Теория кодирования

Михайлов Максим

8 сентября 2022 г.

Оглавление

Лекция 1

2 сентября

1 Введение

Определение. Передаваемый сигнал это

$$x(t) = \sum_i S_{x_i}(t - iT)$$

, где x_i — передаваемые символы, T — продолжительность передачи одного символа.

Пример (M-ичная амплитудно-импульсная модуляция).

$$S_i(t) = \alpha(2i + 1 - M)g(t)\sin(2\pi ft)$$

, где:

- $g(t)$ — сигнальный импульс
- f — несущая частота
- α — коэффициент энергии передаваемого сигнала

Модели канала:

1. В непрерывном времени: $y(t) = x(t) + \eta(t)$
2. В дискретном времени: $y_i = \alpha(2x_i + 1 - M) + \eta_i$

η — белый шум, обычно Гауссов $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

У передаваемого сигнала обычно не должно быть постоянной компоненты (по причинам физики), поэтому сигнал симметричен. С точки зрения теории кодирования это несущественно.

Приемник наблюдает на выходе канала вектор $y = (y_0 \dots y_{n-1})$. Канал характеризуется условным распределением $P_{Y|X}(y \mid x)$, где X, Y — случайные величины, соответствующие векторам переданных и принятых символов.

Приемник разбивает векторное пространство на решающие области $R_x : y \in R_x \implies \hat{x} = x$, т.е. если сигнал попал в область R_x, то мы ему сопоставляем кодовый символ x. Тогда вероятность ошибки:

$$\begin{aligned} P_e &= \int_{\mathbb{R}^N} P_e(y) p_Y(y) dy \\ &= \sum_x \int_{R_x} p_e(y) p_Y(y) dy \\ &= \sum_x \int_{R_x} (1 - p_{X|Y}\{x \mid y\}) p_Y(y) dy \\ &= 1 - \sum_x \int_{R_x} p_{X|Y}\{x \mid y\} p_Y(y) dy \end{aligned}$$

Приемник должен найти оптимальные решающие области. Оптимальность определяется критерием, например:

1. Критерий максимума апостериорной вероятности (критерий идеального наблюдателя)

$$\begin{aligned} R_x &= \{y \mid p_{X|Y}(x \mid y) > p_{X|Y}(x' \mid y), x' \neq x\} \\ &= \{y \mid P_X(x) p_{Y|X}(y \mid x) > P_X(x') p_{Y|X}(y \mid x'), x' \neq x\} \end{aligned}$$

2. Критерий максимума правдоподобия

$$R_x = \{y \mid p_{Y|X}(y \mid x) > p_{Y|X}(y \mid x'), x' \neq x\}$$

   В случае равновероятных символов этот критерий совпадает с критерием идеального наблюдателя.

Пример (2-ичная амплитудно-импульсная модуляция (2-AM)). Пусть $y_i = \alpha(2x_i - 1) + \eta_i, \eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), x_i \in \{0, 1\}$. Тогда:

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y - \alpha(2x-1))^2}{2\sigma^2}}$$

Применим критерий максимального правдоподобия:

$$R_0 = \{y \mid y < 0\}, R_1 = \{y \mid y \geq 0\}$$

Вычислим вероятность ошибки:

$$P_e = P_X(0) P\{Y \geq 0 \mid X = 0\} + P_X(1) P\{Y < 0 \mid X = 1\}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0.5 \int_0^\infty p_{Y|X}(y \mid 0) dy + 0.5 \int_{-\infty}^0 p_{Y|X}(y \mid 1) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+\alpha)^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{\frac{\alpha}{\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&=: Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Значение сигнала это обычно уровень напряжения. Как мы знаем из школьной физики, мощность $P = \frac{U^2}{R}$. Мы хотим минимизировать мощность, чтобы экономить электроэнергию. Мощность сигнала суть случайная величина с матожиданием, пропорциональным $E_S = \alpha^2$. Мощность белого шума не зависит от частоты и пропорциональна $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Если же шум зависит от частоты, то он называется розовым или голубым.

Соотношение мощностей сигнал/шум на символ это $\frac{E_S}{N_0}$, обычно измеряемое в децибелах, т.е. $10 \log_{10} \frac{E_S}{N_0}$. Однако нас интересуют не символы, а биты и тогда соотношение сигнал/шум на бит это $\frac{E_S}{RN_0}$, где R — количество бит информации, представленных одним символом.

1.1 Способы снижения вероятности ошибки

1. Посимвольное повторение: будем передавать вместо каждого символа m копий того же символа.

$$y_{mi+j} = \alpha(2x_i - 1) + \eta_{mi+j}, \quad 0 \le j < m$$

   Рассмотрим разные способы работы приемника:

   - Для каждого y_{mi+j} проведем голосование. Тогда вероятность ошибки:

$$P_v(m) = \sum_{j=\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{m-1} C_m^j P_e^j (1 - P_e)^{m-j}$$

   - Примем решение по

$$\sum_{j=0}^{m-1} y_{mi+j} = m\alpha(2x_i - 1) + \sum_{j=0}^{m-1} \eta_{mi+j}$$

, т.е сложим наблюдения в одном блоке. Тогда вероятность ошибки:

$$P_a(m) = Q\left(\frac{m\alpha}{\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{mE_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Выигрыша не будет, т.к. на один символ передается в m раз меньше бит (см. последний переход).

Второй метод лучше первого, т.к. мы не теряем информацию о нашей уверенности в каждом принятом символе.

Избыточность на уровне битов не дала улучшения, поэтому введем избыточность на уровне блоков.

1.2 Понятие кода

Определение. Код — множество допустимых последовательностей символов алфавита X.

Последовательности могут быть конечными или бесконечными, но на практике только конечными. Не каждая последовательность символов алфавита является кодовой.

Определение. Кодер — устройство, отображающее информационные последовательности символов алфавита $\mathcal{B}$ в кодовые.

Различным последовательностям алфавита $\mathcal{B}$ сопоставляются различные последовательности алфавита X для однозначности кодирования.

Определение. Скорость кода — отношение длин информационной и кодовой последовательностей.

Определение. Декодер — устройство, восстанавливающее по принятой последовательности символов наиболее вероятную кодовую последовательность.

1.3 Теоремы кодирования

Пусть для передачи используется код $\mathcal{C} \subset X^n$ длины n, состоящий из M кодовых слов, выбираемых с одинаковой вероятностью.

Теорема 1 (обратная). Для дискретного постоянного канала с пропускной способностью C для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого кода со скоростью $R > C + \delta$ средняя вероятность ошибки $\overline{P_e} \geq \varepsilon$

Теорема 2 (прямая). Для дискретного постоянного канала с пропускной способностью C для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует достаточно большое число $n_0 > 0$, такое что для всех натуральных $n \geq n_0$ существует код длиной n со скоростью $R \geq C - \delta$, средняя вероятность ошибки которого $\overline{P_e} \leq \varepsilon$

1.4 Пропускная способность некоторых каналов

1. Двоичный симметриный канал: $X, Y \in \{0, 1\}, p_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} p, & y \neq x \\ 1-p, & y = x \end{cases}$

$$C_{BSC} = 1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$$

2. Идеальный частотно ограниченный гауссовский канал: $y(t) = x(t) + \eta(t), \eta(t) -$ гауссовский случайный процесс, спектральная плотность мощности которого равна $S(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -W < f < W \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ Из теории случайных процессов:

$$C_{AWGN} = W \log_2 \left(1 + \frac{E_S}{W N_0}\right)$$

$$\lim_{W \to \infty} C_{AWGN} = \frac{E_S}{N_0 \ln 2}$$