В первом семестре была задача нахождения максимального по площади вписанного n-угольника. Мы выяснили, что если максимум существует, то он достигается правильным n-угольником (*суждение про сдвиг точки*). Кроме того, мы доказали, что максимум существует, сделаем это снова, но другим методом.

Доказательство. Пусть внутренние углы многоугольника $\varphi_1 \dots \varphi_n$, тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi_1 + \ldots + \sin\varphi_n) \\ &= \frac{1}{2}r^2(\sin\varphi_1 + \ldots + \sin\varphi_{n-1} - \sin(\varphi_1 - \ldots - \varphi_{n-1})) \end{aligned}$$

Очевидно $\forall i \;\; 0 < \varphi_1 < \pi \quad \pi < \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1} < 2\pi$.

Найдём максимум путём дифференцирования. Это требует существования максимума внутри области определения. Если все неравенства сделать нестрогими, то область определения становится замкнутой, очевидно ограниченной $\Rightarrow \exists \max$ по теореме Вейерштрасса. Кроме того, максимум не лежит на границе области определения из очевидных геометрических соображений.

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_i} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi_i = \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi_i - \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}) &= 0 \\ 2\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{\pi - 2n\varphi}{2} &= 0 \\ \varphi &= \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

$\square$

Диффеоморфизмы

Определение. **Область** — открытое связное множество.

Определение. $F : \underbrace{O}_{\text{область}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — **диффеоморфизм**, если:

- F обратимо
- F дифференцируемо
- F^{-1} дифференцируемо