Упражнение 1. Рассмотрим множество всех отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ $S = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Введём на нём операцию композиции как стандартную композицию функций. Доказать, что регулярные справа алгоритмы это в точности (все) сюръективные отображения.

Решение. $\lhd g$ — правый регулярный, т.е. $\forall f_1, f_2 \in S \;\; f_1 \circ g = f_2 \circ g \Rightarrow f_1 = f_2$.

$$f_1 \circ g = f_2 \circ g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R} \;\; f_1(g(x)) = f_2(g(x))$$

Если h сюръективно, h — правое регулярное, т.к $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ по определению сюръективного отображения и тогда $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f_1(h(x)) = f_2(h(x)) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \;\; f_1(x) = f_2(x)$, из чего следует $f_1 = f_2$ по определению.

Если g не сюръективно, то $\exists y : \nexists x \;\; g(x) = y$ по определению. Тогда рассмотрим произвольную функцию $f_1 \in S$ и $f_2 = \begin{cases} f_1(x), & x \neq y \\ f_1(x) + 1, & x = y \end{cases}$. Условие $f_1(g(x)) = f_2(g(x))$ выполнено, но $f_1 \neq f_2$.

Таким образом, все сюръективные отображения являются регулярными справа, а не сюръективные — нет. □

Упражнение 2. Рассмотрим множество пар целых чисел $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Зададим на нём операцию композиции:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Проверить ассоциативность. Найти все (односторонние) нейтральные и поглощающие элементы. Найти все регулярные элементы.

Решение.

$$(a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) * (a_2 a_3, a_2 b_3 + a_3 b_2) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1)$$

$$((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) * (a_3, b_3) = (a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1)$$

Оба результата равны, следовательно операция ассоциативна.

Операция очевидно коммутативна, поэтому не будем рассматривать отдельно левые и правые элементы.

$\lhd (e_a, e_b)$ — нейтральный элемент

$$(e_a, e_b) * (a, b) = (e_a a, e_b \cdot a + e_a \cdot b) = (a, b)$$

$$\begin{cases} e_a a = a \\ e_b a + e_a b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_a = 1 \\ e_b = 0 \end{cases}$$

$\lhd(\theta_a, \theta_b)$ — поглощающий элемент

$$(\theta_a, \theta_b) * (a, b) = (\theta_a a, \theta_a b + \theta_b a) = (\theta_a, \theta_b)$$

$$\begin{cases} \theta_a a = \theta_a \\ \theta_a b + \theta_b a = \theta_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = 0 \\ \theta_b a = \theta_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = 0 \\ \theta_b = 0 \end{cases}$$

$\lhd(x, y)$ — регулярный элемент.

$$\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \;\; (a_1, b_1) * (x, y) = (a_2, b_2) * (x, y) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$$(a_1 x, b_1 x + a_1 y) = (a_2 x, b_2 x + a_2 y)$$

$$\begin{cases} a_1 x = a_2 x \\ b_1 x + a_1 y = b_2 x + a_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 x = b_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Мы потеряли случай $x = 0$ *(тогда нельзя сокращать на x)*, рассмотрим его:

$$b_1 x + a_1 y = b_2 x + a_2 y \Rightarrow a_1 y = a_2 y \Rightarrow a_1 = a_2$$

$b_1 \neq b_2$ в общем случае.

Итого:

- Нейтральный элемент $(0, 0)$
- Поглощающий элемент $(0, 0)$
- Регулярные элементы $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}\}$

$\square$

Упражнение 3. Пусть есть некоторая конечная полугруппа S и $a \in S$ есть некоторый фиксированный элемент. Рассмотрим множество $M = a \cdot S = \{a \cdot x \mid x \in S\}$. Что можно сказать про $|M|$, если $|S| = n$? Каков будет ответ в случае, если a регулярен?

Решение. Если a произвольный, то ничего *(технически $|M| \leq n$)*.

Если a регулярен, то $a \cdot x$ пробегает все возможные элементы S, т.к. $\nexists a_1 \neq a_2 : a_1 \cdot x = a_2 \cdot x$. Таким образом, $|M| = |S| = n$. $\square$

Упражнение 4. Пусть S — некоторая полугруппа с левым сокращением. Доказать, что любой идемпотент e (свойство $e \cdot e = e$), то e — левый нейтральный.

Решение. Пусть $e \cdot x$ это некоторое $a \in S$. Докажем, что $x = a$.

$$e \cdot x = a$$
$$e \cdot e \cdot x = e \cdot a$$

$$e \cdot x = e \cdot a$$
$$x = a$$

□

Упражнение 5. Пусть S — некоторая полугруппа со следующим свойством. Из того, что $ab = cd$ следует либо $a = c$, либо $b = d$. Доказать, что S — полугруппа левых либо правых нулей.

Решение. $\lhd a, b \in S$

$$a \cdot b =: c$$
$$b \cdot a \cdot b = b \cdot c$$
$$(b \cdot a) \cdot b = b \cdot c$$

Либо $b \cdot a = b$, либо $b = c$. В первом случае b — левый поглощающий. Во втором случае можно подставить в исходное равенство и получить $a \cdot b = b$ и тогда b правый поглощающий. □

Упражнение 6. Рассмотрим некоторую полугруппу S и некоторую её подполугруппу $H \subset S$. Будем говорить, что $a \sim b$ если $aH = bH$. Проверить, что заданное отношение есть отношение эквивалентности. Построим фактор-множество $Y = S/R$. Пусть некоторый элемент a регулярен слева. Что можно сказать про регулярность элемента $b \in [a]$?

Решение. Проверим, что R — отношение эквивалентности:

1. Рефлексивность: $aH = aH$
2. Транзитивность: по транзитивности равенства множеств
3. Симметричность: по симметричности равенства множеств

Если a регулярен слева, то $|aH| = |H|$ *(см. задание 3)*. Таким образом, $|bH| = |aH| = |H|$. Т.к. $|bH| = |H|$, то $b \cdot x$ пробегает все элементы H. Из этого следует регулярность слева *(в H)* — если $\exists x_1, x_2 \in H : b \cdot x_1 = b \cdot x_2$ & $x_1 \neq x_2$, то $bH \neq H$.

Регулярности в S нет в общем случае — если $\exists x \in S \setminus H$, то пусть $b \cdot x = y$, где y — произвольный элемент bH *(и следовательно $\exists z \in H : b \cdot z = y$)*. Тогда b не регулярен в S, т.к. $b \cdot x = y = b \cdot z$. □

Упражнение 7. Пусть на некотором множестве X задано отношение частичного порядка ρ (в смысле $\leq$). Определим отношения $R = \rho \circ \rho^{-1}$ и $L = \rho^{-1} \circ \rho$. Что можно сказать про отношения R, L?

Определим для некоторого $a \in X$ множество $R(a) = \{b \mid b \in X, aRb\}$, как множество всех элементов, которые состоят в отношении R с a. Указать процедуру поиска $R(a)$.

Решение. $\lhd R$

$$aRc \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b : (a\rho b) \ \& \ (b\rho^{-1}c) \Rightarrow (a\rho b) \ \& \ (c\rho b)$$

С точки зрения графа это выглядит так: у a и c есть общий потомок.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "\rho"] & & c \arrow[dl, "\rho"'] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

$\lhd L$

$$aLc \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b : (a\rho^{-1}b) \ \& \ (b\rho c) \Rightarrow (b\rho a) \ \& \ (b\rho c)$$

С точки зрения графа это выглядит так: у a и c есть общий родитель

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
a & & c
\end{tikzcd}$$

Поиск $R(a)$: ищем все $c \in S$, такие что есть общий *(с a)* потомок b. Переберем всех кандидатов на роль b — это все потомки a. Для каждого b переберем его родителей. Все такие родители образуют $R(a)$. $\square$