Гомотопия

Неформально гомотопия — непрерывная деформация объектов. У нас рассматриваемые объекты — пути.

Определение. **Гопотопия** двух (*непрерывных*) путей $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ это непрерывное отображение $\Gamma : \underbrace{[a, b]}_{t} \times \underbrace{[0, 1]}_{u} \to O$, такое что:

- $\Gamma(\circ, 0) = \gamma_0$
- $\Gamma(\circ, 1) = \gamma_1$

Гопотопия **связанная** (*не связная*), если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
- $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1]\ \Gamma(a, u) = \gamma_0(a), \Gamma(b, u) = \gamma_1(b)$

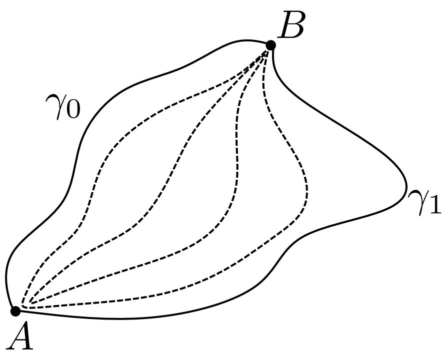

Рис. 1: Связанная гопотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

Гопотопия **петельная**, если:

- $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$
- $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$
- $\forall u \in [0, 1]\ \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$

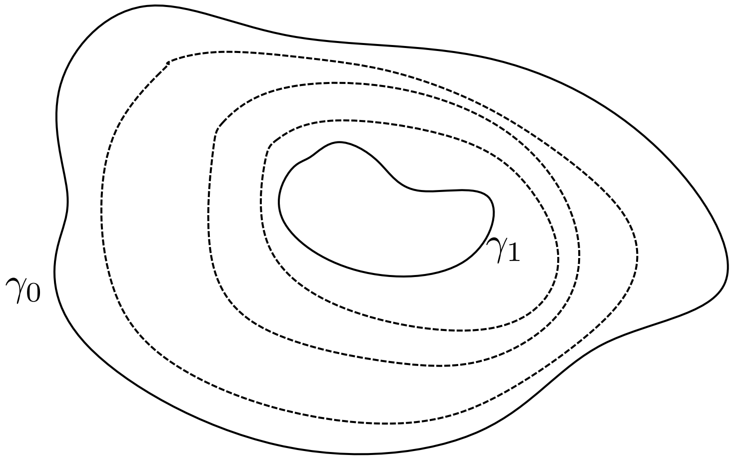

Рис. 2: Петельная гопотопия.
Пунктиром — $\Gamma(\circ, u)$ для различных u

Теорема 0.1.

- V — локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути

Тогда $\int_{\gamma_0} \sum V_i dx_i = \int_{\gamma_1} \sum V_i dx_i$

Примечание. То же самое верно для петельных гомотопий.

Доказательство. $\gamma_u(t) := \Gamma(t, u), t \in [a, b], u \in [0, 1]$

$$\Phi(u) = \int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i$$

Мы хотим доказать, что $\Phi(u) = \text{const}$. Докажем более простой факт, что Φ — локально постоянна, тогда в силу компактности отрезка Φ будет постоянна.

Определение локально постоянной функции:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \;\; \exists W(u_0) : \forall u \in W(u_0) \cap [0, 1] \quad \Phi(u) = \Phi(u_0)$$

Γ — непр. на $[a, b] \times [0, 1]$ — комп. $\Rightarrow \Gamma$ равномерно непрерывна:

$$\forall \delta > 0 \, \exists \sigma > 0 \, \forall t, t' : |t - t'| < \sigma \, \forall u, u' : |u - u'| < \sigma \quad |\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$$

Возьмём δ из леммы о похожести близких путей (??) для пути γ_{u_0}.

Если $|u - u_0| < \delta \;\; |\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$ при $t \in [a, b]$, т.е. γ_u и γ_{u_0} похожи по лемме о похожести близких путей. Хочется сказать, что интегралы по γ_u и γ_{u_0} таким образом равны, однако это не обосновано, для этого необходимо, чтобы пути были кусочно-гладкими.

Построим кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_{u_0}$, $\frac{\delta}{4}$-близкий к γ_{u_0}, т.е.

$$\forall t \in [a, b] \ \ |\gamma_{u_0}(t) - \tilde{\gamma}_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{4}$$

и кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}_u$, $\frac{\delta}{4}$-близкий к γ_u. Тогда $\tilde{\gamma}_{u_0}$ и $\tilde{\gamma}_u$ - δ-близкие к γ_{u_0} $\Rightarrow$ они V-похожи $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_u} \sum V_i dx_i \overset{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_u} \dots = \int_{\tilde{\gamma}_{u_0}} \dots \overset{\text{def}}{=} \int_{\gamma_{u_0}} \dots$$

Таким образом, $\Phi(u) = \Phi(u_0)$ при $|u - u_0| < \delta$, т.е. Φ — локально постоянна. $\square$

Определение. Область $O \subset \mathbb{R}^m$ — **односвязная**, если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному пути.

Простыми словами — в O нет дырок, иначе путь вокруг дырки нельзя было бы стянуть.

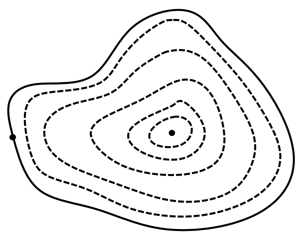

Рис. 3: Стягивание замкнутого пути (сплошной линией) к постоянному пути (точке)

Примечание.

1. Выпуклая область — односвязная.

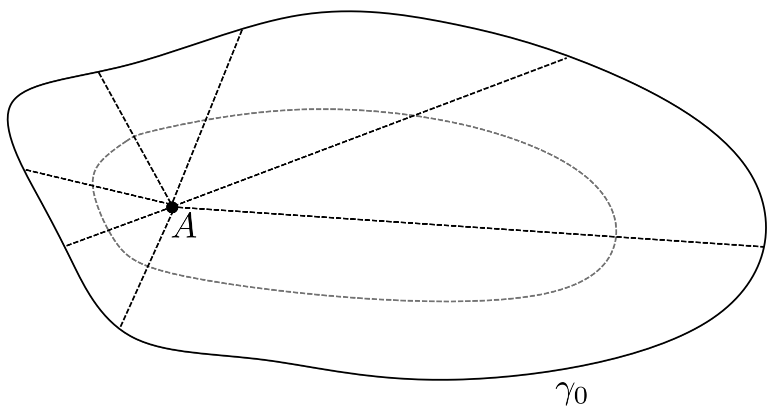

Рис. 4: Применение гомотетии с центром A

Это доказывается тем, что для любого пути можно применить гомотетию в качестве гомотопии: $\Gamma(t, u) = F_{1-u}(\gamma(t))$, где F_α — гомотетия с центром A (лежит внутри области, огр. путём γ) и коэффициентом α

2. Гомеоморфный образ односвязного множества — односвязен.

   $\Phi : O \to O'$ — гомеоморфизм, γ — петля в O', $\Phi^{-1}(\gamma)$ — петля в O.

   $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to O$ — гомотопия $\Phi^{-1}(\gamma)$ и постоянного пути $\tilde{\gamma} \equiv A$

   $\Phi \circ \Gamma$ — гомотопия γ с постоянным путём $\tilde{\tilde{\gamma}} \equiv \Phi(A)$

Теорема 0.2.

- $O \subset \mathbb{R}^m$ — односвязная область
- V — локально потенциальное векторное поле в O

Тогда V — потенциальное в O

Доказательство. V — локально потенциально, γ_0 — кусочно-гладкая петля, тогда γ_0 гомотопна постоянному пути $\gamma_1 \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} = \int_a^b \langle V(\gamma_1(t)), \underbrace{\gamma_1'(t)}_{\equiv 0} \rangle dt = 0$$

Тогда по теореме о характеризации потенциальных векторных полей в терминах интегралов V потенциально. □

Следствие. Теорема Пуанкаре верна в односвязной области.