

# Теория категорий

Михайлов Максим

17 января 2023 г.

## Оглавление

<b>Лекция 1</b>	<b>23 октября</b>	<b>2</b>
1	Введение . . . . .	2
<b>Лекция 2</b>	<b>30 октября</b>	<b>5</b>
2	Функторы . . . . .	5
3	Моно- и эпиморфизмы, дуальные категории . . . . .	6
<b>Лекция 3</b>	<b>6 ноября</b>	<b>8</b>

# Лекция 1

## 23 октября

### 1 Введение

Что такое математика? Это наука или язык, мы будем считать, что язык. Язык можно по-разному выражать.

*Пример.* Вспомним определение предела функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \xi$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_\alpha \in \dot{B}(x_0, \delta) \quad f(x_\alpha) \in B(f(\xi), \varepsilon)$$

$$\forall U(\xi) = \varepsilon \quad \exists \dot{U}(x_0) = \delta \quad \forall x_\alpha \in \delta : f(x_\alpha) \in \varepsilon$$

У нас есть два способа написать одно и то же. Теория категорий — ещё один способ описать всю математику.

В математике мы часто встречаем функции (отображения), у которых есть композиция. Попробуем описать всю математику композицией. Такая попытка привела к успеху, и теоретик позволил описать различные области одним синтаксисом.

**Определение. Категория** — объект  $\mathcal{C}$ , у которого есть:

1. “Коллекция” объектов  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ . Мы не можем сказать “множество”, т.к. тогда мы сталкиваемся с проблемами теории множеств<sup>1</sup>.
2. “Коллекция” морфизмов (стрелок)  $\text{Mor}(\mathcal{C}) / \text{Arr}(\mathcal{C})$

$$\forall f \in \text{Arr}(\mathcal{C}) \quad f : X \rightarrow Y, \quad X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$$

3. Правила:

(а)  $\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \quad \exists f \in \text{Arr}(\mathcal{C}) : f(X) = X$ . Также это обозначают как  $f : X \rightarrow X$ .  
 $f$  обозначается как  $\text{id}_X$

---

<sup>1</sup> См. парадокс Рассела

$$(b) \triangleleft f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, f, g \in \text{Arr}(\mathcal{C}), X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$$

$$\exists! h : X \rightarrow Z, h \in \text{Arr}(\mathcal{C}) \quad h = g \circ f$$

Но это не значит, что не существует других  $h' : X \rightarrow Z$ .

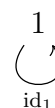
*Примечание.* Мы не определяем, что такое “=”, “ $f(x)$ ” и так далее, потому что теория категорий — про синтаксис, а смысл мы сами додумываем.

*Утверждение.*

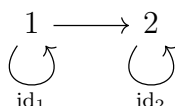
$$\forall a, b, c \in \text{Arr}(\mathcal{C}) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

*Пример.* Пустая категория (без объектов, без морфизмов)

*Пример* ( $\mathbb{1}$ ). Категория с одним объектом и одной стрелкой:



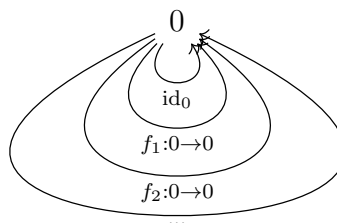
*Пример.*



*Утверждение.*  $\forall f : X \rightarrow Y, \text{id}_X : X \rightarrow X, \text{id}_Y : Y \rightarrow Y \quad f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f = f$

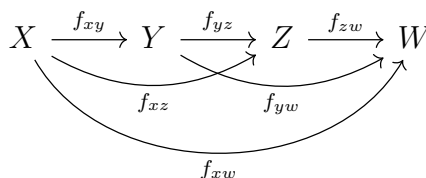
Не все категории удовлетворяют этому закону.

*Пример.*



Пусть при этом  $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i = f_{i+j}$ . Тогда эта категория описывает натуральные числа.

*Пример.*



С одной стороны,  $f_{xw} = f_{zw} \circ f_{xz}$ , с другой стороны  $f_{xw} = f_{yw} \circ f_{xy}$ , с третьей стороны  $f_{xw} = f_{zw} \circ f_{yz} \circ f_{xy}$ . Есть проблема: мы можем получить один и тот же морфизм разными способами, следовательно, не можем однозначно разложить морфизм в композицию, т.е. объекты не являются свободными<sup>2</sup>. С этим можно бороться очень тупо: для каждого

<sup>2</sup> Ради сохранения рассудка пока что не нужно понимать, что это такое.

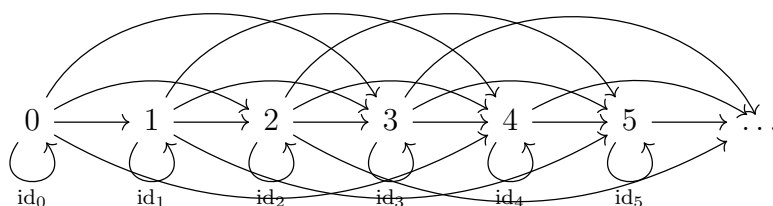
способа разложить морфизм вводить копию исходного морфизма, но тогда мы теряем ассоциативность.

# Лекция 2

## 30 октября

### 2 Функторы

*Пример.* Рассмотрим следующую категорию:



Стрелки можно определить как суммирование, а можно как  $\leq$ , ничего не изменится.

Пусть мы хотим отобразить категорию  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{D}$ . Отообразим точки в точки и стрелки в стрелки, при этом  $\text{Arr}'(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  задает отображение точек, а  $\text{Arr}'(\text{Arr}(\mathcal{C}), \text{Arr}(\mathcal{D}))$  задает отображение стрелок.

**Определение. Малая категория** — категория, объекты которой образуют множество.

*Примечание.* При этом нет ограничения на стрелки, они могут быть не множеством.

*Пример.* Категория из одного элемента со сложением на стрелках, где стрелки есть для всех натуральных чисел, кардиналов и пределов. Все стрелки не “помещаются” в множество.

Отображать между категориями мы можем как угодно, но хотелось бы сохранять структуру. Условие сохранения композиции:

$$\forall f_{AB}, f_{BC} \in \text{Arr } \mathcal{C} : \mathcal{F}(f_{BC}) \circ \mathcal{F}(f_{AB}) = \mathcal{F}(f_{BC} \circ f_{AB})$$

, где  $\mathcal{F}$  — отображение из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$ . Из предыдущего закона следует, что петли отображаются в петли, т.к.:

$$\mathcal{F}(f_{AA} \circ f_{AA}) = \mathcal{F}(f_{AA}) \circ \mathcal{F}(f_{AA})$$

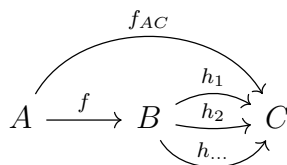
таким образом, образ  $f_{AA}$  должен иметь композицию с собой  $\Rightarrow$  это петля. Но никто не гарантирует, что эта петля будет на соответствующем объекте. Введём следующий закон:

$$\mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

**Определение.**  $\mathcal{F}$  называется (*ковариантным*<sup>1</sup>) **функтором**

### 3 Моно- и эпиморфизмы, дуальные категории

Рассмотрим следующую категорию (id опущены):



Если стрелку  $A \rightarrow C$  можно получить только как  $f_{AC} = f \circ h_i$ , то мы хотим:

1. Ввести отношение эквивалентности, чтобы не различать разные  $f_{AC}$ .
2. Назвать стрелку  $f$  **монической** (или **мономорфизмом**).

**Определение.** Дуальная<sup>2</sup> категория для некоторой категории  $\mathcal{C}$  это категория  $\mathcal{C}^*$ , что:

1.  $\text{Obj } \mathcal{C} = \text{Obj } \mathcal{C}^*$
2.  $\forall f_{AB} \in \text{Arr } \mathcal{C} \exists ! f_{BA} \in \text{Arr } \mathcal{C}^*$
3.  $\forall f_{BA} \in \text{Arr } \mathcal{C}^* \exists ! f_{AB} \in \text{Arr } \mathcal{C}$

Операция сопряжения является функтором, будем обозначать его  $\tau$ . Она легко строится в том смысле, что для любой категории, не зная ничего про объекты, мы можем построить её путём разворота стрелок.

*Пример.*

**Определение.** Если  $f$  — мономорфизмом в категории  $\mathcal{C}$ . Тогда  $f^* = \tau(f)$  является **эпиморфизмом** в категории  $\mathcal{C}^*$ .

**Определение** (альтернативное). Если стрелку  $C \rightarrow A$  можно получить только как  $f_{CA} = h_i \circ f$ , то  $f$  называется **эпиморфизмом**.

<sup>1</sup> Не важно, что это значит.

<sup>2</sup> Или зеркальная, двойственная, сопряженная, dual, opposite.

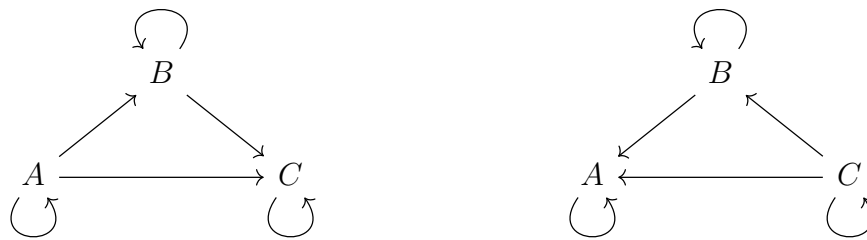


Рис. 2.1: Категория и дуальная к ней категория.

*Примечание.* Если стрелки соответствуют отношению предпорядка “ $\leq$ ”, то в дуальной категории стрелки соответствуют отношению “ $\geq$ ”.

*Примечание.* Категория, где стрелки соответствуют отношению предпорядка называется Poset.

**Определение.** Если  $\forall f_{AB} \in \text{Arr } \mathcal{C} \exists f_{BA}^{-1} : f_{AB} \circ f_{BA}^{-1} = \text{id}_B, f_{BA}^{-1} \circ f_{AB} = \text{id}_A$ , то  $\mathcal{C}$  — группоид.

# Лекция 3

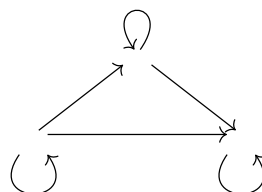
## 6 ноября

Пусть даны две категории:

*Пример.*



По нашему определению эти две категории символично не равны. Однако мы хотим построить операцию, которая покажет их эквивалентность. Давайте забудем объекты, получим следующую категорию:



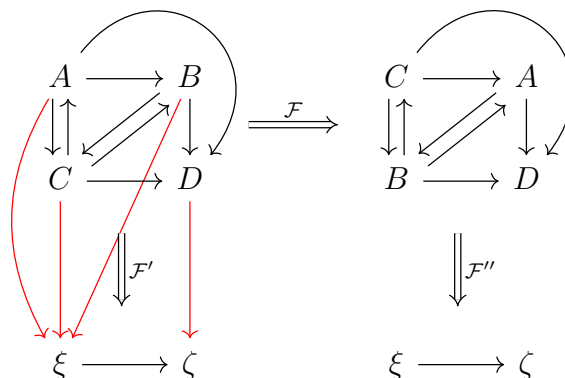
Тогда у нас функтор будет состоять только из отображения морфизмов.

**Не дописано.**

*Пример.* Рассмотрим две категории  $ABCD$ ,  $CABD$ , а также категорию  $\xi\zeta$ , функтор  $\mathcal{F}$  :



(отображение объектов красным цветом) между ними<sup>1</sup>:



Тогда  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'' \circ \mathcal{F}$

Если в рассматриваемых нами категориях нет кратных рёбер, то операция забвения<sup>2</sup> работает.

**Определение.**  $\text{Cat}$  — класс малых категорий

$\text{FCat}$  — класс забытых категорий

Тогда рассмотрим отображение  $\text{Er} : \text{Cat} \rightarrow \text{FCat}$  и  $\text{Er}^{-1} : \text{FCat} \rightarrow \text{Cat}$ , такие что  $\text{Er} \circ \text{Er}^{-1} = \text{id}$ . При этом  $\text{Er}^{-1}$  не единственно.

Обозначение.  $\text{Er}^{-1} = \text{re}$

Теперь можем определить предикат:

$$P : (\text{Fcat} \rightarrow \text{Cat}) \rightarrow (\text{FCat} \rightarrow \text{Cat}) \rightarrow \text{Bool}$$

Он берёт два способа “вспомнить” категорию и возвращает, равны ли они.

$$P(\text{re}_1, \text{re}_2) = \forall f \in \text{FCat} \quad \text{re}_1(f) = \text{re}_2(f)$$

Наше определение — чушь, потому что квантор “ $\forall$ ” мы не можем применить к  $\text{Arr}$  — это может быть не множество.

**Утверждение.** Пусть  $\mathcal{C}$  — категория, в которой нет кратных рёбер. Тогда, если  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  является множеством, то  $\exists h : \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Arr}'(\mathcal{C})$  — гомоморфизм, где  $\text{Arr}'(\mathcal{C})$  является множеством.

**Доказательство.** Слишком сложно. □

<sup>1</sup> Отображение морфизмов не обозначено на диаграмме, оно однозначно.

<sup>2</sup> Удаления имен объектов.

Мы хотим придумать некоторую структуру  $X$ , такую что  $\text{Cat} \subset X$ ,  $\text{FCat} \subset X$ . Маханием рук существует способ ввести **теорию топосов**. Пусть  $S'$  — некоторая структура, похожая на множество. В таких структурах можно ввести понятие квантора: если мы можем завести маркировку  $S' \leftrightarrow \text{Type}$ . Если мы также можем сопоставить наш набор кванторов  $\exists, \forall$  особым видам типов  $\Pi, \Sigma$  в теории типов, то полученная теория становится “довольно неплохой”.

Если мы опишем некоторую функцию  $h$ , отображающую какие-нибудь другие кванторы в  $\{\exists, \forall\}$ , то эти другие кванторы будут работать “схожим образом”.