1 $y'''' + y'' = 7x - 3\cos x$

Найдем решение частного уравнения $y'''' + y'' = 0$

$$\begin{gathered}
y'''' + y'' = 0 \\
\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \\
\left[\begin{array}{l}\lambda = 0 \\ \lambda = \pm i\end{array}\right. \\
y = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + C_4 \cos x
\end{gathered}$$

Особое решение уравнения это сумма особых решений уравнений с $7x$ и $-3\cos x$.

Для $7x$ решение $x^2(D_1 + D_2 x)$, для $-3\cos x$ решение $x(D_3 \cos x + D_4 \sin x)$. Тогда частное решение имеет вид $x^2(D_1 + D_2 x) + x(D_3 \cos x + D_4 \sin x)$, где D_i — константа. Найдем их.

$$\begin{aligned}
y &= x^2(D_1 + D_2 x) + x(D_3 \cos x + D_4 \sin x) \\
y' &= 2xD_1 + 3x^2 D_2 + D_3 \cos x + D_4 \sin x - xD_3 \sin x + xD_4 \cos x \\
y'' &= 2D_1 + 6xD_2 - D_3 \sin x + D_4 \cos x - D_3 \sin x + D_4 \cos x - xD_3 \cos x - xD_4 \sin x \\
&= 2D_1 + 6xD_2 - 2D_3 \sin x + 2D_4 \cos x - xD_3 \cos x - xD_4 \sin x \\
y''' &= 6D_2 - 2D_3 \cos x - 2D_4 \sin x - D_3 \cos x - D_4 \sin x + xD_3 \sin x - xD_4 \cos x \\
y'''' &= 2D_3 \sin x - 2D_4 \cos x + D_3 \sin x - D_4 \cos x + D_3 \sin x - D_4 \cos x + xD_3 \cos x + xD_4 \sin x \\
&= 4D_3 \sin x - 4D_4 \cos x + xD_3 \cos x + xD_4 \sin x
\end{aligned}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\begin{gathered}
2D_1 + 6xD_2 - 2D_3 \sin x + 2D_4 \cos x - xD_3 \cos x - xD_4 \sin x \\
+4D_3 \sin x - 4D_4 \cos x + xD_3 \cos x + xD_4 \sin x = 7x - 3\cos x \\
2D_1 + 6xD_2 + 2D_3 \sin x - 2D_4 \cos x = 7x - 3\cos x
\end{gathered}$$

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = \frac{7}{6} \\ D_3 = 0 \\ D_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Итого особое решение:

$$y = \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\sin x$$

Прибавим к общему и получим ответ:

$$y = C_1 + C_2x + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x\sin x$$

2 $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

Найдем решение частного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\\ \lambda &= -1\\ y &= C_1e^{-x} + C_2e^{-x}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-x}x \\ (e^{-x})' & (xe^{-x})' \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-x}x \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix}\\ &= e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x}\\ &= e^{-2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= -\int \frac{3e^{-x}\sqrt{x+1}e^{-x}}{W}dx\\ &= -\int \frac{3e^{-x}\sqrt{x+1}e^{-x}}{e^{-2x}}dx\\ &= -\int 3\sqrt{x+1}\\ &= -2\sqrt{x+1}^3\end{aligned}$$

$$y_2 = \int \frac{3e^{-x}\sqrt{x+1}xe^{-x}}{W}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{3e^{-x}\sqrt{x+1}xe^{-x}}{e^{-2x}}dx \\
&= \int 3x\sqrt{x+1} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^3(3x-2)
\end{aligned}
$$

Тогда особое решение это

$$y_1xe^{-x}+y_2e^{-x} = -2\sqrt{x+1}^3xe^{-x}+\frac{2}{5}\sqrt{x+1}^3(3x-2)e^{-x} = 2\sqrt{x+1}^3e^{-x}\left(-x+\frac{2}{5}(3x-2)\right)$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{x+1}^5e^{-x}$$

И итоговое решение:

$$\frac{4}{5}\sqrt{x+1}^5e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2e^{-x}x$$

3 Запишите общее решение, используя вещественный базис: $x' = x - y - z, y' = x + y, z' = 3x + z$

$$
\begin{cases}
x' = x - y - z \\
y' = x + y \\
z' = 3x + z
\end{cases}
$$

Матрица системы:

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
1-\lambda & -1 & -1 \\
1 & 1-\lambda & 0 \\
3 & 0 & 1-\lambda
\end{vmatrix}
&= 1 - \lambda + (1-\lambda)((1-\lambda)^2+3) \\
&= 1 - \lambda + (1-\lambda)(4+\lambda^2-2\lambda) \\
&= 1 - \lambda + 4 + \lambda^2 - 2\lambda - 4\lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2 \\
&= 5 - 7\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{aligned}
&\lambda = 1 \\
&\lambda = 1 \pm 2i
\end{aligned}
\right.
$$

$$\sphericalangle \lambda = 1 \quad f_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\sphericalangle \lambda = 1 \pm 2i \quad f_{(2,3)} = \begin{pmatrix} \pm 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы набрали базис:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 e^t (\cos 2t - i \sin 2t) \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (C_2 e^t (\cos 2t + i \sin 2t) + C_3 e^t (\cos 2t - i \sin 2t)) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (C_2 e^t (\cos 2t + i \sin 2t) - C_3 e^t (\cos 2t - i \sin 2t)) \\
&= C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4 Решить систему: $x' = y - 5\cos t, y' = 2x + y$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \ddot{y} = 2\dot{x} + \dot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \ddot{y} = 2y - 10\cos t + \dot{y} \end{cases}$$

Решим $\ddot{y} = 2y - 10\cos t + \dot{y}$.

Найдем решение частного уравнения $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\lambda = 2 \\ &\lambda = -1 \end{aligned}\right. \qquad y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

Пусть $C_1 = Z_1(t), C_2 = Z_2(t)$.

$$\begin{cases} Z_1'(t)e^{-t} + Z_2'(t)e^{2t} = 0 \\ -Z_1'(t)e^{-t} + 2Z_2'(t)e^{2t} = -10\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1'(t)e^{-t} + Z_2'(t)e^{2t} = 0 \\ 3Z_2'(t)e^{2t} = -10\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1'(t)e^{-t} + Z_2'(t)e^{2t} = 0 \\ 3Z_2'(t)e^{2t} = -10\cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Z_2'(t) &= -\frac{10}{3}\cos t e^{-2t} \\ Z_2(t) &= -\frac{10}{3}\int \cos t e^{-2t} dt \\ &= -\frac{2}{3}e^{-2t}(\sin t - 2\cos t) + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1'(t)e^{-t} &= -Z_2'(t)e^{2t} \\ &= \frac{10}{3}\cos t e^{t} \\ Z_1(t) &= \frac{5}{3}e^{t}(\sin t + \cos t) + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= Z_1 e^{-t} + Z_2 e^{2t} \\ &= \left(\frac{5}{3}e^{t}(\sin t + \cos t) + C_2\right)e^{-t} + \left(-\frac{2}{3}e^{-2t}(\sin t - 2\cos t) + C_1\right)e^{2t} \\ &= e^{-t}C_2 + C_1 e^{2t} + \frac{5}{3}(\sin t + \cos t) - \frac{2}{3}(\sin t - 2\cos t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-t}C_2 + C_1e^{2t} + \sin t + 3\cos t \\
y' &= -e^{-t}C_2 + 2C_1e^{2t} + \cos t - 3\sin t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} = 2x + y \\
&x = \frac{\dot{y} - y}{2} \\
&\quad = \frac{-e^{-t}C_2 + 2C_1e^{2t} + \cos t - 3\sin t - e^{-t}C_2 - C_1e^{2t} - \sin t - 3\cos t}{2} \\
&\quad = \frac{-2e^{-t}C_2 + C_1e^{2t} - 4\sin t - 2\cos t}{2} \\
&\quad = -e^{-t}C_2 + \frac{C_1}{2}e^{2t} - 2\sin t - \cos t
\end{aligned}
$$

Ответ:

$$
\begin{cases} x = -e^{-t}C_2 + \frac{C_1}{2}e^{2t} - 2\sin t - \cos t \\ y = e^{-t}C_2 + C_1e^{2t} + \sin t + 3\cos t \end{cases}
$$

5

6 Сделайте эскиз фазового портрета в окрестностях особых точек

$$
\begin{cases} \dot{x} = y + x - 4 \\ \dot{y} = 3y - x \end{cases}
$$

Найдем особые точки.

$$
\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} y + x - 4 = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}
$$

Перейдем в систему координат, в которой в уравнениях нет свободного члена:

$$\tilde{x} := x + 3, \tilde{y} := y + 1$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{y} + \tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} = 3\tilde{y} - \tilde{x} \end{cases}$$

Тогда уравнения описываются матрицей A:

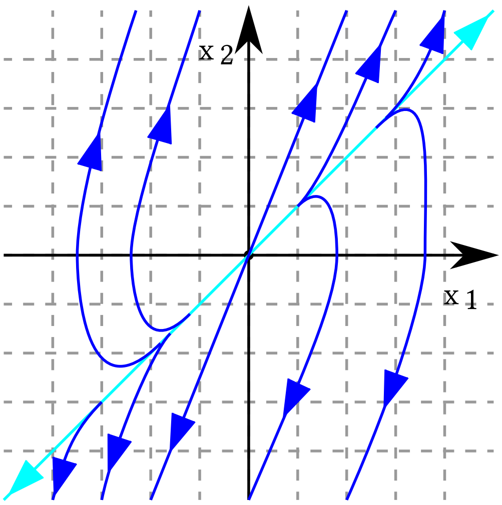
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем её собственные значения.

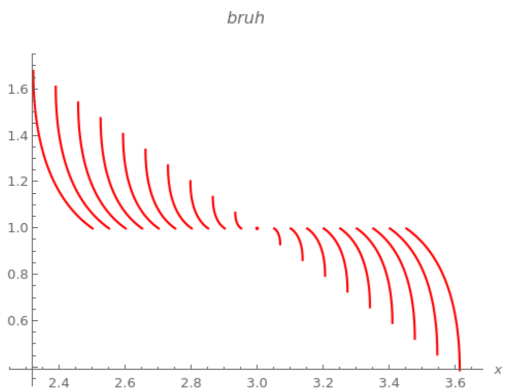
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 4 + \lambda^2 - 4\lambda$$

$$\lambda = 2$$

Собственные значения положительные действительные, поэтому рассматриваемая точка — неустойчивый узел и фазовый портрет выглядит так:



(a) Фазовый портрет согласно википедии



(b) Часть фазового портрета в матлабе