Есть теорема, которая гласит, что решение такого дифура имеет вид $y = \varphi + \gamma$, где γ — решение $y'' - 5y' = 0$, а φ — частное решение искомого уравнения.

Найдём частное решение $y'' - 5y' = 0$, пусть оно имеет вид $y = e^{Cx} \Rightarrow \begin{cases} y' = Ce^{Cx} \\ y'' = C^2e^{Cx} \end{cases}$

$$\begin{gathered} y'' - 5y' = 0 \\ C^2e^{Cx} - 5Ce^{Cx} = 0 \\ C^2 - 5C = 0 \\ \begin{cases} C = 0 \\ C = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ y = e^{5x} \end{cases} \end{gathered}$$

Общее решение $y'' - 5y' = 0$ имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1 + C_2e^{5x}$.

Теперь найдём частное решение искомого уравнения.

$$y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$$

Заметим, что слева все линейно, поэтому если a — решение $y'' - 5y' = 3x^2$, а b — решение $y'' - y' = \sin 5x$, то их сумма — (частное) решение искомого.

$$a'' - 5a' = 3x^2$$

Пусть a — полином, при этом его степень не больше 4:

$$\begin{gathered} a = kx^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p \\ a' = 4kx^3 + 3lx^2 + 2mx + n \\ a'' = 12kx^2 + 6lx + 2m \end{gathered}$$

$$12kx^2 + 6lx + 2m - 5(4kx^3 + 3lx^2 + 2mx + n) = 3x^2$$

Очев $k = 0$, т.е. полином степени 3.

$$6lx + 2m - 5(3lx^2 + 2mx + n) = 3x^2$$
$$\begin{cases} 6l = 10m \\ 2m = 5n \\ -15l = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -0.12 = m \\ -0.048 = n \\ l = -0.2 \end{cases}$$
$$a = -0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x$$

Найдём b:

$$b'' - 5b' = \sin 5x$$

Предположим, что b имеет вид $r\cos(5x) + s\sin(5x)$:

$$b' = -5r\sin(5x) + 5s\cos(5x)$$
$$b'' = -25r\cos(5x) - 25s\sin(5x)$$

$$b'' - 5b' = \sin 5x$$
$$25r\sin(5x) - 25s\cos(5x) - 25r\cos(5x) - 25s\sin(5x) = \sin 5x$$
$$\begin{cases} 25r - 25s = 1 \\ -25s - 25r = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 50r = 1 \\ s = -r \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 0.02 \\ s = -0.02 \end{cases}$$

$$b = -0.02\sin(5x) + 0.02\cos(5x)$$

Итого частное решение искомого дифура:

$$y = -0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x - 0.02\sin(5x) + 0.02\cos(5x)$$

Ответ:

$$y = C_1 + C_2e^{5x} - 0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x - 0.02\sin(5x) + 0.02\cos(5x)$$