

## Степенные ряды

*Следствие 1.*

- $f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$
- $|z - z_0| < R$
- $0 < R \leq +\infty$

Тогда:  $f \in C^\infty(B(z_0, R))$  и все производные можно найти почленным дифференцированием.

*Доказательство.* Это очевидно из леммы о дифференцируемости степенного ряда. Если в некоторой точке  $a$  нет гладкости, то она не лежит в  $B(z_0, R)$   $\square$

**Теорема 1** (из ТФКП).

- $f$  комплексно дифференцируема в  $z_0$  (на самом деле, в некоторой области, но нас не волнует формальность в этой теореме).

Тогда  $f = \sum a_n (z - z_0)^n$  и  $R =$  расстояние от  $z_0$  до ближайшей особой точки.

*Пример.*  $f = \frac{1}{1+x^2}, z_0 = 0$



Рис. 1: Пунктиром — круг сходимости степенного ряда

*Следствие 2.*

- $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$
- $a_n, x_0, x \in \mathbb{R}$

Тогда:

1.  $\sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$  имеет тот же радиус сходимости, что и  $f$
2.  $\int_{x_0}^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$

Пример.

$$\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + C$$

$$f(x) := \operatorname{arctg} x$$

$$f' = \frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \dots$$

Проинтегрируем:

$$\operatorname{arctg} x = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 0 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

То же самое можно получить, взяв определенный интеграл.

## Метод Абеля суммирования числовых рядов

Теорема 2.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  — сходится
- $c_n \in \mathbb{C}$
- $f(x) = \sum c_n x^n$
- $R \geq 1$
- $-1 < x < 1$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum c_n$

*Доказательство.* Ряд  $\sum c_n x^n$  равномерно сходится на  $[0, 1]$  по признаку Абеля при  $a_n(x) = c_n, b_n(x) = x^n$ .

Функции  $c_n x^n$  непрерывны на  $[0, 1]$   $\xRightarrow{\text{Стокса-Зайдля}} \sum c_n x^n$  — непр. на  $[0, 1]$  □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Интегрируем:

$$f'(x) = \sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + C$$

При  $x = 0$   $C = 0$

Ещё раз интегрируем:

$$\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\int \ln(1-x) dx = (1-x) \ln(1-x) + x + C$$

При  $x = 0$   $C = 0$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \ln(1-x) + x = 1$$

Следствие 3 (т. Абеля).

- $\sum a_n = A$
- $\sum b_n = B$
- $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$
- $\sum c_n = C$

Тогда  $C = AB$

Доказательство.  $f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1]$

При  $x < 1$  есть абсолютная сходимость  $f(x)$  и  $g(x)$ . Можно перемножать:  $f(x)g(x) = h(x)$ , при  $x \rightarrow 1-0$   $A \cdot B = C$  □

## Экспонента (комплексной переменной)

Определение.

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Свойства:

1.  $\exp(0) = 1$
2.  $\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$
3.  $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$

Доказательство.

1.

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

2.

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

3.

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + w)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \\ &= \exp(z) \exp(w) \end{aligned}$$

□

Возвращаем кредит: в первом семестре говорилось, что  $\exists f_0$  — показательная функция, такая что  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_0(x) - 1}{x} = 1$

$$f_0(x) := \exp(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp'(0) = 1$$

## Теория меры

### Системы множеств

Здесь и далее система  $\iff$  множество, так говорится, чтобы избежать “множество множеств”

**Обозначение.**  $A_i$  — множества. Тогда  $\bigsqcup_i A_i$  — дизъюнктное объединение.

$A_i$  — попарно не пересекаются  $\iff$  “ $A_i$  — дизъюнктно”

**Определение.**  $X$  — множество, тогда  $2^X$  — система всех подмножеств  $X$ .

$\mathcal{P} \subset 2^X$  — **полукольцо**, если:

- $\emptyset \in \mathcal{P}$
- $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
- $\forall A, A' \in \mathcal{P} \quad \exists$  кон. и дизъюнктные  $B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup_i B_i$

**Пример.** 1.  $2^X$  — полукольцо

2.  $X = \mathbb{R}^2, \mathcal{P}$  = ограниченные подмножества, в том числе  $\emptyset$

3.

**Определение.** Ячейка в  $\mathbb{R}^m$  это  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \ x_i \in [a_i, b_i)\}$

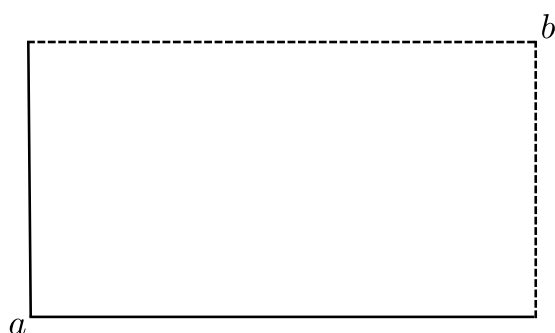


Рис. 2:  $[a, b)$  — ячейка в  $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{P}$  — множество ячеек в  $\mathbb{R}^m$  — полукольцо.

**Доказательство.**  $\triangleleft m = 2$

(a) Очевидно

$$(b) A \cap B = [a, a') \cap [b, b') = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall i = 1, 2 \max(a_i, b_i) \leq x_i < \min(a'_i, b'_i)\}$$

$$(c) A \setminus A' = \bigsqcup_{i=1}^8 B_i$$

□

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
| $B_8$ |       | $B_4$ |
| $B_7$ | $B_6$ | $B_5$ |

$$4. A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\forall i \ A_i := A$$

$$X = \bigotimes_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(a_1, a_2, a_3, \dots), \forall i \ a_i \in A_i\}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall l \ \alpha_l \in A_{i_l}$$

$$\mathcal{P} = \{X_\sigma\}_\sigma$$

$$X_\sigma = \{a \in X : a_{i_1} = \alpha_1, \dots, a_{i_k} = \alpha_k\}$$

$\mathcal{P}$  – полукольцо

$$(a) \emptyset = X_\sigma, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cup \sigma'}$$

$$(c) X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \sigma' = (2) \ 1$$

$$X_\sigma \setminus X_{\sigma'} = \text{на первой координате } 6, \text{ на второй — не } 1 = X_{\sigma_2} \cap X_{\sigma_3} \cap \dots \cap X_{\sigma_6}, \sigma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & k \end{pmatrix}.$$

5. Ячейки с рациональными координатами.

Свойства:

1. Как показывают примеры:

$$(a) A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{P}$$

(b)  $A, B \in \mathcal{P}$ , нельзя утверждать, что:

- $A \cap B \notin \mathcal{P}$
- $A \setminus B \notin \mathcal{P}$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \notin \mathcal{P}$

2. Модернизируем утверждение 3:

$A, A_1 \dots A_n \in \mathcal{P}$ . Тогда  $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$  — представимо в виде дизъюнктного объединения элементом  $\mathcal{P}$

*Доказательство.* Докажем по индукции по  $n$ .

База ( $n = 1$ ) — аксиома 3.

Переход:

$$\begin{aligned} A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) &= (A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})) \setminus A_n \\ &= \left( \bigsqcup_{i=1}^k B_i \right) \setminus A_n \\ &= \bigsqcup_{i=1}^k (B_i \setminus A_n) \\ &= \bigsqcup_{i=1}^k \bigsqcup_{j=1}^{l_i} D_{ij} \end{aligned}$$

□

**Определение.**  $\mathfrak{A} \subset 2^X$  — алгебра подмножеств в  $X$ , если:

1.  $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$
2.  $X \in \mathfrak{A}$

Свойства:

1.  $\emptyset = X \setminus X \in \mathfrak{A}$
2.  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{A}$
3.  $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{A}$
4.  $A \cup B \in \mathfrak{A}$ , потому что  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
5.  $A_1 \dots A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}$  — по индукции
6. Всякая алгебра есть полукольцо

Обратное неверно, см. пример 2.

*Пример.* 1.  $2^X$

2.  $X = \mathbb{R}^2, \mathfrak{A}$  — ограниченные подмножества или их дополнения.