1 Монотонные экстремумы

Теорема 1.1. **Критерий монотонности**

$f \in C(\langle a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)

Тогда f — возрастает $\Leftrightarrow \forall x \in (a, b)\ \ f'(x) \geq 0$

Доказательство. "$\Rightarrow$" По определению f' $\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

"$\Leftarrow$" $x_1 > x_2$, по т. Лагранжа: $\exists c : f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) \geq 0$ ☐

Следствие. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда:

$f = \text{const} \Leftrightarrow (f \in C(\langle a, b\rangle)$ — дифф. на $(a, b), f' \equiv 0)$

Следствие. $f \in C\langle a, b\rangle$, дифф. на (a, b). Тогда:

f строго возрастает $\Leftrightarrow$ ① и ②

① $f' \geq 0$ на (a, b)

② $f' \not\equiv 0$ ни на каком промежутке

Доказательство. "$\Rightarrow$" очевидно

"$\Leftarrow$" По лемме Ферма. ☐

Следствие. О доказательстве неравенств

$g, f \in C([a, b\rangle)$, дифф. в (a, b)

$f(a) \leq g(a); \forall x \in (a, b)\ \ f'(x) \leq g'(x)$

Тогда $\forall x \in [a, b\rangle\ \ f(x) \leq g(x)$

Доказательство. $g - f$ — возр., $g(a) - f(a) \geq 0$ ☐

Определение. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ — **локальный максимум функции**, если

$$\exists U(x_0)\ \ \forall x \in U(x_0) \cap E\ \ f(x) \leq f(x_0)$$

Аналогично определяется минимум.

Определение. **Экстремум** — точка минимума либо максимума.

Теорема 1.2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad x_0 \in (a, b) \quad f$ — дифф. на (a, b)

Тогда:

1. x_0 — лок. экстремум $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. f — n раз дифф. в x_0

   $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

   Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный максимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

   Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\begin{cases} n - \text{чет.}: & x_0 - \text{локальный минимум} \\ n - \text{нечет.}: & x_0 - \text{не экстремум} \end{cases}$

Доказательство. 1. т. Ферма

2. ф. Тейлора

$$f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

при x, близких к x_0:

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Тогда при чётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \Rightarrow x_0 - \text{экстр.}$$

При нечётном n

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & x > x_0 \\ -f^{(n)}(x_0), & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0 - \text{не экстр.}$$

□

2 Интеграл

2.1 Неопределенный интеграл

Определение. $F, f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

F — **первообразная** f на $\langle a, b \rangle$

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad F'(x) = f(x)$$

Теорема 2.1. **О существовании первообразной**

$f \in C^0(\langle a, b\rangle)$ тогда у f существует первообразная.

Доказательство. Чуть позже. □

Теорема 2.2. F — первообразная f на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad F + c$ — тоже первообразная
2. Никаких других первообразных нет, т.е. если G — перв. f, то $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$

Доказательство. 1. очевидно

2. $F' = f, G' = f \quad (G - F)' \equiv 0 \Rightarrow G - F = \text{const}$

□

Определение. **Неопределенный интеграл** f на $\langle a, b\rangle$ — множество всех первообразных f:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}, \text{ где } F \text{ — первообразная}$$

Обозначается $\int f = F + c$ или $\int f(x)dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \text{ — длинный логарифм}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

Теорема 2.3. f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. Линейность:
$$\int (f+g) = \int f + \int g$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int \alpha f = \alpha \int f$$

2. $\varphi \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx\right)|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$
Частный случай: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\int f(\alpha t + \beta) dt = \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$$

3. f, g — дифф. на $\langle a, b\rangle$; $f'g$ — имеет первообр.

   Тогда fg' имеет первообразную и
$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство. 1. $(F+G)' = F' + G' \quad (\alpha F)' = \alpha F'$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$
3. $(fg - \int f'g)' = f'g + fg' - f'g = fg'$

□

Примечание. Если φ обратима, то:
$$\int f(x) dx = \left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt\right)|_{t:=\varphi^{-1}(x)}$$

$df := f'(x) dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x := \operatorname{tg} t] = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$
$$= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = [y := \sin t] = \int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1+y} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-y) + \ln(1+y)\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \operatorname{arctg} x}{1-\sin \operatorname{arctg} x}$$

2.2 Гиперболические тригонометрические функции

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Они полезны тем, что по ним висит нить, закрепленная в двух точках.

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$$
$$(\operatorname{ch} t)^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} t}{i}\right)^2 = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [x = \operatorname{sh} t] = \int \frac{1}{\sqrt{ch^2 t}} chtdt = \int 1dt = t$$

2.3 Равномерно непрерывные функции

Определение. $f : \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна** на $\langle a, b\rangle$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Или для метрического пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \;\; \rho(x_1, x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Отличие от непрерывности на отрезке в том, что δ зависит только от ε и подходит для всех x_1, x_2.

Пример. 1. $f(x) = x$ равномерно непрерывна.

2. $f(x) = x^2 \; \langle a, b\rangle = \mathbb{R} \quad \varepsilon := 1 \;\; \exists ?\delta$

   $x_1 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}, x_2 := \frac{1}{\delta}$

   $x_1^2 - x_2^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 \Rightarrow f$ — не равномерно непрерывна.

Теорема 2.4. $f : X \to Y, X$ — секвенциальный компакт, f — непр. на X

Тогда f — равномерно непр.

Доказательство. От противного.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$
$$\delta := \frac{1}{n} \;\; \exists x_n, \overline{x}_n : \rho(x_n, \overline{x}_n) < \delta \quad \rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Выберем $x_{n_k} \to \tilde{x}, \overline{x}_{n_k} \to \tilde{\tilde{x}}$

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}) \leq \lim_{n\to\infty} \delta = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x}), f(\overline{x}_{n_k}) \to f(\tilde{x})$, противоречие с $\rho(f(x_n), f(\overline{x}_n)) \geq \varepsilon$ □

Пример. $f(x) = \sqrt{x} \quad X = [0, +\infty)$

По т. Кантора: f равномерно непрерывна на $[0, 1]$

При $x \geq \frac{1}{2} \quad |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{2\sqrt{c}}|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, т.е. тоже равномерно непрерывна.

2.4 Конфетка: т. Брауэра о неподвижной точке

Статья от Matousek, Zigler, Bjorner (arxiv: 1409.7890v1)

Игра Hex: два игрока — чёрный и белый, на своем ходе красят один шестиугольник в свой цвет. Условие выигрыша — путь искомого цвета с одной стороны в сторону нужного цвета — две противоположные стороны имеют черный цвет, две другие — белый.

Теорема 2.5. Дана доска для Hex — параллелограм $k \times l$, покрашенная в 2 цвета.

Это выигрышная доска для одного из игроков.

Доказательство. Рассмотрим первый ряд *(прилегающий к чёрной стороне)*. Если в нём нет черных клеток, белый выиграл. Пойдём по границе черных и белых клеток так, что справа всегда черная клетка, слева белая. В этом пути нет самопересечений, т.к. в точке самопересечеения с обеих сторон черные клетки, мы так не идём.

Представим доску в виде прямоугольной сетки, где вершины соединены, если из соответствующего шестиугольника можно прийти в другой соответствующий шестиугольник. □

Теорема 2.6. $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$, непр.

Тогда $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$, т.е. есть неподвижная точка.

Обобщенный вариант:

1. $f : [0, 1]^m \to [0, 1]^m$ — непр.
2. $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0, 1)$ — непр.
3. $f : S(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \to S(0, 1)$ — непр.

Доказательство. $\rho : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непр. в $[0, 1]^2$

От противного — пусть $\forall x \in [0, 1]^2 \quad f(x) \neq x$

Тогда $\forall x \quad \rho(f(x), x) > 0 \quad x \mapsto \rho(f(x), x)$ — непр., > 0

По т. Вейерштрасса $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in [0,1] \ \rho(f(x), x)) \geq \varepsilon$

По т. Кантора для f: для этого $\varepsilon \ \exists \delta < \varepsilon$:

$$\forall x, \overline{x} : ||x - \overline{x}|| < \delta \quad ||f(x) - f(\overline{x})|| < \varepsilon$$

Можно писать не $||\cdot||$, а ρ.

Возьмём $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Построим доску $Hex(n+1, n+1)$, где $n+1$ — число узлов.

Логические координаты узла $(v_1, v_2) \quad v_1, v_2 \in \{0 \ldots n\}$ имеют физические координаты, то есть узлу сопоставляется точка на квадрате с координатами $\left(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}\right)$

$K(V) :=$ min$\{i \in \{1, 2\} : |f_i(\frac{v}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon\}$

Продолжение на следующей лекции. $\square$