1 Обратный оператор

1.1 Единица. Обратный элемент

$]A(K)$ — алгебра над полем K

Определение. Единицей алгебры называется такой её элемент $e \in A$, что

$$\forall a \in A \quad a \cdot e = e \cdot a = a$$

Кроме того, существуют левая и правая единицы:

$$e_L : e_L \cdot a = a \quad e_R : a \cdot e_R = a \quad \forall a \in A$$

Лемма 1. *Если в* A $\exists e_L$ *и* $e_R \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\triangle}{=} e$

Доказательство.

$$e_L = e_L e_R = e_R$$

$\square$

Лемма 2. $\exists ! e$

Доказательство. Тривиально. $\square$

$\lhd x, y \in A : x \cdot y = e$

Определение. Если $x \cdot y = e$, то x называется **левым обратным** к y, а y называется правым обратным к x.

Определение. $]z \in A, x : xz = zx = e$, тогда x — **обратный** к z, обозначается $x = z^{-1}$, при этом z называется **обратимым**.

Лемма 3. *Если* $y, z \in A$ $\exists x$ *— левый обратимый и* y *— правый обратимый. Тогда:*

1. z *— обратимый*
2. $z^{-1} = y \cdot x$

Доказательство. $\lhd z \cdot yx = e \cdot x = x$

$\lhd x(zy) = x \quad (xz)y = y \Rightarrow x = y \Rightarrow z$ — обратимый. $\square$

Пример.
- $\mathbb{R} \quad e = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $\mathbb{C} \quad e = 1 + 0 \cdot i \quad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$
- $\mathbb{R}^4 \quad e = 1 + 0i + 0j + 0k \quad q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$

1.2 Обратная матрица

$\lhd K_n^n$ — алгебра матриц

Определение. **Единичной** называется матрица E, такая что $\forall A \in K_n^n$:

$$AE = EA = A$$

Примечание. Единичная матрица — диагональна:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Определение. **Обратной** к матрице A называется матрица A^{-1}:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Теорема 1.1. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Способы вычисления A^{-1}

1.2.1 Метод Гаусса

$$\left[\ A \mid E\ \right] \sim \left[\ E \mid A^{-1}\ \right]$$

Доказательство.

$$\left[\ A \mid E\ \right] = \left[\ T_1 A \mid T_1 E\ \right] = \left[\ T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 E\ \right] = \ldots = \left[\ T_n \ldots T_1 A \mid T_n \ldots T_1\ \right] = \left[\ E \mid T_n \ldots T_1\ \right]$$

$$\lhd T_n \ldots T_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = T_n \ldots T_1$$

□

Теорема 1.2.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$$

Доказательство. $AB = E \Rightarrow B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$ — надо доказать.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

$$]\delta_{k_0}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1_{k_0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T = b$$

$$\beta^j_{k_0} = \xi^j \quad \alpha^i_j = a_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \xi^j = b \quad \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$
$$\Delta_j = \det A(a_j \to b)$$

□

1.3 Обратный оператор

$\lhd \varphi : X \to X$

Определение. Обратным к оператору φ называется оператор φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{I}$$

$\mathcal{L}(X, X) \simeq K^n_n$

Теорема 1.3. Оператор φ обратим, если $\exists$ базис, в котором его матрица невырождена

Примечание. $\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \det \tilde{A} = \det(T{-}1AT) = \det T^{-1} \det A \det T$

$\lhd \varphi : X \to Y$

Определение. **Ядро** φ :
$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in X : \varphi x = 0\}$$

Примечание. $\operatorname{Ker} \varphi \subset X$

Лемма 4. *Ker* φ *— ЛП*

Определение. **Образ** φ:

$$\operatorname{Im} \varphi = \{y \in Y : \exists x : \varphi(x) = y\}$$

Примечание.
$$\operatorname{Im} \varphi \subset Y$$

Лемма 5. *Im* φ *— ЛП*

Теорема 1.4. О ядре и образе

$$]\varphi : X \to X \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim X$$

Доказательство. $]\dim \operatorname{Ker}\varphi = K$

$]\{e_1 \dots e_k\}$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(e_j) = 0 \ \forall j = 1..k$

$\lhd\{e_1 \dots e_k; e_{k+1} \dots e_n\}$ — базис X

$\lhd x = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j e_j \quad \lhd\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j \varphi(e_j) = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \xi^j \varphi(e_j)$

$\{\varphi(e_{k+1}) \dots \varphi(e_n)\}$ — полный для Im, т.к. любой $x \in \operatorname{Im}$ можно по нему разложить. Докажем ЛНЗ от обратного:

$]\{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — ЛЗ $\Rightarrow \exists\alpha^j : \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j \varphi(e_j) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \text{ЛК } e_{k+1} \dots e_n \text{ разложима по } e_1 \dots e_k \text{ — противоречие} \\ \text{или } \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha^j e_j = 0 \Rightarrow \alpha^j = 0 \Rightarrow \text{ ЛНЗ} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\varphi(e_j)\}_{j=k+1}^{n}$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$. □

О существовании φ^{-1}

$\lhd\varphi : X \to Y$

$\varphi : \forall x \ \ \exists! y \in \operatorname{Im}\varphi : \varphi(x) = y$

$\exists\varphi^{-1} : \forall y \in \operatorname{Im}\varphi \ \ \exists! x \in X : \varphi^{-1} y = x$

Обратный оператор существует только к изоморфизмам.

Теорема 1.5. $\lhd\varphi : X \to X$

$\exists\varphi^{-1} \Leftrightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim X$ или $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$

Доказательство. $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim X \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi \simeq X \Rightarrow \varphi$ — сюръекция, $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0 \Rightarrow \forall y \ \ \exists x : \varphi x = y \Rightarrow \varphi$ — инъекция □

2 Внешняя степень ЛОп

$\lhd\Lambda^p \quad \{{}^{i_1 \dots i_p}F\}_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$ — базис Λ^p

$${}^{i_1 \dots i_p}F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \qquad \dim\Lambda^p = C_n^p$$

$]\{x_i\}_{i=1}^{n}$ — набор векторов

$$\det\{x_1 \dots x_n\} := {}^{1 \dots n}F(x_1 \dots x_n)$$

$\lhd \Lambda_p \quad \{_{i_1 \dots i_p} F\})_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$ — базис Λ_p

$$\dim \Lambda_p = C_n^p \quad {}_{i_1 \dots i_p} F = \hat{x}_{i_1} \wedge \hat{x}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{x}_{i_p} \simeq x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$$

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $X \Rightarrow x_i = \xi_i^{j_i} e_{j_i}$

$$_{1 \dots n} F = \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \ldots \xi_{j_n}^n (e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) =$$

$$= \det[\xi_{j_1}^1 \ldots \xi_{j_n}^n](e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n)$$

Определение. **Определителем** набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется число $\det[x_1 \ldots x_n]$, такое, что:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \det[x_1 \ldots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Лемма 6.

$$\textit{от } \Lambda^p \quad \det\{x_1 \ldots x_n\} = \det[x_1 \ldots x_n] \textit{ от } \Lambda_p$$

Доказательство.

$$\det\{x_1 \ldots x_n\} = {}^{1 \dots n} F(x_1 \ldots x_n) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \ldots \xi_n^{j_n} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n =$$

$$= \det\{x_1 \ldots x_n\} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$$
$$= \det[x_1 \ldots x_n] e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$$

□

Определение. $\lhd \varphi : X \to X$

Внешней степенью φ^{Λ_p} оператора φ называется отображение:

$$\varphi^{\Lambda_p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(x_p)$$

Примечание.

$$\varphi^{\Lambda_p} : \Lambda_p \to \Lambda_p$$

$\lhd p = n$

$$\varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) = \varphi(e_1) \wedge \varphi(e_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n) = a_1^{j_1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge a_1^{j_n} e_{j_n} =$$

$$= a_1^{j_1} \ldots a_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n}) = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \ldots a_{j_n}^n e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \det A_\varphi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Определение. **Определителем** линейного оператора φ называется число, такое что:

$$\det\varphi = \det[\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n)] = \det A_\varphi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Примечание.

$$\forall\omega \in \Lambda_n \quad \varphi^{\Lambda_n}\omega = \det\varphi \cdot \omega$$

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \omega = \alpha e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

$$\varphi^{\Lambda_n}\omega = \alpha\varphi^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \alpha\det\varphi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \det\varphi \cdot \omega$$

Определение. **Грассманова алгеба** — алгебра по внешнему произведению

Теорема 2.1.

$$\det(\varphi\psi) = \det\varphi\det\psi$$

Доказательство.

$$\lhd \det(\varphi\psi)e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = (\varphi\psi)^{\Lambda_n}e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \varphi(\psi(e_1)) \wedge \ldots \wedge \varphi(\psi(e_n)) =$$

$$= \varphi^{\Lambda_n}(\psi(e_1) \wedge \ldots \wedge \psi(e_n)) = \det\varphi\det\psi e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

$\square$