*Примечание.* Эти решения проверены только частично через $\mathrm{lean}$, верность не гарантируется.

*Упражнение* 1 (2.d). $\vdash A \mathbin{\&} B \to B \mathbin{\&} A$

Докажем, что $A \mathbin{\&} B \vdash B \mathbin{\&} A$, это эквивалентно искомому.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \mathbin{\&} B$ | ($\in \Gamma$) |
| 2. | $A \mathbin{\&} B \to A$ | (а. 4) |
| 3. | $A$ | (M.P. 1, 2) |
| 4. | $A \mathbin{\&} B \to B$ | (а. 5) |
| 5. | $B$ | (M.P. 1, 4) |
| 6. | $A \to B \to A \mathbin{\&} B$ | (а. 3) |
| 7. | $B \to A \mathbin{\&} B$ | (M.P. 3,6) |
| 8. | $A \mathbin{\&} B$ | (M.P. 5,7) |

*Упражнение* 2 (2.e). $\vdash A \to \neg\neg A$

Докажем, что $A \vdash \neg\neg A$, это эквивалентно искомому.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A$ | ($\in \Gamma$) |
| 2. | $A \to (\neg A \to A)$ | (а. 1) |
| 3. | $\neg A \to A$ | (M.P. 1, 2) |
| 4. | $\neg A \to \neg A$ | (доказано ранее) |
| 5. | $(\neg A \to \neg A) \to (\neg A \to A) \to \neg\neg A$ | (а. 9) |
| 6. | $(\neg A \to A) \to \neg\neg A$ | (M.P. 4,5) |
| 7. | $\neg\neg A$ | (M.P. 3,6) |

*Упражнение* 3 (2.f). $A \mathbin{\&} \neg A \vdash B$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \mathbin{\&} \neg A$ | ($\in \Gamma$) |
| 2. | $A \mathbin{\&} \neg A \to A$ | (а. 4) |
| 3. | $A \mathbin{\&} \neg A \to \neg A$ | (а. 5) |
| 4. | $A$ | (M.P. 1, 2) |
| 5. | $\neg A$ | (M.P. 1, 3) |
| 6. | $A \to (\neg B \to A)$ | (а. 1) |
| 7. | $\neg B \to A$ | (M.P. 4, 6) |
| 8. | $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ | (а. 1) |

| | | |
|---|---|---|
| 9. | $\neg B \to \neg A$ | (M.P. 5, 8) |
| 10. | $(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ | (a. 9) |
| 11. | $(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ | (M.P. 7,10) |
| 12. | $\neg\neg B$ | (M.P. 9,11) |
| 13. | $\neg\neg B \to B$ | (a. 10) |
| 14. | $B$ | (M.P. 12,13) |

*Упражнение* 4 (3.a). $\neg A, B \vdash \neg(A \,\&\, B)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \,\&\, B \to A$ | (a. 4) |
| 2. | $\neg A \to (A \,\&\, B) \to \neg A$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 4. | $A \,\&\, B \to \neg A$ | (M.P. 2,3) |
| 5. | $(A \,\&\, B \to A) \to (A \,\&\, B \to \neg A) \to \neg(A \,\&\, B)$ | (a. 9) |
| 6. | $(A \,\&\, B \to \neg A) \to \neg(A \,\&\, B)$ | (M.P. 1, 5) |
| 7. | $\neg(A \,\&\, B)$ | (M.P. 4,6) |

*Упражнение* 5 (3.b). $A, \neg B \vdash \neg(A \,\&\, B)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \,\&\, B \to B$ | (a. 4) |
| 2. | $\neg B \to (A \,\&\, B) \to \neg B$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 4. | $A \,\&\, B \to \neg B$ | (M.P. 2,3) |
| 5. | $(A \,\&\, B \to B) \to (A \,\&\, B \to \neg B) \to \neg(A \,\&\, B)$ | (a. 9) |
| 6. | $(A \,\&\, B \to \neg B) \to \neg(A \,\&\, B)$ | (M.P. 1, 5) |
| 7. | $\neg(A \,\&\, B)$ | (M.P. 4,6) |

*Упражнение* 6 (3.c). $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \,\&\, B)$

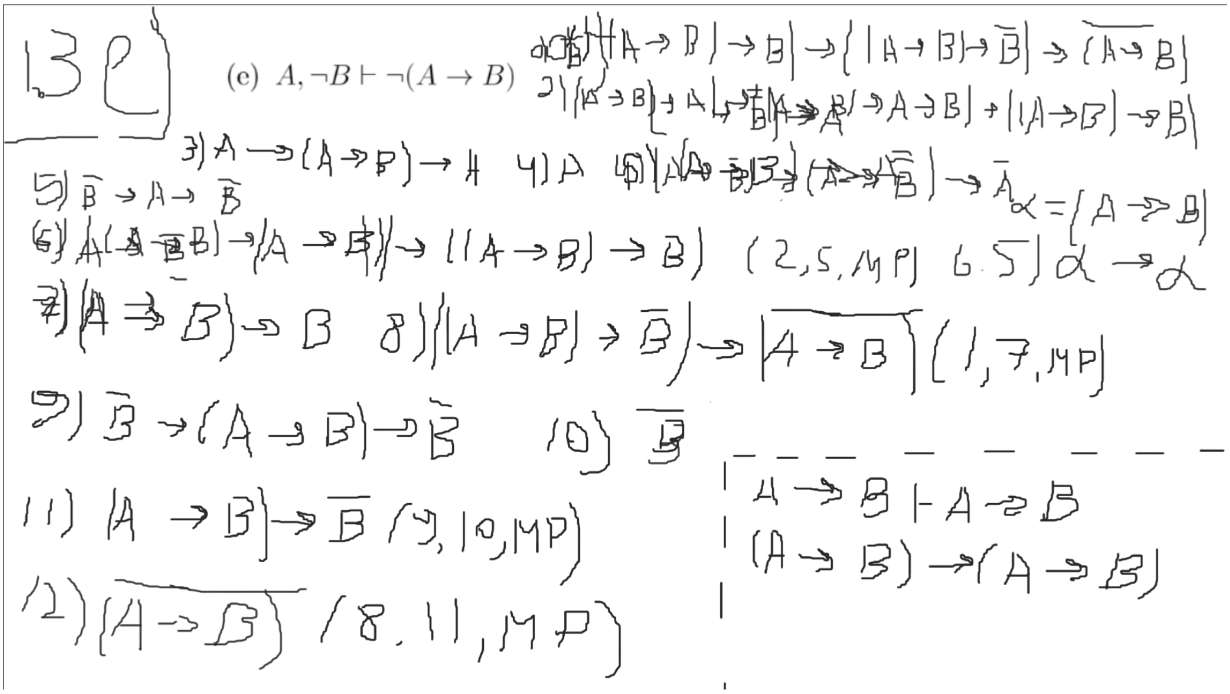
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \,\&\, B \to B$ | (a. 4) |
| 2. | $\neg B \to (A \,\&\, B) \to \neg B$ | (a. 1) |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | $\neg B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 4. | $A \& B \to \neg B$ | (M.P. 2,3) |
| 5. | $(A \& B \to B) \to (A \& B \to \neg B) \to \neg(A \& B)$ | (a. 9) |
| 6. | $(A \& B \to \neg B) \to \neg(A \& B)$ | (M.P. 1, 5) |
| 7. | $\neg(A \& B)$ | (M.P. 4,6) |

*Упражнение* 7 (3.d). $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(A \vee B \to A) \to (A \vee B \to \neg A) \to \neg(A \vee B)$ | (a. 9) |
| 2. | $(A \to A) \to (B \to A) \to (A \vee B \to A)$ | (a. 8) |
| 3. | $A \to A$ | (доказано раннее) |
| 4. | $(B \to A) \to (A \vee B \to A)$ | (M.P. 2,3) |
| 5. | $\neg A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 6. | $\neg B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 7. | $\neg A \to \neg B \to B \to A$ | (3.g) |
| 8. | $\neg B \to B \to A$ | (M.P. 5, 7) |
| 9. | $B \to A$ | (M.P. 6, 8) |
| 10. | $A \vee B \to A$ | (M.P. 4, 9) |
| 11. | $(A \vee B \to \neg A) \to \neg(A \vee B)$ | (M.P. 1, 10) |
| 12. | $\neg A \to (A \vee B \to \neg A)$ | (a. 1) |
| 13. | $A \vee B \to \neg A$ | (M.P. 5,12) |
| 14. | $\neg(A \vee B)$ | (M.P. 11,13) |

*Упражнение* 8 (3.e). $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$




*Упражнение* 9 (3.f). $\neg A, B \vdash A \to B$

Докажем $\neg A, B, A \vdash B$, т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $B$ | $(\in \Gamma)$ |

*Упражнение* 10 (3.g). $\neg A, \neg B \vdash A \to B$

Докажем $\neg A, \neg B, A \vdash B$, т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $\neg A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 3. | $A \to (\neg B \to A)$ | (a. 1) |
| 4. | $\neg B \to A$ | (M.P. 1, 3) |
| 5. | $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ | (a. 1) |
| 6. | $\neg B \to \neg A$ | (M.P. 2, 5) |
| 7. | $(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ | (a. 9) |
| 8. | $(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ | (M.P. 4, 7) |
| 9. | $\neg\neg B$ | (M.P. 6, 8) |
| 10. | $\neg\neg B \to B$ | (a. 10) |

$$11.\quad B \qquad\qquad \text{(M.P. 9, 10)}$$

*Упражнение* 11 (3.h). $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$

$$\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$$
$$(A \to B) \vdash (B \to C) \to (A \to C)$$
$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$$
$$(A \to B), (B \to C), A \vdash C$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \to B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 3. | $B$ | (M.P. 1,2) |
| 4. | $B \to C$ | $(\in \Gamma)$ |
| 5. | $C$ | (M.P. 3,4) |

*Упражнение* 12 (3.i). $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$

Это утверждение не тавтология, что проверяется подстановкой $0, 0, 1$. В силу корректности исчисления высказываний из пустого множества можно вывести только тавтологии, таким образом это утверждение не выводится.

*Упражнение* 13 (3.j). $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$
$$(A \to B) \vdash \neg B \to \neg A$$
$$(A \to B), \neg B \vdash \neg A$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \to B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $\neg B$ | $(\in \Gamma)$ |
| 3. | $\neg B \to A \to \neg B$ | (a. 1) |
| 4. | $A \to \neg B$ | (M.P. 2,3) |
| 5. | $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ | (a. 9) |
| 6. | $(A \to \neg B) \to \neg A$ | (M.P. 1,5) |
| 7. | $\neg A$ | (M.P. 4,6) |

*Упражнение* 14 (4.a). $\vdash A \vee \neg A$

1. $A \to A \vee \neg A$ (акс. 6)
2. $\neg A \to A \vee \neg A$ (акс. 7)
3. $\neg\neg(A \vee \neg A) \to \neg A$ (закон контрапозиции)
4. $\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A$ (закон контрапозиции)
5. $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$ (акс. 9)
6. $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$ (M.P. 4,6)
7. $\neg\neg(A \vee \neg A)$ (M.P. 5,7)
8. $\neg\neg(A \vee \neg A) \to A \vee \neg A$ (акс. 10)
9. $A \vee \neg A$ (M.P. 8,9)

*Упражнение* 15 (4.b). $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$

1. $A\&B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$ (т. о дедукции)
2. $(\neg A \vee \neg B \to A) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg A) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ (акс.9)
3. $A\&B \to A$ (акс. 4)
4. $A\&B \to B$ (акс. 5)
5. $A$ (M.P. 3, 1)
6. $B$ (M.P. 4, 1)
7. $A \to (\neg A \vee \neg B) \to A$ (акс.1)
8. $(\neg A \vee \neg B) \to A$ (M.P. 7, 5)
9. $(\neg A \vee \neg B \to \neg A) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ (M.P. 2, 8)
10. $(\neg A \to \neg A) \to (\neg B \to \neg A) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg A)$ (акс. 8)
11. $(\neg B \to \neg A) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg A)$ (M.P. 8 и известный факт)
12. $B, A \vdash \neg B \to \neg A$ равносильно $B, A, \neg B \vdash \neg A$ (т. о дедукции)
13. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ (акс.9)
14. $\neg A$ (дважды аксиома 1 из $B$ и $\neg B$)
15. $\neg B \to \neg A$ (доказали по дедукции)
16. $(\neg A \vee \neg B \to \neg A)$ (M.P. 11, 15)
17. $\neg(\neg A \vee \neg B)$ (M.P. 9, 16)

*Упражнение* 16 (4.c). $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash A \to (A \lor B)$ | (акс. 6) |
| 2. | $\vdash \neg(A \lor B) \to \neg A$ | (контрапозиция) |
| 3. | $\vdash B \to (A \lor B)$ | |
| 4. | $\vdash \neg(A \lor B) \to \neg B$ | |
| 5. | $\neg(A \lor B) \vdash \neg A$ | |
| 6. | $\neg(A \lor B) \vdash \neg B$ | |
| 7. | $\neg(A \lor B) \vdash \neg A \to \neg B \to \neg A \,\&\, \neg B$ | |
| 8. | $\neg(A \lor B) \vdash \neg B \to \neg A \,\&\, \neg B$ | |
| 9. | $\neg(A \lor B) \vdash \neg A \,\&\, \neg B$ | |
| 10. | $\vdash \neg(A \lor B) \to \neg A \,\&\, \neg B$ | |
| 11. | $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to \neg\neg(A \lor B)$ | |
| 12. | $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg\neg(A \lor B)$ | |
| 13. | $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg\neg(A \lor B) \to A \lor B$ | |
| 14. | $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash A \lor B$ | |
| 15. | $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \lor B$ | |

*Упражнение* 17 (4.d). $\vdash A \,\&\, \neg A \to A \lor B$

$$\vdash A \,\&\, \neg A \to A \lor B$$
$$A \,\&\, \neg A \vdash A \lor B$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \,\&\, \neg A$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \,\&\, \neg A \to A$ | (а. 4) |
| 3. | $A$ | (M.P. 1,2) |
| 4. | $A \to A \lor B$ | (а. 6) |
| 5. | $A \lor B$ | (M.P. 3,4) |

*Упражнение* 18 (4.e). $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

Идея решения — рассмотрим три случая : $A \in \Gamma; \neg A, B \in \Gamma; \neg A, \neg B \in \Gamma$

*Упражнение* 19 (5). Даны высказывания $\alpha$ и $\beta$, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\alpha \not\equiv \beta$. Укажите способ построения высказывания $\gamma$, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\alpha \not\equiv \gamma$ и $\beta \not\equiv \gamma$.

Решение, рассказанное на паре $\gamma := \alpha \mathbin{\&} \beta$, неверное, т.к. при тавтологии $\beta$ выполняется $\alpha \equiv \gamma$.

Верное решение: пусть множество подстановок, на которых $\alpha$ выполняется — $\mathcal{A}$, для $\beta$ — $\mathcal{B}$. Несложно заметить, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, при этом $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}|$. Если $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}| - 1$, то можно найти множество между ними, т.е. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Если $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| - 1$, то нужно ввести новую переменную, чтобы разница стала больше.

*Упражнение* 20 (6). $\alpha \vdash \beta, \neg\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \beta$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\alpha$ | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ | (a. 1) |
| 3. | $\neg\beta \to \alpha$ | (M.P. 1,2) |
| 4. | $\neg\alpha$ | $(\in \Gamma)$ |
| 5. | $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ | (a. 1) |
| 6. | $\neg\beta \to \neg\alpha$ | (M.P. 4,5) |
| 7. | $(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$ | (a. 9) |
| 8. | $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$ | (M.P. 3,7) |
| 9. | $\neg\neg\beta$ | (M.P. 6,8) |
| 10. | $\neg\neg\beta \to \beta$ | (a. 10) |
| 11. | $\beta$ | (M.P. 9,10) |