1 $xy' = y(\ln y - \ln x)$

$$\begin{aligned}
xy' &= y(\ln y - \ln x) \\
xy' &= y\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
t := \frac{y}{x} \quad t' &= \frac{y'x - y}{x^2} \quad y' = xt' + t \\
x(xt' + t) &= xt(\ln(t)) \\
xt' + t &= t\ln(t) \\
xt' &= t(\ln(t) - 1) \qquad (1) \\
\frac{dt}{t(\ln(t) - 1)} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dt}{t(\ln(t) - 1)} &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dt}{t(\ln\left(\frac{t}{e}\right))} &= \ln x + C \\
\ln\left(\ln\left(\frac{t}{e}\right)\right) &= \ln x + C \\
\ln\left(\frac{t}{e}\right) &= e^{\ln x} e^C \\
\ln\left(\frac{t}{e}\right) &= xe^C \\
\frac{t}{e} &= e^{xe^C} \\
\frac{y}{x} &= e^{xe^C + 1} \\
y &= xe^{xe^C + 1}
\end{aligned}$$

(1): $\lhd \ln t - 1 \equiv 0$. $y = ex$ — подходит.

Ответ: $y = xe^{xe^C+1}$ или $y = ex$

2 $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$

$$\begin{aligned}
2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' &= 0 \\
(2x + 3y - 5)dx + (3x + 2y - 5)dy &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(2x+3y-5)}{\partial y} = 3 \\ \dfrac{\partial(3x+2y-5)}{\partial x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{УПД}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x+3y-5 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3x+2y-5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= \int (2x+3y-5)dx + C(y) \\ &= -5x + x^2 + 3yx + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 3x + C'(y) \\ &= 3x + 2y - 5 \end{aligned}$$

$$C'(y) = 2y - 5 \Rightarrow C(y) = y^2 - 5y + C$$

$$x^2 + y^2 + 3xy - 5x - 5y + C = 0$$

3 $y(1+\sqrt{x^2y^4+1})dx + 2xdy = 0$

$y \equiv 0$ — подходит.

$$y(1+\sqrt{x^2y^4+1})dx + 2xdy = 0$$

$$t := (xy^2)^2 \quad dt = 2xy^4dx + 4y^3x^2dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dt}{dx} - 2xy^4}{4y^3x^2} = \frac{\frac{dt}{dx} - \frac{t}{x}}{4t^{3/4}\sqrt{x}} = \frac{dt}{4t^{3/4}\sqrt{x}dx} - \frac{t^{1/4}}{4\sqrt{x}^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{t^{1/4}}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{t+1}) + 2x\left(\frac{dt}{4t^{3/4}\sqrt{x}dx} - \frac{t^{1/4}}{4\sqrt{x}^3}\right) &= 0 \\ \frac{t^{1/4}}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{t+1}) + \frac{dt\sqrt{x}}{2t^{3/4}dx} - \frac{t^{1/4}}{22\sqrt{x}} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\left(t^{1/4}(1+\sqrt{t+1}) + \frac{xdt}{2t^{3/4}dx} - \frac{t^{1/4}}{2}\right) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}t^{3/4}}\left(t(1+\sqrt{t+1}) + \frac{xdt}{2dx} - \frac{t}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(1+\sqrt{t+1}) + \frac{xdt}{2dx} - \frac{t}{2} = 0 \\ \frac{t}{2} - t(1+\sqrt{t+1}) = \frac{xdt}{2dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{2}{x}\left(\frac{t}{2} - t(1+\sqrt{t+1})\right) \\ \frac{dt}{\frac{t}{2} - t(1+\sqrt{t+1})} &= \frac{2dx}{x} \\ \int \frac{-dt}{t(1+2t\sqrt{t+1})} &= \int \frac{2dx}{x} \\ \int \frac{-dt}{t(1+2t\sqrt{t+1})} &= 2\ln|x| + C \\ a := 1+2t\sqrt{t+1} \quad da &= \frac{dt}{\sqrt{t+1}} \quad t = \frac{(a-1)^2}{4} - 1 \\ -\int \frac{\frac{a-1}{2}da}{\left(\frac{(a-1)^2}{4} - 1\right)a} &= 2\ln|x| + C \\ -2\int \frac{(a-1)da}{a(a+1)(a-3)} &= 2\ln|x| + C \\ -\int \frac{(a-1)da}{a(a+1)(a-3)} &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\int\left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{6(a-3)} - \frac{1}{2(a+1)}\right)da &= \ln|x| + C \\ -\ln|3a| - \ln|6(a-3)| + \ln|2(a+1)| &= \ln|x| + C \\ -\ln|1+2t\sqrt{t+1}| - \\ \ln|2t\sqrt{t+1} - 2| \\ + \ln|2+2t\sqrt{t+1}| &= \ln|x| + C \\ -\ln|1+2(xy^2)^2\sqrt{(xy^2)^2+1}| - \\ \ln|2(xy^2)^2\sqrt{(xy^2)^2+1} - 2| + \\ \ln|2+2(xy^2)^2\sqrt{(xy^2)^2+1}| &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

Ответ: $y \equiv 0$ или $\ln|2+2(xy^2)^2\sqrt{(xy^2)^2+1}| = \ln|x| + C$

4 $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$

$$y' = \frac{4y^6 + x^3}{6xy^5}$$
$$y' = \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{6}y^{-5}$$

Это уравнение Бернулли.

$$\begin{aligned}
&t := y^6 \quad t' = 6y^5y' \\
&4t + x^3 = xt' \\
&\frac{4t}{x} + x^2 = t' \\
&\qquad t = \left(C + \int x^2 e^{-\int \frac{4}{x}dx} dx\right) e^{\int \frac{4}{x}dx} \\
&\qquad t = \left(C + \int x^2 e^{-\ln x - C_1} dx\right) e^{C_1 + \ln x} \\
&\qquad t = \left(C + \int x e^{-C_1} dx\right) x e^{C_1} \\
&\qquad t = \left(C + \frac{1}{2}x^2 e^{-C_1}\right) x e^{C_1} \\
&\qquad y^6 = \left(C + \frac{1}{2}x^2 e^{-C_1}\right) x e^{C_1}
\end{aligned}$$

$y = \sqrt{-x}$ подходит.

Ответ: $y = \sqrt{-x}$ или $y^6 = \left(C + \frac{1}{2}x^2 e^{-C_1}\right) x e^{C_1}$

5

6

Естественный прирост населения большого города пропорционален количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря миграции: скорость прироста населения этим путём пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось A_0. Найти зависимость числа жителей от времени (считать процесс непрерывным).

$$
\begin{aligned}
dP &= k_1 dtP + k_2 dt \\
\frac{dP}{k_1P + k_2} &= dt \\
\frac{1}{k}\ln(k_1P + k_2) &= t + C \\
k_1P + k_2 &= C_1 e^{k_1 t} \\
k_1A_0 + k_2 &= C_1 \\
k_1P + k_2 &= (k_1A_0 + k_2)e^{k_1 t}
\end{aligned}
$$

7

Капля сферической формы с начальной массой M г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и теряет ежесекундно m г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна произведению скорости капли на площадь её поверхности. Плотность жидкости гамма. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала её падения, в начальный момент времени скорость равна нулю. Принять, что коэффициент пропорциональности равен k.

Масса в момент времени t: $M - mt$.

По условию пропорциональности:

$$F = kvS = 2kr^2\pi v \tag{1}$$

По определению плотности:

$$(M - mt)\rho = V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M - mt)\rho} \tag{2}$$

Подставим (1) в (2):

$$
\begin{gathered}
F = 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M - mt)\rho}^{\,2} \pi v \\
(M - mt)g - F = (M - mt)a \\
(M - mt)g - 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M - mt)\rho}^{\,2} \pi v = (M - mt)v' \\
g - 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{\,2} (M - mt)^{-1/3}\pi v = v'
\end{gathered}
$$

$$v = \left(C + \int g \exp\left(\int 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{\,2} (M - mt)^{-1/3}\pi dt\right) dt\right) \exp\left(-\int 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{\,2} (M - mt)^{-1/3}\pi dt\right)$$

$$\int 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{2}(M-mt)^{-1/3}\pi dt = 2k\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{2}\pi\int(M-mt)^{-1/3}dt$$
$$= \frac{-3k}{m}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M-mt)\rho}^{2}\pi + C$$

$$v = \left(C + \int g\exp\left(\frac{-3k}{m}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M-mt)\rho}^{2}\pi + C\right)dt\right)\exp\left(\frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M-mt)\rho}^{2}\pi + C\right)$$
$$= \left(C + g\exp\left(\frac{-3k}{m}\pi\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{2}\int(M-mt)^{2/3}dt + C\right)\right)\exp\left(\frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M-mt)\rho}^{2}\pi + C\right)$$
$$= \left(C + g\exp\left(\frac{-3k}{m}\pi\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\rho}^{2}\frac{-3(M-mt)^{5/3}}{5m} + C\right)\right)\exp\left(\frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(M-mt)\rho}^{2}\pi + C\right)$$