Информация = - неопределенность

Рассмотрим вероятностное пространство $\Omega = \{\omega_1 \dots \omega_n\}$ $p_1 \dots p_n$ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Определение. H — мера неопределенности случайного источника (энтропия), если это отображение удовлетворяет следующему:

$$H(p_1 \dots p_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

$$H(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}) < H(\frac{1}{n+1} \dots \frac{1}{n+1})$$

H — непр. от всех аргументов

Рассмотрим два эксперимента, где у первого исходы p_i , у второго q_{ij} .

$$H(p_1q_{11}, p_2q_{12} \dots p_1q_{1m_1}, p_2q_{21} \dots p_nq_{nm_n}) = H(p_1 \dots p_n) + \sum_{i=1}^n p_i H(q_{i1} \dots q_{im_i})$$

$$h(n)=H(rac{1}{n}\dotsrac{1}{n})$$

Лемма 1. $h(n)=c\log_2 n$ $p_i=rac{1}{n}$ $m_i=m$ $a_{ij}=rac{1}{m}$

h(mn) = h(n) + h(m)

$$h(2) = c -$$
бит.

$$\begin{split} 2^i & \leq n^k < 2^{i+1} \\ i & \leq k \log_2 n < i+1 \\ \frac{i}{k} & \leq \log_2 n < \frac{i+1}{k} \\ h(2^i) & \leq h(n^k) < h(2^{i+1}) \\ ci & \leq h(n^k) < c(i+1) \\ ci & \leq k \cdot h(n) < c(i+1) \\ \frac{i}{k} & \leq \frac{h(n)}{c} < \frac{i+1}{k} \end{split}$$

Т.к. $\frac{h(n)}{c}$ и $\log_2 n$ зажимаются $\frac{i}{k}$ и $\frac{i+1}{k} \Rightarrow \frac{h(n)}{c} = \log_2 n$

$$]p_i = \frac{a_i}{b} \quad \triangleleft q_{ij} = \frac{1}{a_i}, m_i = a_i$$

$$h(b) = H(p_1 \dots p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i h(a_i)$$

M3137y2019

$$H(p_1 \dots p_n) = c \log_2 b - c \sum_{i=1}^n p_i \log_2 a_i = -c \left(\sum_{i=1}^n p_i (\log_2 a_i - \log_2 b) \right) =$$

$$= -c \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

Рассмотрим арифметическое кодирование:

$$H(p_1 \dots p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

$$L \ge \frac{1}{2^q} \Rightarrow -\log_2 L \le q$$

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i}{m}\right)^{f_i}$$

$$-\log_2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{f_i}{m}\right)^{f_i} = -\sum_{i=1}^n f_i \log_2 p_i = m \left(-\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i\right) = mH(p_1 \dots p_n)$$

1 Симуляция одного распределения другим

Рассмотрим распределение $1\dots n$ с вероятностями $p_1\dots p_n, n\geq 2, p_i>0$

Задача: сгенерировать распределение с вероятностями $q_1 \dots q_m$

Поделим отрезок [0,1] в пропорциях p_i . Если отрезок p_i не лежит полностью в одном отрезке, то делают зум по всем отрезкам q_j , которым соответствует какое-то число из p_i .

М3137у2019 Лекция 4