Скорость кода — отношение исходных данных к передаваемым данным.

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 1 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -4 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -8 \\ 0 & -12 & -24 & -36 & -12 \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Общее решение:

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Мы часто будем рассматривать линейные коды, а не произвольные отображения.

Обозначение.

$$u_a^b = (u_a, u_{a+1}, \dots, u_b)$$

Линейный код задается **порождающей** матрицей G размера $n \times k$ и образуется как $c_1^n = u_1^k G$.

По матрице G находится матрица H, называемая **проверочной**, такая, что $GH^\intercal = 0$. Тогда $CH^\intercal = 0$, таким образом можно проверять, принадлежит ли полученная последовательность коду.

Пример. Найти проверучную матрицу для кода, который задан порождающей матрицей:

$$G = \begin{pmatrix} 1111 & 1111 \\ 1111 & 0000 \\ 1100 & 1100 \\ 1010 & 1010 \end{pmatrix}$$

Определение. Дуальный код — код, в котором G и H совпадают.

Рассмотрим канал с белым гауссовским шумом $y_i = x_i + \eta_i, \eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Не любой канал является таким, но это хороший benchmark. Шум мжоно сводить к примерно белому гауссову различными эквалайзерами и т.д. Пусть канал передает $c_i \in \{0, 1\} \to x_i \in \{-1, 1\}$.

$$P(c_i \mid y) = \frac{P(c_i \cap y)}{P(y)} = \frac{P(y \mid c_i)P(y)}{P(c_i)}$$

$$W(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L = \ln \frac{P(c_i = 0 \mid y_i)}{P(c_i = 1 \mid y_i)} = \ln \frac{P(y_i \mid c_i = 0)}{P(y_i \mid c_i = 1)} = \ln \frac{e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}} = -\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2} + \frac{(y-1)^2}{2\sigma^2} = \frac{-2y}{\sigma^2}$$