Теорема 1. Лагранжа.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр., дифф. в (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Теорема 2. Коши. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$
f, g — дифф. в (a, b); $g' \neq 0$ на (a, b). Тогда
$\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Следует из теоремы Коши при $g(x) = x$ □

Примечание. Если $g(b) = g(a)$, то по т. Ролля ...

Примечание. От автора конспекта: Кохась действительно не дописал замечание.

Примечание. Теорему Лагранжа можно интерпретировать как следующее: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — тангенс угла между хордой графика и горизонталью, а $f'(c)$ — касательная. Таким образом, если провести хорду графика, то можно найти точку между точками пересечения графика и хорды такую, что касательная к графику будет параллельна этой хорде.

Доказательство. Теоремы Коши.
$F(x) := f(x) - kg(x)$
Подберем k такое, что $F(b) = F(a)$

$$f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По т. Ролля $\exists c : F'(c) = 0$

$$f'(c) - kg'(c) = 0$$

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

Следствие.

1. f непр. на $[a, b]$, дифф. в (a, b)

   $\exists M : \forall x \ \ |f'(x)| \leq M$

   Тогда $\forall x, x + h \in [a, b]$

$$|f(x + h) - f(x)| \leq M|h|$$

2. f — непр. на $[a, b\rangle$, дифф. на $(a, b\rangle$

   $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = k \in \overline{\mathbb{R}}$

   Тогда $f'_+(a) = k$

Доказательство. Следствия 2.
$\exists a < c < a + h$, такой что:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(c) \xrightarrow[h \to 0]{} k$$

□

$\triangleleft f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
f — дифф. при $x > 0$
$f' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = 0$ (позже)
Это был контрпример — функция, которая везде дифф., но $\nexists \lim$

Теорема 3. Дарбу.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — дифф. на $[a, b]$
Тогда $\forall C$ лежащего между $f'(a), f'(b)$

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$$

Доказательство. $F(x) := f(x) - C \cdot x$ — у неё $\exists \max\limits_{[a,b]}$ *(в силу непрерывности)*
$F'(x) = f'(x) - C \quad F'(a)$ и $F'(b)$ разных знаков.

1. $F'(a) > 0 \;\; F'(b) < 0$

   По лемме при $x > a$, близких к $a \;\; f(x) > f(a) \Rightarrow \max f$ достигается в $c \in (a, b)$

□

Следствие.
1. Функция f' обладает свойством "сохранять промежуток"
2. f' не может иметь разрывов вида "скачок"

1 Показательная функция

$\forall x, y \quad f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \quad (*)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непр.

Определение. **Показательная функция** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непр.
$\not\equiv 0, \not\equiv 1$ и удовл. $(*)$

Теорема 4. f — показ. ф-ция
Тогда:

1. $\forall x \;\; f(x) > 0; f(0) = 1$
2. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$
3. f — строго монот.: $a := f(1)$

   Тогда $a \neq 1$, если $a > 1$ — возр., если $a < 1$ — убыв.
4. Множество значений $f \quad (0, +\infty)$
5. $\tilde{f}(1) = f(1)$, тогда $f = \tilde{f}$

Доказательство.
1. $f \not\equiv 0 \;\; \exists f(x_0) \neq 0$

   $x = x_0, y = 0 \quad f(x_0 + 0) = f(x_0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$

   Если $f(x_1) = 0$, тогда

$$\forall x \quad f(x) = f(x - x_1) \cdot f(x_1) = 0$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

2. Как в опр. ст. с рациональным показателем
   (a) $r = 1$
   (b) $r \in \mathbb{N}$
   $$f(2x) = f(x+x) = f(x) \cdot f(x) = f(x^2)$$
   $$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) \cdot f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$$
   (c) $r \in$"$-\mathbb{N}$"
   $$1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx) \cdot f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$$
   (d) $r = 0$
   $$f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$$
   (e) $r = \frac{1}{n}$
   $$f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = (f(\frac{x}{n}))^n$$
   $$f(\frac{1}{n}x) = (f(x))^{\frac{1}{n}}$$
   (f) $r = \frac{m}{n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
   $$f(\frac{m}{n}x) = f(m \cdot (\frac{1}{n}x)) = (f(\frac{1}{n}x))^m = (f(x)^{\frac{1}{n}})^m$$
3. $a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \;\; f(r) = 1^r = 1$
   f — непр. и $f(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \equiv 1$
   $a > 1$. Тогда $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$
   $$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r > 1$$
   Значит $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ берем $r_k \to x (r_k \in \mathbb{Q})$
   $f(r_k) \to f(x)$, значит $f(x) \geq 1$
   $$f(x) = f((x-r)+r) = f(x-r) \cdot f(r) > 1$$
   $\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$
   возр. $x \in \mathbb{R}, h > 0$
   $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$
   $f(h) > 1 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$
   $a < 1$ — аналогично.
4. $f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$
   $\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$
   $f(1) = a > 1$
   $a^n, n \in \mathbb{Z}$

5. $\tilde{f}(1) = f(1) \Rightarrow \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$
   $\forall x \quad r_k \to x$
   $\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$
   $\tilde{f}(r_k) \to \tilde{f}(x); f(r_k) \to f(x) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$

$\square$

Обозначение. f — показ ф-ция, $f(1) = a$
Это значит $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = a^r$
Обозначим: $f(x) = a^x$

Теорема 5. $\exists$ показ. ф-ция f_0, удовл.:

$$\frac{f_0(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

Доказательство будет позже.

Теорема 6. f — показ. ф-ция.
Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \ \ f(x) = f_0(\alpha x)$

Доказательство. $f(1) = a$
Множество значений f_0 это $(0, +\infty)$
$\exists \alpha : f_0(\alpha) = a$
$f_0(\alpha x)$ и есть $f(x)$. Покажем это:
$g(x) := f_0(\alpha x)$
$g(x)$ — показ. ф., т.к. она не тривиальна и удовлетворяет $(*)$, покажем это:

$$g(x + y) = f_0(\alpha(x + y)) = f_0(\alpha x + \alpha y) = f_0(\alpha x) \cdot f_0(\alpha y) = g(x)g(y)$$

$$g(1) = f_0(\alpha) = a = f(1)$$

$\square$

Следствие. Функция f_0, удовл. теореме 5, — единственная.

Доказательство. $h(x)$ — ещё одна такая функция $\Rightarrow h(x) = f_0(\alpha x)$

$$1 \xleftarrow[xx \to 0]{} \frac{h(x) - 1}{x} = \frac{f_0(\alpha x) - 1}{\alpha x} \cdot \alpha \xrightarrow[x \to 0]{} \alpha$$

, т.е. $\alpha = 1$ $\square$

Определение. f_0 называется **экспонента**, если:
$f_0(x) = e^x \quad f_0(1) = e$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

, т.е. $e^x > 1$ при $x > 0$

Следствие. $\forall a > 0, a \neq 1$
$\exists! f : f(1) = a$

Доказательство. Для этого $a \ \ \exists! \alpha \ \ f_0(\alpha) = a$
$f(x) = f_0(\alpha x)$
$f(1) = f_0(\alpha) = a$ $\square$

Следствие. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0, a \neq 1$

$$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

Доказательство. $x = 0$ — тривиально
$x \neq 0 \quad a^x = b \neq 1$
$y \in \mathbb{Q} \quad a^{xy} = (a^x)^y = b^y$
$y \in \mathbb{R} \quad r_k \to y \quad a^{xy} \leftarrow a^{xr_k} = b^{r_k} \to b^y \Rightarrow a^{xy} = b^y$ □

2 Производные высших порядков

Определение. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — дифф.
$x \in \langle a, b \rangle$
Если f' — дифф. в x_0, то $(f')'(x_0)$ — называется **вторая производная** функции f.
Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$ — множество D_{n-1} и $f^{(n-1)} : D_{n-1} \to \mathbb{R}$ определены. Пусть D_n — множество точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует $\delta > 0$, такое что:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0. Если $x_0 \in D_n$, то f — дифференцируема n раз в точке x_0. Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'_{D_n} : D_n \to \mathbb{R}$$

называется производной порядка n.
Если $\forall x \in \langle a, b \rangle \ \exists f^{(n)}(x)$, изучим дифференцируемость $f^{(n)}$ в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$$
$$f^{(n)}_+(x_0) = (f|_{\langle a,b \rangle \cap [x_0, +\infty)})^{(n)}(x_0)$$

Обозначение. E — **пр-к** в $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$C^n(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : f^{(n)}$ непр. на $E\}$
$C(E) =$ функции, непр. на E
$C^\infty(E)$:
$C(E) \underset{\neq}{\supset} C^1(E) \underset{\neq}{\supset} C^2(E) \underset{\neq}{\supset} \dots$

Наблюдение. $P(x)$ — многочлен степени n

Пусть $\begin{matrix} P(a)=C_0 \\ P'(a)=C_1 \\ \vdots \\ P^{(n)}(a)=C_n \end{matrix}$

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots + \alpha_n(x-a)^N$$

$P(a) = \alpha_0 = C_0$

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \ldots + n\alpha_n(x-a)^{n-1}$$

$P'(a) = \alpha_1 = C_1$

$$P''(x) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(x-a) + \ldots + n(n-1)\alpha_n(x-a)^{n-2}$$

$P''(a) = 2\alpha_2$
$\vdots$

$$P^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 \cdot \alpha_n$$

$$P(x) = C_0 + \frac{C_1}{1!}(x-a) + \frac{C_2}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{C_n}{n!}(x-a)^n$$
$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Определение. **Многочленом Тейлора** n-той степени *(порядка)* функции f в точке a называется:

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$