Упражнение 1. Рассмотрим множество всех отображений из \mathbb{R} в \mathbb{R} $S = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Введём на нём операцию композиции как стандартную композицию функций. Доказать, что регулярные справа алгоритмы это в точности (все) сюръективные отображения.

Pешение. $\triangleleft g$ — правый регулярный, т.е. $\forall f_1, f_2 \in S \;\; f_1 \circ g = f_2 \circ g \Rightarrow f_1 = f_2.$

$$f_1 \circ g = f_2 \circ g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R} \ f_1(g(x)) = f_2(g(x))$$

Если h сюръективно, h — правое регулярное, т.к $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ по определению сюръективного отображения и тогда $\forall x\in\mathbb{R}\ f_1(h(x))=f_2(h(x))\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\ f_1(x)=f_2(x)$, из чего следует $f_1=f_2$ по определению.

Если g не сюръективно, то $\exists y: \nexists x \ g(x)=y$ по определению. Тогда рассмотрим произвольную функцию $f_1\in S$ и $f_2=\begin{cases} f_1(x), & x\neq y\\ f_1(x)+1, & x=y \end{cases}$. Условие $f_1(g(x))=f_2(g(x))$ выполнено, но $f_1\neq f_2$.

Таким образом, все сюръективные отображения являются регулярными справа, а не сюръективные — нет. \Box

Упражнение 2. Рассмотрим множество пар целых чисел $S = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$. Зададим на нём операцию композиции:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

Проверить ассоциативность. Найти все (односторонние) нейтральные и поглощающие элементы. Найти все регулярные элементы.

Решение.

$$(a_1,b_1)*((a_2,b_2)*(a_3,b_3)) = (a_1,b_1)*(a_2a_3,a_2b_3+a_3b_2) = (a_1a_2a_3,a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)$$

$$((a_1,b_1)*(a_2,b_2))*(a_3,b_3) = (a_1a_2,a_1b_2+a_2b_1)*(a_3,b_3) = (a_1a_2a_3,a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)$$

Оба результата равны, следовательно операция ассоциативна.

Операция очевидно коммутативна, поэтому не будем рассматривать отдельно левые и правые элементы.

 $\sphericalangle(e_a,e_b)$ — нейтральный элемент

$$(e_a, e_b) * (a, b) = (e_a a, e_b \cdot a + e_a \cdot b) = (a, b)$$

$$\begin{cases} e_a a = a \\ e_b a + e_a b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_a = 1 \\ e_b = 0 \end{cases}$$

M3*37y2019 25.9.2021

 $\sphericalangle(\theta_a,\theta_b)$ — поглощающий элемент

$$(\theta_a, \theta_b) * (a, b) = (\theta_a a, \theta_a b + \theta_b a) = (\theta_a, \theta_b)$$

$$\begin{cases} \theta_a a = \theta_a \\ \theta_a b + \theta_b a = \theta_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = 0 \\ \theta_b a = \theta_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = 0 \\ \theta_b = 0 \end{cases}$$

 $\sphericalangle(x,y)$ — регулярный элемент.

$$\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \ (a_1, b_1) * (x, y) = (a_2, b_2) * (x, y) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$$(a_1x, b_1x + a_1y) = (a_2x, b_2x + a_2y)$$

$$\begin{cases} a_1x = a_2x \\ b_1x + a_1y = b_2x + a_2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1x = b_2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Мы потеряли случай x = 0 (тогда нельзя сокращать на x), рассмотрим его:

$$b_1x + a_1y = b_2x + a_2y \Rightarrow a_1y = a_2y \Rightarrow a_1 = a_2$$

 $b_1 \neq b_2$ в общем случае.

Итого:

- Нейтральный элемент (0,0)
- Поглощающий элемент (0,0)
- Регулярные элементы $\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}\}$

Упражнение 3. Пусть есть некоторая конечная полугруппа S и $a \in S$ есть некоторый фиксированный элемент. Рассмотрим множество $M = a \cdot S = \{a \cdot x \mid x \in S\}$. Что можно сказать про |M|, если |S| = n? Каков будет ответ в случае, если a регулярен?

Решение. Если a произвольный, то ничего (технически $|M| \le n$).

Если a регулярен, то $a\cdot x$ пробегает все возможные элементы S, т.к. $\nexists a_1 \neq a_2: a_1\cdot x = a_2\cdot x$. Таким образом, |M| = |S| = n.

Упражнение 4. Пусть S — некоторая полугруппа с левым сокращением. Доказать, что любой идемпотент e (свойство $e \cdot e = e$), то e — левый нейтральный.

Решение. Пусть $e \cdot x$ это некоторое $a \in S$. Докажем, что x = a.

$$e \cdot x = a$$
$$e \cdot e \cdot x = e \cdot a$$

25.9.2021

M3*37y2019

$$e \cdot x = e \cdot a$$
$$x = a$$

Упражнение 5. Пусть S — некоторая полугруппа со следующим свойством. Из того, что ab=cd следует либо a=c, либо b=d. Доказать, что S — полугруппа левых либо правых нулей.

Решение. $\triangleleft a, b \in S$

$$a \cdot b =: c$$
$$b \cdot a \cdot b = b \cdot c$$
$$(b \cdot a) \cdot b = b \cdot c$$

Либо $b\cdot a=b$, либо b=c. В первом случае b — левый поглощающий. Во втором случае можно подставить в исходное равенство и получить $a\cdot b=b$ и тогда b правый поглощающий.

Упражнение 6. Рассмотрим некоторую полугруппу S и некоторую её подполугруппу $H\subset S$. Будем говорить, что $a\sim b$ если aH=bH. Проверить, что заданное отношение есть отношение эквивалентности. Построим фактор-множество Y=S/R. Пусть некоторый элемент a регулярен слева. Что можно сказать про регулярность элемента $b\in [a]$?

Pешение. Проверим, что R — отношение эквивалентности:

- 1. Рефлексивность: aH = aH
- 2. Транзитивность: по транзитивности равенства множеств
- 3. Симметричность: по симметричности равенства множеств

Если a регулярен слева, то |aH| = |H| (см. задание 3). Таким образом, |bH| = |aH| = |H|. Т.к. |bH| = |H|, то $b \cdot x$ пробегает все элементы H. Из этого следует регулярность слева (aH) -если $\exists x_1, x_2 \in H : b \cdot x_1 = b \cdot x_2 \ \& \ x_1 \neq x_2$, то $bH \neq H$.

Регулярности в S нет в общем случае — если $\exists x \in S \setminus H$, то пусть $b \cdot x = y$, где y — произвольный элемент bH (и следовательно $\exists z \in H : b \cdot z = y$). Тогда b не регулярен в S, т.к. $b \cdot x = y = b \cdot z$.

Упражнение 7. Пусть на некотором множестве X задано отношение частичного порядка ρ (в смысле \leq). Определим отношения $R=\rho\circ \rho^{-1}$ и $L=\rho^{-1}\circ \rho$. Что можно сказать про отношения R,L?

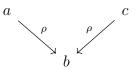
Определим для некоторого $a \in X$ множество $R(a) = \{b \mid b \in X, aRb\}$, как множество всех элементов, которые состоят в отношении R с a. Указать процедуру поиска R(a).

M3*37y2019 25.9.2021

Решение. $\triangleleft R$

$$aRc \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b : (a\rho b) \& (b\rho^{-1}c) \Rightarrow (a\rho b) \& (c\rho b)$$

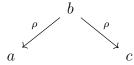
С точки зрения графа это выглядит так: у a и c есть общий потомок.



 $\triangleleft L$

$$aLc \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists b: (a\rho^{-1}b) \& (b\rho c) \Rightarrow (b\rho a) \& (b\rho c)$$

С точки зрения графа это выглядит так: у a и c есть общий родитель



Поиск R(a): ищем все $c\in S$, такие что есть общий $(c\,a)$ потомок b. Переберем всех кандидатов на роль b — это все потомки a. Для каждого b переберем его родителей. Все такие родители образуют R(a).