1.4 Задача Коши

Теорема 1.1 (Пеано (*существования*)).

- $G \subset \mathbb{R}^2$ — область *(открытое связное множество)*
- $f \in C(G)$
- $(x_0, y_0) \in G$

Тогда на некоторой окрестности $(a, b) \ni x_0 \quad \exists$ решение задачи Коши.

Примечание. Теорема Пеано — более общая, дан частный случай.

Теорема 1.2 (Пикара (*единственности*)).

- $G \subset \mathbb{R}^2$
- $f \in C(G)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$
- $(x_0, y_0) \in G$
- φ_1, φ_2 — решение задачи Коши на (a, b)

Тогда $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (a, b)

Примечание. Это тоже частный случай теоремы.

Примечание. Здесь и далее G — область.

Доказательство. Будет позже. □

Определение. Решение φ задачи Коши называется **особым**, если через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходит ещё одна интегральная кривая, не совпадающая с данной в любой окрестности этой точки.

Пример. В уравнении $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ решения имеют вид $y = (x + C)^3$. Проверим это:

$$y' = 3(x + C)^2 = 3\sqrt[3]{((x + C)^3)^2}$$

$$\lessdot f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывно на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\}$

$y = 0$ — очевидно решение, при этом в каждой точке $(x, 0)$ это решение пересекается кривой вида $y = (x + C)^3$, поэтому это решение — особое.

2 Некоторые уравнения, интегрируемые в квадратурах

Интегрируемые в квадратурах $\Leftrightarrow$ решения представляются в виде элементарных функций.

2.1 Неполные уравнения

2.1.1 $y' = f(x)$

$\Rightarrow y = \int f(x)dx + C$

2.1.2 $y' = f(y)$

1. $f(y) \neq 0 \Rightarrow f > 0$ (для $f < 0$ аналогично)

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad \Big| : f(y)$$
$$\frac{dy}{f(y)} = dx \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$
$$x'_y = \frac{1}{f(y)}$$
$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C$$

2. $\triangleleft f(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$ — решение

   Далее область поиска интегральных кривых разбивается на подобласти.

   $y' = y$

   (a) $y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\frac{1}{y} = x'_y$$
$$x = \int \frac{dy}{y} + C = \ln|y| + C$$
$$x(y) = \ln y + C$$
$$e^x = e^C y = Ay, \ A > 0$$
$$y = Ce^x, \ C > 0$$

   (b) $y < 0$

$$y = Ce^x, \ C < 0$$

Ответ: $y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$

2.2 $p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$

Попробуем поделить на $q_1(y)p_2(x)$:

- Если $q_1(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$ — решение
- Если $p_2(x_0) = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$ — решение
- Иначе можем поделить, получаем $X(x)dx + Y(y)dy = 0$ — уравнение с разделенными переменными

Теорема 2.1.

- $X \in C(a, b)$
- $Y \in C(c, d)$
- $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ — не особая точка

Тогда

$$\int_{x_0}^{x} X(s)ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)ds = 0$$

задает интегральную кривую уравнения $X(x)dx+Y(y)dy = 0$, проходящую через (x_0, y_0)

Доказательство. $\lhd Y(y_0) \neq 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{X(x)}{Y(y)}$ — непрерывна в некоторой окрестности $(x_0, y_0) \xRightarrow{\text{T.1.1}} \exists \varphi$ — решение на $(\alpha, \beta) \ni x_0$

$$\lhd U(x, y) = \int_{x_0}^{x} X(s)ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)ds$$

$$\frac{dU(x, \varphi(x))}{dx} = X(x) + Y(\varphi(x))\varphi'(x) =$$

$$= \frac{X(x)dx + Y(\varphi(x))\varphi'(x)dx}{dx} \equiv 0 \text{ на } (\alpha, \beta) \text{ т.к. } \varphi \text{ — решение}$$

$\dfrac{dU(x, \varphi(x))}{dx} \equiv 0 \Rightarrow U(x, \varphi(x)) = C \ \ \forall x \in (\alpha, \beta)$, но $U(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \forall$ решение, проходящее через (x_0, y_0) удовлетворяет равенству $U(x, y) = 0$ ☐

$\begin{cases} \int X(x)dx = \int_{x_0}^{x} X(s)ds + C_1 \\ \int X(y)dy = \int_{y_0}^{y} Y(s)ds + C_2 \end{cases} \Rightarrow \int X(x)dx + \int X(y)dy = C$ — общий интеграл уравнения $X(x)dx + Y(y)dy = 0$

Пример. $xdx + ydy = 0$

$$\int xdx + \int ydy = C$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$
$$x^2 + y^2 = A,\ A > 0$$

2.3 Однородное уравнение

Определение. Однородное уравнение - уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, если P и Q однородные одной степени, т.е.:

$$P(tx,ty) = t^\alpha P(x,y) \quad \forall t$$
$$Q(tx,ty) = t^\alpha Q(x,y) \quad \forall t$$

Пример.

- $x^2 + y^2$
- $x^{\frac{3}{2}} + x\sqrt{y}$
- $\dfrac{x+y}{3\sqrt{xy}}$

Замена $z = \frac{y}{x}$ сводит к уравнению с разделенными переменными.

2.4 Линейное уравнение

Определение.

- **Линейное уравнение** — уравнение вида $y' = p(x)y + q(x)$
- **Линейное однородное уравнение** — линейное уравнение, где $q \equiv 0$
- **Линейное неоднородное уравнение** — линейное уравнение, где $q \not\equiv 0$

Лемма 1. $p \in C(a,b) \Rightarrow y = Ce^{\int p(x)dx}$ *— общее решение уравнения* $y' = p(x)y$

Доказательство. $dy = p(x)ydx$

1. $y = 0$ — решение
2. $y > 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int p(x)dx}$$

□