Упражнение 1. Доказать, что евклидово кольцо R есть область целостности.

Решение. Это неверно, т.к. вырожденное кольцо $\{0\}, 0 = 1$ является евклидовым, но не является целостным.

Если в такое не верится, то кольцо $\{0, 1, x, 1 + x\}, x^2 = 0$ не является целостным, т.к. $x \cdot x = 0$, но $x \neq 0$, при этом это кольцо является евклидовым:

$$F(t) \coloneqq \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t = 1 \\ 1, & t = 1 + x \\ 2, & t = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a &= q \cdot b + r \\
0 &= 0 \cdot *^{1} + 0 \\
1 &= 1 \cdot 1 + 0 \\
1 &= \underbrace{x \cdot \overbrace{x}^{F=2}}_{0} + \overbrace{1}^{F=1} \\
1 &= \underbrace{(1 + x) \cdot \overbrace{(1 + x)}^{F=1}}_{1} + 0 \\
x &= x \cdot 1 + 0 \\
x &= 1 \cdot x + 0 \\
x &= \underbrace{x \cdot (1 + x)}_{x} + 0 \\
1 + x &= (1 + x) \cdot 1 + 0 \\
1 + x &= (1 + x) \cdot \overbrace{x}^{F=2} + \overbrace{1}^{F=1} \\
1 + x &= \underbrace{1 \cdot (1 + x)}_{1+x} + 0
\end{aligned}$$

□

Упражнение 2. Найти $\gcd(9 + 12i, 5)$ в $\mathbb{Z}[i]$.

[1] Подразумевается любой элемент кольца.

Решение.

$$
\begin{aligned}
9 + 12i &= 5 \cdot (2 + 2i) + (-1 + 2i) \\
2 + 2i &= (-1 + 2i) \cdot (-i) + i \\
-1 + 2i &= i \cdot 2 - 1 \\
i &= (-1) \cdot (-i)
\end{aligned}
$$

Ответ: -1. □

Упражнение 3. Рассмотрим кольцо R:

$$R = \{n + md \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad d^2 = 3$$

Какими свойствами обладает данное кольцо? Является ли оно областью целостности? Евклидовым?

Решение.

- В этом кольце есть единица, это $1 + 0 \cdot d$.
- Коммутативность тривиальна.
- $$\lhd (a + bd) \neq 0, (x + yd) \neq 0 : (a + bd)(x + yd) = 0$$

$$
\begin{aligned}
(a + bd)(x + yd) &= 0 \\
ax + ayd + bdx + 3by &= 0 \\
ax + 3by + ayd + bdx &= 0 \\
(ax + 3by) + d(ay + bx) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} ax + 3by = 0 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} axy + 3by^2 = 0 \\ ayx + bx^2 = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
3by^2 &= bx^2 \\
3y^2 &= b^2 \\
\sqrt{3}y &= b
\end{aligned}
$$

Решений нет, следовательно, это кольцо целостности.

□

Упражнение 4. Рассмотрим кольцо R:

$$R = \{n + md \mid n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad d^2 = 0$$

Какими свойствами обладает данное кольцо? Является ли оно областью целостности? Евклидовым?

Решение.

- В этом кольце есть единица, это $1 + 0 \cdot d$.
- Коммутативность тривиальна.
- $d \cdot d = 0, d$ — делитель нуля.
- $\lhd n_1 + m_1 d, n_2 + m_2 d$

$$\begin{aligned}
&n_1 + m_1 d = q \cdot (n_2 + m_2 d) + r \\
&n_1 + m_1 d = (n_3 + m_3 d) \cdot (n_2 + m_2 d) + (n_4 + m_4 d) \\
&n_1 + m_1 d = n_2 n_3 + n_2 m_3 d + n_3 m_2 d + n_4 + m_4 d
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} n_1 = n_2 n_3 + n_4 \\ m_1 = n_2 m_3 + n_3 m_2 + m_4 \end{cases}$$

Первое уравнение решается в $\mathbb{Z}$, при этом $|n_4| < |n_2|$ или $n_4 = 0$. Т.к. n_3 и m_2 теперь фиксированы, то уравнение $m_1 - n_3 m_2 = n_2 m_3 + m_4$ также решается и $|m_4| < |m_2|$ или $m_4 = 0$. Тогда $N(n + md) = |n| + |m|$ подходит и кольцо евклидово.

□