

# Математический анализ

Михайлов Максим

7 октября 2022 г.

# Оглавление

|                  |  |           |
|------------------|--|-----------|
| <b>Лекция 1</b>  | <b>8 февраля</b>   | <b>4</b>  |
| 1                | Интеграл . . . . .   | 6         |
| 1.1              | Измеримые функции . . . . .  | 6         |
| 1.2              | Меры Лебега-Стилтьеса . . . . .  | 10        |
| <b>Лекция 2</b>  | <b>15 февраля</b>  | <b>11</b> |
| 1.3              | Сходимость почти везде и по мере . . . . .   | 14        |
| 2                | Интеграл . . . . .   | 19        |
| <b>Лекция 3</b>  | <b>22 февраля</b>  | <b>22</b> |
| 2.1              | Предельный переход под знаком интеграла . . . . .                                  | 26        |
| <b>Лекция 4</b>  | <b>1 марта</b>   | <b>30</b> |
| 3                | Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле. . . . . | 35        |
| <b>Лекция 5</b>  | <b>15 марта</b>  | <b>38</b> |
| 4                | Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$ . . . . .  | 40        |
| <b>Лекция 6</b>  | <b>22 марта</b>  | <b>45</b> |
| 4.1              | Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$ . . . . .                                  | 45        |
| 5                | Произведение мер . . . . .   | 46        |
| <b>Лекция 7</b>  | <b>29 марта</b>  | <b>52</b> |
| 6                | Поверхностный интеграл . . . . .   | 58        |
| 6.1              | Поверхностный интеграл I рода . . . . .  | 58        |
| <b>Лекция 8</b>  | <b>5 апреля</b>  | <b>60</b> |
| 6.2              | Поверхностный интеграл II рода . . . . .   | 60        |
| 7                | Ряды Фурье . . . . .   | 63        |
| 7.1              | Пространства $L^p$ . . . . .   | 63        |
| <b>Лекция 9</b>  | <b>12 апреля</b>   | <b>66</b> |
| 8                | Формула Грина . . . . .  | 66        |
| 9                | Ряды Фурье (возвращение) . . . . .   | 69        |
| 9.1              | Напоминание . . . . .  | 71        |
| <b>Лекция 10</b> | <b>19 апреля</b>   | <b>74</b> |
| 10               | Формула Остроградского . . . . .   | 74        |
| <b>Лекция 11</b> | <b>26 апреля</b>   | <b>80</b> |
| 11               | Гильбертово пространство . . . . .   | 82        |
| <b>Лекция 12</b> | <b>3 мая</b>   | <b>87</b> |
| 12               | Тригонометрические ряды Фурье . . . . .  | 89        |

---

|                  |  |            |
|------------------|--|------------|
| <b>Лекция 13</b> | <b>10 мая</b>  | <b>94</b>  |
| 13               | Свертки и аппроксимационные единицы . . . . .            | 98         |
| <b>Лекция 14</b> | <b>17 мая</b>  | <b>100</b> |
| 14               | Суммирование рядов Фурье . . . . .                       | 103        |
| 14.1             | Метод средних арифметических ( <i>Чезаро</i> ) . . . . . | 103        |

# Лекция 1

## 8 февраля

**Лемма 1** (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда  $\exists$  ортонормированные базисы  $g_1 \dots g_m$  и  $h_1 \dots h_m$ , а также  $\exists s_1 \dots s_m > 0$ , такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И  $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$ .

*Примечание.* Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

*Доказательство.*  $W := V^*V$  — самосопряженный оператор (*матрица симметрична относительно диагонали*).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа:  $c_1 \dots c_m$  — вещественные (*возможно с повторениями*)
- Собственные векторы:  $g_1 \dots g_m$  — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в  $\mathbb{R}^m$  (а не в  $\mathbb{C}^m$ ),  $*$  есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(?)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(?)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

---

(?): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .

- (??): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом,  $c_i > 0$ .

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(?)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(?)}{=} \delta_{ij}$$

Примечание.  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

Таким образом,  $\{h_i\}$  ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def } x}{=} V \left( \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(?)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(?)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def } W}{=} \det W \stackrel{(?)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

**Теорема 1** (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение

Тогда  $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$  и  $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

---

(?): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.

(?): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .

(?): при  $i \neq j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  в силу ортогональности, а при  $i = j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 1$  в силу ортонормированности и  $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

(?): в силу линейности  $V$

(?): в силу мультипликативности  $\det$  и инвариантности относительно транспонирования.

(?): т.к.  $\det$  инвариантен по базису и в базисе собственных векторов  $\det W = c_1 \dots c_m$ .

*Доказательство.*

1. Если  $\det V = 0$   $\text{Im}(V)$  — подпространство в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$  по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда  $\forall E \ V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если  $\det V \neq 0$   $\mu E := \lambda(V(E))$  — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$  по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти  $k$ , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например  $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$  — единичный куб на векторах  $g_i$ .

По 1  $V(g_i) = s_i h_i$ . Таким образом,  $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ .

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом,  $k = |\det V|$

□

# 1 Интеграл

## 1.1 Измеримые функции

**Определение.**

1.  $E$  — множество,  $E = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i$  — разбиение множества.
2.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ f|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

*Пример.*

1. Характеристическая функция множества  $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$
2.  $f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$ , где  $X = \bigsqcup e_i$

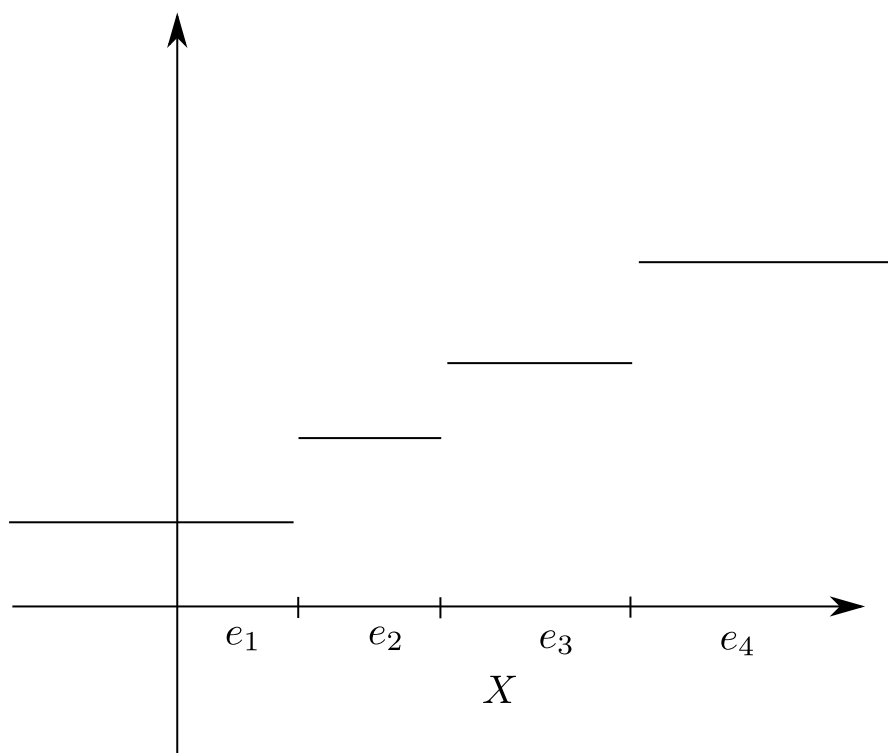


Рис. 1.1: Ступенчатая функция

*Свойства.*

1.  $\forall f, g$  — ступенчатые:

$\exists$  разбиение  $X$ , допустимое и для  $f$ , и для  $g$ :

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$

$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2.  $f, g$  — ступенчатые,  $\alpha \in \mathbb{R}$

Тогда  $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$  — ступенчатые.

**Определение.**  $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$  — **лебегово множество** функции  $f$

Аналогично можно использовать  $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

*Примечание.*

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$

$$E(f \leq a) = \bigcap_{b > a} E(f < b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$  **измерима** на множестве  $E$ , если  $\forall a \in \mathbb{R} \ E(f < a)$  измеримо, т.е.  $\in \mathfrak{A}$

Вместо “ $f$  измерима на  $X$ ” говорят просто “измерима”.

Если  $X = \mathbb{R}^m$ , мера — мера Лебега, тогда  $f$  — измеримо по Лебегу.

*Примечание.* Эквивалентны:

1.  $\forall a \ E(f < a)$  — измеримо
2.  $\forall a \ E(f \leq a)$  — измеримо
3.  $\forall a \ E(f > a)$  — измеримо
4.  $\forall a \ E(f \geq a)$  — измеримо

*Доказательство.* Тривиально по соображениям выше. □

*Пример.*

1.  $E \subset X, E$  — измеримо  $\Rightarrow \chi_E$  — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \emptyset, & a \leq 0 \\ X \setminus E, & 0 < a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2.  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывно. Тогда  $f$  — измеримо по Лебегу.

*Доказательство.*  $f^{-1}((-\infty, a))$  открыто по топологическому определению непрерывности, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

*Свойства.*

1.  $f$  измеримо на  $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ E(f = a)$  измеримо.

В обратную сторону неверно, пример —  $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2.  $f$  — измеримо  $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha f$  — измеримо.



$$\text{Доказательство. } E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \emptyset, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases} \quad \square$$

3.  $f$  — измеримо на  $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$  измеримо на  $E = \bigcup E_k$

4.  $f$  — измеримо на  $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$  измеримо на  $E'$

$$\text{Доказательство. } E'(f < a) = E(f < a) \cap E' \quad \square$$

5.  $f \neq 0$ , измеримо на  $E \Rightarrow \frac{1}{f}$  измеримо на  $E$ .

6.  $f \geq 0$ , измеримо на  $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$  измеримо на  $E$ .

**Это неверно**, т.к. при  $f \equiv 0, \alpha = -1 \nexists f^\alpha$

**Теорема 2.**  $f_n$  — измеримо на  $X$ . Тогда:

1.  $\sup f_n, \inf f_n$  измеримо.

2.  $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$  измеримо.

3. Если  $\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$ , то  $h(x)$  измеримо.

*Доказательство.*

1.  $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{??}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$  и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

(??):

•  $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(g > a)$ , то  $g(x) > a$ .

$$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

•  $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(f_n > a)$ , то  $f_n(x) > a$ , следовательно  $g(x) > a$ .

2.  $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$ . Т.к.  $\sup$  и  $\inf$  измерим,  $\overline{\lim} f_n$  тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если  $\exists \lim$ , то  $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

$\square$

## 1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$  —  $\sigma$ -конечный объем (и даже  $\sigma$ -конечная мера на  $\mathcal{P}^1$ )

Также можно определить для монотонной, но не непрерывной  $g$ . Тогда в точках разрыва  $\exists g(a+0), g(a-0)$ . Пусть  $\mu[a, b) = g(b-0) - g(a-0)$ . Такое изменение нужно, потому что исходное  $\mu$  не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру  $\mu_g$  на некоторой  $\sigma$ -алгебре. Это мера **Лебега-Стилтьеса**.

*Пример.*  $g(x) = [x]$ , тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если  $\mu_g$  определена на борелевской  $\sigma$ -алгебре, то она называется мерой **Бореля-Стилтьеса**.

# Лекция 2

## 15 февраля

**Теорема 3** (о характеристике измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые:

1.  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2.  $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

*Доказательство.*

$$e_k^{(n)} = X \left( \frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n} \right) \quad k = 1 \dots n^2$$

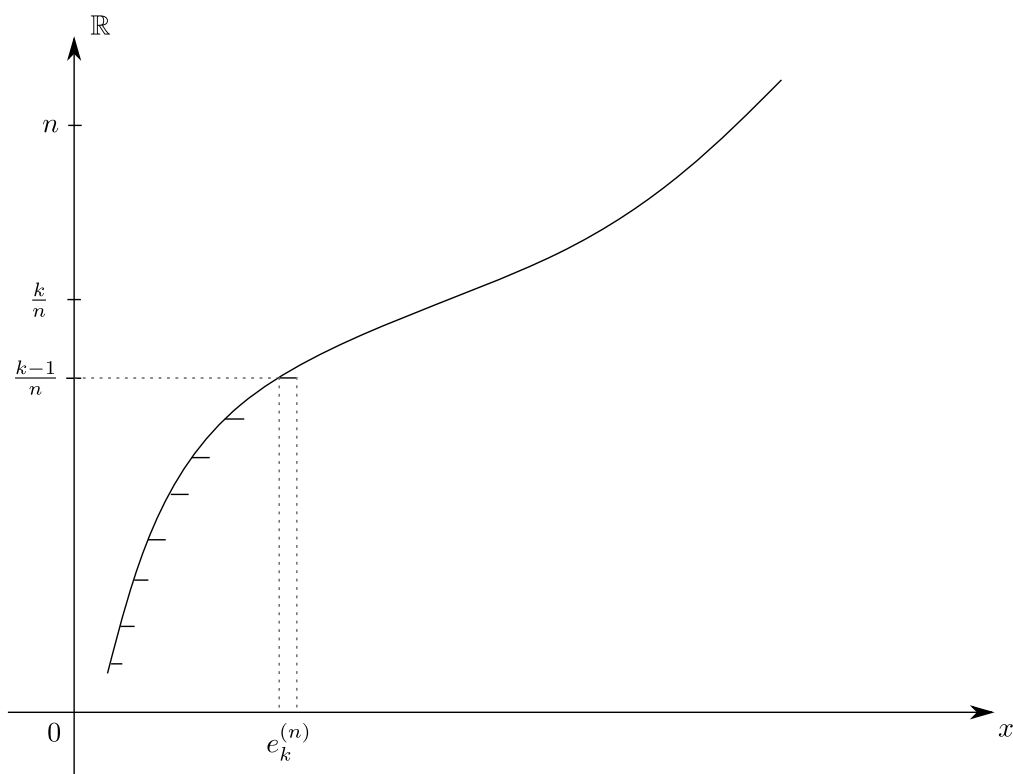
$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : \begin{cases} g_n(x) \leq f(x) \\ f(x) = +\infty : \forall n \quad x \in e_{n^2+1}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n \\ f(x) < +\infty : |g_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$



$$f_n = \max(g_1, \dots, g_n)$$

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

□

Следствие 3.1.

- $f$  — измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые :  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  всюду и  $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки  $f^+, f^-$ , дальше очевидно.

□

Следствие 3.2.

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $fg$  — измеримо (пусть  $0 \cdot \infty = 0$ ).

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow f g$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела.  $\square$

Следствие 3.3.

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $f + g$  измеримо.

Примечание. Считаем, что  $\forall x$  не может быть одновременно  $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$ .

Доказательство.

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

$\square$

**Теорема 4** (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание.  $A \subset X$  — **полной меры**, если  $\mu(X \setminus A) = 0$ .

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$  — непрерывно на  $E' = E \setminus e$

Тогда  $f$  — измеримо.

Доказательство.  $f$  — измеримо на  $E'$ , т.к.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$  по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e, \lambda_m$  — полная в  $\mathbb{R}^m$ <sup>1</sup>  $\Rightarrow e(f < a)$  — измеримо в  $E$ .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$ , объединение измеримых множеств измеримо.  $\square$

Пример.  $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$ , где  $\text{Irr}$  — множество иррациональных чисел.  $f$  непр. на  $\text{Irr}$  и разрывно на  $\mathbb{R}$ .

Следствие 4.1.

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$

<sup>1</sup> Любое подмножество множества нулевой меры измеримо.

- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- $f$  измеримо на  $E'$

Тогда можно так переопределить  $f$  на  $e$ , что полученная функция  $\tilde{f}$  будет измерима.

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E' \\ \text{const}, & x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f < a)} \cup \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\emptyset \text{ или } e}$$

□

*Следствие 4.2.*  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонна.

Тогда  $f$  измерима.

*Доказательство.*  $f$  — непрерывно на  $\langle a, b \rangle$  за исключением, возможно, счётного множества точек. □

*Упражнение 1.*  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывна.

Доказать:  $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$  — измеримо.

*Упражнение 2.*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримо.

Доказать:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x - y)$  — измеримо.

*Упражнение 3.* Доказать, что  $\exists$  измеримая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$ , если  $f$  непрерывно на  $e$ , то полученная  $\tilde{f}$  разрывна всюду.

### 1.3 Сходимость почти везде и по мере

**Определение.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$  — высказывание  $(x \in X)$

$W(x)$  — верно **при почти всех**  $x$  из  $E$  = **почти всюду** на  $E$  = **почти везде** на  $E$  = **п.в.**  $E$ , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$  и  $W(x)$  истинно при  $\forall x \in E \setminus e$

*Пример.*  $X = \mathbb{R}$ ,  $W =$  иррационально.

**Определение.** Если  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$  при п.в.  $x \in E$ , тогда говорят, что  $f_n$  **сходится на  $E$  почти везде**.

*Свойства.*

1.
  - $\mu$  — полная
  - $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
  - $f_n \rightarrow f$  п.в.  $X$
  - $f_n$  измеримо

Тогда  $f$  измеримо.

*Доказательство.*  $f_n \rightarrow f$  на  $X'$ , где  $e = X \setminus X'$ ,  $\mu e = 0$

$f$  — измеримо на  $X'$

$\mu$  — полная  $\Rightarrow f$  измеримо на  $X$ , т.к.  $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subseteq e}$  □

2. В условии пункта один можно переопределить  $f$  на множестве  $e$ . Тогда получится  $\tilde{f}$  и  $f_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$  почти везде и  $\tilde{f}$  измеримо.
3. Пусть  $\forall n \ W_n(x)$  истинно при почти всех  $x$ .

Тогда утверждение “ $\forall n \ W_n(x)$  истинно” — верно при почти всех  $x$

*Доказательство.*  $\triangleleft e_n : \mu(e_n) = 0$ . Искомое высказывание верно при  $x \in X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} e_i \right)$ ,  $\mu(\bigcup e_i) = 0$  □

**Определение.** Будем говорить, что  $f$  эквивалентна  $g$  если  $f = g$  почти всюду.

**Определение.**  $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — почти везде конечны.

$f_n$  **сходится к  $f$  по мере  $\mu$** , обозначается  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

*Примечание.*  $f_n$  и  $f$  можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

*Упражнение 4.*  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f; f_n \xrightarrow[\mu]{} g$ . Тогда  $f$  и  $g$  эквивалентны.

*Доказательство.* Пусть существует множество  $X(|f - g| > \varepsilon)$  положительной меры.

$$X(|f - g| > \varepsilon) \subset X(|f - f_n| > \varepsilon) \cup X(|g - f_n| > \varepsilon)$$

$$\mu X(|f - g| > \varepsilon) \leq \underbrace{\mu X(|f - f_n| > \varepsilon) + \mu X(|g - f_n| > \varepsilon)}_{\rightarrow 0}$$

Следовательно предположение неверно. Но тогда  $\mu(\bigcup X(|f - g| > \varepsilon)) = 0$ , а следовательно  $f \sim g$ .

Аналогичное доказательство есть в более подробном виде по следующей [ссылке](#) □

*Пример.*

$$1. f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$$

$$f_n \rightarrow f \text{ всюду на } (0, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X\left(x \leq \frac{1}{\varepsilon n}\right)$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \rightarrow 0$$

$$2. f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ при всех } x$$

$$f_n(x) \not\rightarrow 0$$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\rightarrow 0$$

$$3. n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$  не существует ни при каком  $x$ !<sup>2</sup>

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\lambda]{} 0$$

**Теорема 5 (Лебега).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$  конечно
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно

---

<sup>2</sup> Это восклицательный знак, а не факториал.



- $f_n \rightarrow f$  п.в.

Тогда  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

*Доказательство.* Переопределим  $f_n, f$  на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай:  $\forall x$  последовательность  $f_n(x)$  монотонно убывает к 0, то есть  $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$

$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху,  $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай:  $f_n \rightarrow f$ ,  $\varphi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда  $\varphi_n \rightarrow 0$ ,  $\varphi_n \geq 0$  и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

**Теорема 6 (Рисс).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

Тогда  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

*Доказательство.*

$$\forall k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(?)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при  $x \notin E$   $f_{n_k} \rightarrow f$ .

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ .

Т.к.  $\mu E = 0$ , искомое выполнено. □

*Следствие 6.1.*  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$   $|f_n| \leq g$  почти всюду. Тогда  $|f| \leq g$  почти всюду.

*Доказательство.*  $\exists n_k \quad f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду. □

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow[\mu]{} f$$

**Теорема 7 (Егорова).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$  — почти везде конечно, измеримо
- $f_n \rightarrow f$  почти везде

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

*Доказательство.*

*Примечание.* Кажется, доказательство знать не нужно, т.к. нам его не давали.

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$E_{n,k} = \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

---

(?): по счётной полуаддитивности меры.

Т.к.  $f_n \rightarrow f$  почти везде:

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Т.к.  $\mu X < +\infty$ , то  $\mu$  непрерывно сверху, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu E_{n,k} = \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Тогда по определению предела  $\exists(n_k)$  :

$$\mu E_{n_k,k} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Пусть  $e = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k,k}$ . По  $\sigma$ -аддитивности  $\mu$ :

$$\mu(e) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Кроме того,  $f_n \xrightarrow{X \setminus e} f$ .

□

## 2 Интеграл

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$  — зафиксировали.

**Определение (1).**

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$  — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть  $0 \cdot \infty = 0$

*Свойства.*

1. Не зависит от представления  $f$  в виде суммы, т.е.:

$$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

*Примечание.* При  $E_k \cap E'_j \neq \emptyset$   $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$  можно писать любое из них.

$$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

$$2. \underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$$

**Определение (2).**

- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

*Свойства.*

- Если  $f$  ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$
- $g \leq f, f - \text{измеримая}, g - \text{ступенчатая} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$

**Определение (3).**

- $f$  измеримо
- $\int f^+$  или  $\int f^-$  конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

**Теорема 8 (Тонелли).**

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$  измерима
- Записывается как  $f(x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

*Обозначение.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех  $x \in \mathbb{R}^m$  функция  $y \mapsto f(x, y)$  измерима на  $\mathbb{R}^n$
2. Функция  $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \geq 0$ , измерима и корректно задана.
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

*Примечание.* Неформально говоря, можно разбить  $\mathbb{R}^{m+n}$  на  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

# Лекция 3

## 22 февраля

**Определение.** Если оказалось, что  $\int_X f^+, \int_X f^-$  оба конечны, то  $f$  называется **суммируемой**.

*Примечание.*

1. Если  $f$  измеримо и  $\geq$ , то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

**Определение (4).**

- $E \subset X$  — измеримо
- $f$  измеримо на  $X$

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

*Примечание.*

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f \text{ на } E, g - \text{степ.}\}$  и мы считаем, что  $g \equiv 0$  вне  $E$ .
- $\int_E f$  не зависит от значений  $f$  вне множества  $E$ .

*Свойства.*  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $E \subset X$  — измеримо,  $g, f$  — измеримо.

1. Монотонность  $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

*Доказательство.*

- (a) При  $f, g \geq 0$  — очевидно из определения.
- (b) При произвольных  $f, g$   $f^+ \leq g^+$  и  $f^- \geq g^-$  (очевидно из определения). Из предыдущего случая  $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$ .

□

$$2. \int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$$

$$3. \mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$$

*Доказательство.*

(a)  $f$  — ступ. Тривиально.

(b)  $f$  — измеримо,  $f \geq 0$ .  $\sup 0 = 0$ , поэтому искомое выполнено.

$$(c) \int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$$

□

*Примечание.*  $f$  — измерима. Тогда  $f$  суммируема  $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

*Доказательство.*

$$\Leftarrow \text{ следует из } f^+, f^- \leq |f|$$

$\Rightarrow$  будет доказано позже на этой лекции.

□

$$4. \int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$$

*Доказательство.*

(a)  $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$ , тогда искомое очевидно.

(b) Можно считать  $c > 0$  без потери общности, тогда для  $f \geq 0$  тривиально.

□

$$5. \exists \int_E f d\mu. \text{ Тогда } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} -|f| &\leq f \leq |f| \\ -\int |f| &\leq \int f \leq \int |f| \\ \left| \int f \right| &\leq \int |f| \end{aligned}$$

□

$$6. \mu E < +\infty, a \leq f \leq b. \text{ Тогда}$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

*Следствие 8.1.*  $f$  — измеримо на  $E$ ,  $f$  — ограничено на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ . Тогда  $f$  суммируемо на  $E$

7.  $f$  суммируема на  $E$ . Тогда  $f$  почти везде конечна.

*Доказательство.*

(a)  $f \geq 0$  и  $f = +\infty$  на  $A \subset E$ . Тогда  $\int_E f \geq n\mu A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

(b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

**Лемма 2.**

- $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  — измеримо
- $g$  — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{??}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu \end{aligned}$$

□

**Теорема 9.**

- $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо на  $A$
- $f \geq 0$

---

(??): переставлять можно, т.к. члены суммы  $\geq 0$ .



Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

*Доказательство.* Докажем, что части равенства  $\leq$  и  $\geq$ , тогда равенство выполнено.

$\leq$   $\triangleleft$  ступенчатую  $g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \stackrel{??}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\int_A f d\mu = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$\geq$  1.  $A = A_1 \sqcup A_2$

$\triangleleft$  ступенчатые  $g_1, g_2 : 0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$ . Пусть  $E_k$  — совместное разбиение, у  $g_1$  коэффициенты  $\alpha_k$ , у  $g_2$  —  $\beta_k$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq g_1 + g_2 &\leq f \cdot \chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 &= \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\stackrel{??}{\leq} \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\stackrel{??}{\leq} \int_A f \end{aligned}$$

2. Для  $n \in \mathbb{N} : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  тривиально по индукции.

3.  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$\int_{B_n} f \geq 0$ , т.к.  $f \geq 0$ . Таким образом:

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

*Следствие 9.1.*  $f \geq 0$  — измеримо. Пусть  $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  и  $\nu E := \int_E f d\mu$ . Тогда  $\nu$  — мера.

---

(??): по лемме 2.

(??) и (??): переход к  $\sup$

**Следствие 9.2** (Счётная аддитивность интеграла).  $f$  суммируема на  $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

*Доказательство.* Очевидно, если рассмотреть срезки. □

**Следствие 9.3.**  $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

## 2.1 Пределный переход под знаком интеграла

Пусть  $f_n \rightarrow f$ . Можно ли утверждать, что  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ ?

*Пример (контр).*

$$f_n := \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \rightarrow f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \lambda[0, n] = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

**Теорема 10** (Леви).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n$  измеримо
- $\forall n \quad 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  почти везде.
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Примечание.*  $f$  задано везде, кроме множества  $e$  меры 0. Считаем, что  $f = 0$  на  $e$ . Тогда  $f$  измеримо на  $X$ .

*Доказательство.*

$\leq$  очевидно, т.к.  $f_n \leq f$  почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_0 = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$  достаточно проверить, что  $\forall$  ступенчатой  $g : 0 \leq g \leq f$  выполняется следующее  $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что  $\forall c \in (0, 1) \quad \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\bigcup E_n = X, \text{ т.к. } c < 1$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

$$\text{Тогда } \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \stackrel{(?)}{=} c \int_X g$$

□

**Теорема 11.**

- $f, g \geq 0$
- $f, g$  измеримо на  $E$

$$\text{Тогда } \int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

*Доказательство.*

1.  $f, g$  — ступенчатые, т.е.  $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2.  $f \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$   
 $g \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$

$$\begin{aligned} f_n + g_n &\rightarrow f + g \\ \int_E f + \int_E g &\stackrel{\text{т. Леви}}{\leftarrow} \int_E f_n + \int_E g_n \stackrel{\text{пункт 1}}{=} \int_E f_n + g_n \stackrel{\text{т. Леви}}{\rightarrow} \int_E f + g \end{aligned}$$

□

*Следствие 11.1.*  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируемо и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ . Таким образом, доказано 3.

*Доказательство суммируемости.*  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Пусть  $h = f + g$ . Тогда

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^- \end{aligned}$$

---

(?): по непрерывности снизу меры  $\nu : E \mapsto \int_E g$

$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

□

**Определение.**  $\mathcal{L}(X)$  — множество суммируемых на  $X$  функций

*Следствие 11.2 (следствия).*  $\mathcal{L}(X)$  — линейное пространство, а отображение  $f \mapsto \int_X f$  это линейный функционал<sup>1</sup> на  $\mathcal{L}(X)$ , т.е.:

$$\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X) \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in \mathcal{L}(X) \text{ и } \int_X \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X f_k$$

**Теорема 12** (об интегрировании положительных рядов).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$  почти везде
- $u_n$  измеримо

Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

*Доказательство.* По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

$$S_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k, \text{ тогда } \int_E S_n \rightarrow \int_E S$$

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \int_E S \leftarrow \int_E S_n \xlongequal{\text{линейность } \int} \sum_{k=1}^n \int_E u_k$$

□

*Следствие 12.1.*  $u_n$  измеримо и  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда ряд  $\sum u_n(x)$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

---

<sup>1</sup> т.е. функция функций

*Доказательство.*

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

*Пример.*  $x_n \in \mathbb{R}$  — произвольная последовательность,  $\sum a_n$  абсолютно сходится.

Тогда  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

*Доказательство.* Достаточно проверить абсолютную сходимость на  $[-N, N]$  почти везде.

$$\begin{aligned} \int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &= \int_{-N}^N \frac{|a_n|}{\sqrt{|x - x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\stackrel{(?)}{\leq} |a_n| \int_{-N}^N \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &= 4\sqrt{N} |a_n| \\ \sum_n \int_{[-N, N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x - x_n|}} &\leq 4\sqrt{N} \sum |a_n| < +\infty \end{aligned}$$

□

---

(?): Т.к.  $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$  чётна и при этом для  $x \geq 0$  убывает, площадь под симметричным относительно 0 отрезком максимальна среди всех отрезков такой же длины.

# Лекция 4

## 1 марта

**Теорема 13** (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f$  суммируемо

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

*Следствие 13.1.*  $f$  суммируемо на  $X$ ,  $E_n \subset X$ , тогда  $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

*Доказательство.* <sup>1</sup>

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu \left( \bigcap X_n \right) \stackrel{??}{=} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Пусть  $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ . Тогда при  $\mu E < \delta$ :

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \stackrel{??}{\leq} \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{< \delta} \cdot n_\varepsilon < \varepsilon$$

□

<sup>1</sup> Теоремы, не следствия

(?): Т.к.  $f$  на  $\bigcap X_n$  бесконечна и  $f$  почти везде конечна.

(1): По непрерывности сверху меры  $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

(?): Т.к.  $|f|$  на  $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$  не превосходит  $n_\varepsilon$  по построению  $X_{n_\varepsilon}$

*Примечание.* Следующие два свойства не эквивалентны:

1.  $f_n \xRightarrow[\mu]{} f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \rightarrow 0$
2.  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

Из 1 не следует 2: пусть  $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$ ,  $f_n = \frac{1}{nx}$ . Тогда  $f_n \xRightarrow[\mu]{} 0$ , но  $\int |f_n - f| = +\infty$  при всех  $n$ .

Из 2 следует 1, т.к.

$$\underbrace{\mu X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Теорема 14** (Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:

1.  $\forall n \quad |f_n| \stackrel{(?)}{\leq} g$  почти везде
2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда:  $f_n, f$  — суммируемы и  $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , и тем более  $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

*Примечание.* Почти везде конечность  $f_n$  и  $f$  следует из (?), поэтому в условии этого можно не требовать.

*Доказательство.*  $f_n$  — суммируемы в силу неравенства (?),  $f$  суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более  $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1.  $\mu X < +\infty$

Зафиксируем  $\varepsilon$ .  $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \xRightarrow[\mu]{} f$ , т.е.  $\mu X_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq 2g \\ \int_X |f_n - f| &= \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{сл. т. об абс. непр.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \end{aligned} \tag{2}$$

2.  $\mu X = +\infty$

Утверждение:  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$ , изм., конечной меры :  $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$ . Докажем его.

$$\int_X g = \sup \left\{ \int_X g_n \mid 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\}$$

Возьмём достаточно большое  $n$  и положим:

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon$$

$$\int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g = \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon \implies \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Вернёмся к теореме. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ :

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

**Теорема 15 (Лебега).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо
- $f_n \xrightarrow{(?)} f$  почти везде
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:
  1.  $\forall n \ |f_n| \leq g$  почти везде
  2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда  $f_n, f$  — суммируемы,  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ , и тем более  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$

*Доказательство.* Суммируемость  $f_n, f$ , а также утверждение “и тем более” доказываются так же, как в теореме [Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере](#).

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$

$$0 \stackrel{(?)}{\leq} h_n \stackrel{(?)}{\leq} 2g$$



$h_n$  монотонно убывает, что очевидно по определению  $\sup$ .

$$\lim h_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \stackrel{(\text{??})}{=} 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \geq 0$  и возрастает как последовательность функций,  $2g - h_n \rightarrow 2g$  почти везде. Тогда по теореме **Левина**:

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

*Пример.*  $x > 0, x_0 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0-1} e^{-t} dt$$

Равенство выполнено, т.к.  $t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} t^{x_0-1} e^{-t}$  при  $t > 0$  и суммируемая мажоранта  $t^{\alpha-1} e^{-t} + t^{\beta-1} e^{-t}$ , где  $0 < \alpha < x_0, 0 < \beta$

**Теорема 16** (Фату).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- $f_n$  измеримо
- $f_n \rightarrow f$  почти везде
- $\exists C > 0 \forall n \int_X f_n \leq C$

Тогда  $\int_X f \leq C$

*Примечание.* Странность: здесь не требуется, чтобы  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$  и это может быть неверно.

*Пример.*

$$f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \leq 1$$

По теореме **Фату**  $\int_{\mathbb{R}} f \leq 1$ , что верно, т.к.  $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \leq 1$

---

(?): по построению

(?): по (2)

(?): по (??)

Пример. Условие  $f_n \geq 0$  важно:

$$f_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \rightarrow 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = -1 \leq -1, \text{ но } \int_{\mathbb{R}} f = 0 \not\leq -1$$

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}$$

$$\lim g_n \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.}$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \tag{3}$$

$$\int_X g_n \xrightarrow{(?)} \int_X f$$

Значит  $\int_X f \leq C$  по предельному переходу в (3)

□

Следствие 16.1.

- $f_n, f \geq 0$
- $f_n, f$  измеримы
- $f_n, f$  почти везде конечны
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \leq C$

Тогда  $\int_X f \leq C$

Доказательство.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \xRightarrow[\text{Т. Рисса}]{} \exists(n_k) : f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$$

По теореме [Фату](#) получим искомое.

□

Следствие 16.2.

- $f_n \geq 0$
- $f_n$  измеримо

Тогда  $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

---

(?): по теореме [Леви](#)

*Доказательство.* Возьмём  $g_n$  как в теореме, тогда выполняется неравенство  $\int_X g_n \leq \int_X f_n$ . Выберем  $(n_k) : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{array}{c} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \\ \downarrow \\ \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n \end{array}$$

□

### 3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathfrak{B})$ ,  $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть  $\Phi$  — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

*Упражнение 5.* Проверить, что  $\Phi^{-1}$  —  $\sigma$ -алгебра.

Для  $E \in \mathfrak{B}$  положим  $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$ . Тогда  $\nu$  — мера:

$$\nu\left(\bigcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера  $\nu$  называется **образом**  $\mu$  при отображении  $\Phi$  и  $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

*Наблюдение 1.*  $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо относительно  $\mathfrak{B}$ . Тогда  $f \circ \Phi$  — измеримо относительно  $\mathfrak{A}$ .

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \stackrel{??}{\in} \mathfrak{A}$$

**Определение.**  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ , измеримо на  $X$ .

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда  $\nu$  называется “**взвешенный образ меры**  $\mu$  при отображении  $\Phi$ ”,  $\omega$  называется **весом**.

---

(??): т.к.  $Y(f < a) \in \mathfrak{B}$

**Теорема 17** (о вычислении интеграла по взвешенному образу меры).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространство с мерой
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$  измеримо на  $X$
- $\nu$  взвешенный образ  $\mu$  при отображении  $\Phi$  с весом  $\omega$

Тогда  $\forall$  измеримой относительно  $\mathfrak{B}$   $f$  на  $Y$ ,  $f \geq 0$  выполнено следующее:

1.  $f \circ \Phi$  измеримо на  $X$  относительно  $\mathfrak{A}$
- 2.

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (4)$$

То же самое верно для суммируемой  $f$ .

*Доказательство.* Измеримость  $f \circ \Phi$  выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть  $f = \chi_B$ ,  $B \in \mathfrak{B}$

$$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда (4) это:

$$\int_Y \chi_B d\nu = \int_B 1 \cdot d\nu = \nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Это выполнено по определению  $\nu B$

1. Пусть  $f$  — ступенчатая

(4) следует из линейности интеграла.

2. Пусть  $f \geq 0$ , измеримая

По теореме о характеристизации измеримых функций с помощью ступенчатых и теореме Леви  $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$  — ступенчатые,  $h_i \leq f$ ,  $h_i \rightarrow f$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \quad (4)$$

3. Пусть  $f$  измерима.

Тогда для  $|f|$  выполнено (4);  $|f|$  и  $|f \circ \Phi| \cdot \omega$  суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_- = f_- \circ \Phi \cdot \omega$$

Таким образом, искомое выполнено для  $f_+$  и  $f_-$ , а следовательно и для  $f$ .

□

*Следствие 17.1* (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- $f$  суммируемо на  $Y$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

*Доказательство.* В условие теоремы подставим  $f \cdot \chi_B$

□

**Определение.** Рассмотрим частный случай:  $X = Y$ ,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ,  $\Phi = \text{id}$  - тождественное отображение. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё  $\omega$ .

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации  $\omega$  называется **плотностью** меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$  и тогда по теореме [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$

# Лекция 5

## 15 марта

### Определение.

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера

**Плотность меры**  $\nu$  относительно  $\mu$  есть положительная измеримая функция  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , такая что:

$$\forall B \in \mathfrak{A} \quad \nu B = \int_B \omega d\mu$$

### Теорема 18 (критерий плотности).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $\nu$  — мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$  измеримо

Тогда  $\omega$  — плотность  $\nu$  относительно  $\mu \Leftrightarrow$ :

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом  $0 \cdot \infty$  считается  $= 0$ .

*Пример (отсутствие плотности).*  $X = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1, \mu = \lambda_1$

$\nu$  — одноточечная мера:  $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$ . Тогда  $\nu(\{0\}) = 1$ , но  $\int_{\{0\}} \omega d\mu = 0$  — несо-  
стыковка.

Необходимое условие существования плотности —  $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Это и достаточное условие по теореме Радона-Никодима<sup>1</sup>.

Доказательство теоремы *критерий плотности*.

“ $\Rightarrow$ ”

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega(x) d\mu(x)$$

$$\inf \omega \cdot \mu A = \int_A \inf \omega d\mu \leq \int_A \omega(x) d\mu(x) \leq \int_A \sup \omega d\mu = \sup \omega \cdot \mu A$$

“ $\Leftarrow$ ” Рассмотрим  $\omega > 0$ . Общность не умаляется, т.к. пусть  $e = X(\omega = 0)$ , тогда  $\nu(e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$ , поэтому в случае  $A \cap e \neq \emptyset$  всё ещё только лучше.

Фиксируем число  $q \in (0, 1)$ .

$$A_j := A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(?)}{\leq} \nu A_j \stackrel{(?)}{\leq} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(?)}{\leq} \int_{A_j} \omega d\mu \stackrel{(?)}{\leq} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &= q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Возможно, мы разберём её в конце семестра.

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

Тогда предельный переход при  $q \rightarrow 1 - 0$  дает искомое.

□

### Лемма 3.

- $f, g$  суммируемы
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда  $f = g$  почти везде.

*Доказательство.*  $h := f - g$ . Дано:  $\forall A \quad \int_A h = 0$ ; доказать:  $h = 0$  почти везде.

$$A_+ := X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

□

*Примечание.* Если  $\mathcal{L}(X)$  — линейное пространство, отображение  $l_A : f \mapsto \int_A f$  есть линейный функционал. Таким образом, множество функционалов  $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$  разделяет точки, т.е.  $\forall f \neq g \in \mathcal{L}(X) \quad \exists A : l_A(f) \neq l_A(g)$

*Примечание.* В  $\mathbb{R}^m$   $a = (a_1 \dots a_m)$ ,  $l_a : x \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$ . Тогда  $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \exists a : l_a(x) = {}^2 l_a(y)$ .

## 4 Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$

**Лемма 4** (о мере образа малых кубических ячеек).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $O$  открыто

---

(?): по ( ? )

(?): по ( ? )

(?): по ( ? )

(?): по ( ? )

<sup>2</sup> Кажется, здесь должно быть “ $\neq$ ”



- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда  $\exists \delta > 0 \ \forall$  куба  $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$  выполняется неравенство  $\lambda\Phi(Q) < c\lambda Q$

*Примечание.* Здесь можно считать, что  $Q$  — замкнутые кубы.

*Доказательство.*  $L := \Phi'(a)$  — обратимо<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a) \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o^4(x - a)\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^5}(a) \ \forall x \in B_{\varepsilon}(a) \ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$$

Пусть  $Q \subset B_{\varepsilon}(a), a \in Q, Q$  — куб со стороной  $h$ .

При  $x \in Q$ :

$$|x - a| \leq \sqrt{m}h^6$$

$$|\Psi(x) - x| \stackrel{(?)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда  $\Psi(Q) \subset$  куб со стороной  $(1 + 2\varepsilon)h$ , т.к. при  $x, y \in Q$

$$\begin{aligned}|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h\end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

$\Psi$  и  $\Phi$  отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем  $\varepsilon$  такое, чтобы  $|\det L|(1 + 2\varepsilon)^m < c$ , потом берём  $\delta =$  радиус  $B_{\varepsilon}(a)$  □

<sup>3</sup> Т.к.  $\det \Phi'(a) \neq 0$ .

<sup>4</sup> Это не то же самое  $o$ , что строчкой выше.

<sup>5</sup> Это не радиус шара, а параметр.

<sup>6</sup> Это диагональ куба со стороной  $h$  в  $\mathbb{R}^m$ .

(?): т.к.  $x \in B_{\varepsilon}(a)$

**Лемма 5.**

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $O$  открыто
- $f$  непрерывна
- $A$  измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- $Q$  — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр.} \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство. Упражнение. □

**Теорема 19.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi$  диффеоморфизм

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство.

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$  — мера

Надо доказать, что  $J_\Phi$  — плотность  $\nu$  относительно  $\lambda$ .

Достаточно проверить условие теоремы **критерий плотности**, что  $\forall$  измеримого  $A$ :

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \stackrel{(?)}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для  $\Phi(A)$  и отображения  $\Phi^{-1}$

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

$$\lambda\Phi(A) \leq \lambda A \cdot \frac{1}{\inf \frac{1}{|\det \Phi'|}}$$

$$\lambda\Phi(A) \leq \lambda A \cdot \sup |\det \Phi'|$$

1. Проверяем (??) для случая  $A$  — кубическая ячейка,  $A \subset \bar{A} \subset O$

От противного:  $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

Возьмём  $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$ .

Запускаем половинное деление: режем  $Q$  на  $2^m$  более мелких кубических ячеек. Выберем “мелкую” ячейку  $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu(Q_1)$ . Опять делим на  $2^m$  частей, берём  $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu(Q_2)$  и т.д.

$$a \in \bigcap \bar{Q}_i$$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n \quad C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \quad (5)$$

$C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\bar{Q}} J_\Phi$ , в частности  $c > |\det \Phi'(a)|$ . Мы получили противоречие с леммой о мере образа малых кубических ячеек: в сколько угодно малой окрестности  $a$  имеются кубы  $\bar{Q}_n$ , где выполнено (5)

2. Проверяем (??) для случая  $A$  открыто.

Это очевидно, т.к.  $A = \bigsqcup Q_j$ ,  $Q_j$  — кубическая ячейка,  $Q_j \subset \bar{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \lambda Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \cdot \sum \lambda Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (6)$$

3. По лемме 5 неравенство (??) выполнено для всех измеримых  $A$ :

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \bar{Q}_j \subset O, A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_G (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} J_\Phi \cdot \lambda A_j$$

Аналогично формуле (6) получаем  $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

**Теорема 20.**

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi$  - диффеоморфизм

Тогда  $\forall$  измеримой  $f \geq 0$ , заданной на  $O' = \Phi(O)$ :

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой  $f$ .

*Доказательство.* Применяем теорему о вычислении интеграла по взвешенному образу меры при  $X = Y = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m, \mu = \lambda, \nu(A) = \lambda(\Phi(A))$ :

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 19  $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} J_\Phi d\lambda$ , т.е.  $\lambda$  — взвешенный образ исходной меры по отношению к  $\Phi$ .  $\square$

*Пример.*

1. Полярные координаты в  $\mathbb{R}^2$ :

$$\Phi = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \Phi : \{(r, \varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det \Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\lambda_2$$

2. Сферические координаты в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} \quad J_\Phi = r^2 \cos \psi$$

$$\det \Phi' = r^2 (\sin^2 \psi \cos \psi + \cos^3 \psi) = r^2 \cos \psi$$

# Лекция 6

## 22 марта

### 4.1 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

Координаты задаются  $r, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}$ . Зададим их по индукции:

- $\varphi_1$  — угол между  $\bar{e}_1$  и  $\overline{OX} \in [0, \pi]$
- $\varphi_2$  — угол между  $\bar{e}_2$  и  $P_{2(e_2 \dots e_n)}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- $\varphi_{m-1}$  — полярный угол в  $\mathbb{R}^2$

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1}$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$

*Примечание.* В  $\mathbb{R}^3$  “географические” координаты имеют якобиан  $J = r^2 \cos \psi$

Поймём, почему якобиан именно такой. Можно его посчитать руками, но это трудно.

1 шаг

$$x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$$

$$(x_1 \dots x_m) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$$

$$J = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & J_2 \end{vmatrix} = \rho_{m-1}$$

2 шаг

$$\rho_{m-1} = \rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}$$

$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$$

$$(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$$

последний шаг

$$(x_1 \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$$

$$\rho_2 = r \sin \varphi_1$$

$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d\lambda_m \\ &\stackrel{1 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \\ &\stackrel{2 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \underbrace{\rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}}_{\text{замена } \rho_{m-1}} \cdot \underbrace{\rho_{m-2}}_J \\ &\stackrel{3 \text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \underbrace{\rho_{m-3}^2 \sin^2 \varphi_{m-3}}_{\text{замена } \rho_{m-2}^2} \cdot \underbrace{\sin \varphi_{m-2}}_{\text{с прошлого шага}} \cdot \underbrace{\rho_{m-3}}_J \\ &= \dots \\ &= \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} d\lambda \end{aligned}$$

Тогда по теореме о единственности плотности искомое верно.

## 5 Произведение мер

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой

**Лемма 6.**  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  — полукольца  $\Rightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$  — полукольцо.

Доказательство. Тривиально.  $\square$

Обозначение.  $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  — называем **измеримыми прямоугольниками**.

$m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ , при этом  $0 \cdot \infty$  принимаем за 0.

**Теорема 21.**

1.  $m_0$  — мера на  $\mathcal{P}$
2.  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны  $\Rightarrow m_0$  тоже  $\sigma$ -конечно<sup>1</sup>.

Доказательство.

1. Проверим счётную аддитивность  $m_0$ , т.е.  $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k$ <sup>2</sup>, если  $A \times B = P = \bigsqcup P_k$ , где  $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что  $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ .

Тогда  $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$ , где  $\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x) \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$

Слева измеримая функция, справа — неотрицательный ряд  $\Rightarrow$  можем интегрировать.

Проинтегрируем по  $y$  по мере  $\nu$  по пространству  $Y$ :

$$\chi_A(x) \nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

Проинтегрируем по  $x$  по мере  $\mu$  по пространству  $X$ :

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

- $\mu$   $\sigma$ -конечно  $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k$  — конечно  $\forall k$
- $\nu$   $\sigma$ -конечно  $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n$  — конечно  $\forall n$

Тогда  $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$ . Конечное произведение конечных конечно, поэтому  $m_0$   $\sigma$ -конечно.

$\square$

**Определение.**

- $\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой

<sup>1</sup> Т.е. пространство можно представить в виде счётного объединения множеств конечной меры.

<sup>2</sup> Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

- $\mu, \nu$   $\sigma$ -конечны

Пусть  $m$  — лебеговское продолжение меры  $m_0$  на  $\sigma$ -алгебру, которую будем обозначать  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ <sup>3</sup>

Обозначение.  $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$  — **произведение пространств с мерой**  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

Примечание.

- Это произведение ассоциативно.
- $\sigma$ -конечность нужна для единственности произведения, которая выполняется по теореме о продолжении меры.

**Теорема 22.**  $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$

Доказательство. Не будет. □

**Определение.**  $X, Y$  — множества,  $C \subset X \times Y$

$$\forall x \in X \quad C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$\forall y \in Y \quad C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

$C_x, C^y$  называется **сечением**.

Примечание.

$$\left( \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} \right)_x = \bigcup (C_{\alpha})_x \quad \left( \bigcap C_{\alpha} \right)_x = \bigcap (C_{\alpha})_x \quad (C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

**Теорема 23** (принцип Кавальери).<sup>4</sup>

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны.
- $\mu, \nu$  — полные.
- $m = \mu \times \nu$
- $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

<sup>3</sup>  $\otimes$  — не тензорное произведение

<sup>4</sup> Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.



Тогда:

1.  $C_x \in \mathfrak{B}$  при почти всех  $x$
2.  $x \mapsto \nu(C_x)$  — измеримая<sup>5</sup> функция на  $X$
3.  $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для  $C^y$ .

Пример. ???

Доказательство. Пусть  $\mathfrak{D}$  — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1.  $C = A \times B$ , где  $A$  и  $B$  измеримы в соответствующих пространствах  $\Rightarrow C \in \mathfrak{D}$ , так как:

$$(a) \quad C_x = \begin{cases} \emptyset, & x \notin A \\ B, & x \in A \end{cases} \quad \text{и оба случая очевидно} \in \mathfrak{B}$$

$$(b) \quad x \mapsto \nu(C_x) \text{ — функция } \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \quad \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2.  $E_i \in \mathfrak{D}$ , дизъюнкты  $\stackrel{?}{\Rightarrow} \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$ . Обозначим  $E = \bigsqcup E_i$

$$E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x \text{ измеримы почти везде} \Rightarrow \text{при почти всех } x \text{ все } (E_i)_x \text{ измеримы.}$$

Тогда при этих  $x$   $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$  по определению  $\sigma$ -алгебры — это 1.

$$\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow \text{Функция } x \mapsto \nu E_x \text{ измерима — это 2.}$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE \text{ — это 3.}$$

3.  $E_i \in \mathfrak{D}$ ,  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_i E_i$ ,  $\mu E_i < +\infty$ . Тогда  $E \in \mathfrak{D}$ .

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — конечно при почти всех } x.$$

$$\forall x \text{ верно } (E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$$

Тогда  $E_x$  измеримо п.в. (это 1.) и  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$  при п.в.  $x$  — непрерывность сверху  $\nu$ .

Таким образом,  $x \mapsto \nu E_x$  измерима — это 2.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE \text{ — это 3.}$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла  $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_i)_x$  суммируемо.

<sup>5</sup> Функция задана при почти всех  $X$ ; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду.

Итого: Если  $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , то  $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathcal{D}$ . Строго говоря, мы это не доказали, т.к. ещё нужно упомянуть процесс дизъюнктивизации в полукольце и то, что пересечение множеств лежит в полукольце, следовательно любое пересечение можно свести к тому, которое мы рассматривали.

4.  $E \subset X \times Y, mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$mE = \inf \left\{ \sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \right\}$  — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$\exists$  множество  $H$  вида  $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$ , т.е. пересечение аппроксимаций. По пункту 3  $H \in \mathcal{D}$ . При этом  $E \subset H, mH = mE = 0$ .

$$0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ про почти всех } x.$$

$E_x \subset H_x, \nu$  — полная  $\Rightarrow E_x$  — измеримо при почти всех  $x$  — это 1 и  $\nu E_x = 0$  почти везде, это 2.

$$\int \nu E_x d\mu = 0 = mE \text{ — это 3.}$$

5.  $C$  —  $m$ -измеримо,  $mC < +\infty$ . Тогда  $C \in \mathcal{D}$ .

$C = H \setminus e$ , где  $H$  имеет вид  $\bigcap \bigcup P_{kl}, me = 0$ . Почему? Из предыдущих соображений  $C \subset H$ , а нулевая мера  $H \setminus C$  следует из того, что мера  $C$  конечна. **Как оно следует?**

$$mC = mH - 0 = mH$$

(a)  $C_x = H_x \setminus e_x$  — оба “слагаемых” измеримы при почти всех  $x$ , т.к.  $H_x$  по третьему пункту  $\in \mathcal{B}$ , а  $e_x$  измеримы по полноте  $\nu$ . В силу замкнутости по вычитанию  $C_x \in \mathcal{B}$  п.в.

(b)  $\nu e_x = 0$  при почти всех  $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x$  п.в.  $\Rightarrow$  измеримо.

$$(c) \int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$$

6.  $C$  — произвольное измеримое множество в  $X \times Y \Rightarrow C \in \mathcal{D}$

$X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$  по полноте обеих мер.

$C = \bigsqcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{m(\dots) < +\infty}$ , тогда по пункту 5 все элементы объединения  $\in \mathcal{D}$  и по пункту 2 объединение лежит в  $\mathcal{D}$ .

□

**Следствие 23.1.**  $C$  измеримо в  $X \times Y$ . Пусть  $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \emptyset\}$  — проекция  $C$  на  $X$ .

Если  $P_1(C)$  измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Аналогично для проекции на  $y$ .

*Доказательство.* При  $x \notin P_1(C)$   $\nu(C_x) = 0$

□

*Примечание.*

1.  $C$  измеримо  $\nRightarrow P_1(C)$  измеримо.

*Пример.* Пусть  $C = (\text{неизмеримое множество в } X) \times \{y\}$ , где  $y$  — фиксированный элемент в  $Y$ . Тогда  $C$  измеримо в  $X \times Y$  и имеет меру 0.

2.  $C$  измеримо  $\nRightarrow \forall x \ C_x$  измеримо.

*Пример.* Пусть  $C = \{\tilde{x}\} \times (\text{неизмеримое множество в } Y)$ , где  $\tilde{x}$  — фиксированный элемент в  $X$ . Тогда  $C$  измеримо в  $X \times Y$  и имеет меру 0, но при этом  $C_{\tilde{x}}$  неизмеримо.

3.  $\forall x, \forall y \ C_x, C_y$  измеримо  $\nRightarrow C$  измеримо.

*Пример Серпинского.*

# Лекция 7

## 29 марта

*Следствие 23.2.*

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- $f$  непрерывно

Тогда  $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $f > 0$ .  $C = \Pi\Gamma^1(f, [a, b])$  — измеримое в  $\mathbb{R}^2$  множество. Доказать это — упражнение.

$C_x = [0, f(x)]$ ,  $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

*Примечание.*

- $\lambda_2$  можно продолжить на множество  $2^{\mathbb{R}^2}$  с сохранением конечной аддитивности и это продолжение можно сделать не единственным образом.
- Для  $\lambda_m, m > 2$  аналогичным образом продолжить невозможно.

Для обоих случаев требуется инвариантность меры относительно движения  $\mathbb{R}^m$ .

В множествах размерности  $> 2$  действует парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского, вследствие чего аддитивность невозможна.

**Определение.**

---

<sup>1</sup> подграфик

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in X$   $f_x$  — функция  $f_x(y) = f(x, y)$

$\forall y \in Y$   $f_y$  — функция  $f_y(x) = f(x, y)$

**Теорема 24 (Тонелли).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо относительно  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. При почти всех  $x$   $f_x$  измерима на  $Y$ .
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — измерима<sup>2</sup> на  $X$
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Аналогичные утверждения верны, если поменять местами  $X$  и  $Y$ :

1.  $f_y$  измеримо на  $X$  почти везде.
2.  $y \mapsto \psi(y) = \int_X f_y d\mu$  — измерима<sup>3</sup> на  $Y$
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi d\nu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

**Доказательство.**

1.  $f = \chi_C, C \subset X \times Y$ , измеримо. Тогда  $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$

$C_x$  измеримо при почти всех  $x$  по **принцип Кавальери**  $\Rightarrow f_x$  измеримо при почти всех  $x$

$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$  — измеримая<sup>4</sup> функция по **принцип Кавальери**

<sup>2</sup> почти везде

<sup>3</sup> почти везде

<sup>4</sup> почти везде

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{??}{=} mC = \int_{X \times Y} f dm$$

2.  $f$  — ступенчатая,  $f \geq 0$ ,  $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{C_k}$ ,  $f_x = \sum \alpha_k \chi_{(C_k)_x}$  — измеримо почти везде.

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x \text{ — измерима}^5$$

$$\int_X \varphi(x) = \sum \int_X \alpha_k \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3.  $f \geq 0$ , измеримо.

$$f = \lim g_n, g_n \uparrow f, g_n \geq 0, \text{ ступенчатые}$$

$$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x \text{ — измеримо на } y \text{ по теореме об измеримости пределов.}$$

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \stackrel{??}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)} \Rightarrow \varphi \text{ — измерима}^6$$

$\varphi_n(x)$  измерима почти везде по пункту 2, поэтому  $\varphi$  измерима почти везде.

$$\int_X \varphi(x) \stackrel{??}{=} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X \times Y} g_n \stackrel{??}{=} \int_{X \times Y} f dm$$

□

**Следствие 24.1.** Если в условиях теоремы **Тонелли**  $C \subset X \times Y$ ,  $P_1(C)$  измеримо, то  $\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \left( \int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

**Доказательство.** Очевидно, т.к. вместо  $f$  можно взять  $f \cdot \chi_C$

□

**Теорема 25 (Фубини).**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$

---

(?): по **принципу Кавальери**

<sup>5</sup> почти везде

(?), (?), (?): по теореме **Леви**

- $f$  — суммируемо на  $X \times Y$

Тогда:

1.  $f_x$  — суммируема на  $Y$  при почти всех  $x$
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — суммируема на  $X$
3.  $\int_{X \times Y} f d\mu = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

*Доказательство.* Слишком неинтересно.

Общий подход: берём  $f_+$  и  $f_-$ . □

*Пример.*  $B(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx, s, t > 0$ .

Тогда  $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ , где  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} e^{-x} e^{-y} dy \right) dx \\
 y &:= u - x \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_x^{+\infty} x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx \\
 &= \int \dots d\lambda_2 \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du \\
 x &:= u \cdot v \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 (uv)^{s-1} (u-uv)^{t-1} e^{-u} \cdot u dv \right) du \\
 &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left( \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du \\
 &= B(s, t) \Gamma(s+t)
 \end{aligned}$$

□

*Пример* (Объём<sup>7</sup> шара в  $\mathbb{R}^m$ ).  $\alpha_m := \lambda_m(B(0, 1)), \lambda_m(B(0, r)) = r^m \cdot \alpha_m$  — получается заменой координат.

---

<sup>7</sup> на самом деле мера

$$B(0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1 \right\}$$

$$B(0, 1)_{x_m} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \leq 1 - x_m^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int_{-1}^1 \lambda_{m-1} \left( B \left( 0, \sqrt{1-y^2} \right) \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \alpha_{m-1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\ &= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= B \left( \frac{m+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \alpha_{m-1} \\ &= \frac{\Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m+2}{2} \right)} \alpha_{m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\cancel{\Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right)} \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m+2}{2} \right)} \cdot \frac{\Gamma \left( \frac{m}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\cancel{\Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right)}} \cdots \frac{\Gamma \left( \frac{3}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{4}{2} \right)} \underbrace{\alpha_1}_{=2} \\ &= \frac{\Gamma \left( \frac{3}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m}{2} + 1 \right)^{m-1}} \cdot 2 \\ &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma \left( \frac{m}{2} + 1 \right)} \end{aligned}$$

В случае  $m = 3$   $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$

*Примечание.*

$$\Gamma \left( \frac{1}{2} \right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I$$

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Переход в полярные координаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-1} \\
x_m &= r \sin \varphi_1 \dots \cos \varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m \\
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \dots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \cdot r^{m-1} \cdot \sin^{m-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \\
&\stackrel{\text{по (7)}}{=} 2\pi \frac{R^m}{m} \prod_{k=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \\
&= \pi \frac{R^m}{m} \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2} + 1\right)} \\
&\stackrel{(\text{??})}{=} \frac{\pi^{\frac{m}{2}} R^m}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2} + 1\right)}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin^k \alpha d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[ \begin{array}{l} t = \sin^2 \alpha \\ dt = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{array} \right] = B\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (7)$$

---

Мы потеряли двойку в (??).

## 6 Поверхностный интеграл

### 6.1 Поверхностный интеграл I рода

**Определение.**

- $M \subset \mathbb{R}^3$  — простое двумерное гладкое многообразие
- $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — параметризация  $M$ , т.е.  $\varphi(G) = M$

$E \subset M$  — **измеримо по Лебегу**, если  $\varphi^{-1}(E)$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$  по Лебегу.

Обозначение.  $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M : E \text{ изм.}\} = \{\varphi(A), A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

**Определение** (Мера на  $\mathfrak{A}_M$ ).

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении  $\varphi$ .

*Примечание.*

1.  $\mathfrak{A}_m$  —  $\sigma$ -алгебра,  $S$  — мера.
2.  $E \subset M$  — компакт  $\Rightarrow \varphi^{-1}(E)$  — компакт, т.к. непрерывный образ компакта компактен  $\Rightarrow$  измерим  $\Rightarrow$  замкнутые множества измеримы  $\Rightarrow$  открытые относительно  $M$  множества измеримы, т.к. их дополнения замкнуты и следовательно измеримы, а также  $\sigma$ -алгебра замкнута по дополнению.
3.  $\mathfrak{A}_m$  не зависит от параметризации  $\varphi$  по теореме о двух параметризациях<sup>8</sup>.
4.  $S$  не зависит от  $\varphi$ !<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} |\vec{\varphi}'_s \times \vec{\varphi}'_t| &= |(\vec{\varphi}'_u \cdot u'_s + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_s) \times (\vec{\varphi}'_u \cdot u'_t + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_t)| \\ &= |\overrightarrow{(\varphi'_u \times \varphi'_v)}(u'_s v'_t - v'_s u'_t)| \\ &= |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

5.  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измерима, если  $M(f < a)$  измеримо относительно  $\mathfrak{A}_m$ , что в свою очередь  $\Leftrightarrow M(f \circ \varphi < a)$  измеримо относительно  $\mathfrak{M}^2$ .

$f$  измеримо относительно  $\mathfrak{A}_m \Leftrightarrow f \circ \varphi$  измеримо относительно  $\mathfrak{M}^2$ .

**Определение** (поверхностный интеграл первого рода).

<sup>8</sup> Которая гласит, что треугольник коммутирует.

<sup>9</sup> Это восклицательный знак, а не факториал.

- $M$  — простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$
- $\varphi$  — параметризация  $M$
- $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — суммируемо по мере  $S$  на  $M$

Тогда  $\iint_M f dS = \iint_M f(x, y, z) dS$  называется **интегралом первого рода** от  $f$  по многообразию  $M$ .

*Примечание.* Как вычислять этот интеграл? По теореме [о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\iint_M f dS = \iint_G f(\varphi(u, v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{vmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u| \cdot |\varphi'_v| \sin \alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2 |\varphi'_v|^2 (1 - \cos^2 \alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

*Пример.*  $M$  — график функции  $f = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, z = f(x, y)\}$

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} \quad \varphi'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \quad \varphi'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}$$

$$\iint_M g dS = \iint_G g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy$$

# Лекция 8

## 5 апреля

**Определение.**  $M \subset \mathbb{R}^3$  — **кусочно-гладкое двумерное многообразие**, если  $M$  — конечное объединение:

- Простых гладких многообразий  $M_i$
- Гладких кривых
- Точек

**Определение.**  $E \subset M$  измеримо, если  $E \cap M_i$  измеримо.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

### 6.2 Поверхностный интеграл II рода

*Обозначение.* Будем называть простое двумерное гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^3$  поверхностью.

**Определение.** **Сторона поверхности** есть непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности.

Для поверхности  $M \subset \mathbb{R}^3$  сторона есть отображение

$$W : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall x \quad |W(x)| = 1, W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$$

*Примечание.* Локально каждая поверхность двусторонняя. В общем случае сторон либо две, либо одна (*лента Мёбиуса*). Для поверхностей с одной стороной нельзя задать сторону поверхности. Формально мы это не доказали и это требует трюков с топологией. В  $\mathbb{R}^4$

можно сделать дырку в окружности и заткнуть её лентой Мёбиуса и тогда всё станет совсем странно.

*Пример.* График функции  $z(x, y)$ .

$$\begin{aligned}\Phi : (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} \\ \Phi'_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \quad \Phi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} \\ n &:= \Phi'_x \times \Phi'_y = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} \\ n_0 &= \pm \begin{pmatrix} -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \\ -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Другие способы задания стороны:

1.  $u, v$  — касательные непараллельные вектора к  $M$ . Тогда  $(u, v)$  будем называть **касательным репéром**. Нормаль в таком случае можно восстановить векторным произведением  $u \times v$ . После нормировки по полю реперов мы получаем поле единичных нормалей, т.е. сторону поверхности.
2. Пусть задана петля и задано направление движения, то бишь **ориентированный контур**. Тогда с помощью гомотопий его можно стянуть в любую точку нашего многообразия  $M$ . Заметим, что направление движения на самом деле задаёт два вектора — касательный вектор и вектор нормали “внутри” петли. Тогда мы по ориентированному контуру получим поле касательных реперов, а следовательно зададим и сторону поверхности.

**Определение.**

- $M$  — поверхность в  $\mathbb{R}^3$
- $n_0$  — сторона
- $\gamma$  — контур (*петля*) в  $M$ , ориентированная
- $N_{\text{внутр.}}$  — вектор нормали, направленный внутрь петли

Говорят, что сторона поверхности  $n_0$  согласована с ориентацией  $\gamma$ , если:

$$(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$$

Т.е. если ориентация  $\gamma$  задаёт сторону  $n_0$ .

**Определение** (интеграл II рода).

- $M$  — простое двумерное гладкое многообразие
- $n_0$  — сторона  $M$
- $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  — непрерывное векторное поле

Тогда  $\int_M \langle F, n_0 \rangle dS$  — **интеграл II рода** векторного поля  $F$  по поверхности  $M$ .

*Примечание.*

- Смена стороны = смена знака
- Не зависит от параметризации
- $F = (P, Q, R)$ , тогда интеграл обозначается  $\iint_M Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$
- $\Phi$  - параметризация,  $n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$  - нормирование

Пусть  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{aligned} \int_M \langle F, n_0 \rangle ds &= \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| dudv \\ &= \int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\text{смешанное произведение: (8)}} dudv \\ &= \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv \\ \langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle &= \begin{vmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Сторона поверхности учитывается в порядке переменных  $u, v$ .

*Пример.* Рассмотрим график функции  $z(x, y)$  над областью  $G$  по верхней стороне.

$$n_0 = \left( -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \quad \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \right)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_z} R dx dy &= \int_{\Gamma_z} 0 dy dz + 0 dz dx + R(x, y, z) dx dy \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Gamma_z} R(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} dS \\
&= \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy \\
&= \iint_G R dx dy
\end{aligned}$$

Т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции.

*Следствие.*  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $M = \partial^1 V$  — гладкая двумерная поверхность,  $n_0$  — внешняя нормаль.

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} z dx dy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

*Следствие.*  $\Omega$  — гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $M$  — цилиндр над  $\Omega$ , т.е.  $M = \Omega \times [z_0, z_1]$

Тогда  $\int_M R dx dy = 0$  по любой стороне.

*Доказательство.*  $n_0 \perp (0, 0, R)$

□

## 7 Ряды Фурье

### 7.1 Пространства $L^p$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
  - $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , т.е.  $x = f(x) = u(x) + iv(x)$ ,  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$

$f$  **измеримо**, если  $u$  и  $v$  измеримы<sup>2</sup>.

$f$  **суммируемо**, если  $u$  и  $v$  суммируемы.

Если  $f$  суммируемо, то  $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

*Упражнение 6.*

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

- Неравенство Гёльдера.

$$\bullet \quad p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

---

<sup>1</sup> Это не дифференциал, а граница.

<sup>2</sup> Или измеримы почти везде.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E$  — измеримо
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$
- $f, g$  — измеримы

Тогда  $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

*Доказательство.* Не будет, но общая идея следующая:

- (а) Для ступенчатых функций — из неравенства Гёльдера для сумм<sup>3</sup>
- (б) Для суммируемых функций — по теореме [Леви](#).

□

### 3. Неравенство Минковского.

В тех же условиях  $\left(\int_E |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

*Доказательство.* Не будет, можно вывести аналогично выводу во втором семестре.

□

*Примечание.* Для  $p = 1$  тоже верно.

### 4. Определение пространства $L^p$ , $1 \leq p < +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой.
- $E \subset X$  — измеримо.

$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \{f : \text{почти везде } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}^4), f - \text{изм.}^5, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$  — это линейное пространство по неравенству Минковского.

Зададим отношение эквивалентности  $\sim$  на  $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ :  $f \sim g \Leftrightarrow f = g$  почти везде.

$\mathcal{L}^p / \sim = L^p(E, \mu)$  — линейное пространство.

Задаём норму на  $L^p$ :  $\|f\|_{L^p(E, \mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ , обозначается  $\|f\|_p$

Эта функция корректно определена, т.к. для  $f \sim g$ :  $\|f\|_p = \|g\|_p$ . Кроме того, она является нормой, т.к.:

- (а)  $\|f\|_p \geq 0$  — очевидно, т.к.  $\int |f|^p \geq 0$
- (б)  $\|f\|_p = 0 \Rightarrow \int |f|^p = 0 \Rightarrow \int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$  п.в.  $\Rightarrow f \sim 0$ .

<sup>3</sup> Мы его рассматривали во втором семестре.

<sup>4</sup>  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

<sup>5</sup> Или измерима почти везде.



$$(c) \|f \cdot \alpha\|_p = \left( \int |f \cdot \alpha|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \cdot \|f\|_p$$

$$(d) \|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \text{ по неравенству Минковского.}$$

5.  $L^\infty(E, \mu)$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой.
- $E \subset X$  — измеримо.
- $f$  : почти везде на  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо

**Определение** (существенный супремум<sup>6</sup>).

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf \{ A \in \overline{\mathbb{R}}, f \leq A \text{ почти везде} \}$$

При этом  $A$  называется существенной вещественной границей.

*Свойства.*

- $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$  — очевидно.
- $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$  почти везде — пусть  $B = \operatorname{ess\,sup} f$ , тогда  $\forall n \quad f \leq B + \frac{1}{n}$  почти везде.
- $f$  — суммируемо,  $f, g$  — почти везде  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ ,  $\operatorname{ess\,sup}_E |g| < +\infty$ . Тогда  $|\int_E fg| \leq \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$

*Доказательство.*

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f| = \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f| \quad (9)$$

□

$L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{почти везде } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C}), \text{ изм., } \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\} / \sim$  — линейное пространство.

$$\|f\|_{L^\infty(E, \mu)} := \operatorname{ess\,sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

*Примечание.*

- (a) В новых обозначениях неравенство Гёльдера:  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  — здесь можно брать  $p = 1, q = +\infty$  — это (9).
- (b)  $f \in L^p \Rightarrow f$  — почти везде конечно, если  $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow$  можно считать, что  $f$  задана всюду на  $E$  и всюду конечна.

<sup>6</sup> Также называется истинным супремумом

# Лекция 9

## 12 апреля

В третьем семестре у нас был криволинейный интеграл функции и векторного поля вдоль кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

$$\int_{\gamma} f \underbrace{dS}_{|\gamma'|dt} = \int \langle F, \gamma' \rangle dt$$

Мера на кривой, т.е. гладком одномерном многообразии, с параметризацией  $\gamma$ , является мерой Лебега в  $\mathbb{R}^1$  с весом  $|\gamma'|$ . Такой интеграл — первого рода.

В общем случае интеграл II рода по  $m - 1$ -мерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$  от векторного поля  $F$  есть:  $\int \langle F, n_0 \rangle dS_{m-1}$

**Определение** (мера Лебега на  $k$ -мерном многообразии в  $\mathbb{R}^m$ ).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\exists \Phi'_1 \dots \Phi'_k$

$\lambda_k(\text{ПРЛП}(\Phi'_1 \dots \Phi'_k))$ <sup>1</sup> — это и будет плотность меры.

## 8 Формула Грина

**Теорема 26** (формула Грина).

- $D \subset \mathbb{R}^2$  — компактное, связное, односвязное<sup>2</sup>, ограниченное множество.
- $D$  ограничено кусочно-гладкой кривой  $\partial D$
- $(P, Q)$  — гладкое векторное поле в окрестности  $D$

<sup>1</sup> Объём параллелепипеда на этих векторах

<sup>2</sup> Любая петля стягиваема

Пусть  $\partial D$  ориентирована согласованно с ориентацией  $D$  (против часовой стрелки) — обозначим  $\partial D^+$ . Тогда:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

Доказательство. Ограничимся случаем  $D$  — “криволинейный четырёхугольник”.

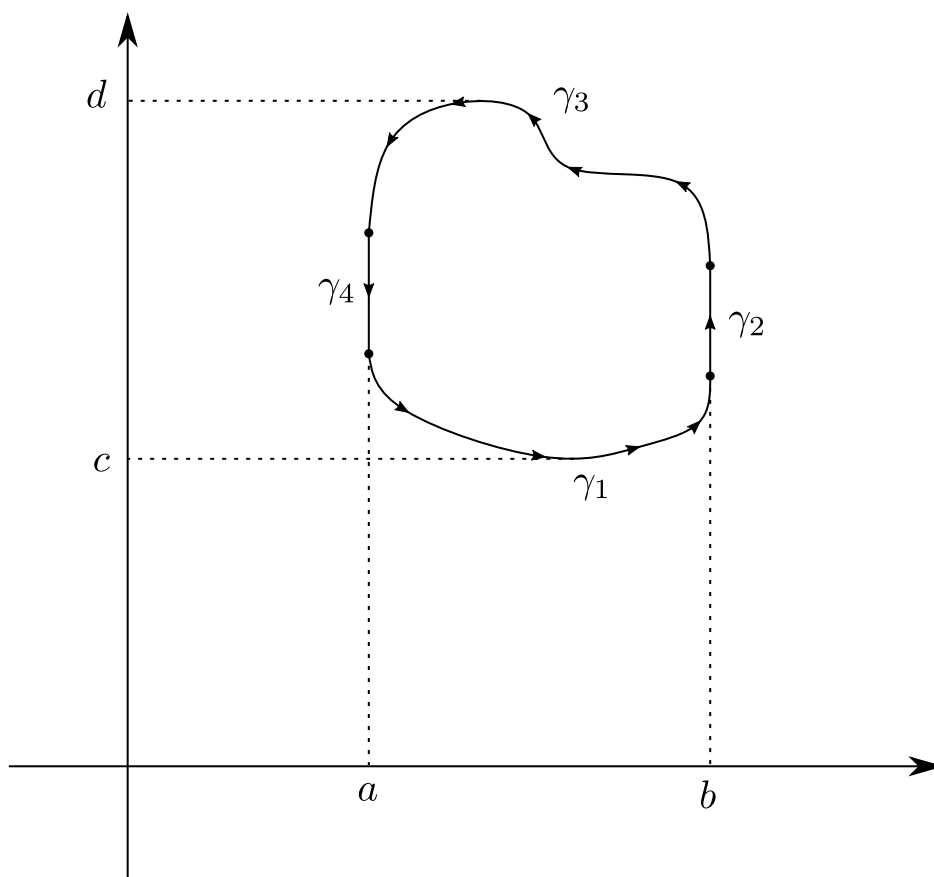


Рис. 9.1: Криволинейный четырёхугольник с  $\partial D$

$\partial D$  состоит из путей  $\gamma_1 \dots \gamma_4$ , где  $\gamma_2$  и  $\gamma_4$  — вертикальные отрезки<sup>3</sup>,  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  — гладкие кривые — можно считать, что это графики функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ .

Аналогично можно описать  $\partial D$  по отрезкам, параллельным оси  $OY$ .

Проверим, что  $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + 0 dy$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

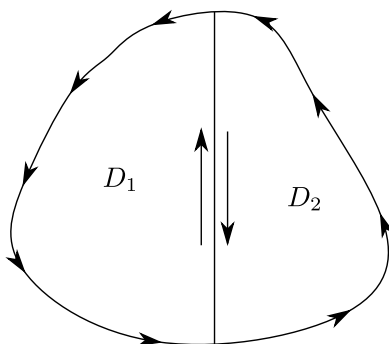
<sup>3</sup> Возможно, вырожденные

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx \\
\int_{\partial D^+} P dx + 0 dy &= \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_0 + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_0 \\
&= \int_a^b P(x, \gamma_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \gamma_3(x)) dx
\end{aligned}$$

Таким образом, искомое доказано.  $\square$

*Примечание.* Теорема верна для любой области  $D$  с кусочно-гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные четырёхугольники.

Такой разрез — безобидное действие, которое можно выполнить вертикальным разрезанием по середине:



Кажется, такими разрезами можно достичь искомого в любой области, но мы не будем это утверждать.

**Теорема 27** (формула Стокса).

- $\Omega$  — простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$  (двустороннее)
- $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — параметризация  $\Omega$
- $L^+$  — граница  $G$
- $n_0$  — сторона  $\Omega$
- $\partial\Omega$  — кусочно-гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$  — кривая с согласованной ориентацией
- $(P, Q, R)$  — гладкое векторное поле в окрестности  $\Omega$

Тогда:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Примечание.  $dxdy = -dydx$ ,  $dxdx = 0$

$$dPdx + dQdy + dRdz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + \dots$$

Доказательство. Ограничимся случаем  $\Omega \in C^2$ , т.е. параметризация  $\Omega$  дважды гладко дифференцируема.

Достаточно показать, что:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Пусть  $\Phi = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Запараметризуем  $L^+$  как  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (u(t), v(t))$ . Тогда  $\Phi \circ \gamma$  — параметризация  $\partial\Omega^+$ . Тогда  $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_{L^+} P \left( \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) dt \\ &= \int_{L^+} P \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ &\stackrel{(?)}{=} \iint_G \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv \\ &\stackrel{(?)}{=} \iint_G (\cancel{P'_x x'_u} + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v + \cancel{P'_x x'_{uv}} - (\cancel{P'_x x'_v} + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u - \cancel{P'_x x'_{uv}} dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} (z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \end{aligned}$$

□

## 9 Ряды Фурье (возвращение)

**Теорема 28.**

(?): по [формула грин](#)

(?): это дифференцирование произведения

- $\mu E < +\infty$
- $1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1.  $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2.  $\|f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

*Доказательство.* 1 следует из 2, т.к. если  $f \in L^r(E, \mu)$ , то  $\|f\|_s$  конечно. Докажем 2.

При  $r = \infty$  очевидно:

$$\left( \int_E |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

При  $r < +\infty$   $p := \frac{r}{s}, q := \frac{r}{r-s}$

$$\begin{aligned} \|f\|_s^s &= \int_E |f|^s d\mu \\ &= \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \\ &\leq \left( \int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left( \int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu \right)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\leq \|f\|_r^s \mu E^{1 - \frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

*Следствие 28.1.*  $\mu E < +\infty, 1 \leq s, r \leq +\infty, f_n \xrightarrow{L^r} f$ . Тогда  $f_n \xrightarrow{L^s} f$

*Доказательство.*  $\|f_n - f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f_n - f\|_r \rightarrow 0$

□

**Теорема 29** (о сходимости в  $L^p$  и по мере).

- $1 \leq p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1.  $f \in L^p, f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$
2.
  - $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (либо  $f_n \rightarrow f$  п.в.)
  - $|f_n| \leq g$

$$\bullet g \in L^p$$

Тогда  $f \in L^p$  и  $f_n \rightarrow f$  в  $L^p$

*Доказательство.*

1. Пусть  $X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

2. Пусть  $f_n \Rightarrow f$ . Тогда по теореме Рисса  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.  $|f| \leq g$  почти везде.  $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$  — суммируема, т.к.  $g \in L^p$ .

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

## 9.1 Напоминание

- Фундаментальная последовательность :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, n > N \|f_n - f_k\| < \varepsilon$ , т.е.  $\|f_n - f_k\| \xrightarrow{n, k \rightarrow +\infty} 0$
- $f_n \rightarrow f \Rightarrow (f_n)$  — фундаментальная, т.к.  $\|f_n - f_k\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f - f_k\|}_{\rightarrow 0}$
- $C(K)$  — пространство непрерывных функций на компакте  $K$ .

$\|f\| = \max_K |f|$ . Утверждение:  $C(K)$  — полное, т.е. любая фундаментальная последовательность сходится.

*Упражнение 7.*  $L^\infty(X, \mu)$  — полное

**Теорема 30.**  $L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$  — полное.

*Доказательство.* Рассмотрим  $f_n$  — фундаментальную. Куда бы она могла сходиться?

Пусть  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Тогда  $\exists N_1 \forall n_1, k > N_1 \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$ . Зафиксируем какой-либо  $n_1$ .

Аналогично для  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ .

В общем случае  $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_k \frac{1}{2^k} = 1$ . Рассмотрим ряд  $S(x) = \sum |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ ,  $S(x) \in [0, +\infty]$  и его частичные суммы  $S_N$ .

$$\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Таким образом,  $\int_X S_N^p < 1$ . По теореме Фату  $\int_X S^p d\mu < 1$ , т.е.  $S^p$  — суммируемо  $\Rightarrow S$  почти везде конечно.

$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$  — его частичные суммы это  $f_{n_{N+1}}(x)$ , т.е. сходимость этого ряда почти везде означает, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде. Таким образом, кандидат —  $f$ . Проверим, что  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берём  $m = n_k > N$ .

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Это выполнено при всех достаточно больших  $k$ . Тогда по теореме Фату  $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$ , т.е.  $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

**Определение.**  $Y$  — метрическое пространство,  $A \subset Y$ ,  $A$  — **(всюду) плотно** в  $Y$ , если:

$$\forall y \in Y \quad \forall U(y) \quad \exists a \in A : a \in U(y)$$

*Пример.*  $\mathbb{Q}$  плотно в  $\mathbb{R}$ .

**Лемма 7.**

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций (из  $L^p$ ) плотно в  $L^p$ .

*Доказательство.*

1.  $p = \infty$

$\langle f \in L^\infty$ . Изменив  $f$  на множестве меры 0, считаем, что  $|f| \leq \|f\|_\infty$ , т.к.  $f > A$  на множестве меры 0.

Тогда из доказательства теоремы о характеристизации неотрицательных функций с помощью ступенчатых  $\exists$  ступенчатые функции  $\varphi_n$ , такие что  $0 \leq \varphi_n \Rightarrow f^+$  и  $\psi_n$ , такие что  $0 \leq \psi_n \Rightarrow f^-$

Тогда сколь угодно близко к  $f$  можно найти ступенчатую функцию вида  $\varphi_n + \psi_n$ , т.е.  $|f - \varphi_n - \psi_n| \leq \frac{1}{n}$ , что и требовалось показать.

2.  $p < +\infty$ . Пусть  $f \geq 0$ .

$\exists \varphi_n \geq 0$  ступенчатые :  $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X \underbrace{|\varphi_n - f|^p}_{\leq |f|^p - \text{мажоранта}} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$



Если  $f$  любого знака, то при рассмотрении срезов искомое очевидно.

□

*Примечание.*  $\varphi \in L^p$  — ступенчатая  $\Rightarrow \mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$

**Определение.**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — **финитная**, если  $\exists B(0, r) : f \equiv 0$  вне  $B(0, r)$ .

*Обозначение.*  $C_0(\mathbb{R}^m)$  — непрерывные финитные функции

Очевидно, что  $\forall p \geq 1 \ C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

**Определение.** Топологическое пространство  $X$  **нормальное**, если:

1. Точки  $X$  суть замкнутые множества

2.  $\forall F_1, F_2 \subset X$  — замкнутых<sup>4</sup>, тогда  $\exists U(F_1), U(F_2)$  — открыты,  $U(F_1) \cap U(F_2) = \emptyset$

Загадка:  $\mathbb{R}^m$  — нормальные.<sup>5</sup>

---

<sup>4</sup> И непересекающихся, но это не было сказано на лекции.

<sup>5</sup> Если очень хочется, то [здесь](#) можно почитать доказательство того, что все метрические пространства (к которым  $\mathbb{R}^m$  является) нормальные.

# Лекция 10

## 19 апреля

### 10 Формула Остроградского

**Теорема 31** (Формула Остроградского).

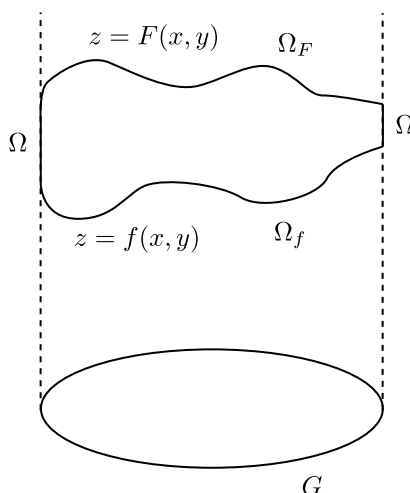
- $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$
- $G$  — компакт
- $\partial G$  — кусочно-гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- $R$  : окрестность  $V \rightarrow \mathbb{R}, R \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} R dx dy = \iint_{\partial V} 0 dy dz + 0 dz dx + R dx dy$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_G R(x, y, F(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z) dx dy \stackrel{(?)}{+} \iint_{\Omega_f} R dx dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R dx dy}_0 \\ &= \iint_{\partial V} R dx dy \end{aligned}$$



□

Следствие 31.1 (обобщенная формула Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

**Определение.**  $V$  — гладкое векторное поле. Тогда **дивергенция**  $\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Наблюдение:

$$\operatorname{div} V(a) \stackrel{(?)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V dxdydz \stackrel{(?)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, n_0 \rangle dS$$

— не зависит от координат.

Физический смысл — мы измеряем поток воды и обнаруживаем, что поток по замкнутой поверхности пропадает или же появляется. Тогда  $\operatorname{div} V$  — мера<sup>1</sup> интенсивности стока/источка.

Следствие 31.2.  $l \in \mathbb{R}^3, f \in C^1(\text{окр.}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dxdydz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle l, n_0 \rangle dS$$

Доказательство. Загадка.

□

**Определение. Ротор (вихрь)**

$$\operatorname{rot} V = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

(?): “-” спрятан в нормали, направленной вниз.

(?): по непрерывности  $\operatorname{div}$

(?): по формуле Стокса

<sup>1</sup> Не та, что в теории меры; “измерение”

Аналогично можно определить ротор:

$$\operatorname{rot} F(a) = \lim_{\Omega \rightarrow x_0} \frac{1}{S(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} A, n_0 \rangle dS$$

*Примечание.* Поле  $V = (P, Q, R)$  — потенциально  $\Leftrightarrow \exists f : V = \nabla f$ . По теореме Пуанкаре при  $\Omega$  — односвязной:  $V$  — потенциально  $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$ , т.к.  $\operatorname{rot}(\nabla f) \equiv 0$

**Определение.** Векторное поле  $A = (A_1, A_2, A_3)$  **соленоидально** в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , если  $\exists$  гладкое векторное поле  $B$  в  $\Omega$ , такое что  $A = \operatorname{rot} B$ .

**Теорема 32 (Пуанкаре').**

- $\Omega$  — открытый параллелепипед
- $A$  — векторное поле в  $\Omega$
- $A \in C^1$

Тогда  $A$  — соленоидально  $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

*Доказательство.*

$\Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} B \equiv 0$ , что всегда выполнено.

$\Leftarrow$  Дано:

$$A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0 \quad (10)$$

Найдём векторный потенциал  $B = (B_1, B_2, B_3)$ , где  $A = \operatorname{rot} B$ .

Пусть  $B_3 \equiv 0$ .

$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

$$-B'_{2z} = A_1 \quad (11)$$

$$-B'_{1z} = A_2 \quad (12)$$

$$B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \quad (13)$$

$$(12) \quad B_1 = \int_{z_0}^z A_2 dz$$

$$(11) \quad B_2 = - \int_{z_0}^z A_1 dz + \varphi(x, y)$$

$$(13) \quad A_3 = - \int_{z_0}^z A'_{1x} dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^z A'_{2y} dz$$

По (10):

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z A'_{3z} + \varphi'_x &= A_3 \\ A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x &= A_3(x, y, z) \\ \varphi'_x &= A_3(x, y, z_0) \end{aligned}$$

Отсюда найдём  $\varphi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z_0) dx$

□

**Лемма 8** (Урысона).

- $X$  нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$  — замкнутые
- $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывное,  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f|_{F_0} \equiv 0$ ,  $f|_{F_1} \equiv 1$

*Доказательство.* Переформулируем нормальность: если  $F \subset G$ ,  $F$  замкнутое,  $G$  открытое, то  $\exists U(F)$  — открытое, такое что  $F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$ . Почему это нормальность? Первое замкнутое множество —  $F$ , а второе замкнутое —  $G^c$ .

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^c \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^c}_{G_1}$$

Строим  $G_{\frac{1}{2}}$ :

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}}$$

Строим  $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$ :

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом,  $\forall$  двоично рациональной  $\alpha \in [0, 1]$  задаётся открытое множество  $G_\alpha$ .

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональная} : x \in G_\alpha\}$$

$f$  — непрерывно  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow} f^{-1}(a, b)$  — всегда открыто.

Достаточно проверить:

1.  $\forall b \ f^{-1}(-\infty, b)$  — открыто
2.  $\forall a \ f^{-1}(-\infty, a]$  — замкнуто

, так как:

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a]$$

1.  $f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q < b \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q$  — открыто. Почему это так?

$f^{-1}(-\infty, b) \subset \bigcup$ , т.к.  $f(x) = b_0 < b$ . Возьмём  $q : b_0 < q < b$ . Тогда  $x \in G_q$

$f^{-1}(-\infty, b) \supset \bigcup$  очевидно, т.к. при  $x \in G_q \ f(x) \leq q < b$ .

2.  $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q > a} G_q = \bigcap_{q > a} \overline{G_q}$  — замкнуто

( $\supset$ ) — тривиально

( $\subset$ ) Для двоично рациональных  $q, r$ :

$$\bigcap_{\substack{q > a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

, так как  $\forall \alpha < \beta : G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$  по построению.

□

### Теорема 33.

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_m)$
- $E \subset \mathbb{R}^m$  — измеримое

Тогда в  $L^p(E, \lambda_m)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  множество непрерывных финитных функций плотно.

*Доказательство.* По уже доказанной теореме множество ступенчатых функций плотно в  $L^p(E, \lambda_m)$ . Достаточно научиться приближать характеристические функции финитными, т.е.:

$$\forall A - \text{огр.} \ \exists f - \text{финитная непрерывная} : \|f - \chi_A\|_p < \varepsilon$$

Тогда можно будет приближать ступенчатые функции финитными, а следовательно искомое будет верно.

По регулярности меры лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \underbrace{F}_{\text{замкн.}} \subset A \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}} \quad \lambda_m(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона  $\exists$  непрерывное  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} : f|_F \equiv 1, f|_{G^c} \equiv 0$

$$\|f - \chi_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \chi_A|^p d\lambda_m = \int_{G \setminus F} |f - \chi_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_m(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

*Примечание.* При  $p = +\infty$  утверждение теоремы неверно!

*Упражнение 8.*  $\langle L^{+\infty}(\mathbb{R}, \lambda), B(\chi_{[a,b]}, \frac{1}{2}) \rangle$  не содержит непрерывных функций, т.к.  $\sup_{\mathbb{R}} |f - \chi_A| \geq \max(\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x) - \chi_A|, \lim_{x \rightarrow a-0} |f(x) - \chi_A|) \geq \frac{1}{2}$ .

В  $L^p(E, \lambda_m)$  плотны:

- Линейные комбинации характеристических функций ячеек
- Гладкие финитные функции
- Рациональные линейные комбинации характеристических функций рациональных ячеек, а это множество счётно.
- Непрерывные функции

Вопрос: что-либо из упомянутого плотно ли в  $L^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ ?

Ответ не совсем на этот вопрос: в  $L^{+\infty}$  нет счётного плотного множества, зато конечные линейные комбинации характеристических функций плотны.

# Лекция 11

## 26 апреля

*Соглашение.*  $L^p[0, T], T \in \mathbb{R}$  можно понимать как пространство  $T$ -периодических функций, т.е.  $\forall x \ f(x) = f(x + T)$ .

Удобство:  $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$ .

*Соглашение.*  $f \in C[a, b] \Rightarrow \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

$\tilde{C}[0, T]$  — непрерывные  $T$ -периодические функции.

- $f \in C[0, T]$  или  $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$  равномерно непрерывна по теореме Кантора о непрерывной на компакте функции.
- В  $L^p[0, T]$  функции из  $\tilde{C}$  образуют плотное множество.

Линейная функция на  $L^p(X, \mu), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Берём  $g \in L^q(x, \mu)$  и строим отображение  $L^p \rightarrow \mathbb{R}, \alpha : f \mapsto \int_X f g d\mu$ . Нам известно неравенство  $|\int_X f g| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q)^{\frac{1}{q}}$ , поэтому интеграл конечен. Несложно заметить, что  $\alpha$  действительно линейно. Непрерывно ли  $\alpha$ ? Сходится ли  $\alpha(f_n)$  к  $\alpha(f)$ ? Да, т.к.:

$$|\alpha(f_n) - \alpha(f)| = \left| \int_X (f_n - f) \cdot g \right| \leq \|f_n - f\|_p \cdot \|g\|_q$$

**Определение.**

- $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) := f(x + h)$  — сдвиг.

**Теорема 34** (о непрерывности сдвига).



1.  $f$  — равномерно непрерывно на  $\mathbb{R}^m$ . Тогда  $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ <sup>1</sup>
2.  $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Тогда  $\|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
3.  $f \in \tilde{C}[0, T]$ . Тогда  $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ <sup>2</sup>
4.  $1 \leq p < +\infty$ ,  $f \in L^p[0, T] \Rightarrow \|f_h - f\|_p \rightarrow 0$

*Примечание.*

1. Для  $L^\infty$  непрерывности сдвига нет:  $f = \chi_{[0,1]}$ ,  $f_n = \chi_{[-h,1-h]}$ ,  $\text{ess sup } |f - f_n| = 1$
2. В случаях 2 и 4  $h \mapsto \|f_h - f\|_p$  непрерывно в нуле  $\Rightarrow$  непрерывно всюду.

$$|\|f_n - f\|_p - \|f_{h_0} - f\|_p| \leq \|f_n - f_{h_0}\|_p = \|f_{h-h_0} - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

*Доказательство.* Пункты 1 и 3 очевидны по определению равномерной непрерывности.

Докажем пункты 2 и 4.

По плотности непрерывных функций в  $L^p$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall f \in L^p[0, T] \quad \exists g - \text{непр.} \in \tilde{C}[0, T] \quad \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

Покажем, что  $\|g - g_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$

4:

$$\begin{aligned} \|g_h - g\|_p &= \left( \int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= T^{\frac{1}{p}} \|g_h - g\|_\infty \end{aligned}$$

, что  $< \frac{\varepsilon}{3}$  для достаточно малых  $h$ .

2:  $g$  — финитное, носитель<sup>3</sup>  $g \subset B(0, R)$ , пусть  $|h| < 1$ .

$$\|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0, R+1), \lambda_m)} \leq \|g_n - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}}$$

□

<sup>1</sup> Т.е.  $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$

<sup>2</sup> Или  $\|f_n - f\|_{\tilde{C}} \rightarrow 0$

<sup>3</sup> Множество точек, где  $g \neq 0$

## 11 Гильбертово пространство

Пусть  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) со скалярным произведением  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) со следующими свойствами:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.  $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$
4.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  или  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  в  $\mathbb{C}$ .

Нам известно неравенство Коши-Буняковского:  $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма порожденная, скалярным произведением.

**Определение.**  $\mathcal{H}$  — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при этом  $\mathcal{H}$  — полное, то оно называется **Гильбертовым**.

*Пример.*

1.  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$
2.  $L^2(X, \mu), \langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$

Корректно по неравенству КБШ для интегралов:  $|\int_X f \overline{g}| \leq (\int_X |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_X |\overline{g}|^2)^{\frac{1}{2}}$

Это скалярное произведение:

$$\langle g, f \rangle = \int_X g \overline{f} = \overline{\left( \int_X f g \right)}$$

$\|f\| = (\int_X |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}$  — норма, порожденная скалярным произведением. Именно эту норму мы и рассматривали с самого начала.

3. Антипример:  $L^p, p \neq 2$  не Гильбертово.
4.  $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\text{или } \mathbb{C})\} : \sum |x_j|^2 < +\infty$

$$\langle x, y \rangle := \sum_j x_j \overline{y_j}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_j|^2}$$

**Определение. Сходящийся ряд:**  $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H} : S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$ , если  $\exists S \in \mathcal{H} : S_N \xrightarrow[\text{в } \mathcal{H}]{} S$

**Определение.**  $x, y \in \mathcal{H}$ .  $x$  ортогонален  $y$ , если  $\langle x, y \rangle = 0$  и обозначается  $x \perp y$

**Определение.**  $A \subset \mathcal{H}$   $x \perp A : \forall a \in A \langle x, a \rangle = 0$

**Определение.** Ряд  $\sum a_k$  **ортогональный**, если  $\forall k, l \ a_k \perp a_l$ .

*Пример.*  $a_k \in l^2 : (0 \dots 0, \frac{1}{k}, 0 \dots)$

**Теорема 35** (свойства сходимости в Гильбертовом пространстве).

1.  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  в  $\mathcal{H}$ . Тогда  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ , т.е. скалярное произведение непрерывно в  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .
2.  $\sum x_k$  сходится. Тогда:

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \left\langle \sum x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle \quad (14)$$

3.  $\sum x_k$  — ортогональный ряд. Тогда  $\sum x_k$  сходится  $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$  сходится.

*Доказательство.*

1.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\text{бесконечно малое}} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\text{огр.}} + \underbrace{\|x\|}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\text{бесконечно малое}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$2. \ S_N = \sum_{k=1}^N x_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$$

$$\langle S_n, y \rangle \rightarrow \langle S, y \rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$

$$\langle S_n, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, y \rangle$$

Это член суммы ряда из правой части (14).

$$3. \ S_N = \sum_{k=1}^N x_k$$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{j=1}^N x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 =: C_N$$

$\Rightarrow$  Очевидно

$\Leftarrow$  Аналогично формуле выше:  $\|S_M - S_N\|^2 = |C_M - C_N|$ . Таким образом, если  $C_N$  сходится, то  $C_N$  фундаментально  $\Rightarrow S_N$  фундаментально в  $\mathcal{H}$ .

□

*Примечание.* Равенство  $\|S_N\|^2 = \sum \|x_k\|^2$  – теорема Пифагора.

**Определение.**  $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$  – **ортogonalное семейство**, если:

1.  $\forall k, l \quad e_k \perp e_l$
2.  $\forall k \quad e_k \neq 0$

Если потребовать  $\|e_k\| = 1$ , то такое семейство называется **ортонормированным**.

*Примечание.*  $\{e_k\}$  – ортogonalное семейство  $\Rightarrow \{\frac{e_k}{\|e_k\|}\}$  – ортонормированное семейство.

*Пример.*

1.  $l^2, e_k := (0 \dots 0, 1, 0 \dots)$  – ортонормированное семейство.
2.  $L^2$  над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ,  $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$  – ортogonalное семейство:

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos lt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(kt - lt) + \cos(kt + lt) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \end{cases}$$

Можно разобрать остальные случаи и подтвердить искомое.

Если поделить все элементы<sup>4</sup> на  $\sqrt{\pi}$ , то мы получим ортонормированное семейство.

3.  $L^2[0, 2\pi]$  над  $\mathbb{C}$ ,  $\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\}$  – ортонормированное семейство.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ilt}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt \stackrel{k \neq l}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(k-l)i} e^{i(k-l)t} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

4.  $L^2[0, 2\pi], \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2t \dots\}$  – ортонормированное семейство.

**Теорема 36.**

- $\{e_k\}$  – ортogonalное семейство в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ , где  $c_k \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$

Тогда:

1.  $\{e_k\}$  – ЛНЗ
2.  $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$
3.  $c_k e_k$  – проекция  $x$  на прямую  $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$ .  $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$ .

*Доказательство.*

---

<sup>4</sup> Кроме единицы, её на  $\sqrt{2\pi}$

1.  $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0 \Rightarrow \alpha_n \|e_n\|^2 = 0$
2.  $\langle x, e_k \rangle = \langle \sum c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$
3.  $\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$

□

**Определение.**

- $\{e_k\}$  — ортогональное семейство в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

$c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$  — называется **коэффициентом Фурье** по системе  $\{e_k\}$ .

$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$  — ряд Фурье вектора  $x$  по системе  $e_k$ .

*Примечание.* При замене ортогонального семейства на ортонормированное семейство  $\{\frac{e_k}{\|e_k\|} = \tilde{e}_k\}$  ряд Фурье не изменится.

$$\tilde{c}_k = \frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{\|\tilde{e}_k\|^2} = \frac{\left\langle x, \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\rangle}{1} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|}$$

$$\tilde{c}_k \cdot \tilde{e}_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|} \cdot \frac{e_k}{\|e_k\|} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k = c_k(x) \cdot e_k$$

**Теорема 37** (о свойствах частичных сумм ряда Фурье).

- $\{e_k\}$  — ортогональное семейство в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k$
- $\mathcal{L}_n = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$

Тогда:

1.  $S_n$  — проекция  $x$  на  $\mathcal{L}_n$ , т.е.  $x = S_n + z \Rightarrow z \perp \mathcal{L}_n$
2.  $S_n$  — элемент наилучшего приближения для  $x$  в  $\mathcal{L}_n$ :

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

3.  $\|S_n\| \leq \|x\|$

*Доказательство.*

1.  $k = 1 \dots n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \|e_k\|^2 = 0$$

2.  $x = S_n + z$

$$\|x - y\|^2 = \|\underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n}\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

3.  $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$

□

# Лекция 12

## 3 мая

Неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

**Теорема 38** (Рисс, Фишер).

- $\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье вектора  $x$  сходится в  $\mathcal{H}$ .
2.  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z, z \perp e_k \quad \forall k$
3.  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

*Доказательство.*

1. Ряд Фурье ортогонален. Тогда по теореме о свойствах сходимости сходимость ряда Фурье  $\Leftrightarrow$  сходимость  $\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ , что выполнено по неравенству Бесселя.

$$2. \quad z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \|e_n\|^2 = 0$$

3.  $\Rightarrow$  по теореме о свойствах сходимости, пункт 3.

$\Leftarrow$  из пункта 2:

$$||x||^2 = ||\sum c_k(x)e_k||^2 + ||z||^2 = \sum |c_k(x)|^2 ||e_k||^2 + ||z||^2$$

$$\text{Дано: } ||x||^2 = \sum |c_k(x)|^2 ||e_k||^2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = \sum c_k(x)e_k$$

□

*Примечание.*

$$1. \mathcal{L} := \text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots))$$

2.  $\mathcal{H}, e_k$  — ортонормированная система. Тогда последовательность  $(c_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \in l_2$ .  
Обратное тоже верно:

$$\forall (c_k) \in l_2 \exists x \in \mathcal{H} \quad c_k = c_k(x)$$

*Доказательство.* Берём в качестве  $x$  ряд  $\sum c_k e_k$ , который сходится по теореме. □

3.

*Упражнение 9.* Если ортогональный ряд сходится, то он является рядом Фурье своей суммы.

Равенство  $\sum_k |c_k(x)|^2 ||e_k||^2 = ||x||^2$  называется уравнением замкнутости или **равенством Персиваля**.

**Определение.** Ортогональная система  $\{e_k\}$  — **базис**  $\mathcal{H}$ , если  $\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \sum c_k(x)e_k$

**Определение.** Ортогональная система **полная** (нечего добавить), если  $\nexists z \neq 0 : z \perp c_k \quad \forall k$ .

**Определение.** Ортогональная система **замкнутая**, если  $\forall x \quad \sum |c_k(x)|^2 ||e_k||^2 = ||x||^2$

**Теорема 39** (о характеристике базиса).

- $\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathcal{H}$ .

Тогда эквивалентно следующее:

1.  $\{e_k\}$  — базис
2.  $\forall x, y$  выполняется обобщенное уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot ||e_k||^2$$

3.  $\{e_k\}$  замкнуто
4.  $\{e_k\}$  полно
5.  $\text{Lin}(e_1, e_2 \dots)$  плотна в  $\mathcal{H}$ , т.е.  $\text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots)) = \mathcal{H}$ .



*Доказательство.*

1 $\Rightarrow$ 2 Берём  $x$ , раскладываем его по базису и скалярно умножаем на  $y$ :

$$\begin{aligned}\langle e_k, y \rangle &= \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2 \\ \langle x, y \rangle &= \sum_k c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2\end{aligned}$$

2 $\Rightarrow$ 3 Из обобщенного следует частное при подстановке  $y$  вместо  $x$ .

3 $\Rightarrow$ 4 Если  $\exists z : \forall n \langle z, e_n \rangle = 0$ , то  $c_n(z) = 0$ , но тогда по уравнению замкнутости для  $z$  выполняется  $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = 0$ , а следовательно  $z = 0$ .

4 $\Rightarrow$ 1 По теореме Рисса-Фишера  $x = \sum c_k(x) e_k + z$ , где  $z \perp$  всем  $e_k$ . По полноте  $z = 0$ .

4 $\Rightarrow$ 5  $\mathcal{L} := \text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots))$ . Надо проверить, что  $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ . Если  $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$ , то по теореме Рисса-Фишера  $\exists z : \forall k \ z \perp e_k$ .

5 $\Rightarrow$ 4 Если  $z \perp e_k \ \forall k$ , то  $z \perp \text{Lin}(e_1, e_2 \dots) \Rightarrow z \perp \mathcal{L}$ , но  $\mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow z \perp z$ , т.е.  $\langle z, z \rangle = 0$ , но тогда  $z = 0$ .

□

*Примечание.* В  $\mathcal{H}$  существование ортогональной системы  $\Leftrightarrow \mathcal{H}$  сепарабельно, т.е. “счётно-номерно”, т.е. имеет счётное плотное подмножество.

## 12 Тригонометрические ряды Фурье

**Определение.**

- $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$  — **тригонометрический полином степени не выше  $n$** .

- $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$  — **тригонометрический ряд**, где  $a_k, b_k$  — коэффициенты тригонометрического ряда.

- 

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

Тогда при подстановке этих формул в  $T_n(x)$  получается  $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  — **тригонометрический полином в комплексной записи**.

- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  — **тригонометрический ряд в комплексной записи**, понимается как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$ .

**Лемма 9.**

- Дан тригонометрический ряд (*вещественный или комплексный*)
- Пусть  $S_n \rightarrow f$  в  $L^1[-\pi, \pi]$ , т.е.  $\|S_n - f\|_1 = \int_{-\pi, \pi} |S_n - f| \rightarrow 0$

Тогда:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt$ , в том числе при  $k = 0$
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt$
- $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

*Доказательство.* Докажем для  $a_k$ . Пусть  $n \geq k$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos ktdt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt = \pi a_k$$

$$\left| \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t)) \cos kt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| dt = \|S_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

**Определение.**  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ .  $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ , заданные в лемме, называются **коэффициентами Фурье** функции  $f$ , а ряд  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  или  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  называется **рядом Фурье** этой функции.

*Примечание.* В  $L^1[0, 2\pi]$  всё то же самое.

*Примечание.*  $\triangleleft f \in L^1[-\pi, \pi]$

- $f$  — чётная  $\Rightarrow \forall k \quad b_k(f) = 0, a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ktdt$
- $f$  — нечётная  $\Rightarrow \forall k \quad a_k(f) = 0, b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ktdt$

*Примечание.*  $\triangleleft f \in L^1[0, \pi]$  — для таких функций рассматриваются два ряда Фурье — для чётного и нечётного продолжения  $f$ :

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k(f) \cos kx \quad f \sim \sum b_k(f) \sin kx$$

*Обозначение.*  $A_k(f, x) := \begin{cases} \frac{1}{2} a_0(f) & k = 0 \\ a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx & k = 1, 2, \dots \end{cases}$

Тогда:

**Лемма 10.**

$$A_k(f, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt, & k = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos ktdt & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 A_k(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx + f(t) \sin kt \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k(t-x)) dt \\
 t &:= x + \tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \tau) \cos k\tau d\tau
 \end{aligned}$$

При сдвиге промежутков интегрирования не изменился, т.к. функция периодична.  $\square$

Не дописано

Несколько “контрпримеров”, где ряд Фурье ведёт себя странно:

| Чей            | Какое пространство     | Что странно                  |
|----------------|------------------------|------------------------------|
| До Буа Реймонд | $\tilde{C}$            | Расходится в некоторой точке |
| Лебег          | $\tilde{C}$            | Сходится неравномерно        |
| Колмогоров     | $L^1$                  | Расходится в каждой точке    |
| Карлесон       | $L^2$                  | Сходится почти везде         |
| Хант           | $L^p, 1 < p < +\infty$ | Сходится почти везде         |

**Теорема 40** (Римана-Лебега).

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_E f(t) e^{i\lambda t} dt &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \\
 \int_E f(t) \cos \lambda t dt &\rightarrow 0 \\
 \int_E f(t) \sin \lambda t dt &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

В частности для  $f \in L^1[-\pi, \pi] : a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Доказательство. Не умаляя общности  $E = \mathbb{R}$ , т.к. иначе дополним  $f$  до  $\mathbb{R}$  так, что  $f = 0$  вне  $E$ .

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \stackrel{t:=\tau+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau} \cdot e^{i\pi} = - \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \left( \int + \int \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| \underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1} dt \rightarrow 0$$

, что выполнено по лемме о непрерывности сдвига.  $\square$

**Следствие 40.1.** Пусть  $\omega(f, h) = \sup_{\substack{x, y \in E \\ |x-y| \leq h}} |f(x) - f(y)|$  — модуль непрерывности. Если  $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ , то  $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$  при  $k \neq 0$ .

**Доказательство.**

$$|2c_{-k}(f)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{k}\right) \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right) dt = \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$$

$\square$

**Примечание.**  $\omega(f, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

**Следствие 40.2.**  $E \subset \mathbb{R}, E = \langle a, b \rangle$ <sup>1</sup>

**Определение.** **Класс Липшица** для  $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1]$ :

$$\text{Lip}_M^\alpha(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

Пусть  $f \in \text{Lip}_M^\alpha$ , тогда при  $k \neq 0$   $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$

**Доказательство.** Аналогично.  $\square$

**Примечание.**  $f \in \text{Lip}_M^\alpha \Rightarrow \omega(f, h) \leq M \cdot h^\alpha$

**Наблюдение 2.**  $f \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$ . Тогда при  $k \neq 0$   $a_k(f') = kb_k(f), b_k(f') = -ka_k(f), c_k(f') = ikc_k(f)$

**Доказательство.** Интегрирование по частям:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{f(t) e^{-ikt}}_0 \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot ike^{-ikt} dt \right) = ikc_k(f)$$

$\square$

<sup>1</sup> Промежуток с любым видом скобки, а не скалярное произведение.

Следствие 40.3.

1.  $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$ . Тогда  $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\text{const}}{|k|^r}$ .
2.  $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi], f^{(r)} \in \text{Lip}_m \alpha, 0 < \alpha \leq 1$ . Тогда  $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$ .

Доказательство. Очевидно из наблюдения выше.

□

# Лекция 13

## 10 мая

**Определение.** 1. Ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

2. Ядро Фейера:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

**Лемма 11.**

1.

$$D_n(t) = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2\pi \cdot \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right)$$

2.

$$\Phi_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

3.  $D_n, \Phi_n$  — чётные,  $\Phi_n \geq 0$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$

4.  $f \in L^1[-\pi, \pi]$

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

, где  $S_n$  — частичная сумма ряда Фурье.

*Доказательство.*

1.

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos kt = \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) t$$

Тогда при домножении  $D_n$  на  $\sin \frac{t}{2}$  благодаря телескопической сумме получается искомое.

2. Достаточно проверить, что

$$\sum \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) t = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

Это очевидно из того факта, что:

$$\sin \frac{t}{2} \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) t = \frac{1}{2} (\cos kt - \cos(k+1)t)$$

И по телескопической сумме получается  $\frac{1}{2}(1 - \cos(n+1)t) = \sin^2 \frac{n+1}{2} t$ .

3. Очевидно, т.к. чётные функции замкнуты по линейной комбинации, по пункту 2 ядро Фейера неотрицательно и  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt = 0$ , поэтому  $\int D_n = \int \frac{1}{2\pi} = 1$ . Арифметическое среднее единиц равно единице, поэтому это выполнено и для  $\Phi_n$  тоже.

4.

$$S_n(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n A_k(f, x) \stackrel{\text{по лемме}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)$$

□

**Теорема 41** (принцип локализации Римана).

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) = g(x)$ <sup>1</sup>

Тогда ряды Фурье  $f$  и  $g$  ведут себя одинаково в точке  $x_0$ :

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Переформулировка:

- $h := f - g, h \in L^1[-\pi, \pi]$

---

<sup>1</sup> С оговоркой, что либо почти везде, либо существуют такие представители данного класса эквивалентности.

- $h \equiv 0$  на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда  $S_n(h, x_0) \rightarrow 0$

*Доказательство переформулировки.*

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где:

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

Так можно сказать, если  $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$ .

- Для  $h_2$  это очевидно.
- Для  $h_1$ :  $h_1 \equiv 0$  при  $t \in (-\delta, \delta)$ , поэтому:

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда  $b_n(h_1) \rightarrow 0, a_n(h_2) \rightarrow 0$  по теореме Римана-Лебега. □

*Примечание.*

1. Если  $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , то  $S_n(h, x) \Rightarrow 0$  на  $[a, b]$ .
2. Для определения ряда Фурье нужен весь  $[-\pi, \pi]$  по лемме о вычислении коэффициентов Фурье, а его поведение в точке  $x_0$  зависит лишь от его окрестности.
3.  $f \in L^1[0, \pi]$  — можно разложить по  $\sin$  или по  $\cos$ . Фокус: эти разложения в  $(0, \pi)$  ведут себя одинаково.

**Теорема 42** (признак Дини).

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$
- 

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t} dt < +\infty \quad (15)$$

Тогда ряд Фурье  $f$  сходится к  $S$  в точке  $x_0$ , т.е.  $S_n(f, x_0) \rightarrow S$ .



*Доказательство.* Пусть  $\varphi(t) = f(x_0 + t) - 2s + f(x_0 - t)$ .

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S &\stackrel{??}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0 \dots = \\ &= \int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) = b_n(h_1) + a_n(h_2) \end{aligned}$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t), & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Искомое следует из теоремы Римана-Лебега, если  $h_1$  и  $h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$ .

- Для  $h_2$  это очевидно.
- Для  $h_1$ : по формуле (15):

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t}$$

при  $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^{\pi} |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} \stackrel{??}{<} +\infty$$

□

*Примечание.*

1. (15)  $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$
2.  $\triangleleft f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, x \in [-\pi, \pi]$ . Тогда  $\forall S$  интеграл (15) расходится при  $x_0 = 0$ .

*Следствие 42.1.*

- $f \in L^1$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$
- Существуют четыре конечных предела:  $f(x_0+0), f(x_0-0), \alpha_{\pm} := \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда ряд Фурье в точке  $x_0$  сходится к  $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

*Доказательство.*

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е.  $\frac{\varphi(t)}{t}$  — ограничена вблизи 0 на  $[0, \pi]$   $\implies$  по замечанию 1, интеграл (15) сходится. □

(??): т.к.  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$

(??): по условию дини

Следствие 42.2.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $f$  — непрерывно в точке  $x_0$ .
- $\exists$  конечные односторонние производные в точке  $x_0$

Тогда  $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

Доказательство. Следует из следствия 1. □

## 13 Свертки и аппроксимационные единицы

**Определение.**  $f, K \in L^1[-\pi, \pi]$ .  $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$  называется **сверткой** функций  $f, K$ .

**Лемма 12.** Свертка корректно задана.

Доказательство.

$$g(x, t) := f(x-t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что  $\varphi(x, y) := f(x-t)$  измерима как функция  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Если это так, то  $g$  тоже измерима как произведение измеримых.

Обозначим  $\forall a \in \mathbb{R} \ E_a := \mathbb{R}(f(x) < a), v(x, t) = \langle x-t, t \rangle$ . Тогда  $V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$ , т.к. это декартово произведение измеримых множеств. Следовательно  $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$  тоже измеримо в  $\mathbb{R}^2$ .

2. Лежит ли  $g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$ ?

$$\iint_{[-\pi, \pi]^2} |g(x, t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1 < +\infty$$

Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)dt$$

— при почти всех  $x \in [-\pi, \pi]$  этот интеграл сходится и задает по  $x$  функцию из  $L^1[-\pi, \pi]$ , т.е.  $f * k$  определен при почти всех  $x$ , и при этом  $\in L^1[-\pi, \pi]$  □

Свойства.

1.  $f * K = K * f$

Доказательство. Очевидно после замены  $t$  на  $-t$  под интегралом. □

$$2. \quad c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) \cdot c_k(K)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f * K) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) \cdot e^{-inx} dt dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(K) \end{aligned}$$

□

3.     •  $f \in L^p[-\pi, \pi]$   
          •  $K \in L^q[-\pi, \pi]$   
          •  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда  $f * K$  — непрерывная функция и  $\|f * K\|_{\infty} \leq \|K\|_q \cdot \|f\|_p$

*Доказательство.* Неравенство очевидно, т.к. это неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |K(t)| dt \leq \\ &\leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|K\|_q \end{aligned}$$

Если  $p$  или  $q = +\infty$ , то это неравенство надо модифицировать.

Непрерывность:

$$|f * K(x+h) - f * K(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t)) K(t) dt \right| \leq \|K\|_q \cdot \underbrace{\|f_h(x) - f(x)\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ по т. о непр. сдвига}}$$

Это всё верно, если  $p < +\infty$ . Если же  $p = +\infty$ , то поменяем местами  $f$  и  $K$ .     □

4.     •  $1 \leq p \leq +\infty$   
          •  $f \in L^p[-\pi, \pi]$   
          •  $K \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда  $f * K \in L^p[-\pi, \pi]$  и  $\|f * K\|_p \leq \|K\|_1 \cdot \|f\|_p$

*Примечание.* \* похоже на умножение, т.к.  $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$  и можно сделать вывод, что  $L^1$  — алгебра.

*Примечание.* Линейный оператор  $A : L^p \rightarrow L^p, f \mapsto f * K$ :

$$\forall f \quad \|Af\| \leq C \cdot \|f\|$$

Это значит, что оператор ограничен:  $\|A\| \leq C$ .

# Лекция 14

## 17 мая

*Обозначение.*  $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta] = E_\delta$

**Определение** (аппроксимативная единица).

- $D \subset \mathbb{R}$
- $h_0$  — предельная точка  $D$  в  $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций  $\{K_h\}_{h \in D}$ , удовлетворяющее нижеуказанным аксиомам, называется **аппроксимативной единицей**.

**Аксиома 1.**  $\forall h \in D \quad K_h \in L^1[-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

**Аксиома 2.**  $L_1$  нормы функций  $K_h$  ограничены в совокупности:

$$\exists M \quad \forall h \quad \int_{[-\pi, \pi]} |K_h| \leq M$$

**Аксиома 3.**  $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| dx \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

*Примечание.*

1. Если  $K_h \geq 0 \quad \forall h$ , то аксиома 1  $\Rightarrow$  аксиома 2.
2. Рассмотрим аксиому 3':  $K_h \in L^{+\infty}[-\pi, \pi]$  и  $\forall \delta \in (0, \pi) \quad \text{ess sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$

*Утверждение.* Аксиома 3'  $\Rightarrow$  аксиома 3.

*Определение.* Семейство функций, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3' называется **усиленной аппроксимативной единицей**.

3. Если  $K_h$  — (возможно усиленная) аппроксимативная единица, то  $\frac{|K_h|}{\|K_h\|_1}$  — тоже (возможно усиленная) аппроксимативная единица.

*Доказательство.* Первая аксиома очевидна.

Вторая аксиома следует из того, что  $\|K_h\|_1 \geq 1$ , т.к.  $\int K_h = 1$ . Аксиомы 3 и 3' тоже следуют из этого соображения.  $\square$

### Теорема 43.

- $K_h$  — аппроксимативная единица

Тогда:

1.  $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{[-\pi, \pi]} f$
2.  $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$
3.  $K$  — усиленная аппроксимативная единица,  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ ,  $f$  непрерывно в  $x$ .

Тогда  $f * K_h$  непрерывно в  $x$  и  $f * K_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f(x)$

*Доказательство.*

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt$$

1.  $\forall \varepsilon > 0, f$  — равномерно непрерывна, т.к.  $[-\pi, \pi]$  — компакт.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t : |t| < \delta \quad \forall x \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$M$  взято из аксиомы 2.

$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon?$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[\text{акс. 3}]{h \rightarrow h_0} 0$$

Тогда  $\exists V(h_0) \quad \forall h \in V(h_0) \quad I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

3.  $f \in L^1, K_h \in L^\infty \Rightarrow f * K_h$  — непрерывна (в том числе и в  $x$ ).

Для данного  $x$  проверим утверждение  $\varepsilon > 0; I_1 + I_2 < \varepsilon; \exists V(h_0) \forall h \in V(h_0)$

$f$  непрерывна в  $x$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t : |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Как в пункте 1:

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)| dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)| dt \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|) \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{\text{акс. 3'}} 0 \end{aligned}$$

Тогда  $\exists V(h_0) \forall h \in V(h_0) \quad I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

2.

$$\begin{aligned} \|f * K_h - f\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt \right| dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| dx dt = \\ &= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt \end{aligned}$$

, где  $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx$  — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$\stackrel{\text{def}}{=} \|K_h\|_1 \underbrace{\left( g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|_1} \right)}_{\rightarrow g(0)=0 \text{ по п.1}}(0)$$

□

*Примечание* (модификация пункта 2).  $f \in L^p[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$

*Доказательство.* Аналогично пункту 2, но хуже.

□

*Примечание* (модификация пункта 3).  $f \in L^1, \exists f(x-0), f(x+0)$ .  $K_h$  — усиленная аппроксимативная единица,  $\forall h \quad K_h$  чётная. Тогда  $(f * K_h)(x) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$

## 14 Суммирование рядов Фурье

### 14.1 Метод средних арифметических (Чезаро)

**Определение.**

$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \xrightarrow{\text{сред. арифм.}} S$$

, если  $\sigma_n \rightarrow S$

**Теорема 44** (о перманентности метода средних арифметических).

$$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n \xrightarrow{\text{сред. арифм.}} S$$

**Определение** (суммы Фейера).  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ ,  $S_n(f)$  — част. сумма ряда Фурье.

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$$

*Примечание.*

$$S_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt \xrightarrow{\Phi_n \text{ чётно}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt$$

*Пример.* Для расходящегося факта  $1 - 1 + 1 - 1 \dots$   $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{2}$

*Доказательство теоремы.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - S) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N_1+1}^n |S_k - S|}{n+1}}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

□

**Теорема 45** (Фейера).

1.  $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ . Тогда  $\sigma_n(f) \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f$
2.  $f \in L^p[-\pi, \pi], 1 \leq p \leq +\infty$ . Тогда  $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$
3.  $f \in L^1, f$  непрерывно в  $x$ . Тогда  $\sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

Не дописано