1 Определения

1.1 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс — вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_+$

1. $|\alpha| \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
2. $x^\alpha \overset{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\alpha! \overset{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
4. $f_{(x)}^{(\alpha)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$

1.2 ! Формула Тейлора (различные виды записи)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(a + \Theta h, h)$$

$$f(x) = \sum_{\alpha : 0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha : |\alpha| = r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x-a))}{(\alpha+1)!}(x-a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

1.3 n-й дифференциал

$$\sum_{\alpha : |\alpha| = k} k! \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!} h^\alpha \overset{\text{def}}{=} k\text{-й } \textbf{дифференциал} \text{ функции } f \text{ в точке } a \overset{\text{def}}{=} d^k f(a,h)$$

1.4 ! Норма линейного оператора

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \quad ||A|| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m : \\ |x| = 1}} |Ax|$$

2 Теоремы

2.1 Лемма о дифференцировании “сдвига”

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $f \in C^r(E)$ — это подразумевает, что E открыто
- $a \in E$

- $h \in \mathbb{R}^m : \forall t \in [-1, 1] \quad a + th \in E$
- $\varphi(t) = f(a + th)$

Тогда при $1 \le k \le r$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

Доказательство.

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \right)' h_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i_2}}(a + th) h_i h_{i_2}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} h_m^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \ldots \right)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k}$$

$\square$

2.2 ! Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

2.2.1 В форме Лагранжа

- $f \in C^{r+1}(E)$ — это подразумевает $E \subset \mathbb{R}^m, f : E \to \mathbb{R}$
- $x \in B(a, R) \subset E$

Тогда $\exists t \in (0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{\alpha:0 \le |\alpha| \le r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x - a)^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a + t(x - a))}{(\alpha + 1)!}(x - a)^\alpha}_{\text{Остаток в форме Лагранжа}}$$

Доказательство. Кажется, это теперь почти очевидно.

$\varphi(t) = (a + th)$, где $h = x - a$. Тогда $\varphi(0) = f(a)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r + 1)!} t^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\alpha:0\leq|\alpha|\leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\text{Многочлен Тейлора}} + \underbrace{\sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\Theta(x-a))}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{\mathcal{O}(|x-1|^r)}$$

По лемме:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{f^{(\alpha)}}{\alpha!}h^\alpha + \sum_{\alpha:|\alpha|=r+1} \frac{f^{(\alpha)}(a+\Theta(x-a))}{\alpha!}h^\alpha$$

□

2.2.2 В форме Пеано

$$f(a+h) = \sum_{\alpha:0\leq|\alpha|\leq r} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}h^\alpha + o(|h|^r)$$

Доказательство. Отсутствует □

2.3 Теорема о пространстве линейных отображений

1. Отображение $A \to ||A||$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — норма, т.е.:
   (a) $||A|| \geq 0$
   (b) $||A|| = 0 \Rightarrow A = 0_{n\times m}$
   (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ ||\lambda A|| = |\lambda|||A||$
   (d) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
2. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow ||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||$

Доказательство.

1. $||A|| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$

   a, b, c — очевидно.

   d: $|(A+B)x| = |Ax+Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (||A|| + ||B||)|x|$

   По замечанию 3 $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
2. $|BAx| = |B(Ax)| \leq ||B|| \cdot |Ax| \leq ||B|| \cdot ||A||$

□

2.4 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

- X, Y — линейные нормированные пространства
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. A — ограниченный оператор, т.е. $||A||$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно всюду в X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство.

1. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.
2. $2 \Rightarrow 1$

   Непрерывность в 0: $\forall \varepsilon \ \ \exists \delta : \forall x : |x| \leq \delta \quad |Ax| < \varepsilon$

   $\lhd \varepsilon = 1, |x| = 1 : |Ax| = \left|A \frac{1}{\delta} \delta x\right| = \frac{1}{\delta} |A \delta x| \leq \frac{1}{\delta}$
3. $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{||A||} \ \ \forall x_1, x_0 \ \ |x_1 - x_0| < \delta$$

□