

# 1 Определения

## 1.1 Ступенчатая функция

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \left. f \right|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

## 1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Дано выше. (1.1, стр. 1)

## 1.3 ! Измеримая функция

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

$f$  **измерима** на множестве  $E$ , если  $\forall a \in \mathbb{R} \ E(f < a)$  измеримо, т.е.  $\in \mathfrak{A}$

## 1.4 Свойство, выполняющееся почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$  — высказывание  $(x \in X)$

$W(x)$  — верно **при почти всех**  $x$  из  $E$  = **почти всюду** на  $E$  = **почти везде** на  $E$  = **п.в.**  $E$ , если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$  и  $W(x)$  истинно при  $\forall x \in E \setminus e$

## 1.5 ! Сходимость почти везде

Если  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$  при п.в.  $x \in E$ , тогда говорят, что  $f_n$  **сходится на  $E$  почти везде**.

## 1.6 Сходимость по мере

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — почти везде конечны.

$f_n$  **сходится к  $f$  по мере  $\mu$** , обозначается  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

## 1.7 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $\mu X < +\infty$
- $f_n, f$  — почти везде конечно, измеримо
- $f_n \rightarrow f$  почти везде

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$$

*Proof.*

*Примечание.* Кажется, доказательство знать не нужно, т.к. нам его не давали.

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$E_{n,k} = \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

Т.к.  $f_n \rightarrow f$  почти везде:

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Т.к.  $\mu X < +\infty$ , то  $\mu$  непрерывно сверху, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu E_{n,k} = \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Тогда по определению предела  $\exists (n_k) :$

$$\mu E_{n_k,k} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Пусть  $e = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k,k}$ . По  $\sigma$ -аддитивности  $\mu$ :

$$\mu(e) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Кроме того,  $f_n \xrightarrow[X \setminus e]{} f$ .

□

## 1.8 Интеграл ступенчатой функции

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- $E_k$  — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d\mu(x) := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть  $0 \cdot \infty = 0$

## 1.9 ! Интеграл неотрицательной измеримой функции

- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

## 1.10 ! Суммируемая функция

Если оказалось, что  $\int_X f^+, \int_X f^-$  оба конечны, то  $f$  называется **суммируемой**.

## 1.11 Интеграл суммируемой функции

- $f$  измеримо
- $\int f^+$  или  $\int f^-$  конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

## 1.12 Образ меры при отображении

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ ,  $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть  $\Phi$  — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Упражнение 1. Проверить, что  $\Phi^{-1}$  —  $\sigma$ -алгебра.

Для  $E \in \mathfrak{B}$  положим  $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$ . Тогда  $\nu$  — мера:

$$\nu\left(\bigsqcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера  $\nu$  называется **образом**  $\mu$  при отображении  $\Phi$  и  $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

### 1.13 Взвешенный образ меры

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ , измеримо на  $X$ .

$$\forall B \in \mathfrak{B} \quad \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда  $\nu$  называется “**взвешенный образ меры**  $\mu$  при отображении  $\Phi$ ”,  $\omega$  называется **весом**.

### 1.14 Плотность одной меры по отношению к другой

Рассмотрим частный случай:  $X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \text{id}$  - тождественное отображение. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё  $\omega$ .

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации  $\omega$  называется **плотностью** меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$  и тогда по теореме [Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#):

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x) \omega(x) d\mu$$

### 1.15 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

- $M \subset \mathbb{R}^3$  — простое двумерное гладкое многообразие
- $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — параметризация  $M$ , т.е.  $\varphi(G) = M$

$E \subset M$  — **измеримо по Лебегу**, если  $\varphi^{-1}(E)$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$  по Лебегу.

Обозначение.  $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M : E \text{ изм.}\} = \{\varphi(A), A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

### 1.16 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении  $\varphi$ .

### 1.17 ! Поверхностный интеграл первого рода

- $M$  — простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$
- $\varphi$  — параметризация  $M$
- $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — суммируемо по мере  $S$  на  $M$

Тогда  $\iint_M f dS = \iint_M f(x, y, z) dS$  называется **интегралом первого рода** от  $f$  по многообразию  $M$ .

### 1.18 Произведение мер

- $\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- $\mu, \nu$   $\sigma$ -конечны

Пусть  $m$  — лебеговское продолжение меры  $m_0$  на  $\sigma$ -алгебру, которую будем обозначать  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ <sup>1</sup>

Обозначение.  $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$  — **произведение пространств с мерой**  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

### 1.19 ! Теорема Фубини

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f$  — суммируемо на  $X \times Y$

Тогда:

1.  $f_x$  — суммируема на  $Y$  при почти всех  $x$
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — суммируема на  $X$
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

### 1.20 Сторона поверхности

**Сторона поверхности** есть непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности.

Для поверхности  $M \subset \mathbb{R}^3$  сторона есть отображение

$$W : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall x \quad |W(x)| = 1, W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$$

---

<sup>1</sup>  $\otimes$  — не тензорное произведение

### 1.21 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

$u, v$  — касательные непараллельные вектора к  $M$ . Тогда  $(u, v)$  будем называть **касательным репером**. Нормаль в таком случае можно восстановить векторным произведением  $u \times v$ . После нормировки по полю реперов мы получаем поле единичных нормалей, т.е. сторону поверхности.

### 1.22 ! Интеграл II рода

- $M$  — простое двумерное гладкое многообразие
- $n_0$  — сторона  $M$
- $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  — непрерывное векторное поле

Тогда  $\int_M \langle F, n_0 \rangle dS$  — **интеграл II рода** векторного поля  $F$  по поверхности  $M$ .

### 1.23 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

- $M$  — поверхность в  $\mathbb{R}^3$
- $n_0$  — сторона
- $\gamma$  — контур (*петля*) в  $M$ , ориентированная
- $N_{\text{внутр.}}$  — вектор нормали, направленный внутрь петли

Говорят, что сторона поверхности  $n_0$  согласована с ориентацией  $\gamma$ , если:

$$(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$$

Т.е. если ориентация  $\gamma$  задаёт сторону  $n_0$ .

### 1.24 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Неравенство Гёльдера.

- $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E$  — измеримо
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$
- $f, g$  — измеримы

$$\text{Тогда } \int_E |fg| d\mu \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Proof.* Не будет, но общая идея следующая:

1. Для ступенчатых функций — из неравенства Гёльдера для сумм<sup>2</sup>
2. Для суммируемых функций — по теореме ! Теорема Леви.

□

Неравенство Минковского.

В тех же условиях  $(\int_E |f + g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_E |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_E |g|^p)^{\frac{1}{p}}$

*Proof.* Не будет, можно вывести аналогично выводу во втором семестре.

□

*Примечание.* Для  $p = 1$  тоже верно.

## 1.25 Интеграл комплекснозначной функции

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , т.е.  $x = f(x) = u(x) + iv(x)$ ,  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$

$f$  **измеримо**, если  $u$  и  $v$  измеримы<sup>3</sup>.

$f$  **суммируемо**, если  $u$  и  $v$  суммируемы.

Если  $f$  суммируемо, то  $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

## 1.26 ! Пространство $L^p(E, \mu)$

Определение пространства  $L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой.
- $E \subset X$  — измеримо.

$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \{f : \text{почти везде } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}^4), f - \text{изм.}^5, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$  — это линейное пространство по неравенству Минковского.

Зададим отношение эквивалентности  $\sim$  на  $\mathcal{L}^p(E, \mu)$ :  $f \sim g \Leftrightarrow f = g$  почти везде.

$\mathcal{L}^p / \sim = L^p(E, \mu)$  — линейное пространство.

Задаём норму на  $L^p$ :  $\|f\|_{L^p(E, \mu)} = (\int_E |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ , обозначается  $\|f\|_p$

<sup>2</sup> Мы его рассматривали во втором семестре.

<sup>3</sup> Или измеримы почти везде.

<sup>4</sup>  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

<sup>5</sup> Или измерима почти везде.

Эта функция корректно определена, т.к. для  $f \sim g : \|f\|_p = \|g\|_p$ . Кроме того, она является нормой, т.к.:

1.  $\|f\|_p \geq 0$  — очевидно, т.к.  $\int |f|^p \geq 0$
2.  $\|f\|_p = 0 \Rightarrow \int |f|^p = 0 \Rightarrow \int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$  п.в.  $\Rightarrow f \sim 0$ .
3.  $\|f \cdot \alpha\|_p = \left( \int |f \cdot \alpha|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \cdot \|f\|_p$
4.  $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$  по неравенству Минковского.

### 1.27 ! Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{почти везде } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}(\mathbb{C})}, \text{ изм., } \text{ess sup } |f| < +\infty\} / \sim$  — линейное пространство.

$$\|f\|_{L^\infty(E, \mu)} := \text{ess sup}_E |f| = \|f\|_\infty$$

### 1.28 ! Существенный супремум

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой.
- $E \subset X$  — измеримо.
- $f : \text{почти везде на } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо

**Определение** (существенный супремум<sup>6</sup>).

$$\text{ess sup}_{x \in E} f = \inf \{A \in \overline{\mathbb{R}}, f \leq A \text{ почти везде}\}$$

При этом  $A$  называется существенной вещественной границей.

*Свойства.*

- $\text{ess sup } f \leq \sup f$  — очевидно.
- $f \leq \text{ess sup } f$  почти везде — пусть  $B = \text{ess sup } f$ , тогда  $\forall n \ f \leq B + \frac{1}{n}$  почти везде.
- $f$  — суммируемо,  $f, g$  — почти везде  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}(\mathbb{C})}$ ,  $\text{ess sup}_E |g| < +\infty$ . Тогда  $|\int_E fg| \leq \text{ess sup } |g| \cdot \int_E |f|$

*Proof.*

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \text{ess sup } |g| \cdot |f| = \text{ess sup } |g| \cdot \int_E |f|$$

□

<sup>6</sup> Также называется истинным супремумом



## 1.29 ! Ротор, дивергенция векторного поля

**Ротор (вихрь)**

$$\operatorname{rot} V = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$V$  — гладкое векторное поле. Тогда **дивергенция**  $\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

## 1.30 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле  $A = (A_1, A_2, A_3)$  **соленоидально** в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , если  $\exists$  гладкое векторное поле  $B$  в  $\Omega$ , такое что  $A = \operatorname{rot} B$ .

## 1.31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

Наблюдение:

$$\operatorname{div} V(a) \stackrel{(?)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V dx dy dz \stackrel{(?)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, n_0 \rangle dS$$

— не зависит от координат.

$$\operatorname{rot} F(a) = \lim_{\Omega \rightarrow x_0} \frac{1}{S(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} A, n_0 \rangle dS$$

## 1.32 ! Гильбертово пространство

$\mathcal{H}$  — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при этом  $\mathcal{H}$  — полное, то оно называется **Гильбертовым**.

## 1.33 Ортогональный ряд

Ряд  $\sum a_k$  **ортогональный**, если  $\forall k, l \quad a_k \perp a_l$ .

## 1.34 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

**Сходящийся ряд:**  $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H}: S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$ , если  $\exists S \in \mathcal{H} : S_N \xrightarrow[\text{в } \mathcal{H}]{\quad} S$

## 1.35 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \subset \mathcal{H}$  — **ортогональное семейство**, если:

1.  $\forall k, l \quad e_k \perp e_l$
2.  $\forall k \quad e_k \neq 0$

Если потребовать  $\|e_k\| = 1$ , то такое семейство называется **ортонормированным**.

---

(?): по непрерывности  $\operatorname{div}$

(?): по формуле Стокса

### 1.36 ! Ортонормированная система

Дано выше. (1.35, стр. 9)

### 1.37 Коэффициенты Фурье

- $\{e_k\}$  — ортогональное семейство в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

$c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$  — называется **коэффициентом Фурье** по системе  $\{e_k\}$ .

$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$  — ряд Фурье вектора  $x$  по системе  $e_k$ .

### 1.38 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

Дано выше. (1.37, стр. 10)

### 1.39 Базис, полная, замкнутая ОС

**Определение.** Ортогональная система  $\{e_k\}$  — **базис**  $\mathcal{H}$ , если  $\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \sum c_k(x) e_k$

**Определение.** Ортогональная система **полная** (ничего добавить), если  $\nexists z \neq 0 : z \perp e_k \quad \forall k$ .

**Определение.** Ортогональная система **замкнутая**, если  $\forall x \quad \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

### 1.40 Тригонометрический ряд

- $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$  — **тригонометрический полином степени не выше  $n$** .
- $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$  — **тригонометрический ряд**, где  $a_k, b_k$  — коэффициенты тригонометрического ряда.

•

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

Тогда при подстановке этих формул в  $T_n(x)$  получается  $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  — **тригонометрический полином в комплексной записи**.

- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  — **тригонометрический ряд в комплексной записи**, понимается как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$ .

### 1.41 Коэффициенты Фурье функции

$f \in L^1[-\pi, \pi]$ .  $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ , заданные в лемме, называются **коэффициентами Фурье** функции  $f$ , а ряд  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  или  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  называется **рядом Фурье** этой функции.

### 1.42 Класс Липшица с константой $M$ и показателем альфа

**Определение.** Класс Липшица для  $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1]$ :

$$\text{Lip}_M^\alpha(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

### 1.43 Ядро Дирихле, ядро Фейера

1. Ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

2. Ядро Фейера:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

### 1.44 ! Свертка

$f, K \in L^1[-\pi, \pi]$ .  $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$  называется **сверткой** функций  $f, K$ .

### 1.45 ! Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- $h_0$  — предельная точка  $D$  в  $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций  $\{K_h\}_{h \in D}$ , удовлетворяющее нижеуказанным аксиомам, называется **аппроксимативной единицей**.

**Аксиома 1.**  $\forall h \in D \quad K_h \in L^1[-\pi, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

**Аксиома 2.**  $L_1$  нормы функций  $K_h$  ограничены в совокупности:

$$\exists M \quad \forall h \quad \int_{[-\pi, \pi]} |K_h| \leq M$$

**Аксиома 3.**  $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h| dx \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$$

### 1.46 Усиленная аппроксимативная единица

Рассмотрим аксиому 3':  $K_h \in L^{+\infty}[-\pi, \pi]$  и  $\forall \delta \in (0, \pi) \text{ ess sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$

*Утверждение.* Аксиома 3'  $\Rightarrow$  аксиома 3.

**Определение.** Семейство функций, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3' называется **усиленной аппроксимативной единицей**.

### 1.47 Метод суммирования средними арифметическими

$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

$$\sum a_n \xrightarrow{\text{сред. арифм.}} S$$

, если  $\sigma_n \rightarrow S$

### 1.48 Суммы Фейера

$f \in L^1[-\pi, \pi]$ ,  $S_n(f)$  — част. сумма ряда Фурье.

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$$

## 2 Теоремы

### 2.1 Лемма “о структуре компактного оператора”

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда  $\exists$  ортонормированные базисы  $g_1 \dots g_m$  и  $h_1 \dots h_m$ , а также  $\exists s_1 \dots s_m > 0$ , такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^m s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И  $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$ .

*Proof.*  $W := V^*V$  — самосопряженный оператор (матрица симметрична относительно диагонали).

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа:  $c_1 \dots c_m$  — вещественные (возможно с повторениями)
- Собственные векторы:  $g_1 \dots g_m$  — ортонормированные

*Примечание.* Пока мы в  $\mathbb{R}^m$  (а не в  $\mathbb{C}^m$ ), \* есть транспонирование. В комплексном случае ещё берётся сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \stackrel{(?)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \stackrel{(?)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- (?): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^m V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом,  $c_i > 0$ .

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \stackrel{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \stackrel{(?)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \stackrel{(?)}{=} \delta_{ij}$$

*Примечание.*  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

Таким образом,  $\{h_i\}$  ортонормирован.

$$V(x) \stackrel{\text{def } x}{=} V \left( \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i \right) \stackrel{(?)}{=} \sum_{i=1}^m \langle x, g_i \rangle V(g_i) \stackrel{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \stackrel{(?)}{=} \det(V^* V) \stackrel{\text{def } W}{=} \det W \stackrel{(?)}{=} c_1 \dots c_m$$

(?): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .

(?): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.

(?): т.к.  $g_i$  — собственный вектор для  $W$  с собственным значением  $c_i$ .

(?): при  $i \neq j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  в силу ортогональности, а при  $i = j$   $\langle g_i, g_j \rangle = 1$  в силу ортонормированности и  $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i} \sqrt{c_i}} = 1$

(?): в силу линейности  $V$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

## 2.2 ! Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

- $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение

Тогда  $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$  и  $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

*Proof.*

1. Если  $\det V = 0$   $\text{Im}(V)$  — подпространство в  $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\text{Im}(V)) = 0$  по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда  $\forall E \quad V(E) \subset \text{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если  $\det V \neq 0$   $\mu E := \lambda(V(E))$  — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E + a) = \lambda(V(E + a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

$\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$  по недоказанной теореме из прошлого семестра.

Мы хотим найти  $k$ , для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например  $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$  — единичный куб на векторах  $g_i$ .

По 2.1  $V(g_i) = s_i h_i$ . Таким образом,  $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\}$ .

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

Таким образом,  $k = |\det V|$

□

## 2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

$f_n$  — измеримо на  $X$ . Тогда:

1.  $\sup f_n, \inf f_n$  измеримо.
2.  $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$  измеримо.
3. Если  $\forall x \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$ , то  $h(x)$  измеримо.

(?): в силу мультипликативности  $\det$  и инвариантности относительно транспонирования.

(?): т.к.  $\det$  инвариантен по базису и в базисе собственных векторов  $\det W = c_1 \dots c_m$ .

*Proof.*

1.  $g = \sup f_n \quad X(g > a) \stackrel{??}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$  и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

(??):

- $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(g > a)$ , то  $g(x) > a$ .

$$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

- $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$ , т.к. если  $x \in X(f_n > a)$ , то  $f_n(x) > a$ , следовательно  $g(x) > a$ .
2.  $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$ . Т.к.  $\sup$  и  $\inf$  измерим,  $\overline{\lim} f_n$  тоже измерим.
3. Очевидно, т.к. если  $\exists \lim$ , то  $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

## 2.4 ! Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые:

1.  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2.  $\forall x \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

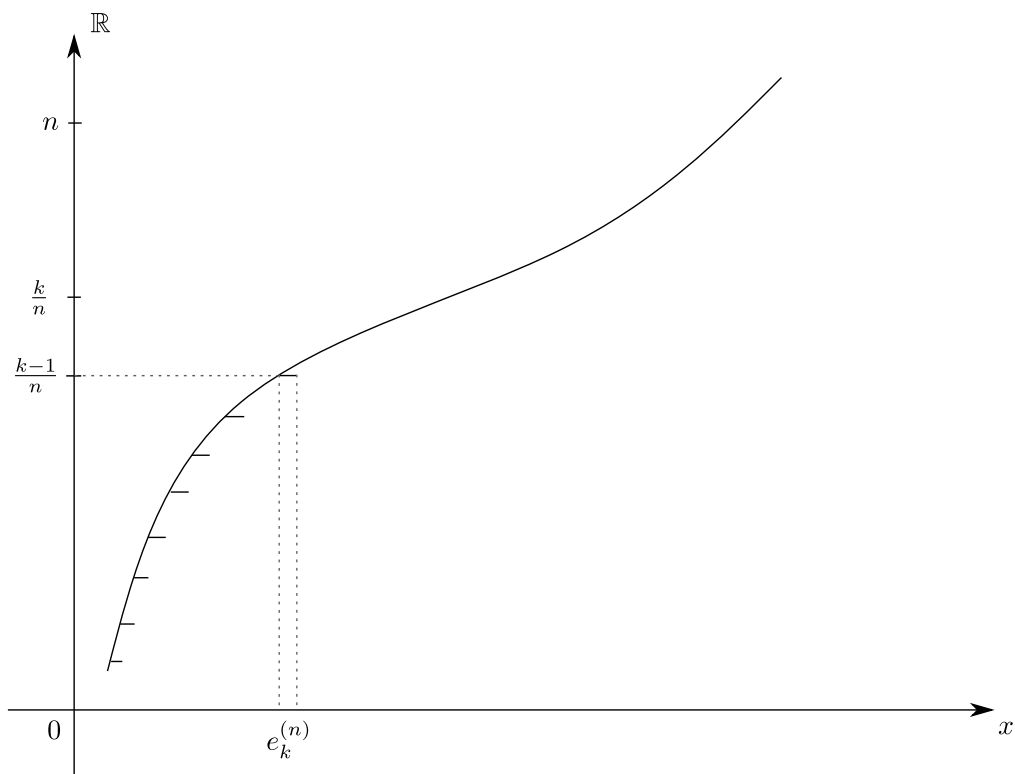
$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x) : \begin{cases} g_n(x) \leq f(x) \\ f(x) = +\infty : \forall n \ x \in e_{n^2+1}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n \\ f(x) < +\infty : |g_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$f_n = \max(g_1, \dots, g_n)$$

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Следствие 0.1.

- $f$  — измеримо

Тогда  $\exists f_n$  — ступенчатые :  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  всюду и  $|f_n| \leq |f|$

*Proof.* Рассмотрим срезки  $f^+, f^-$ , дальше очевидно. □

Следствие 0.2.

- $f, g$  — измеримо



Тогда  $fg$  — измеримо (пусть  $0 \cdot \infty = 0$ ).

*Proof.*

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \rightarrow g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \rightarrow fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела.  $\square$

*Следствие 0.3.*

- $f, g$  — измеримо

Тогда  $f + g$  измеримо.

*Примечание.* Считаем, что  $\forall x$  не может быть одновременно  $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$ .

*Proof.*

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

$\square$

## 2.5 Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры

*Примечание.*  $A \subset X$  — **полной меры**, если  $\mu(X \setminus A) = 0$ .

- $f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- $f$  — непрерывно на  $E' = E \setminus e$

Тогда  $f$  — измеримо.

*Proof.*  $f$  — измеримо на  $E'$ , т.к.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$  по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e, \lambda_m$  — полная в  $\mathbb{R}^m$ <sup>7</sup>  $\Rightarrow e(f < a)$  — измеримо в  $E$ .

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$ , объединение измеримых множеств измеримо.  $\square$

<sup>7</sup> Любое подмножество множества нулевой меры измеримо.

## 2.6 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $\mu X$  конечно
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \rightarrow f$  п.в.

Тогда  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

*Proof.* Переопределим  $f_n, f$  на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай:  $\forall x$  последовательность  $f_n(x)$  монотонно убывает к 0, то есть  $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$

$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \emptyset$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху,  $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Рассмотрим общий случай:  $f_n \rightarrow f$ ,  $\varphi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда  $\varphi_n \rightarrow 0$ ,  $\varphi_n \geq 0$  и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

□

## 2.7 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ .

Тогда  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

*Proof.*

$$\forall k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) \rightarrow 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \quad \mu X \left( |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \stackrel{(?)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X \left( |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \rightarrow 0$$

$$\mu E_k \rightarrow \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при  $x \notin E$   $f_{n_k} \rightarrow f$ .

$$x \notin E \quad \exists N \quad x \notin E_k \text{ при } k > N \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ .

Т.к.  $\mu E = 0$ , искомое выполнено. □

## 2.8 Простейшие свойства интеграла Лебега

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $E \subset X$  — измеримо,  $g, f$  — измеримо.

1. Монотонность  $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

*Proof.*

(а) При  $f, g \geq 0$  — очевидно из определения.

(б) При произвольных  $f, g$   $f^+ \leq g^+$  и  $f^- \geq g^-$  (очевидно из определения). Из предыдущего случая  $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$ . □

2.  $\int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$

3.  $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

*Proof.*

(а)  $f$  — ступ. Тривиально.

(б)  $f$  — измеримо,  $f \geq 0$ .  $\sup 0 = 0$ , поэтому искомое выполнено.

(с)  $\int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$  □

---

(?): по счётной полуаддитивности меры.

*Примечание.*  $f$  — измерима. Тогда  $f$  суммируема  $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

*Proof.*

$\Leftarrow$  следует из  $f^+, f^- \leq |f|$

$\Rightarrow$  будет доказано позже на этой лекции.

□

$$4. \int_E (-f) = - \int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$$

*Proof.*

(a)  $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$ , тогда искомое очевидно.

(b) Можно считать  $c > 0$  без потери общности, тогда для  $f \geq 0$  тривиально.

□

$$5. \exists \int_E f d\mu. \text{ Тогда } \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} -|f| &\leq f \leq |f| \\ - \int |f| &\leq \int f \leq \int |f| \\ \left| \int f \right| &\leq \int |f| \end{aligned}$$

□

$$6. \mu E < +\infty, a \leq f \leq b. \text{ Тогда}$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

*Следствие 0.4.*  $f$  — измеримо на  $E$ ,  $f$  — ограничено на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ . Тогда  $f$  суммируемо на  $E$

$$7. f \text{ суммируема на } E. \text{ Тогда } f \text{ почти везде конечна.}$$

*Proof.*

(a)  $f \geq 0$  и  $f = +\infty$  на  $A \subset E$ . Тогда  $\int_E f \geq n\mu A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

(b) В произвольном случае аналогично со срезками.

□

## 2.9 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

**Лемма 1.**

- $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  — измеримо
- $g$  — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{(?)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu \end{aligned}$$

□

**Теорема 1.**

- $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо на  $A$
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

*Proof.* Докажем, что части равенства  $\leq$  и  $\geq$ , тогда равенство выполнено.

$\leq$   $\triangleleft$  ступенчатую  $g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \stackrel{(?)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

---

(?): переставлять можно, т.к. члены суммы  $\geq 0$ .

$$\int_A f d = \sup_g \int_A g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$$\geq \quad 1. \quad A = A_1 \sqcup A_2$$

$\triangleleft$  ступенчатые  $g_1, g_2 : 0 \leq g_1 \leq f \cdot \chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2}$ . Пусть  $E_k$  — совместное разбиение, у  $g_1$  коэффициенты  $\alpha_k$ , у  $g_2$  —  $\beta_k$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq g_1 + g_2 &\leq f \cdot \chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 &= \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\stackrel{(?)}{\leq} \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\stackrel{(?)}{\leq} \int_A f \end{aligned}$$

2. Для  $n \in \mathbb{N} : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  тривиально по индукции.

3.  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$\int_{B_n} f \geq 0$ , т.к.  $f \geq 0$ . Таким образом:

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

**Следствие 1.1** (Счётная аддитивность интеграла).  $f$  суммируема на  $A = \bigsqcup A_i$  — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

*Proof.* Очевидно, если рассмотреть срезки.

□

(?): по лемме 1.

(?) и (?): переход к  $\sup$

## 2.10 ! Теорема Леви

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n$  измеримо
- $\forall n \ 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  почти везде.
- $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

*Примечание.*  $f$  задано везде, кроме множества  $e$  меры 0. Считаем, что  $f = 0$  на  $e$ . Тогда  $f$  измеримо на  $X$ .

*Proof.*

$\leq$  очевидно, т.к.  $f_n \leq f$  почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_0 = \int_{X \setminus e} f_n \leq \int_{X \setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$  достаточно проверить, что  $\forall$  ступенчатой  $g : 0 \leq g \leq f$  выполняется следующее  
 $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что  $\forall c \in (0, 1) \ \lim \int_X f_n \geq c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\bigcup E_n = X, \text{ т.к. } c < 1$$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c \int_{E_n} g$$

$$\text{Тогда } \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \stackrel{??}{=} c \int_X g$$

□

## 2.11 Линейность интеграла Лебега

- $f, g \geq 0$
- $f, g$  измеримо на  $E$

$$\text{Тогда } \int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

---

(??): по непрерывности снизу меры  $\nu : E \mapsto \int_E g$

*Proof.*

1.  $f, g$  — ступенчатые, т.е.  $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f + g = \sum (\alpha_k + \beta_k) \mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2.  $f \geq 0$ , измеримо.  $\exists$  ступ.  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \lim f_n = f$

$$g \geq 0, \text{ измеримо. } \exists \text{ ступ. } g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \lim g_n = g$$

$$\begin{aligned} f_n + g_n &\rightarrow f + g \\ \int_E f + \int_E g &\xleftarrow{\text{т. Леви}} \int_E f_n + \int_E g_n \xrightarrow{\text{пункт 1}} \int_E f_n + g_n \xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.2.**  $f, g$  суммируемы на  $E$ . Тогда  $f + g$  суммируемо и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ . Таким образом, доказано 3.

**Доказательство суммируемости.**  $|f + g| \leq |f| + |g|$ . Пусть  $h = f + g$ . Тогда

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^- \\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^- \\ \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \end{aligned}$$

□

## 2.12 Теорема об интегрировании положительных рядов. Следствие о рядах, сходящихся почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$  почти везде
- $u_n$  измеримо



Тогда

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

*Proof.* По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

$$S_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k, \text{ тогда } \int_E S_n \rightarrow \int_E S$$

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \int_E S \leftarrow \int_E S_n \xrightarrow{\text{линейность } \int} \sum_{k=1}^n \int_E u_k$$

□

**Следствие 1.3.**  $u_n$  измеримо и  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда ряд  $\sum u_n(x)$  абсолютно сходится при почти всех  $x$ .

*Proof.*

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

## 2.13 Абсолютная непрерывность интеграла

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f$  суммируемо

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall E - \text{изм.}, \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

*Proof.* <sup>8</sup>

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu \left( \bigcap X_n \right) \stackrel{??}{=} 0$$

---

<sup>8</sup> Теоремы, не следствия

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Пусть  $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ . Тогда при  $\mu E < \delta$ :

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \stackrel{??}{\leq} \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{< \delta} \cdot n_\varepsilon < \varepsilon$$

□

Следствие 1.4.  $f$  суммируемо на  $X$ ,  $E_n \subset X$ , тогда  $\mu E_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \rightarrow 0$

## 2.14 ! Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:
  1.  $\forall n \ |f_n| \stackrel{??}{\leq} g$  почти везде
  2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда:  $f_n, f$  — суммируемы и  $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , и тем более  $\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

*Proof.*  $f_n$  — суммируемы в силу неравенства (??),  $f$  суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более  $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$

1.  $\mu X < +\infty$

Зафиксируем  $\varepsilon$ .  $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

$f_n \Rightarrow f$ , т.е.  $\mu X_n \rightarrow 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \quad (2)$$

(?): Т.к.  $f$  на  $\bigcap X_n$  бесконечна и  $f$  почти везде конечна.

(1): По непрерывности сверху меры  $A \mapsto \int_A |f| d\mu$

(?): Т.к.  $|f|$  на  $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$  не превосходит  $n_\varepsilon$  по построению  $X_{n_\varepsilon}$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \text{сл. т. об абс. непр.}}} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X \xrightarrow{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \text{сл. т. об абс. непр.}}} 0$$

2.  $\mu X = +\infty$

Утверждение:  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \subset X$ , изм., конечной меры :  $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$ . Докажем его.

$$\int_X g = \sup \left\{ \int g_n \mid 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\}$$

Возьмём достаточно большое  $n$  и положим:

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon$$

$$\int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g = \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon \implies \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Вернёмся к теореме. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ :

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{< 2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

## 2.15 ! Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f$  — измеримо
- $f_n \xrightarrow{(?)} f$  почти везде
- $\exists g$ , называемое “суммируемая мажоранта”:
  1.  $\forall n \ |f_n| \leq g$  почти везде
  2.  $g$  — суммируемо на  $X$

Тогда  $f_n, f$  — суммируемы,  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ , и тем более  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$

*Proof.* Суммируемость  $f_n, f$ , а также утверждение “и тем более” доказываются так же, как в теореме ! Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$

$$0 \stackrel{(?)}{\leq} h_n \stackrel{(?)}{\leq} 2g$$

$h_n$  монотонно убывает, что очевидно по определению  $\sup$ .

$$\lim h_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \stackrel{(?)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \geq 0$  и возрастает как последовательность функций,  $2g - h_n \rightarrow 2g$  почти везде. Тогда по теореме ! Теорема Леви:

$$\int_X 2g - h_n \rightarrow \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

□

## 2.16 Теорема Фату. Следствия

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- $f_n$  измеримо
- $f_n \rightarrow f$  почти везде
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \leq C$

Тогда  $\int_X f \leq C$

*Proof.*

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}$$

$$\lim g_n \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.}$$

---

(?): по построению

(?): по (2)

(?): по ( ? )

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \quad (3)$$

$$\int_X g_n \xrightarrow{??} \int_X f$$

Значит  $\int_X f \leq C$  по предельному переходу в (3) □

*Следствие 1.5.*

- $f_n, f \geq 0$
- $f_n, f$  измеримы
- $f_n, f$  почти везде конечны
- $f_n \xrightarrow{\mu} f$
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \int_X f_n \leq C$

Тогда  $\int_X f \leq C$

*Proof.*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \xRightarrow[\text{Т. Рисса}]{} \exists(n_k) : f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$$

По теореме [Теорема Фату. Следствия](#) получим искомое. □

*Следствие 1.6.*

- $f_n \geq 0$
- $f_n$  измеримо

Тогда  $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

*Proof.* Возьмём  $g_n$  как в теореме, тогда выполняется неравенство  $\int_X g_n \leq \int_X f_n$ . Выберем  $(n_k) : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{array}{c} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \\ \downarrow \\ \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n \end{array}$$

□

---

(??): по теореме ! [Теорема Леви](#)

## 2.17 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Наблюдение 1.  $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримо относительно  $\mathfrak{B}$ . Тогда  $f \circ \Phi$  — измеримо относительно  $\mathfrak{A}$ .

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространство с мерой
- $\Phi : X \rightarrow Y$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$  измеримо на  $X$
- $\nu$  взвешенный образ  $\mu$  при отображении  $\Phi$  с весом  $\omega$

Тогда  $\forall$  измеримой относительно  $\mathfrak{B}$   $f$  на  $Y$ ,  $f \geq 0$  выполнено следующее:

1.  $f \circ \Phi$  измеримо на  $X$  относительно  $\mathfrak{A}$
- 2.

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \quad (4)$$

То же самое верно для суммируемой  $f$ .

*Proof.* Измеримость  $f \circ \Phi$  выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть  $f = \chi_B$ ,  $B \in \mathfrak{B}$

$$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

Тогда (4) это:

$$\int_Y \chi_B d\nu = \int_B 1 \cdot d\nu = \nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

Это выполнено по определению  $\nu B$

1. Пусть  $f$  — ступенчатая

(4) следует из линейности интеграла.

2. Пусть  $f \geq 0$ , измеримая

По теореме ! **Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия** и теореме ! **Теорема Леви**  $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$  — ступенчатые,  $h_i \leq f$ ,  $h_i \rightarrow f$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} (4)$$

3. Пусть  $f$  измерима.

Тогда для  $|f|$  выполнено (4);  $|f|$  и  $|f \circ \Phi| \cdot \omega$  суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_- = f_- \circ \Phi \cdot \omega$$

Таким образом, искомое выполнено для  $f_+$  и  $f_-$ , а следовательно и для  $f$ .

□

*Следствие 1.7* (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- $f$  суммируемо на  $Y$

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

*Proof.* В условие теоремы подставим  $f \cdot \chi_B$

□

## 2.18 Критерий плотности

- $X, \mathfrak{A}, \mu$  — пространство с мерой
- $\nu$  — мера
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- $\omega$  измеримо

Тогда  $\omega$  — плотность  $\nu$  относительно  $\mu \Leftrightarrow$ :

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом  $0 \cdot \infty$  считается  $= 0$ .

*Доказательство теоремы Критерий плотности.*

“ $\Rightarrow$ ”

$$\begin{aligned} \nu(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega(x) d\mu(x) \\ \inf \omega \cdot \mu A &= \int_A \inf \omega d\mu \leq \int_A \omega(x) d\mu(x) \leq \int_A \sup \omega d\mu = \sup \omega \cdot \mu A \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ ” Рассмотрим  $\omega > 0$ . Общность не умаляется, т.к. пусть  $e = X(\omega = 0)$ , тогда  $\nu(e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$ , поэтому в случае  $A \cap e \neq \emptyset$  всё ещё только лучше.

Фиксируем число  $q \in (0, 1)$ .

$$A_j := A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(?)}{\leq} \nu A_j \stackrel{(?)}{\leq} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(?)}{\leq} \int_{A_j} \omega d\mu \stackrel{(?)}{\leq} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &= q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(?)}{\leq} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

Тогда предельный переход при  $q \rightarrow 1 - 0$  дает искомое.

□

---

(?): по ( ? )

(?): по ( ? )

(?): по ( ? )

(?): по ( ? )



## 2.19 Лемма о единственности плотности

- $f, g$  суммируемы
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда  $f = g$  почти везде.

*Proof.*  $h := f - g$ . Дано:  $\forall A \quad \int_A h = 0$ ; доказать:  $h = 0$  почти везде.

$$\begin{aligned} A_+ &:= X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_- \\ \int_{A_+} |h| &= \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.} \end{aligned}$$

□

## 2.20 Лемма об оценке мер образов малых кубов

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $O$  открыто
- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда  $\exists \delta > 0 \quad \forall$  куба  $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$  выполняется неравенство  $\lambda \Phi(Q) < c \lambda Q$

*Примечание.* Здесь можно считать, что  $Q$  — замкнутые кубы.

*Proof.*  $L := \Phi'(a)$  — обратимо<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a) \\ \underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} &= x + o^{10}(x - a) \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^{11}}(a) \quad \forall x \in B_\varepsilon(a) \quad |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$$

Пусть  $Q \subset B_\varepsilon(a), a \in Q, Q$  — куб со стороной  $h$ .

<sup>9</sup> Т.к.  $\det \Phi'(a) \neq 0$ .

<sup>10</sup> Это не то же самое  $o$ , что строчкой выше.

<sup>11</sup> Это не радиус шара, а параметр.

При  $x \in Q$ :

$$|x - a| \leq \sqrt{m}h^{12}$$

$$|\Psi(x) - x| \stackrel{??}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a| \leq \varepsilon h$$

Тогда  $\Psi(Q) \subset$  куб со стороной  $(1 + 2\varepsilon)h$ , т.к. при  $x, y \in Q$

$$\begin{aligned} |\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\leq |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\leq |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\leq (1 + 2\varepsilon)h \end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

$\Psi$  и  $\Phi$  отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1 + 2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем  $\varepsilon$  такое, чтобы  $|\det L|(1 + 2\varepsilon)^m < c$ , потом берём  $\delta = \text{радиус } B_\varepsilon(a)$  □

## 2.21 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

**Лемма 2.**

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $O$  открыто
- $f$  непрерывна
- $A$  измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- $Q$  — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр.} \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi$  диффеоморфизм

---

<sup>12</sup>Это диагональ куба со стороной  $h$  в  $\mathbb{R}^m$ .

(??): т.к.  $x \in B_\varepsilon(a)$

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

*Proof.*

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$  — мера

Надо доказать, что  $J_\Phi$  — плотность  $\nu$  относительно  $\lambda$ .

Достаточно проверить условие теоремы **Критерий плотности**, что  $\forall$  измеримого  $A$ :

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \stackrel{??}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для  $\Phi(A)$  и отображения  $\Phi^{-1}$

$$\begin{aligned} \inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) &\leq \lambda A \\ \lambda\Phi(A) &\leq \lambda A \cdot \frac{1}{\inf \frac{1}{|\det \Phi'|}} \\ \lambda\Phi(A) &\leq \lambda A \cdot \sup |\det \Phi'| \end{aligned}$$

1. Проверяем (??) для случая  $A$  — кубическая ячейка,  $A \subset \bar{A} \subset O$

От противного:  $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

Возьмём  $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$ .

Запускаем половинное деление: режем  $Q$  на  $2^m$  более мелких кубических ячеек. Выберем “мелкую” ячейку  $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$ . Опять делим на  $2^m$  частей, берём  $Q_2 : \lambda Q_2 < \nu Q_2$  и т.д.

$$a \in \bigcap \bar{Q}_i$$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \quad \forall n \quad C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \quad (5)$$

$C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\bar{Q}} J_\Phi$ , в частности  $c > |\det \Phi'(a)|$ . Мы получили противоречие с леммой **Лемма об оценке мер образов малых кубов**: в сколько угодно малой окрестности  $a$  имеются кубы  $\bar{Q}_n$ , где выполнено (5)

2. Проверяем (??) для случая  $A$  открыто.

Это очевидно, т.к.  $A = \bigsqcup Q_j$ ,  $Q_j$  — кубическая ячейка,  $Q_j \subset \overline{Q_j} \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \lambda Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \cdot \sum \lambda Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \quad (6)$$

3. По лемме 2 неравенство (??) выполнено для всех измеримых  $A$ :

$$O = \bigsqcup Q_j \text{ — кубы } Q_j \subset \overline{Q_j} \subset O, A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_G (\sup_G J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} J_\Phi \cdot \lambda A_j$$

Аналогично формуле (6) получаем  $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

## 2.22 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi$  - диффеоморфизм

Тогда  $\forall$  измеримой  $f \geq 0$ , заданной на  $O' = \Phi(O)$ :

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой  $f$ .

*Proof.* Применяем теорему [Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры](#) при  $X = Y = \mathbb{R}^m$ ,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m$ ,  $\mu = \lambda$ ,  $\nu(A) = \lambda(\Phi(A))$ :

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 2.21  $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} J_\Phi d\lambda$ , т.е.  $\lambda$  — взвешенный образ исходной меры по отношению к  $\Phi$ . □

## 2.23 Теорема о произведении мер

1.  $m_0$  — мера на  $\mathcal{P}$
2.  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны  $\Rightarrow m_0$  тоже  $\sigma$ -конечно<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Т.е. пространство можно представить в виде счётного объединения множеств конечной меры.

*Proof.*

1. Проверим счётную аддитивность  $m_0$ , т.е.  $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k$ <sup>14</sup>, если  $A \times B = P = \bigsqcup P_k$ , где  $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что  $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ .

Тогда  $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$ , где  $\forall x \in X, y \in Y \quad \chi_A(x) \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$

Слева измеримая функция, справа — неотрицательный ряд  $\Rightarrow$  можем интегрировать.

Проинтегрируем по  $y$  по мере  $\nu$  по пространству  $Y$ :

$$\chi_A(x) \nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

Проинтегрируем по  $x$  по мере  $\mu$  по пространству  $X$ :

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

- $\mu$   $\sigma$ -конечно  $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k$  — конечно  $\forall k$
- $\nu$   $\sigma$ -конечно  $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n$  — конечно  $\forall n$

Тогда  $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$ . Конечное произведение конечных конечно, поэтому  $m_0$   $\sigma$ -конечно.

□

## 2.24 Принцип Кавальери

<sup>15</sup>

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны.
- $\mu, \nu$  — полные.
- $m = \mu \times \nu$
- $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

<sup>14</sup>Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

<sup>15</sup>Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

Тогда:

1.  $C_x \in \mathfrak{B}$  при почти всех  $x$
2.  $x \mapsto \nu(C_x)$  — измеримая<sup>16</sup> функция на  $X$
3.  $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для  $C^y$ .

*Proof.* Пусть  $\mathfrak{D}$  — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1.  $C = A \times B$ , где  $A$  и  $B$  измеримы в соответствующих пространствах  $\Rightarrow C \in \mathfrak{D}$ , так как:

$$(a) C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases} \quad \text{и оба случая очевидно} \in \mathfrak{B}$$

$$(b) x \mapsto \nu(C_x) — \text{функция } \nu B \cdot \chi_A$$

$$(c) \int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2.  $E_i \in \mathfrak{D}$ , дизъюнкты  $\stackrel{?}{\Rightarrow} \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$ . Обозначим  $E = \bigsqcup E_i$

$E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x$  измеримы почти везде  $\Rightarrow$  при почти всех  $x$  все  $(E_i)_x$  измеримы.

Тогда при этих  $x$   $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$  по определению  $\sigma$ -алгебры — это 1.

$$\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow \text{Функция } x \mapsto \nu E_x \text{ измерима — это 2.}$$

$$\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)_x = \sum_i mE_i = mE — \text{это 3.}$$

3.  $E_i \in \mathfrak{D}$ ,  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_i E_i$ ,  $\mu E_i < +\infty$ . Тогда  $E \in \mathfrak{D}$ .

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x — \text{конечно при почти всех } x.$$

$$\forall x \text{ верно } (E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$$

Тогда  $E_x$  измеримо п.в. (это 1.) и  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$  при п.в.  $x$  — непрерывность сверху  $\nu$ .

Таким образом,  $x \mapsto \nu E_x$  измерима — это 2.

$$\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE — \text{это 3.}$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла  $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_i)_x$  суммируемо.

---

<sup>16</sup>Функция задана при почти всех  $X$ ; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду.

Итого: Если  $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ , то  $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$ . Строго говоря, мы это не доказали, т.к. ещё нужно упомянуть процесс дизъюнктивизации в полукольце и то, что пересечение множеств лежит в полукольце, следовательно любое пересечение можно свести к тому, которое мы рассматривали.

4.  $E \subset X \times Y, mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

$mE = \inf \{ \sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P} \}$  — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$\exists$  множество  $H$  вида  $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$ , т.е. пересечение аппроксимаций. По пункту 3  $H \in \mathfrak{D}$ . При этом  $E \subset H, mH = mE = 0$ .

$$0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ про почти всех } x.$$

$E_x \subset H_x, \nu$  — полная  $\Rightarrow E_x$  — измеримо при почти всех  $x$  — это 1 и  $\nu E_x = 0$  почти везде, это 2.

$$\int \nu E_x d\mu = 0 = mE \text{ — это 3.}$$

5.  $C$  —  $m$ -измеримо,  $mC < +\infty$ . Тогда  $C \in \mathfrak{D}$ .

$C = H \setminus e$ , где  $H$  имеет вид  $\bigcap \bigcup P_{kl}, me = 0$ . Почему? Из предыдущих соображений  $C \subset H$ , а нулевая мера  $H \setminus C$  следует из того, что мера  $C$  конечна. **Как оно следует?**

$$mC = mH - 0 = mH$$

(a)  $C_x = H_x \setminus e_x$  — оба “слагаемых” измеримы при почти всех  $x$ , т.к.  $H_x$  по третьему пункту  $\in \mathfrak{B}$ , а  $e_x$  измеримы по полноте  $\nu$ . В силу замкнутости по вычитанию  $C_x \in \mathfrak{B}$  п.в.

(b)  $\nu e_x = 0$  при почти всех  $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu e_x = \nu H_x$  п.в.  $\Rightarrow$  измеримо.

$$(c) \int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$$

6.  $C$  — произвольное измеримое множество в  $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

$X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$  по полноте обеих мер.

$C = \bigsqcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{m(\dots) < +\infty}$ , тогда по пункту 5 все элементы объединения  $\in \mathfrak{D}$  и по пункту 2 объединение лежит в  $\mathfrak{D}$ .

□

**Следствие 1.8.**  $C$  измеримо в  $X \times Y$ . Пусть  $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \emptyset\}$  — проекция  $C$  на  $X$ .

Если  $P_1(C)$  измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Аналогично для проекции на  $y$ .

*Proof.* При  $x \notin P_1(C)$   $\nu(C_x) = 0$

□

## 2.25 Теорема Тонелли

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- $f$  измеримо относительно  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. При почти всех  $x$   $f_x$  измерима на  $Y$ .
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — измерима<sup>17</sup> на  $X$
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Аналогичные утверждения верны, если поменять местами  $X$  и  $Y$ :

1.  $f^y$  измеримо на  $X$  почти везде.
2.  $y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$  — измерима<sup>18</sup> на  $Y$
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi d\nu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

*Proof.*

1.  $f = \chi_{C_x}, C \subset X \times Y$ , измеримо. Тогда  $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$

$C_x$  измеримо при почти всех  $x$  по [Принцип Кавальери](#)  $\Rightarrow f_x$  измеримо при почти всех  $x$

$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$  — измеримая<sup>19</sup> функция по [Принцип Кавальери](#)

---

<sup>17</sup>почти везде

<sup>18</sup>почти везде

<sup>19</sup>почти везде



$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{(?)}{=} mC = \int_{X \times Y} f dm$$

2.  $f$  — ступенчатая,  $f \geq 0$ ,  $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{C_k}$ ,  $f_x = \sum \alpha_k \chi_{(C_k)_x}$  — измеримо почти везде.

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x \text{ — измерима}^{20}$$

$$\int_X \varphi(x) = \sum \int_X \alpha_k \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3.  $f \geq 0$ , измеримо.

$$f = \lim g_n, g_n \uparrow f, g_n \geq 0, \text{ ступенчатые}$$

$$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x \text{ — измеримо на } y \text{ по теореме об измеримости пределов.}$$

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \stackrel{(?)}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)} \Rightarrow \varphi \text{ — измерима}^{21}$$

$\varphi_n(x)$  измерима почти везде по пункту 2, поэтому  $\varphi$  измерима почти везде.

$$\int_X \varphi(x) \stackrel{(?)}{=} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X \times Y} g_n \stackrel{(?)}{=} \int_{X \times Y} f dm$$

□

## 2.26 Формула для Бета-функции

$$B(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx, \quad s, t > 0.$$

$$\text{Тогда } B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \text{ где } \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} e^{-x} e^{-y} dy \right) dx \end{aligned}$$

(?): по [Принцип Кавальери](#)

<sup>20</sup> почти везде

(?), (?), (?): по теореме [! Теорема Леви](#)

$$\begin{aligned}
y &:= u - x \\
&= \int_0^{+\infty} \left( \int_x^{+\infty} x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx \\
&= \int \dots d\lambda_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du \\
x &:= u \cdot v \\
&= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 (uv)^{s-1} (u-uv)^{t-1} e^{-u} \cdot u dv \right) du \\
&= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left( \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du \\
&= B(s, t) \Gamma(s+t)
\end{aligned}$$

□

## 2.27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$\alpha_m := \lambda_m(B(0, 1))$ ,  $\lambda_m(B(0, r)) = r^m \cdot \alpha_m$  — получается заменой координат.

$$\begin{aligned}
B(0, 1) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1 \right\} \\
B(0, 1)_{x_m} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \leq 1 - x_m^2 \right\} \\
\alpha_m &= \int_{-1}^1 \lambda_{m-1} \left( B \left( 0, \sqrt{1-y^2} \right) \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \alpha_{m-1} (1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\
&= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= B \left( \frac{m+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \alpha_{m-1} \\
&= \frac{\Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m+2}{2} \right)} \alpha_{m-1} \\
\alpha_m &= \frac{\Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m+2}{2} \right)} \cdot \frac{\Gamma \left( \frac{m}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right)} \cdots \frac{\Gamma \left( \frac{3}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{4}{2} \right)} \underbrace{\alpha_1}_{=2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)^{m-1}} \cdot 2 \\
&= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}
\end{aligned}$$

В случае  $m = 3$   $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$

*Примечание.*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr \\
&= \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Переход в полярные координаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-1} \\
x_m &= r \sin \varphi_1 \dots \cos \varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m \\
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \dots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \cdot r^{m-1} \cdot \sin^{m-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \\
&\stackrel{\text{по (7)}}{=} 2\pi \frac{R^m}{m} \prod_{k=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \pi \frac{R^m}{m} \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2} + 1\right)}$$

$$\stackrel{(?)}{=} \frac{\pi^{\frac{m}{2}} R^m}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2} + 1\right)}$$

$$\int_0^\pi \sin^k \alpha d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[ \begin{array}{l} t = \sin^2 \alpha \\ dt = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{array} \right] = B\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (7)$$

## 2.28 Формула Грина

- $D \subset \mathbb{R}^2$  — компактное, связное, односвязное<sup>22</sup>, ограниченное множество.
- $D$  ограничено кусочно-гладкой кривой  $\partial D$
- $(P, Q)$  — гладкое векторное поле в окрестности  $D$

Пусть  $\partial D$  ориентирована согласованно с ориентацией  $D$  (*против часовой стрелки*) — обозначим  $\partial D^+$ . Тогда:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + Q dy$$

*Proof.* Ограничимся случаем  $D$  — “криволинейный четырёхугольник”.

$\partial D$  состоит из путей  $\gamma_1 \dots \gamma_4$ , где  $\gamma_2$  и  $\gamma_4$  — вертикальные отрезки<sup>23</sup>,  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  — гладкие кривые — можно считать, что это графики функций  $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$ .

Аналогично можно описать  $\partial D$  по отрезкам, параллельным оси  $OY$ .

Проверим, что  $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D^+} P dx + 0 dy$

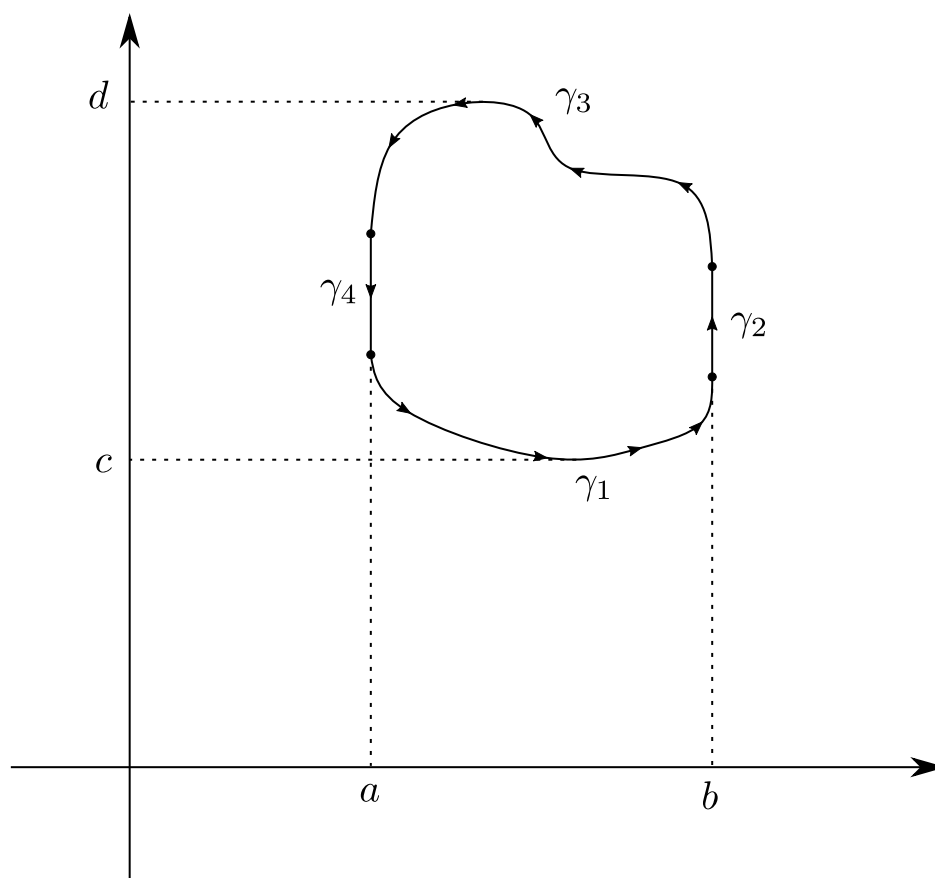
$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx \end{aligned}$$

---

Мы потеряли двойку в (?).

<sup>22</sup>Любая петля стягиваема

<sup>23</sup>Возможно, вырожденные

Figure 1: Криволинейный четырёхугольник с  $\partial D$ 

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D^+} Pdx + 0dy &= \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_0 + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_0 \\
 &= \int_a^b P(x, \gamma_1(x))dx - \int_a^b P(x, \gamma_3(x))dx
 \end{aligned}$$

Таким образом, искомое доказано. □

## 2.29 ! Формула Стокса

- $\Omega$  — простое гладкое двумерное многообразие в  $\mathbb{R}^3$  (двустороннее)
- $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — параметризация  $\Omega$
- $L^+$  — граница  $G$
- $n_0$  — сторона  $\Omega$
- $\partial\Omega$  — кусочно-гладкая кривая

- $\partial\Omega^+$  — кривая с согласованной ориентацией
- $(P, Q, R)$  — гладкое векторное поле в окрестности  $\Omega$

Тогда:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

*Proof.* Ограничимся случаем  $\Omega \in C^2$ , т.е. параметризация  $\Omega$  дважды гладко дифференцируема.

Достаточно показать, что:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Пусть  $\Phi = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Запараметризуем  $L^+$  как  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (u(t), v(t))$ . Тогда  $\Phi \circ \gamma$  — параметризация  $\partial\Omega^+$ . Тогда  $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_{L^+} P \left( \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) dt \\ &= \int_{L^+} P \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ &\stackrel{(?)}{=} \iint_G \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv \\ &\stackrel{(?)}{=} \iint_G (\cancel{P'_x x'_u} + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v + \cancel{P'_x x''_{uv}} - (\cancel{P'_x x'_v} + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u - \cancel{P'_x x''_{vu}} dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} (z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \end{aligned}$$

□

## 2.30 ! Формула Гаусса–Остроградского

- $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$
- $G$  — компакт

---

(?): по [Формула Грина](#)

(?): это дифференцирование произведения

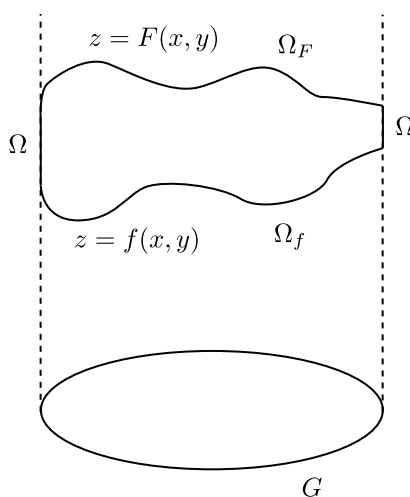
- $\partial G$  — кусочно-гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- $R$  : окрестность  $V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} R dx dy = \iint_{\partial V} 0 dy dz + 0 dz dx + R dx dy$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_G R(x, y, F(x, y)) dx dy - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z) dx dy \stackrel{(?)}{+} \iint_{\Omega_f} R dx dy + \underbrace{\iint_{\Omega} R dx dy}_0 \\ &= \iint_{\partial V} R dx dy \end{aligned}$$



□

**Следствие 1.9** (обобщенная формула Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

(?): “-” спрятан в нормали, направленной вниз.

### 2.31 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

- $\Omega$  — открытый параллелепипед
- $A$  — векторное поле в  $\Omega$
- $A \in C^1$

Тогда  $A$  — соленоидально  $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$

*Proof.*

$\Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} B \equiv 0$ , что всегда выполнено.

$\Leftarrow$  Дано:

$$A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0 \quad (8)$$

Найдём векторный потенциал  $B = (B_1, B_2, B_3)$ , где  $A = \operatorname{rot} B$ .

Пусть  $B_3 \equiv 0$ .

$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

$$-B'_{2z} = A_1 \quad (9)$$

$$-B'_{1z} = A_2 \quad (10)$$

$$B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \quad (11)$$

$$(10) \quad B_1 = \int_{z_0}^z A_2 dz$$

$$(9) \quad B_2 = - \int_{z_0}^z A_1 dz + \varphi(x, y)$$

$$(11) \quad A_3 = - \int_{z_0}^z A'_{1x} dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^z A'_{2y} dz$$

По (8):

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z A'_{3z} + \varphi'_x &= A_3 \\ A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x &= A_3(x, y, z) \end{aligned}$$



$$\varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдём  $\varphi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z_0) dx$

□

### 2.32 Теорема о вложении пространств $L^p$

- $\mu E < +\infty$
- $1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1.  $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2.  $\|f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

*Proof.* 1 следует из 2, т.к. если  $f \in L^r(E, \mu)$ , то  $\|f\|_s$  конечно. Докажем 2.

При  $r = \infty$  очевидно:

$$\left( \int_E |f|^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leq \text{ess sup } |f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

При  $r < +\infty$   $p := \frac{r}{s}, q := \frac{r}{r-s}$

$$\begin{aligned} \|f\|_s^s &= \int_E |f|^s d\mu \\ &= \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \\ &\leq \left( \int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left( \int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu \right)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\leq \|f\|_r^s \mu E^{1 - \frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

### 2.33 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере

- $1 \leq p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1.  $f \in L^p, f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

2. •  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (либо  $f_n \rightarrow f$  п.в.)

•  $|f_n| \leq g$

•  $g \in L^p$

Тогда  $f \in L^p$  и  $f_n \rightarrow f$  в  $L^p$

*Proof.*

1. Пусть  $X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

2. Пусть  $f_n \Rightarrow f$ . Тогда по теореме Рисса  $\exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.  $|f| \leq g$  почти везде.  $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$  — суммируема, т.к.  $g \in L^p$ .

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

## 2.34 Полнота $L^p$

$L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$  — полное.

*Proof.* Рассмотрим  $f_n$  — фундаментальную. Куда бы она могла сходиться?

Пусть  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Тогда  $\exists N_1 \forall n_1, k > N_1 \|f_{n_1} - f_k\|_p < \frac{1}{2}$ . Зафиксируем какой-либо  $n_1$ .

Аналогично для  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ .

В общем случае  $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_k \frac{1}{2^k} = 1$ . Рассмотрим ряд  $S(x) = \sum |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ ,  $S(x) \in [0, +\infty]$  и его частичные суммы  $S_N$ .

$$\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$$

Таким образом,  $\int_X S_N^p < 1$ . По теореме Фату  $\int_X S^p d\mu < 1$ , т.е.  $S^p$  — суммируемо  $\Rightarrow S$  почти везде конечно.

$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$  — его частичные суммы это  $f_{n_{N+1}}(x)$ , т.е. сходимость этого ряда почти везде означает, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде. Таким образом, кандидат —  $f$ . Проверим, что  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Берём  $m = n_k > N$ .

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Это выполнено при всех достаточно больших  $k$ . Тогда по теореме Фату  $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$ , т.е.  $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

### 2.35 Плотность в $L^p$ множества ступенчатых функций

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций (из  $L^p$ ) плотно в  $L^p$ .

*Proof.*

1.  $p = \infty$

$\triangleleft f \in L^\infty$ . Изменив  $f$  на множестве меры 0, считаем, что  $|f| \leq \|f\|_\infty$ , т.к.  $f > A$  на множестве меры 0.

Тогда из доказательства теоремы о характеристизации неотрицательных функций с помощью ступенчатых  $\exists$  ступенчатые функции  $\varphi_n$ , такие что  $0 \leq \varphi_n \Rightarrow f^+$  и  $\psi_n$ , такие что  $0 \leq \psi_n \Rightarrow f^-$

Тогда сколь угодно близко к  $f$  можно найти ступенчатую функцию вида  $\varphi_n + \psi_n$ , т.е.  $|f - \varphi_n - \psi_n| \leq \frac{1}{n}$ , что и требовалось показать.

2.  $p < +\infty$ . Пусть  $f \geq 0$ .

$\exists \varphi_n \geq 0$  ступенчатые :  $\varphi_n \uparrow f$

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X \underbrace{|\varphi_n - f|^p}_{\leq |f|^p - \text{мажоранта}} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

Если  $f$  любого знака, то при рассмотрении срезов искомое очевидно.  $\square$

### 2.36 Лемма Урысона

- $X$  нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$  — замкнутые
- $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывное,  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f|_{F_0} \equiv 0$ ,  $f|_{F_1} \equiv 1$

*Proof.* Переформулируем нормальность: если  $F \subset G$ ,  $F$  замкнутое,  $G$  открытое, то  $\exists U(F)$  — открытое, такое что  $F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$ . Почему это нормальность? Первое замкнутое множество —  $F$ , а второе замкнутое —  $G^c$ .

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^c \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^c}_{G_1}$$

Строим  $G_{\frac{1}{2}}$ :

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}}$$

Строим  $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$ :

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом,  $\forall$  двоично рациональной  $\alpha \in [0, 1]$  задаётся открытое множество  $G_\alpha$ .

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональная} : x \in G_\alpha\}$$

$f$  — непрерывно  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow} f^{-1}(a, b)$  — всегда открыто.

Достаточно проверить:

1.  $\forall b \quad f^{-1}(-\infty, b)$  — открыто
2.  $\forall a \quad f^{-1}(-\infty, a]$  — замкнуто

, так как:

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a]$$

1.  $f^{-1}(-\infty, b) = \bigcup_{\substack{q < b \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q$  — открыто. Почему это так?

$f^{-1}(-\infty, b) \subset \bigcup$ , т.к.  $f(x) = b_0 < b$ . Возьмём  $q : b_0 < q < b$ . Тогда  $x \in G_q$

$f^{-1}(-\infty, b) \supset \bigcup$  очевидно, т.к. при  $x \in G_q \quad f(x) \leq q < b$ .

2.  $f^{-1}(-\infty, a] = \bigcap_{q > a} G_q = \bigcap_{q > a} \overline{G_q}$  — замкнуто

( $\supset$ ) — тривиально

( $\subset$ ) Для двоично рациональных  $q, r$ :

$$\bigcap_{\substack{q > a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r > a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

, так как  $\forall \alpha < \beta : G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$  по построению.

□

### 2.37 Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_m)$
- $E \subset \mathbb{R}^m$  — измеримое

Тогда в  $L^p(E, \lambda_m)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  множество непрерывных финитных функций плотно.

*Proof.* По уже доказанной теореме множество ступенчатых функций плотно в  $L^p(E, \lambda_m)$ . Достаточно научиться приближать характеристические функции финитными, т.е.:

$$\forall A - \text{огр.} \quad \exists f - \text{финитная непрерывная} : \|f - \chi_A\|_p < \varepsilon$$

Тогда можно будет приближать ступенчатые функции финитными, а следовательно искомое будет верно.

По регулярности меры лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underbrace{F}_{\text{замкн.}} \subset A \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}} \quad \lambda_m(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона  $\exists$  непрерывное  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} : f|_F \equiv 1, f|_{G^c} \equiv 0$

$$\|f - \chi_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \chi_A|^p d\lambda_m = \int_{G \setminus F} |f - \chi_A|^p \leq 1 \cdot \lambda_m(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

### 2.38 ! Теорема о непрерывности сдвига

1.  $f$  — равномерно непрерывно на  $\mathbb{R}^m$ . Тогда  $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ <sup>24</sup>
2.  $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Тогда  $\|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
3.  $f \in \tilde{C}[0, T]$ . Тогда  $\|f_h - f\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ <sup>25</sup>
4.  $1 \leq p < +\infty, f \in L^p[0, T] \Rightarrow \|f_h - f\|_p \rightarrow 0$

<sup>24</sup>Т.е.  $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$

<sup>25</sup>Или  $\|f_n - f\|_{\tilde{C}} \rightarrow 0$

*Proof.* Пункты 1 и 3 очевидны по определению равномерной непрерывности.

Докажем пункты 2 и 4.

По плотности непрерывных функций в  $L^p$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall f \in L^p[0, T] \quad \exists g - \text{непр.} \in \tilde{C}[0, T] \quad \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_h\|_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

Покажем, что  $\|g - g_h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$

4:

$$\begin{aligned} \|g_h - g\|_p &= \left( \int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \|g_h - g\|_\infty^p \cdot \int_0^T 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= T^{\frac{1}{p}} \|g_h - g\|_\infty \end{aligned}$$

, что  $< \frac{\varepsilon}{3}$  для достаточно малых  $h$ .

2:  $g$  — финитное, носитель<sup>26</sup>  $g \subset B(0, R)$ , пусть  $|h| < 1$ .

$$\|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0, R+1), \lambda_m)} \leq \|g_h - g\|_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}}$$

□

### 2.39 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1.  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  в  $\mathcal{H}$ . Тогда  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ , т.е. скалярное произведение непрерывно в  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .
2.  $\sum x_k$  сходится. Тогда:

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \left\langle \sum x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle \quad (12)$$

3.  $\sum x_k$  — ортогональный ряд. Тогда  $\sum x_k$  сходится  $\Leftrightarrow \sum \|x_k\|^2$  сходится.

*Proof.*

1.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\text{бесконечно малое}} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\text{огр.}} + \underbrace{\|x\|}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\text{бесконечно малое}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

<sup>26</sup>Множество точек, где  $g \neq 0$

$$2. S_N = \sum_{k=1}^N x_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S$$

$$\langle S_n, y \rangle \rightarrow \langle S, y \rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$

$$\langle S_n, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, y \rangle$$

Это член суммы ряда из правой части (12).

$$3. S_N = \sum_{k=1}^N x_k$$

$$\|S_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{j=1}^N x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 =: C_N$$

$\Rightarrow$  Очевидно

$\Leftarrow$  Аналогично формуле выше:  $\|S_M - S_N\|^2 = |C_M - C_N|$ . Таким образом, если  $C_N$  сходится, то  $C_N$  фундаментально  $\Rightarrow S_N$  фундаментально в  $\mathcal{H}$ .

□

## 2.40 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

- $\{e_k\}$  — ортогональное семейство в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ , где  $c_k \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$

Тогда:

1.  $\{e_k\}$  — ЛНЗ
2.  $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$
3.  $c_k e_k$  — проекция  $x$  на прямую  $\{t e_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$ .  $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$ .

*Proof.*

1.  $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0 \Rightarrow \alpha_n \|e_n\|^2 = 0$
2.  $\langle x, e_k \rangle = \langle \sum c_j e_j, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2$
3.  $\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = 0$

□

### 2.41 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

- $\{e_k\}$  — ортогональное семейство в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k$
- $\mathcal{L}_n = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$

Тогда:

1.  $S_n$  — проекция  $x$  на  $\mathcal{L}_n$ , т.е.  $x = S_n + z \Rightarrow z \perp \mathcal{L}_n$
2.  $S_n$  — элемент наилучшего приближения для  $x$  в  $\mathcal{L}_n$ :

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$$

3.  $\|S_n\| \leq \|x\|$

*Proof.*

1.  $k = 1 \dots n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) \|e_k\|^2 = 0$$

2.  $x = S_n + z$

$$\|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n} \right\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

3.  $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$

□

### 2.42 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

- $\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье вектора  $x$  сходится в  $\mathcal{H}$ .

2.  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z, z \perp e_k \quad \forall k$



$$3. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

*Proof.*

1. Ряд Фурье ортогонален. Тогда по теореме о свойствах сходимости сходимость ряда Фурье  $\Leftrightarrow$  сходимость  $\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ , что выполнено по неравенству Бесселя.

$$2. z = x - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \|e_n\|^2 = 0$$

3.  $\Rightarrow$  по теореме о свойствах сходимости, пункт 3.

$\Leftarrow$  из пункта 2:

$$\|x\|^2 = \left\| \sum c_k(x) e_k \right\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$$

$$\text{Дано: } \|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = \sum c_k(x) e_k$$

□

Равенство  $\sum_k |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$  называется уравнением замкнутости или **равенством Персивалья**.

## 2.43 Теорема о характеристике базиса

- $\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathcal{H}$ .

Тогда эквивалентно следующее:

1.  $\{e_k\}$  — базис
2.  $\forall x, y$  выполняется обобщенное уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

3.  $\{e_k\}$  замкнуто
4.  $\{e_k\}$  полно
5.  $\text{Lin}(e_1, e_2, \dots)$  плотна в  $\mathcal{H}$ , т.е.  $\text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2, \dots)) = \mathcal{H}$ .

*Proof.*

1 $\Rightarrow$ 2 Берём  $x$ , раскладываем его по базису и скалярно умножаем на  $y$ :

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y) \cdot \|e_k\|^2} = \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_k c_k(x) \overline{c_k(y)} \cdot \|e_k\|^2$$

2 $\Rightarrow$ 3 Из обобщенного следует частное при подстановке  $y$  вместо  $x$ .

3 $\Rightarrow$ 4 Если  $\exists z : \forall n \langle z, e_n \rangle = 0$ , то  $c_n(z) = 0$ , но тогда по уравнению замкнутости для  $z$  выполняется  $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = 0$ , а следовательно  $z = 0$ .

4 $\Rightarrow$ 1 По теореме Рисса-Фишера  $x = \sum c_k(x) e_k + z$ , где  $z \perp$  всем  $e_k$ . По полноте  $z = 0$ .

4 $\Rightarrow$ 5  $\mathcal{L} := \text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2 \dots))$ . Надо проверить, что  $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ . Если  $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$ , то по теореме Рисса-Фишера  $\exists z : \forall k \ z \perp e_k$ .

5 $\Rightarrow$ 4 Если  $z \perp e_k \ \forall k$ , то  $z \perp \text{Lin}(e_1, e_2 \dots) \Rightarrow z \perp \mathcal{L}$ , но  $\mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow z \perp z$ , т.е.  $\langle z, z \rangle = 0$ , но тогда  $z = 0$ .

□

## 2.44 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

- Дан тригонометрический ряд (вещественный или комплексный)
- Пусть  $S_n \rightarrow f$  в  $L^1[-\pi, \pi]$ , т.е.  $\|S_n - f\|_1 = \int_{-\pi, \pi} |S_n - f| \rightarrow 0$

Тогда:

- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$ , в том числе при  $k = 0$
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$
- $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

*Proof.* Докажем для  $a_k$ . Пусть  $n \geq k$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kt = \pi a_k$$

$$\left| \pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t)) \cos kt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| dt = \|S_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

□

## 2.45 Теорема Римана–Лебега

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_E f(t) e^{i\lambda t} dt &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \\ \int_E f(t) \cos \lambda t dt &\rightarrow 0 \\ \int_E f(t) \sin \lambda t dt &\rightarrow 0\end{aligned}$$

В частности для  $f \in L^1[-\pi, \pi] : a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

*Proof.* Не умаляя общности  $E = \mathbb{R}$ , т.к. иначе дополним  $f$  до  $\mathbb{R}$  так, что  $f = 0$  вне  $E$ .

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt &\stackrel{t:=\tau+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau} \cdot e^{i\pi} = - \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau} \\ \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt &= \frac{1}{2} \left( \int + \int \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt \\ \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| \underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1} dt \rightarrow 0\end{aligned}$$

, что выполнено по лемме о непрерывности сдвига. □

## 2.46 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

*Следствие 1.10.* Пусть  $\omega(f, h) = \sup_{\substack{x, y \in E \\ |x-y| \leq h}} |f(x) - f(y)|$  — модуль непрерывности. Если  $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi]$ , то  $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$  при  $k \neq 0$ .

*Proof.*

$$\begin{aligned}|2c_{-k}(f)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{k}\right) \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right) dt = \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)\end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $\omega(f, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Тогда  $f$  равномерно непрерывна.

Следствие 1.11.  $E \subset \mathbb{R}, E = \langle a, b \rangle$ <sup>27</sup>

Определение. **Класс Липшица** для  $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1]$ :

$$\text{Lip}_M^\alpha(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

Пусть  $f \in \text{Lip}_M^\alpha$ , тогда при  $k \neq 0$   $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$

*Proof.* Аналогично. □

Примечание.  $f \in \text{Lip}_M^\alpha \Rightarrow \omega(f, h) \leq M \cdot h^\alpha$

Наблюдение 2.  $f \in \tilde{C}^1[-\pi, \pi]$ . Тогда при  $k \neq 0$   $a_k(f') = kb_k(f), b_k(f') = -ka_k(f), c_k(f') = ikc_k(f)$

*Proof.* Интегрирование по частям:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{f(t)e^{-ikt}}_0 \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot ike^{-ikt} dt \right) = ikc_k(f)$$

□

Следствие 1.12.

1.  $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$ . Тогда  $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\text{const}}{|k|^r}$ .
2.  $f \in \tilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi], f^{(r)} \in \text{Lip}_m^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ . Тогда  $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$ .

*Proof.* Очевидно из наблюдения выше. □

## 2.47 Принцип локализации Римана

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ f(x) = g(x)$ <sup>28</sup>

<sup>27</sup>Промежуток с любым видом скобки, а не скалярное произведение.

<sup>28</sup>С оговоркой, что либо почти везде, либо существуют такие представители данного класса эквивалентности.

Тогда ряды Фурье  $f$  и  $g$  ведут себя одинаково в точке  $x_0$ :

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Переформулировка:

- $h := f - g, h \in L^1[-\pi, \pi]$
- $h \equiv 0$  на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда  $S_n(h, x_0) \rightarrow 0$

*Доказательство переформулировки.*

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где:

$$h_1(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2} h(x_0 + t)$$

Так можно сказать, если  $h_1, h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$ .

- Для  $h_2$  это очевидно.
- Для  $h_1$ :  $h_1 \equiv 0$  при  $t \in (-\delta, \delta)$ , поэтому:

$$|h_1(t)| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда  $b_n(h_1) \rightarrow 0, a_n(h_2) \rightarrow 0$  по теореме Римана-Лебега. □

## 2.48 ! Признак Дини. Следствия

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$
- 

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)|}{t} dt < +\infty \quad (13)$$

Тогда ряд Фурье  $f$  сходится к  $S$  в точке  $x_0$ , т.е.  $S_n(f, x_0) \rightarrow S$ .

*Proof.* Пусть  $\varphi(t) = f(x_0 + t) - 2S + f(x_0 - t)$ .

$$S_n(f, x_0) - S \stackrel{??}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - S) D_n(t) dt = \int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \dots =$$

$$= \int_0^\pi \varphi(t) D_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot \left( \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} \varphi(t), & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Искомое следует из теоремы Римана-Лебега, если  $h_1$  и  $h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$ .

- Для  $h_2$  это очевидно.
- Для  $h_1$ : по формуле (13):

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t}$$

при  $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\pi}^\pi |h_1| = \int_0^\pi |h_1| = \frac{1}{2} \int_0^\pi |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} < \int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} \stackrel{??}{<} +\infty$$

□

*Следствие 1.13.*

- $f \in L^1$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$
- Существуют четыре конечных предела:  $f(x_0+0), f(x_0-0), \alpha_\pm := \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда ряд Фурье в точке  $x_0$  сходится к  $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

*Proof.*

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-0) - f(x_0-t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е.  $\frac{\varphi(t)}{t}$  — ограничена вблизи 0 на  $[0, \pi]$   $\implies$  по замечанию 1, интеграл (13) сходится. □

*Следствие 1.14.*

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- $f$  — непрерывно в точке  $x_0$ .
- $\exists$  конечные односторонние производные в точке  $x_0$

---

(?): т.к.  $\int_{-\pi}^\pi D_n = 1$

(?): по условию дини

Тогда  $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

*Proof.* Следует из следствия 1. □

## 2.49 Корректность определения свертки

$$g(x, t) := f(x - t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что  $\varphi(x, y) := f(x - t)$  измерима как функция  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Если это так, то  $g$  тоже измерима как произведение измеримых.

Обозначим  $\forall a \in \mathbb{R} \quad E_a := \mathbb{R}(f(x) < a), v(x, t) = \langle x - t, t \rangle$ . Тогда  $V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$ , т.к. это декартово произведение измеримых множеств. Следовательно  $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$  тоже измеримо в  $\mathbb{R}^2$ .

2. Лежит ли  $g \in L^1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$ ?

$$\iint_{[-\pi, \pi]^2} |g(x, t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt |k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)| dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1 < +\infty$$

Тогда по теореме Фубини для интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) k(t) dt$$

— при почти всех  $x \in [-\pi, \pi]$  этот интеграл сходится и задает по  $x$  функцию из  $L^1[-\pi, \pi]$ , т.е.  $f * k$  определен при почти всех  $x$ , и при этом  $\in L^1[-\pi, \pi]$

## 2.50 Свойства свертки

*Свойства.*

1.  $f * K = K * f$

*Proof.* Очевидно после замены  $t$  на  $-t$  под интегралом. □

2.  $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) \cdot c_k(K)$

*Proof.*

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f * K) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) K(t) \cdot e^{-inx} dt dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K(t) e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) e^{-in(x-t)} dx dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(K) \end{aligned}$$

□

3.  $f \in L^p[-\pi, \pi]$

- $K \in L^q[-\pi, \pi]$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда  $f * K$  — непрерывная функция и  $\|f * K\|_\infty \leq \|K\|_q \cdot \|f\|_p$

*Proof.* Неравенство очевидно, т.к. это неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |K(t)| dt \leq \\ &\leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|K\|_q \end{aligned}$$

Если  $p$  или  $q = +\infty$ , то это неравенство надо модифицировать.

Непрерывность:

$$|f * K(x+h) - f * K(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t)) K(t) dt \right| \leq \|K\|_q \cdot \underbrace{\|f_h(x) - f(x)\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ по т. о непр. сдвига}}$$

Это всё верно, если  $p < +\infty$ . Если же  $p = +\infty$ , то поменяем местами  $f$  и  $K$ .  $\square$

4.
  - $1 \leq p \leq +\infty$
  - $f \in L^p[-\pi, \pi]$
  - $K \in L^1[-\pi, \pi]$

Тогда  $f * K \in L^p[-\pi, \pi]$  и  $\|f * K\|_p \leq \|K\|_1 \cdot \|f\|_p$

## 2.51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

- $K_h$  — аппроксимативная единица

Тогда:

1.  $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{[-\pi, \pi]} f$
2.  $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$
3.  $K$  — усиленная аппроксимативная единица,  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ ,  $f$  непрерывно в  $x$ .

Тогда  $f * K_h$  непрерывно в  $x$  и  $f * K_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f(x)$

*Proof.*

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt$$



1.  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  — равномерно непрерывна, т.к.  $[-\pi, \pi]$  — компакт.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t : |t| < \delta \quad \forall x \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$M$  взято из аксиомы 2.

$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon?$$

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[\text{акс. 3}]{h \rightarrow h_0} 0$$

Тогда  $\exists V(h_0) \quad \forall h \in V(h_0) \quad I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

3.  $f \in L^1$ ,  $K_h \in L^\infty \Rightarrow f * K_h$  — непрерывна (в том числе и в  $x$ ).

Для данного  $x$  проверим утверждение  $\varepsilon > 0$ ;  $I_1 + I_2 < \varepsilon$ ;  $\exists V(h_0) \quad \forall h \in V(h_0)$

$f$  непрерывна в  $x$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t : |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Как в пункте 1:

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)| dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)| dt \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|) \xrightarrow[h \rightarrow h_0]{\text{акс. 3}'} 0 \end{aligned}$$

Тогда  $\exists V(h_0) \quad \forall h \in V(h_0) \quad I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

2.

$$\begin{aligned} \|f * K_h - f\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt \right| dx \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| dx dt = \\ &= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt \end{aligned}$$

, где  $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx$  — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)

$$\stackrel{\text{def}}{=} \|K_h\|_1 \underbrace{\left( g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right)}_{\rightarrow g(0)=0 \text{ по п.1}}(0)$$

□

## 2.52 Теорема о перманентности метода средних арифметических

$$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n \xrightarrow{\text{сред. арифм.}} S$$

*Доказательство теоремы.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k - S) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N_1+1}^n |S_k - S|}{n+1}}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

□

## 2.53 Теорема Фейера

1.  $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ . Тогда  $\sigma_n(f) \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f$
2.  $f \in L^p[-\pi, \pi], 1 \leq p \leq +\infty$ . Тогда  $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$
3.  $f \in L^1, f$  непрерывно в  $x$ . Тогда  $\sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

## 2.54 Следствия из теоремы Фейера

## 2.55 Теорема об интегрировании ряда Фурье

## 2.56 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье