

Интеграл локального потенциального векторного поля по непрерывному пути

Лемма 1 (о гусенице).

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Тогда \exists дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и \exists шары $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.

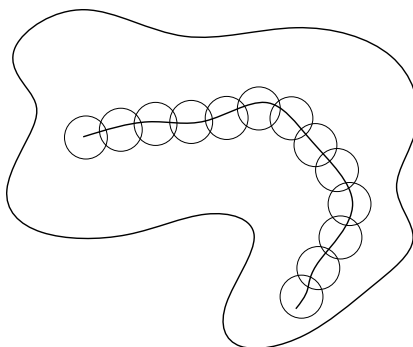


Рис. 1: “Гусеница” — покрытие пути шарами

Доказательство. $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$$\overline{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

$\overline{\beta}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо α_c, β_c брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$ — компактно $\Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

??? ни один интервал не накрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$, принадлежащая “только этому” интервалу.

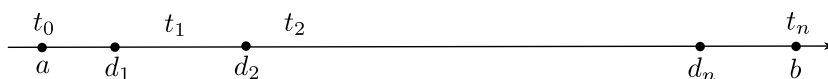


Рис. 2: Выбор точек t_k

Точка t_k выбирается на d_k, d_{k+1} и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1})$.

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$$

□

Примечание. $\forall \delta > 0$ мы можем требовать, чтобы все $r_k < \delta$

Примечание. В силу произвольности r_c можно требовать, чтобы шары B_c удовлетворяют некоторому локальному условию.

Например пусть V — локально потенциальное поле в O . Мы можем требовать, чтобы во всех шарах существовал потенциал V . Тогда будем называть $\{B_k\}$ V -гусеницей.

Определение.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$ называются похожими (V -похожими), если у них есть общая V -гусеница:

$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \exists$ шары $B_k \subset O$:

$$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k, \tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$$

Следствие.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда любой путь V -похож на ломаную:

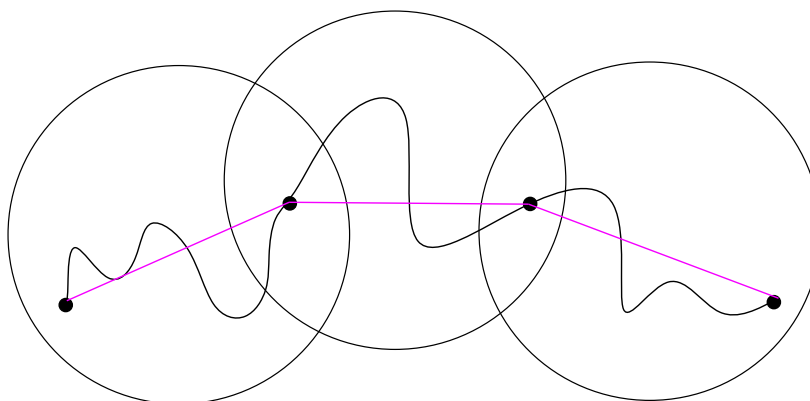


Рис. 3: Построение ломаной (розовая) по пути (чёрный) с помощью V -гусеницы (круги)

Лемма 2 (о равенстве интегралов локально-потенциальных векторных путей по похожим путям).

- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$ — V -похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда $\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Рассмотрим общую V -гусеницу. Пусть f_k — потенциал V в шаре B_k , $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (1)$$

1: По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k \Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1} \Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

Примечание. Вместо условия “ $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$ ” можно взять условие: $\gamma, \tilde{\gamma}$ — петли. Тогда утверждение леммы тоже верно.

Лемма 3.

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ — непр.
- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \delta > 0$: если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$ таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ V -похожи.

Доказательство. Берём V -гусеницу для γ .

$$\delta_k\text{-окрестность множества } A := \{x : \exists a \in A \quad \rho(a, x) < \delta\} = \bigcap_{a \in A} B(a, \delta)$$

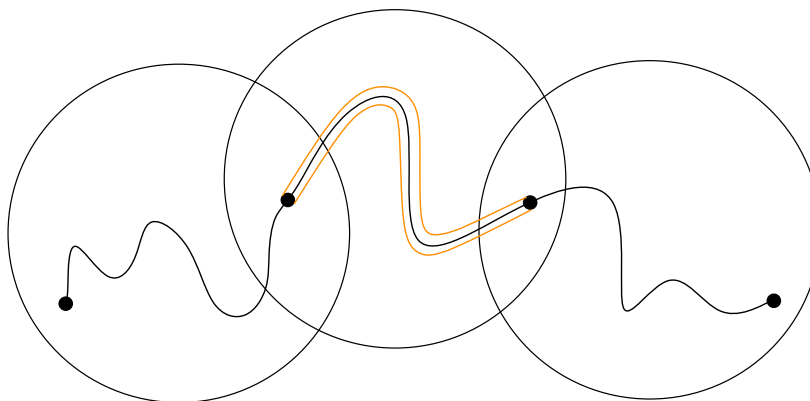
$$\forall k \quad \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1} t, \gamma_k t] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна \Rightarrow достигается $\max, \rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

$$\delta_k := \frac{r-r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$$

□

Рис. 4: δ_k -окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

Определение (Интеграл локального потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ). Возьмём $\delta > 0$ из леммы 3.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ -близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность (*нет произвольности*) следует из лемм 3 и 2