

# Алгоритмы в математике (*теория чисел*)

Михайлов Максим

4 октября 2021 г.

## Оглавление

Лекция 1	4 сентября	2
1	Вводная лекция . . . . .	2
Лекция 2	11 сентября	3
2	Алгебраические структуры . . . . .	4
2.1	Структуры с одним законом композиции . . . . .	4
2.2	Структуры с двумя законами композиции . . . . .	5
2.3	Основные алгебраические структуры . . . . .	5
Лекция 3	18 сентября	6
3	Внешний закон композиции . . . . .	6
3.1	Фактор-структуры . . . . .	7
Лекция 4	25 сентября	10
4	Структура групп . . . . .	10
4.1	Смежные классы . . . . .	12

# Лекция 1

## 4 сентября

### 1 Вводная лекция

Хотя этот курс формально называется “теория чисел”, мы не будем рассматривать только теорию чисел. Теория чисел, разумеется, про числа, делители, простоту, алгоритм Евклида и т.д.. Однако, её можно обобщить на произвольные полугруппы, группы, кольца и поля. Поэтому мы будем рассматривать теорию чисел через призму общей алгебры.

Например, в кольце целых чисел есть понятие “простое число”. А в каких ещё кольцах есть “простые” элементы и каким условиям эти кольца удовлетворяют? Оказывается, кольцо многочленов содержит простые элементы и поэтому там применим алгоритм Евклида.

Мы также затронем теорию категорий (*терминальные объекты*), алгебраическую геометрию (*криптографию на эллиптических кривых*).

# Лекция 2

## 11 сентября

План курса:

- Полугруппа
- Группа
  - Гомоморфизм
  - Фактор-группа
  - Теорема о ядре
  - Произведение групп
- Кольцо
  - $\mathbb{Z}$
  - Остатки
  - Китайская теорема об остатках
  - Алгоритм Евклида
  - Кольцо многочленов
  - Алгебра многочленов
- Поле
  - Поля Галуа
  - Расширения Галуа
  - Алгебраические кривые
  - Диофантовы уравнения

Начиная с групп мы будем использовать формализм теории категорий.

## 2 Алгебраические структуры

### 2.1 Структуры с одним законом композиции

Пусть  $M$  — множество с законом композиции  $T : \forall x, y \in M \exists xTy \in M$ .

*Примечание.* Такой закон называется **внутренним**, т.к. оба его аргумента  $\in M$ .

*Обозначение.*  $x \cdot y, x \circ y, x + y, x^y, x * y$

Закон задает структуру на множестве.

**Определение.**  $e_L \in M : \forall x \in M e_L \cdot x = x$  — **левый нейтральный элемент**

$e_R \in M : \forall x \in M x \cdot e_R = x$  — **правый нейтральный элемент**

**Лемма 1.**  $\exists e_L, e_R \in M \Rightarrow e_L = e_R \stackrel{\text{def}}{=} e$

*Доказательство.*  $e_L = e_L \cdot e_R = e_R$  □

**Лемма 2.**  $e, e' — нейтральные элементы \Rightarrow e = e'$ .

*Доказательство.*  $e = e \cdot e' = e'$  □

**Определение.**  $p \in M : p \cdot p = p$  — **идемпотент**

**Определение.**  $z \in M : z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$  — **регулярный элемент (левый)**

**Определение.**  $x \in M, \exists e \in M$ . Элемент  $z \in M : z \cdot x = e$  — **левый обратный элемент к  $x$** .

$y \in M : x \cdot y = e$  — **правый обратный элемент к  $x$** .

**Лемма 3.** Если  $\exists y, z$ , то  $y = z \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1}$  — **обратный элемент**.

*Доказательство.*  $z = z \cdot e = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = e \cdot y = y$ . Здесь мы воспользовались **ассоциативностью** закона композиции. □

**Определение.**  $\Theta_L : \forall x \in M \Theta_L \cdot x = \Theta_L$  — **поглощающий (слева) элемент**

$\Theta_R : \forall x \in M x \cdot \Theta_R = \Theta_R$  — **поглощающий (справа) элемент**

**Лемма 4.**  $\exists \Theta_L, \Theta_R \Rightarrow \Theta_L = \Theta_R \stackrel{\text{def}}{=} \Theta$

*Доказательство.*  $\Theta_L = \Theta_L \cdot \Theta_R = \Theta_R$  □

$\triangleleft x, y, z \in M, x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$  или  $x \cdot (y \cdot z)$ . Какое выбрать? Без ассоциативности непонятно. Поэтому мы требуем ассоциативность в рамках этого курса.

То же самое можно сказать для семейства элементов.

**Теорема 1** (об ассоциативном законе).  $1 \leq k \leq n \Rightarrow T_{i=1}^n x_i = (T_{i=1}^k x_i) T (T_{i=k+1}^n x_i)$

**Определение.**  $\triangleleft \forall x, y \in M \ xTy = yTx$ . Тогда  $T$  называется **коммутативным**.

**Определение.**  $\exists x, y \in M : xTy = yTx$ . Тогда  $x, y$  называются **перестановочными** относительно закона.

**Теорема 2** (об ассоциативном, коммутативном законе). Аргументы ассоциативного, коммутативного закона можно переставлять как угодно.

## 2.2 Структуры с двумя законами композиции

Пусть  $M$  — множество с законами композиции  $*$ ,  $\circ$ . Нас интересует случай, когда эти два закона взаимосвязаны.

Как воспринимать  $x * y \circ z$ ? Может иметь место **дистрибутивность**  $*$  относительно  $\circ$  (слева):  $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$\triangleleft e$  — нейтральный элемент по  $\circ$ .  $\triangleleft x * y = x * (e \circ y) = (x * e) \circ (x * y) \Rightarrow x * e = e$ . Поэтому из поля нельзя убрать ноль.

## 2.3 Основные алгебраические структуры

- Полугруппа — множество с ассоциативным законом
- Моноид — полугруппа с единицей
- Группа — моноид с обратным элементом для любого
- Абелева группа — группа с коммутативным законом
- Кольцо — два закона, по первому — абелева группа, по второму — полугруппа
- Поле — по двум законам группа

# Лекция 3

## 18 сентября

### 3 Внешний закон композиции

Пусть  $\Omega$  — множество.

**Определение.** Внешний закон композиции — бинарная операция  $g : \Omega \times M \rightarrow M$ :

$$\forall \alpha \in \Omega, x \in M \quad g : (\alpha, x) \mapsto \alpha \perp x \in M$$

*Пример.*  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ . Тогда  $g(\alpha, x) = \alpha \cdot x$ .

*Обозначение.*  $g(\alpha, x)$  обозначается как:

- $\alpha(x)$
- $\alpha x$
- $x^\alpha$

*Пример.*  $M = \mathbb{Z}$  — абелева группа по сложению.  $\triangleleft z \in \mathbb{Z}$ .

$$\underbrace{z + z + z + \cdots + z}_n = nz$$

Слева написано применение внутреннего закона  $n-1$  раз, а справа — применение внешнего закона. Не всегда внешний закон можно представить в виде внутреннего, иначе внешний закон был бы не содержательным.

Пусть  $M$  имеет внутренний закон композиции  $\top$ , множество  $\Omega$  имеет внешний<sup>1</sup> закон  $\perp$ .

*Обозначение.*

---

<sup>1</sup> Относительно  $M$ .

- $\top = \circ$
- $\perp(\alpha, x) = \alpha x$

**Определение.** Внешний закон согласован с внутренним законом, если:

$$\alpha(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y)$$

*Пример.*  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$

$\triangleleft$  алгебраические структуры  $(M, \circ)$ ,  $(\Omega, *)$  и  $\perp$  — внешний закон  $\Omega$  по  $M$ .

**Определение.**

$$\triangleleft \alpha, \beta \in \Omega, x \in M \quad (\alpha * \beta)x = \alpha(\beta(x))$$

Такой способ согласования мы называем **действием**  $\Omega$  на  $M$ .

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(x \circ y) &\stackrel{\text{согл.}}{=} (\alpha * \beta)(x) \circ (\alpha * \beta)(y) \\ &\stackrel{\text{действ.}}{=} \alpha(\beta(x)) \circ \alpha(\beta(y)) = \alpha(\beta(x \circ y)) \end{aligned}$$

*Пример.*  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot)$

$$\triangleleft n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2$$

$$(n \cdot m)(z_1 + z_2)$$

**Определение.** Пусть есть множества  $\{M, N \dots \Omega\}$  со своими внутренними законами композиции. Кроме того, некоторые из них могут являться носителями внешнего закона для других множеств. Этот набор множеств, внутренних и внешних законов есть алгебраическая структура.

### 3.1 Фактор-структуры

$\triangleleft M$ , бинарное отношение<sup>2</sup>  $R$

Свойства бинарного отношения:

- $\forall x \exists y : xRy$  — полнота
- $\forall x, y \ xRy \ \& \ xRz \Rightarrow yRz$  — евклидовость

**Определение.**  $R$  — отношение эквивалентности, если оно:

- Рефлексивно
- Симметрично

---

<sup>2</sup> Над  $M$ .

- Транзитивно

**Определение.**  $\triangleleft(M, R)$  — множество с отношением эквивалентности. Тогда  $M/R$  — фактор-множество, состоящее из классов эквивалентности  $M$  по  $R$ . Каждому  $x \in M$  сопоставляется класс эквивалентности  $[x] \in M/R$

*Пример.*  $\triangleleft M = \mathbb{N}$  с операцией сложения,  $x, y \in M, \triangleleft(x, y) \in M \times M$ .

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

Несложно заметить, что фактор-множество  $(M \times M)/\sim$  соответствует  $\mathbb{Z}$ :

**Определение.**  $x \in M, y \in M$

$$[x \circ y] \stackrel{?}{=} [x] * [y]$$

Здесь  $*$  — фактор-закон закона  $\circ$ .

*Пример.*

$$(a_1, b_1) \tilde{+} (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Чтобы рассмотреть  $\hat{+}$  — фактор-закон операции  $\tilde{+}$ , нужно показать, что для  $z = [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]$  верно  $z = z_1 \hat{+} z_2$

**Определение.** Закон  $\circ$  согласован с отношением  $R$ , если:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, x_1 \in M \quad x R x_1 \\ \forall y, y_1 \in M \quad y R y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x \circ y) R (x_1 \circ y_1)$$

**Теорема 3.** Если закон композиции согласован с отношением эквивалентности, то он совпадает со своим фактор-законом.

$$[x] * [y] \stackrel{\text{def}}{=} [x \circ y] = [x] \circ [y]$$

*Обозначение.*

$$M \cdot N := \{m \cdot n \mid m \in M, n \in N\}$$

*Пример.*

- $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M \times M$
- $(c_1, d_1) \sim (a_1, b_1) \Leftrightarrow c_1 + b_1 = d_1 + a_1$
- $(a_1, b_1) \rightarrow [(a_1, b_1)] = z_1 \ni (c_1, d_1)$
- $(a_2, b_2) \rightarrow [(a_2, b_2)] = z_2 \ni (c_2, d_2)$
- $(a_1, b_1) \tilde{+} (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \rightarrow [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)] = z$



Выполнено ли  $(c_1 + c_2, d_1 + d_2) \in z$ ?

$$c_1 + c_2 + (b_1 + b_2) = d_1 + d_2 + (a_1 + a_2)$$

$$a_1 + d_1 = b_1 + c_1$$

$$a_2 + d_2 = b_2 + c_2$$

Таким образом, наша операция согласована.

# Лекция 4

## 25 сентября

### 4 Структура групп

**Определение (группа).**  $G$  — множество с внутренним законом  $\cdot$ , таким что:

1.  $\forall x, y, z \in G \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2.  $\exists e \in G : \forall x \in G \quad e \cdot x = x \cdot e = x$
3.  $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G : xx^{-1} = x^{-1}x = e$

*Пример.* Пусть  $S$  — множество,  $G$  — группа. Будем обозначать множество отображений  $S \rightarrow G$  как  $M(SG)$ . Наделим его структурой группы:

$$f, g \in M(SG) \Rightarrow \begin{cases} (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \\ f_e(x) = e_G \end{cases}$$

**Определение.**  $G, G, \sigma : G \rightarrow G'$ .

$\sigma$  — гомоморфизм группы  $G$  в группу  $G'$ , если:

$$\forall x, y \in G \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \sigma(e_G) = e_{G'}$$

**Лемма 5.**  $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e_{G'} &= \sigma(e_G) = \sigma(xx^{-1}) = \sigma(x)\sigma(x^{-1}) \\ \sigma(x)^{-1}e_{G'} &= \sigma(x)^{-1}\sigma(x)\sigma(x^{-1}) \\ \sigma(x)^{-1} &= \sigma(x^{-1}) \end{aligned}$$

□

*Обозначение.*

- $\text{hom}(G \rightarrow G')$  — множество всех гомоморфизмов  $G \rightarrow G'$ .
- $\text{End}(G) := \text{hom}(G \rightarrow G)$ .

**Определение.**  $\sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G')$  называется **изоморфизмом**, если:

$$\chi \in \text{hom}(G' \rightarrow G) : \sigma \circ \chi = \text{id}_{G'}, \chi \circ \sigma = \text{id}_G$$

*Обозначение.*

- $\text{Iso}(G \rightarrow G')$  — множество всех изоморфизмов
- $\text{Aut}(G) := \text{Iso}(G \rightarrow G)$  — множество **автоморфизмов**

**Лемма 6.**  $\sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G'), \chi \in \text{hom}(G' \rightarrow G'') \Rightarrow \zeta = \chi \circ \sigma \in \text{hom}(G \rightarrow G'')$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in G \quad \zeta(x \cdot y) &= (\chi \circ \sigma)(x \cdot y) \\ &= \chi(\sigma(x \cdot y)) \\ &= \chi(\sigma(x) \cdot \sigma(y)) \\ &= (\chi \circ \sigma)(x) \cdot (\chi \circ \sigma)(y) \\ &= \zeta(x) \cdot \zeta(y) \end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $\text{Aut}(G)$  — группа относительно  $\circ$ .

**Определение.**  $G$  — группа.

$\triangleleft S_G = \{S_i\}_{i \in I}$ :

$$\forall g \in G \quad a = \prod_{j \in J \subseteq I} S_j$$

$S_G$  тогда называется **множеством образующих группы  $G$** .

**Лемма 7.** Мы проиграли, вернемся к этой лемме позже.

**Определение** (ядро гомоморфизма).

$$\text{Ker } \sigma := \{g \in G : \sigma(g) = e\}$$

**Лемма 8.** Если  $\text{Ker } \sigma = \{e\}$ , то  $\sigma(x) = \sigma(y) \Rightarrow x = y$ , т.е.  $\sigma$  инъективно.

*Доказательство.*

$$\sigma(x)\sigma(y^{-1}) = \sigma(y)\sigma(y^{-1}) = e_{G'}$$

Таким образом,  $x$  есть обратный к  $y^{-1}$ , т.е.  $x = y$ . □

**Определение** (образ гомоморфизма).

$$\text{Im } \sigma = \{g' \in G' : \exists g \in G : \sigma(g) = g'\}$$

**Лемма 9.**  $\text{Im } \sigma = G' \Rightarrow \sigma$  сюръективно.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } \sigma = G' \\ \text{Ker } \sigma = \{e\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma - \text{изоморфизм}$$

**Определение.** Подгруппой  $H$  группы  $G$  называется подмножество элементов  $G$ , на котором групповой закон  $G$  индуцирует структуру группы.

**Определение.** Несобственные подгруппы:  $\{e_G\}, G$ .

Иначе подгруппа **собственная**.

*Пример.*  $\sigma \in \text{hom}(G, G')$ . Тогда  $\text{Ker } \sigma$  — подгруппа  $G$ ,  $\text{Im } \sigma$  — подгруппа  $G'$ .

## 4.1 Смежные классы

Пусть  $G$  — группа,  $H$  — подгруппа  $G$ .

**Определение.**  $gH, g \in G$  — левый смежный класс группы  $G$  по подгруппе  $H$ .

**Лемма 10.** Пусть  $\exists z : z \in gH, z \in g'H$ . Тогда  $gH = g'H$

*Доказательство.*  $z = gh, z = g'h' \Rightarrow gh = g'h' \Rightarrow g = g'h'h^{-1}$

$$gH = (g'h'h^{-1})H = g'h'h^{-1}H$$

□

**Лемма 11.**

$$\forall g, g' \in G \quad |gH| = |g'H|$$

*Доказательство.* Отображение  $h \mapsto gg^{-1}h$  есть биекция между  $gH$  и  $g'H$  □

**Обозначение.**  $(G : H)$  — индекс группы  $G$  по  $H$  — количество смежных классов.

*Примечание.* В общем случае это кардинальное число, но мы будем рассматривать только конечные индексы.

$(G : 1)$  — количество элементов  $G$  (порядок группы).

**Лемма 12.**

$$(G : 1) \cdot (G : H)$$

**Теорема 4.**  $H$  — подгруппа  $G$ ,  $K$  — подгруппа  $H$ .

$$(G : H)(H : K) = (G : K)$$

*Доказательство.*

$$G = \bigcup_i g_i H \quad H = \bigcup_j h_j K$$

$$G = \bigcup_i \bigcup_j g_i h_j K$$

$$g_i h_j K = g'_i h'_j K \Rightarrow \begin{cases} g_i H = g'_i H \\ h_j K = h'_j K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_i = g'_i \\ h_j = h'_j \end{cases}$$

□

**Лемма 13** (проигранная). Дано:  $G, G'$  — группы,  $S_G$  — множество производящих  $G$ ,  $f : S_G \rightarrow G'$ .

Если  $\exists \tilde{f} \in \text{hom}(G, G')$ , то  $\tilde{f}|_{S_G} = f \Rightarrow \tilde{f}$  единственно.

$$\begin{array}{ccc} S_G & \xrightarrow{f} & G' \\ & \nearrow \tilde{f} \in \text{hom}(G, G') & \\ G & & \end{array}$$

*Доказательство.*  $\triangleleft g \in G, g' := \tilde{f}(g)$

$$g = \prod_{i \in I} S_i \quad \tilde{f}(g) = \tilde{f}\left(\prod_{i \in I} S_i\right) = \prod_{i \in I} \tilde{f}(S_i) = \prod_{i \in I} f(S_i)$$

□

**Определение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется **нормальной** или **инвариантной**, если  $\forall g \in G \quad gH = Hg$ . Аналогично можно определить через  $H = g^{-1}Hg$

*Обозначение.*  $H \triangleleft G$

**Лемма 14.**

- $G$  — группа

$$\bullet \sigma \in \text{hom}(G, G')$$

Тогда  $\text{Ker } \sigma$  — нормальная подгруппа  $G$ .

*Доказательство.*  $H := \text{Ker } \sigma$

$$\sigma(e) = \sigma(g^{-1}g) = \sigma(g^{-1})\sigma(g) = \sigma(g^{-1})e\sigma(g) = \sigma(g^{-1})\sigma(H)\sigma(g) = \sigma(g^{-1}Hg) = e_{G'}$$

Таким образом,  $g^{-1}Hg \subset H$ . Заменяем  $g$  на  $g^{-1}$ :  $H \subset g^{-1}Hg \Rightarrow H = g^{-1}Hg$ .  $\square$

$\triangleleft G$  — группа,  $H$  — подгруппа  $G$ .

Рассмотрим отношение  $\sim$ :  $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in H$ . Это отношение эквивалентности:

1.  $g_1g_1^{-1} = e \in H$
2.  $g_1g_2^{-1} \in H \Rightarrow (g_1g_2^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$
3.  $g_1g_2^{-1} \in H, g_2g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1g_3^{-1} \in H$

Кроме того,  $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1H = g_2H$ , поэтому  $\sim$  это отношение эквивалентности на смежных классах, будем обозначать фактор-множество как  $G/H$ .

Для каких  $H$  выполняется следующее: если  $x_1 \sim y_1$  и  $x_2 \sim y_2$ , тогда  $(x_1x_2) \sim (y_1y_2)$ ?  $x_1H = y_1H, x_2H = y_2H$ . Тогда  $H$  — нормальная подгруппа.

$\triangleleft G/H, H \triangleleft G, \cdot : [x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ . Свойства “ $\cdot$ ”:

1.  $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$
2.  $\exists [e] : [x][e] = [e][x] = [x], [e] = H$
3.  $[x]^{-1} = [x^{-1}]$

*Примечание.*  $G/H$  — фактор-группа.

$$\triangleleft \sigma : \text{Ker } \sigma = H$$

Тогда пусть  $\sigma : G \rightarrow G/H, g \mapsto [g]$ .