

## 0 Введение

Пусть мы хотим найти  $y$  — функцию от одного аргумента.

**Определение.**  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  — дифференциальное уравнение

*Пример.* Условие задачи:

$$\begin{aligned} dy_n &\approx ky_n dt \\ \frac{dy}{dt} &\approx ky \\ y' &= ky \\ y(t) &=? \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что  $y = kt$  — решение искомого дифференциального уравнения. Подставим  $y = kt$  в (1).

$$\begin{aligned} (kt)' &= k(kt) \\ k &= k^2 t \\ 1 &= kt \\ t &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Это не верно для всех  $t$ , следовательно  $y = kt$  — не решение.

Предположим, что  $y = e^{kt}$  — решение.

$$\begin{aligned} (e^{kt})' &= ke^{kt} \\ ke^{kt} &= ke^{kt} \\ e^{kt} &= e^{kt} \end{aligned}$$

Это верно  $\forall t \in (-\infty, +\infty)$ .

Кроме того,  $y = Ce^{kt}$  — решение  $\forall C \in \mathbb{R}$

*Пример.* Груз массой  $m$  подвешен к пружине. Пусть его положение — функция  $x(t)$ .

В положении равновесия:

$$mg = -kx_0$$

Второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} F_\Sigma &= ma \\ mg + (-k(x - x_0)) &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

*Примечание.*  $\ddot{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2x}{dt^2}$  (вторая производная  $x$  по  $t$ )

$$-kx_0 - kx + kx_0 = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Ответ:

$$x(t) = A \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} + \phi_0 \right)$$

$A, \phi_0$  — произвольные постоянные.

## 1 Уравнения первого порядка. Основные понятия.

### 1.1 Уравнение первого порядка и его решения

**Определение.**  $F(x, y, y') = 0$  — уравнение первого порядка

**Определение.** Решением уравнения первого порядка на  $(a, b)$  называется функция  $\varphi \in C^1(a, b)$ :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

( $a$  и  $b$  могут быть  $\infty$ )

*Пример.*

$$y' = x$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Частные решения: } \begin{cases} \varphi(x) = \frac{x^2}{2} - \text{решение на } (-\infty, +\infty) \\ \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \end{cases}$$

**Определение.** Общее решение — множество всех решений.

**Определение.** Общий интеграл — соотношение вида  $F(x, y, C) = 0$ , которое при любом допустимом  $C$  неявно задаёт решение.

*Пример.*

$$y - \frac{x^2}{2} + C = 0 - \text{общий интеграл}$$

**Определение.** Интегральная кривая уравнения — график его решения.

## 1.2 Формы записи уравнения первого порядка

**Определение.**  $y' = f(x, y)$  — уравнение, разрешенное относительно производной (нормальная форма).

*Пример.*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y = \sqrt{1-x} \text{ — решение на } x \in (-1, 1)$$

$$y = -\sqrt{1-x} \text{ — решение на } x \in (-1, 1)$$

Кроме того, можно решить относительно  $x$ :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

$$x = \sqrt{1-y} \text{ — решение на } y \in (-1, 1)$$

$$x = -\sqrt{1-y} \text{ — решение на } y \in (-1, 1)$$

**Определение.**  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  — уравнение в дифференциалах

**Определение.** Решением уравнения в дифференциалах называется функция  $y(x) \in C^1(a, b)$ , такая что:

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Аналогично определяется решение  $x(y)$ .

**Определение.** Параметрическим решением уравнения в дифференциалах называется пара  $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ , такая что:

$$1. |\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$$

$$2. P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

*Примечание.* Первое условие гарантирует, что в графике нет изломов, т.к. мы всегда “движемся” хотя бы по одной из осей.

**Определение.** Интегральная кривая уравнения в дифференциалах — кривая, параметризация которой является параметрическим решением.

*Пример.*

$$ydy + xdx = 0$$

$$\text{Параметрическое решение: } \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

### 1.3 Поле направлений и приближенные решения

$$y' = f(x, y)$$

$G$  — область в  $\mathbb{R}^2$

$$f \in C(G)$$

Пусть  $\varphi$  — решение на  $(a, b)$ , т.е.  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (a, b)$

$$y_0 := \varphi(x_0)$$

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$(1, f(x_0, y_0))$  — касательный вектор к  $y(x)$  в точке  $x_0$

Построив множество касательных векторов, можно увидеть, как должны идти искомые кривые, т.к. они должны касаться этих векторов.



Рис. 1: Поле направлений с ломаными Эйлера

**Определение (Ломаная Эйлера).**  $y' = f(x, y)$ ,  $(x_0, y_0)$  — начальная точка,  $\Delta x$  — постоянный шаг.

Вершины ломаной Эйлера: 
$$\begin{cases} x_k = x_0 + k\Delta x \\ y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta x \end{cases}$$

## 1.4 Задача Коши

**Определение.** Задача Коши (*начальная задача*) для уравнения  $y' = f(x, y)$  — задача отыскать его решения, удовлетворяющие начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , где  $x_0, y_0$  — начальные данные задачи.

*Пример.*

$$y' = 2x \quad y(1) = 2$$

Решение:

$$y = x^2 + C$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

Ответ:  $y = x^2 + 1, x \in (-\infty, +\infty)$