1 Монотонные экстремумы

Теорема 1.1. Критерий монотонности

 $f \in C(\langle a, b \rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b) \ f'(x) \geq 0$

Доказательство. " \Rightarrow " По определению $f' \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

"
$$\Leftarrow$$
" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c: f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$

Следствие. $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, тогда:

$$f = \mathsf{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b \rangle) - \mathsf{дифф}.\ \mathsf{Ha}\ (a, b), f' \equiv 0)$$

Следствие. $f \in C\langle a,b \rangle$, дифф. на (a,b). Тогда:

f строго возрастает \Leftrightarrow (1) и (2)

(1)
$$f' \ge 0$$
 на (a, b)

(2) $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "⇒" очевидно

Следствие. О доказательстве неравенств

$$g,f\in C([a,b\rangle)$$
, дифф. в (a,b)

$$f(a) \le g(a); \forall x \in (a, b) \ f'(x) \le g'(x)$$

Тогда $\forall x \in [a,b) \ f(x) \leq g(x)$

Доказательство.
$$g-f$$
 — возр., $g(a)-f(a)\geq 0$

Определение. $f:E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x_0\in E$ — локальный максимум функции, если

$$\exists U(x_0) \ \forall x \in U(x_0) \cap E \ f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. Экстремум — точка минимума либо максимума.

Теорема 1.2.
$$f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$$
 $x_0 \in (a, b)$ $f -$ дифф. на (a, b)

Тогда:

1.
$$x_0 - \text{лок.}$$
 экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

M3137y2019

2.
$$f - n$$
 раз дифф. в x_0

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Если
$$f^{(n)}(x_0) < 0$$
, то $\begin{cases} n-\text{чет.}: & x_0-\text{локальный максимум} \\ n-\text{нечет.}: & x_0-\text{не экстремум} \end{cases}$

Если
$$f^{(n)}(x_0)>0$$
, то
$$\begin{cases} n-\text{чет.}: & x_0-\text{локальный минимум}\\ n-\text{нечет.}: & x_0-\text{не экстремум} \end{cases}$$

Доказательство.

1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0 :

$$sign(f(x) - f(x_0)) = sign\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$sign(f(x) - f(x_0)) = sign f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - экстр.$$

При нечётном n

$$\mathrm{sign}(f(x) - f(x_0)) = egin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0$$
 — не экстр.

2 Интеграл

2.1 Неопределенный интеграл

Определение. $F,f:\langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$

F — первообразная f на $\langle a,b\rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

M3137y2019

Теорема 2.1. О существовании первообразной

 $f \in C^0(\langle a,b \rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Доказательство. Чуть позже.

Теорема 2.2. F — первообразная f на $\langle a,b \rangle$. Тогда:

- 1. $\forall c \in \mathbb{R}$ F + c тоже первообразная
- 2. Никаких других первообразных нет, т.е. если G перв. f, то $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$

Доказательство. 1. очевидно

2.
$$F' = f, G' = f$$
 $(G - F)' \equiv 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

Определение. Неопределенный интеграл f на $\langle a,b \rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F+c,c\in\mathbb{R}\}$$
, где F — первообразная

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C -$$
длинный логарифм
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

M3137y2019

February 10, 2019

Теорема 2.3. f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда

1. Линейность:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi(c,d) \to \langle a,b \rangle$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int f(\alpha t + \beta)dt = \frac{1}{\alpha}F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на (a, b); f'g — имеет первообр.

Тогда fg' имеет первообразную и

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Локазательство

1.
$$(F+G)' = F' + G' \quad (\alpha F)' = \alpha F'$$

2.
$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

3.
$$(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$$

Примечание. Если φ обратима, то:

$$\int f(x)dx = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

df := f'(x)dx

$$\begin{split} &\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x := \operatorname{tg} t] = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\ &= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1-\sin^2 t} = [y := \sin t] = \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1+y} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln(1-y) + \ln(1+y) \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \operatorname{arctg} x}{1-\sin \operatorname{arctg} x} \end{split}$$

M3137y2019

February 10, 2019

2.2 Гиперболические тригонометрические функции

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Они полезны тем, что по ним висит нить, закрепленная в двух точках.

$$\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$$

$$(\cosh t)^2 + \left(\frac{\sinh t}{i}\right)^2 = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x = \sinh t] = \int \frac{1}{\sqrt{ch^2 t}} cht dt = \int 1 dt = t$$

2.3 Равномерно непрерывные функции

Определение. $f:\langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\langle a,b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \ \rho(x_1, x_2) < \delta \ \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1,x_2 .

Пример. 1. f(x) = x равномерно непрерывна.

2.
$$f(x)=x^2$$
 $\langle a,b\rangle=\mathbb{R}$ $\varepsilon:=1$ $\exists ?\delta$
$$x_1:=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}, x_2:=\frac{1}{\delta}$$

$$x_1^2-x_2^2=1+\frac{\delta^2}{4}>1\Rightarrow f$$
— не равномерно непрерывна.

Теорема 2.4. $f:X \to Y, X$ — секвенциальный компакт, f — непр. на X

Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \ge \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \ \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \ge \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

M3137y2019

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \le \lim_{n \to \infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \ge \varepsilon$

Пример. $f(x) = \sqrt{x}$ $X = [0, +\infty)$

По т. Кантора: f равномерно непрерывна на [0,1]

При $x \geq \frac{1}{2} \quad |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, т.е. тоже равномерно непрерывна.

2.4 Конфетка: т. Брауэра о неподвижной точке

Статья от Matousek, Zigler, Bjorner (arxiv: 1409.7890v1)

Игра Нех: два игрока — чёрный и белый, на своем ходе красят один шестиугольник в свой цвет. Условие выигрыша — путь искомого цвета с одной стороны в сторону нужного цвета — две противоположные стороны имеют черный цвет, две другие — белый.

Теорема 2.5. Дана доска для $\text{Hex} - \text{параллелограм } k \times l$, покрашенная в 2 цвета.

Это выигрышная доска для одного из игроков.

Доказательство. Рассмотрим первый ряд (прилегающий к чёрной стороне). Если в нём нет черных клеток, белый выиграл. Пойдём по границе черных и белых клеток так, что справа всегда черная клетка, слева белая. В этом пути нет самопересечений, т.к. в точке самопересечения с обеих сторон черные клетки, мы так не идём.

Представим доску в виде прямоугольной сетки, где вершины соединены, если из соответствующего шестиугольника можно прийти в другой соответствующий шестиугольник. \Box

Теорема 2.6. $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0,1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

- 1. $f:[0,1]^m \to [0,1]^m$ непр.
- 2. $f: B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ непр.
- 3. $f:S(0,1)\subset\mathbb{R}^m\to S(0,1)$ непр.

Доказательство. $ho:[0,1]^2 o\mathbb{R}$

$$ho(x,y) = \max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$
 — непр. в $[0,1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0,1]^2 \quad f(x) \neq x$

M3137y2019 February 10, 2019

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x),x)>0 \quad x\mapsto \rho(f(x),x)$ — непр., >0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon>0 \ \, \forall x\in [0,1] \ \, \rho(f(x),x))\geq \varepsilon$

По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \;\; \exists \delta < \varepsilon :$

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $||\cdot||$, а ρ .

Возьмём $n: \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску Hex(n+1, n+1), где n+1 — число узлов.

Логические координаты узла (v_1,v_2) $v_1,v_2\in\{0\dots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n},\frac{v_2}{n}\right)$

$$K(V):=\min\{i\in\{1,2\}:|f_i(\tfrac{v}{n})-\tfrac{v_i}{n}|\geq\varepsilon\}$$

Продолжение на следующей лекции.

M3137y2019 February 10, 2019