Интеграл локального потенциального векторного поля по непрерывному пути

Лемма 1 (о гусенице).

- $\gamma : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — *непр.*

Тогда $\exists$ *дробление* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ *и* $\exists$ *шары* $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.

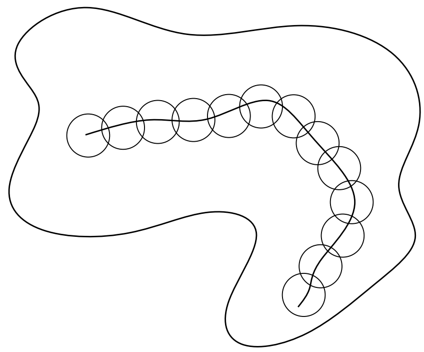

Рис. 1: “Гусеница” — покрытие пути шарами

Доказательство. $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$\overline{\alpha_c} := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$

$\overline{\beta_c} := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо α_c, β_c брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$ — компактно $\implies [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

??? ни один интервал не накрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c)\ \exists d_c$, принадлежащая “только этому” интервалу.

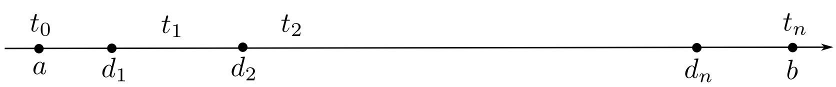

Рис. 2: Выбор точек t_k

Точка t_k выбирается на d_k, d_{k+1} и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+1})$.

$\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$ □

Примечание. $\forall \delta > 0$ мы можем требовать, чтобы все $r_k < \delta$

Примечание. В силу произвольности r_c можно требовать, чтобы шары B_c удовлетворяют некоторому локальному условию.

Например пусть V — локально потенциальное поле в O. Мы можем требовать, чтобы во всех шарах существовал потенциал V. Тогда будем называть $\{B_k\}$ V-гусеницей.

Определение.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ называются похожими *(V-похожими)*, если у них есть общая V-гусеница:

$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b \;\; \exists$ шары $B_k \subset O$:

$$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k, \tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$$

Следствие.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда любой путь V-похож на ломаную:

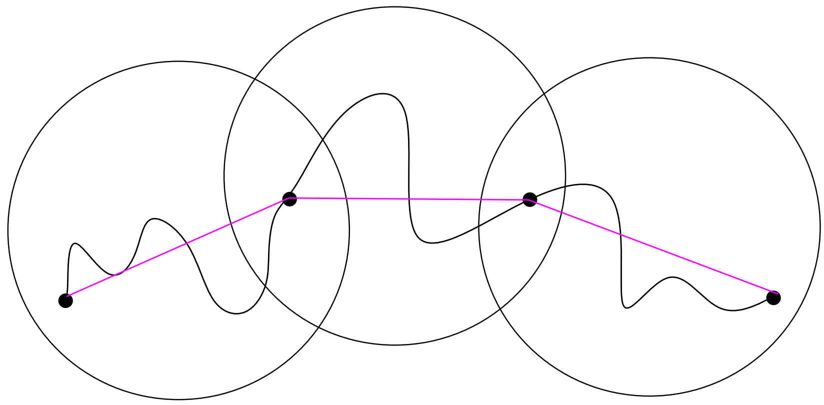

Рис. 3: Построение ломаной *(розовая)* по пути *(чёрный)* с помощью V-гусеницы *(круги)*
.

Лемма 2 (о равенстве интегралов локально-потенциальных векторных путей по похожим путям).

- V — *локально-потенциальное векторное поле в* $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — V*-похожие, кусочно гладкие*
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда $\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Рассмотрим общую V-гусеницу. Пусть f_k — потенциал V в шаре B_k, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \qquad (1) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a))\end{aligned}$$

1: По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde\gamma$ воспользуемся свойством: $f_k\Big|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}\Big|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde\gamma} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde\gamma(b)) - f_1(\tilde\gamma(a))$$

□

Примечание. Вместо условия "$\gamma(a) = \tilde\gamma(a), \gamma(b) = \tilde\gamma(b)$" можно взять условие: $\gamma, \tilde\gamma$ — петли. Тогда утверждение леммы тоже верно.

Лемма 3.

- *$\gamma : [a, b] \to O$ — непр.*
- *V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$*

Тогда $\exists \delta > 0$: если $\tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma} : [a, b] \to O$ таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \ \ |\gamma(t) - \tilde\gamma(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde\gamma}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma}$ V-похожи.

Доказательство. Берём V-гусеницу для γ.

δ_k-окрестность множества $A := \{x : \exists a \in A \ \ \rho(a, x) < \delta\} = \bigcap\limits_{a \in A} B(a, \delta)$

$$\forall k \ \ \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k_1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1} m \, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна $\Rightarrow$ достигается max, $\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

$\delta_k := \frac{r - r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$ □

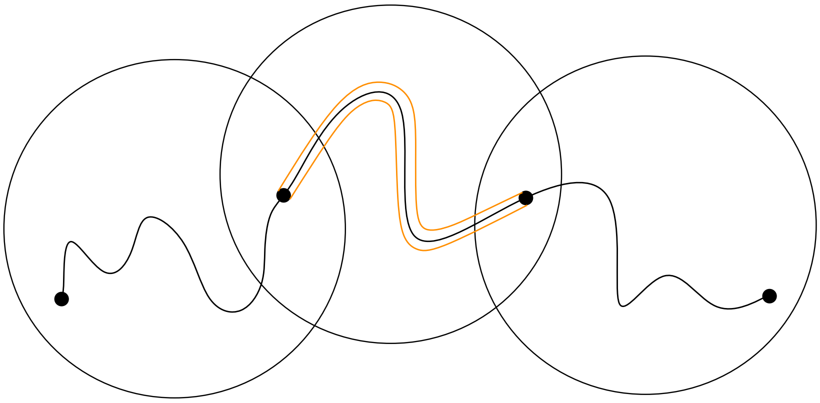

Рис. 4: δ_k-окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

Определение (Интеграл локального потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ). Возьмём $\delta > 0$ из леммы 3.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ-близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t \ \ |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность *(нет произвольности)* следует из лемм 3 и 2