Упражнение 1. Решить сравнения:

- $3x \equiv 1 \mod 7$
- $100x \equiv 21 \mod 23$
- $315x \equiv -10 \mod 275$
- $76x \equiv 232 \mod 220$

## Решение.

- $(3,7) = 1 \Rightarrow$  решение единственно. Решение  $x \equiv 5 \mod 7$ .
- $(100, 23) = 1 \Rightarrow$  решение единственно. Решение  $x \equiv 17 \mod 23$ .
- $(315,275)=5\Rightarrow 63x\equiv -2\mod 55$ . Решение этого уравнения (алгоритмом Евклида)  $x\equiv 41\mod 55$ . Решения исходного уравнения это  $x_1\equiv 41\mod 275, x_2\equiv 96\mod 275, x_3\equiv 151\mod 275, x_4\equiv 206\mod 275, x_5\equiv 261\mod 275$
- $(76,220)=4\Rightarrow 19x\equiv 3\mod 55$ . Решение этого уравнения  $x\equiv 32\mod 55$ . Решения исходного уравнения это  $x_1\equiv 32\mod 220, x_2\equiv 87\mod 220, x_3\equiv 142\mod 220, x_4\equiv 197\mod 220$

 $\mathit{Упражнение}\ 2.$  Найти число целых точек на прямой 8x-13y+6=0, которые лежат между прямыми x=100 и x=-100.

Решение. Решим  $8x+6\equiv 0\mod 13$ . Т.к. (8,13)=1, решение единственно. Это решение x=9. Тогда для каждого  $\tilde{x}\equiv 9\mod 13$  и какого-либо  $\tilde{y}$ , являющегося решением исходного уравнения,  $(\tilde{x},\tilde{y})$  — решение исходного уравнения. Кроме того, все решения уравнения записываются в таком виде. Всего  $\tilde{x}:\tilde{x}\equiv 9\mod 13$  и  $\tilde{x}\in [-100,100]$  существует  $\lfloor \frac{100+95}{13}\rfloor+1=16$  штук, т.к. "крайние"  $\tilde{x}$  это -95 и 100.

Упражнение 3. Найти все решения в целых числах:

$$34x + 26y = 6$$

Решение.

$$34x + 26y = 6$$

Решим следующее уравнение:

$$34a + 26b = (34, 26) = 2$$

Расширенный алгоритм Евклида даёт частное решение:

M3137y2019 9.10.2021

$\overline{i}$	$r_i$	$s_i$	$t_i$	$q_i$
0	34	1	0	
1	26	0	1	
2	8	1	-1	1
3	2	-3	4	3
4	0	13	-17	4

$$a = s_3 = -3, b = t_3 = 4$$

Тогда  $x_0 = a \cdot \frac{6}{2} = -9, y_0 = b \cdot \frac{6}{2} = 12$  — частное решение исходного уравнения.

Рассмотрим решение в общем виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot n \\ y = y_0 + k \cdot m \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$34(x_0 + k \cdot n) + 26(y_0 + k \cdot m) = 6$$
$$34k \cdot n + 26k \cdot m = 0$$
$$34n = -26m$$
$$17n = -13m$$

Т.к. 
$$(17, 13) = 1, n = \pm 13, m = \mp 17$$

Ответ:  $\{\langle -9+k\cdot 13, 12-k\cdot 17\rangle\mid k\in\mathbb{Z}\}$ , где  $\langle\cdot,\cdot\rangle$  обозначает пару.

Упражнение 4. Решить сравнение  $(a^2 + b^2)x \equiv a - b \mod ab, (a, b) = 1$ 

Решение.

$$(a^{2} + b^{2})x \equiv a - b \mod ab$$

$$(a^{2} + b^{2} - 2ab)x \equiv a - b \mod ab$$

$$(a - b)^{2}x \stackrel{*}{\equiv} a - b \mod ab$$

$$(a - b)x \equiv 1 \mod ab$$

Переход \* верный, т.к. (a - b, ab) = 1:

Утверждение. (a - b, ab) = 1

Доказательство. Предположим обратное:  $(a-b,ab)=k\neq 1$ . Возьмём  $\tilde{k}$  — произвольное простое число, делящее k. Такое существует, т.к. k>1.

M3137y2019 9.10.2021

Тогда $ab \vdots \tilde{k}$ и $a-b \vdots \tilde{k} \Rightarrow a=\tilde{k}p+b$ . Тогда $(\tilde{k}p+b)b \vdots \tilde{k} \Rightarrow \tilde{k}pb+b^2 \vdots \tilde{k} \Rightarrow b^2 \vdots \tilde{k}$ . По простот $b=\tilde{k}n$ , т.к. иначе $[b]$ делитель $\tilde{k}$ , отличный от него и единицы (случай $b=1$ тривиал	
$\emph{m.к.}\ (a-1,a)=1$ всегда выполнено). Аналогичными выкладками $a\dot{:} \tilde{k}$ и следователь $(a,b)=\tilde{k}\cdot t$ , что противоречит условию.	ΉС
$x$ находится как мультипликативное обратное к $a-b$ в кольце $\mathbb{Z}_{ab}.$	

M3137y2019 9.10.2021