Основные вопросы

1. Уравнение с разделяющимися переменными: общее решение, общая схема исследования.

Уравнение с **разделенными** переменными имеет вид:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0$$

У него решение имеет вид:

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

Доказательство.

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = \int X(x)dx + \int Y(y)y'dx = \int (X(x) + Y(y)y')dx = \int 0dx = C$$

$\square$

При этом мы получаем общее решение, когда находим такие C, что ответ $\in C^1$.

Уравнение с **разделяющимися** переменными имеет вид:

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$$

Если поделить на $p_2(x)q_1(y)$, то получим уравнение с разделенными переменными. При этом необходимо убедиться, что мы не делим на ноль.

Если $\exists y_0 : q_1(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ — решение исходного уравнения. Исключив y_0, мы разбиваем область возможных решений на две подобласти.

Аналогично для x.

После разбиения нужно на каждой области найти решение.

2. Линейное уравнение 1-го порядка: общее решение ЛОУ, общее решение ЛНУ. Метод Лагранжа и метод интегрирующего множителя.

Линейное уравнение первого порядка это

$$y' = p(x)y + q(x)$$

Если $q \equiv 0$, то это уравнение **однородно**, иначе **неоднородно**.

Общее решение ЛОУ это $y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}$

Доказательство. Заметим, что $y \equiv 0$ — решение. По теореме о единственности оно не является особым. т.к. мы рассматриваем $p \in C(a, b)$.

$\triangleleft y > 0$.

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx$$

$$\ln y = \int p(x)dx + C$$

$$y = e^C e^{\int p(x)dx}$$

По теореме об общем решении уравнения с разделенными переменными это семейство всех решений исходного уравнения при $y > 0$.

Аналогично при $y < 0$ □

Общее решение ЛНУ это

$$y = \left(C + \int q e^{-\int p}\right) e^{\int p}$$

Доказательство. Подстановкой легко показать, что это решение. Покажем, что нет других решений.

Пусть есть решение φ на (α, β), не подходящее под искомую формулу.

Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\varphi(x_0) = y_0$.

Функция

$$C = \left(y_0 e^{-\int p} - \int q e^{-\int p} dx\right)\Bigg|_{x=x_0}$$

подходит под искомую формулу, но при этом является решением задачи Коши $y(x_0) = y_0$, поэтому $y \equiv \varphi$ — противоречие. □

Метод Лагранжа *(вариации произвольной постоянной)* — постоянную C считают функцией от x и получают дифур относительно C.

3. Равностепенно непрерывные функции. Лемма Арцела–Асколи.

Множество функций F, определенных на D, **равностепенно непрерывно**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in F \ \forall x_1, x_2 \in D \ |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Лемма 1. *Пусть функции последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены ($\exists C : \forall n, x |f_n(x)| < C$) и равностепенно непрерывны на $[a, b]$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть M ограничивает *(равномерно)* f_n:

$$M := \sup_{n,x} |f_n(x)|$$

$$\vartriangleleft \varepsilon_k = \frac{M}{2^{k+1}}$$

$$\forall \varepsilon_k > 0 \;\; \exists \delta_k > 0 \;\; \forall f \in F \;\; \forall x_1, x_2 \in D \;\; |x_2 - x_1| < \delta_k \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon_k$$

Поделим всю область $[a, b] \times (-M, M)$ на прямоугольники со стороной ε_1 и δ_1.

□

4. ЗК для нормальной системы. Лемма о равносильном интегральном уравнении. Лемма: свойства ломаной Эйлера, определённой на отрезке Пеано.

5. Теорема Пеано о существовании решения ЗК.

6. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет локальному условию Липшица по заданной переменной.

7. Достаточное условие того, что функция удовлетворяет глобальному условию Липшица по заданной переменной.

Дополнительные вопросы

Уравнение 1-го порядка и его решение.

Это уравнение вида $F(x, y, y') = 0$. Функция φ — решение такого дифференциального уравнения, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на (a, b)

Пример. $y' - x = 0$, решение $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Методов решения много, все относятся к частным случаям.

Интегральная кривая уравнения.

Это график решения уравнения.

Общее решение уравнения.

Это множество всех его решений.

Уравнение 1-го порядка, разрешённое относительно производной. Геометрический смысл.

Это уравнение вида $y' = f(x, y)$.

Пусть φ решение этого уравнения. Тогда $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, то есть тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0) это $f(x_0, y_0)$

Ломаная Эйлера.

Уравнение в дифференциалах, его решение и параметрическое решение.

Уравнение в дифференциалах получается, если в уравнении, разрешенном относительно производной, записать $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Функция φ — решение такого дифференциального уравнения, если:

1. $\varphi \in C^1(a, b)$
2. $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a, b)

Аналогично можно определить решение вида $x = \psi(y)$.

Функция $r = (\varphi(t), \psi(t))$ — **параметрическое** решение такого уравнения на α, β, если:

1. $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $r'(t) \neq 0$ на $t \in (\alpha, \beta)$
2. $P(\varphi(t), \psi(t)) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на $t \in (\alpha, \beta)$

Пример.

$$xdx + ydy = 0$$

Подстановкой тривиально можно убедиться, что $y = \sqrt{C^2 - x^2}$ — решение этого уравнения.

Параметрическое решение $(C \cos t, C \sin t)$

Особые точки уравнения в дифференциалах.

(x_0, y_0) — особая, если $P(x_0, y_0) + Q(x_0, y_0) = 0$

Пример.

$$xdx + ydy = 0$$

Особая точка $(0, 0)$, через нее ничто не проходит.

Геометрический смысл уравнения в дифференциалах и его решения.

Пусть $r = (x(t), y(t))$ есть параметрическое решение уравнения на (α, β). Тогда при $t \in (\alpha, \beta)$:

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

$$F(r(t))r'(t) = 0$$

Таким образом, любая интегральная кривая в каждой своей точке перпендикулярная вектору $F(x, y)$

Задача Коши (ЗК) для уравнения 1-го порядка, разрешённого относительно производной.

Задача Коши — задача поиска решения уравнения, удовлетворяющему $y(x_0) = y_0$.

Теорема 1. $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, $f \in C(G), (x_0, y_0) \in G$. Тогда в некоторой окрестности x_0 существует решение задачи Коши.

Теорема 2. Как в предыдущей теореме, но $f'_y \in C(G)$. Тогда решение задачи Коши единственно.

Таким образом, может быть такое, что в некоторых *(или всех)* точках решение не единственно.

Особое решение уравнения.

Это решение уравнения, в каждой точке которого нарушается локальная единственность решения задачи Коши.

Пример.

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

Тогда особое решение $y' \equiv 0$, его в любой точке $(x_0, 0)$ пересекает решение вида $y = (x - x_0)^3/3$

Однородное уравнение.

Функция однородна степени α, если $\forall t, x, y \;\; F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$

Однородное уравнение — уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, где P и Q однородные функции одной степени.

Замена $z = \frac{y}{x}$ сводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Геометрическое свойство решений однородного уравнения.

Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ — параметрическое решение однородного дифура. Растянем пространство в λ раз, получим $x = \lambda\varphi(t), y = \lambda\psi(t)$. При подстановке получим:

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0$$

По однородности:

$$P(\varphi, psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0$$

Таким образом, любое растяжение *(или сжатие)* решения однородного уравнения приводит к другому решению однородного уравнения.

Уравнение Бернулли.

Это уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Поделив на y^α и заменив $z = y^{1-\alpha}$, получаем линейное.

Уравнение Риккати.

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

Оно решается только в особых случаях *(например, $\alpha = 2$)*, но если нашел какое-то решение φ, то замена $y = z + \varphi$ сводит к Бернулли.

Уравнение в полных дифференциалах.

Это уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

, при этом

$$\exists u : du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Решение имеет вид $u(x, y) = C$

Обязательное условие на существование u это $P'_y = Q'_x$. Если при этом $P, Q \in C^1(G)$ и G односвязна, то это условие еще и достаточно.

Если область прямоугольная, то можно решить систему $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$ следующим образом: Решаем первое уравнение при фиксированном y, после чего заменяем $C = C(y)$ и находим C как функцию.

В таком случае u есть потенциал векторного поля (P, Q).

Интегрирующий множитель.

Это то, на что мы домножаем уравнение, чтобы получить уравнение в полных дифференциалах.

Если μ — инт. множитель, то

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

, то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

Это сложно решить, но иногда решается при $\mu'_x \equiv 0$ или $\mu'_y \equiv 0$.

Уравнение n-го порядка и его решение.

Это уравнение вида:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Его решение на a, b — φ, такое что:

1. $\varphi \in C^n(a, b)$
2. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на (a, b)

ЗК для уравнения, разрешённого относительно старшей производной.

Это уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Задача Коши для него имеет вид $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Методы понижения порядка уравнения.

- $y^{(n)} = f(x) \implies y^{(n-1)} = \int f(x)dx$
- $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) \xRightarrow{z=y^{(k)}} F(x, z, \ldots z^{(n-k)}) = 0$
- $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Тогда пусть $z = y'$, $y''_{xx} = z'_y z, y'''_{xxx} = z''_{yy} z^2 + {z'_y}^2 z$ и т.д.
- Пусть F линейна по y. Тога можно заменить $z = y'/y$
- $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \Rightarrow \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C$

Нормальная система уравнений, её решение.

Нормальная система порядка n это система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

Можно ввести пару обозначений для краткости:

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(t, r) = \begin{pmatrix} f_1(t, r) \\ \vdots \\ f_n(t, r) \end{pmatrix} \quad \dot{r} = f(t, r)$$

φ — решение такой системы, если:

1. $\varphi \in C^1((a, b) \to \mathbb{R}^n)$
2. $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на (a, b)

Интегральная кривая нормальной системы.

Это график решения, но теперь он в $(n + 1)$-мерном пространстве.