

# Конспект по дискретной математике

October 15, 2019

## 1 Оценка числа элементов в схеме

**Теорема 1.1.**  $B_1$  и  $B_2$   $\exists c \forall f \text{ size}_{B_1}(f) \leq c \cdot \text{size}_{B_2}$

Доказывалась ранее.

**Теорема 1.2.** О нижней оценке. Почти все функции требуют  $\Omega(\frac{2^n}{n})$  элементов в своей записи. Альтернативная формулировка:

$$f(n) = \frac{2^n}{n} \quad g(n) : \frac{g}{f} \rightarrow 0 \quad F_g = \{\text{булевы функции, size} \leq g(n)\}$$

Тогда

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \rightarrow 0$$

**Теорема 1.3.** О верхней оценке.

$$\forall f - \text{бул. ф.} \exists \text{схема из ф.э., содержащая } O\left(\frac{2^n}{n}\right) \text{ элементов}$$

## 2 Линейная программа

Пример для  $x_1 \oplus x_2$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= \neg x_1 \\ y_2 &= \neg x_2 \\ y_3 &= x_1 \wedge y_2 \\ y_4 &= x_2 \wedge y_1 \\ y_5 &= y_3 \vee y_4 \end{aligned}$$

Линейная программа — нумерованное множество строк вида

$$(a, [i_1 \dots i_k]), \text{ где } a \in B(\text{базис}), i_j - \text{индексы переменных, } a : \mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B}$$

**Теорема 2.1.** Для  $f \in \mathcal{L}$  линейная программа длины  $r \Leftrightarrow \exists$  схема из  $r$  функциональных элементов.

Оценка: сколько линейных программ над  $\{\downarrow\}$  длины  $r$ ?

Первая строка:  $n^2$  вариантов (выбор 2 объектов из  $n$ )

Вторая строка:  $(n+1)^2$  вариантов (выбор 2 объектов из  $n$  и  $y_1$ )

$\vdots$

$(n+r-1)^2$

$$K_{n,r} = \prod_{i=0}^{r-1} (n+i)^2 \leq (n+r)^{2r}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq \log_2 (n+r)^{2r} = 2r \log_2 (n+r)$$

**Лемма 1.**

$$\exists \text{ функция: } size_B(f) \geq \frac{2^n}{2n}$$

*Доказательство.* Предположим противное:

$$r < \frac{2^n}{2n}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq 2r \log_2 (n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2n} \log_2 \left(n + \frac{2^n}{2n}\right) \leq \frac{2^n}{n} \log_2 2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{2^n} !!!$$

Обобщим для произвольного  $c$ :

$$r < \frac{2^n}{2cn}$$

$$\log_2 K_{n,r} \leq 2r \log_2 (n+r) < \frac{2 \cdot 2^n}{2cn} \log_2 \left(n + \frac{2^n}{2cn}\right) \leq \frac{2^n}{cn} \log_2 2^n = \frac{2^n}{c}$$

$$\Rightarrow K_{n,r} < 2^{\frac{2^n}{c}} !!!$$

□

Вернемся к доказательству теоремы 2.

*Доказательство.*

$$\frac{|F_g|}{2^{2^n}} \rightarrow 0$$
$$\frac{2^{\frac{2^n}{c}}}{2^{2^n}} = 2^{2^n \cdot (\frac{1}{c} - 1)} \rightarrow 0$$

□

**Теорема 2.2.**  $\forall f \exists$  схема из функ.эл.  $O(\frac{2^n}{n})$