Упражнение 1. Решить сравнения:

- $3x \equiv 1 \mod 7$
- $100x \equiv 21 \mod 23$
- $315x \equiv -10 \mod 275$
- $76x \equiv 232 \mod 220$

Решение.

- $(3, 7) = 1 \Rightarrow$ решение единственно. Решение $x \equiv 5 \mod 7$.
- $(100, 23) = 1 \Rightarrow$ решение единственно. Решение $x \equiv 17 \mod 23$.
- $(315, 275) = 5 \Rightarrow 63x \equiv -2 \mod 55$. Решение этого уравнения *(алгоритмом Евклида)* $x \equiv 41 \mod 55$. Решения исходного уравнения это $x_1 \equiv 41 \mod 275, x_2 \equiv 96 \mod 275, x_3 \equiv 151 \mod 275, x_4 \equiv 206 \mod 275, x_5 \equiv 261 \mod 275$
- $(76, 220) = 4 \Rightarrow 19x \equiv 3 \mod 55$. Решение этого уравнения $x \equiv 32 \mod 55$. Решения исходного уравнения это $x_1 \equiv 32 \mod 220, x_2 \equiv 87 \mod 220, x_3 \equiv 142 \mod 220, x_4 \equiv 197 \mod 220$

□

Упражнение 2. Найти число целых точек на прямой $8x - 13y + 6 = 0$, которые лежат между прямыми $x = 100$ и $x = -100$.

Решение. Решим $8x + 6 \equiv 0 \mod 13$. Т.к. $(8, 13) = 1$, решение единственно. Это решение $x = 9$. Тогда для каждого $\tilde{x} \equiv 9 \mod 13$ и какого-либо $\tilde{y}$, являющегося решением исходного уравнения, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — решение исходного уравнения. Кроме того, все решения уравнения записываются в таком виде. Всего $\tilde{x} : \tilde{x} \equiv 9 \mod 13$ и $\tilde{x} \in [-100, 100]$ существует $\lfloor \frac{100+95}{13} \rfloor + 1 = 16$ штук, т.к. "крайние" $\tilde{x}$ это -95 и 100. □

Упражнение 3. Найти все решения в целых числах:

$$34x + 26y = 6$$

Решение.

$$34x + 26y = 6$$

Решим следующее уравнение:

$$34a + 26b = (34, 26) = 2$$

Расширенный алгоритм Евклида даёт частное решение:

i	r_i	s_i	t_i	q_i
0	34	1	0	
1	26	0	1	
2	8	1	-1	1
3	2	-3	4	3
4	0	13	-17	4

$a = s_3 = -3, b = t_3 = 4$

Тогда $x_0 = a \cdot \frac{6}{2} = -9, y_0 = b \cdot \frac{6}{2} = 12$ — частное решение исходного уравнения.

Рассмотрим решение в общем виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot n \\ y = y_0 + k \cdot m \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 34(x_0 + k \cdot n) + 26(y_0 + k \cdot m) &= 6 \\ 34k \cdot n + 26k \cdot m &= 0 \\ 34n &= -26m \\ 17n &= -13m \end{aligned}$$

Т.к. $(17, 13) = 1, n = \pm 13, m = \mp 17$

Ответ: $\{\langle -9 + k \cdot 13, 12 - k \cdot 17 \rangle \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает пару. $\square$

Упражнение 4. Решить сравнение $(a^2 + b^2)x \equiv a - b \mod ab, (a, b) = 1$

Решение.

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)x &\equiv a - b \mod ab \\ (a^2 + b^2 - 2ab)x &\equiv a - b \mod ab \\ (a - b)^2 x &\overset{*}{\equiv} a - b \mod ab \\ (a - b)x &\equiv 1 \mod ab \end{aligned}$$

Переход $*$ верный, т.к. $(a - b, ab) = 1$:

Утверждение. $(a - b, ab) = 1$

Доказательство. Предположим обратное: $(a - b, ab) = k \neq 1$. Возьмём $\tilde{k}$ — произвольное простое число, делящее k. Такое существует, т.к. $k > 1$.

Тогда $ab \,\vdots\, \tilde{k}$ и $a - b \,\vdots\, \tilde{k} \Rightarrow a = \tilde{k}p + b$. Тогда $(\tilde{k}p + b)b \,\vdots\, \tilde{k} \Rightarrow \tilde{k}pb + b^2 \,\vdots\, \tilde{k} \Rightarrow b^2 \,\vdots\, \tilde{k}$. По простоте $\tilde{k}$ $b = \tilde{k}n$, т.к. иначе $[b]$ делитель $\tilde{k}$, отличный от него и единицы *(случай $b = 1$ тривиален, т.к. $(a-1, a) = 1$ всегда выполнено)*. Аналогичными выкладками $a \,\vdots\, \tilde{k}$ и следовательно $(a, b) = \tilde{k} \cdot t$, что противоречит условию. $\square$

x находится как мультипликативное обратное к $a - b$ в кольце $\mathbb{Z}_{ab}$. $\square$