Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним правила расстановки скобок в лямбда-выражениях. Лямбда-абстракция ведёт себя жадно: включает всё, что может. Пример: $\lambda z.(\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e)\ f$ эквивалентно $\lambda z.((\lambda x.(a\,b\,c\,(\lambda y.(d\,e))))\ f)$. В аппликациях скобки расставляются слева направо: $\lambda z.(\lambda x.(a\,b\,c\,(\lambda y.(d\,e))))\ f$ можно преобразовать в $(\lambda z.((\lambda x.((((a\,b)\,c)\,(\lambda y.(d\,e)))))\ f))$.

   (a) Расставьте скобки в выражении: $\lambda z.\lambda x.a\ b\ c\ \lambda y.d\ e\ f$

   Решение.
   $$\lambda z.(\lambda x.(((a\ b)\ c)\ (\lambda y.((d\ e)\ f))))$$
   □

   (b) Уберите все «лишние» скобки из выражения: $(\lambda f.((\lambda x.(f\ (f\ (x\ (\lambda z.(z\ x))))))\ z))$

   Решение.
   $$\lambda f.\lambda x.(f\ f\ x\ (\lambda z.z\ x))\ z$$
   Почему z не под λz? □

   (c) Всегда ли лишние скобки можно убрать единственным образом (когда из результирующего выражения нельзя больше убрать ни одной пары скобок)? Докажите или опровергните.

2. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x\ F\ T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$	конъюнкция

   Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

   (a) $T\ F$

   Решение.
   $$T\ F \to_\beta (\lambda a.\lambda b.a)\ F \to_\beta \lambda b.F$$
   □

   (b) $(T\ Not\ (\lambda t.t))\ F$

   Решение.
   $$\begin{aligned}(T\ Not\ (\lambda t.t))\ F &\to_\beta \\ ((\lambda b.Not)\ (\lambda t.t))\ F &\to_\beta \\ Not\ F &\to_\beta\end{aligned}$$

$$F\ F\ T \to_\beta$$
$$(\lambda b.b)\ T \to_\beta T$$

□

(c) $And\ (And\ F\ F)\ T$

Решение.

$$And\ (And\ F\ F)\ T \to_\beta$$
$$And\ ((\lambda y.F\ y\ F)\ F)\ T \to_\beta$$
$$And\ ((\lambda y.(\lambda b.b)\ F)\ F)\ T \to_\beta$$
$$And\ ((\lambda y.F)\ F)\ T \to_\beta$$
$$And\ F\ T \to_\beta$$
$$(\lambda y.F\ y\ F)\ T \to_\beta$$
$$F\ T\ F \to_\beta$$
$$(\lambda b.b)\ F \to_\beta F$$

□

3. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

   (a) Дизъюнкция

   Решение. $\lambda a.\lambda b.a\ T\ b$ □

   (b) Штрих Шеффера («и-не»)

   Решение. $\lambda a.\lambda b.a\ (Not\ b)\ T$ □

   (c) Исключающее или

   Решение. $\lambda a.\lambda b.a\ (Not\ b)\ b$ □

4. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)}\ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)}\ (f\ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\overline{n}$	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)}\ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$	прибавление 1
$(+)$	$\lambda a.\lambda b.a\ (+1)\ b$	сложение
$(\cdot)$	$\lambda a.\lambda b.a\ ((+)\ b)\ \overline{0}$	умножение

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

(a) Умножение на 2 ($Mul2$)

Решение. $\lambda a.((+)\ a\ a)$ □

(b) Возведение в степень

Решение. $\lambda a.\lambda b.b\ ((\cdot)\ a)\ \overline{1}$ □

(c) Проверка на чётность

Решение. $\lambda a.a\ \text{Not}\ T$ □

(d) IsZero: возвращает T, если аргумент равен нулю, иначе F

Решение.

- $\text{Flip} \coloneqq \lambda a.a\ ((\cdot)\ \overline{0})\ \overline{1}$. $\text{Flip}(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ 0, & a \neq 0 \end{cases}$
- $\text{IsZero} \coloneqq \lambda a.(\text{Flip}\ a)\ \text{Not}\ T$

□

5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x\ a\ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p\ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p\ F$	правая проекция

(a) Убедитесь, что $PrL\ (MkPair\ a\ b) \twoheadrightarrow_\beta a$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{PrL}\ (\text{MkPair}\ a\ b) &\rightarrow_\beta \\ \text{PrL}\ (\lambda x.x\ a\ b) &\rightarrow_\beta \\ (\lambda p.p\ T)\ (\lambda x.x\ a\ b) &\rightarrow_\beta \\ (\lambda x.x\ a\ b)\ T &\rightarrow_\beta \\ T\ a\ b &\rightarrow_\beta a \end{aligned}$$

□

(b) Постройте операцию вычитания 1 из числа

Решение. $\lambda a.a\ (\text{PrL}\ (\lambda p.(\text{MkPair}\ (\text{PrR}\ p)\ ((+1)\ (\text{PrR}\ p))))\ (\text{MkPair}\ \overline{0}\ \overline{0}))$ □

(c) Постройте операцию вычитания чисел

Решение. $\lambda a.\lambda b.b\ (-1)\ a$ □

(d) Постройте операцию деления на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)

Решение. □

(e) Постройте операцию деления чисел

Решение. Пусть дробь $\frac{n}{m}$ есть применение коллбека f к m аргументам n раз *(распределенных равномерно)* с комбинирующим коллбеком g:

$$\frac{4}{3} \leftrightarrow \lambda f.\lambda g.\lambda a_1.\lambda a_2.\lambda a_3.g\ (f\ (f\ a_1))\ (f\ a_2)\ (f\ a_3)$$

Определим конвертер $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \text{FRAC}$:

$$\text{Frac} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.\lambda g.n\ (m\ (\lambda t.\lambda z.\lambda v.t\ (\lambda q.z\ q\ v))\ (\lambda x.x)\ (\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a)))\ g$$

$$t_1 = \lambda z.\lambda v.(\lambda x.x)\ (\lambda q.z\ q\ v) \to_\beta \lambda z.\lambda v.\lambda q.z\ q\ v$$
$$t_2 = \lambda z_1.\lambda v_1.(\lambda z_2.\lambda v_2.\lambda q_2.z_2\ q_2\ v_2)\ (\lambda q_1.z_1\ q_1\ v_1) \to_\beta \lambda z_1.\lambda v_1.\lambda v_2.\lambda q_2.z_1\ q_2\ v_1\ v_2$$
$$t_m = \lambda z.\lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.z\ q\ v_1\ v_2 \dots v_m$$
$$r_m \coloneqq t_m(\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a)) = \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda a.\lambda b.b\ (f\ a))\ q\ v_1\ v_2 \dots v_m$$
$$= \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.(\lambda b.b\ (f\ q))\ v_1\ v_2 \dots v_m$$
$$= \lambda v_1 \dots v_m.\lambda q.v_1\ (f\ q)\ v_2 \dots v_m$$
$$r_m\ g = \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q.g\ (f\ q)\ v_2 \dots v_m$$
$$r_m\ (r_m\ g) = \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q_1.(r_m\ g)\ (f\ q_1)\ v_2 \dots v_m$$
$$= \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q_1.(\lambda v_3 \dots v_m.\lambda q_2.g\ (f\ q_2)\ (f\ q_1)\ v_3 \dots v_m)\ v_2 \dots v_m$$
$$= \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q_1.(\lambda q_2.g\ (f\ q_2)\ (f\ q_1)\ v_2 \dots v_{m-1})\ v_m$$
$$= \lambda v_2 \dots v_m.\lambda q.g\ (f\ v_m)\ (f\ q)\ v_2 \dots v_{m-1}$$

Если $n < m$:

$$r_m^n\ g = \lambda v_2 \dots \lambda v_m.\lambda q.g\ (f\ v_{m-n+1}) \dots (f\ v_m)\ (f\ q)\ v_2 \dots v_{m-n}$$

Если $n \geq m$, то мы начинаем строить новый слой в скобках. Это то, что нам нужно.

Если не верится, то в `lci` можно вбить следующее: `(\n.\m.\f.\g.n (m (\t.\z.\v.t (\q.z q v)) (\x.x) (\a.\b.b (f a))) g) (\f.\x.f(f(f(f(x))))) (\f.\x.f(f(f(x))))` и получить $\frac{4}{3}$ из примера выше.

Из дроби легко получить результат *(с округлением вверх)* подстановкой вместо g функции, которая берет первый из m аргументов, f оставить свободной, вынести все a_i как x. Для округления вниз надо вместо g подставить функцию, которая берёт последний аргумент.

$$\text{Call} = \lambda f.\lambda n.\lambda x.n\ (\lambda g.g\ x)\ f \leftrightarrow f\ \underbrace{x \dots x}_{n}$$

$$\text{Last} = \lambda n.n\ (\lambda x.\lambda t.x)\ (\lambda x.x)\ (\lambda x.x) \leftrightarrow \lambda t_1 \dots t_n.t_n$$

$$\text{Floor} = \lambda m.\lambda z.\lambda f.\lambda x.\text{Call}\ (z\ f\ \text{Last})\ m\ x$$

$$\text{Div} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.\lambda x.\text{Floor}\ m\ (\text{Frac}\ n\ m)\ f\ x$$

□

(f) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго.

Решение. $\text{IsLess} = \lambda a.\lambda b.\text{IsZero}\ (-\ b\ a)$ □

6. Существует ли выражение A, что существуют такие выражения B и C, что $A \to_\beta B$ и $A \to_\beta C$, но B и C различны?

Решение. □

7. Будем говорить, что лямбда-выражение находится в нормальной форме, если в нём невозможно провести бета-редукции. Нормальной формой выражения называется результат (возможно, многократной) его бета-редукции, находящийся в нормальной форме. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

(a) $\overline{2}\ \overline{2}$

(b) $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$

(c) $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$

Решение. (a)

$$\begin{aligned}
\overline{2}\ \overline{2} &\to_\beta \\
(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ \overline{2} &\to_\beta \\
\lambda x.\overline{2}\ (\overline{2}\ x) &\to_\beta \\
\lambda x.\overline{2}\ ((\lambda g.\lambda y.g\ (g\ y))\ x) &\to_\beta \\
\lambda x.\overline{2}\ (\lambda y.x\ (x\ y)) &\to_\beta \\
\lambda x.(\lambda h.\lambda z.h\ (h\ z))\ (\lambda y.x\ (x\ y)) &\to_\beta \\
\lambda x.\lambda z.(\lambda y.x\ (x\ y))\ ((\lambda y.x\ (x\ y))\ z) &\to_\beta
\end{aligned}$$

$$\lambda x.\lambda z.(\lambda y.x\ (x\ y))\ (x\ (x\ z)) \to_\beta$$
$$\lambda x.\lambda z.x\ (x\ (x\ (x\ z))) \to_\beta \overline{4}$$

$\square$

8. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$. Напомним, что отношение бета-эквивалентности $(=_\beta)$ есть транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание отношения бета-редукции. Будем говорить, что выражение не имеет нормальной формы, если никакая конечная последовательность его бета-редукций не приводит к выражению в нормальной форме.

   (a) Покажите, что $Y\ f =_\beta f\ (Y\ f)$.

   Решение.

$$\begin{aligned} Y\ f &\to_\beta \\ (\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x)))\ f &\to_\beta \\ (\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x)) &\to_\beta \\ \underbrace{f\ ((\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x)))}_{\varphi} &\leftarrow_\beta f\ (Y\ f) \end{aligned}$$

   $Y\ f \twoheadrightarrow_\beta \varphi \Rightarrow Y\ f =_\beta \varphi$ и $f\ (Y\ f) \to_\beta \varphi \Rightarrow f\ (Y\ f) =_\beta \varphi$, следовательно $Y\ f =_\beta \varphi =_\beta f\ (Y\ f)$. $\square$

   (b) Покажите, что выражение $Y\ f$ не имеет нормальной формы;

   (c) Покажите, что выражение $Y\ (\lambda f.\overline{0})$ имеет нормальную форму.

   Решение.

$$\begin{aligned} Y\ (\lambda f.\overline{0}) &\to_\beta \\ (\lambda f.\overline{0})\ (Y\ (\lambda f.\overline{0})) &\to_\beta \overline{0} \end{aligned}$$

   $\square$

   (d) Покажите, что выражение $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ (f\ Minus1\ x))\ 2$ имеет нормальную форму.

   (e) Какова нормальная форма выражения $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ ((+1)\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}$?

   (f) Какова нормальная форма выражения $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{1}\ (Mul2\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}$?

   (g) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления n-го числа Фибоначчи.

Решение.

$$(Y \lambda f.\lambda a.\lambda b.\lambda n.(\text{IsZero } n)\ a\ (f\ b\ (a+b)\ (n-1)))\ 1$$

$\square$

9. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:

   (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?

   (b) сложение двух чёрчевских нумералов.

   (c) умножение двух чёрчевских нумералов.

   (d) можно ли определить функцию вычитания 1 и вычитания двух чисел? Что получается, а что — нет?

10. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$L := \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$$
$$R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

   В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F, выполнено $R\ F =_\beta F\ (R\ F)$.

   (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.

   (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами (без ё) и осмысленной русской фразой в терме L; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.

11. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

   Также напомним определение:

$$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$$
$$K := \lambda x.\lambda y.x$$
$$I := \lambda x.x$$

   Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_\beta P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK.

Выразите в базисе SK:

(a) $F = \lambda x.\lambda y.y$

(b) $\overline{1}$

(c) Not

(d) Xor

(e) InL

(f) $\overline{n}$