Интеграл второго рода векторного поля по пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ обозначается следующим образом:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

и вычисляется путём подстановки:

$$\int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

Длина пути есть:

$$\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

Тогда интеграл первого рода записывается следующим образом:

$$\int fdS := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$$

Можно заметить, что интеграл второго рода меняет знак от направления обхода пути.

Упражнение 1 (4221). Дан треугольник OAB с точками $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. Вычислить интеграл $\int_\Delta (x + y)dS$.

$$\int_\Delta (x + y)dS = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{OB}$$

Здесь не важно направление.

Параметризация OA: $x(t) = t, y(t) = 0$. Тогда $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$

$$\int_{OA} = \int_0^1 t \cdot 1dt = \frac{1}{2}$$

Параметризация AB: $x(t) = t, y(t) = 1 - t$. Тогда $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{2}$

$$\int_{AB} = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2}dt = \sqrt{2}$$

$$\int_{OB} = \int_{OA} = \frac{1}{2}$$

Упражнение 2 (4250). Здесь C есть часть параболы от -1 до 1

$$x(t) = t \quad y(t) = t^2$$
$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3 + (t^4 - 2t^3)2t)dt$$

Это решение обречено на успех, но попробуем решить другим способом. Является ли наше поле потенциальным? Для этого нужно следующее: $\begin{cases} P'_y = Q'_x \\ P'_z = R'_x \\ Q'_z = R'_y \end{cases}$. К сожалению, это не выполнено, поэтому такое решение не работает.

Если интеграл задан от точки до точки, то у него обязан быть потенциал, иначе он зависит от пути.

Нам важно, как устроена система координат. Наша выглядит так:

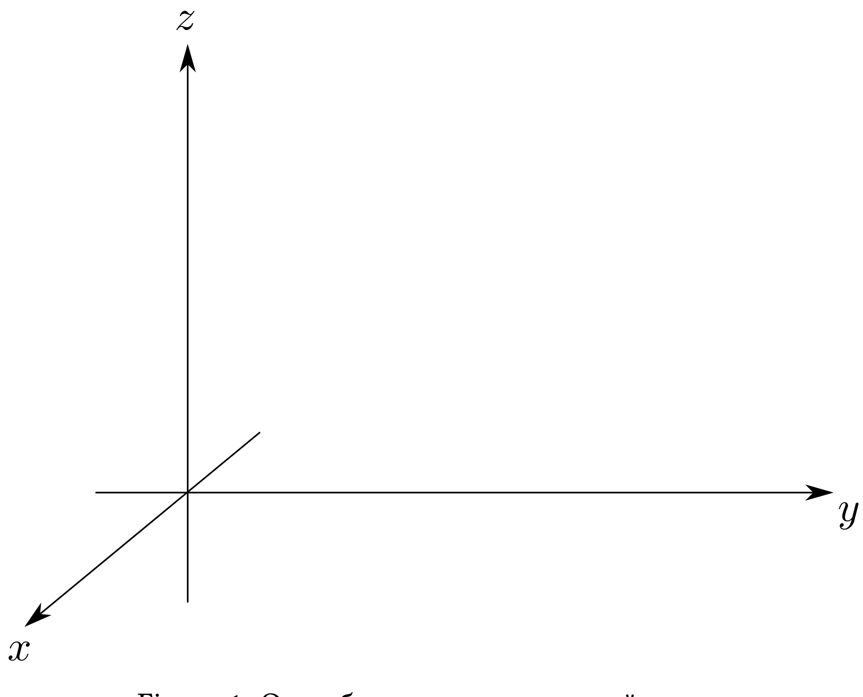

Figure 1: Оси образуют правую тройку xyz