1

Вывести уравнение движения маятника без сопротивления. Для случая, когда все постоянные равны 1, начертить траектории на фазовой плоскости. Дать физическое истолкование траекториям различных типов.

Обозначения:

- m — масса маятника
- l — длина маятника
- θ — угол наклона маятника

Рассмотрим ось x, которая сонаправлена с вектором скорости конца маятника *(в разные моменты времени оси разные)*. Тогда сила, действующая со стороны нити в проекции на эту ось имеет значение 0. Таким образом, по вторму закону Ньютона:

$$-mg\sin\theta = m\ddot{x}$$

$$-g\sin\theta = \ddot{x}$$

Т.к. длина дуги $= l\theta$:

$$-g\sin\theta = l\ddot{\theta}$$

Сведем к дифференциальному уравнению первого порядка, пусть $a(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a \\ l\dot{a} = -g\sin\theta \end{cases}$$

Т.к. все постоянные равны 1:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a \\ \dot{a} = -\sin\theta \end{cases}$$

Найдем особые точки:

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = -\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ \theta = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Рассмотрим малые колебания маятника, т.е. $\sin\theta \sim \begin{cases} \theta - \pi n, & n \equiv 0 \mod 2 \\ -\theta + \pi n, & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$, где $\theta \approx \pi n$

Пусть $\wp(\theta) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 2 \\ -1, & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot\theta = a \\ \dot a = -\wp(\theta)(\theta - \pi n) \end{cases}$$

Это линейное уравнение с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\wp(\theta) & 0 \end{pmatrix}$

При $\wp = -1$ собственные значения ± 1 и точка седловая, при $wp = 1$ собственные значения $\pm i$ и точка — центр.

Анализ не малых колебаний маятника очевиден из физики — если совершен хотя бы он оборот, то маятник без сопротивления продолжит в эту сторону вращаться без изменений.

Если колебания не малые (θ' примерно > 2), то маятник делает обороты в одну сторону без остановки. Некоторые траектории ведут в точки вида $\theta = \pi(2n+1), \theta' = 0$ и оттуда не выходят, т.е. маятник останавливается в верхнем положении и из него не сдвигается *(состояние нестабильного покоя)*. Остальные траектории периодичны — маятник колеблется сначала в одну сторону, потом в другую.

2

Вывести уравнение движения маятника с сопротивлением пропорциональным квадрату скорости. Дать чертёж траекторий.

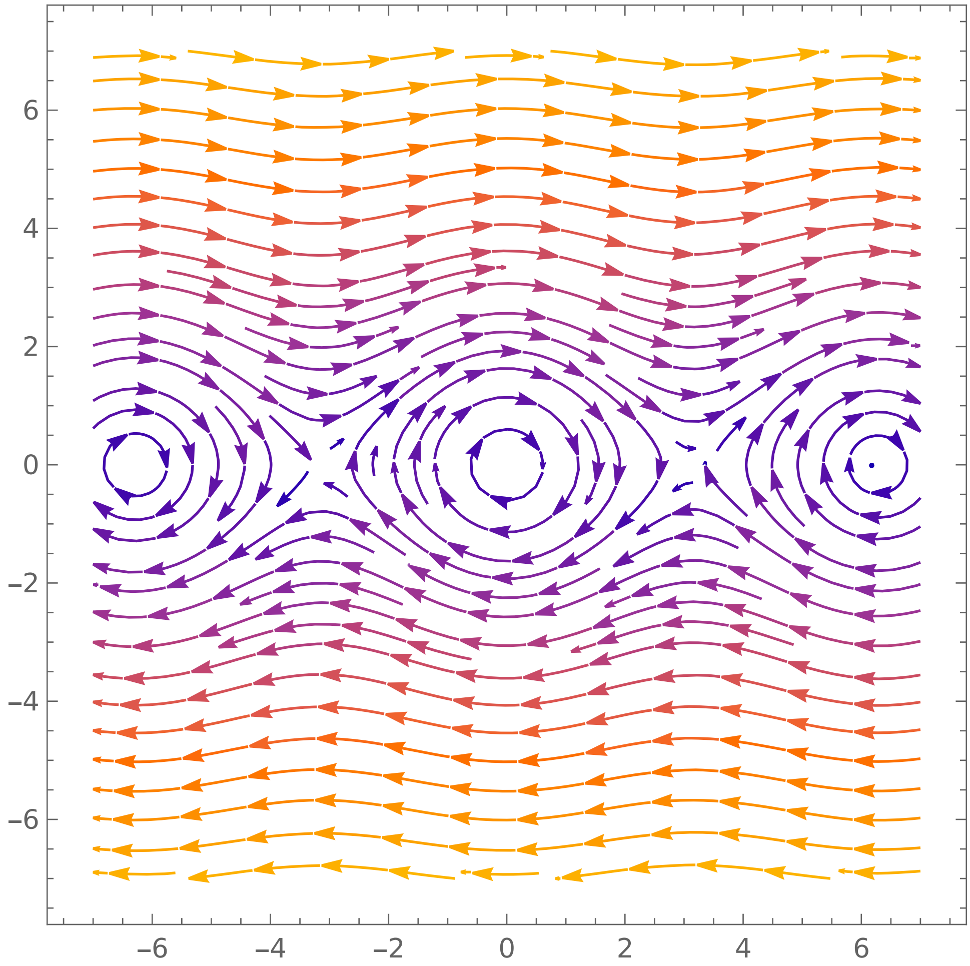
Аналогично предыдущему заданию:

$$-mg\sin\theta - k\dot x^2 \cdot \operatorname{sign}\dot x = m\ddot x$$
$$-mg\sin\theta - kl^2\dot\theta^2 \cdot \operatorname{sign}\dot\theta = ml\ddot\theta$$
$$-mg\sin\theta - kl^2\dot\theta|\dot\theta| = ml\ddot\theta$$

Сведем к дифференциальному уравнению первого порядка, пусть $a(t) = \dot\theta(t)$

$$\begin{cases} \dot\theta = a \\ ml\dot a = -mg\sin\theta - kl^2 a|a| \end{cases}$$

Найдем особые точки:



$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = -mg\sin\theta - kl^2\dot{a}|a| \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = -mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a \\ \theta = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Рассмотрим малые колебания маятника, т.е. $\sin\theta \sim \begin{cases} \theta - \pi n, & n \equiv 0 \mod 2 \\ -\theta + \pi n, & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$, где $\theta \approx \pi n$

Пусть $\wp(\theta) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 2 \\ -1, & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$

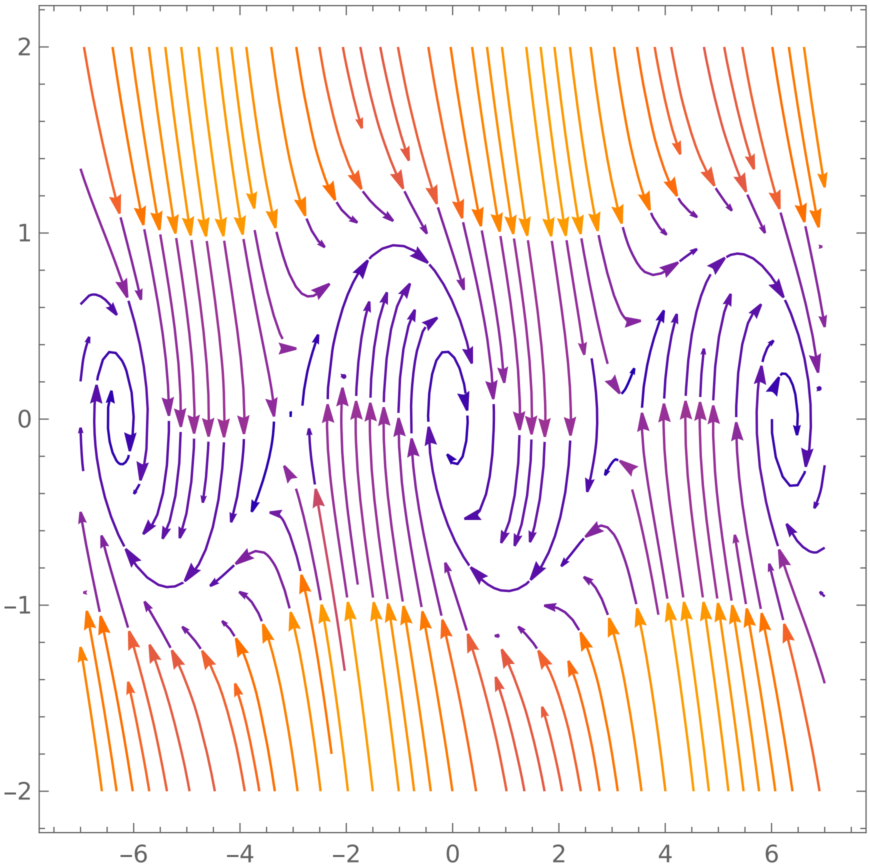
$$\begin{cases} \dot{\theta} = a \\ \dot{a} = -\frac{g}{l}\wp(\theta)(\theta - \pi n) - \frac{kl}{g}a|a| \end{cases}$$

Т.к. мы рассматриваем область точки $(0, \pi n)$, $a|a| \approx a$.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a \\ \dot{a} = -\frac{g}{l}\wp(\theta)(\theta - \pi n) - \frac{kl}{g}a \end{cases}$$

Это линейная система с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\wp(\theta) & -\frac{kl}{g} \end{pmatrix}$. Предположим, что все постоянные 1.

При $\wp = 1$ собственные значения $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $(0, \pi n)$ — устойчивый фокус по линейным членам. При $\wp = -1$ собственные значения $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, то есть $(0, \pi n)$ — седло по линейным членам. И седло, и фокус сохраняют свой тип при переходе назад к нелинейной системе *(но у седла сепаратиссы могут искривиться)*.



3

Вывести уравнение движения маятника, на который действует постоянная сила, равная половине веса маятника и направленная всегда в одну сторону по касательной к дуге окружности, по которой движется маятник. Для случая, когда l и g равны 1, начертить траектории на фазовой плоскости. Какие движения маятника изображаются траекториями различных типов?

Когда постоянная сила сонаправлена с проекцией веса:

$$-mg\sin\theta - \frac{mg}{2} = m\ddot{x}$$

Когда они разнонаправлены:

$$-mg\sin\theta + \frac{mg}{2} = m\ddot{x}$$

Пусть при $\theta \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ они сонаправлены, иначе разнонаправлены.

Пусть $\vartheta(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \theta \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \\ \frac{1}{2}, & \text{иначе} \end{cases}$

$$-mg\sin\theta + \vartheta(\theta)mg = m\ddot{x}$$
$$-mg\sin\theta + \vartheta(\theta)mg = lm\ddot{\theta}$$
$$-g\sin\theta + \vartheta(\theta)mg = l\ddot{\theta}$$

При $l = g = 1$:

$$-\sin\theta + \vartheta(\theta) = \ddot{\theta}$$

Сведем к дифференциальному уравнению первого порядка, пусть $a(t) = \dot{\theta}(t)$

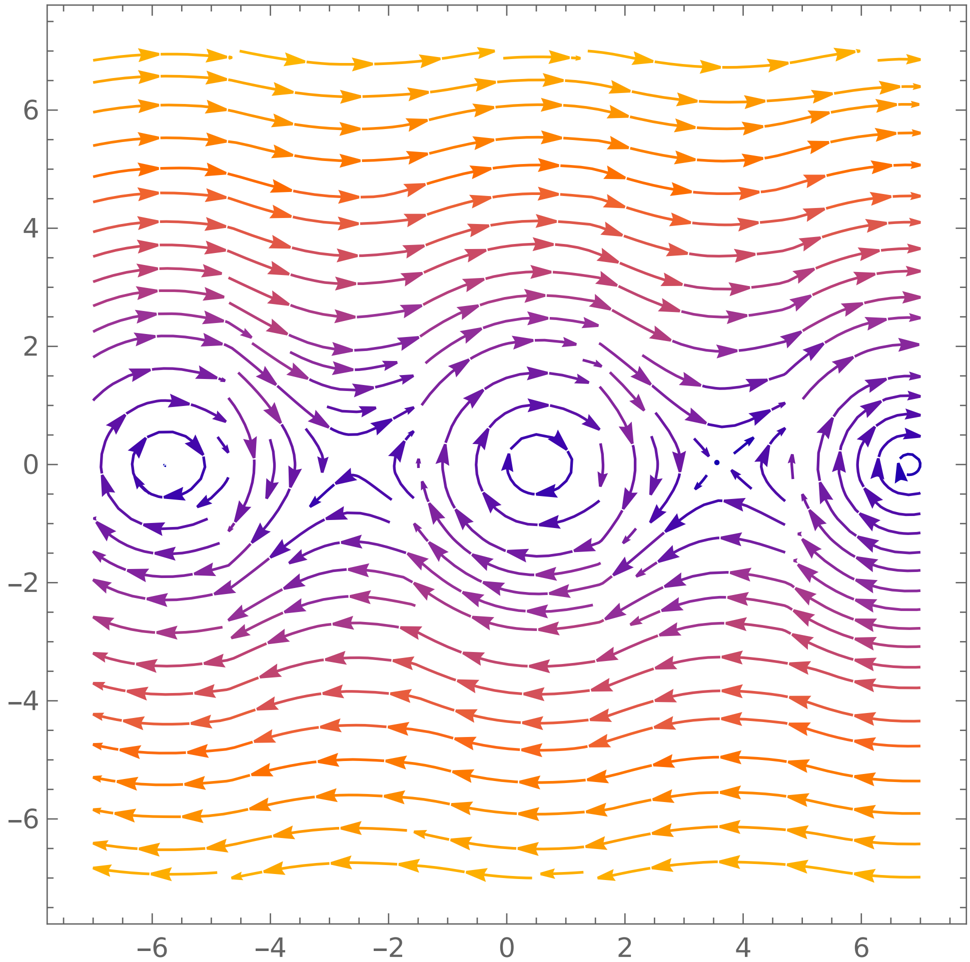
$$\begin{cases} \dot{\theta} = a \\ \dot{a} = -\sin\theta + \vartheta(\theta) \end{cases}$$

Найдем особые точки:

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = -\sin\theta + \vartheta(\theta) \end{cases}$$

$$\theta \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Нетрудно заметить, что эта система эквивалентна предыдущей с точностью до константы (ϑ), поэтому анализ точек аналогичен. Если $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, то это центр, иначе — седло.

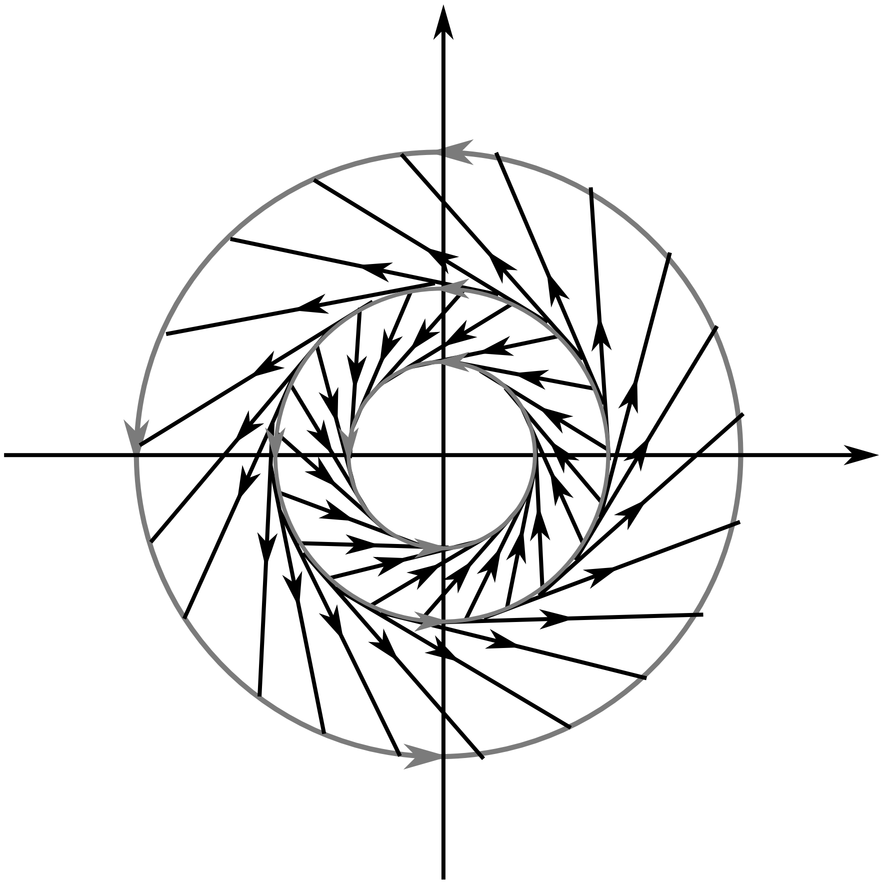


4

Начертить на фазовой плоскости траектории систем, записанных в полярных координатах.

1. $\dfrac{dr}{dt} = r \sin \dfrac{1}{r}, \dfrac{d\varphi}{dt} = 1$
2. $\dfrac{dr}{dt} = r(1-r)^2, \dfrac{d\varphi}{dt} = 1$

Решим 1. Заметим, что при $r \in \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{(2n+1)\pi}\right) r' > 0$, при $r = \frac{1}{n\pi}, r' = 0$, иначе $r' < 0$. Таким образом, все траектории ведут к кругам с радиусом $\frac{1}{n\pi}$, центром в $(0,0)$. При $r \in \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{(2n+1)\pi}\right)$ траектория идет к кругу снаружи, иначе к кругу внутри. Т.к. $\varphi' = 1$, движение идет против часовой стрелки.



Решим 2. Т.к. $r' > 0$, все траектории расходятся по спирали. Т.к. $\varphi' = 1$, движение против часовой стрелки.