

Следствие 1 (из 5 свойства меры Лебега).  $\forall A \in \mathfrak{M}^m \exists B, C$  — борелевские:

$$B \subset A \subset C \quad \lambda(C \setminus A) = 0, \lambda(A \setminus B) = 0$$

Доказательство.

$$C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_{\frac{1}{n}} \quad B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_{\frac{1}{n}}$$

□

Следствие 2.  $\forall A \in \mathfrak{M}^m \exists B, \mathcal{N} : B$  — борелевское,  $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}^m, \lambda \mathcal{N} = 0$ .

Тогда  $A = B \cup \mathcal{N}$

Доказательство.  $\exists B$  из следствия 1,  $\mathcal{N} := A \setminus B$

□

Примечание. Обозначим  $|X|$  — мощность множества  $X$ .

$$\forall X \quad |2^X| > |X|$$

$$|2^{\mathbb{R}^m}| > \text{континуум}$$

$$\mathcal{B} \subset 2^{\mathbb{R}^m} \text{ — борелевская } \sigma\text{-алгебра } |\mathcal{B}| = \text{континуум}$$

$$\mathfrak{M}^m > \text{континуум}$$

$\mathcal{K}$  — Канторово множество, тогда  $|\mathcal{K}| = \text{континуум}, \lambda \mathcal{K} = 0$

$$\forall D \subset \mathcal{K} \quad D \in \mathfrak{M}^m, \lambda D = 0 \quad 2^{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{M}^m$$

Следствие 3.  $\forall A \in \mathfrak{M}^m$

$$\lambda A = \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \lambda(F) \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{K: K \subset A \\ K \text{ — комп.}}} \lambda(K)$$

Доказательство.  $(*)$  следует из  $\sigma$ -конечности  $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q(0, n)$ , где  $Q(a, R) = \times_{i=1}^n [a_i - R, a_i + R]$  — куб с центром в  $a$  и ребром  $R$ .

$\lambda(A \cap Q(0, n)) \rightarrow \lambda A$  по непрерывности снизу, т.к.  $A \cap Q(0, n)$  хорошо аппроксимируется замкнутым множеством. □

**Определение.** Свойства из следствия 3 называются **регулярностью** меры Лебега.

## Преобразование меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

**Лемма 1.**

- $(X', \mathfrak{A}', \mu')$  — пространство с мерой.
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — “заготовка” пространства с мерой
- $\exists T : X \rightarrow X'$  — биекция;  $\forall A \in \mathfrak{A} \quad TA \in \mathfrak{A}'$  и  $T\emptyset = \emptyset$

Положим  $\mu A = \mu'(TA)$ . Тогда  $\mu$  — мера.

*Доказательство.* Проверим счётную аддитивность  $\mu : A = \bigsqcup A_i$

$$\mu A = \mu'(TA) = \mu' \left( \bigsqcup TA_i \right) = \sum \mu'(TA_i) = \sum \mu A_i$$

□

**Лемма 2.**

- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непр.
- $\forall E \in \mathfrak{M}^m : \lambda E = 0$  выполняется  $\lambda TE = 0$

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad TA \in \mathfrak{M}^n$

*Доказательство.*

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j \cup \mathcal{N}$$

, где  $K_j$  — компакт,  $\lambda \mathcal{N} = 0$

$$TA = \bigcup_{j=1}^{+\infty} TK_j \cup T\mathcal{N}$$

$TK_j$  компакт как образ компакта при непрерывном отображении.  $\Rightarrow TA$  измеримо. □

*Пример (Канторова лестница).*

$$\Delta = [0, 1]$$

$$\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \Delta_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \quad \Delta_{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \Delta_{10} = \dots, \Delta_{11} = \dots$$

$$\mathcal{K}_0 = \Delta$$



$$\mathcal{K}_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1$$

$$\mathcal{K}_2 = \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{K}_n = \bigcup_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$$

$$\mathcal{K} := \bigcap \mathcal{K}_n$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \Delta \setminus \mathcal{K}_1 \\ \frac{1}{4} & , x \in \Delta_0 \setminus \mathcal{K}_2 \\ \frac{3}{4} & , x \in \Delta_1 \setminus \mathcal{K}_2 \\ \vdots & \\ \sup f(t) & , t \leq x, t \notin \mathcal{K} \end{cases}$$

$f([0, 1] \setminus \mathcal{K})$  — счётное = множество двоично-рациональных чисел из  $[0, 1]$

$$\lambda f([0, 1] \setminus \mathcal{K}) = 0$$

$\lambda f(\mathcal{K}) = 1$ , т.к.  $\forall y \in [0, 1] \exists x : f(x) = y$ , при этом  $f$  непрерывна, т.к. она — сюръекция.

Тогда пусть  $E \subset [0, 1] \not\subset \mathfrak{M}^m : f^{-1}(E)$  — подмножество  $\mathcal{K}$  и промежутки — прообразы двоично рациональных точек  $\in E$ , при этом это множество измеримо, т.к.  $\lambda \mathcal{K} = 0$

Ещё наблюдение:  $x \notin \mathcal{K} \Rightarrow f$  — дифференцируема в  $x$  и  $f' = 0$

**Теорема 1.**

- $O \subset \mathbb{R}^m$  открыто

- $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\Phi \in C^1(O)$

Тогда  $\forall A \in O : A \in \mathfrak{M}^m \quad \Phi(A) \in \mathfrak{M}^m$ , т.е. образ измеримого множества измерим.

*Доказательство.* Достаточно проверить свойства  $\lambda E = 0 \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$

$$\lambda E = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ шары } B_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \quad \lambda B_i < \varepsilon$$

$\Rightarrow$  из теоремы о Лебеговском продолжении меры.

$\Leftarrow$  по полноте меры Лебега.

1.  $E \subset P \subset \overline{P} \subset O, \lambda E = 0$

$$L := \max_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$$

Тогда

$$\forall x, y \in P \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$$

— неравенство Лагранжа.

$$\Phi(B(x_0, r)) \subset B(\Phi(x_0), Lr) \subset Q(\Phi(x_0), Lr)$$

$$B_i := B(x_i, r_i), y_i := \Phi(x_i)$$

$$E \subset \bigcup B_i \quad \sum \lambda B_i < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(B_i) \subset \bigcup B(y_i, Lr_i) \subset \bigcup Q(y_i, Lr_i)$$

$$\sum \lambda \Phi(B_i) < \sum \lambda Q(y_i, Lr_i) = \sum (2Lr_i)^m = (2L)^m \sum r_i^m$$

Было  $\sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m})^m$ , стало  $\sum \lambda \Phi(B_i) < L^m \sum (2r_i)^m < \varepsilon(\sqrt{m}L)^m$

2. Рассмотрим произвольный случай, то есть  $E \subset O$

$$O = \bigsqcup Q_i, \text{ где } Q_i \text{ — кубические ячейки, } Q_i \subset \overline{Q_i} \subset O$$

$$E = \bigsqcup (E \cap Q_i), \lambda(E \cap Q_i) = 0. \text{ Тогда по пункту 1 } \lambda(\Phi(E \cap Q_i)) = 0$$

$$\Phi(E) = \bigcup \Phi(E \cap Q_i) \Rightarrow \lambda \Phi(E) = 0$$

□

*Следствие 4.*  $\lambda$  — инвариантно относительно сдвигов в  $\mathbb{R}^m$  (и  $\mathfrak{M}^m$  тоже инвариантно), т.е.  $\forall a \in \mathbb{R}^m$ :

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad A + a \in \mathfrak{M}^m \tag{1}$$

$$\text{и } \lambda A = \lambda(A + a) \tag{2}$$

*Доказательство.*

$$\Phi : x \mapsto x + a, \Phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$$

Отсюда следует (1).

(2) следует из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

$$A \subset \bigcup P_k \Leftrightarrow A + a \subset \bigcup (P_k + a)$$

Для ячеек  $\lambda P_k = \lambda(P_k + a)$

Таким образом:

$$\lambda A = \inf \left( \sum \lambda P_k \right) = \inf \left( \sum \lambda (P_k + a) \right) = \lambda(A + a)$$

□

**Теорема 2.**  $\mu$  — мера на  $\mathfrak{M}^m$ :

1.  $\mu$  — инвариантно относительно сдвигов:

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \quad \forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \mu(E + a) = \mu E$$

2. Для любого ограниченного  $E \in \mathfrak{M}^m$   $\mu(E) < +\infty$

Тогда  $\exists k \in [0, +\infty) : \mu = k \cdot \lambda$ , т.е.:

$$\forall E \quad \mu E = k \cdot \lambda E$$

и пусть  $0 \cdot \infty = 0$  в данном контексте.

*Доказательство.* Нет и не будет.

Общая идея: Как мера  $\mu$  задается на рациональных ячейках?

В  $\mathbb{R}^2$   $Q_1$  — единичная квадратная ячейка,  $\mu Q_1 = v$

$Q_2$  — ячейка  $2 \times 2$ ,  $\mu Q_2 = 4v$ . Аналогично  $\mu Q_n = n^2 v$ ,  $\mu Q_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} v$

Тогда  $k = v$  и  $\mu$  пропорционально  $\lambda$ .

□

*Примечание.*  $\mu A = \lambda_1 A$ , если  $\exists y_0 : A \subset \{(x, y_0), x \in \mathbb{R}\}$  — аффинное одномерное подпространство, пересекающее ось  $y$  в точке  $y_0$ .

Эта мера — 1-Хаусдорфа в  $\mathbb{R}^2$ .

**Теорема 3** (инвариантность меры лебега относительно линейного ортогонального преобразования).

- $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  ортогонально.

Тогда  $\forall A \in \mathfrak{M}^m$ :

1.  $TA \in \mathfrak{M}^m$
2.  $\lambda(TA) = \lambda A$

*Доказательство.*

1.  $T \in C^1$ , поэтому измеримость сохраняется.
2.  $\mu A := \lambda(TA)$

$\mu$  — мера на  $\mathfrak{M}^m$  по лемме 1, при этом  $\mu$  инвариантно относительно сдвигов:

$$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(TA + Ta) = \lambda(TA) = \mu A$$

$A$  ограничено  $\Rightarrow TA$  ограничено  $\Rightarrow \mu A < +\infty$

По предыдущей теореме  $\lambda(TA) = k \cdot \lambda(A)$ . Какое у нас  $k$ ?

Возьмём шар  $B$ .  $TB$  — шар того же радиуса, т.е.  $TB$  — сдвинутый  $B$ , т.е.  $TB = B + x_0$ .

$$\mu B = \lambda(TB) = \lambda(B + x_0) = \lambda B \Rightarrow k = 1$$

□

*Следствие 5.*  $\lambda(\text{прямоугольный параллелепипед}) = \text{произведение сторон}$ .

*Следствие 6.* Любое собств. линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$  имеет меру 0

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $\lambda\{x : x_m = 0\} = 0$

$$L = \{x : x_m = 0\} \simeq \mathbb{R}^{m-1} = \bigsqcup \underbrace{Q_i}_{\text{единичные кубы}}$$

$$L \subset \bigsqcup Q_i \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}\right)$$

$$\lambda\left(Q_i \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right) = \frac{2\varepsilon}{2^i}$$

□