

**Упражнение 1.** Пусть  $H, K \triangleleft G$  — две нормальные подгруппы в  $G$ . Докажите, что тогда коммутатор любых двух элементов из  $H$  и  $K$  принадлежит пересечению  $H \cap K$ .

*Решение.*

**Лемма 1.**  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

*Доказательство.*  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$  □

$\triangleleft h \in H, k \in K$

$$[h, k] = hk(kh)^{-1} = \underbrace{h}_{\in H} \underbrace{k}_{\in K} \underbrace{h^{-1}}_{\in K} \underbrace{k^{-1}}_{\in H}$$

$[k, h]$  аналогично. □

**Упражнение 2.** Показать, что коммутант  $[H, K]$  двух нормальных подгрупп  $H, K \triangleleft G$  есть подгруппа в пересечении  $[H, K] \subset H \cap K$ . Всегда ли  $[H, K] = H \cap K$ ?

*Решение.* Т.к. коммутатор любых двух элементов  $H$  и  $K$  принадлежит и  $H$ , и  $K$ , то по замкнутости  $H$  и  $K$  произведение коммутаторов также принадлежит и  $H$  и  $K$ . Кроме того,  $1 = [1, 1] \in [H, K]$ , следовательно,  $[H, K] \subset H \cap K$ , т.к. это  $[H, K]$  это в точности все коммутаторы вида  $[hk], h \in H, k \in K$ .

$[H, K]$  не всегда  $= H \cap K$ , например если  $G$  абелева, то  $[H, K] = \{e\}$ , но очевидно не для каждой  $H$  и  $K$  выполнено  $H \cap K = \{e\}$ , например для  $H = K = G$ . □

**Упражнение 3.** Пусть  $H, K$  — две произвольные подгруппы. Рассмотреть отображение  $\psi : H \times K \rightarrow HK$ :

$$\psi(h, k) = hk$$

Найти  $\psi^{-1}(x) = \{(h, k) \mid \psi(h, k) = x\}$  в явном виде. Получить из этого, что:

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

*Решение.* Пусть  $h_1 k_1 = x$  и  $h_2 k_2 = x$ .

$$x^{-1} = k_2^{-1} h_2^{-1}$$

$$e = x x^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$$

$$h_2 h_1^{-1} = k_1 k_2^{-1}$$

Т.к.  $h_2 h_1^{-1} \in H, k_1 k_2^{-1} \in K, k_1 k_2^{-1} = h_2 h_1^{-1} =: a \in K \cap H$ . Тогда:

$$h_2 = i h_1 \Rightarrow h_1 = i^{-1} h_2 \quad k_1 = i k_2$$

И, следовательно, любое  $(h_1, k_1) : h_1 k_1 = x$  записывается в виде  $(i^{-1} h_2, i k_2)$ , где  $h_2, k_2$  — произвольное решение уравнения  $h k = x$ . Таким образом:

$$\psi^{-1}(x) = \{(i^{-1} h_2, i k_2) \mid i \in K \cap H\} \Rightarrow |\psi^{-1}(x)| = |K \cap H|$$

$$|H| \cdot |K| = \sum_{x \in HK} |\psi^{-1}(x)| = |HK| \cdot |H \cap K|$$

□

**Упражнение 4.** Показать, что среди 5 подгрупп порядков 483, 1309, 3059, 2783, 3451 есть хотя бы две абелевы.

**Решение.** Разложим размеры групп на простые делители.

| $n$  | $p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ |
|------|-----------------------------|
| 483  | $3 \cdot 7 \cdot 23$        |
| 1309 | $7 \cdot 11 \cdot 17$       |
| 3059 | $7 \cdot 19 \cdot 23$       |
| 2783 | $11^2 \cdot 23$             |
| 3451 | $7 \cdot 11 \cdot 29$       |

Группу размера 2783 больше рассматривать не будем. Размеры всех остальных групп разбиваются на простые числа в первой степени, следовательно, по первой теореме Силова у каждой группы есть силовские  $p$ -подгруппы порядка каждого такого простого числа. Кроме того, они циклические.

**Утверждение.**  $G \cong H \times K \Leftrightarrow \begin{cases} G = HK \\ H \cap K = \{e\} \\ H, K \triangleleft G \end{cases}$ , аналогично для большего числа подгрупп.

Найдём все такие группы, что их силовские подгруппы  $H, K, L$  нормальны, тогда

$$|HKL| = \frac{|H| \cdot |K| \cdot |L|}{|H \cap K \cap L|} = |G|$$

и, следовательно, каждому элементу  $g$  можно взаимно-однозначно сопоставить элемент из  $HKL$ , т.е.  $G \cong HKL$  и по утверждению  $G \cong H \times K \times L$ , а прямое произведение является абелевой группой.

Из соображений предыдущего домашнего задания для нормальности силовой  $p_i$ -подгруппы  $\mathcal{P}_{p_i}$  достаточно, чтобы  $p_i \not\equiv 1 \pmod{p_j} \quad \forall j$ .

| 483 | 3 | 7   | 23 | 1309 | 7 | 11 | 17 | 3059 | 7 | 19 | 23 |
|-----|---|-----|----|------|---|----|----|------|---|----|----|
| 3   | 0 | 3   | 3  | 7    | 0 | 7  | 7  | 7    | 0 | 7  | 7  |
| 7   | 1 | ... |    | 11   | 4 | 0  | 11 | 19   | 5 | 0  | 19 |
| ... |   |     |    | 17   | 3 | 6  | 0  | 23   | 2 | 4  | 0  |

Дальше нет смысла перебирать, т.к. для групп размера 1309 и 3059 искомое доказано.

□