

Упражнение 1. Доказать, что остаток квадрата нечётного числа на 8 равен 1.

Решение.

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$$

Либо  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , либо  $n + 1 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 4n(n + 1) \equiv 0 \pmod{2}$ . Тогда  $4n(n + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{2}$ .  $\square$

Упражнение 2. Доказать, что  $n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$  делится на 5.

Решение.

Случай 1:  $n \equiv 0 \pmod{5}$

Очевидно.

Случай 2:  $n \equiv 1 \pmod{5}$

$$n^2 + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

Случай 3:  $n \equiv 2 \pmod{5}$

$$n^2 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

Случай 4:  $n \equiv 3 \pmod{5}$

$$n^2 + 1 \equiv 9 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

Случай 5:  $n \equiv 4 \pmod{5}$

$$n^2 + 4 \equiv 16 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$\square$

Упражнение 3. Найти все натуральные  $n$  для которых  $n^2 + 1 \vdots n + 1$

Решение. Очевидно для  $n = 0$  и  $n = 1$  искомое верно.  $\forall n > 1$ .

$$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \vdots n + 1 \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n + 1} \Rightarrow n^2 + 1 \equiv 2 \pmod{n + 1}$$

Для  $n > 1$  выполнено  $2 \not\equiv 0 \pmod{n + 1}$ , таким образом ответ  $n = 0$  и  $n = 1$ .  $\square$

Упражнение 4. Доказать, что  $n^9 + 17n^3 - 18$  делится на 3.

Решение. Случай 1:  $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv -18 \equiv 0 \pmod{3}$$

**Случай 2:**  $n \equiv 1 \pmod{3}$

$$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv 1 + 17 - 18 \equiv 0 \pmod{3}$$

**Случай 3:**  $n \equiv 2 \pmod{3}$

$$n^9 + 17n^3 - 18 \equiv 512 + 136 - 18 \equiv 630 \equiv 0 \pmod{3}$$

□

*Упражнение 5.* Доказать, что  $5ab$  делится на 45, если  $a^6 + b^6$  делится на 3.

*Решение.*  $5ab : 45 \Leftrightarrow ab : 9$

| $a$ | $a^6 \pmod{3}$ |
|-----|----------------|
| 0   | 0              |
| 1   | 1              |
| 2   | 1              |

**Случай 1:**  $a \equiv 0 \pmod{3}$

Тогда  $b^6 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a = 3k, b = 3l \Rightarrow ab = 9l : 9$

**Случай 2:**  $a \equiv 1 \pmod{3}$

Тогда  $b^6 \equiv 2 \pmod{3}$ , но  $\nexists b$ . Таким образом,  $a \not\equiv \pmod{3}$ .

**Случай 3:**  $a \equiv 2 \pmod{3}$

Тогда  $b^6 \equiv -a^6 \equiv 2 \pmod{3}$ , см. случай 2.

□