

# 1 Определения

## 1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1.  $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2.  $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3.  $\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4.  $f_{(x)}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

## 1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!} (x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

## 1.3 $n$ -й дифференциал

$$\sum_{\alpha: |\alpha|=k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} k\text{-й дифференциал функции } f \text{ в точке } a \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(a, h)$$

## 1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ |x|=1}} |Ax|$$

# 2 Теоремы

## 2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$  — это подразумевает, что  $E$  открыто
- $a \in E$

- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при  $1 \leq k \leq r$ :

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j: |j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i \\ \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2} \\ \varphi''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots \right) \\ \varphi^{(k)}(0) &= \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

□

## 2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

### 2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$  — это подразумевает  $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда  $\exists t \in (0, 1)$ :

$$f(x) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{(\alpha + 1)!} (x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

*Доказательство.* Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = f(a + th)$ , где  $h = x - a$ . Тогда  $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} t + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} (x-a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-a|^{r+1})}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{\alpha: |\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + \Theta(x-a))}{\alpha!} h^\alpha$$

□

### 2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha: 0 \leq |\alpha| \leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. **Отсутствует**

□

## 2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение  $A \rightarrow \|A\|$  в  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  — норма, т.е.:

- (a)  $\|A\| \geq 0$
- (b)  $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{n \times m}$
- (c)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
- (d)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2.  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство.

1.  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$

a, b, c — очевидно.

d:  $|(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|)|x|$

По замечанию 3  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

2.  $|BAx| = |B(Ax)| \leq \|B\| \cdot |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

□

## 2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- $X, Y$  — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $A$  — ограниченный оператор, т.е.  $\|A\|$  — конечно
2.  $A$  — непрерывно в нуле
3.  $A$  — непрерывно всюду в  $X$
4.  $A$  — равномерно непрерывно

*Доказательство.*

1.  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  — очевидно.

2.  $2 \Rightarrow 1$

Непрерывность в 0:  $\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

$$\triangleleft \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left| A \frac{1}{\delta} \delta x \right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$$

3.  $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|} \quad \forall x_1, x_0 \quad |x_1 - x_0| < \delta$$

□