1 Определения

1.1 Упорядоченная пара

Для некоторого множества X и I - множество "индексов", тогда $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ - **семейство элементов** X. ($\forall \alpha \in I \;\; x_\alpha \in X$)

Упорядоченная пара — семейство из двух элементов, построенная при $I = \{1, 2\}$. Обозначается (a, b).

Кроме того,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

1.2 Декартово произведение

Декартово произведение двух множеств — множество всех упорядоченных пар элементов этих множеств. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Кроме того, декартово произведение можно обобщить для произвольного числа множеств. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n\}$

1.3 Аксиомы вещественных чисел

1.3.1 Аксиомы поля

В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ($+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), удовлетворяющие следующим свойствам:

Аксоимы сложения *(здесь и далее $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)*:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{0} + a = a$
4. $\exists a' : a + a' = \mathbf{0}$

Аксиомы умножения:

1. $ab = ba$ — коммутативность
2. $(ab)c = a(bc)$ — ассоциативность
3. $\exists \mathbf{1} \neq \mathbf{0} : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\forall a \neq \mathbf{0} : \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = \mathbf{1}$

Аксоима комбинации сложения и умножения:

1. $(a + b)c = ac + bc$ — дистрибутивность

Поле — множество, в котором определены операции $+, \cdot$, удовлетворяющие группе аксиом I. Например, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3$

1.3.2 Аксиомы порядка

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$
2. $x \leq y; y \leq x \Rightarrow x = y$
3. $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ — транзитивность
4. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5. $0 \leq x; 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Упорядоченное поле — множество, для которого выполняются аксиомы групп I и II.

$\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$ - не упорядоченные поля

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathcal{R}$ - упорядоченные поля

Дальнейшие аксиомы в следующем вопросе.

1.4 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда

1.4.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

Следствие: существуют сколько угодно большие натуральные числа:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > y$$

Архимедовы поля — упорядоченные поля, в которых выполняется Аксиома Архимеда.

$\mathcal{R}$ - не архимедово поле

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ - архимедовы поля

1.4.2 Аксиома Кантора

Для последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ не удволетворяет этой аксиоме, в отличие от $\mathbb{R}$.

1.5 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — пополненное множество вещественных чисел.

Свойства ($\forall x \in \mathbb{R}$):

- $-\infty < +\infty$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$
- $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$
- $-\infty < x < +\infty$
- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \mp \infty$ — не определено

Для $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

- $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$

1.6 Максимальный элемент множества

$M \in A$ называется **максимальным элементом** множества A, если $\forall a \in A \;\; a \leq M$

1.7 Последовательность

$x : \mathbb{N} \to Y$ — **последовательность**

1.8 Образ и прообраз множества при отображении

Для $A \subset X, f : X \to Y$ **образ** — множество $\{f(x), x \in A\} \subset Y$ — обозначается $f(A)$

Для $B \subset Y$ **прообраз** — $\{x \in X : f(x) \in B\}$ — обозначается $f^{-1}(B)$

1.9 Инъекция, сюръекция, биекция

Сюръекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $f(X) = Y$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет решение относительно x.

Инъекция — такое отображение $f : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \;\; f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет не более одного решения относительно x.

Биекция — отображение, являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, т.е. $\forall y \in Y \;\; f(x) = y$ имеет ровно одно решение относительно x.

1.10 Векторнозначаная функция, ее координатные функции

Если $F : X \to \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$, то F — **векторнозначная функция** *(значения функции - вектора)*

$F_1(x)..F_m(x)$ - координатные функции отображения F

1.11 График отображения

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

1.12 Композиция отображений

$f : X \to Y, g : Y \to Z$, тогда **композиция** f и g *(обозначается $g \circ f$)* — такое отображение, что $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$.

Также возможно определение, которое допускает $g : Y_1 \to Z, Y_1 \supset Y$

1.13 Сужение и продолжение отображений

Для $g : X \to Y$ f — **сужение** g на множество A, если $f : A \subset X \to Y, \ \forall a \in A \ g(a) = f(a)$

g называется **продолжением** f.

1.14 ! Предел последовательности *(эпсилон-дельта определение)*

Если для $(x_n), a \in \mathbb{R}$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$, то a — **предел последовательности** (x_n), обозначается $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

1.15 Окрестность точки, проколотая окрестность

Окрестность точки $a = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, обозначается $U_\varepsilon(a)$

Проколотая окрестность точки $a = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)$

1.16 Предел последовательности (определение на языке окрестностей)

$$\forall U(a) \ \exists N \ \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

1.17 ! Метрика, метрическое пространство, подпространство

На множестве X отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если выполняются свойства 1-3:

1. $\forall x, y \ \rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. Неравенство треугольника: $\forall x, y, z \in X \;\; \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Метрическое пространство — упорядоченная пара (X, ρ), где X — множество, ρ — метрика на X.

Подпространством метрического пространства (X, ρ) называется $(A, \rho|_{A\times A})$, если $A \subset X$

1.18 ! Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве

Шар *(открытый шар)* $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Замкнутый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Окрестность точки a в метрическом пространстве: $B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow U(a)$.

1.19 Линейное пространство

Если K — поле *($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)*, X — множество, то X называется **линейным пространством** над полем K (и тогда K называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1. $+ : X \times X \to X$ — сложение векторов
2. $\cdot : K \times X \to X$ — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы *(здесь $A, B, C \in X; a, b \in K$)*:

1.19.1 Аксиомы сложения векторов

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} \in X : A + \mathbf{0} = A$
4. $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ — обратный элемент

1.19.2 Аксиомы умножения векторов на скаляры

1. $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2. $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3. $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4. $\exists \mathbf{1} \in K : \mathbf{1} \cdot A = A$

1.20 Норма, нормированное пространство

Норма - отображение $X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||x||$, если X - линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и выполняется следующее:

1. $\forall x \;\; ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \;\; ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. Неравенство треугольника: $\forall x, y \in X \;\; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Нормированное пространство — упорядоченная пара $(X, || \cdot ||)$, где $||||$ - норма

1.21 Ограниченное множество в метрическом пространстве

$A \subset X$ — **ограничено**, если $\exists x_0 \in X \;\; \exists R > 0 \;\; A \subset B(x_0, R)$, т.е. если A содержится в некотором шаре в X.

1.22 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность

a — **внутренняя точка** множества D, если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — **открытое множество**, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

Внутренностью множества D называется $Int(D) = \{x \in D : x$ — внутр. точка $D\}$

1.23 Предельная точка множества

a — **предельная точка** множества D, если $\forall \dot{U}(a) \;\; \dot{U}(a) \cap D \neq \varnothing$

1.24 Замкнутое множество, замыкание, граница

D — **замкнутое множество**, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества D называется $\overline{D} = D \cup$(множество предельных точек D)

Граница множества — множество его граничных точек. Обозначается $\partial D = \overline{D} \; IntD$

1.25 Изолированная точка, граничная точка

a — **изолированная** точка D, если $a \in D$ и a — не предельная.

a — **граничная** точка D, если $\forall U(a) \;\; U(a)$ содержит точки как из D, так и из D^c

1.26 Описание внутренности множества

1. $IntD$ — открыто
2. $IntD = \bigcup\limits_{\substack{D \supset G \\ G \text{ — открыт}}}$ — максимальное открытое множество, содержащееся в D

3. D — открыто в $X \Leftrightarrow D = IntD$

1.27 Описание замыкания множества в терминах пересечений

$\overline{D} = \bigcap\limits_{\substack{F \supset D \\ F - \text{замкн.}}} F$ – минимальное *(по включению)* замкнутое множество, содержащее D.

Если D замкнуто, $\overline{D} = D$.

1.28 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум

$E \subset \mathbb{R}$. E — огр. сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in E\ \ x \leq M$. Кроме того, всякие такие M называются **верхними границами** E.

Аналогично ограничение снизу.

Для E — огр. сверху **супремум** ($\sup E$)— наименьшая из верхних границ E.

Для E — огр. снизу **инфимум** ($\inf E$) — наибольшая из нижних границ E.

1.29 Техническое описание супремума

$$b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists x \in E\ \ b - \varepsilon < x \end{cases}$$

1.30 Последовательность, стремящаяся к бесконечности

$$x_n \to +\infty \quad \forall E > 0\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n > E$$

$$x_n \to -\infty \quad \forall E\ \ \exists N\ \ \forall n > N\ \ x_n < E$$

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty$$

1.31 Компактное множество

$K \subset X$ — **компактное**, если для любого открытого покрытия $\exists$ конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

1.32 Секвенциальная компактность

Секвенциально компактным называется множество $A \subset X : \forall$ посл. (x_n) точек A $\exists$ подпосл. x_{n_k}, которая сходится к точке из A

1.33 Определения предела отображения (3 шт)

Для метрических пространств (X, ρ^X) и (Y, ρ^Y), отображения $f : X \to Y$ и $a \in X$: $b \in Y$ — предел f при $x \to a$, т.е. $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если

1.33.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \ 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), b) < \varepsilon$$

1.33.2 На языке окрестностей

$$\forall U(b) \ \exists V(a) \ \forall x \in \dot{V}(a) \ \ f(x) \in U(b)$$

1.33.3 По Гейне

$\forall (x_n)$ — посл.:

1. $x_n \to a$
2. $x_n \in X$
3. $x_n \neq a$

$f(x_n) \to b$

1.34 Определения пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

Для $X = \mathbb{R}, Y = \overline{\mathbb{R}}, -\infty < x < +\infty$:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \quad \forall E \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) > E$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty : \quad \forall E \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \ \ f(x) < E$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta \ \ \forall x \in X : x > \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta \ \ \forall x \in X : x < \delta \ \ |f(x) - c| < \varepsilon$

Определение на языке окрестностей такое же, как и для произвольного метрического пространства.

1.35 Непрерывность

$f : D \subset X \to Y \quad x_0 \in D$

f — **непрерывное** в точке x_0, если:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо x_0 — изолированная точка D
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ \rho(x, x_0) < \delta \ \ \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. $\forall U(f(x_0)) \ \ \exists V(x_0) \ \ \forall x \in V(x_0) \cap D \ \ f(x) \in U(f(x_0))$
4. По Гейне $\forall (x_n) : x_n \to x_0; x_n \to D \ \ f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$

2 Теоремы

2.1 Законы де Моргана

Пусть $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

1. $Y \setminus (\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(Y \setminus X_\alpha)$ ①
2. $Y \setminus (\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(Y \setminus X_\alpha)$ ②

Вариант 2:

1. $Y \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(Y \cap X_\alpha)$
2. $Y \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(Y \cup X_\alpha)$

2.2 Неравенство Коши-Буняковского, евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

2.2.1 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_k^2\right)$$

2.2.2 Евклидова норма в $\mathbb{R}^m$

$$||x|| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2}$$

2.3 Аксиома Архимеда. Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

2.3.1 Аксиома Архимеда

$$\forall x, y > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

2.3.2 Плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \text{ плотно в } \mathbb{R} \overset{def}{\iff} \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \ \ (a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

В любом интервале в $\mathbb{R}$ содержится число $\in \mathbb{Q}$.

2.4 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad x \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad x > 0, n \in \mathbb{N} - \text{более сложная версия}$$

2.5 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

2.5.1 Единственность предела

(X, ρ) — метрическое пр-во, $a, b \in X$, (x_n) — послед. в X, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, тогда $a = b$

2.5.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Если (X, ρ) — метрическое пр-во, (x_n) — послед. в X, x_n сходится, тогда x_n — ограничена.

2.6 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций

2.6.1 Для последовательностей

Если $(x_n), (y_n)$ — вещественные последовательности $x_n \to a, y_n \to b$, $\exists N \ \ \forall n > N \ x_n \leq y_n$, **тогда** $a \leq b$.

2.6.2 Для функций

Если $f, g : X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка X, и $\forall x \in X \ \ f(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2.7 Теорема о двух городовых

Если $(x_n), (y_n), (z_n)$ - вещ. посл., $\forall n \ \ x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$, **тогда** $\exists \lim y_n = a$

2.8 Бесконечно малая последовательность

(x_n) — вещ. посл. называется **бесконечно малой**, если $x_n \to 0$

2.9 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в $\mathbb{R}$

Если $(X, ||\cdot||)$ — норм. пр-во, $(x_n), (y_n)$ — посл. в X, λ_n — посл. скаляров, и $x_n \to x_0, y_n \to y_0, \lambda_n \to \lambda_0$, **тогда**:

1. $x_n \pm y_n \to x_0 \pm y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $||x_n|| \to ||x_0||$

Для $(x_n), (y_n)$ — вещ.посл., $\forall n \ \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$:

4. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

2.10 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порожденная скалярным произведением

2.10.1 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

2.10.2 Норма, порожденная скалярным произведением

Для лин. пространства X, скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$\rho : X \to \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — норма

2.11 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$

2.11.1 О непрерывности скалярного произведения

X - лин. пространство со скалярным произведением, $||\cdot||$ — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда $\forall (x_n) : x_n \to x, \forall (y_n) : y_n \to y \quad \langle x_n, y_m\rangle \to \langle x, y\rangle$

2.11.2 О покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$

$(x^{(n)})$ — последовательность векторов в $\mathbb{R}^m$, где задано евклидово скалярное пространство и норма.

Тогда $(x^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} x^{(0)} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots m\} \;\; x_i^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} x_i^{(0)}$

2.12 Открытость открытого шара

$\forall x \in B(a, r) \;\; x$ — внутренняя точка $B(a, r)$

2.13 Теорема о свойствах открытых множеств

1. $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ - семейство открытых множеств в (X, ρ)

   Тогда $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ - открыто в X.

2. $G_1, G_2, \dots G_n$ - открыто в X.

   Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ - открыто в X.

Примечание. В 1. семейство может быть бесконечным, а в 2. — нет.

2.14 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкнутых множеств

D — замкнуто $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$ *(дополнение)* — открыто.

Свойства:

1. $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcap F_\alpha$ — замкн. в X

2. $F_1 \dots F_n$ — замкн. в X

   Тогда $\bigcup F_i$ — замкн. в X

2.15 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределенности

$(x_n), (y_n)$ — вещ., $x_n \to a, y_n \to b \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n y_n \to ab$, *если* $\forall n \;\; y_n \neq 0; b \neq 0$
3. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

При условии, что выражения в правых частях имеют смысл.

Если $x_n \to +\infty, y_n$ — огр.снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$.

Если $x_n \to +\infty, y_n > \varepsilon, (\varepsilon > 0)$ при $n > N_0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$

Неопределенности:

- $\frac{0}{0}$
- 1^∞
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $\pm\infty \mp \infty$
- 0^0
- ∞^0

2.16 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках

Дана последовательность отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

Длины отрезков $\to 0$, т.е. $(b_n - a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Тогда $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{c\}$ и при этом $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c, b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$

2.17 Теорема о существовании супремума

$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing, E$ — огр. сверху.

Тогда $\exists \sup E \in \mathbb{R}$

2.18 Лемма о свойствах супремума

1. $\varnothing \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$
2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$

   Пусть $\lambda > 0$, тогда $\sup \lambda E = \lambda \sup E$
3. $\sup(-E) = -\inf E$

2.19 Теорема о пределе монотонной последовательности

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

2.20 Определение числа e, соответствующий замечательный предел

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.21 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве

$Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$
2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

2.22 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X, то есть если K компактно в подпространстве, то оно компактно и в пространстве.

2.23 Простейшие свойства компактных множеств

(X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1. K — комп. $\Rightarrow K$ — замкн., K — огр.
2. X — комп, K — замкн. $\Rightarrow K$ — комп.

2.24 Лемма о вложенных параллелепипедах

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i = 1 \dots m \;\; a_i \le x_i \le b_i\}$ — параллелепипед.

$[a^1, b^1] \supset [a^2, b^2] \supset \dots$ — бесконечная последовательность параллелепипедов.

Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [a^i, b^i] \neq \varnothing$

Если $diam[a^n, b^n] = ||b^n - a^n|| \to 0$, тогда $\exists! c \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} [a^i, b^i]$

2.25 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$

$[a, b]$ — компактное множество в $\mathbb{R}^m$

2.26 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

$K \subset \mathbb{R}^m$. Эквивалентны следующие утверждения:

1. K — замкнуто и ограничено
2. K — компактно
3. K — секвенциально компактно

2.27 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Определение Коши $\Leftrightarrow$ определение Гейне.

2.28 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака

2.28.1 Единственность предела

$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A; \lim\limits_{x \to a} f(x) = B$

Тогда $A = B$

2.28.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Тогда $\exists V(a) : f$ — огр. на $V(a) \cap D$, т.е. $f(V(a) \cap D)$ содержится в некотором шаре.

2.28.3 Теорема о стабилизации знака

$f : D \subset X \to Y$, a — пред. точка D, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Пусть $B \in Y, B \neq A$

Тогда $\exists V(a) \;\; \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \;\; f(x) \neq B$

2.29 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g : D \subset X \to Y$, X — метрич. пространство, Y — норм. пространство над $\mathbb{R}$, a — пред. точка D

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$

$\lambda : D \to \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \lambda_0$

Тогда:

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x))$ и $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) f(x) = \lambda_0 A$
3. $\lim\limits_{x \to a} ||f(x)|| = ||A||$
4. Для случая $Y = \mathbb{R}$ и для $B \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

   $\frac{f}{g}$ задано на множестве $D' = D \setminus \{x : g(x) = 0\}$

   a — пр. точка D' по теореме о стабилизации знака $\exists V(a) \;\; \forall x \in V(a) \cap D \;\; g(x)$ — того же знака, что и B, т.е. $g(x) \neq 0$

   $\dot{V}(a) \cap D' = \dot{V}(a) \cap D \Rightarrow a$ — пред. точка для D'

Если $Y = \overline{\mathbb{R}}$, можно “разрешить” случай $A, B = \pm\infty$