

# 1 Линейный оператор

## 1.1 Основные определения

$\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  — ЛП,  $\dim X = n$ ,  $\dim Y = m$

**Определение.** Отображение  $\varphi$  называется линейным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

**Определение.** Отображение  $\varphi$ , обладающее свойством линейности называется **линейным оператором** (ЛОп)

**Пример.** •  $\Theta : \Theta x = 0_Y$  — нулевой оператор

•  $\mathcal{I} : \mathcal{I}x = x$  — единичный (тождественный) оператор

•  $X = L_1 \dot{+} L_2 \stackrel{def}{\iff} \forall x \in X \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2$

Проектор:

$$\mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2\|} : X \rightarrow L_1 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{\|L_2\|} x = x_1$$

$$\mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1\|} : X \rightarrow L_2 \quad \mathcal{P}_{L_2}^{\|L_1\|} x = x_2$$

•  $X = C^1[-1, 1]$  — первая производная  $\exists$  и непрерывна

$$\forall f \in X \quad (\varphi f)(x) = \int_{-1}^1 f(t) K(x, t) dt$$

$K(x, t)$  — интегральное ядро, например  $x^2 + tx$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$ ,  $\{h_k\}_{k=1}^m$  — базис  $Y$ ,  $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k h_k$

**Определение.** Набор коэффициентов  $\|a_j^k\|$  образует матрицу  $m \times n$ , которая называется **матрицей ЛОп** в паре базисов  $\{e_j\}$  и  $\{h_k\}$

•  $\Theta \rightarrow A_\Theta = 0_{m \times n}$

•  $\mathcal{I} \rightarrow A_\mathcal{I} = E$

**Теорема 1.** Задание ЛОп  $\varphi$  эквивалентно заданию его матрицы в известной паре базисов пространств  $X$  и  $Y$

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ” очевидно

“ $\Leftarrow$ ” ]  $A$  – матрица ЛОп  $\varphi \Rightarrow \forall x \in X, x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi^j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \xi^j a_j^k h_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \xi^j a_j^k\right) h_k$$

□

$\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  – ЛОп

$\chi = \varphi + \psi$ , если  $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\varphi + \psi)x = \varphi(x) + \psi(x)$

$\chi = \alpha\varphi$ , если  $\forall x \in X \quad \chi(x) = (\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$

*Примечание.*

$$\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y = m \cdot n$$

*Примечание.* ]  $K_n^m$  – множество матриц  $m \times n$

$K_n^m$  – линейное пространство

$$\dim K_n^m = m \cdot n \Rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \simeq K_n^m$$

## 1.2 Алгебра операторов и матриц

$\varphi : X \rightarrow Y \quad \psi : Y \rightarrow Z$

$X, Y, Z$  – ЛП:  $\dim X = n, \dim Y = m, \dim Z = k$

$\sigma : X \rightarrow Z : \forall x \quad \sigma(x) = \psi(\varphi x)$

**Определение.** Отображение  $\sigma$  называется **произведением (композицией)**  $\psi$  и  $\varphi$

**Лемма 1.**  $\sigma$  – ЛОп

*Доказательство.*  $\sigma(x + y) = \psi(\varphi(x + y)) = \psi(\varphi x + \varphi y) = \psi\varphi x + \psi\varphi y = \sigma x + \sigma y$  □

$\{e_i\}_{i=1}^n$  – базис  $X$ ,  $\{h_j\}_{j=1}^m$  – базис  $Y$ ,  $\{g_l\}_{l=1}^k$  – базис  $Z$

$\varphi \rightarrow A = \|a_i^j\| \quad \psi \rightarrow B = \|b_j^l\| \quad \sigma \rightarrow C = \|c_i^l\|$

**Теорема 2.**  $\sigma = \psi\varphi \Leftrightarrow C = BA$

*Доказательство.*  $\sigma(e_i) = \psi(\varphi(e_i)) = \psi\left(\sum_{j=1}^m a_i^j h_j\right) = \sum_{j=1}^m a_i^j \psi(h_j) = \sum_{j=1}^m a_i^j \sum_{l=1}^k b_j^l g_l = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{j=1}^m a_i^j b_j^l\right) g_l$

$$c_i^l = \sum_{j=1}^m a_i^j b_j^l \Rightarrow C = BA$$

□

$$\triangleleft \varphi, \psi : X \rightarrow X \Rightarrow \sigma = \psi \varphi : X \rightarrow X$$

Свойства композиции:

$$1. (\varphi + \psi)\sigma = \varphi\sigma + \psi\sigma$$

$$\text{Доказательство. } (\varphi + \psi)\sigma x = (\varphi + \psi)(\sigma x) = \varphi\sigma x + \psi\sigma x$$

□

$$2. \varphi(\psi + \sigma) = \varphi\psi + \varphi\sigma$$

$$\text{Примечание. } \varphi\psi \neq \psi\varphi$$

$$3. \varphi(\alpha\psi) = (\alpha\varphi)\psi = \alpha\varphi\psi$$

$$4. \varphi(\psi\sigma) = (\varphi\psi)\sigma = \psi\varphi\sigma$$

Таким образом, ЛОп — алгебра, т.к. это мультипликативный моноид и аддитивная полугруппа.

**Определение.** Множество, наделенное согласованными структурами линейного пространства и мультипликативного моноида, называется алгеброй.

**Теорема 3.**  $\mathcal{L}(X, X) = X \times X$  — алгебра.

*Доказательство.* См. выше

□

$]A$  — алгебра

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $A$

$$x, y \in X \quad x = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \quad y = \sum_{k=1}^n \eta^k e_k$$

$$\triangleleft x \cdot y = \sum_{j,k=1}^n \xi^j \eta^k (e_j \cdot e_k) = \sum_{j,k=1}^n \xi^j \eta^k \sum_{l=1}^n m_{jk}^l e_l = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{j,k=1}^n m_{jk}^l \xi^j \eta^k \right) e_l$$

**Определение.** Набор  $m_{jk}^l$  называется структурной константой алгебры  $A$ .

*Пример.*  $\triangleleft \mathbb{C} \quad \{1, i\}$  — базис  $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} m_{jk}^l & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ i & i & -1 \end{bmatrix} \text{ — таблица Кэли}$$

*Пример.*  $\mathbb{R}^4 \quad \{1 \ i \ j \ k\}$

$$\begin{bmatrix} & 1 & i & j & k \\ 1 & 1 & i & j & k \\ i & i & -1 & k & -j \\ j & j & -k & -1 & i \\ k & k & j & -i & -1 \end{bmatrix}$$

$]A_1, A_2$  — алгебры

**Определение.**  $A_1$  и  $A_2$  называются **изоморфными**, если существует биекция, сохраняющая их алгебраическую структуру:

$$\forall x_1, x_2 \in A_1 \quad x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2 \Rightarrow (x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2) \quad \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1 \quad x_1 x_2 \leftrightarrow y_1 y_2$$