Упражнение 1. Найти $I(p)$ для B_p, $p^* = \overline{X}, \mathbb{D}p^*$ и ???

Решение.

$$f_p(x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases}$$

$C = \{0, 1\}$

$$I(p) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f_p(x)}{\partial p}\right)^2 = \begin{cases} \mathbb{E}\left(\frac{1}{p-1}\right)^2, & x = 0 \\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{p}\right)^2, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)^2}, & x = 0 \\ \frac{1}{p^2}, & x = 1 \end{cases}$$

p выносится за $\mathbb{E}$, т.к. не зависит от x. □

Упражнение 2. Величины ξ, η имеют стандартное нормальное распределение и независимы. Будут ли независимы величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$?

Решение. Да, т.к. матрица $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ переводит (ξ, η) в $(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta))$ и по теореме эти величины независимы. □

Упражнение 3. Доказать, что если A — симметричная положительно определенная матрица, то существует матрица $B = \sqrt{A}$, т.е. $B^2 = A$.

Решение. Повернем A таким образом, что мы получим диагональную матрицу:

$$A' = C^{\mathsf{T}} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sqrt{A'} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = B'$$

И $B = CB'C^{\mathsf{T}}$

Проверим искомое:

$$B^2 = (CB'C^{\mathsf{T}})(CB'C^{\mathsf{T}}) = CB'B'C^{\mathsf{T}} = CA'C^{\mathsf{T}} = A$$

$\square$

Упражнение 4. Доказать, что правило трёх сигм $P(|\xi - a| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9}$ неулучшаемо.