Подгруппы в полугруппах

На прошлой практике мы остановились на моноиде, считающем число строк:

$$S := \{(l, n, r) \mid l, r \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$(l_1, n_1, r_1) \cdot (l_2, n_2, r_2) = (l_1, n_1 + n_2 + r_1 l_2, r_2)$$

Идемпотенты:

- 1. $x_1 = (0, 0, 0)$
- 2. $x_2 = (1, 0, 0)$
- 3. $x_3 = (0, 0, 1)$

Рассмотрим $H_2 = x_2 \cdot S \cdot x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_2 \cdot y \cdot x_2 \mid y \in S\} = \{(0,n,1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. В H_2 выполняется $zx = zy \Rightarrow x = y$, т.к. $H \sim (\mathbb{N}_0,+)$ с изоморфизмом $(0,n,1) \mapsto n$.

Аналогично можно построить $H_3 := x_3 S x_3, H_1 := x_1 S x_1$. Такие подмножества являются подполугруппами S:

$$y, z \in H_1$$
 $yz = x_1 \hat{y} x_1 x_1 \hat{z} x_1 = x_1 \underbrace{(\hat{y} x_1 x_1 \hat{z})}_{\in S} x_1$

В H_1 есть единица — x_1 , т.к. $yx_1 = x_1\hat{y}x_1x_1x_1x_1 = x_1\hat{y}x_1 = y$

$$H_1 \cap H_2 = \emptyset$$

Рассмотрим полугруппу S и некоторый $a \in S$. Построим подмножество H, называемое **генератором** a, обозначаемое $\langle a \rangle$:

$$H = \langle a \rangle := \{a, a^2, a^3 \dots \}$$

Пример. $\triangleleft(\mathbb{Z}, +), a = 2$. Тогда $H = \{2n \mid n \geq 1\}$.

Может быть $|H| < \infty$. Тогда $a^n = a^m$. Выберем наименьшее такое n. Тогда у нас есть некоторый "хвост" $a^1 \dots a^n$ и цикл $a^n, a^{n+1} \dots a^m$. n называется **индексом** (также обозначается i) a, d = m - n — **периодом**.

Утверждение. Среди $\langle a \rangle$ есть идемпотент, если $|\langle a \rangle| < \infty$

Proof.

$$a^{k} = a^{k+\alpha d} \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_{1}$$
$$a^{k} \cdot a^{k} = a^{k} \Rightarrow 2k = k + \alpha d \Rightarrow k = \alpha d$$

M3*37y2019 18.9.2021

Пусть
$$e=a^k, e^2=e, G=eHe$$
 Пример. $i=5, d=3$ $G=\{a^6, a^5, a^7\}.$

G является подгруппой, т.к. оно содержит все элементы цикла и обратное к a^j есть a^{k-j+d}

Отношения

$$X = \mathbb{R}, S = \mathbb{B}(X^2) = \{R \mid R \subseteq X \times X\}$$
$$\rho, \tau \in S \quad R = \rho \circ \tau : xRz \Leftrightarrow \exists y : x\rho y, y\tau z$$

Это определение согласовано с композицией функций.

Подполугруппы S:

- $H_1 = X \rightarrow X функции$
- H_2 отношения эквивалентности не работает, т.к. есть контрпример:

$$X = \{a, b, c\}, \rho = \{(a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}, \tau = \{(b, c), (c, b), (b, b), (a, a), (c, c)\}$$

$$\rho^{-1} := \{ (b, a) \mid (a, b) \in \rho \}$$
$$\rho \circ \rho^{-1} = R \quad \rho^{-1} \circ \rho = L$$

Внешние законы

Рассмотрим плоскость \mathbb{E}^2 и множество трансляций $T=\{\vec{v}\}$. T действует на \mathbb{E}^2 . Добавим в T закон сложения 1 .

Рассмотрим R — множество поворотов плоскости относительно точки P. R тоже действует на \mathbb{E}^2 . Определим композицию в R — последовательное действие поворотов. Обозначим эту композицию "·".

 $\forall \rho \in R, \tau \in T$. Можно делать $\rho(\tau(P))$, можно $\tau(\rho(P))$. Это не одно и то же (пример очевиден). Определим $\hat{\tau}$ как $\rho(\tau) = \hat{\tau}$. Все эти внешние законы согласованы:

$$\rho(\tau(P_0)) = \hat{\tau}(\rho(P_0)) = \hat{\tau}(P_0)$$
$$\rho(\tau_1 + \tau_2) = \rho(\tau_1) + \rho(\tau_2)$$

M3*37y2019 18.9.2021

¹ Обычное сложение векторов.