1. Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \vDash \alpha$.

   Вспомним доказательство этой теоремы без Γ, которое было на лекции. Мы фиксировали оценку и рассматривали доказательство α. По индукции мы доказывали, что каждый шаг доказательства $[\![\delta_n]\!] = \text{И}$, и в частности последний шаг, т.е. α тоже истиннен в данной подстановке. С добавлением Γ у нас в индукционном переходе добавился случай $\delta_n \in \Gamma$. Но т.к. мы фиксируем оценку такую, что $\forall \gamma \in \Gamma \;\; [\![\gamma]\!] = \text{И}$, индукционный переход работает.

2. Покажите, что если $\Gamma \vDash \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.

   (a) $[\![\gamma_1 \to \gamma_2 \to \ldots \gamma_n \to \alpha]\!] = \text{И}$.

   (b) $\vDash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \ldots \gamma_n \to \alpha$

   (c) $\vdash \gamma_1 \to \gamma_2 \to \ldots \gamma_n \to \alpha$ по теореме о полноте

   (d) $\Gamma \vdash \alpha$ по теореме о дедукции

3. *О законе исключённого третьего.* Покажите, что в интуиционистском исчислении высказываний доказуемо следующее:

   (a) $((A \to B) \to A) \to A \vdash \neg\neg A \to A$

   (b) $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \to A$

   Докажем $A \vee \neg A \neg\neg A \vdash A$:

1.	$(A \to A) \to (\neg A \to A) \to (A \vee \neg A \to A)$	(акс. 8)
2.	$(A \to A)$	(было ранее)
3.	$\neg A \to \neg\neg A \to A$	(акс. 10)
4.	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$	(акс. 1)
5.	$\neg\neg A$	($\in \Gamma$)
6.	$\neg A \to \neg\neg A$	(М.Р. 4,5)
7.	$(\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$	(акс. 2)
8.	$(\neg A \to \neg\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$	(М.Р. 6,7)
9.	$\neg A \to A$	(М.Р. 3,8)
10.	$(\neg A \to A) \to (A \vee \neg A \to A)$	(М.Р. 1,2)
11.	$A \vee \neg A \to A$	(М.Р. 9, 10)

4. Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

$$A = (0, +\infty) \quad \neg A = (-\infty, 0) \quad \neg\neg A = (0, +\infty) \quad \neg A \vee \neg\neg A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(b) $(((A \to B) \to A) \to A)$

$$A = (1, 2) \cup (2, 3) \quad B = (3, 4)$$

(c) $\neg\neg A \to A$

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(d) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$

$$X = (0, 10) \quad A = (1, 2) \cup (2, 3) \quad B = X \setminus \mathbb{Z}$$

(e) $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$

5. Можно ли, имея $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$, доказать закон исключённого третьего в интуиционистской логике?

6. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$, ведь $\alpha \to \beta \vdash \neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \to \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:

   (a) конъюнкцию?

   (b) дизъюнкцию?

   (c) импликацию?

   (d) отрицание?

   Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это.

7. Назовём теорию *противоречивой*, если в ней найдётся такое α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$. Покажите, что исчисления высказываний (классическое и интуиционистское) противоречивы тогда и только тогда, когда в них доказуема любая формула.

8. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α, если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

   (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

   (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

   (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$

   (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.