Лемма 1. *О связности отрезка*

Промежуток $\langle a, b\rangle$ (границы могут входить, могут не входить) — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \cap G_1 \neq \varnothing \quad \langle a, b\rangle \cap G_2 \neq \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$

Доказательство. От противного: $\alpha \in \langle a, b\rangle \cap G_1 \quad \beta \in \langle a, b\rangle \cap G_2$, пусть $\alpha < \beta$

$$t := \sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \quad \alpha \le t \le \beta$$

$t \in G_1$? нет, т.к. если да, то $t \neq \beta$ и $\exists U(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_1 \cap [\alpha, \beta]$, это противоречит определению t:

$[\alpha, t - \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$

$(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_1$

$[\alpha, t + \frac{\varepsilon}{2}] \subset G_1$

$t \in G_2$? нет, т.к. если лежит, то $t \neq \alpha \quad \exists (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset G_2 \cap [\alpha, \beta)$

$\sup\{x : [\alpha, x] \subset G_1\} \le t - \varepsilon$ □

Теорема 1. Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \;\; \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

Традиционное доказательство — бинпоиск.

Доказательство. Сразу следует из леммы о связности отрезка и топологического определения
непрерывности.

Если нашлось t, для которого доказуемое утверждение неверно, то

$$[a, b] = f^{-1}(-\infty, t) \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

Оба множества открыты, т.к. они — прообразы открытых множеств. Кроме того, они непусты, т.к. одно из них содержит a, другое содержит b. Итого, мы представили отрезок $[a, b]$ в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, противоречие по предыдущей лемме. □