

# Математическая статистика

Михайлов Максим

4 октября 2021 г.

# Оглавление

<b>Лекция 1</b>	<b>6 сентября</b>	<b>3</b>
1	Организационные вопросы . . . . .	3
2	Введение . . . . .	3
2.1	Выборочная функция распределения . . . . .	4
3	Первоначальная обработка статданных . . . . .	5
<b>Лекция 2</b>	<b>13 сентября</b>	<b>7</b>
4	Точечные оценки . . . . .	7
4.1	Свойства статистических оценок . . . . .	7
4.1.1	Состоятельность . . . . .	7
4.1.2	Несмещённость . . . . .	7
4.1.3	Эффективность . . . . .	8
4.2	Точечные оценки моментов . . . . .	8
4.3	Метод моментов . . . . .	11
<b>Лекция 3</b>	<b>20 сентября</b>	<b>13</b>
4.4	Метод максимального правдоподобия . . . . .	13
5	Неравенство Рао-Крамера . . . . .	16
<b>Лекция 4</b>	<b>18 сентября</b>	<b>18</b>
6	Распределения в матстатистике . . . . .	18
6.0	Нормальное распределение . . . . .	18
6.1	Гамма-распределение . . . . .	18
6.2	Распределение “хи-квадрат” . . . . .	19
6.3	Распределение Стьюдента . . . . .	19
6.4	Распределение Фишера-Снедекора . . . . .	19
7	Линейные преобразования нормальных выборок . . . . .	20
7.1	Многомерные нормальные распределения . . . . .	23
<b>Лекция 5</b>	<b>4 октября</b>	<b>25</b>
8	Квантили распределений . . . . .	25
8.1	Квантили основных распределений в Excel . . . . .	25
8.2	Интервальные оценки . . . . .	26
8.2.1	Интервальные оценки для нормального распределения . . . . .	26

# Лекция 1

## 6 сентября

### 1 Организационные вопросы

Большая часть баллов зарабатывается индивидуальными заданиями, выполняемыми в Excel — 30 баллов. Тест с большим числом вопросов — 20 или 25 баллов.

### 2 Введение

Теория вероятности состоит в следующем: исследуется случайная величина с заданным распределением. Математическая статистика занимается обратным — даны данные, нужно приближенно найти числовые характеристики случайной величины и с некоторой уверенностью найти вид распределения. Матстатистика также исследует связанность случайных величин, их корреляцию. В идеале есть цель построить модель, которая по значениям одних случайных величин предсказывает другие.

Пусть проводится некоторое количество экспериментов, в ходе которых появились некоторые данные.

**Определение.** Генеральная совокупность — набор всех исходов проведенных экспериментов.

В реальности наблюдается некоторая выборка генеральной совокупности, ибо рассматривать всю совокупность нецелесообразно.

**Определение.** Выборочная совокупность — исходы наблюдаемых экспериментов.

**Определение.** Выборка называется **репрезентативной**, если её распределение совпадает с распределением генеральной совокупности.

Выборка может быть нерепрезентативной, как в примере с ошибкой выжившего. Мы считаем, что таких ошибок у нас нет и все выборки репрезентативны, ибо исправление

этих ошибок — задача конкретной области, в которой используется матстатистика.

**Определение (после опыта).** Пусть проведено  $n$  наблюдаемых независимых экспериментов, в которых случайная величина приняла значение  $X_1, X_2 \dots X_n$ . Набор<sup>1</sup> этих данных называется **выборкой объема  $n$** .

**Определение (до опыта).** **Выборкой объема  $n$**  называется набор из  $n$  независимых одинаково распределенных случайных величин.

Пусть имеется выборка в смысле “после опыта” объема  $n$ . Её можно интерпретировать как следующую дискретную случайную величину:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} X_i & X_1 & X_2 & \dots & X_n & \sum \\ \hline p_i & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{array}$$

**Средневыборочное:**

$$\bar{X} := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Выборочная дисперсия:**

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

## 2.1 Выборочная функция распределения

$$F_n^*(z) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < z) = \frac{\text{число } X_i \in (-\infty, z)}{n}$$

*Примечание.*  $I$  — индикатор:

$$I(X_i < z) = \begin{cases} 1, & X_i < z \\ 0, & X_i \geq z \end{cases}$$

**Теорема 1.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n^*(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(z)$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\mathbb{E}I(X_1 < z) = 1 \cdot P(X_1 < z) + 0 \cdot P(X_1 \geq z) = P(X_1 < z) = F(z)$$

---

<sup>1</sup> Или вектор.

, где  $F(z)$  — функция распределения  $X_1$ . Заметим, что  $F(z) \leq 1 < \infty$ , следовательно применим ЗБЧ Хинчина:

$$F_n^*(z) = \frac{\sum_{i=1}^n I(X_i < z)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}I(X_1 < z) = F(z)$$

□

*Примечание.* На самом деле имеется даже равномерная сходимость по вероятности — это теорема Гливенко-Кантелли:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n^*(z) - F(z)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

### 3 Первоначальная обработка статданных

Если отсортировать данные, то получим **вариационный ряд**:  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . Если учесть повторяющиеся экземпляры, то получим **частотный вариационный ряд**:

$X_{(i)}$	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	$\dots$	$X_{(k)}$	$\sum$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	$\dots$	$n_k$	$n$
$p_i^*$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\dots$	$\frac{n_k}{n}$	1

**Определение.**  $h := X_{\max} - X_{\min}$  — **размах выборки**

Допустим, что разбили интервал  $(X_{\min}, X_{\max})$  на  $k$  интервалов, чаще всего одинаковой длины.<sup>2</sup> Тогда  $l_i = \frac{h}{k}$  — длина каждого интервала и интервальный ряд можно заменить интервальным вариационным рядом.

$i$	$l_1$	$l_2$	$\dots$	$l_k$	$\sum$
$m_i$	$m_1$	$m_2$	$\dots$	$m_k$	$n$
$\frac{m_i}{n}$	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\dots$	$\frac{m_k}{n}$	1

$m_i$  — число попавших в  $i$ -тый интервал данных.

По такой таблице можно построить **гистограмму**. На координатной плоскости построим прямоугольники с основаниями  $l_i$  и высотами  $\frac{m_i}{nl_i}$ . В результате получаем ступенчатую фигуру площади 1, которая и называется гистограммой.

**Теорема 2.** При  $n \rightarrow \infty, k(n) \rightarrow \infty$ , причем  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$ , гистограмма будет стремиться к плотности распределения:

$$\frac{m_i}{n} \xrightarrow{P} P(X_i \in l_i) = \int_{l_i} f(x) dx$$

<sup>2</sup> Применяются и другие разбиения, например равнонаполненное.

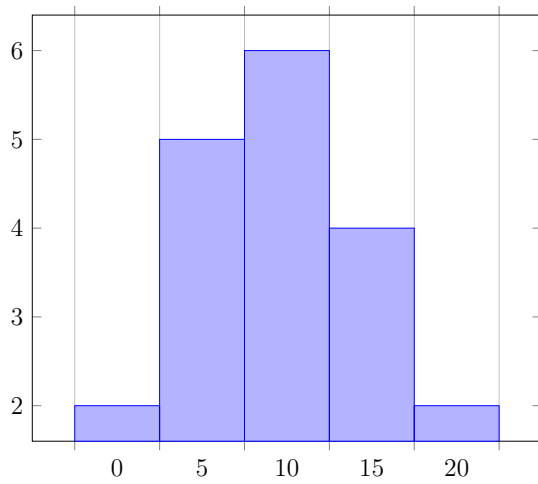


Рис. 1.1: Пример  
гистограммы

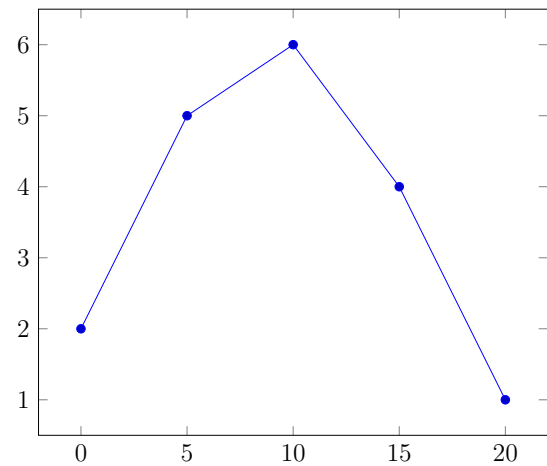


Рис. 1.2: Пример  
полигона

Чаще всего число интервалов берется по формуле Стёрджесса:  $k \approx 1 + \log_2 n$ . Иногда  $k \approx \sqrt[3]{n}$ .

*Примечание.* Иногда выборка изображается в виде **полигона**: отображаются точки, соответствующие серединам интервалов и ставим точки на высоте  $\frac{m_i}{n}$ .

# Лекция 2

## 13 сентября

### 4 Точечные оценки

Пусть имеется выборка объема  $n$ :  $X = (X_1 \dots X_n)$

**Определение.** Статистикой называется измеримая функция  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$ .

Пусть требуется найти значение параметра  $\theta$  случайной величины  $X$  по данной выборке. Оценку будем считать с помощью некоторой статистики  $\theta^*$ .

#### 4.1 Свойства статистических оценок

##### 4.1.1 Состоятельность

**Определение.** Статистика  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$  называется **состоятельной оценкой** параметра  $\theta$ , если:

$$\theta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$$

##### 4.1.2 Несмещённость

**Определение.** Статистика  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$  называется **несмещенной оценкой** параметра  $\theta$ , если

$$\mathbb{E}\theta^* = \theta$$

*Примечание.* То есть с равной вероятностью можем ошибиться как в меньшую, так и в большую сторону. Нет систематической ошибки.

**Определение.** Статистика  $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$  называется **асимптотически несмещенной оценкой** параметра  $\theta$ , если

$$\mathbb{E}\theta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$$

*Примечание.* То есть при достаточно большом объеме выборки ошибка исчезает, но при малом она может существовать.

#### 4.1.3 Эффективность

**Определение.** Оценка  $\theta_1^*$  не хуже оценки  $\theta_2^*$ , если

$$\mathbb{E}(\theta_1^* - \theta)^2 \leq \mathbb{E}(\theta_2^* - \theta)^2$$

или, если оценки несмещенные,

$$\mathbb{D}\theta_1^* \leq \mathbb{D}\theta_2^*$$

**Определение.** Оценка  $\theta^*$  называется **эффективной**, если она не хуже всех остальных оценок.

**Теорема 3.** Не существует эффективной оценки в классе всех возможных оценок.

**Теорема 4.** В классе несмещённых оценок существует эффективная оценка.

## 4.2 Точечные оценки моментов

**Определение.** Выборочным средним  $\overline{X}_B$  называется величина

$$\overline{X}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Определение.** Выборочной дисперсией  $\mathbb{D}_B$  называется величина

$$\mathbb{D}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2$$

**Определение.** Исправленной выборочной дисперсией  $S^2$  называется величина

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \mathbb{D}_B$$

или

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2$$

**Определение.** Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma_B = \sqrt{\mathbb{D}_B}$$



**Определение.** Исправленным выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$S = \sqrt{S^2}$$

**Определение.** Выборочным  $k$ -тым моментом называется величина

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

**Определение.** Модой  $M_0^*$  вариационного ряда называется варианта с наибольшей частотой:

$$M_0^* = X_i : n_i = \max_{1 \leq j < n} n_j$$

**Определение.** Медианой  $M_e^*$  вариационного ряда называется значение варианты в середине ряда:

1. Если  $n = 2k - 1$ , то  $M_e^* = X_k$
2. Если  $n = 2k$ , то  $M_e^* = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$

Величина	Команда в Excel	
	Русский	Английский
$\overline{X_B}$	СРЗНАЧ	AVERAGE
$\mathbb{D}_B$	ДИСПР	VARP
$S^2$	ДИСП	VAR
$\sigma_n$	СТАНДОТКЛОНП	STDEVP
$S$	СТАНДОТКЛОН	STDEV
$M_0^*$	МОДА	MODE
$M_e^*$	МЕДИАНА	MEDIAN

**Теорема 5.** Выборочное среднее  $\overline{X_B}$  является несмещенной состоятельной оценкой для математического ожидания, то есть:

1.  $\mathbb{E}\overline{X_B} = \mathbb{E}X = a$  — несмещенность
2.  $\overline{X_B} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}X$  — состоятельность

*Доказательство.*

1.

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \frac{1}{n} \cdot n\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X$$

2.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}X$$

Это верно по закону больших чисел.

□

**Теорема 6.** Выборочный  $k$ -тый момент является несмещенной состоятельной оценкой для теоретического  $k$ -того момента, то есть:

1.  $\mathbb{E}\bar{X}^k = X^k$
2.  $\bar{X}^k \xrightarrow{P} \mathbb{E}X^k$

*Доказательство.* Следует из предыдущей теоремы, если в качестве случайной величины взять  $X^k$ . □

**Теорема 7.**

- $\mathbb{D}_B$  — смещённая состоятельная оценка дисперсии
- $S^2$  — несмещённая состоятельная оценка дисперсии

*Доказательство.*

$$\mathbb{D}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$$

$$\mathbb{E}\mathbb{D}_B =$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) =$$

$$\mathbb{E}\bar{X}^2 - \mathbb{E}(\bar{X})^2 =$$

$$\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}(\bar{X})^2 =$$

$$\mathbb{D}\bar{X} =$$

$$\mathbb{E}(\bar{X})^2 - (\mathbb{E}\bar{X})^2 =$$

$$\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{D}\bar{X} + (\mathbb{E}\bar{X})^2) =$$

$$\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 - \mathbb{D}\bar{X} =$$

$$(\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2) - \mathbb{D}\bar{X} =$$

$$\mathbb{D}X - \mathbb{D}\bar{X} =$$

$$\mathbb{D}X - \mathbb{D}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) =$$

$$\mathbb{D}X - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i =$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}X - \frac{1}{n^2} \cdot n\mathbb{D}X &= \\
\mathbb{D}X - \frac{1}{n}\mathbb{D}X &= \\
\frac{n-1}{n}\mathbb{D}X &\neq \mathbb{D}X \\
\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}\left(\frac{n}{n-1}\mathbb{D}_B\right) &= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\mathbb{D}X = \mathbb{D}X \\
\mathbb{D}_B = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 &\xrightarrow{P} \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{D}X \\
S^2 = \frac{n}{n-1}\mathbb{D}_B &\xrightarrow{P} \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\rightarrow 1} \mathbb{D}X
\end{aligned}$$

□

*Примечание.*  $\mathbb{D}_B$  — асимптотически несмещённая оценка, т.к. при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ . Таким образом, при большой<sup>1</sup> выборке можно игнорировать смещённость.

### 4.3 Метод моментов

Изобретен Карлом Пирсоном.

Пусть имеется выборка  $(X_1 \dots X_n)$  неизвестного распределения, при этом известен тип<sup>2</sup> распределения. Пусть этот тип определяется  $k$  неизвестными параметрами  $\theta_1 \dots \theta_k$ . Теоретическое распределение задает теоретические  $k$ -тые моменты. Например, если распределение непрерывное, то оно задается плотностью  $f(X, \theta_1 \dots \theta_k)$  и  $m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(x, \theta_1 \dots \theta_k) dx = h_k(\theta_1 \dots \theta_k)$ . Метод моментов состоит в следующем: вычисляем выборочные моменты и подставляем их в эти равенства вместо теоретических. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{X} = h_1(\theta_1 \dots \theta_k) \\ \overline{X^2} = h_2(\theta_1 \dots \theta_k) \\ \vdots \\ \overline{X^k} = h_k(\theta_1 \dots \theta_k) \end{cases}$$

Решив эту систему, мы получим оценки на  $\theta_1 \dots \theta_k$ . Эти оценки будут состоятельными<sup>3</sup>, но смещёнными.

*Пример.* Пусть  $X \in U(a, b)$ ,  $a < b$ . Обработав статданные, получили оценки первого и второго момента:  $\overline{X} = 2.25$ ;  $\overline{X^2} = 6.75$

<sup>1</sup>  $n \geq 100$ , например.

<sup>2</sup> Нормальное, показательное и т.д.

<sup>3</sup> Если не придумывать специально плохие примеры

Решение. Плотность  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$

$$\mathbb{E}X = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \boxed{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$$

$$\begin{cases} 2.25 = \frac{a+b}{2} \\ 6.75 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4.5 \\ a^2 + ab + b^2 = 20.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4.5 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 4.5 \end{cases}$$

□

# Лекция 3

## 20 сентября

### 4.4 Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия состоит в том, чтобы подобрать параметры таким образом, чтобы вероятность получения данной выборки была наибольшей. Если распределение дискретное, то вероятность выборки

$$P_{\theta}(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_n = x_n) = P_{\theta}(X_1 = x_1)P_{\theta}(X_2 = x_2) \dots P_{\theta}(X_n = x_n)$$

Для непрерывной величины аналогично.

Поэтому исследуем такую функцию:

**Определение.** Функцией правдоподобия называется функция  $L(\bar{X}, \theta)$ , зависящая от выборки и неизвестных параметров, равная:

- В случае дискретного распределения:

$$P_{\theta}(X_1 = x_1)P_{\theta}(X_2 = x_2) \dots P_{\theta}(X_n = x_n)$$

- В случае абсолютно непрерывного распределения:

$$f_{\theta}(x_1)f_{\theta}(x_2) \dots f_{\theta}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i)$$

Эту функцию неудобно исследовать, поэтому мы используем следующую функцию:

**Определение.** Логарифмическая функция правдоподобия:

$$M(\bar{X}, \theta) = \ln L(\bar{X}, \theta)$$

Т.к. логарифм — строго возрастающая функция, экстремумы обычной и логарифмической функций правдоподобия совпадают.

**Определение.** Оценкой максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$  называется значение  $\theta$ , при котором функция правдоподобия достигает наибольшего значения.

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка неизвестного распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ :  $X \in \Pi_\lambda, \lambda > 0$

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$L(\bar{X}, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{n \cdot \bar{X}}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\bar{X}, \lambda) = n \cdot \bar{X} \cdot \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i! - n\lambda$$

$$\frac{\partial \ln L(\bar{X}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n \bar{X}}{\lambda} - n$$

Приравняем производную к нулю, чтобы найти точки экстремума:

$$\frac{n \bar{X}}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{X}$$

Таким образом  $\hat{\theta} = \bar{X}$  — ОМП.

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка неизвестного нормального распределения:  $X \in N(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f_{a, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\bar{X}, a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum (x_i-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\bar{X}, a, \sigma^2) = n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - a)^2$$

Не дописано

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка равномерного распределения вида  $U(0, \theta)$

1. Метод моментов.

$$\mathbb{E} = \frac{a+b}{2} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}$$

2. Метод максимального правдоподобия.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta] \\ 0, & x > \theta \end{cases}$$

$$L(\bar{X}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \begin{cases} 0, & \theta < \max x_i = X_{(n)} \\ \frac{1}{\theta^n}, & \theta \geq X_{(n)} \end{cases}$$

$L$  достигает наибольшего значения при  $\theta = X_{(n)}$ .

Сравним полученные оценки.

1.  $\theta^* = 2\bar{X}$  — несмещённая оценка, т.к.  $\mathbb{E}\theta^* = \mathbb{E}2\bar{X} = 2\mathbb{E}\bar{X} = \theta$

$$\mathbb{E}(\theta^* - \theta) = \mathbb{D}(\theta^*) = \mathbb{D}2\bar{X} = 4\frac{1}{n}\mathbb{D}X = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

2. Изучим случайную величину  $X_{(n)}$ . Её функция распределения это

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} < x) = P(X_1 < x) \dots P(X_n < x) = (F_X(x))^n$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{\frac{n}{\theta}}, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X_{(n)} = \int_0^{\theta} x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\theta} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Таким образом, оценка смещённая, но асимптотически несмещённая.

Заменим эту оценку на несмещённую оценку  $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$  — сходятся к  $\theta$  с одинаковой скоростью.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tilde{\theta}^2 &= \\ \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)^2 &= \\ \frac{(n+1)^2}{n^2}\mathbb{E}X_{(n)}^2 &= \\ \frac{(n+1)^2}{n^2} \int_0^{\theta} x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx &= \\ \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^{\theta} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2 \\ \mathbb{D}\tilde{\theta}^2 = \mathbb{E}\tilde{\theta}^2 - \mathbb{E}^2\tilde{\theta} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 \left( \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{n^2 + 2n} \right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

Итак, сравним оценки.

$$\mathbb{D}\tilde{\theta} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n} = \mathbb{D}\theta^*$$

Таким образом, оценка с помощью метода максимального правдоподобия лучше, её дисперсия стремится к нулю со скоростью  $\frac{1}{n^2}$ , а дисперсия первой оценки — со скоростью  $\frac{1}{n}$ .  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$  со скоростью  $\frac{1}{n}$ , а  $\theta^* \rightarrow \theta$  со скоростью  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

*Следствие 7.1.* Оценка математического ожидания  $\bar{X} = 2\theta$  не будет эффективной оценкой, т.к. можно показать, что в данном случае эффективной оценкой будет

$$\mathbb{E}X = \frac{n+1}{n} \cdot \max\{X_1 \dots X_n\}$$

*Примечание.* ОМП состоятельны, часто эффективны, но могут быть смещенными.

## 5 Неравенство Рао-Крамера

Пусть известно, что случайная величина  $X \in \mathcal{F}_\theta$  — семейству распределений с  $\theta$ .

**Определение.** Носителем семейства распределений  $\mathcal{F}_\theta$  называется множество  $C \subset \mathbb{R}$ , такое что  $\forall \theta \ P(X \in C) = 1$ .

*Обозначение.*

$$f_\theta(x) = \begin{cases} f_\theta(x), & \text{если распределение абсолютно непрерывное} \\ P_\theta(X = x), & \text{если распределение дискретное} \end{cases}$$

**Определение.** Информацией Фишера называется величина

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial \theta} \right)^2$$

, если она существует.

**Определение.** Семейство распределений  $\mathcal{F}_\theta$  называется **регулярным**, если:

1. Существует носитель  $C$  семейства  $\mathcal{F}_\theta$ , такой что  $\forall x \in C$  функция  $\ln f_\theta(x)$  непрерывно дифференцируема по  $\theta$ .
2.  $I(\theta)$  существует и непрерывна по  $\theta$ .

**Теорема 8** (неравенство Рао-Крамера). Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка объема  $n$  из регулярного семейства распределений  $\mathcal{F}_\theta$ ,  $\theta^*$  — несмещенная оценка параметра  $\theta$ , дисперсия которой ограничена на любом компакте в области  $\theta$ .

Тогда

$$\mathbb{D}\theta^* \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$



*Следствие 8.1.* Если при условиях выше  $\mathbb{D}\theta^* = \frac{1}{nI(\theta)}$ , то  $\theta^*$  — эффективная оценка. Это не всегда достижимо.

*Пример.* Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка нормального распределения  $N(a, \sigma^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ . Проверим эффективность оценки  $a^* = \bar{X}$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Рассмотрим носитель  $C = \mathbb{R}$ .

$$\ln f(x) = -\ln \sigma - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial a} = \frac{1}{2\sigma^2} 2(x-a) = \frac{x-a}{\sigma}$$

Производная непрерывна по  $a \ \forall a \in \mathbb{R}$

$$I(a) = \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ln f(x)}{\partial a} \right)^2 = \mathbb{E} \left( \frac{x-a}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{D}X = \frac{1}{\sigma^4} \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}$$

Сравним обе части неравенства Рао-Крамера:

$$\mathbb{D}a^* = \mathbb{D}\bar{X} = \frac{1}{n} \mathbb{D}X = \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathbb{D}a^* = \frac{\sigma^2}{n} \stackrel{?}{=} \frac{1}{nI(a)} = \frac{1}{n \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Таким образом, оценка эффективна.

*Примечание.* Исправленная дисперсия  $S^2$  также является эффективной оценкой.

**Определение.** BLUE<sup>1</sup>-оценка — лучшая оценка из оценок вида  $\theta^* = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ .

---

<sup>1</sup> Best linear unbiased estimate.

# Лекция 4

## 18 сентября

### 6 Распределения в матстатистике

#### 6.0 Нормальное распределение

$X \in N(a, \sigma^2)$ :

$$\mathbb{E}X = a, \mathbb{D}X = \sigma$$

$N(0, 1)$  — стандартное нормальное распределение

#### 6.1 Гамма-распределение

$X \in \Gamma_{\alpha, \lambda}$ , если её плотность равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

*Свойства.*

1.  $\mathbb{E}\xi = \frac{\lambda}{\alpha}, \mathbb{D}\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$
2. Если  $\xi_1 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1}, \xi_2 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_2}$ , то  $\xi_1 + \xi_2 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1 + \lambda_2}$
3.  $\Gamma_{\alpha, 1} = E_\alpha$  — показательное распределение.
4. Если  $X_i \in E_\alpha$ , то  $\sum_{i=1}^n X_i \in \Gamma_{\alpha, n}$
5. Если  $X \in N(0, 1)$ , то  $X^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$

*Примечание.* Гамма-распределение возникает в матстатистике как распределение квадрата стандартно нормально распределенной величины. Обобщим эту идею:

## 6.2 Распределение “хи-квадрат”

**Определение.** Распределение хи-квадрат с  $k$  степенями свободы называется распределение суммы  $k$  квадратов независимых стандартных нормальных величин.

$$\chi_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2, \quad X_i \in N(0, 1)$$

**Обозначение.**  $\chi^2 \in H_k$

**Свойства.**

1.  $\chi_k^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{k}{2}}$
2.  $\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2$  — по определению
3.  $\mathbb{E}\chi_k^2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} = k, \mathbb{D}\chi_k^2 = \frac{\lambda}{\alpha^2} = \frac{\frac{k}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2k$

## 6.3 Распределение Стьюдента

**Определение.** Пусть случайные величины  $X_0, X_1 \dots X_k$  — независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределением Стьюдента с  $k$  степеней свободы называется распределение случайной величины

$$t_k = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k}(X_1^2 + \dots + X_k^2)}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi_k^2}}$$

**Свойства.**

1.  $\mathbb{E}t_k = 0$
2.  $\mathbb{D}t_k = \frac{k}{k-2}$

## 6.4 Распределение Фишера-Снедекора

**Определение.** Распределение  $F_{m,n}$  называется распределением Фишера-Снедекора (или ***F-распределением***) со степенями свободы  $m$  и  $n$  называется распределение случайной величины

$$f_{m,n} = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$$

, где  $\chi_n^2$  и  $\chi_m^2$  — независимые случайные величины с распределением  $\chi^2$ .

**Свойства.**

1.  $\mathbb{E}f_{m,n} = \frac{n}{n-2}$
2.  $\mathbb{D}f_{m,n} = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

$$3. F_{m,n}(x) = P(f_{m,n} < X) = P\left(\frac{1}{f_{m,n}} > \frac{1}{X}\right) = P\left(f_{m,n} > \frac{1}{X}\right) = 1 - F_{n,m}\left(\frac{1}{X}\right)$$

При  $n, k, m \rightarrow \infty$  эти распределения слабо сходятся к нормальному. При  $n > 30$  они достаточно близки.

## 7 Линейные преобразования нормальных выборок

Пусть  $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ , где  $X_i \in N(0, 1)$  и независимы. Будем рассматривать линейные комбинации этого вектора. Пусть  $A$  — невырожденная матрица размера  $n \times n$ . Рассмотрим случайный вектор  $\vec{Y} = A\vec{X}$ , где координаты случайного вектора  $Y_i = a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n$ . Будем исследовать, что из себя представляют  $Y_i$  и их совместное распределение.

*Примечание.* Если  $\eta = a\xi + b$ , то  $f_\eta(\xi) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{\xi-b}{a}\right)$

**Теорема 9.** Пусть случайный вектор  $\vec{X}$  имеет плотность распределения  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$  и  $A$  невырожденная матрица.

Тогда случайный вектор  $\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$  имеет плотность

$$f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_{\vec{X}}(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))$$

*Примечание.*  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$  — плотность  $\vec{X}$ , если  $P(\vec{x} \in B) = \int \dots \int_B f_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} P(\vec{y} \in B) &= P(A\vec{x} + \vec{b} \in B) \\ &= P(\vec{x} \in A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \\ &= \int \dots \int_{A^{-1}(B - \vec{b})} f_{\vec{x}}(x) d\vec{x} \end{aligned}$$

Сделаем замену  $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$ . Тогда  $A^{-1}(B - \vec{b})$  перейдёт в  $B$ ,  $\vec{x}$  перейдёт в  $A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$ ,  $\vec{y} \in B$ ,  $d\vec{x}$  перейдёт  $|J|d\vec{y}$ , где  $J = |A^{-1}| = |A|^{-1}$

Итого:

$$= \int \dots \int_B f(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})) \cdot \frac{1}{|\det A|} d\vec{y} \Rightarrow f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \frac{1}{|\det A|} f_{\vec{X}}(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))$$

□

**Определение.**  $A = C$  — ортогональна, т.е.  $C^T = C^{-1}$ ,  $|\det C| = 1$

**Теорема 10.** Пусть дан случайный вектор  $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ , где  $\forall i \ X_i \in N(0, 1)$  и  $X_i$  независимы, а  $C$  — ортогональная матрица.

Тогда координаты случайного вектора  $\vec{Y} = C\vec{X}$  независимы и также имеют стандартное нормальное распределение.

*Доказательство.* Т.к. координаты  $X_i \in N(0, 1)$  и независимы, то плотность  $\vec{X}$ :

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{X}\|^2}$$

По предыдущей теореме:

$$f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = f_{\vec{X}}(C^T \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|C^T \vec{y}\|^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{y}\|^2} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} = \prod_{i=1}^n f_i(y_i)$$

Следовательно,  $Y_i \in N(0, 1)$  и независимы.  $\square$

**Лемма 1 (Фишера).** Пусть случайный вектор  $\vec{X}$  состоит из независимых стандартных нормальных случайных величин,  $\vec{Y} = C\vec{X}$ , где  $C$  — ортогональная матрица. Тогда  $\forall k : 1 \leq k \leq n - 1$  случайная величина

$$T(\vec{X}) = \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - Y_1^2 - \dots - Y_k^2$$

не зависит от случайного вектора  $Y_1 \dots Y_k$  и имеет распределение  $H_{n-k}$

*Доказательство.* Т.к.  $C$  ортогональна:

$$\|\vec{Y}\|^2 = \|C\vec{X}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 = Y_1^2 + \dots + Y_n^2$$

Отсюда

$$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 - \dots - Y_k^2 = Y_{k+1}^2 + \dots + Y_n^2$$

$Y_{k+1} \dots Y_n$  — независимы, имеют стандартное нормальное распределение и  $T(\vec{X}) \in H_{n-k}$

$T(\vec{X})$  не зависит от  $Y_1 \dots Y_k$ , т.к.  $Y_{k+1} \dots Y_n$  по предыдущей лемме от них не зависят.  $\square$

**Теорема 11 (основная).**

- $X_1 \dots X_k$  независимы и имеют нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$
- $\bar{X}$  — выборочное среднее

- $S^2$  — исправленное выборочное среднее

Тогда имеют место следующие распределения:

1.

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \in N(0, 1)$$

2.

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$$

3.

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} \in H_n$$

4.

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{S} \in T_{n-1}$$

5.  $\bar{X}$  и  $S^2$  — независимые случайные величины

*Доказательство.*

1.

$$X_i \in N(a, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \in N(na, n\sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \in N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - a) \in N(0, 1)$$

2. Верно, т.к.  $\frac{X_i - a}{\sigma} \in N(0, 1)$

3.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - a}{\sigma} - \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \end{aligned}$$

, где

$$z_i = \frac{X_i - a}{\sigma} \in N(0, 1), \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} = \frac{\sum x_i - na}{\sigma n} = \frac{\bar{X} - a}{\sigma}$$

Поэтому можем считать, что  $X_i \in N(0, 1)$ . Применим лемму Фишера.

$$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = n(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - Y_1$$

, где

$$Y_1 = n(\bar{X})^2 = \sqrt{n\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}}X_1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}X_n$$

Так как длина строки  $\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}$  равна 1, поэтому эту строку можем дополнить до ортогональной матрицы  $C$ . Тогда  $Y_1$  — первая координата случайного вектора  $\vec{Y} = C\vec{X}$  и по лемме Фишера  $T(\vec{X}) \in H_{n-1}$

5.  $T(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  не зависит от  $Y_1 = \sqrt{n\bar{X}} \Rightarrow S^2$  и  $\bar{X}$  независимы.

4.

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}}} = \frac{X_0}{\sqrt{\chi_{n-1}^2(n-1)}} \in T_{n-1}, \text{ т.к.:}$$

$X_0 \in N(0, 1)$  по пункту 1,  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$  по пункту 3 и  $X_0$  не зависит от  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  по пункту 5.

□

*Примечание.* Эта часть была рассказана на пратике 29 сентября.

## 7.1 Многомерные нормальные распределения

**Определение.** Пусть случайный вектор  $\vec{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n)$  имеет в средних  $\vec{a} = (\mathbb{E}\xi_1 \dots \mathbb{E}\xi_n)$ ,  $K$  — симметричная положительно определенная метрица.

Вектор  $\vec{\xi}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$  и  $K$ , если его плотность:

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}((\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a}))}$$

*Примечание.*  $(\vec{x} - \vec{a})^T K^{-1}(\vec{x} - \vec{a})$  — положительно определенная квадратичная форма от  $(x_1 \dots x_n)$

*Свойства.*

1. Пусть  $\vec{\eta}$  состоит из независимых стандартных нормальных величин,  $B$  — невырожденная матрица. Тогда  $\vec{\xi} = B\vec{\eta} + \vec{a}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$ ,  $K = B^T B$
2. Пусть  $\vec{\xi}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$  и  $K$ . Тогда  $\vec{\eta} = B^{-1}(\vec{\xi} - \vec{a})$ , где  $B = \sqrt{K}$ <sup>1</sup>, состоит из независимых стандартных нормальных величин.
3.  $K = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

<sup>1</sup>  $B$  существует по задаче 3 из 4-ой практики.

4. Пусть  $\vec{\xi}$  имеет многомерное нормальное распределение с параметрами  $\vec{a}$  и  $K$ . Координаты  $\vec{\xi}$  независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы, т.е.  $K$  — диагональная.

*Следствие 11.1.* Если  $\xi, \eta$  — нормальные случайные величины и вектор  $(\xi, \eta)$  имеет ненулевую плотность, то  $\xi$  и  $\eta$  независимы тогда и только тогда, когда они не коррелированы, т.е.  $r_{\xi, \eta} = 0$ .

**Теорема 12** (многомерная центральная предельная теорема). Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных векторов слабо сходится к многомерному нормальному распределению.



# Лекция 5

## 4 октября

### 8 Квантили распределений

Для простоты предполагаем, что все распределения непрерывные.

**Определение (1).** Число  $t_\gamma$  называется квантилем<sup>1</sup> уровня  $\gamma$ , если  $F(t_\gamma) = \gamma$ .

С точки зрения геометрии  $P(X \in \text{область слева от } t_\gamma) = \gamma$ .

*Примечание.*

- Медиана — квантиль уровня  $\frac{1}{2}$
- Квартили — квантили уровня  $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$
- Децили — квантили уровня  $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots$

*Примечание.* Квантиль  $t_\gamma$  — значение обратной функции распределения:  $t_\gamma = F^{-1}(\gamma)$

**Определение (2 (альтернативное)).** Число  $t_\alpha$  называется квантилем уровня значимости  $\alpha$ , если  $F(t_\alpha) = 1 - \alpha$ .

*Примечание.*  $\alpha = 1 - \gamma$

#### 8.1 Квантили основных распределений в Excel

1. НОРМ.СТ.ОБР.

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Тогда НОРМ.СТ.ОБР. $(x+0.5)$  — обратная функция функции Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

---

<sup>1</sup> Или квантилью.

2. (a) СТЬЮДЕНТ.ОБР. — обратная к функции распределения Стьюдента стандартной величины.

$$t_k = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{k} \chi_k^2}}$$

- (b) СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X

Возвращает  $t_\alpha$ , такое что  $P(|X| > t_\alpha) = \alpha$ . Отсюда  $P(|X| < t_\alpha) = 1 - \alpha$  и применяем СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X( $1 - \alpha, k$ )

3. (a) ХИ2.ОБР. — возвращает квантиль  $t_\gamma$  в первом смысле для распределения  $\chi^2$ .  
 (b) ХИ2.ОБР.ПХ — возвращает квантиль  $t_\alpha$
4. (a) F.ОБР. — возвращает квантиль  $t_\gamma$  F-распределения  
 (b) F.ОБР.ПХ — возвращает квантиль  $t_\alpha$  F-распределения

## 8.2 Интервальные оценки

Недостаток точных оценок в том, что мы не знаем, насколько точная наша оценка.

Пусть требуется дать оценку неизвестного параметра  $\theta$ .

**Определение.** Интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$  называется **доверительным интервалом** для параметра  $\theta$  надежности  $\gamma$ , если  $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) = \gamma$

*Примечание.* Если  $\theta$  — параметр дискретного распределения, то будет правильней написать  $P(\theta_\gamma^- < \theta < \theta_\gamma^+) \geq \gamma$ .

*Примечание.* Здесь случайные величины — интервальные оценки, а не  $\theta$ . Поэтому более культурно говорить так: интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$  накрывает неизвестный параметр  $\theta$  с вероятностью  $\gamma$ .<sup>2</sup>

*Примечание.* В экономике  $\gamma$  берется 0.95, но можно брать и меньше — 0.9. Для чего-либо важного берется 0.99 или даже 0.999. Уровень надёжности выбирается в зависимости от решаемой задачи. Стандартные уровни: 0.9, 0.95, 0.99, 0.999.

### 8.2.1 Интервальные оценки для нормального распределения

Пусть  $X = (X_1 \dots X_n)$  из  $N(a, \sigma^2)$ .

1. Доверительный интервал для параметра  $a$  при известном значении параметра  $\sigma^2$ .

По пункту 1 теоремы 11:

$$P\left(-t_\gamma < \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} < t_\gamma\right) = P\left(\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma}\right| < t_\gamma\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma$$

<sup>2</sup> А не “ $\theta$  попадает в интервал  $(\theta_\gamma^-, \theta_\gamma^+)$  с вероятностью  $\gamma$ ”

, где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ . Тогда  $t_\gamma$  — значение обратной к  $\Phi$  в точке  $\frac{\gamma}{2}$ . ???

Осталось решить неравенство относительно  $a$ .

$$\begin{aligned} -t_\gamma &< \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{\sigma} < t_\gamma \\ -t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &< a - \bar{X} < t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &< a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Итак получили доверительный интервал для параметра  $a$ :  $\left(\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

2. Доверительный интервал для параметра  $a$  при неизвестном значении параметра  $\sigma^2$ .

По пункту 4 теоремы 11:

$$P\left(-t_\gamma < \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{S} < t_\gamma\right) = P\left(\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S}\right| < t_\gamma\right) = 2F_{T_{n-1}}(t_\gamma) - 1 = \gamma$$

$F_{T_{n-1}}(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$ , т.е.  $t_\gamma$  — квантиль распределения Стьюдента  $T_{n-1}$  уровня  $\frac{1+\gamma}{2}$ .

Примечание. Если  $\xi$  — симметрично, то  $P(|\xi| < t) = 2F(t) - 1$

Доказательство.

$$P(|\xi| < t) = 2P(0 < \xi < t) = 2(F(t) - F(0)) = 2F(t) - 1$$

□

$$\begin{aligned} -t_\gamma &< \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a}{S} < t_\gamma \\ \bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} &< a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

3. Доверительный интервал для параметра  $\sigma^2$  при ???.

По пункту 2 теоремы 11  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}$ . Пусть  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили распределения  $H_{n-1}$  уровней  $1 - \frac{\gamma}{2}$  и  $1 + \frac{\gamma}{2}$ . Тогда:

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = F_{H_{n-1}}(\chi_2^2) - F_{H_{n-1}}(\chi_1^2) = \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) - \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma$$

$$\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$$

$$\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \frac{1}{\chi_1^2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}$$

Итак, доверительный интервал для параметра  $\sigma^2$  надежности  $\gamma$  есть  $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right)$ , где  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили уровней  $1 - \frac{\gamma}{2}$  и  $1 + \frac{\gamma}{2}$ . Следовательно, доверительный интервал для  $\sigma$  это  $\left(\frac{\sqrt{(n-1)S}}{\chi_2}, \frac{\sqrt{(n-1)S}}{\chi_1}\right)$ .

Этот интервал почти всегда не симметричен, можно его сделать симметричным, но мы этого делать не будем.

#### 4. Доверительный интервал для параметра $\sigma^2$ при известном параметре $\sigma^{2*}$

По пункту 3 теоремы  $\frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} \in H_n$ , где  $\sigma^{2*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$ . Пусть  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили распределения  $H_n$  уровней  $1 - \frac{\gamma}{2}$  и  $1 + \frac{\gamma}{2}$  соответственно.

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = F_{H_n}(\chi_2^2) - F_{H_n}(\chi_1^2) = \gamma$$

$$\chi_1^2 < \frac{n\sigma^{2*}}{\sigma^2} < \chi_2^2$$

$$\frac{n\sigma^{2*}}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{n\sigma^{2*}}{\chi_1^2}$$

Итак, доверительный интервал для  $\sigma^2$  надежности  $\gamma$  это  $\left(\frac{n\sigma^{2*}}{\chi_2^2}, \frac{n\sigma^{2*}}{\chi_1^2}\right)$ , где  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  — квантили  $H_n$  уровней  $1 - \frac{\gamma}{2}$  и  $1 + \frac{\gamma}{2}$ ,  $\sigma^{2*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$ .

Для других распределений при малых объемах выборки нужно выводить формулы для каждой задачи. При больших объемах благодаря ЦПТ можно делать вид, что распределение нормальное.

*Пример.*  $X \in N(a, \sigma^2)$ , причём известно, что  $\sigma = 3$ . В результате обработки выборки объема  $n = 36$  нашли  $\bar{X} = 4.1$ . Найти доверительный интервал параметра  $a$  надежности  $\gamma = 0.95$ .

*Решение.*  $t_\gamma : 2\Phi(t_\gamma) = 0.95, \Phi(t_\gamma) = 0.475, t_\gamma = 1.96$

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$4.1 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} < a < 4.1 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$4.1 - 0.98 < a < 4.1 + 0.98$$

$$3.12 < a < 5.08$$

Ответ: (3.12, 5.08)

□

*Пример.*  $X \in N(a, \sigma^2)$ . В результате обработки выборки объема  $n = 25$  нашли  $\bar{X} = 42.32$ ,  $S = 6.4$ . Найти доверительный интервал надежности  $\gamma = 0.95$ .

*Решение.* По таблице двустороннего распределения Стьюдента  $T_{n-1}$   $t_\gamma = 2.064$

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$42.32 - 2.064 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{25}} < a < 42.32 + 2.064 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{25}}$$

$$42.32 - 2.642 < a < 42.32 + 2.642$$

$$39.678 < a < 44.962$$

Ответ: (39.678, 44.962)

□