$  — непр. на  $[a, b] \times [0, 1]$  — комп.  $\Rightarrow \Gamma$  равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \exists \sigma > 0 \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём  $\delta$  из леммы о похожести близких путей (2.47) для пути  $\gamma_{u_0}$ .

Если  $|u - u_0| < \delta$   $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$  при  $t \in [a, b]$ , т.е.  $\gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$  похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по  $\gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$  таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь  $\tilde{\gamma}_{u_0}$ ,  $\frac{\delta}{4}$ -близкий к  $\gamma_{u_0}$ , т.е.

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь  $\tilde{\gamma}_u$ ,  $\frac{\delta}{4}$ -близкий к  $\gamma_u$ . Тогда  $\tilde{\gamma}_{u_0}$  и  $\tilde{\gamma}_u$  -  $\delta$ -близкие к  $\gamma_{u_0} \Rightarrow$  они  $V$ -похожи  $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

Таким образом,  $\Phi(u) = \Phi(u_0)$  при  $|u - u_0| < \delta$ , т.е.  $\Phi$  — локально постоянна.  $\square$

## 2.49 Теорема Пуанкаре для односвязной области

- $O \subset \mathbb{R}^m$  — односвязная область
- $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O$

Тогда  $V$  — потенциальное в  $O$

*Доказательство.*  $V$  — локально потенциально,  $\triangleleft \gamma_0$  — кусочно-гладкая петля, тогда  $\gamma_0$  гомотопна постоянному пути  $\gamma_1 \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеристизации потенциальных векторных полей в терминах интегралов  $V$  потенциально.  $\square$

## 2.50 Теорема о веревочке

- $O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O, t \mapsto (\cos t, \sin t)$

Тогда эта петля нестягиваема.

Неформальная формулировка: пусть даны две плоскости, соединенные гвоздём, между плоскостями есть зазор. На гвоздь надета веревочка в виде петли. Можно ли снять веревочку с гвоздя?

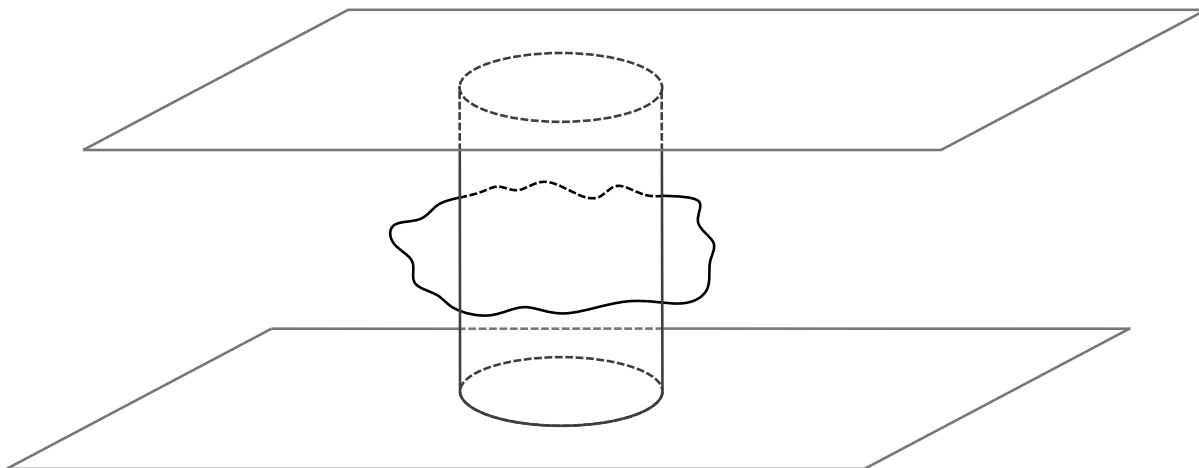


Рис. 8: Веребочка (жирным), надетая на “гвоздь” (цилиндр)

Доказательство.  $V(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  — векторное поле в  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Таким образом,  $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$  в области  $O$ . Тогда по лемме Пуанкаре  $V$  — локально потенциально.

При этом

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum V_i dx_i &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Таким образом, если бы существовал постоянный путь  $\tilde{\gamma}$ , которому  $\gamma$  гомотопен, то  $\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}} = 0$ , но это не так.  $\square$

## 2.51 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объем. Тогда  $\mu$  имеет свойства:

1. Усиленная монотонность

$$\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}_{\text{дизъюнкты}} \in \mathcal{P} \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subset A \quad \sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность

$$\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

3.  $\forall A, B \in \mathcal{P}$  пусть ещё известно  $A \setminus B \in \mathcal{P}$ ,  $\mu(B)$  — конечно. Тогда  $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

*Доказательство.*

1. Усиление аксиомы 3 из определения полукольца:

$$A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigsqcup_{l=1}^S B_l$$

Это было доказано ранее. Теорема ???  $A = (\bigsqcup A_i) \cup (\bigsqcup B_l)$  — дизъюнктное объединение конечного числа множеств.

$$\mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geq \sum \mu A_i$$

- 2.

$$B_k := A \cap A_k \in \mathcal{P} \quad A = \bigcup_{\text{кон.}} B_k$$

Сделаем это множество дизъюнктным.

$$C_1 := B_1, \dots, C_k := B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) \quad A = \bigsqcup_{\text{кон.}} C_k$$

Но эти  $C_k$  вообще говоря  $\notin \mathcal{P}$

$$C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_j D_{kj} \in \mathcal{P}$$

$$\text{Тогда } A = \bigsqcup_{k,j} D_{k_j} \quad \mu A = \sum \mu D_{k_j}$$

$$\text{При этом } \forall k \quad \sum_j \mu D_{k_j} = \mu C_k \stackrel{\text{монот.}\mu}{\leq} \mu A_k$$

$$\text{Итого } \mu A = \sum_k \sum_k \mu D_{k_j} = \sum \mu C_k \leq \sum \mu A_k$$

3. (a)  $B \subset A \quad A = B \cup (A \setminus B) \quad \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B)$   
 (b)  $B \not\subset A \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$

□

*Примечание.* 1. В пунктах 1 и 2 не предполагается, что  $\bigcup A_i \in \mathcal{P}$

2. В пункте 3 если  $\mathcal{P}$  — алгебра, условие  $A \setminus B \in \mathcal{P}$  можно убрать.

## 2.52 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$\mu : \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{полукольцо}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} - \text{объем.}$

Тогда эквивалентно:

1.  $\mu$  — мера, т.е.  $\mu$  — счётно-аддитивна.
2.  $\mu$  — счётно-полуаддитивна:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$  как в предыдущей теореме.

$$2 \Rightarrow 1 \quad A = \bigsqcup A_i \stackrel{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum \mu A_i$$

$$\forall N \quad A \supset \bigsqcup_{i=1}^N A_i \quad \mu A \geq \sum_{i=1}^N \mu A_i$$

$$A \subset \bigcup A_i \text{ (на самом деле } A = \bigsqcup A_i) \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

$$\Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$$

□

## 2.53 Теоремы о непрерывности сверху

- $\mathfrak{A}$  — алгебра
- $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$  — объем.
- $\mu$  — конечный объем.

Тогда эквивалентно:

1.  $\mu$  — мера, т.е.  $\mu$  счётно-аддитивная.
2.  $\mu$  — непрерывна сверху:

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots, A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$$

*Доказательство.*

$$1 \Rightarrow 2 \quad B_k = A_k \setminus A_{k+1}, A_1 = \bigsqcup B_k \cup A \\ \mu A_1 = \sum \mu B_k + \mu A$$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} B_k \cup A \quad \mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu A$$

$$2 \Rightarrow 1 \quad \text{Проверим, что } C = \bigsqcup C_i \stackrel{?}{=} \mu C = \sum \mu C_i.$$

Пусть  $A_k := \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_i$ . Тогда  $A_k \in \mathfrak{A}$ , т.к.  $A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^k C_i$  — конечное объединение.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \sqcup A_k \quad \mu C = \sum_{i=1}^k \mu C_i + \mu A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum \mu C_i$$

□

Какие ещё теоремы?

## 2.54 Счетная аддитивность классического объема

- $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — классический объем в  $\mathbb{R}^m$

Тогда  $\sigma$  — конечная мера

*Доказательство.*  $\sigma$ -конечность очевидна.

Докажем счётную аддитивность  $\mu$ .

Для этого достаточно проверить счётную полуаддитивность:

$$P = [a, b), P_n = [a_n, b_n) \quad P \subset \bigcup P_n \quad \mu P \stackrel{?}{\leq} \sum \mu P_n$$

Если  $P = \emptyset$ , то утверждение тривиально. Пусть  $P$  непустое.

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Чуть уменьшим координаты вектора  $b$ , так что  $[a, b'] \subset [a, b)$  и  $\mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$ . Последняя формула некорректна, т.к.  $P \setminus [a, b')$  не обязательно ячейка. Но оно представимо в виде  $\bigsqcup D_j$ , поэтому под  $\mu(P \setminus [a, b'))$  подразумевается  $\sum \mu D_j$ . Также можно было записать  $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$  вместо этих трюков.

Уменьшим слегка координаты векторов  $a_n$ , так что  $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n)$ ,  $\mu([a'_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Эта запись также некорректна, поэтому напомним  $\mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\underbrace{[a, b']}_{\text{комп.}} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists \text{ конечное подпокрытие: } [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [a'_n, b_n)$$

$$\text{Тогда } \mu[a, b') \leq \sum_{n=1}^N \mu[a'_n, b_n)$$

$$\begin{aligned} \mu P - \varepsilon &\leq \sum_{n=1}^N \left( \mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ \mu P - \varepsilon &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 2.55 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

1.  $O \subset \mathbb{R}^m$  — открытое. Тогда  $O = \bigsqcup Q_i$ , где  $Q_i$  — ячейки с рациональными координатами. Можно считать, что ячейки кубические.
2. Можно считать, что  $\overline{Q_i} \subset O$
3.  $E$  — измеримо,  $\lambda E = 0$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad E \subset \bigcup Q_i : Q_i \text{ — кубические ячейки и } \sum \lambda Q_i < \varepsilon$

*Доказательство.*

(a, b)  $\forall x \in O$  пусть  $Q(x)$  — какая угодно ячейка с рациональными координатами,  $Q(x) \subset O$  (можно потребовать  $\overline{Q(x)} \subset O$ ,  $Q$  — куб, координаты двоично-рациональны для второго пункта).

$O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$  — здесь не более чем счётное множество различных ячеек.

$\Rightarrow O = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$ . Сделаем ячейки дизъюнктными:  $Q_1 := Q(x_1)$ ,  $Q(x_2) \setminus Q(x_1) = \bigcup D_j$ . Переобозначим  $D_j$  как  $Q_2, Q_3 \dots Q_k$ . Аналогично для всех  $Q(x_i)$ .

Можно считать, что координаты всех ячеек двоично рациональны.

Ячейки можно подразбить, чтобы они стали кубическими: пусть  $2^l$  — самый крупный знаменатель. Тогда  $[a_i, b_i]$  — конечное объединение кубических ячеек со стороной  $\frac{1}{2^l}$

(c) Следует из пункта 5 теоремы о продолжении Лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ячейки } P_k \quad E \subset \bigcup P_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda P_k \leq \varepsilon$$

$\exists \tilde{P}_k$  — двоично-рациональные ячейки:

$$P_k \subset \tilde{P}_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda_k \tilde{P}_k \leq 2\varepsilon$$

Можно разбить  $\tilde{P}_k$  на конечное число кубов.

□

## 2.56 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Зададим отношение  $\sim$  на  $\mathbb{R}$ :  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = A$  — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать, что  $A \subset [0, 1]$

Очевидно, что  $\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$

$$[0, 1] \stackrel{(1)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \stackrel{(2)}{\subset} [-1, 2]$$

Измеримо ли  $A$ ? Предположим, что да.

Очевидно  $\forall q \quad \lambda A = \lambda(A + q)$  по пункту 5 теоремы о продолжении меры.

Из (1):

$$\lambda[0, 1] = 1 \leq \sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$$



Из (2):

$$\lambda\left(\bigcup(A+q)\right) = \sum_q \lambda A \leq \lambda[-1, 2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$$

Противоречие  $\Rightarrow A$  неизмеримо.

## 2.57 Регулярность меры Лебега

$\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G - \text{откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F - \text{замкн.}}} \lambda(F) \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K - \text{комп.}}} \lambda(K)$$

*Доказательство.*  $(*)$  следует из  $\sigma$ -конечности  $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n)$ , где  $Q(a, R) = \times_{i=1}^n [a_i - R, a_i + R]$  — куб с центром в  $a$  и ребром  $R$ .

$\lambda(A \cap Q(0, n)) \rightarrow \lambda A$  по непрерывности снизу, т.к.  $A \cap Q(0, n)$  хорошо аппроксимируется замкнутым множеством.  $\square$

## 2.58 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

- $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непр.
- $\forall E \in \mathfrak{M}^m: \lambda E = 0$  выполняется  $\lambda T E = 0$

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad T A \in \mathfrak{M}^n$

*Доказательство.*

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N}$$

, где  $K_j$  — компакт,  $\lambda \mathcal{N} = 0$

$$T A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} T K_j \cup T \mathcal{N}$$

$T K_j$  компакт как образ компакта при непрерывном отображении.  $\Rightarrow T A$  измеримо.  $\square$

## 2.59 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

- $O \subset \mathbb{R}^m$  открыто
- $\Phi: O \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\Phi \in C^1(O)$

Тогда  $\forall A \in \mathcal{O} : A \in \mathfrak{M}^m \quad \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$ , т.е. образ измеримого множества измерим.

*Доказательство.* Достаточно проверить свойства  $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ шары } B_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \lambda B_i < \varepsilon$$

$\Rightarrow$  из теоремы о Лебеговском продолжении меры.

$\Leftarrow$  по полноте меры Лебега.

$$1. \quad E \subset P \subset \overline{P} \subset O, \lambda E = 0$$

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$$

Тогда

$$\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$$

— неравенство Лагранжа.

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr)$$

$$B_i := B(x_i, r_i), y_i := \Phi(x_i)$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr_i) \subset \bigcup Q(y_i, Lr_i)$$

$$\sum \lambda \Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = (2L)^m \sum r_i^m$$

Было  $\sum (2r_i)^m < \varepsilon (\sqrt{m})^m$ , стало  $\sum \lambda \Phi(B_i) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon (\sqrt{m}L)^m$

2. Рассмотрим произвольный случай, то есть  $E \subset O$

$$O = \bigsqcup Q_i, \text{ где } Q_i \text{ — кубические ячейки, } Q_i \subset \overline{Q}_i \subset O$$

$$E = \bigsqcup (E \cap Q_i), \lambda(E \cap Q_i) = 0. \text{ Тогда по пункту 1 } \lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$$

$$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$$

□

## 2.60 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  ортогонально.

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ :

$$1. \quad TA \in \mathfrak{M}^m$$

$$2. \lambda(TA) = \lambda A$$

*Доказательство.*

1.  $T \in C^1$ , поэтому измеримость сохраняется.

$$2. \mu A := \lambda(TA)$$

$\mu$  — мера на  $\mathfrak{M}^m$  по лемме 1, при этом  $\mu$  инвариантно относительно сдвигов:

$$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \mu A$$

$$A \text{ ограничено} \Rightarrow TA \text{ ограничено} \Rightarrow \mu A < +\infty$$

По предыдущей теореме  $\lambda(TA) = k \cdot \lambda(A)$ . Какое у нас  $k$ ?

Возьмём шар  $B$ .  $TB$  — шар того же радиуса, т.е.  $TB$  — сдвинутый  $B$ , т.е.  $TB = B + x_0$ .

$$\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$$

□