1 Определения

1.1 Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ \ f\Big|_{e_i} = \text{const}_i = c_i$$

При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

1.2 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Дано выше. (1.1, стр. 1)

1.3 ! Измеримая функция

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E, если $\forall a \in \mathbb{R} \ \ E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

1.4 Свойство, выполняющееся почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно **при почти всех** x из E = **почти всюду** на E = **почти везде** на E = **п.в.** E, если:

$\exists e \in E : \mu e = 0$ и $W(x)$ истинно при $\forall x \in E \setminus e$

1.5 ! Сходимость почти везде

Если $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ при п.в. $x \in E$, тогда говорят, что f_n **сходится на** E **почти везде**.

1.6 Сходимость по мере

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n **сходится к** f **по мере** μ, обозначается $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f : \forall \varepsilon > 0 \ \ \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1.7 Теорема Егорова о сходиомсти почти везде и почти равномерной сходиомсти

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо
- $f_n \to f$ почти везде

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

Proof.

Примечание. Кажется, доказательство знать не нужно, т.к. нам его не давали.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$E_{n,k} = \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

Т.к. $f_n \to f$ почти везде:

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Т.к. $\mu X < +\infty$, то μ непрерывно сверху, т.е.

$$\lim_{n \to +\infty} \mu E_{n,k} = \mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k} \right) = 0$$

Тогда по определению предела $\exists (n_k)$:

$$\mu E_{n_k,k} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Пусть $e = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k,k}$. По σ-аддитивности μ:

$$\mu(e) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Кроме того, $f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$. □

1.8 Интеграл ступенчатой функции

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

1.9 ! Интеграл неотрицательной измеримой функции

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \text{ — ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

1.10 ! Суммируемая функция

Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то f называется **суммируемой**.

1.11 Интеграл суммируемой функции

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

1.12 Образ меры при отображении

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathfrak{B}, \ ), \Phi : X \to Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Упражнение 1. Проверить, что Φ^{-1} — σ-алгебра.

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$. Тогда ν — мера:

$$\nu\left(\bigsqcup E_n\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup E_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ при отображении Φ и $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

1.13 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримо на X.

$$\forall B \in \mathfrak{B} \;\; \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда ν называется “**взвешенный образ меры** μ при отображении Φ”, ω называется **весом**.

1.14 Плотность одной меры по отношению к другой

Рассмотрим частный случай: $X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$ - тождественное отображение. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё ω.

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации ω называется **плотностью** меры ν относительно меры μ и тогда по теореме Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x)\omega(x) d\mu$$

1.15 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

- $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие
- $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация M, т.е. $\varphi(G) = M$

$E \subset M$ — **измеримо по Лебегу**, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу.

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M : E \text{ изм.}\} = \{\varphi(A), A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

1.16 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ.

1.17 ! Поверхностный интеграл первого рода

- M — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$
- φ — параметризация M
- $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемо по мере S на M

Тогда $\iint_M f dS = \iint_M f(x, y, z) dS$ называется **интегралом первого рода** от f по многообразию M.

1.18 Произведение мер

- $\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν σ-конечны

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 на σ-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$[1]

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ — **произведение пространств с мерой** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

1.19 ! Теорема Фубини

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- f — суммируемо на $X \times Y$

Тогда:

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

1.20 Сторона поверхности

Сторона поверхности есть непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности.

Для поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ сторона есть отображение

$$W : M \to \mathbb{R}^3 \quad \forall x \ |W(x)| = 1, W(x) \perp \Phi'_u, \Phi'_v$$

[1] $\otimes$ — не тензорное произведение

1.21 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

u, v — касательные непараллельные вектора к M. Тогда (u, v) будем называть **касательным репе́ром**. Нормаль в таком случае можно восстановить векторным произведением $u \times v$. После нормировки по полю реперов мы получаем поле единичных нормалей, т.е. сторону поверхности.

1.22 ! Интеграл II рода

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — непрерывное векторное поле

Тогда $\int_M \langle F, n_0 \rangle \, dS$ — **интеграл II рода** векторного поля F по поверхности M.

1.23 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

- M — поверхность в $\mathbb{R}^3$
- n_0 — сторона
- γ — контур *(петля)* в M, ориентированная
- $N_{\text{внутр.}}$ — вектор нормали, направленный внутрь петли

Говорят, что сторона поверхности n_0 согласована с ориентацией γ, если:

$$(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$$

Т.е. если ориентация γ задаёт сторону n_0.

1.24 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Неравенство Гёльдера.

- $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- E — измеримо
- $f, g : E \to \mathbb{C}$
- f, g — измеримы

Тогда $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$

Proof. Не будет, но общая идея следующая:

1. Для ступенчатых функций — из неравенства Гёльдера для сумм[2]
2. Для суммируемых функций — по теореме ! Теорема Леви.

□

Неравенство Минковского.

В тех же условиях $\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Proof. Не будет, можно вывести аналогично выводу во втором семестре. □

Примечание. Для $p = 1$ тоже верно.

1.25 Интеграл комплекснозначной функции

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \mathbb{C}$, т.е. $x = f(x) = u(x) + iv(x), u = \Re f, v = \Im f$

f **измеримо**, если u и v измеримы[3].

f **суммируемо**, если u и v суммируемы.

Если f суммируемо, то $\int_E f = \int_E u + i\int_E v$

1.26 ! Пространство $L^p(E, \mu)$

Определение пространства $L^p, 1 \leq p < +\infty$

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
- $E \subset X$ — измеримо.

$\mathcal{L}^p(E, \mu) := \{f$: почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}$[4]$), f$ — изм.[5], $\int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$ — это линейное пространство по неравенству Минковского.

Зададим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathcal{L}^p(E, \mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ почти везде.

$\mathcal{L}^p/_\sim = L^p(E, \mu)$ — линейное пространство.

Задаём норму на L^p: $||f||_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, обозначается $||f||_p$

[2] Мы его рассматривали во втором семестре.
[3] Или измеримы почти везде.
[4] $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
[5] Или измерима почти везде.

Эта функция корректно определена, т.к. для $f \sim g$: $||f||_p = ||g||_p$. Кроме того, она является нормой, т.к.:

1. $||f||_p \geq 0$ — очевидно, т.к. $\int |f|^p \geq 0$
2. $||f||_p = 0 \Rightarrow \int |f|^p = 0 \Rightarrow \int |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в. $\Rightarrow f \sim 0$.
3. $||f \cdot \alpha||_p = \left(\int |f \cdot \alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \cdot ||f||_p$
4. $||f + g||_p = ||f||_p + ||g||_p$ по неравенству Минковского.

1.27 ! Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$L^\infty(E, \mu) = \{f :$ почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}),$ изм., ess sup $|f| < +\infty\}/_\sim$ — линейное пространство.

$||f||_{L^\infty(E,\mu)} :=$ ess $\sup_E |f| = ||f||_\infty$

1.28 ! Существенный супремум

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
- $E \subset X$ — измеримо.
- f : почти везде на $E \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо

Определение (существенный супремум[6]).

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f = \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}}, f \leq A \text{ почти везде}\}$$

При этом A называется существенной вещественной границей.

Свойства.

- ess sup $f \leq \sup f$ — очевидно.
- $f \leq$ ess sup f почти везде — пусть $B =$ ess sup f, тогда $\forall n \;\; f \leq B + \frac{1}{n}$ почти везде.
- f — суммируемо, f, g — почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, ess $\sup_E |g| < +\infty$. Тогда $|\int_E fg| \leq$ ess sup $|g| \cdot \int_E |f|$

  Proof.
  $$\left|\int_E fg\right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f| = \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$
  □

[6] Также называется истинным супремумом

1.29 ! Ротор, дивергенция векторного поля

Ротор *(вихрь)*

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

V — гладкое векторное поле. Тогда **дивергенция** $\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

1.30 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если $\exists$ гладкое векторное поле B в Ω, такое что $A = \operatorname{rot} B$.

1.31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

Наблюдение:

$$\operatorname{div} V(a) \overset{(??)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V dxdydz \overset{(??)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, n_0 \rangle \, dS$$

— не зависит от координат.

$$\operatorname{rot} F(a) = \lim_{\Omega \to x_0} \frac{1}{S(\Omega_\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} A, n_0 \rangle \, dS$$

1.32 ! Гильбертово пространство

$\mathcal{H}$ — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при этом $\mathcal{H}$ — полное, то оно называется **Гильбертовым**.

1.33 Ортогональный ряд

Ряд $\sum a_k$ **ортогональный**, если $\forall k, l \;\; a_k \perp a_l$.

1.34 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

Сходящийся ряд: $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H}$: $S_N := \sum_{1 \le n \le N} a_n$, если $\exists S \in \mathcal{H} : S_N \xrightarrow[\text{в } \mathcal{H}]{} S$

1.35 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — **ортогональное семейство**, если:

1. $\forall k, l \;\; e_k \perp e_l$
2. $\forall k \;\; e_k \neq 0$

Если потребовать $||e_k|| = 1$, то такое семейство называется **ортонормированным**.

(??): по непрерывности div
(??): по формуле Стокса

1.36 ! Ортонормированная система

Дано выше. (1.35, стр. 9)

1.37 Коэффициенты Фурье

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

$c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$ — называется **коэффициентом Фурье** по системе $\{e_k\}$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ — ряд Фурье вектора x по системе e_k.

1.38 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

Дано выше. (1.37, стр. 10)

1.39 Базис, полная, замкнутая ОС

Определение. Ортогональная система $\{e_k\}$ — **базис** $\mathcal{H}$, если $\forall x \in \mathcal{H} \;\; x = \sum c_k(x)e_k$

Определение. Ортогональная система **полная** *(нечего добавить)*, если $\nexists z \neq 0 : z \perp c_k \;\forall k$.

Определение. Ортогональная система **замкнутая**, если $\forall x \;\; \sum |c_k(x)|^2 ||e_k||^2 = ||x||^2$

1.40 Тригонометрический ряд

- $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический полином степени не выше** n.
- $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — **тригонометрический ряд**, где a_k, b_k — коэффициенты тригонометрического ряда.
- $$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$
  Тогда при подстановке этих формул в $T_n(x)$ получается $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ — **тригонометрический полином в комплексной записи**.
- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ — **тригонометрический ряд в комплексной записи**, понимается как $\lim_{n \to +\infty} T_n(x)$.

1.41 Коэффициенты Фурье функции

$f \in L^1[-\pi,\pi]$. $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$, заданные в лемме, называются **коэффициентами Фурье** функции f, а ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ или $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ называется **рядом Фурье** этой функции.

1.42 Класс Липшица с константой M и показателем альфа

Определение. **Класс Липшица** для $M > 0, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0,1]$:

$$\mathrm{Lip}_M\alpha(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \forall x, y\ \ |f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha\}$$

1.43 Ядро Дирихле, ядро Фейера

1. Ядро Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right)$$

2. Ядро Фейера:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

1.44 ! Свертка

$f, K \in L^1[-\pi,\pi]$. $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$ называется **сверткой** функций f, K.

1.45 ! Аппроксимативная единица

- $D \subset \mathbb{R}$
- h_0 — предельная точка D в $\overline{\mathbb{R}}$

Семейство функций $\{K_h\}_{h\in D}$, удовлетворяющее нижеуказанным аксиомам, называется **аппроксимативной единицей**.

Аксиома 1. $\forall h \in D\ \ K_h \in L^1[-\pi,\pi], \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$

Аксиома 2. L_1 нормы функций K_h ограничены в совокупности:

$$\exists M\ \ \forall h\ \ \int_{[-\pi,\pi]} |K_h| \le M$$

Аксиома 3. $\forall \delta \in (0,\pi)$

$$\int_{E_\delta} |K_h|\, dx \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

1.46 Усиленная аппроксимативная единица

Рассмотрим аксиому 3': $K_h \in L^{+\infty}[-\pi, \pi]$ и $\forall \delta \in (0, \pi)$ $\quad \text{ess sup}_{t \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \to h_0} 0$

Утверждение. Аксиома 3' $\Rightarrow$ аксиома 3.

Определение. Семейство функций, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3' называется **усиленной аппроксимативной единицей**.

1.47 Метод суммирования средними арифметическими

$$\sum a_n \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$$

$$\sum a_n \xlongequal{\text{сред. арифм.}} S$$

, если $\sigma_n \to S$

1.48 Суммы Фейера

$f \in L^1[-\pi, \pi], S_n(f)$ — част. сумма ряда Фурье.

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)$$

2 Теоремы

2.1 Лемма "о структуре компактного оператора"

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Proof. $W := V^* V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в $\mathbb{C}^m$)*, * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \overset{(??)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \overset{(??)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- **(??)**: из линейной алгебры:
$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$
$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$
$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \overset{\text{def } h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \overset{(??)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \overset{(??)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \overset{(??)}{=} \delta_{ij}$$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \overset{\text{def } x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i\right) \overset{(??)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) \overset{\text{def } h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \overset{(??)}{=} \det(V^* V) \overset{\text{def } W}{=} \det W \overset{(??)}{=} c_1 \dots c_m$$

(??): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
(??): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
(??): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
(??): при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$
(??): в силу линейности V

$$|\det V| = \sqrt{c_1}\dots\sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

2.2 ! Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \;\; V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Proof.

1. Если $\det V = 0 \quad \mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\mathrm{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \;\; V(E) \subset \mathrm{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$
2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

   $$\mu(E+a) = \lambda(V(E+a)) = \lambda(V(E)+V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

   $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

   Мы хотим найти k, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$ — единичный куб на векторах g_i.

   По 2.1 $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$.

   $$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \dots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

   Таким образом, $k = |\det V|$

□

2.3 Теорема об измеримости пределов и супремумов

f_n — измеримо на X. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x \;\; \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

(??): в силу мультипликативности $\det$ и инвариантности относительно транспонирования.
(??): т.к. $\det$ инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

Proof.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(??)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   (??):

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

   $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n(s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. $\sup$ и $\inf$ измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.

3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

2.4 ! Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия

- $f : X \to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \ \ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

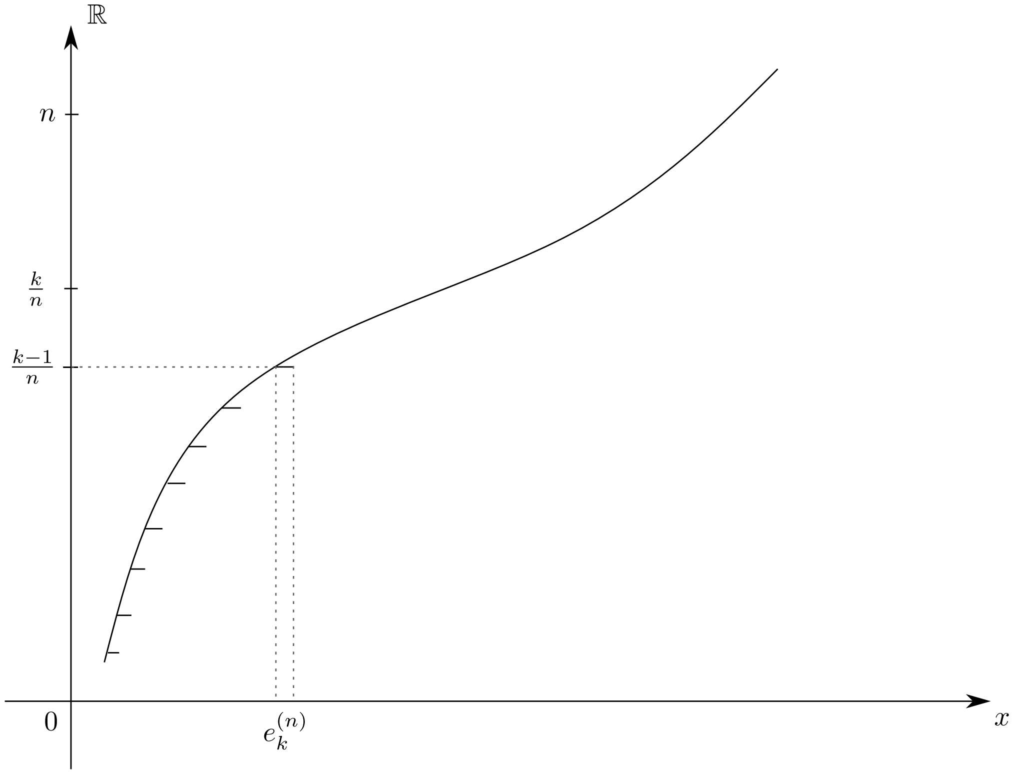
$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \quad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$



$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x) : \begin{cases} g_n(x) \le f(x) \\ f(x) = +\infty : \ \forall n \ \ x \in e_{n^2+1}^{(n)} \Rightarrow g_n(x) = n \\ f(x) < +\infty : \ |g_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$f_n = \max(g_1, ..., g_n)$$
$$g_n(x) \le f_n(x) \le f(x)$$
$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Следствие 0.1.

- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ всюду и $|f_n| \le |f|$

Proof. Рассмотрим срезки f^+, f^-, дальше очевидно. □

Следствие 0.2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо (пусть $0 \cdot \infty = 0$).

Proof.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \to f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \to g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \to fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. □

Следствие 0.3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Proof.

$$f_n + g_n \to f + g$$

□

2.5 Измеримость функции, непрерывной на множестве полной меры

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Proof. f — измеримо на E', т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, λ_m — полная в $\mathbb{R}^m$[7] $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E.

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. □

[7] Любое подмножество множества нулевой меры измеримо.

2.6 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Proof. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$

$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon) = \varnothing$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \to 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \to f$, $\varphi_n(x) := \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \to 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

2.7 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде.

Proof.

$$\forall k \;\; \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \;\; \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \overset{(??)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при $x \notin E \;\; f_{n_k} \to f$.

$$x \notin E \;\; \exists N \;\; x \notin E_k \text{ при } k > N \;\; |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

2.8 Простейшие свойства интеграла Лебега

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, g, f — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

   Proof.

   (a) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.

   (b) При произвольных $f, g \;\; f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ *(очевидно из определения).* Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

   □

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$
3. $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

   Proof.

   (a) f — ступ. Тривиально.

   (b) f — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

   (c) $\int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$

   □

(??): по счётной полуаддитивности меры.

Примечание. f — измерима. Тогда f суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

Proof.

$\Leftarrow$ следует из $f^+, f^- \le |f|$

$\Rightarrow$ будет доказано позже на этой лекции.

□

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c\int_E f$

   Proof.

   (a) $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

   (b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \ge 0$ тривиально.

   □

5. $\exists \int_E f d\mu$. Тогда $|\int_E f d\mu| \le \int_E |f| d\mu$

   Proof.

$$-|f| \le f \le |f|$$
$$-\int |f| \le \int f \le \int |f|$$
$$\left|\int f\right| \le \int |f|$$

   □

6. $\mu E < +\infty, a \le f \le b$. Тогда

$$a\mu E \le \int_E f \le b\mu E$$

   Следствие 0.4. f — измеримо на E, f — ограничено на E, $\mu E < +\infty$. Тогда f суммируемо на E

7. f суммируема на E. Тогда f почти везде конечна.

   Proof.

   (a) $f \ge 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \ge n\mu A \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

   (b) В произвольном случае аналогично со срезками.

   □

2.9 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

Лемма 1.

- $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- g — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Proof.

$$\begin{aligned}\int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\overset{(??)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu\end{aligned}$$

□

Теорема 1.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на A
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

Proof. Докажем, что части равенства $\leq$ и $\geq$, тогда равенство выполнено.

$\leq$ $\vartriangleleft$ ступенчатую $g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \overset{(??)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

(??): переставлять можно, т.к. члены суммы ≥ 0.

$$\int_A fd = \sup_g \int_A g \le \sum \int_{A_i} f$$

$\geq$ 1. $A = A_1 \sqcup A_2$

$\lessdot$ ступенчатые $g_1, g_2 : 0 \le g_1 \le f \cdot \chi_{A_1}, 0 \le g_2 \le f \cdot \chi_{A_2}$. Пусть E_k — совместное разбиение, у g_1 коэффициенты α_k, у g_2 — β_k.

$$\begin{aligned} 0 \le g_1 + g_2 &\le f \cdot \chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A (g_1 + g_2) &\le \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\overset{(??)}{\le} \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\overset{(??)}{\le} \int_A f \end{aligned}$$

2. Для $n \in \mathbb{N} : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ тривиально по индукции.

3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$\int_{B_n} f \ge 0$, т.к. $f \ge 0$. Таким образом:

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \ge \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$$

□

Следствие 1.1 (Счётная аддитивность интеграла). f суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Proof. Очевидно, если рассмотреть срезки. □

(??): по лемме 1.
(??) и (??): переход к sup

2.10 ! Теорема Леви

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n измеримо
- $\forall n \;\; 0 \le f_n \le f_{n+1}$ почти везде.
- $f(x) := \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Примечание. f задано везде, кроме множества e меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e. Тогда f измеримо на X.

Proof.

$\le$ очевидно, т.к. $f_n \le f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X \setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_{0} = \int_{X \setminus e} f_n \le \int_{X \setminus e} f \le \int_X f$$

$\ge$ достаточно проверить, что $\forall$ ступенчатой $g : 0 \le g \le f$ выполняется следующее $\lim \int_X f_n \ge \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что $\forall c \in (0, 1) \;\; \lim \int_X f_n \ge c \int_X g$

$$E_n := X(f_n \ge cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \ge \int_{E_n} f_n \ge c \int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \ge c \cdot \lim \int_{E_n} g \overset{(??)}{=} c \int_X g$

□

2.11 Линейность интеграла Лебега

- $f, g \ge 0$
- f, g измеримо на E

Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

(??): по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

Proof.

1. f, g — ступенчатые, т.е. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

   $$\int_E f+g = \sum(\alpha_k+\beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$

   $g \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$

   $$f_n + g_n \to f + g$$
   $$\int_E f + \int_E g \xleftarrow{\text{т. Леви}} \int_E f_n + \int_E g_n \xlongequal{\text{пункт 1}} \int_E f_n + g_n \xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g$$

□

Следствие 1.2. f, g суммируемы на E. Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

Доказательство суммируемости. $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$
$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$
$$\int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-$$

□

2.12 Теорема об интегрировании положительных рядов. Следствие о рядах, сходящихся почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде
- u_n измеримо

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Proof. По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \quad 0 \le S_n \le S_{n+1} \le \dots$$

$S_n \to S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$, тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) = \int_E S \leftarrow \int_E S_n \xlongequal{\text{линейность } \int} \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k$$

□

Следствие 1.3. u_n измеримо и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех x.

Proof.

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

2.13 Абсолютная непрерывность интеграла

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall E -$ изм., $\mu E < \delta : \left|\int_E f\right| < \varepsilon$

Proof. [8]

$$X_n := X(|f| \ge n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu\left(\bigcap X_n\right) \overset{(??)}{=} 0$$

[8] Теоремы, не следствия

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f| = \int_{E\cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E\cap X^c_{n_\varepsilon}} |f| \overset{(??)}{\leq} \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E\cap X^c_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{<\delta} \cdot n_\varepsilon < \varepsilon$$

□

Следствие 1.4. f суммируемо на X, $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \to 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \to 0$

2.14 ! Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:
  1. $\forall n \ |f_n| \overset{(??)}{\leq} g$ почти везде
  2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Proof. f_n — суммируемы в силу неравенства (??), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$

   Зафиксируем ε. $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \tag{2}$$

(??): Т.к. f на $\bigcap X_n$ бесконечна и f почти везде конечна.
(1): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
(??): Т.к. $|f|$ на $E \cap X^c_{n_\varepsilon}$ не превосходит n_ε по построению X_{n_ε}

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \leq \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[\text{сл. т. об абс. непр.}]{n\to+\infty} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon\mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

   Утверждение: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists A \subset X,$ изм., конечной меры : $\int_{X\setminus A} g < \varepsilon$. Докажем его.

$$\int_X g = \sup\left\{ \int g_n \,\middle|\, 0 \leq g_n \leq g, g_n - \text{ступ.} \right\}$$

   Возьмём достаточно большое n и положим:

$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$

$$0 \leq \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon$$

$$\int_A g - g_n + \int_{X\setminus A} g = \int_X g - \int_X g_n < \varepsilon \implies \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$

   Вернёмся к теореме. Зафиксируем $\varepsilon > 0$:

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X\setminus A} \leq \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\to 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X\setminus A} 2g}_{<2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

2.15 ! Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо
- $f_n \overset{(??)}{\to} f$ почти везде
- $\exists g$, называемое "суммируемая мажоранта":
  1. $\forall n\ \ |f_n| \leq g$ почти везде
  2. g — суммируемо на X

Тогда f_n, f — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, и тем более $\int_X f_n \to \int_X f$

Proof. Суммируемость f_n, f, а также утверждение "и тем более" доказываются так же, как в теореме ! Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$
$$0 \overset{(??)}{\le} h_n \overset{(??)}{\le} 2g$$

h_n монотонно убывает, что очевидно по определению $\sup$.

$$\lim h_n \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \overset{(??)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \ge 0$ и возрастает как последовательность функций, $2g - h_n \to 2g$ почти везде. Тогда по теореме ! Теорема Леви:

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$
$$\int_X |f_n - f| \le \int_X h_n \to 0$$

□

2.16 Теорема Фату. Следствия

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- $f_n \ge 0$
- f_n измеримо
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists C > 0 \ \forall n \quad \int_X f_n \le C$

Тогда $\int_X f \le C$

Proof.

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$
$$0 \le g_n \le g_{n+1}$$
$$\lim g_n \overset{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.}$$

(??): по построению
(??): по (2)
(??): по (??)

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \tag{3}$$

$$\int_X g_n \overset{(??)}{\to} \int_X f$$

Значит $\int_X f \leq C$ по предельному переходу в (3) □

Следствие 1.5.

- $f_n, f \geq 0$
- f_n, f измеримы
- f_n, f почти везде конечны
- $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists C > 0 \ \forall n \quad \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Proof.

$$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f \xRightarrow[\text{Т. Рисса}]{} \exists (n_k) : f_{n_k} \to f \text{ п.в.}$$

По теореме Теорема Фату. Следствия получим искомое. □

Следствие 1.6.

- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо

Тогда $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

Proof. Возьмём g_n как в теореме, тогда выполняется неравенство $\int_X g_n \leq \int_X f_n$. Выберем $(n_k) : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \to +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k}$$

$$\downarrow$$

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

□

(??): по теореме ! Теорема Леви

2.17 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Наблюдение 1. $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо относительно $\mathfrak{B}$. Тогда $f \circ \Phi$ — измеримо относительно $\mathfrak{A}$.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространство с мерой
- $\Phi : X \to Y$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо на X
- ν взвешенный образ μ при отображении Φ с весом ω

Тогда $\forall$ измеримой относительно $\mathfrak{B}$ f на Y, $f \geq 0$ выполнено следующее:

1. $f \circ \Phi$ измеримо на X относительно $\mathfrak{A}$
2. $$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \tag{4}$$

То же самое верно для суммируемой f.

Proof. Измеримость $f \circ \Phi$ выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

   $$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда (4) это:

   $$\int_Y \chi_B d\nu = \int_B 1 \cdot d\nu = \nu B \stackrel{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$

   Это выполнено по определению νB

1. Пусть f — ступенчатая

   (4) следует из линейности интеграла.

2. Пусть $f \geq 0$, измеримая

   По теореме ! Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых. Следствия и теореме ! Теорема Леви $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots$ — ступенчатые, $h_i \leq f, h_i \to f$

   $$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \to +\infty} (4)$$

3. Пусть f измерима.

   Тогда для $|f|$ выполнено (4); $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_- = f_- \circ \Phi \cdot \omega$$

   Таким образом, искомое выполнено для f_+ и f_-, а следовательно и для f.

□

Следствие 1.7 (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f суммируемо на Y

Тогда

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega(x)d\mu$$

Proof. В условие теоремы подставим $f \cdot \chi_B$ □

2.18 Критерий плотности

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- ν — мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \;\; \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом $0 \cdot \infty$ считается $= 0$.

Доказательство теоремы Критерий плотности.

“⇒”

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \omega(x) d\mu(x)$$

$$\inf \omega \cdot \mu A = \int_A \inf \omega d\mu \leq \int_A \omega(x) d\mu(x) \leq \int_A \sup \omega d\mu = \sup \omega \cdot \mu A$$

"$\Leftarrow$" Рассмотрим $\omega > 0$. Общность не умаляется, т.к. пусть $e = X(\omega = 0)$, тогда $\nu(e) \overset{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$, поэтому в случае $A \cap e \neq \varnothing$ всё ещё только лучше.

Фиксируем число $q \in (0, 1)$.

$$A_j := A(q^j \leq \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \overset{(??)}{\leq} \nu A_j \overset{(??)}{\leq} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \overset{(??)}{\leq} \int_{A_j} \omega d\mu \overset{(??)}{\leq} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu &= q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\overset{(??)}{\leq} \sum q^j \mu A_j \\ &\overset{(??)}{\leq} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\overset{(??)}{\leq} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\overset{(??)}{\leq} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

Тогда предельный переход при $q \to 1 - 0$ дает искомое.

$\square$

(??): по (??)
(??): по (??)
(??): по (??)
(??): по (??)

2.19 Лемма о единственности плотности

- f, g суммируемы
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде.

Proof. $h := f - g$. Дано: $\forall A \quad \int_A h = 0$; доказать: $h = 0$ почти везде.

$$A_+ := X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$
$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

□

2.20 Лемма об оценке мер образов малых кубов

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- O открыто
- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \ \ \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется неравенство $\lambda\Phi(Q) < c\lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать, что Q — замкнутые кубы.

Proof. $L := \Phi'(a)$ — обратимо[9]

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$$
$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o^{10}(x - a)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^{11}}(a) \ \ \forall x \in B_\varepsilon(a) \ \ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a), a \in Q, Q$ — куб со стороной h.

[9] Т.к. $\det \Phi'(a) \neq 0$.
[10] Это не то же самое o, что строчкой выше.
[11] Это не радиус шара, а параметр.

При $x \in Q$:

$$|x-a| \le \sqrt{m}h^{12}$$

$$|\Psi(x)-x| \overset{(??)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a| \le \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$, т.к. при $x, y \in Q$

$$\begin{aligned} |\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\le |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\le |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\le (1+2\varepsilon)h \end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \le (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \le |\det L|(1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем ε такое, чтобы $|\det L|(1+2\varepsilon)^m < c$, потом берём $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

2.21 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Лемма 2.

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- O открыто
- f непрерывна
- A измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- Q — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр. } \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- Φ диффеоморфизм

[12] Это диагональ куба со стороной h в $\mathbb{R}^m$.
(??): т.к. $x \in B_\varepsilon(a)$

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \;\; \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Proof.

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda\Phi(A)$ — мера

Надо доказать, что J_Φ — плотность ν относительно λ.

Достаточно проверить условие теоремы Критерий плотности, что $\forall$ измеримого A:

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \overset{(??)}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для $\Phi(A)$ и отображения Φ^{-1}

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda\Phi(A) \leq \lambda A$$

$$\lambda\Phi(A) \leq \lambda A \cdot \frac{1}{\inf \frac{1}{|\det \Phi'|}}$$

$$\lambda\Phi(A) \leq \lambda A \cdot \sup |\det \Phi'|$$

1. Проверяем (??) для случая A — кубическая ячейка, $A \subset \overline{A} \subset O$

   От противного: $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

   Возьмём $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$.

   Запускаем половинное деление: режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую" ячейку $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берём $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и т.д.

   $a \in \bigcap \overline{Q}_i$

   $$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \qquad \forall n \;\; C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{5}$$

   $C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi$, в частности $c > |\det \Phi'(a)|$. Мы получили противоречие с леммой Лемма об оценке мер образов малых кубов: в сколько угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q}_n$, где выполнено (5)

2. Проверяем (??) для случая A открыто.

   Это очевидно, т.к. $A = \bigsqcup Q_j, Q_j$ — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \leq \sum \lambda Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \leq \sup_A J_\Phi \cdot \sum \lambda Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{6}$$

3. По лемме 2 неравенство (??) выполнено для всех измеримых A:

   $O = \bigsqcup Q_j$ — кубы $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset O$, $A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$

$$\nu A_j \leq \nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \leq \inf_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} J_\Phi \cdot \lambda A_j$$

   Аналогично формуле (6) получаем $\nu A \leq \sup_A f \cdot \lambda A$

□

2.22 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- Φ - диффеоморфизм

Тогда $\forall$ измеримой $f \geq 0$, заданной на $O' = \Phi(O)$:

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой f.

Proof. Применяем теорему Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры при $X = Y = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m, \mu = \lambda, \nu(A) = \lambda(\Phi(A))$:

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1} B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 2.21 $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} J_\Phi d\lambda$, т.е. λ — взвешенный образ исходной меры по отношению к Φ. □

2.23 Теорема о произведении мер

1. m_0 — мера на $\mathcal{P}$
2. μ, ν — σ-конечны $\Rightarrow m_0$ тоже σ-конечно[13].

[13] Т.е. пространство можно представить в виде счётного объединения множеств конечной меры.

Proof.

1. Проверим счётную аддитивность m_0, т.е. $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k$[14], если $A \times B = P = \bigsqcup P_k$, где $P_k = A_k \times B_k$

   Заметим, что $\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$.

   Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, где $\forall x \in X, y \in Y \;\; \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$

   Слева измеримая функция, справа — неотрицательный ряд $\Rightarrow$ можем интегрировать.

   Проинтегрируем по y по мере ν по пространству Y:

$$\chi_A(x)\nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

   Проинтегрируем по x по мере μ по пространству X:

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

   Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:
   - μ σ-конечно $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k$ — конечно $\forall k$
   - ν σ-конечно $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n$ — конечно $\forall n$

   Тогда $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$. Конечное произведение конечных конечно, поэтому m_0 σ-конечно.

□

2.24 Принцип Кавальери

[15]

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечны.
- μ, ν — полные.
- $m = \mu \times \nu$
- $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

[14] Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

[15] Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[16] функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y.

Proof. Пусть $\mathfrak{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1. $C = A \times B$, где A и B измеримы в соответствующих пространствах $\Rightarrow C \in \mathfrak{D}$, так как:
   (a) $C_x = \begin{cases} \varnothing, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases}$ и оба случая очевидно $\in \mathfrak{B}$
   (b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — функция $\nu B \cdot \chi_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in \mathfrak{D}$, дизъюнктны $\overset{?}{\Rightarrow} \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$. Обозначим $E = \bigsqcup E_i$

   $E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x$ измеримы почти везде $\Rightarrow$ при почти всех x все $(E_i)_x$ измеримы.

   Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$ по определению σ-алгебры — это 1.

   $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow$ Функция $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

   $\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)x = \sum_i mE_i = mE$ — это 3.
3. $E_i \in \mathfrak{D}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty$. Тогда $E \in \mathfrak{D}$.

   $\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x$ — конечно при почти всех x.

   $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots, E_x = \bigcap (E_i)_x$

   Тогда E_x измеримо п.в. *(это 1.)* и $\lim_{i \to +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при п.в. x — непрерывность сверху ν.

   Таким образом, $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

   $\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ — это 3.

   По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла $|\nu(E_i)x| \leq \nu(E_i)x$ суммируемо.

[16] Функция задана при почти всех X; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду.

Итого: Если $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$. Строго говоря, мы это не доказали, т.к. ещё нужно упомянуть процесс дизъюнктнизации в полукольце и то, что пересечение множеств лежит в полукольце, следовательно любое пересечение можно свести к тому, которое мы рассматривали.

4. $E \subset X \times Y, mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

   $mE = \inf \{\sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P}\}$ — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

   $\exists$ множество H вида $\bigcap_l \bigcup_k P_{kl}$, т.е. пересечение аппроксимаций. По пункту 3 $H \in \mathfrak{D}$. При этом $E \subset H, mH = mE = 0$.

   $0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ про почти всех x.

   $E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow E_x$ — измеримо при почти всех x — это 1 и $\nu E_x = 0$ почти везде, это 2.

   $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$ — это 3.

5. C — m-измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in \mathfrak{D}$.

   $C = H \setminus e$, где H имеет вид $\bigcap \bigcup P_{kl}, me = 0$. Почему? Из предыдущих соображений $C \subset H$, а нулевая мера $H \setminus C$ следует из того, что мера C конечна. Как оно следует?

   $mC = mH - 0 = mH$

   (a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — оба "слагаемых" измеримы при почти всех x, т.к. H_x по третьему пункту $\in \mathfrak{B}$, а e_x измеримы по полноте ν. В силу замкнутости по вычитанию $C_x \in \mathfrak{B}$ п.в.

   (b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu E_x = \nu H_x$ п.в. $\Rightarrow$ измеримо.

   (c) $\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

   $X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$ по полноте обеих мер.

   $C = \bigsqcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{m(\dots) < +\infty}$, тогда по пункту 5 все элементы объединения $\in \mathfrak{D}$ и по пункту 2 объединение лежит в $\mathfrak{D}$.

$\square$

Следствие 1.8. C измеримо в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \varnothing\}$ — проекция C на X.

Если $P_1(C)$ измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Аналогично для проекции на y.

Proof. При $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$ □

2.25 Теорема Тонелли

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измеримо относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. При почти всех x f_x измерима на Y.
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измерима[17] на X
3. $\int_{X\times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Аналогичные утверждения верны, если поменять местами X и Y:

1. f^y измеримо на X почти везде.
2. $y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$ — измерима[18] на Y
3. $\int_{X\times Y} f dm = \int_Y \psi d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y)$

Proof.

1. $f = \chi_{C_x}, C \subset X \times Y$, измеримо. Тогда $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$

   C_x измеримо при почти всех x по Принцип Кавальери $\Rightarrow$ f_x измеримо при почти всех x

   $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$ — измеримая[19] функция по Принцип Кавальери

[17] почти везде
[18] почти везде
[19] почти везде

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \overset{(??)}{=} mC = \int_{X\times Y} f dm$$

2. f — ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{C_k}$, $f_x = \sum \alpha_k \chi_{(C_k)_x}$ — измеримо почти везде.

   $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu (C_k)_x$ — измерима[20]

$$\int_X \varphi(x) = \sum \int_X \alpha_k \nu (C_k)_x = \sum \alpha_k m C_k = \int_{X\times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$, измеримо.

   $f = \lim g_n$, $g_n \uparrow f$, $g_n \geq 0$, ступенчатые

   $f_x = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ — измеримо на y по теореме об измеримости пределов.

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \overset{(??)}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)} \implies \varphi \text{ — измерима}^{21}$$

   $\varphi_n(x)$ измерима почти везде по пункту 2, поэтому φ измерима почти везде.

$$\int_X \varphi(x) \overset{(??)}{=} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X\times Y} g_n \overset{(??)}{=} \int_{X\times Y} f dm$$

□

2.26 Формула для Бета-функции

$B(s,t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx,\ s,t > 0.$

Тогда $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{s-1} y^{t-1} e^{-x} e^{-y} dy \right) dx\end{aligned}$$

(??): по Принцип Кавальери

[20] почти везде

(??), (??), (??): по теореме ! Теорема Леви

$$\begin{aligned}
y := u - x \quad & \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx \\
&= \int \ldots d\lambda_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{u} x^{s-1}(u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du \\
x := u \cdot v \quad & \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{1} (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1} e^{-u} \cdot u dv \right) du \\
&= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1} dv \right) du \\
&= B(s,t)\Gamma(s+t)
\end{aligned}$$

$\square$

2.27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$\alpha_m := \lambda_m(B(0,1)), \lambda_m(B(0,r)) = r^m \cdot \alpha_m$ — получается заменой координат.

$$B(0,1) \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le 1 \right\}$$

$$B(0,1)_{x_m} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \le 1 - x_m^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \int_{-1}^{1} \lambda_{m-1} \left(B\left(0, \sqrt{1-y^2}\right)\right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\
&= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \alpha_{m-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \alpha_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\alpha_m = \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \underbrace{\alpha_1}_{=2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)^{m-1}} \cdot 2 \\
&= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}
\end{aligned}
$$

В случае $m = 3$ $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$

Примечание.

$$
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{I}
$$

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr \\
&= \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Переход в полярные координаты:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{m-1} \\
x_m &= r \sin \varphi_1 \ldots \cos \varphi_{m-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_m(B(0,R)) &= \int_{B(0,R)} 1 d\lambda_m \\
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \cdot r^{m-1} \cdot \sin^{m-2} \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{m-2} \\
&\overset{\text{по (7)}}{=} 2\pi \frac{R^m}{m} \prod_{k=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \pi\frac{R^m}{m}\frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)}$$
$$\overset{(??)}{=} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}R^m}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)}$$

$$\int_0^\pi \sin^k\alpha d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} t = \sin^2\alpha \\ dt = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt \end{bmatrix} = B\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

2.28 Формула Грина

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное[22], ограниченное множество.
- D ограничено кусочно-гладкой кривой ∂D
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Пусть ∂D ориентирована согласованно с ориентацией D *(против часовой стрелки)* — обозначим ∂D^+. Тогда:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy$$

Proof. Ограничимся случаем D — “криволинейный четырёхугольник”.

∂D состоит из путей $\gamma_1 \dots \gamma_4$, где γ_2 и γ_4 — вертикальные отрезки[23], γ_1 и γ_3 — гладкие кривые — можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$.

Аналогично можно описать ∂D по отрезкам, параллельным оси OY.

Проверим, что $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + 0dy$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$
$$= -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x))dx$$

Мы потеряли двойку в (??).

[22] Любая петля стягиваема

[23] Возможно, вырожденные

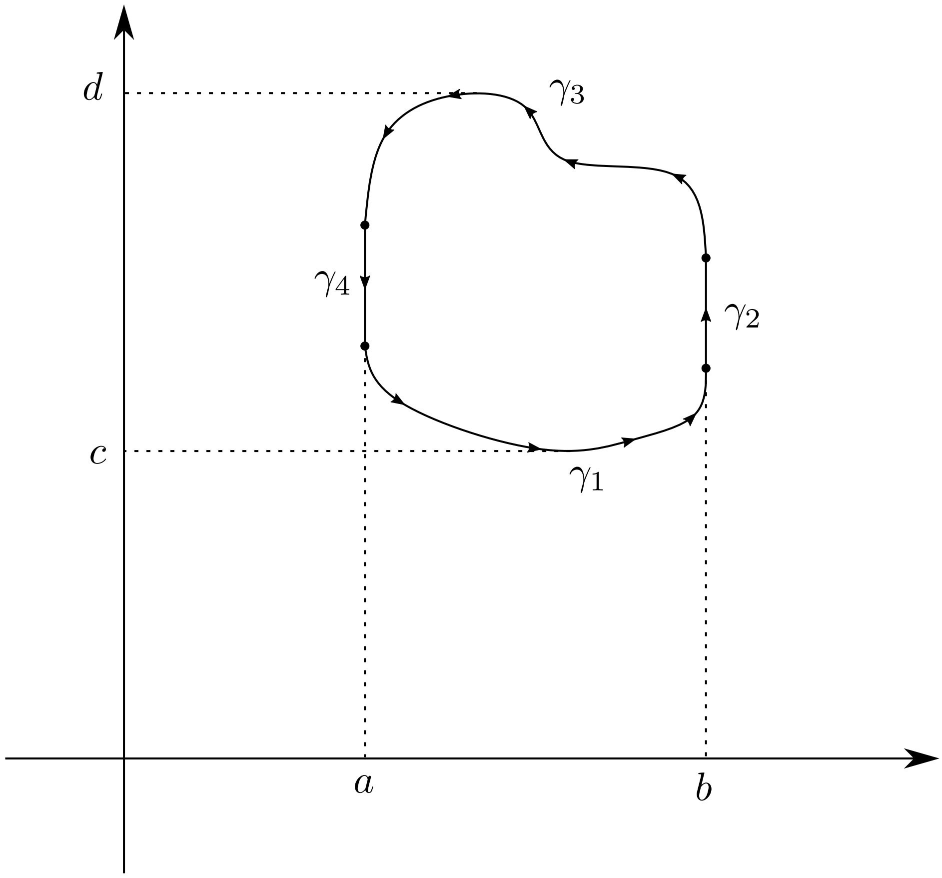


Figure 1: Криволинейный четырёхугольник с ∂D

$$\int_{\partial D^+} Pdx + 0dy = \int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_{0}$$
$$= \int_a^b P(x, \gamma_1(x))dx - \int_a^b P(x, \gamma_3(x))dx$$

Таким образом, искомое доказано. □

2.29 ! Формула Стокса

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ *(двустороннее)*
- $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация Ω
- L^+ – граница G
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая

- $\partial\Omega^+$ — кривая с согласованной ориентацией
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

Тогда:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Proof. Ограничимся случаем $\Omega \in C^2$, т.е. параметризация Ω дважды гладко дифференцируема.

Достаточно показать, что:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

Пусть $\Phi = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Запараметризуем L^+ как $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (u(t), v(t))$. Тогда $\Phi \circ \gamma$ — параметризация $\partial\Omega^+$. Тогда $(\Phi \circ \gamma)' = \Phi' \cdot \gamma'$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_{L^+} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'\right) dt \\
&= \int_{L^+} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \\
&\overset{(??)}{=} \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv \\
&\overset{(??)}{=} \iint_G (\cancel{P'_x x'_u} + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + \cancel{P \cdot x''_{uv}} - (\cancel{P'_x x'_v} + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u - \cancel{P x''_{uv}} dudv \\
&= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv \\
&= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial x}dxdy
\end{aligned}$$

□

2.30 ! Формула Гаусса–Остроградского

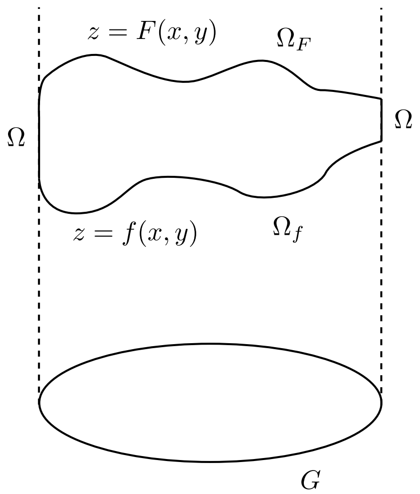
- $V = \{(x,y,z) : (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2 \;\; f(x,y) \le z \le F(x,y)\}$
- G — компакт

(??): по Формула Грина
(??): это дифференцирование произведения

- ∂G — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$
- $f, F \in C^1$
- Фиксируем внешнюю сторону поверхности
- R : окрестность $V \to \mathbb{R}, R \in C^1$

Тогда
$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} Rdxdy = \iint_{\partial V} 0dydz + 0dzdx + Rdxdy$$

Proof.
$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dxdy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_G R(x,y,F(x,y))dxdy - \iint_G R(x,y,f(x,y))dxdy \\ &= \iint_{\Omega_F} R(x,y,z)dxdy \overset{(??)}{+} \iint_{\Omega_f} Rdxdy + \underbrace{\iint_\Omega Rdxdy}_{0} \\ &= \iint_{\partial V} Rdxdy\end{aligned}$$



□

Следствие 1.9 (обощенная формула Остроградского).
$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

(??): “-” спрятан в нормали, направленной вниз.

2.31 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

- Ω — открытый параллелепипед
- A — векторное поле в Ω
- $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow$ div $A = 0$

Proof.

$\Rightarrow$ div rot $B \equiv 0$, что всегда выполнено.

$\Leftarrow$ Дано:

$$A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0 \tag{8}$$

Найдём векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, где $A = \operatorname{rot} B$.

Пусть $B_3 \equiv 0$.

$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

$$-B'_{2z} = A_1 \tag{9}$$
$$-B'_{1z} = A_2 \tag{10}$$
$$B'_{2x} - B'_{2y} = A_3 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad & B_1 = \int_{z_0}^{z} A_2 dz \\ (9) \quad & B_2 = -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x,y) \\ (11) \quad & A_3 = -\int_{z_0}^{z} A'_{1x} dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A'_{2y} dz \end{aligned}$$

По (8):

$$\int_{z_0}^{z} A'_{3z} + \varphi'_x = A_3$$
$$A_3(x,y,z) - A_3(x,y,z_0) + \varphi'_x = A_3(x,y,z)$$

$$\varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдём $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0)dx$

□

2.32 Теорема о вложении пространств L^p

- $\mu E < +\infty$
- $1 \le s < r \le +\infty$

Тогда:

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $||f||_s \le \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$

Proof. 1 следует из 2, т.к. если $f \in L^r(E, \mu)$, то $||f||_s$ конечно. Докажем 2.

При $r = \infty$ очевидно:

$$\left(\int_E |f|^S d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \text{ess sup}\,|f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

При $r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}, q := \frac{r}{r-s}$

$$\begin{aligned} ||f||_s^s &= \int_E |f|^s d\mu \\ &= \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \\ &\le \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\le ||f||_r^s \mu E^{1-\frac{s}{r}} \end{aligned}$$

□

2.33 Теорема о сходимости в L_p и по мере

- $1 \le p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p, f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$

2. - $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо $f_n \to f$ п.в.)
   - $|f_n| \le g$
   - $g \in L^p$

   Тогда $f \in L^p$ и $f_n \to f$ в L^p

Proof.

1. Пусть $X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \ge \varepsilon)$

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \le \frac{1}{\varepsilon^p} ||f_n - f||_p^p \to 0$$

2. Пусть $f_n \Rightarrow f$. Тогда по теореме Рисса $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде. $|f| \le g$ почти везде. $|f_n - f|^p \le (2g)^p$ — суммируема, т.к. $g \in L^p$.

$$||f_n - f||_p^p = \int_X |f_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

2.34 Полнота L^p

$L^p(X, \mu), 1 \le p < +\infty$ — полное.

Proof. Рассмотрим f_n — фундаментальную. Куда бы она могла сходиться?

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\exists N_1 \ \forall n_1, k > N_1 \ \ ||f_{n_1} - f_k||_p < \frac{1}{2}$. Зафиксируем какой-либо n_1.

Аналогично для $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

В общем случае $\sum_k ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \le \sum_k \frac{1}{2^k} = 1$. Рассмотрим ряд $S(x) = \sum |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, S(x) \in [0, +\infty]$ и его частичные суммы S_N.

$$||S_N||_p \le \sum_{k=1}^{N} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < 1$$

Таким образом, $\int_X S_N^p < 1$. По теореме Фату $\int_X S^p d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируемо $\Rightarrow S$ почти везде конечно.

$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ — его частичные суммы это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. сходимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Таким образом, кандидат — f. Проверим, что $||f_n - f||_p \to 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \ ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$$

Берём $m = n_k > N$.

$$||f_n - f_{n_k}||_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Это выполнено при всех достаточно больших k. Тогда по теореме Фату $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$, т.е. $||f_n - f||_p < \varepsilon$. □

2.35 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \leq p \leq +\infty$

Множество ступенчатых функций *(из L^p)* плотно в L^p.

Proof.

1. $p = \infty$

   $\lessdot f \in L^\infty$. Изменив f на множестве меры 0, считаем, что $|f| \leq ||f||_\infty$, т.к. $f > A$ на множестве меры 0.

   Тогда из доказательство теоремы о характеризации неотрицательных функций с помощью ступенчатых $\exists$ ступенчатые функции φ_n, такие что $0 \leq \varphi_n \rightrightarrows f^+$ и ψ_n, такие что $0 \leq \psi_n \rightrightarrows f^-$

   Тогда сколь угодно близко к f можно найти ступенчатую функцию вида $\varphi_n + \psi_n$, т.е. $|f - \varphi_n - \psi_n| \leq \frac{1}{n}$, что и требовалось показать.

2. $p < +\infty$. Пусть $f \geq 0$.

   $\exists \varphi_n \geq 0$ ступенчатые : $\varphi_n \uparrow f$

   $$||\varphi_n - f||_p^p = \int_X \underbrace{|\varphi_n - f|^p}_{\leq |f|^p \text{ — мажоранта}} \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

   Если f любого знака, то при рассмотрении срезок искомое очевидно.

□

2.36 Лемма Урысона

- X нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутые
- $F_0 \cap F_1 = \varnothing$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ непрерывное, $0 \leq f \leq 1$, $f\Big|_{F_0} \equiv 0$, $f\Big|_{F_1} \equiv 1$

Proof. Переформулируем нормальность: если $F \subset G$, F замкнутое, G открытое, то $\exists U(F)$ — открытое, такое что $F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$. Почему это нормальность? Первое замкнутое множество — F, а второе замкнутое — G^c.

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^c \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^c}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}}$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})} \subset G_1$$

Таким образом, $\forall$ двоично рациональной $\alpha \in [0,1]$ задаётся открытое множество G_α.

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональная } : x \in G_\alpha\}$$

f — непрерывно $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $f^{-1}(a,b)$ — всегда открыто.

Достаточно проверить:

1. $\forall b \ \ f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a \ \ f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

, так как:

$$f^{-1}(a,b) = f^{-1}(-\infty,b) \setminus f^{-1}(-\infty,a]$$

1. $f^{-1}(-\infty,b) = \bigcup\limits_{\substack{q<b \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q$ — открыто. Почему это так?

   $f^{-1}(-\infty,b) \subset \bigcup$, т.к. $f(x) = b_0 < b$. Возьмём $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

   $f^{-1}(-\infty,b) \supset \bigcup$ очевидно, т.к. при $x \in G_q \ \ f(x) \le q < b$.

2. $f^{-1}(-\infty,a] = \bigcap_{q>a} G_q = \bigcap_{q>a} \overline{G_q}$ — замкнуто

   $(\supset)$ — тривиально

   $(\subset)$ Для двоично рациональных q, r:

$$\bigcap_{\substack{q>a \\ \text{всех}}} G_q \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{некоторых}}} \overline{G_r} \supset \bigcap_{\substack{r>a \\ \text{всех}}} \overline{G_r}$$

, так как $\forall\alpha < \beta : G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$ по построению.

□

2.37 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}, \lambda_m)$
- $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое

Тогда в $L^p(E, \lambda_m), 1 \le p < +\infty$ множество непрерывных финитных функция плотно.

Proof. По уже доказанной теореме множество ступенчатых функций плотно в $L^p(E, \lambda_m)$. Достаточно научиться приближать характеристические функции финитными, т.е.:

$$\forall A - \text{огр. } \exists f - \text{финитная непрерывная} : ||f - \chi_A||_p < \varepsilon$$

Тогда можно будет приближать ступенчатые функции финитными, а следовательно искомое будет верно.

По регулярности меры лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{F}_{\text{замкн.}} \subset A \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}} \ \ \lambda_m(G \setminus F) < \varepsilon$$

По лемме Урысона $\exists$ непрерывное $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$: $f\Big|_F \equiv 1, f\Big|_{G^c} \equiv 0$

$$||f - \chi_A||_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - \chi_A|^p d\lambda_m = \int_{G\setminus F} |f - \chi_A|^p \le 1 \cdot \lambda_m(G \setminus F) = \varepsilon$$

□

2.38 ! Теорема о непрерывности сдвига

1. f — равномерно непрерывно на $\mathbb{R}^m$. Тогда $||f_h - f||_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$[24]
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m), 1 \le p < +\infty$. Тогда $||f_h - f||_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
3. $f \in \widetilde{C}[0, T]$. Тогда $||f_h - f||_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$[25]
4. $1 \le p < +\infty, f \in L^p[0, T] \Rightarrow ||f_h - f||_p \to 0$

[24] Т.е. $\sup_x |f(x + h) - f(x)| \to 0$
[25] Или $||f_n - f||_{\widetilde{C}} \to 0$

Proof. Пункты 1 и 3 очевидны по определению равномерной непрерывности.

Докажем пункты 2 и 4.

По плотности непрерывных функций в L^p:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \forall f \in L^p[0, T] \ \ \exists g - \text{непр.} \ \in \widetilde{C}[0, T] \ \ ||f - g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$||f_h - f||_p \leq ||f - g||_p + ||g - g_h||_p + ||g_h - f_h||_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + ||g - g_h||_p + \frac{\varepsilon}{3}$$

Покажем, что $||g - g_h||_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$

4:

$$\begin{aligned}||g_h - g||_p &= \left(\int_0^{\mathsf{T}} |g(x+h) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(||g_h - g||_\infty^p \cdot \int_0^{\mathsf{T}} 1 dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= T^{\frac{1}{p}} ||g_h - g||_\infty\end{aligned}$$

, что $< \frac{\varepsilon}{3}$ для достаточно малых h.

2: g — финитное, носитель[26] $g \subset B(0, R)$, пусть $|h| < 1$.

$$||g_h - g||_p = ||g_h - g||_{L^p(B(0,R+1),\lambda_m)} \leq ||g_n - g||_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}}$$

□

2.39 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \to x, y_n \to y$ в $\mathcal{H}$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, т.е. скалярное произведение непрерывно в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

2. $\sum x_k$ сходится. Тогда:

$$\forall y \in \mathcal{H} \ \ \left\langle \sum x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y \rangle \tag{12}$$

3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum ||x_k||^2$ сходится.

Proof.

1.

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq \underbrace{||x_n - x||}_{\text{бесконечно малое}} \cdot \underbrace{||y_n||}_{\text{огр.}} + \underbrace{||x||}_{\text{const}} \cdot \underbrace{||y_n - y||}_{\text{бесконечно малое}} \to 0\end{aligned}$$

[26] Множество точек, где $g \neq 0$

2. $S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$

$$\langle S_n, y\rangle \to \langle S, y\rangle = \left\langle \sum x_n, y\right\rangle$$

$$\langle S_n, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, y\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, y\rangle$$

Это член суммы ряда из правой части (12).

3. $S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$

$$||S_N||^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{N} x_k, \sum_{j=1}^{N} x_j\right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2 =: C_N$$

   $\Rightarrow$ Очевидно

   $\Leftarrow$ Аналогично формуле выше: $||S_M - S_N||^2 = |C_M - C_N|$. Таким образом, если C_N сходится, то C_N фундаментально $\Rightarrow$ S_N фундаментально в $\mathcal{H}$.

$\square$

2.40 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — ЛНЗ
2. $c_k = \frac{\langle x, e_k\rangle}{||e_k||^2}$
3. $c_k e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$.

Proof.

1. $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0 \Rightarrow \alpha_n ||e_n||^2 = 0$
2. $\langle x, e_k\rangle = \langle \sum c_j e_j, e_k\rangle = c_k \cdot ||e_k||^2$
3. $\langle z, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle c_k e_k, e_k\rangle = 0$

$\square$

2.41 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$
- $\mathcal{L}_n = \text{Lin}(e_1 \dots e_n)$

Тогда:

1. S_n — проекция x на $\mathcal{L}_n$, т.е. $x = S_n + z \Rightarrow z \perp \mathcal{L}_n$
2. S_n — элемент наилучшего приближения дял x в $\mathcal{L}_n$:

$$||x - S_n|| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} ||x - y||$$

3. $||S_n|| \le ||x||$

Proof.

1. $k = 1 \dots n$

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x) ||e_k||^2 = 0$$

2. $x = S_n + z$

$$||x - y||^2 = ||\underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n}|| = ||S_n - y||^2 + ||z||^2 \ge ||z||^2 = ||x - S_n||^2$$

3. $||x||^2 = ||S_n||^2 + ||z||^2 \ge ||S_n||^2$

□

2.42 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

- $\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье вектора x сходится в $\mathcal{H}$.
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z, z \perp e_k \ \ \forall k$

3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k \Leftrightarrow \sum |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$

Proof.

1. Ряд Фурье ортогонален. Тогда по теореме о свойствах сходимости сходимость ряда Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость $\sum |c_k(x)|^2||e_k||^2$, что выполнено по неравенству Бесселя.

2. $z = x - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$

$$\langle z, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k, e_n \right\rangle = \langle x, e_n\rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k(x)e_k, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle - c_n(x)||e_n||^2 = 0$$

3. $\Rightarrow$ по теореме о свойствах сходимости, пункт 3.

   $\Leftarrow$ из пункта 2:

$$||x||^2 = ||\sum c_k(x)e_k||^2 + ||z||^2 = \sum |c_k(x)|^2||e_k||^2 + ||z||^2$$

   Дано: $||x||^2 = \sum |c_k(x)|^2||e_k||^2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = \sum c_k(x)e_k$

□

Равенство $\sum_k |c_k(x)|^2||e_k||^2 = ||x||^2$ называется уравнением замкнутости или **равенством Персиваля**.

2.43 Теорема о характеристике базиса

- $\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathcal{H}$.

Тогда эквивалентно следующее:

1. $\{e_k\}$ — базис
2. $\forall x, y$ выполняется обобщенное уравнение замкнутости:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)} \cdot ||e_k||^2$$

3. $\{e_k\}$ замкнуто
4. $\{e_k\}$ полно
5. $\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots)$ плотна в $\mathcal{H}$, т.е. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots)) = \mathcal{H}$.

Proof.

1⇒2 Берём x, раскладываем его по базису и скалярно умножаем на y:

$$\langle e_k, y\rangle = \overline{\langle y, e_k\rangle} = \overline{c_k(y)\cdot ||e_k||^2} = \overline{c_k(y)}\cdot ||e_k||^2$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_k c_k(x)\overline{c_k(y)}\cdot ||e_k||^2$$

2⇒3 Из обобщенного следует частное при подстановке y вместо x.

3⇒4 Если $\exists z : \forall n \;\; \langle z, e_n\rangle = 0$, то $c_n(z) = 0$, но тогда по уравнению замкнутости для z выполняется $||z||^2 = \sum |c_k(z)|^2 \cdot ||e_k||^2 = 0$, а следовательно $z = 0$.

4⇒1 По теореме Рисса-Фишера $x = \sum c_k(x)e_k + z$, где $z \perp$ всем e_k. По полноте $z = 0$.

4⇒5 $\mathcal{L} := \mathrm{Cl}(\mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots))$. Надо проверить, что $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. Если $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, то по теореме Рисса-Фишера $\exists z : \forall k \;\; z \perp e_k$.

5⇒4 Если $z \perp e_k \;\; \forall k$, то $z \perp \mathrm{Lin}(e_1, e_2 \dots) \Rightarrow z \perp \mathcal{L}$, но $\mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow z \perp z$, т.е. $\langle z, z\rangle = 0$, но тогда $z = 0$.

□

2.44 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

- Дан тригонометрический ряд *(вещественный или комплексный)*
- Пусть $S_n \to f$ в $L^1[-\pi, \pi]$, т.е. $||S_n - f||_1 = \int_{-\pi,\pi} |S_n - f| \to 0$

Тогда:

- $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt$, в том числе при $k = 0$
- $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt$
- $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$

Proof. Докажем для a_k. Пусть $n \geq k$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\cos kt dt = 0 + \int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos^2 kt = \pi a_k$$

$$\left|\pi a_k - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(S_n(t) - f(t))\cos kt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|S_n(t) - f(t)|dt = ||S_n - f||_1 \to 0$$

□

2.45 Теорема Римана–Лебега

- $E \subset \mathbb{R}^1$
- $f \in L^1(E)$

Тогда

$$\int_E f(t)e^{i\lambda t}dt \xrightarrow{\lambda\to 0} 0$$
$$\int_E f(t)\cos\lambda t dt \to 0$$
$$\int_E f(t)\sin\lambda t dt \to 0$$

В частности для $f \in L^1[-\pi,\pi] : a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

Proof. Не умаляя общности $E = \mathbb{R}$, т.к. иначе дополним f до $\mathbb{R}$ так, что $f = 0$ вне E.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt \overset{t:=\tau+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\tau}\cdot e^{i\pi} = -\int_{\mathbb{R}} f\left(\tau+\frac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\tau}$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt = \frac{1}{2}\left(\int + \int\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)e^{i\lambda t}dt$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt\right| = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\underbrace{|e^{i\lambda t}|}_{=1}dt \to 0$$

, что выполнено по лемме о непрерывности сдвига. □

2.46 Три следствия об оценке коэффициентов Фурье

Следствие 1.10. Пусть $\omega(f,h) = \sup\limits_{\substack{x,y\in E\\|x-y|\le h}} |f(x)-f(y)|$ — модуль непрерывности. Если $f \in \widetilde{C}[-\pi,\pi]$, то $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \le \omega\left(f, \frac{\pi}{k}\right)$ при $k \ne 0$.

Proof.

$$|2c_{-k}(f)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{k}\right)\right|dt \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)dt = \omega\left(f,\frac{\pi}{k}\right)$$

□

Примечание. $\omega(f,h) \xrightarrow{h\to 0} 0$. Тогда f равномерно непрерывна.

Следствие 1.11. $E \subset \mathbb{R}, E = \langle a, b \rangle$[27]

Определение. **Класс Липшица** для $M > 0, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0, 1]$:

$$\text{Lip}_M \alpha(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \forall x, y\ \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha\}$$

Пусть $f \in \text{Lip}_M \alpha$, тогда при $k \neq 0$ $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}$

Proof. Аналогично. □

Примечание. $f \in \text{Lip}_M \alpha \Rightarrow \omega(f, h) \leq M \cdot h^\alpha$

Наблюдение 2. $f \in \widetilde{C}^1[-\pi, \pi]$. Тогда при $k \neq 0$ $a_k(f') = kb_k(f), b_k(f') = -ka_k(f), c_k(f') = ikc_k(f)$

Proof. Интегрирование по частям:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot ike^{-ikt} dt \right) = ikc_k(f)$$

□

Следствие 1.12.

1. $f \in \widetilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\text{const}}{|k|^r}$.
2. $f \in \widetilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi], f^{(r)} \in \text{Lip}_m \alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |2c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^{r+\alpha}}$.

Proof. Очевидно из наблюдения выше. □

2.47 Принцип локализации Римана

- $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\delta > 0$
- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ \ f(x) = g(x)$[28]

[27] Промежуток с любым видом скобки, а не скалярное произведение.
[28] С оговоркой, что либо почти везде, либо существуют такие представители данного класса эквивалентности.

Тогда ряды Фурье f и g ведут себя одинаково в точке x_0:

$$S_n(f,x_0) - S_n(g,x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Переформулировка:

- $h := f - g, h \in L^1[-\pi,\pi]$
- $h \equiv 0$ на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

Тогда $S_n(h,x_0) \to 0$

Доказательство переформулировки.

$$S_n(h,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x_0+t)\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + \cos nt\right) = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где:

$$h_1(t) = \frac{1}{2}h(x_0+t)\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad h_2(t) = \frac{1}{2}h(x_0+t)$$

Так можно сказать, если $h_1, h_2 \in L^1[-\pi,\pi]$.

- Для h_2 это очевидно.
- Для h_1: $h_1 \equiv 0$ при $t \in (-\delta,\delta)$, поэтому:

$$|h_1(t)| \le |h(x_0+t)|\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \in L^1$$

Тогда $b_n(h_1) \to 0, a_n(h_2) \to 0$ по теореме Римана-Лебега. □

2.48 ! Признак Дини. Следствия

- $f \in L^1[-\pi,\pi]$
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $S \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$
- $$\int_0^{\pi}\frac{|f(x_0+t) - 2s + f(x_0-t)|}{t}dt < +\infty \tag{13}$$

Тогда ряд Фурье f сходится к S в точке x_0, т.е. $S_n(f,x_0) \to S$.

Proof. Пусть $\varphi(t) = f(x_0+t) - 2s + f(x_0-t)$.

$$S_n(f,x_0) - S \overset{(??)}{=} \int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+t) - S)D_n(t)dt = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} \dots =$$

$$= \int_0^\pi \varphi(t) D_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}\varphi(t) \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + \cos nt\right) = b_n(h_1) + a_n(h_2)$$

, где

$$h_1 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}, & t \in [0, \pi] \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2}\varphi(t), & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Искомое следует из теоремы Римана-Лебега, если h_1 и $h_2 \in L^1[-\pi, \pi]$.

- Для h_2 это очевидно.
- Для h_1: по формуле (13):

  $$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} < \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{2}{t}$$

  при $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

  $$\int_{-\pi}^{\pi} |h_1| = \int_0^\pi |h_1| = \frac{1}{2}\int_0^\pi |\varphi(t)| \cdot \operatorname{ctg}\frac{t}{2} < \int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t} \overset{(??)}{<} +\infty$$

□

Следствие 1.13.

- $f \in L^1$
- $x_0 \in [-\pi, \pi]$
- Существуют четыре конечных предела: $f(x_0+0), f(x_0-0), \alpha_\pm := \lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)}{t}$

Тогда ряд Фурье в точке x_0 сходится к $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

Proof.

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)}{t} \xrightarrow[t\to+0]{} \alpha_+ - \alpha_-$$

, т.е. $\frac{\varphi(t)}{t}$ – ограничена вблизи 0 на $[0, \pi]$ $\implies$ по замечанию 1, интеграл (13) сходится. □

Следствие 1.14.

- $f \in L^1[-\pi, \pi]$
- f – непрерывно в точке x_0.
- $\exists$ конечные односторонние производные в точке x_0

(??): т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$
(??): по условию дини

Тогда $S_n(f, x_0) \to f(x_0)$.

Proof. Следует из следствия 1. □

2.49 Корректность определения свертки

$$g(x,t) := f(x-t) \cdot k(t)$$

1. Проверим, что $\varphi(x,y) := f(x-t)$ измерима как функция $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$. Если это так, то g тоже измерима как произведение измеримых.

   Обозначим $\forall a \in \mathbb{R} \;\; E_a := \mathbb{R}(f(x) < a), v(x,t) = \langle x-t, t\rangle$. Тогда $V(\mathbb{R}^2(\varphi < a)) = E_a \times \mathbb{R}$ измеримо в $\mathbb{R}^2$, т.к. это декартово произведение измеримых множеств. Следовательно $\mathbb{R}^2(\varphi < a)$ тоже измеримо в $\mathbb{R}^2$.

2. Лежит ли $g \in L^1([-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi])$?

   $$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g(x,t)| = \int_{-\pi}^{\pi} dt|k(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|dx = \|f\|_1 \cdot \|k\|_1 < +\infty$$

   Тогда по теореме Фубини для интеграла:

   $$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)dt$$

   — при почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ этот интеграл сходится и задает по x функцию из $L^1[-\pi,\pi]$, т.е. $f * k$ определен при почти всех x, и при этом $\in L^1[-\pi,\pi]$

2.50 Свойства свертки

Свойства.

1. $f * K = K * f$

   Proof. Очевидно после замены t на $-t$ под интегралом. □

2. $c_k(f * K) = 2\pi c_k(f) \cdot c_k(K)$

   Proof.

   $$2\pi c_k(f*K) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) \cdot e^{-inx} dt dx =$$

   $$= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)} dx dt = 2\pi c_n(f) \cdot 2\pi c_n(K)$$

   □

3. • $f \in L^p[-\pi,\pi]$

- $K \in L^q[-\pi, \pi]$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \le p \le +\infty$

Тогда $f * K$ — непрерывная функция и $\|f * K\|_\infty \le \|K\|_q \cdot \|f\|_p$

Proof. Неравенство очевидно, т.к. это неравенство Гёльдера:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |K(t)|\,dt \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|K\|_q$$

Если p или $q = +\infty$, то это неравенство надо модифицировать.

Непрерывность:

$$|f*K(x+h) - f*K(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+h-t) - f(x-t)\right) K(t)\,dt\right| \le \|K\|_q \cdot \underbrace{\|f_h(x) - f(x)\|_p}_{\to 0 \text{ по т. о непр. сдвига}}$$

Это всё верно, если $p < +\infty$. Если же $p = +\infty$, то поменяем местами f и K. □

4.
   - $1 \le p \le +\infty$
   - $f \in L^p[-\pi, \pi]$
   - $K \in L^1[-\pi, \pi]$

   Тогда $f * K \in L^p[-\pi, \pi]$ и $\|f * K\|_p \le \|K\|_1 \cdot \|f\|_p$

2.51 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

- K_h — аппроксимативная единица

Тогда:

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[h \to h_0]{[-\pi,\pi]} f$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \to +\infty} 0$
3. K — усиленная аппроксимативная единица, $f \in L^1[-\pi, \pi]$, f непрерывно в x.

   Тогда $f * K_h$ непрерывно в x и $f * K_h(x) \xrightarrow{h \to h_0} f(x)$

Proof.

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t)\,dt$$

1. $\triangleleft \varepsilon > 0, f$ — равномерно непрерывна, т.к. $[-\pi, \pi]$ — компакт.
$$\exists \delta > 0 \ \ \forall t : |t| < \delta \ \ \forall x \ \ |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
M взято из аксиомы 2.
$$|f * K_h(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)||K_h(t)|\, dt = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2 < \varepsilon?$$
$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$I_2 \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[\text{акс. 3}]{h \to h_0} 0$$
Тогда $\exists V(h_0) \ \ \forall h \in V(h_0) \ \ I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3. $f \in L^1, K_h \in L^\infty \Rightarrow f * K_h$ — непрерывна *(в том числе и в x)*.

Для данного x проверим утверждение $\varepsilon > 0$; $I_1 + I_2 < \varepsilon$; $\exists V(h_0) \, \forall h \in V(h_0)$

f непрерывна в x:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall t : |t| < \delta \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
Как в пункте 1:
$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$I_2 \leq \int_{E_\delta} |f(x-t)| \cdot |K_h(t)|\, dt + |f(x)| \int_{E_\delta} |K_h(t)|\, dt$$
$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{E_\delta} |K_h| \cdot (\|f\|_1 + 2\pi |f(x)|) \xrightarrow[h \to h_0]{\text{акс. 3'}} 0$$
Тогда $\exists V(h_0) \ \ \forall h \in V(h_0) \ \ I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2.
$$\|f * K_h - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h \, dt \right| dx \leq$$
$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)|\, dx\, dt =$$
$$= \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}\, dt$$
, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|$ — непрерывна (по теореме о непрерывности сдвига)
$$\stackrel{\text{def}}{=} \|K_h\|_1 \underbrace{\left(g * \frac{|K_h|}{\|K_h\|} \right)(0)}_{\to g(0) = 0 \text{ по п.1}}$$

$\square$

2.52 Теорема о перманентности метода средних арифметических

$$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n \xlongequal{\text{сред. арифм.}} S$$

Доказательство теоремы.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k - S) \right| \le \frac{1}{n+1} \sum |S_k - S| = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |S_k - S|}{n+1}}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

□

2.53 Теорема Фейера

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi]$. Тогда $\sigma_n(f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f$
2. $f \in L^p[-\pi, \pi], 1 \le p \le +\infty$. Тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$
3. $f \in L^1, f$ непрерывно в x. Тогда $\sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x)$

2.54 Следствия из теоремы Фейера

2.55 Теорема об интегрировании ряда Фурье

2.56 Лемма о слабой сходимости сумм Фурье