1 Векторная алгебра

1.1 Системы координат на плоскости и в пространстве.

Определение. **Координатной осью** называется ориентируемая прямая, имеющая начало отсчета 0 и снабженная масштабом E.

Определение. **Система координат** — прямоугольная, если угол между осями координат прямой.

Определение. **Декартова прямоугольная система координат** — система координат с одинаковым масштабом по всем осям.

Определение. Система координат на плоскости называется **полярной**, если положение каждой точки задаётся полярным углом φ и полярным радиусом ρ.

Связь прямоугольной и полярной систем:

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \;\; \sin\varphi = \frac{y}{\rho}$$

Определение. Система координат в пространстве называется **цилиндрической**, если положение каждой точки задаётся полярным углом φ, полярным радиусом ρ и высотой над плоскостью z.

Связь прямоугольной и цилиндрической систем такая же, как прямоугольной и полярной.

Определение. Система координат называется **сферической**, если положение каждой точки определяется радиальным расстоянием ρ, азимутальным φ и зенитным Θ углами.

Связь прямоугольной и сферической систем:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\Theta, \;\; y = \rho\sin\varphi\cos\Theta, \;\; z = \rho\sin\Theta$$

1.2 Векторы и основные действия с ними *(сложение, умножение на число)*.

Определение. Направленные отрезки **эквивалентны**, если они:

1. Лежат на параллельных прямых
2. Сонаправлены
3. Имеют одинаковые длины

Определение. **Вектор** — класс эквивалентности направленных отрезков

Определение. Сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, полученный по правилу треугольника или параллелограмма

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ является вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, такой что:

1. $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$
2. $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
3. $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
4. $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$

1.3 Векторное введение координат. Координаты вектора.

Для любого вектора $\vec{a}$, заданного на оси l существует единственное представление $\vec{a} = x_a \cdot \vec{e}$, где $x_a \in \mathbb{R}$ и $|\vec{e}| = 1$. Тогда $\vec{e}$ — **базис** и x_a — **координата** вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$

1.4 Свойства основных действий над векторами.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — коммутативность
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ — ассоциативность
3. $\exists\vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ — нейтральный элемент
4. $\forall\vec{a} \;\; \exists(-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ — наличие обратного элемента
5. $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ — ассоциативность
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ — дистрибутивность
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ — дистрибутивность

1.5 Скалярное произведение векторов и его свойства.

Определение. Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — угол $\leq 180°$, заключенный между представителями соответствующих классов эквивалентности, отложенных от одной точки.

Определение. Скалярное произведение — число, равное: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$

Свойства скалярного произведения:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
2. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0$
3. $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}^{\perp}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}^{\perp}_{\vec{b}}\vec{a}$
4. $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = (\lambda\vec{a}, \vec{c}) + (\mu\vec{b}, \vec{c})$

1.6 Векторное произведение и его свойства.

Определение. Тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — **правая**, если если располагаясь по направлению вектора $\vec{c}$ наблюдатель видит, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит по часовой стрелке.

Определение. **Векторное произведение** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — вектор $\vec{c}$, такой что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — правая тройка

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
2. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

1.7 Смешанное произведение векторов и его свойства.

Определение. **Смешанное произведение**: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Свойства смешанного произведения:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

1.8 Двойное векторное произведение и его свойства.

$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$

Свойства:

1. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — можно запомнить как *“бац минус цаб”*
2. Тождество Якоби:
$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

1.9 Замена координат при переходе к новой системе отсчета. Матрица перехода.

Переход от одного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к другому базису $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = t_1^1\vec{e}_1 + t_1^2\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = t_2^1\vec{e}_1 + t_2^2\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

Определение. T называется **матрица перехода**

С учётом переноса начала координат:

$$X = A + T \cdot X'$$

Парралельный перенос: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$

Сжатие-растяжение: $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, A = \vec{0}$

Поворот на угол $\varphi : T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, A = \vec{0}$

2 Аналитическая геометрия

2.1 Уравнения линий и поверхностей.

Определение. **Уравнение линии** — такое равенство, что координаты любой точки на линии удовлетворяют этому равенству и координаты любой точки не на линии не удовлетворяют.

Способы задания линий в $\mathbb{R}^2$:

1. В явном виде: $y = f(x), x = g(y)$
2. В неявном виде: $F(x, y) = 0$
3. Параметрически: $x = x(t), y = y(t)$

Способы задания линий в $\mathbb{R}^3$:

1. В неявном виде: $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$
2. Параметрически: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

Способы задания поверхностей в $\mathbb{R}^3$:

1. В явном виде: $x = f(y, z);\;\; y = g(x, z);\;\; z = h(x, y)$
2. В неявном виде: $F(x, y, z) = 0$
3. Параметрически: $x = x(u, v);\;\; y = y(u, v);\;\; z = z(u, v)$

Эти способы задают не только линии и поверхности. *(Также могут быть точки, множества линий/поверхностей и т.д.)*

Определение. **Целый алгебраический полином** — уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{m_i} y^{n_i},\;\; m_i, n_i \in \mathbb{N}$$

Порядок такого полинома $p = \max_i\{m_i + n_i\}$

2.2 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Взаимное расположение прямых.

2.2.1 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве

Возьмём произвольную прямую линию l в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Пусть $\vec{s} = \begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix}^T$ — направляющий вектор этой прямой. Зафиксируем точку M_0 на l с радиус-вектором $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}^T$ и выразим точку M на l с радиус-вектором $\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$.

$\overrightarrow{M_0M} || \vec{s}$, т.к. они параллельны $l \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ *(по определению)* $\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$

Определение. Это **векторное уравнение прямой**.

Домножим обе части векторно на $\vec{s}$.

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r}_0 \times \vec{s} + t \cdot \vec{s} \times \vec{s}$$

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r}_0 \times \vec{s}$$

$$\vec{b} := \vec{r}_0 \times \vec{s}, \quad \vec{r} \times \vec{s} = \vec{b}$$

Спроектируем векторное уравнение прямой на каждую из осей, получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

Выразим из каждого уравнения t и приравняем:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Если даны две точки на прямой M_0 и M_1 с радиус-вектором $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^T$, можем получить направляющий вектор для l, который равен $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$. Подставим это в векторное уравнение прямой:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t$$

Сделаем переход, аналогичный предыдущему:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0) \cdot t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

2.2.2 Взаимное расположение прямых

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, а также равен углу между нормалями к этим векторам:

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}\right| = \left|\frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|$$

Парралельность прямых:

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 || \vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_2 = \alpha\vec{s}_1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

Перпендикулярность:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

2.3 Частные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

2.3.1 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0)$$

Этот переход можно делать, только если $m \neq 0$

$$k := \frac{m}{n} = \operatorname{tg} \alpha \quad \alpha\text{— угол между прямой и осью } x$$

$$b := y_0 - kx_0, \quad y = kx + b$$

Геометрический смысл b — длина отрезка между началом координат и точкой пересечения прямой с осью y.

2.3.2 Уравнение прямой в отрезках на осях

Возьмем a — длина отрезка между началом координат и точкой пересечения прямой с осью x. Тогда:

$$a := \frac{-b}{k}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2.3.3 Нормальное уравнение прямой

Возьмём нормаль к $\vec{s}$ — это будет $\vec{n}$, при этом его возьмём таким, что:

$$|\vec{n}| = 1, \quad \angle(\vec{n}, \vec{r}_0) < \frac{\pi}{2}$$

Домножим векторное уравнение на $\vec{n}$:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = (\vec{s}, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$
$$(\vec{r}, \vec{n}) - (\vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$
$$\vec{n} := (\cos \alpha, \cos \beta), \quad p := (\vec{r}_0, \vec{n})$$
$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

p — **прицельный параметр**, его геометрический смысл - расстояние от начала отсчета до прямой.

Возьмём произвольную нормаль к $\vec{s}$ — вектор $\vec{N} = (A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$C := Ax_0 + By_0, \quad Ax + By + C = 0$$

2.3.4 Расстояние от точки до прямой

Найдём расстояние между точкой M и прямой L, заданной уравнением с прицельным параметром.

$$L : x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

Проведем $L_1 || L$ через M:

$$L_1 : x\cos\alpha + y\cos\beta - p_1 = 0, \quad p_1 = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta$$

$$\rho(L, M) = \rho(L, L_1) = |p_1 - p| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p|$$

2.4 Уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей.

2.4.1 Векторное параметрическое уравнение плоскости

Зададим плоскость двумя непараллельными векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Выразим произвольную точку M из плоскости с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$$

Определение. Это **векторное параметрическое уравнение плоскости**.

Спроектируем на каждую ось:

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1m_1 + t_2m_2 \\ y = y_0 + t_1n_1 + t_2n_2 \\ z = z_0 + t_1p_1 + t_2p_2 \end{cases}$$

2.4.2 Общее уравнение плоскости

Умножим векторное уравнение на $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ скалярно:

$$(\vec{r}, \vec{n}) = (\vec{r}_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = (t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2, \vec{n})$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

В проекции:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0, \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

2.4.3 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

По аналогии с $\mathbb{R}^2$:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_2-\vec{r}_1, \vec{r}_3-\vec{r}-1) = 0$$

2.4.4 Нормальное уравнение плоскости

По аналогии с $\mathbb{R}^2$:

$$p := (\vec{r}_0, \vec{n}) = \text{Пр}_{\vec{n}}^{\perp}, \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

2.4.5 Угол между плоскостями

Это угол между нормалями плоскостей.

2.4.6 Парралельность плоскостей

$$\mathcal{L}_1 || \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

2.4.7 Перпендикулярность плоскостей

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

2.5 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

2.5.1 Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \left|\frac{(\vec{s}, \vec{n})}{|\vec{s}||\vec{n}|}\right|$$

2.5.2 Парралельность прямой и плоскости

$$\mathcal{L} || L \Leftrightarrow \vec{s} || \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{s}, \vec{n}) = 0$$

2.5.3 Перпендикулярность прямой и плоскости

$$\mathcal{L} \perp L \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha\vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

2.6 Эллипс: геометрическое определение, каноническое уравнение, симметрия и форма эллипса.

Определение. Эллипс — множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек *(фокусов)* — постоянная величина.

Пусть фокусы — точки F_1, F_2, $|F_1F_2| = 2$ — фокусное расстояние, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ — векторы от точки эллипса до фокусов. Тогда по определению:

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a = const$$

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — **эксцентриситет** эллипса.

$$0 \leq c \leq a \Rightarrow 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

При $c = 0$ эллипс — окружность, при $c = a$ — отрезок.

Каноническое уравнение эллипса:

$$b^2 := a^2 - c^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a — длина **большой полуоси** эллипса, b — длина **малой полуоси**.

Очевидны предельные значения координат эллипса:

$$|x| \leq a, \ \ |y| \leq b$$

Кроме того, эллипс симметричен относительно обеих осей и относительно начала отсчета.

2.7 Эллипс: полярное уравнение, параметрические уравнения, директрисы, уравнение касательной к эллипсу.

2.7.1 Полярное уравнение

2.7.2 Параметрическое уравнение эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Это уравнение можно проверить подстановкой в каноническое.

2.7.3 Уравнение касательной к эллипсу

Касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается следующим уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

2.7.4 Директрисы

Определение. **Директрисами** эллипса называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$.

$$d_1 := \frac{a}{\varepsilon} + x, \quad d_2 := \frac{a}{\varepsilon} - x$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

2.8 Окружность.

Определение. Окружность — частный случай эллипса при $c = 0, \;\; r_1 = r_2 = r$

Свойства:

1. $r_1 + r_2 = 2a = 2r, \;\; a = b = r, \;\; \varepsilon = 0$
2. Каноническое уравнение:
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$
3. $|x| \le r, \;\; |y| \le r$
4. $\rho = r$
5. $x = r\cos t, \;\; y = r\sin t$
6. Касательная в точке $M_0(x_0, y_0):\;\; \frac{xx_0}{r^2} + \frac{yy_0}{r^2} = 1$

3 Алгебраические структуры. СЛАУ

3.1 Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле

Определение. Полугруппа — множество G с заданной на нём бинарной ассоциативной замкнутой операцией $\circ$, т.е.

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

Определение. Группа — полугруппа, где выбран нейтральный элемент и для каждого элемента есть обратный:

1. Нейтральный элемент $e : e \circ g = g \circ e = g$
2. Обратный элемент: $\forall g \in G \;\; \exists g^{-1} \;\; g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Определение. Абелева группа — группа с коммутативной операцией, т.е.

$$\forall g_1, g_2 \in G \;\; g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Определение. Кольцо — множество с двумя бинарными операциями $\{R, `+', `\cdot'\}$, которое является абелевой группой относительно сложения, полугруппой относительно умножения и эти операции согласованны *(дистрибутивны)*:

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3; \quad (r_2 + r_3) \cdot r_1 = r_2 \cdot r_1 + r_3 \cdot r_1$$

Определение. Поле — множество с двумя бинарными операциями $\{R, `+', `\cdot'\}$, где эти операции согласованны и:

1. $\{K, `+'\}$ — абелева группа
2. $\{K \setminus \{0\}, `\cdot'\}$ — абелева группа

3.2 Алгебраические структуры: линейное пространство, алгебра

Определение. Модуль над кольцом R — абелева группа $\{G, `+'\}$ с операцией $R \times G \to G$, записываемой как rg и для которой выполняется следующее:

1. $(r_1 + r_2)g = r_1 g + r_2 g$
2. $r(g_1 + g_2) = rg_1 + rg_2$
3. $(r_1 r_2)g = r_1(r_2 g)$

Определение. Линейное пространство — модуль над кольцом, которое также является полем.

Определение. Вектор — элемент линейного пространства.

Определение. Алгебра — модуль над кольцом, где сам модуль также является кольцом.

3.3 Поле комплексных чисел

$i^2 := -1$

$\mathbb{C} = \{a + bi : \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Модуль комплексного числа c: $|c| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, если $c = a + bi$

Аргумент комплексного числа c: $\varphi = \arg(c) = \arg(a + bi) = 2 \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right)$

Тогда $c = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Дополнение комплексного числа c записывается как $\overline{c} = \overline{a + bi} = a - bi$

3.4 Линейное пространство. Примеры линейных пространств.

Дано выше. *(3.2, стр. 12)*

Примеры:

1. $X = \{x = \begin{pmatrix}\xi^1 & \dots & \xi^n\end{pmatrix}^T, \xi^i \in \mathbb{R}\}$ *(или* $\mathbb{C}$*)*
2. $\mathcal{P}_n = \{\text{многочлены } p(t) : \deg p(t) \le n, n \in \mathbb{N}\}$

3.5 Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.

Определение. **Линейной комбинацией** называется следующее выражение:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ — вектора, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ — коэффициенты.

Определение. Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнонезависимым**, если не существует его линейной комбинации, где не все коэффициенты равны 0, а сама комбинация равна 0_X:

$$\nexists \{\alpha_i\}_{i=1}^n : \exists i : \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_X$$

Иначе набор называется **линейно зависимым**

Лемма 1. *Любой набор, содержащий нулевой вектор, является линейнозависимым.*

Лемма 2. *Набор, содержащий линейнозависимый поднабор, является линейнозависимым.*

Лемма 3. *Любой поднабор линейнонезависимого набора также является линенйнонезависимым.*

Лемма 4. *Набор векторов линейнозависим тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов набора выражается линейной комбинацией остальных.*

$$\exists k \in \{1 \ldots n\} : x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha^i x_i \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ}$$

3.6 Базис и размерность линейного пространства.

Определение. Набор векторов называется **полным** в линейном пространстве X, если любой вектор этого пространства можно выразить как линейную комбинацию этого набора:

$$\forall x \in X \quad \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i$$

Определение. Набор векторов называется **базисом** пространства X, если он является полным и ЛНЗ.

Определение. Линейное пространство называется **конечномерным**, если в нём существует конечный полный набор векторов

Определение. **Размерность пространства** $\dim X$ — количество векторов в его базисе.

3.7 Изоморфизм линейных пространств.

Определение. Изоморфизм — биекция, сохраняющая линейность, установленная между двумя линейными пространствами над одним и тем же полем:

$$\begin{cases} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 \\ \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1 \end{cases}$$

3.8 Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.

Определение. Подпространство линейного пространства X — замкнутое множество $L \subset X$

Пример.
1. X и $\{0\}$ называются тривиальными подпространствами
2. Прямая и плоскость, содержащие начало координат — подпространство E_3
3. $\mathbb{R}^{m<n}$ — подпространство $\mathbb{R}^n$
4. Множество симметричных $n \times n$ матриц — подпространство $\mathbb{R}^n_n$
5. Множество полиномов с членами только чётных степеней — подпространство $\mathcal{P}_n$

Определение. Линейная оболочка набора векторов — множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha^i x_i \;\middle|\; \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \right\}$$

Определение. Линейное многообразие, параллельное подпространству L линейного пространства X — множество M:

$$M = \{y \in X : y = x_0 + x \quad \forall x \in L\},\ x_0 \in X$$

3.9 Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.

Определение. Пересечение подпространств L_1 и L_2 — множество L', такое что:

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$$

Определение. Сумма подпространств L_1 и L_2 — множество L'', такое что:

$$L' = \{x \in X : x = x_1 + x_2 \ \ \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

Определение. **Прямая сумма подпространств** L_1 и L_2 — множество $L = L_1 \dot{+} L_2$, такое что:

$$L = \{x \in X : x! = x_1 + x_2 \ \ \forall x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$$

Определение. Если $X = L_1 \dot{+} L_2$, L_1 — **дополнение** L_2 до X

3.10 Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем. Теорема Крамера *(геометрическая формулировка)*.

Определение.

$$\begin{cases} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n = \beta^1 \\ \alpha_1^2\xi^1 + \alpha_2^2\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2\xi^n = \beta^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m\xi^1 + \alpha_2^m\xi^2 + \ldots + \alpha_n^m\xi^n = \beta^m \end{cases}$$

— **линейная алгебраическая система**, α — коэффициенты, β — свободные члены, ξ — неизвестные

Определение. **Решение системы** — такой набор, при подстановке которого равенства становятся верными.

Определение. **Совместная система** — система, у которой есть решение.

Определение. **Определенная система** — совместная система, которая имеет единственное решение.

Определение. **Однородная система** — система, у которой все свободные члены равны 0.

Запишем в векторной форме: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\xi^i = b$

Теорема 1. Если $m = n$ и $\{a_i\}_{i=1}^n$ — ЛНЗ, система совместна и определена, т.е. есть единственное решение.

3.11 Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли *(геометрическая формулировка)* и ее следствия.

Рассмторим случай, когда $\dim \mathcal{L}\{a_1 \ldots a_n\} = r \leq n$. Тогда можно занумеровать a так, что $\{a_i\}_{i=1}^r$ — ЛНЗ и переписать систему как:

$$a_1\xi^1 + \ldots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - \ldots - a_n\xi^n$$

Теорема 2. $b \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ система совместна *(можно все ξ справа занулить и представить b через левую часть)*. Если $r = m$, система определена, иначе — нет.

Следствие. Однородная система:

1. Всегда совместна, т.к. существует тривиальное решение
2. Имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $r < m$
3. Является неопределенной тогда и только тогда, когда $m < n$

3.12 Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.

Теорема 3. Если $m = n$, то:

1. Или однородная система имеет только тривиальное решение, и неоднородная система совместна и определена для любого b
2. Или существуют нетривиальные решения однородной системы и неоднородная система совместна не при любых b

Пояснение: в первом случае $\{a_i\}$ ЛНЗ $\Rightarrow \forall b$ можно выразить как линейную комбинацию $\{a_i\}$ единственным образом. Во втором случае $\{a_i\}$ ЛЗ $\Rightarrow$ не любой b можно выразить как линейную комбинацию $\{a_i\}$.

3.13 Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее решение однородных и неоднородных систем.

Определение. Фундаментальной системой решений линейной однородной системы уравнений называется любая система из $n-r$ линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространтва решений однородной системы.

Любое решение можно представить в виде общего решения:

$$z = z' + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

где $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ — ФСР.

4 Полилинейные формы. ~~Определители~~

4.1 Перестановки.

Определение. Перестановкой из $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из первых n чисел натурального ряда называется расположение их в некотором фиксированном порядке.

Определение. Перестановка $1, 2, \ldots, n$ — **базовая**.

Определение. Транспозиция перестановки t_q^p — обмен местами двух элементов этой перестановки.

Определение. Беспорядок*(инверсия)* в перестановке — когда большее число стоит перед меньшим.

Определение. Чётность числа беспорядков в перестановке $\Leftrightarrow$ чётность перестановки

4.2 Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Определение. **Отображение** из X в Y ($f : X \to Y$) сопоставляет каждому $x \in X$ элемент $y \in Y$

Определение. **Линейная форма** — линейное отображение из линейного пространства X в линейное пространство Y:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Определение. $f = g \Leftrightarrow (f, x) = (g, x) \ \ \forall x \in X$

Определение. θ — **нуль-форма**, если $(\theta, x) = 0 \ \ \forall x \in X$

Определение. $h = f + g \Leftrightarrow (h, x) = (f, x) + (g, x) \ \ \forall x \in X$

Определение. $l = \alpha f \Leftrightarrow (l, x) = \alpha(f, x) \ \ \forall x \in X$

Определение. **Пространство, сопряженное с** X — пространство линейных форм, заданных на X и обозначаемое X^*

4.3 Полилинейные формы (ПЛФ): основные определения, тензор, эквивалентное задание ПЛФ.

Примечание. Т.к. в этом разделе много сумм, не будем их писать:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \xi^j \equiv \varphi_j \xi^j$$

Примечание. (от автора) Я буду втыкать ⚠ везде, где есть скрытые суммы.

Определение. **Полилинейная форма** — функция от p векторов и q линейных форм, принимающая значения из поля K:

$$U : X^p \times X^{*^q} \to K,$$

линейная по всем аргументам:

$$U(x_1 \dots \alpha x_i' + x_i'' \dots x_n, y^1 \dots y^n) = \alpha U(x_1 \dots x_i' \dots x_n, y^1 \dots y^n) + U(x_1 \dots x_i'' \dots x_n, y^1 \dots y^n),$$

такая ПЛФ имеет **валентность** (p, q)

Определение. **Тензор** ПЛФ W валентности (p, q) — набор из n^{p+q} чисел:

$$w_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} = W(e_{i_1} \dots e_{i_p}, f^{j_1} \dots f^{j_q})$$

$$\forall t \in \{1 \dots p\} \ \ i_t \in \{1 \dots n\}; \quad \forall t \in \{1 \dots q\} \ \ j_t \in \{1 \dots n\},$$

ранг этого тензора (p, q).

Примечание. Для удобства можно писать так: $w_{i_1\ldots i_q}^{j_1\ldots j_q} = w_{\vec{i}}^{\vec{j}}$

Теорема 4. Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора в паре базисов пространств X и X^*

4.4 Базис линейного пространства ПЛФ валентности (p, q).

Определение. $U + V$ и λU заданы так же, как для линейных форм.

Теорема 5. Множество всех ПЛФ валентности (p, q) — линейное пространство Ω_q^p над полем K.

Рассмотрим набор ПЛФ $\{{}^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_p}W\}$, такой что:

$$ {}^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_p}W(x_1 \ldots x_p, y^1 \ldots y^q) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\cdots\xi_p^{s_p}\eta_{t_1}^1\eta_{t_2}^2\cdots\eta_{t_q}^q, $$

т.е. ${}^{\vec{s}}_{\vec{t}}W$ — произведение s_i-ой координаты i-того вектора и t_i-ой координаты i-той формы. Запишем в виде тензора:

$$ {}^{\vec{s}}_{\vec{t}}w_{\vec{i}}^{\vec{j}} = \delta_{i_1}^{s_1}\delta_{i_2}^{s_2}\cdots\delta_{i_p}^{s_p}\delta_{t_1}^{j_1}\delta_{t_2}^{j_2}\cdots\delta_{t_q}^{j_q}, $$

т.е. ${}^{\vec{s}}_{\vec{t}}w_{\vec{i}}^{\vec{j}} = 1$ только если $\vec{s} = \vec{i}$ и $\vec{t} = \vec{j}$, иначе 0.

Теорема 6. $\{{}^{\vec{s}}_{\vec{t}}W\}$ — базис Ω_q^p

$\dim \Omega_q^p = n^{p+q}$

4.5 Произведение полилинейных форм и его свойства.

$W = U\cdot V \Leftrightarrow W(x_1 \ldots x_{p_1+p_2}, y^1 \ldots y^{q_1+q_2}) = U(x_1 \ldots x_{p_1}, y^1 \ldots y^{q_1})\cdot V(x_1 \ldots x_{p_2}, y^1 \ldots y^{q_2})$

Свойства:

1. $U \cdot V \neq V \cdot U$
2. $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W = U \cdot V \cdot W$
3. $U \cdot \Theta_{\Omega_{q_2}^{p_2}} = \Theta_{\Omega_{q_1}^{p_1}} \cdot V = \Theta_{\Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}}$
4. $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$
5. $(\alpha \cdot U) \cdot V = U \cdot (\alpha \cdot V)$
6. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*. Тогда набор
$$ {}^{s_1\ldots s_p}W = f^{s_1}\cdots f^{s_p} $$
образует базис в Ω_0^p:
$$ {}^{s_1\ldots s_p}W = f^{s_1}(x_1)\cdots f^{s_p}(x_p) = \xi_1^{s_1}\cdots\xi_p^{s_p} $$
7. Более общий случай: $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*, $\{\hat{x}^i\}_{i=1}^n$ — базис X^{**}, тогда в Ω_q^p базис:
$$ {}^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_q}W = f^{s_1}\cdots f^{s_p}\cdot\hat{x}_{t_1}\cdots\hat{x}_{t_q} $$

4.6 Симметричные и антисимметричные ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации.

Определение. ПЛФ $U \in \Omega_0^p$ **симметричная**, если порядок аргументов не влияет на значение U:

$$\forall (j_1 \dots j_p) - \text{перестановки} \quad U(x_1 \dots x_p) = U(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Определение. ПЛФ $U \in \Omega_0^p$ **антисимметричная**, если любая транспозиция её аргументов меняет знак значения U, т.е. произвольная перестановка меняет знак столько раз, сколько в ней транспозиций:

$$\forall (j_1 \dots j_p) - \text{перестановки} \quad U(x_1 \dots x_p) = (-1)^{[j_1 \dots j_p] U(x_{j_1} \dots x_{j_p})},$$

где $[j_1 \dots j_p]$ — чётность перестановки.

Примечание. Пространство симметричных ПЛФ — подпространство Ω_0^p и обозначается Σ^p

Примечание. Пространство антисимметричных ПЛФ — подпространство Ω_0^p и обозначается Λ^p

Определение. **Симметризация** — операция получения симметричной ПЛФ из произвольной ПЛФ, называется Sym и выполняется следующим образом:

$$\operatorname{Sym} W = U, \quad U(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 \dots j_p)} W(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Определение. **Антисимметризация** — операция получения антисимметричной ПЛФ из произвольной ПЛФ, называется Asym и выполняется следующим образом:

$$\operatorname{Asym} W = V, \quad V(x_1 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 \dots j_p]} W(x_{j_1} \dots x_{j_p})$$

Свойства Sym и Asym:

1. Линейность
2. Дистрибутивность
3. Композиция:

$$\operatorname{Sym} \operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}, \quad \operatorname{Asym} \operatorname{Asym} = \operatorname{Asym}, \quad \operatorname{Sym} \operatorname{Asym} = 0, \quad \operatorname{Asym} \operatorname{Sym} = 0$$

4.7 Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$. Доказательство полноты.

Базис Λ^p — набор ПЛФ $\{^{s_1 \ldots s_p}F\}$, такой что:

$$^{s_1 \ldots s_p}F = p! \operatorname{Asym}(^{s_1 \ldots s_p}W) \text{ и } 1 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_p \le n,$$

где $\{^{s_1 \ldots s_p}W\}$ — базис Ω_0^p

Доказательство. Докажем полноту.

Рассмотрим произвольную форму $U \in \Lambda^p$ и разложим её по базису Ω_0^p

⚠ $$U = {}^{s_1 \ldots s_p}W u_{s_1 \ldots s_p}$$

⚠ $$U = \operatorname{Asym} U = \operatorname{Asym}(^{s_1 \ldots s_p}W u_{s_1 \ldots s_p}) = u_{s_1 \ldots s_p} \operatorname{Asym} {}^{s_1 \ldots s_p}W =$$

⚠ $$u_{s_1 \ldots s_p} \frac{1}{p!} p! \operatorname{Asym} {}^{s_1 \ldots s_p}W = u_{s_1 \ldots s_p} \frac{1}{p!}(^{s_1 \ldots s_p}F) =$$

$$\frac{1}{p!} \sum_{1 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le n} \sum_{(\sigma_1 \ldots \sigma_p)} (-1)^{[\sigma_{s_1} \ldots \sigma_{s_p}]}(^{s_1 \ldots s_p}F)(-1)^{[\sigma_{s_1} \ldots \sigma_{s_p}]} u_{s_1 \ldots s_p} =$$

$$\frac{1}{p!} \sum_{1 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le n} p!(^{s_1 \ldots s_p}F) u_{s_1 \ldots s_p} = \sum_{1 \le s_1 \le \ldots \le s_p \le n} (^{s_1 \ldots s_p}F) u_{s_1 \ldots s_p}$$

Таким образом, мы разложили произвольную $U \in \Lambda^p$ по $\{F\}$. □

$\dim \Lambda^p = C_n^p$

4.8 Базис линейного пространства антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$. Доказательство линейной независимости.

Читайте в конспекте Александра Игоревича, я на такое не готов.

4.9 Внешнее умножение ПЛФ и его свойства.

Определение. Внешнее произведение $U \in \Lambda^p$ на $V \in \Lambda^r$ — ПЛФ следующего вида:

$$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p!r!} \operatorname{Asym}(U \cdot V)$$

$U \wedge V \in \Lambda^{p+q}$

Свойства:

1. $p + q > n \Rightarrow U \wedge V = \Theta$
2. $U \wedge V = (-1)^{pr} V \wedge U$
3. $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p!r!s!} \operatorname{Asym}(U \cdot V \cdot W)$
4. $U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$
5. $(\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha(U \wedge V)$
6. $U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta$
7. $\{f^i\}_{i=1}^n$ – базис X^*. Тогда:

$$\forall 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_p \leq n : \quad {}^{i_1 \ldots i_p}F = f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}$$