

*Упражнение 1.* Рассмотрим группу диэдра  $D_6$ . Найти в ней силовскую 2-подгруппу  $\mathcal{P}_2$  и силовскую 3-подгруппу  $\mathcal{P}_3$  такие, чтобы  $\mathcal{P}_3$  была нормальной. Рассмотрим множество  $S = \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_2$ :

$$S = \{(\sigma, \tau) \mid \sigma \in \mathcal{P}_3, \tau \in \mathcal{P}_2\}$$

Рассмотрим отображение  $\varphi : S \rightarrow D_6$ , которое перемножает компоненты кортежа:

$$\varphi((\sigma, \tau)) = \sigma\tau$$

Ввести на  $S$  структуру группы, так чтобы отображение  $\varphi$  стало изоморфизмом.

*Решение.*  $12 = 4 \cdot 3 \Rightarrow$  силовские 2-подгруппы имеют порядок  $2^2 = 4$ , силовские 3-подгруппы имеют порядок  $3^1 = 3$ .

*Обозначение.* Поворот на  $60t$  ( $60t \in [0, 360)$ ) градусов это  $\rho_t$ . Зафиксируем произвольную ось симметрии, тогда  $\tau_t$  — отражение относительно оси, повернутой на  $30t$  градусов относительно фиксированной оси ( $30t \in [0, 180)$ ). Все сложения и вычитания в индексах операций выполняются по модулю 6.

Несложно заметить, что  $\{e, \tau_0, \rho_3, \tau_3\}$  образуют подгруппу размера 4, пусть она будет  $\mathcal{P}_2$ .

$\mathcal{P}_3 = \{e, \rho_2, \rho_4\}$ . Нормальность:

1. Поскольку повороты коммутируют между собой,  $\rho_i \mathcal{P}_3 \rho_i^{-1} = \rho_i \rho_i^{-1} \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3$ .
2. (a)  $e$  очевидно нормален
- (b)  $\tau_i \rho_2 \tau_i^{-1} = \tau_{i-2} \tau_i = \rho_{-2} = \rho_4$
- (c)  $\tau_i \rho_4 \tau_i^{-1} = \tau_{i-4} \tau_i = \rho_{-4} = \rho_2$

$e_S = (e, e)$  — очевидно.

Воспользуемся сопряжением:

$$(\sigma, \tau) \circ (\sigma', \tau') := (\sigma\tau\sigma'\tau^{-1}, \tau\tau')$$

Интуитивное пояснение нахождения этой операции: нормальность  $\mathcal{P}_3$  явно требуется не случайно, поэтому воспользуемся тем, что  $\tau\sigma\tau^{-1} \in \mathcal{P}_3$  — тут есть 4 варианта навешивания штрихов. Для второго элемента результата вариантов два:  $\tau\tau'$  и  $\tau'\tau$  (отбрасывать  $\tau$  или  $\tau'$  не кажется содержательным). Мы ещё забыли  $\sigma'$  (или  $\sigma$ , в зависимости от штрихов в сопряжении), поэтому домножим на него в первом элементе результата. После небольшого перебора находится искомая операция.

*Примечание.* То, что  $\varphi$  — изоморфизм, показано в задаче 3.

□

**Упражнение 2.** Рассмотрим группу порядка 35. Рассмотрим некоторую её силовскую 5-подгруппу  $\mathcal{P}_5$ . Показать, что она единственна.

**Примечание.** Показать, что количество  $n_5$  силовских 5-подгрупп равно:  $n_5 = 1$

*Proof.*  $35 = 5 \cdot 7 \Rightarrow n_5 \equiv 1 \pmod{5}$  и  $\frac{35}{5} : n_5$  по третьей теореме Силова<sup>1</sup>. У 7 два делителя: 1 и 7.  $7 \not\equiv 1 \pmod{5}$ ,  $1 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n_5 = 1$ .  $\square$

**Упражнение 3.** Рассмотрим группу  $G$  порядка 119. Пусть  $\mathcal{P}_7$  — её силовская 7-подгруппа. Показать, что  $\mathcal{P}_7$  нормально. Показать, что фактор-группа  $G/\mathcal{P}_7$  — циклическая группа. Показать, что группа  $G$  абелева.

**Примечание.** см. задачу 1

*Решение.*  $119 = 7 \cdot 17 \Rightarrow |\mathcal{P}_7| = 7 \Rightarrow |G/\mathcal{P}_7| = \frac{|G|}{|\mathcal{P}_7|} = \frac{119}{7} = 17$  — простое число  $\Rightarrow G/\mathcal{P}_7$  — циклическая группа.

Аналогично предыдущей задаче  $n_7 \equiv 1 \pmod{5, 17}; n_7 \Rightarrow n_7 = 1$ , т.е.  $\mathcal{P}_7$  — единственная силовская 7-подгруппа.  $|g\mathcal{P}_7g^{-1}| = |\mathcal{P}_7|$ , но  $g\mathcal{P}_7g^{-1}$  также является силовской 7-подгруппой. В силу единственности  $g\mathcal{P}_7g^{-1} = \mathcal{P}_7 \Rightarrow \mathcal{P}_7$  нормальна.

По первой теореме Силова  $\exists \mathcal{P}_{17}$ .  $\mathcal{P}_7 \times \mathcal{P}_{17} \cong G$  по изоморфизму  $\varphi : (a, b) \mapsto ab$ , где операция на  $\mathcal{P}_7, \mathcal{P}_{17}$  есть  $(a, b) \circ (c, d) = (abcb^{-1}, bd)$ :

$$abcd = \varphi(a, b)\varphi(c, d) \stackrel{?}{=} \varphi((a, b) \circ (c, d)) = \varphi((abcb^{-1}, bd)) = abcd$$

Т.к 7 и 17 простые числа,  $\mathcal{P}_7$  и  $\mathcal{P}_{17}$  циклические, а следовательно абелевы. Пусть  $\mathcal{P}_7 = \langle g \rangle$ ,  $\mathcal{P}_{17} = \langle h \rangle$ . Покажем, что  $g^i h^j = h^j g^i$ , тогда:

$$(g^i, h^j) \circ (g^k, h^l) = (g^i h^j g^k h^{-j}, h^{j+l}) = (g^{i+k}, h^{j+l}) = (g^k, h^l) \circ (g^i, h^j)$$

, то есть  $\mathcal{P}_7 \times \mathcal{P}_{17}$  абелева, тогда  $G$  абелева как изоморфная абелевой.

Для этого покажем  $g^i h = h g^i$ , тогда, тогда искомое будет верно по индукции ( $g^i h^{j+1} = g^i h h^j = h g^i h^j = h^{j+1} g^i$ )

$$\triangleleft a = g^i, b = h g^j \quad ab = g^i h g^j = h(h^{-1} g^i h) g^j = h g^k g^j = h g^{k+j} \quad ba = h g^{i+j}$$

, где  $g^k = h^{-1} g^i h$ , такое  $k$  существует по нормальности  $\mathcal{P}_7$ .

$$\begin{aligned} g^k &= h^{-1} g^i h \\ h g^k &= g^i h \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Второй факт, кажется, не рассматривался на лекции, но он очевиден. Я взял его с википедии, страница “Теоремы Силова”.

$$\begin{aligned}
 g^{-i}hg^k &= h \\
 (g^{-i}hg^k)^{17} &= h^{17} \\
 (g^{-i}hg^k)^{17} &= e \\
 g^{-i}hg^{k-i}hg^{k-i} \dots g^k &= e \\
 (hg^{k-i})^{17} &= e
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $hg^{k-i} \in \mathcal{P}_{17}$ <sup>2</sup>, тогда  $g^{k-i} = 1 \Rightarrow k - i \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow ab = hg^{k+j} = hg^{i+j} = ba$   $\square$

---

<sup>2</sup> Точнее,  $hg^{k-i} \in \varphi^{-1}(\mathcal{P}_{17})$