# 1 Определения и формулировки

## 1.1 ! Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

$a$ — **внутренняя точка** множества $D$, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

$D$ — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка $D$

**Внутренностью** множества $D$ называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

## 1.2 ! Предельная точка множества

$a$ — **предельная точка** множества $D$, если

$$\forall \dot{U}(a) \;\; \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$$

## 1.3 ! Замкнутое множество, замыкание, граница

$D$ — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

$\overline{D} = D \cup$ (множество предельных точек $D$) — замыкание.

**Граница множества** — множество его граничных точек. Обозначается $\partial D$

## 1.4 ! Изолированная точка, граничная точка

$a$ — **изолированная точка** $D$, если $a \in D$ и $a$ — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

$a$ — **граничная точка** $D$, если $\forall U(a) \quad U(a)$ содержит точки как из $D$, так и из $D^c$

## 1.5 Описание внутренности множества

1. $IntD$ - откр. множество
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G - \text{открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в $D$
3. $D$ — откр. в $X \Leftrightarrow D = IntD$

## 1.6 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset F \\ F - \text{замкн.}}} F$ — мин. (по вкл.) замкн. множество, содержащее $D$.

## 1.7 ! Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. $E$ — **огр. сверху**, если $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие $M$ называются **верхними границами** $E$.

Аналогично ограничение снизу.

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$.

Для $E$ — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ $E$.

Для $E$ — огр. снизу **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ $E$.

## 1.8 Техническое описание супремума

Техническое описание супремума: $b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in E\ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$

## 1.9 ! Последовательность, стремящаяся к бесконечности

В $\mathbb{R}$:

1. $x_n \to +\infty \quad \forall E > 0\ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n > E$
2. $x_n \to -\infty \quad \forall E\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n < E$
3. $x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$

## 1.10 ! Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия этого множества $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

## 1.11 Секвенциальная компактность

**Секвенциально компактным** называется множество $A \subset X$ : $\forall$ посл. $(x_n)$ точек $A$ $\exists$ подпосл. $x_{n_k}$, которая сходится к точке из $A$

## 1.12 ! Определения предела отображения (3 шт)

$(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \to Y$

$a \in X$, $a$ — пред. точка множества $D$, $A \in Y$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A)\ \ \exists V(a)\ \ \forall x \in \dot{V}(a)\ \ f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в $X$:
   (a) $x_n \to a$
   (b) $x_n \in D$
   (c) $x_n \neq a$

   $f(x_n) \to A$

## 1.13 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $X = \mathbb{R}, Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty: \quad \forall E\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta\ \ f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty: \quad \forall E\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta\ \ f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta\ \ \forall x \in X: x > \delta\ \ |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta\ \ \forall x \in X: x < \delta\ \ |f(x) - c| < \varepsilon$

## 1.14 Предел по множеству

$f: D \subset X \to Y, D_1 \subset D, x_0$ — пред. точка $D_1$

Тогда **предел по множеству** $D_1$ в точке $x_0$ — это $\lim\limits_{x \to x_0} f|_{D_1}(x)$

## 1.15 Односторонние пределы

В $\mathbb{R}$ одностор. $=$ { левостор., правостор. }

**Левосторонний предел** $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ - это $\lim f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D\ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Аналогично правосторонний.

## 1.16 ! Непрерывное отображение

$f: D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$

$f$ — **непрерывное** в точке $x_0$, если:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо $x_0$ — изолированная точка $D$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \;\; \rho(x, x_0) < \delta \;\; \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \;\; \exists V(x_0) \;\; \forall x \in V(x_0) \cap D \;\; f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \in D \;\; f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

## 1.17 Непрерывность слева

$f$ — непр. слева в $x_0$, если $f|_{(-\infty, x_0]\cap D}$ — непрерывно в $x_0$

## 1.18 Разрыв, разрывы первого и второго рода

Если $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, либо $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ — **точка разрыва**.

Пусть $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ и не все 3 числа равны: $f(x_0 - 0), f(x_0), f(x_0 + 0)$. Это **разрыв I рода *(скачок)***.

Остальные точки разрыва — **разрыв II рода**.

*Примечание.*

$$f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0 - 0} f(x)$$

## 1.19 ! О большое, о маленькое

$f, g : D \subset X \to \mathbb{R} \;\; x_0$ — пр. точка $D$

Если $\exists V(x_0) \;\; \exists \varphi : V(x_0) \cap D \to \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x)$ при $x \in V(x_0) \cap D$

1. $\varphi$ — ограничена. Тогда говорят $f = O(g)$ при $x \to x_0$

   “$f$ **ограничена** по сравнению с $g$ при $x \to x_0$”
2. $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad f$ — **беск. малая** по отношению к $g$ при $x \to x_0$, $f = o(g)$
3. $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1 \quad f$ **и** $g$ **экв.** при $x \to x_0 \quad f \underset{x\to x_0}{\sim} g$

*Примечание.* О большое и о малое — разные вопросы в табличке.

## 1.20 ! Эквивалентные функции, таблица эквивалентных

Эквивалентные функции даны выше.

Таблица эквивалентных для $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x \\
\operatorname{sh} x &\sim x \\
\operatorname{tg} x &\sim x \\
\operatorname{arctg} x &\sim x \\
1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\
e^x - 1 &\sim x \\
\ln(1+x) &\sim x \\
(1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\
a^x - 1 &\sim x \ln a
\end{aligned}$$

## 1.21 Асимптотически равные *(сравнимые)* функции

В условиях прошлых определений $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$ — асимптотически сравнимы на множестве $D$, “величины одного порядка”.

## 1.22 Асимптотическое разложение

$g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — пред. точка $D$

$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \to x_0$

*Пример.* $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2 \dots \quad x \to 0 \quad g_{n+1} = x g_n, x \to 0$

$(g_n)$ называется **шкала асимптотического разложения.**

$f : D \to \mathbb{R}$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n)$, то это асимптотическое разложение $f$ по шкале $(g_n)$

## 1.23 Наклонная асимптота графика

Пусть $f(x) = Ax + B + o(1), x \to +\infty$

Прямая $y = Ax + B$ — наклонная асимптота к графику $f$ при $x \to +\infty$

## 1.24 Путь в метрическом пространстве

$Y$ — метр. пр-во

$\gamma : [a, b] \to Y$ — непр. на $[a, b]$

= **путь** в пространстве $Y$

### 1.25 Линейно связное множество

$E \subset Y$

$E$ — **линейно связное**, если $\forall A, B \in E \; \exists$ путь $\gamma : [a, b] \to E$ такой, что:

- $\gamma(a) = A$
- $\gamma(b) = B$

### 1.26 ! Функция, дифференцируемая в точке и производная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

$f$ — **дифференцируема**. в точке $x_0$, если $\exists A \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

При этом $A$ называется **производной** $f$ в точке $x_0$

*Примечание.* Это два разных билета.

## 2 Теоремы

### 2.1 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, $X$ — метр.п., $Y$ — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. $D$ — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. $D$ — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

### 2.2 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

$(X, \rho)$ — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда $K$ — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в $X$.

### 2.3 Простейшие свойства компактных множеств

$(X, \rho)$ — метрическое пространство, $K \subset X$

1. $K$ — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., $K$ — огр.
2. $X$ — комп, $K$ — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

### 2.4 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \leq x_i \leq b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \varnothing$

Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

### 2.5 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a, b]$ — компактное множество в $\mathbb{R}^m$

### 2.6 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. $K$ — замкнуто и ограничено
2. $K$ — компактно
3. $K$ — секвенциально компактно

### 2.7 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

### 2.8 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

$f : D \subset X \to Y$, $a$ — пред. точка $D$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A; \lim\limits_{x \to a} f(x) = B$

Тогда $A = B$

О локальной ограниченности отображения, имеющего предел.

$f : D \subset X \to Y$, $a$ — пред. точка $D$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

О стабилизации знака.

$f : D \subset X \to Y$, $a$ — пред. точка $D$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

Тогда $\exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \;\; f(x) \neq B$

## 2.9 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \to Y$, $X$ — метрич. пространство, $Y$ — норм. пространство над $\mathbb{R}$, $a$ — пред. точка $D$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = \lambda_0$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim\limits_{x\to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

   $\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

   $a$ — пр. точка $D'$ по теореме о стабилизации знака $\exists V(a)\ \ \forall x \in V(a) \cap D\ \ g(x)$ — того же знака, что и $B$, т.е. $g(x) \neq 0$

   $\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для $D'$

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно “разрешить” случай $A, B = \pm\infty$

## 2.10 Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса

Если в $\mathbb{R}^m$ $(x_n)$ — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

## 2.11 Сходимость в себе и ее свойства

$x_n$ — **фундаментальная, последовательность Коши, сходящаяся в себе**, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall m, n > N\ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

1. Сходящаяся в себе последовательность ограничена.
2. Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.

## 2.12 Критерий Коши для последовательностей и отображений

$f : D \subset X \to Y$, $a$ — пр. точка $D$, $Y$ — полное метрическое пространство.

Тогда

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in Y \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in D\ \ \rho(x_1, a) < \delta; \rho(x_2, a) < \delta\ \ \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

### 2.12.1 Для последовательностей

1. В любом метрическом пространстве $x_n$ — сходящ. $\Rightarrow$ $x_n$ — фунд.
2. В $\mathbb{R}^m$ $x_n$ — фунд. $\Rightarrow$ $x_n$ — сходящ.

## 2.13 Теорема о пределе монотонной функции

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, монотонная, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D_1 := D \cap (-\infty, a)$, $a$ — пред. точка $D_1$. Тогда:

1. $f$ — возрастает, огр. сверху на $D_1$. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$
2. $f$ — убывает, огр. снизу на $D_1$. Тогда $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

## 2.14 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция

1. $f, g : D \subset X \to Y\ \ x_0 \in D$ ($Y$ — норм. пространство)

   $f, g$ — непр. в $x_0$; $\lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — непр. $x_0$

   Тогда $f \pm g, ||f||, \lambda f$ — непр. $x_0$
2. $f, g : D \subset X \to \mathbb{R}\ \ x_0 \in D$

   $f, g$ — непр. в $x_0$

   Тогда $f \pm g, |f|, fg$ — непр. в $x_0$

   $g(x_0) \neq 0$, тогда $\frac{f}{g}$ — непр. $x_0$

### 2.14.1 Стабилизация знака

Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0$ и $f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \text{sign}\, f(x) = \text{sign}\, f(x_0)$$

#### 2.14.2 Непрерывность композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$

$f$ — непр. в $x_0 \in D$, $g$ — непр. в $f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ непр. в $x_0$

### 2.15 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов

Непрервыность композиции дана выше.

#### 2.15.1 Теорема о пределе композиции непрерывных отображений

$f : D \subset X \to Y \quad g : E \subset Y \to Z \quad f(D) \subset E$

$a$ — предельн. точка $D \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$

$A$ — предельн. точка $E \quad g(y) \xrightarrow[y \to A]{} B$

$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$

Тогда $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} B$

### 2.16 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных

$f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}$

$x_0$ — предельная точка $D$

$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$ при $x \to x_0$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если $\exists$ один из пределов, то $\exists$ и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если $x_0$ лежит в области определения $\frac{f}{g}$

Таблица эквивалентных дана выше.

## 2.17 Теорема единственности асимптотического разложения

$f, g_n : D \subset X \to \mathbb{R} \quad x_0$ — предельная точка $D$

$\forall n \;\; g_{n+1} = o(g_n), x \to x_0$

$\exists U(x_0) \;\; \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \;\; \forall i \;\; g_i(x) \neq 0$

Если $f(x) = c_0 g_0(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$

$f(x) = d_0 g_0(x) + \ldots + d_m g_m(x) + o(g_m(x))$

$]n \leq m$

Тогда $\forall i \;\; c_i = d_i$

## 2.18 Теорема о топологическом определении непрерывности

$f : X \to Y$ — непр. на $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$, откр. $f^{-1}(G)$ — откр. в $X$.

## 2.19 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия

$f : X \to Y$ — непр. на $X$

Если $X$ — комп., то $f(X)$ — комп.

*Следствие.* Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

*Следствие. (1-я теорема Вейерштрасса)*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.

Тогда $f$ — огр.

*Следствие.* $f : X \to \mathbb{R}$

$X$ — комп., $f$ — непр. на $X$

Тогда $\exists \max\limits_X f, \min\limits_X f$

$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

*Следствие.* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непр.

$\exists \max f, \min f$

## 2.20 Лемма о связности отрезка

Промежуток $\langle a, b \rangle$ *(границы могут входить, могут не входить)* — не представим в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

Т.е. $\nexists G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ — откр.:

- $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \cap G_1 \neq \varnothing \quad \langle a, b\rangle \cap G_2 \neq \varnothing$
- $\langle a, b\rangle \subset G_1 \cup G_2$

## 2.21 Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непр. на $[a, b]$. Тогда

$$\forall t \text{ между } f(a) \text{ и } f(b)\ \ \exists x \in [a, b] : f(x) = t$$

## 2.22 Теорема о сохранении промежутка

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непр.

Тогда $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток.

## 2.23 Теорема Больцано-Коши о сохранении линейной связности

$X, Y$ — метрические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывное и сюръекция

$X$ — линейно связное множество. Тогда $Y$ — линейно связное множество.

*Доказательство.* Надо доказать, что $\exists$ путь $[a, b] \to [A, B]$

$f(a) = A; f(b) = B$

$X$ — линейно связное $\Rightarrow \exists\gamma : [\alpha, \beta] \to X, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b, \gamma$ — непрерывное

$$f \circ \gamma[a, b] \to Y; f \circ \gamma(\alpha) = A, f \circ \gamma(\beta) = B$$

Т.к. композиция непрерывных функций непрерывна, $f \circ \gamma$ — непрерывна. $\square$

## 2.24 Описание линейно связных множеств в $\mathbb{R}$

В $\mathbb{R}$ линейно связанными множествами являются только промежутки.

## 2.25 Теорема о бутерброде

Кусок хлеба и кусок колбасы, лежащие на столе, можно разрезать прямой на две равные по площади части каждый.

## 2.26 Теорема о вписанном $n$-угольнике максимальной площади

Вписанный $n$-угольник максимальной площади — правильный.

## 2.27 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, монотонна. Тогда

1. Точки разрыва $f$ (если есть) — I рода
2. $f$ — непр. на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток

У монотонной функции, заданной на промежутке, имеется не более чем счётное *(НБЧС)* множество точек разрыва.

## 2.28 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр., строго монот.

$m := \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f(x), M := \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$. Тогда:

1. $f$ — обратимая и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$
2. $f^{-1}$ строго монотонна и того же типа *(возрастает или убывает)*
3. $f^{-1}$ непрерывна