$$\ln L(\vec{x}, a, \sigma^2) = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - a)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}(n\overline{x} - na) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_i - a)^2 - \frac{n}{\sigma}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \overline{x} \\ \hat{\sigma^2} = D_B \end{cases} \qquad M := (\overline{x}, D_B)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} = -\frac{n}{\sigma^2} = -\frac{n}{D_B}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} = -\frac{3}{\sigma^4} \sum (x_i - a)^2 + \frac{n}{\sigma^2} = -\frac{3}{D_B^2} \sum (x_i - \overline{x})^2 + \frac{n}{D_B} = -\frac{3n}{D_B} + \frac{n}{D_B} = -\frac{2n}{D_B}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3}(n\overline{x} - na) = 0$$

$$d^2 L(M) = -\frac{n}{D_B}(da)^2 + 2 \cdot 0 \cdot da d\sigma - \frac{2n}{D_B}(d\sigma)^2 = -\frac{n(da)^2 + 2n(d\sigma)^2}{D_B} < 0$$

Таким образом, M — точка максимума.

Примечание. Можно было посчитать по теореме Сильвестра.

Упражнение 1. $X \in B_p$. Найти оценку параметра p методом максимального правдоподобия.

Решение.

$$L(\vec{X}, p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{n - n\overline{x}} \cdot p^{n\overline{x}}$$

$$\ln L(\vec{X}, p) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p) \cdot \ln p \cdot (n - n\overline{x}) \cdot n\overline{x} = \ln(1-p) \cdot (n - n\overline{x}) + \ln p \cdot n\overline{x}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = -\frac{n - n\overline{x}}{1-p} + \frac{n\overline{x}}{p} = 0$$

$$n\overline{x}(1-p) + (n\overline{x} - n)p = 0$$

$$p = \overline{x}$$

□

Упражнение 2. $X \in E_\alpha$. E_α — регулярное ли семейство? Найти $I(\alpha)$.

Решение. $f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Носитель $C = (0, \infty)$. Можно выкинуть точку 0, т.к. она имеет меру 0.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\ln \alpha - \alpha x) = \frac{1}{\alpha} - x$$

Эта функция непрерывна $\forall \alpha \in C$.

$$I(\alpha) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(f_\alpha(X))\right) = \mathbb{E}\left(X - \frac{1}{\alpha}\right) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}X\right) = \mathbb{D}X = \frac{1}{\alpha^2}$$

□

Упражнение 3. То же самое, но для $X \in E_{\frac{1}{\alpha}}$

Решение.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\ln \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\alpha^2}$$

$$I(\alpha) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f_\alpha(x)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^4}\mathbb{E}(X - \alpha)^2 = \frac{1}{\alpha^4}\mathbb{D}X = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^* = \overline{x}$$

$$\mathbb{D}\alpha^* = \mathbb{D}\overline{x} = \frac{\mathbb{D}x}{n} = \frac{\alpha^2}{n}$$

$$\mathbb{D}\alpha^* \geq \frac{1}{nI(\alpha)}$$

$$\frac{\alpha^2}{n} = \frac{\alpha^2}{n}$$

Таким образом, оценка эффективная. □

Упражнение 4. Для $X \in U(0, \theta)$ найти информацию фишера, проверить регулярность.

$\theta^* = 2\overline{X}^*$ — по м. моменты, $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ — ОМП.