

## Домашнее задание №4: «просто-типизированное лямбда исчисление»

1. Сформулируйте аксиомы для просто типизированного исчисления по Чёрчу. Указание: аксиомы должны быть согласованы с типами аргументов лямбда-абстракций.

Решение.

- (a)  $\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$   
 (b)  $\frac{\Gamma \vdash A : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash A B : \tau}$   
 (c)  $\frac{\Gamma, x : \tau \vdash A : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^\tau. A : \tau \rightarrow \sigma}$

□

2. Рассмотрим типизацию по Чёрчу. Определим стирающее преобразование  $|\cdot| : \Lambda \rightarrow \Lambda_\text{ч}$ :

$$|A| = \begin{cases} \alpha, & A = \alpha \\ |P||Q|, & A = PQ \\ \lambda x. |P|, & A = \lambda x^\tau. P \end{cases}$$

Верно ли следующее: если  $P \rightarrow_\beta Q$  и  $|P'| = P, |Q'| = Q$ , то  $P' \rightarrow_\beta Q'$ .

Решение. Кажется, преобразование  $|\cdot| : \Lambda_\text{ч} \rightarrow \Lambda_\text{к}$ .

Нет. Пусть  $Q' = \lambda x^\tau. x, P' = \lambda x^\sigma. (\lambda x^\sigma. x) x$ .  $|Q'| \equiv \lambda x. x, |P'| \equiv \lambda x. (\lambda x. x) x$ , тогда  $|P'| \rightarrow_\beta \lambda x. x \equiv |Q'|$ . Но  $P' \not\rightarrow_\beta Q'$ , т.к. единственный возможный шаг это  $P' \rightarrow_\beta \lambda x^\sigma. x \neq_\alpha \lambda x^\tau. x$

Иначе переберём как было сделано  $P \rightarrow_\beta Q$ :

- (a)  $P \equiv A B, Q = C D$  и либо  $A \rightarrow_\beta C$  и  $B =_\alpha D$  либо  $A =_\alpha C$  и  $B \rightarrow_\beta D$ . Тогда индукция даёт  $P' \equiv A' B'$

□

3. Покажите, что если  $A =_\alpha B$  и  $\Gamma \vdash A : \tau$ , то  $\Gamma \vdash B : \tau$  (или, иными словами, доказательство не зависит от выбора пред-лямбда-терма).

Решение.

- (a)  $A \equiv x, B \equiv x$ . Тогда искомое очевидно.  
 (b)  $A \equiv P Q, B \equiv R S, P =_\alpha R, Q =_\alpha S$  — индукция:

$\Gamma \vdash P \ Q : \tau$ , тогда  $\Gamma \vdash P : \sigma \rightarrow \tau, \Gamma \vdash Q : \sigma$ . По индукционному предположению будет  $\Gamma \vdash R : \sigma \rightarrow \tau, \Gamma \vdash S : \sigma$  и следовательно по второму правилу вывода искомое верно.

- (с)  $A \equiv \lambda x.P, B \equiv \lambda y.Q$  и существует  $t$  — новая переменная, такая что  $P[x := t] =_{\alpha} Q[y := t]$  — опять индукция:

$\Gamma \vdash \lambda x.P : \tau \rightarrow \sigma$ , тогда  $\Gamma, x : \tau \vdash P : \sigma$ , но тогда и  $\Gamma, t : \tau \vdash P[x := t] : \sigma$ , т.к. это просто переименование и следовательно  $\Gamma, t : \tau \vdash Q[y := t] : \sigma$  по индукционному предположению. Опять же  $\Gamma, y : \tau \vdash Q : \sigma$  и тогда по правилу вывода  $\Gamma \vdash \lambda y.Q : \tau \rightarrow \sigma$ .

□