Упражнение 1. Пусть H, K — некоторые группы (вообще говоря неабелевы). Рассмотрим $G = H \times K$ — их прямое произведение. Показать, что подгруппа $F = H \times \{e_K\}$ нормальна в G:

$$F = \{(h, e_K) \mid h \in G\} \lhd G$$

Решение.

$$(h_1, k) \circ (h_2, e_K) \circ (h_1^{-1}, k^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, kk^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, e_K) \in F$$

□

Упражнение 2. Пусть G — некоторая конечная абелева группа. Доказать, что существует набор циклических групп $H_1 \dots H_k$, таких что их произведение изоморфно G:

$$H_1 \times \dots \times H_k \cong G$$

Решение. Факторизуем $n = |G|$:

$$n = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k}$$

По теореме Силова существуют p–подгруппы G порядков $p_i^{q_i}$, обозначим их $\mathcal{P}_i$. Т.к. G абелева, $\mathcal{P}_i$ нормальны.

Докажем по индукции по k, что $G \cong \bigtimes_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$.

База. $k = 1$: очевидно.

Переход. По индукционному предположению для любой абелевой $G : |G| = n = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k}$ верно $G \cong \bigtimes_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i$.

$\lhd G' : |G'| = p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k} \cdot p_{k+1}^{q_{k+1}} = t \cdot p_{k+1}^{q_{k+1}} = t \cdot r$.

Покажем, что $G' \cong H \times K$, где $|K| = r, |H| = t$. Тогда по индукционному предположению искомое будет верно.

Пусть $H = \{x \in G' \mid x^r = e\}, K = \{x \in G' \mid x^t = e\}$.

Утверждение. $G \cong H \times K \Leftrightarrow \begin{cases} G = HK \\ H \cap K = \{e\} \\ H, K \lhd G \end{cases}$

Покажем все, что все три пункта этого утверждения выполнены для наших H, K, G':

1. По какой-то теореме из теории чисел $\exists a, b \in \mathbb{Z} : at + br = 1$.

$$\forall x \in G' \quad x = x^{at+br} = x^{at} x^{br}$$

$$(x^{at})^r = (x^{tr})^a = e^a = e \Rightarrow x^{at} \in H$$

$$(x^{br})^t = (x^{tr})^b = e^b = e \Rightarrow x^{br} \in K$$

Итого $\forall x \in G' \;\; x = \underbrace{x^{at}}_{\in H} \underbrace{x^{br}}_{\in K} \Rightarrow G' = HK$

2. $\triangleleft g \in H \cap K$

   $g^t = e = g^r$, следовательно, порядок g есть $\gcd(t, r) = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$

3. Очевидно, т.к. G' нормальна.

Таким образом, мы доказали, что G раскладывается на прямое произведение силовских p–подгрупп. Однако они необязательно циклические. Покажем, что каждая из таких подгрупп есть прямое произведение циклических.

Утверждение. $\triangleleft \mathcal{P}_i, |\mathcal{P}_i| = p_i^{q_i}$. GG to GPассмотрим произвольный элемент максимального порядка g. Тогда $\mathcal{P}_i \cong \{g\} \times K$, где K — подгруппа G.

Proof. Докажем по индукции по q_i.

База. $\mathcal{P}_i = \langle g \rangle \cong \langle g \rangle \times \langle e \rangle$

Переход. Пусть g — элемент максимального порядка в $\mathcal{P}_i$ и этот порядок равен a. Рассмотрим какую-нибудь подгруппу H, не содержащую a. Такую подгруппу можно получить как $\langle h \rangle$, где $h \notin \langle a \rangle, h \neq e$. Фактор–группа $\mathcal{P}_i/H$ имеет порядок меньше $\mathcal{P}_i$, следовательно, для неё выполняется утверждение и $\mathcal{P}_i/H = \langle g' \rangle \times K'$.

С помощью прообразов естественного гомоморфизма фактор–группы искомое выполнено, технические детали здесь опущены.

□

Применяя это утверждение к K рекурсивно, получим искомое:

$$\mathcal{P}_i \cong \left\langle g_1^{(i)} \right\rangle \times K \cong \left\langle g_1^{(i)} \right\rangle \times \left(\left\langle g_2^{(i)} \right\rangle \times K' \right) \cong \left\langle g_1^{(i)} \right\rangle \times \left\langle g_2^{(i)} \right\rangle \times \cdots \times \left\langle g_{r_i}^{(i)} \right\rangle$$

Очевидно, что $\left\langle g_j^{(i)} \right\rangle$ есть циклическая группа и тогда:

$$G \cong \bigtimes_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \cong \bigtimes_{i=1}^{k} \bigtimes_{j=1}^{r_i} \left\langle g_j^{(i)} \right\rangle$$

□

Упражнение 3. Рассмотрим аффинные преобразования плоскости. Пусть T — множество всех трансляций, пусть R — множество всех поворотов вокруг фиксированной точки O (одной для всех поворотов). Рассмотрим группу $G = \langle T \cup R \rangle$, порождённую всеми трансляциями и поворотами вокруг O. Показать, что T нормальна в G. Показать, что $G = T \cdot R$:

$$G = \{\tau\, \rho \mid \tau \in T, \rho \in R\}$$

Решение. Очевидно T и R замкнуты.

Обозначение. $\tau \in T \leftrightarrow \langle x', y' \rangle$ — сдвиг на x' по оси x и на y' по оси y.

Рассмотрим действие $\tau\ \rho$:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \langle x', y' \rangle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' & y + y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \Big((x + x')\cos\theta + (y + y')\sin\theta \quad -(x + x')\sin\theta + (y + y')\cos\theta \Big)$$

Рассмотрим действие $\rho\ \tau$: после поворота на θ $\langle x', y' \rangle$ заменится на

$$\langle x'\cos\theta + y'\sin\theta, -x'\sin\theta + y'\cos\theta \rangle$$

и после сложения с повернутым вектором $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ мы получим тот же самый вектор, что и при $\tau\ \rho$. Таким образом, множество $T \cup R$ абелево[1].

Поворот на θ, сдвиг на $\langle x, y \rangle$ и поворот на θ' есть то же самое, что сдвиг на повернутое на θ $\langle x, y \rangle$ и поворот на $\theta + \theta'$.

Сдвиг на $\langle x, y \rangle$, поворот на θ и сдвиг на $\langle x', y' \rangle$ есть то же самое, что сдвиг на повернутое на $\langle x, y \rangle +$ повернутое на θ $\langle x', y' \rangle$ и поворот на θ.

Итого, $\langle T \cup R \rangle = T \cdot R \cup R \cdot T$, т.к. было показано, что нельзя поворотами и сдвигами получить что-либо кроме поворотов и сдвигов, а также тождественное действие $e \in T, e \in R \Rightarrow T = T \cdot e \Rightarrow T \subset T \cdot R$ и аналогично $R \subset T \cdot R$. Т.к. множество $T \cup R$ абелево, то $T \cdot R = R \cdot T \Rightarrow \langle T \cup R \rangle = T \cdot R$.

$\lhd \rho\tau\rho^{-1}$

Примечание. $\left\langle \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\rangle \Leftrightarrow \langle x', y' \rangle$, используется, чтобы формулы не были слишком широкими.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} &= \left\langle \begin{matrix} x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{matrix} (x'\cos\theta + y'\sin\theta)\cos\theta - (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)\sin\theta \\ (x'\cos\theta + y'\sin\theta)\sin\theta + (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)\cos\theta \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} x' + y'\sin\theta\cos\theta - y'\cos\theta\sin\theta \\ y' + x'\cos\theta\sin\theta - x'\sin\theta\cos\theta \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\rangle \end{aligned}$$

[1] Абелево как группа, но ещё не доказано, что это группа.

Таким образом, T нормально в G, т.к. случай $\tau'\tau\tau'^{-1} \in T$ тривиален. $\square$