# Теория категорий

Михайлов Максим

31 декабря 2021 г.

### Оглавление

Лекция 1 23 октября	2
1 Введение	2
Лекция 2 30 октября	5
2 Функторы	5
3 Моно- и эпиморфизмы, дуальные категории	6
Пекция 3 6 ноября	8

### Лекция 1

## 23 октября

#### 1 Введение

Что такое математика? Это наука или язык, мы будем считать, что язык. Язык можно по-разному выражать.

Пример. Вспомним определение предела функции  $\lim_{x\to x_0} f(x) = \xi$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_{\alpha} \in \dot{B}(x_{0}, \delta) \quad f(X_{\alpha}) \in B(f(\xi), \varepsilon)$$
$$\forall U(\xi) = \varepsilon \ \exists \dot{U}(x_{0}) = \delta \ \forall x_{\alpha} \in \delta : f(x_{\alpha}) \in \varepsilon$$

У нас есть два способа написать одно и то же. Теория категорий — ещё один способ описать всю математику.

В математике мы часто встречаем функции (отображения), у которых есть композиция. Попробуем описать всю математику композицией. Такая попытка привела к успеху, и теоркат позволил описать различные области одним синтаксисом.

**Определение**. **Категория** — объект C, у которого есть:

- 1. "Коллекция" объектов  ${\rm Obj}(\mathcal{C})$ . Мы не можем сказать "множество", т.к. тогда мы сталкиваемся с проблемами теории множеств¹.
- 2. "Коллекция" морфизмов (стрелок)  $\operatorname{Mor}(\mathcal{C})/\operatorname{Arr}(\mathcal{C})$

$$\forall f \in Arr(\mathcal{C}) \ f: X \to Y, \ X, Y \in Obj(\mathcal{C})$$

3. Правила:

(a)  $\forall X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \ \exists f \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) : f(X) = X.$  Также это обозначают как  $f: X \to X.$  f обозначается как  $\mathrm{id}_X$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> См. парадокс Рассела

(b) 
$$\langle f: X \to Y, g: Y \to Z, f, g \in Arr(\mathcal{C}), X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$$

$$\exists ! h : X \to Z, h \in Arr(\mathcal{C}) \quad h = q \circ f$$

Но это не значит, что не существует других  $h':X \to Z.$ 

Примечание. Мы не определяем, что такое "=", "f(x)" и так далее, потому что теория категорий — про синтаксис, а смысл мы сами додумываем.

Утверждение.

$$\forall a, b, c \in Arr(\mathcal{C}) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

Пример. Пустая категория (без объектов, без морфизмов)

Пример (1). Категория с одним объектом и одной стрелкой:

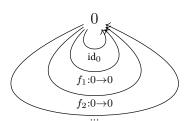


Пример. 
$$1 \longrightarrow 2$$
  $0 \longrightarrow 1$   $0 \longrightarrow 1$   $0 \longrightarrow 1$   $0 \longrightarrow 1$   $0 \longrightarrow 1$ 

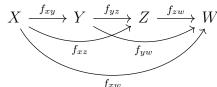
Утверждение.  $\forall f: X \to Y, \mathrm{id}_X: X \to X, \mathrm{id}_Y: Y \to Y$   $f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f$ 

Не все категории удовлетворяют этому закону.

Пример.



Пусть при этом  $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i = f_{i+j}$ . Тогда эта категория описывает натуральные числа. Пример.



С одной стороны,  $f_{xw} = f_{zw} \circ f_{xz}$ , с другой стороны  $f_{xw} = f_{yw} \circ f_{xy}$ , с третьей стороны  $f_{xw} = f_{zw} \circ f_{yz} \circ f_{xy}$ . Есть проблема: мы можем получить один и тот же морфизм разными способами, следовательно, не можем однозначно разложить морфизм в композицию, т.е. объекты не являются свободными<sup>2</sup>. С этим можно бороться очень тупо: для каждого

 $<sup>^{2}</sup>$  Ради сохранения рассудка пока что не нужно понимать, что это такое.

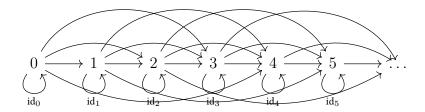
способа разложить морфизм вводить копию исходного морфизма, но тогда мы теряем ассоциативность.

### Лекция 2

## 30 октября

#### 2 Функторы

Пример. Рассмотрим следующую категорию:



Стрелки можно определить как суммирование, а можно как ≤, ничего не изменится.

Пусть мы хотим отобразить категорию  $\mathcal C$  в  $\mathcal D$ . Отобразим точки в точки и стрелки в стрелки, при этом  $\mathrm{Arr}'(\mathcal C,\mathcal D)$  задает отображение точек, а  $\mathrm{Arr}'(\mathrm{Arr}(\mathcal C),\mathrm{Arr}(\mathcal D))$  задает отображение стрелок.

Определение. Малая категория — категория, объекты которой образуют множество.

Примечание. При этом нет ограничения на стрелки, они могут быть не множеством.

*Пример.* Категория из одного элемента со сложением на стрелках, где стрелки есть для всех натуральных чисел, кардиналов и пределов. Все стрелки не "помещаются" в множество.

Отображать между категориями мы можем как угодно, но хотелось бы сохранять структуру. Условие сохранения композиции:

$$\forall f_{AB}, f_{BC} \in \operatorname{Arr} \mathcal{C} : \mathcal{F}(f_{BC}) \circ \mathcal{F}(f_{AB}) = \mathcal{F}(f_{BC} \circ f_{AB})$$

, где  $\mathcal{F}-$  отображение из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$ . Из предыдущего закона следует, что петли отображаются в петли, т.к.:

$$\mathcal{F}(f_{AA} \circ f_{AA}) = \mathcal{F}(f_{AA}) \circ \mathcal{F}(f_{AA})$$

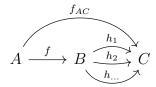
таким образом, образ  $f_{AA}$  должен иметь композицию с собой  $\Rightarrow$  это петля. Но никто не гарантирует, что эта петля будет на соответствующем объекте. Введём следующий закон:

$$\mathcal{F}(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

Определение.  $\mathcal{F}$  называется (ковариантным<sup>1</sup>) функтором

#### 3 Моно- и эпиморфизмы, дуальные категории

Рассмотрим следующую категорию (id опущены):



Если стрелку  $A \to C$  можно получить только как  $f_{AC} = f \circ h_i$ , то мы хотим:

- 1. Ввести отношение эквивалентности, чтобы не различать разные  $f_{AC}$ .
- 2. Назвать стрелку f монической (или мономорфизмом).

Определение. Дуальная категория для некоторой категории  $\mathcal C$  это категория  $\mathcal C^*$ , что:

- 1.  $Obj C = Obj C^*$
- 2.  $\forall f_{AB} \in \operatorname{Arr} \mathcal{C} \ \exists ! f_{BA} \in \operatorname{Arr} \mathcal{C}^*$
- 3.  $\forall f_{BA} \in \operatorname{Arr} \mathcal{C}^* \ \exists ! f_{AB} \in \operatorname{Arr} \mathcal{C}$

Операция сопряжения является функтором, будем обозначать его  $\tau$ . Она легко строится в том смысле, что для любой категории, не зная ничего про объекты, мы можем построить её путём разворота стрелок.

Пример.

Определение. Если f — мономорфизмом в категории  $\mathcal{C}$ . Тогда  $f^* = \tau(f)$  является эпиморфизмом в категории  $\mathcal{C}^*$ .

Определение (альтернативное). Если стрелку  $C \to A$  можно получить только как  $f_{CA} = h_i \circ f$ , то f называется эпиморфизмом.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Не важно, что это значит.

 $<sup>^{2}</sup>$  Или зеркальная, двойственная, сопряженная, dual, opposite.



Рис. 2.1: Категория и дуальная к ней категория.

*Примечание.* Если стрелки соответствуют отношению предпорядка " $\leq$ ", то в дуальной категории стрелки соответствуют отношению " $\geq$ ".

 $\Pi$ римечание. Категория, где стрелки соответствуют отношению предпорядка называется Poset.

Определение. Если  $\forall f_{AB} \in \operatorname{Arr} \mathcal{C} \ \exists f_{BA}^{-1}: f_{AB} \circ f_{BA}^{-1} = \operatorname{id}_B, f_{BA}^{-1} \circ f_{BA} = \operatorname{id}_A,$  то  $\mathcal{C}$  - группоид.

# Лекция 3

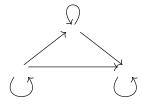
# 6 ноября

Пусть даны две категории:

Пример.



По нашему определению эти две категории символьно не равны. Однако мы хотим построить операцию, которая покажет их эквивалентность. Давайте забудем объекты, получим следующую категорию:

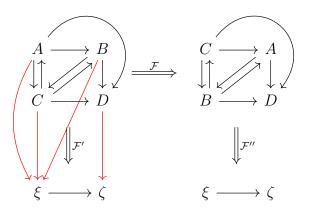


Тогда у нас функтор будет состоять только из отображения морфизмов.

#### Не дописано.

Пример. Рассмотрим две категории ABCD, CABD, а также категорию  $\xi\zeta$ , функтор  $\mathcal{F}$ :

(отображение объектов красным цветом) между ними¹:



Тогда 
$$\mathcal{F}'=\mathcal{F}''\circ\mathcal{F}$$

Если в рассматриваемых нами категориях нет кратных рёбер, то операция забвения<sup>2</sup> работает.

Определение. Cat — класс малых категорий

FCat — класс забытых категорий

Тогда рассмотрим отображение Er : Cat  $\to$  FCat и Er $^{-1}$  : FCat  $\to$  Cat, такие что Er  $\circ$  Er $^{-1}$  = id. При этом Er $^{-1}$  не единственно.

Oбозначение.  $\mathrm{Er}^{-1}=\mathrm{re}$ 

Теперь можем определить предикат:

$$P: (\operatorname{Fcat} \to \operatorname{Cat}) \to (\operatorname{FCat} \to \operatorname{Cat}) \to \operatorname{Bool}$$

Он берёт два способа "вспомнить" категорию и возвращает, равны ли они.

$$P(re_1, re_2) = \forall f \in FCat \ re_1(f) = re_2(f)$$

Наше определение — чушь, потому что квантор "∀" мы не можем применить к Arr — это может быть не множество.

Утверждение. Пусть  $\mathcal{C}$  — категория, в которой нет кратных рёбер. Тогда, если  $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$  является множеством, то  $\exists h: \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Arr}'(\mathcal{C})$  — гомоморфизм, где  $\mathrm{Arr}'(\mathcal{C})$  является множеством.

Доказательство. Слишком сложно.

¹ Отображение морфизмов не обозначено на диаграмме, оно однозначно.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Удаления имен объектов.

Мы хотим придумать некоторую структуру X, такую что  $\mathrm{Cat} \subset X$ ,  $\mathrm{FCat} \subset X$ . Маханием рук существует способ ввести **теорию топосов**. Пусть S' — некоторая структура, похожая на множество. В таких структурах можно ввести понятие квантора: если мы можем завести маркировку  $S' \leftrightarrow \mathrm{Type}$ . Если мы также можем сопоставить наш набор кванторов  $\exists$ ,  $\forall$  особым видам типов  $\Pi$ ,  $\Sigma$  в теории типов, то полученная теория становится "довольно неплохой".

Если мы опишем некоторую функцию h, отображающую какие-нибудь другие кванторы в  $\{\exists, \forall\}$ , то эти другие кванторы будут работать "схожим образом".