Подгруппы в полугруппах

На прошлой практике мы остановились на моноиде, считающем число строк:

$$S \coloneqq \{(l, n, r) \mid l, r \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$(l_1, n_1, r_1) \cdot (l_2, n_2, r_2) = (l_1, n_1 + n_2 + r_1 l_2, r_2)$$

Идемпотенты:

1. $x_1 = (0, 0, 0)$
2. $x_2 = (1, 0, 0)$
3. $x_3 = (0, 0, 1)$

Рассмотрим $H_2 = x_2 \cdot S \cdot x_2 \overset{\text{def}}{=} \{x_2 \cdot y \cdot x_2 \mid y \in S\} = \{(0, n, 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. В H_2 выполняется $zx = zy \Rightarrow x = y$, т.к. $H \sim (\mathbb{N}_0, +)$ с изоморфизмом $(0, n, 1) \mapsto n$.

Аналогично можно построить $H_3 \coloneqq x_3 S x_3$, $H_1 \coloneqq x_1 S x_1$. Такие подмножества являются подполугруппами S:

$$y, z \in H_1 \quad yz = x_1 \hat{y} x_1 x_1 \hat{z} x_1 = x_1 \underbrace{(\hat{y} x_1 x_1 \hat{z})}_{\in S} x_1$$

В H_1 есть единица — x_1, т.к. $y x_1 = x_1 \hat{y} x_1 x_1 x_1 x_1 = x_1 \hat{y} x_1 = y$

$$H_1 \cap H_2 = \varnothing$$

Рассмотрим полугруппу S и некоторый $a \in S$. Построим подмножество H, называемое **генератором** a, обозначаемое $\langle a \rangle$:

$$H = \langle a \rangle \coloneqq \{a, a^2, a^3 \dots\}$$

Пример. $\lhd(\mathbb{Z}, +), a = 2$. Тогда $H = \{2n \mid n \geq 1\}$.

Может быть $|H| < \infty$. Тогда $a^n = a^m$. Выберем наименьшее такое n. Тогда у нас есть некоторый "хвост" $a^1 \dots a^n$ и цикл $a^n, a^{n+1} \dots a^m$. n называется **индексом** *(также обозначается i)* a, $d = m - n$ — **периодом**.

Утверждение. Среди $\langle a \rangle$ есть идемпотент, если $|\langle a \rangle| < \infty$

Proof.

$$a^k = a^{k + \alpha d} \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}_1$$

$$a^k \cdot a^k = a^k \Rightarrow 2k = k + \alpha d \Rightarrow k = \alpha d$$

$\square$

Пусть $e = a^k, e^2 = e, G = eHe$

Пример. $i = 5, d = 3$

$G = \{a^6, a^5, a^7\}$.

G является подгруппой, т.к. оно содержит все элементы цикла и обратное к a^j есть a^{k-j+d}

Отношения

$X = \mathbb{R}, S = \mathbb{B}(X^2) = \{R \mid R \subseteq X \times X\}$

$\rho, \tau \in S \quad R = \rho \circ \tau : xRz \Leftrightarrow \exists y : x\rho y, y\tau z$

Это определение согласовано с композицией функций.

Подполугруппы S:

- $H_1 = X \to X$ — функции
- H_2 — отношения эквивалентности — не работает, т.к. есть контрпример:

  $X = \{a, b, c\}, \rho = \{(a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}, \tau = \{(b, c), (c, b), (b, b), (a, a), (c, c)\}$

$$\rho^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$
$$\rho \circ \rho^{-1} = R \quad \rho^{-1} \circ \rho = L$$

$\triangleleft \rho(x) = x^2, x\rho^{-1}y \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$

$\rho \circ \rho^{-1} = R \quad aRb \Leftrightarrow a\rho a^2, a^2\rho^{-1}b \Leftrightarrow a = \pm b$

Внешние законы

Рассмотрим плоскость $\mathbb{E}^2$ и множество трансляций $T = \{\vec{v}\}$. T действует на $\mathbb{E}^2$. Добавим в T закон сложения[1].

Рассмотрим R — множество поворотов плоскости относительно точки P. R тоже действует на $\mathbb{E}^2$. Определим композицию в R — последовательное действие поворотов. Обозначим эту композицию “$\cdot$”.

$\triangleleft \rho \in R, \tau \in T$. Можно делать $\rho(\tau(P))$, можно $\tau(\rho(P))$. Это не одно и то же *(пример очевиден)*. Определим $\hat{\tau}$ как $\rho(\tau) = \hat{\tau}$. Все эти внешние законы согласованы:

$$\rho(\tau(P_0)) = \hat{\tau}(\rho(P_0)) = \hat{\tau}(P_0)$$

$$\rho(\tau_1 + \tau_2) = \rho(\tau_1) + \rho(\tau_2)$$

[1] Обычное сложение векторов.