

Теорема 0.1. Лагранжа.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непр., дифф. в (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Теорема 0.2. Коши. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f, g — дифф. в (a, b) ; $g' \neq 0$ на (a, b) . Тогда

$\exists c \in (a, b)$, такое что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Следует из теоремы Коши при $g(x) = x$ □

Примечание. Если $g(b) = g(a)$, то по т. Ролля . . .

Примечание. От автора конспекта: Кохась действительно не дописал замечание.

Примечание. Теорему Лагранжа можно интерпретировать как следующее: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — тангенс угла между хордой графика и горизонталью, а $f'(c)$ — касательная. Таким образом, если провести хорду графика, то можно найти точку между точками пересечения графика и хорды такую, что касательная к графику будет параллельна этой хорде.

Доказательство. Теоремы Коши.

$$F(x) := f(x) - kg(x)$$

Подберем k такое, что $F(b) = F(a)$

$$f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По т. Ролля $\exists c : F'(c) = 0$

$$f'(c) - kg'(c) = 0$$

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

Следствие. 1. f непр. на $[a, b]$, дифф. в (a, b)

$$\exists M : \forall x \quad |f'(x)| \leq M$$

Тогда $\forall x, x + h \in [a, b]$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|$$

2. f — непр. на $[a, b]$, дифф. на (a, b)

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = k \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Тогда } f'_+(a) = k$$

Доказательство. Следствия 2.

$\exists a < c < a + h$, такой что:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} k$$

□

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f — дифф. при $x > 0$

$$f' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = 0 \text{ (позже)}$$

Это был контрпример — функция, которая везде дифф., но $\nexists \lim$

Теорема 0.3. Дарбу.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифф. на $[a, b]$

Тогда $\forall C$ лежащего между $f'(a), f'(b)$

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = C$$

Доказательство. $F(x) := f(x) - C \cdot x$ — у неё $\exists \max_{[a, b]}$ (в силу непрерывности)

$F'(x) = f'(x) - C$ $F'(a)$ и $F'(b)$ разных знаков.

$$1. F'(a) > 0 \quad F'(b) < 0$$

По лемме при $x > a$, близких к a $f(x) > f(a) \Rightarrow \max f$ достигается в $c \in (a, b)$

□

Следствие. 1. Функция f' обладает свойством “сохранять промежуток”

2. f' не может иметь разрывов вида “скачок”

1 Показательная функция

$$\forall x, y \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad (*)$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

Определение. Показательная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непр.

$\neq 0$, $\neq 1$ и удовл. $(*)$

Теорема 1.1. f — показ. ф-ция

Тогда:

1. $\forall x \quad f(x) > 0; f(0) = 1$
2. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$
3. f — строго монот.: $a := f(1)$

Тогда $a \neq 1$, если $a > 1$ — возр., если $a < 1$ — убыв.

4. Множество значений $f \quad (0, +\infty)$
5. $\tilde{f}(1) = f(1)$, тогда $f = \tilde{f}$

Доказательство. 1. $f \neq 0 \quad \exists f(x_0) \neq 0$

$$x = x_0, y = 0 \quad f(x_0 + 0) = f(x_0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$$

Если $f(x_1) = 0$, тогда

$$\forall x \quad f(x) = f(x - x_1) \cdot f(x_1) = 0$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

2. Как в опр. ст. с рациональным показателем

(a) $r = 1$

(b) $r \in \mathbb{N}$

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) \cdot f(x) = f(x^2)$$

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) \cdot f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$$

(c) $r \in -\mathbb{N}$

$$1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx) \cdot f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$$

(d) $r = 0$

$$f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$$

(e) $r = \frac{1}{n}$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = (f(x))^{\frac{1}{n}}$$

(f) $r = \frac{m}{n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m \cdot \left(\frac{1}{n}x\right)\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}x\right)\right)^m = \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

3. $a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = 1^r = 1$

f — непр. и $f(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \equiv 1$

$a > 1$. Тогда $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$

$$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r > 1$$

Значит $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ берем $r_k \rightarrow x (r_k \in \mathbb{Q})$

$f(r_k) \rightarrow f(x)$, значит $f(x) \geq 1$

$$f(x) = f((x-r) + r) = f(x-r) \cdot f(r) > 1$$

$\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$

возр. $x \in \mathbb{R}, h > 0$

$$f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$$

$$f(h) > 1 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$$

$a < 1$ — аналогично.

4. $f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$

$$\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$$

$$f(1) = a > 1$$

$$a^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5. \tilde{f}(1) = f(1) \Rightarrow \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$$

$$\forall x \quad r_k \rightarrow x$$

$$\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$$

$$\tilde{f}(r_k) \rightarrow \tilde{f}(x); f(r_k) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$$

□

Обозначение. f — показ ф-ция, $f(1) = a$

Это значит $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = a^r$

Обозначим: $f(x) = a^x$

Теорема 1.2. \exists показ. ф-ция f_0 , удовл.:

$$\frac{f_0(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Доказательство будет позже.

Теорема 1.3. f — показ. ф-ция.

Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \quad f(x) = f_0(\alpha x)$

Доказательство. $f(1) = a$

Множество значений f_0 это $(0, +\infty)$

$$\exists \alpha : f_0(\alpha) = a$$

$f_0(\alpha x)$ и есть $f(x)$. Покажем это:

$$g(x) := f_0(\alpha x)$$

$g(x)$ — показ. ф., т.к. она не тривиальна и удовлетворяет $(*)$, покажем это:

$$g(x+y) = f_0(\alpha(x+y)) = f_0(\alpha x + \alpha y) = f_0(\alpha x) \cdot f_0(\alpha y) = g(x)g(y)$$

$$g(1) = f_0(\alpha) = a = f(1)$$

□

Следствие. Функция f_0 , удовл. теореме 5, — единственная.

Доказательство. $h(x)$ — ещё одна такая функция $\Rightarrow h(x) = f_0(\alpha x)$

$$1 \xleftarrow{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{x} = \frac{f_0(\alpha x) - 1}{\alpha x} \cdot \alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha$$

, т.е. $\alpha = 1$

□

Определение. f_0 называется экспонента, если:

$$f_0(x) = e^x \quad f_0(1) = e$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

, т.е. $e^x > 1$ при $x > 0$

Следствие. $\forall a > 0, a \neq 1$

$$\exists! f : f(1) = a$$

Доказательство. Для этого $a \exists! \alpha \quad f_0(\alpha) = a$

$$f(x) = f_0(\alpha x)$$

$$f(1) = f_0(\alpha) = a$$

□

Следствие. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0, a \neq 1$

$$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

Доказательство. $x = 0$ — тривиально

$$x \neq 0 \quad a^x = b \neq 1$$

$$y \in \mathbb{Q} \quad a^{xy} = (a^x)^y = b^y$$

$$y \in \mathbb{R} \quad r_k \rightarrow y \quad a^{xy} \leftarrow a^{xr_k} = b^{r_k} \rightarrow b^y \Rightarrow a^{xy} = b^y$$

□

2 Производные высших порядков

Определение. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — дифф.

$$x \in \langle a, b \rangle$$

Если f' — дифф. в x_0 , то $(f')'(x_0)$ — называется вторая производная функции f .

Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$ — множество D_{n-1} и $f^{(n-1)} : D_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ определены. Пусть D_n — множество точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует $\delta > 0$, такое что:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0 . Если $x_0 \in D_n$, то f — дифференцируема n раз в точке x_0 . Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'_{D_n} : D_n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется производной порядка n .

Если $\forall x \in \langle a, b \rangle \exists f^{(n)}(x)$, изучим дифференцируемость $f^{(n)}$ в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x_0) &= (f^{(n)})'(x_0) \\ f_+^{(n)}(x_0) &= (f|_{\langle a, b \rangle \cap [x_0, +\infty)})^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Обозначение. E — пр-к в \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$

$$C^n(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ непр. на } E\}$$

$$C(E) = \text{функции, непр. на } E$$

$$C^\infty(E):$$

$$C(E) \supsetneq C^1(E) \supsetneq C^2(E) \supsetneq \dots$$

Наблюдение. $P(x)$ — многочлен степени n

$$\begin{aligned} &P(a) = C_0 \\ &P'(a) = C_1 \\ &\vdots \\ &P^{(n)}(a) = C_n \end{aligned}$$

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_n(x-a)^n$$

$$P(a) = \alpha_0 = C_0$$

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \dots + n\alpha_n(x-a)^{n-1}$$

$$P'(a) = \alpha_1 = C_1$$

$$P''(x) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(x-a) + \dots + n(n-1)\alpha_n(x-a)^{n-2}$$

$$P''(a) = 2\alpha_2$$

\vdots

$$P^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot \alpha_n$$

$$P(x) = C_0 + \frac{C_1}{1!}(x-a) + \frac{C_2}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{C_n}{n!}(x-a)^n$$

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Определение. Многочленом Тейлора n -той степени (*порядка*) функции f в точке a называется:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$