1 $y'x^3\sin y = xy' - 2y$

$$\frac{dy}{dx}x^3\sin y - x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$
$$dyx^3\sin y - xdy + 2ydx = 0$$

Найдем интегрирующий множитель при $P = 2y, Q = x^3\sin y - x$

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$
$$\mu'_y 2y - \mu'_x(x^3\sin y - x) = (3x^2\sin y - 1 - 2)\mu$$
$$\mu'_y 2y - \mu'_x(x^3\sin y - x) = (3x^2\sin y - 3)\mu$$

Рассмотрим случай $\mu'_x \equiv 0$, т.е. μ — функция от y.

$$\mu'_y 2y = (3x^2\sin y - 3)\mu$$

Этот случай сложно решается, попробуем $\mu'_y \equiv 0$, т.к. нам нужно найти хоть какой-то μ, а не все возможные.

$$-\mu'_x(x^3\sin y - x) = (3x^2\sin y - 3)\mu$$

Здесь есть подслучай $x^2\sin y - 1 \equiv 0$, рассмотрим его позже.

$$-\mu'_x x = 3\mu$$
$$-\frac{\mu'_x}{\mu} = \frac{3}{x}$$
$$-\ln|\mu| = 3\ln|x| + C$$
$$|\mu|^{-1} = |x|^3 \cdot e^C$$
$$\mu^{-1} = \pm(|x|^3 e^C)$$

Т.к. нужен только некоторый μ, пусть $C = 0$

$$\mu = \pm\frac{1}{x^3}$$

Домножим исходное уравнение на μ:

$$\sin y dy - \frac{dy}{x^2} + \frac{2ydx}{x^3} = 0$$

Найдем $u(x, y)$, такое что:

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{2y}{x^3} \\ u'_y = \sin y - \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= \int \left(\sin y - \frac{1}{x^2}\right) dy + g(x) \\ &= -\cos y - \frac{y}{x^2} + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{2y}{x^3} \\ \left(-\cos y - \frac{y}{x^2} + g(x)\right)'_x &= \frac{2y}{x^3} \\ \frac{2y}{x^3} + g'(x) &= \frac{2y}{x^3} \\ g'(x) &= 0 \\ g(x) &= C \end{aligned}$$

Вернемся к случаю $x^2 \sin y - 1 \equiv 0$.

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{2x}{x^4+1}$$

Подставим в исходное уравнение.

$$\frac{2x}{x^4+1}x^3 \sin y = x\frac{2x}{x^4+1} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$$

Очевидно этот случай не подходит.

Ответ: $-\cos y - \dfrac{y}{x^2} = C$

2 $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$

Найдем интегрирующий множитель при $P = x^2 - \sin^2 y, Q = x \sin 2y$

$$\begin{gathered}
\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu \\
\mu'_y(x^2 - \sin^2 y) - \mu'_x x \sin 2y = (\sin 2y + 2 \sin y \cos y)\mu \\
\mu'_y(x^2 - \sin^2 y) - \mu'_x x \sin 2y = 2 \sin 2y \mu
\end{gathered}$$

Рассмотрим случай $\mu'_y \equiv 0$

$$\begin{gathered}
-\mu'_x x \sin 2y = 2 \sin 2y \mu \\
-\mu'_x x = 2\mu \\
-\frac{\mu'_x}{\mu} = \frac{2}{x} \\
-\ln|\mu| = 2\ln|x| \\
\mu = \pm x^{-2}
\end{gathered}$$

Домножим исходное уравнение на μ:

$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0$$

Найдем $u(x, y)$, такое что:

$$\begin{cases} u'_x = 1 - \dfrac{\sin^2 y}{x^2} \\ u'_y = \dfrac{\sin 2y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\sin 2y}{x} dy + g(x) \\ &= \frac{-2\cos 2y}{x} + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_x &= 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2} \\ \left(\frac{-2\cos 2y}{x} + g(x)\right)'_x &= 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2} \\ \frac{2\cos 2y}{x^2} + g'(x) &= 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2} \\ \frac{2(\cos^2 y - \sin^2 y)}{x^2} + g'(x) &= 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2} \\ g'(x) &= 1 - \frac{2\cos^2 y - \sin^2 y}{x^2} \\ g(x) &= x + \frac{2\cos^2 y - \sin^2 y}{x} \end{aligned}$$

Ответ: $x + \dfrac{\sin^2 y}{x} = C$

3 $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'$

$$\begin{aligned} (x^2+1)(y'^2 - yy'') &= xyy' \\ t := \frac{y'}{y} \quad t' &= \frac{yy'' - y'^2}{y^2} \\ (x^2+1)\frac{y'^2 - yy''}{y^2} &= \frac{xy'}{y} \\ (x^2+1)t' &= xt \\ \frac{t'}{t} &= \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\ln|t| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$
$$|t| = |x^2+1|^{\frac{1}{2}}e^C$$
$$|t| = \sqrt{x^2+1}e^C$$
$$t = \sqrt{x^2+1}e^C$$
$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x^2+1}e^C$$
$$\ln|y| = e^C\int\sqrt{x^2+1}dx$$

Ответ: $\ln|y| = e^C\int\sqrt{x^2+1}dx$

4

Условие

Площадь, ограниченная кривой, осями координат и ординатой любой точки кривой есть длина соответствующей дуги кривой. Найти такие кривые, что $M(0,1) \in$ кривой.

Решение

$$S = \int_a^0 y(x)dx$$
$$l = \int_a^0 \sqrt{y'^2+1}dx$$
$$y = \sqrt{y'^2+1}$$
$$y^2 = y'^2+1$$
$$y^2-1 = y'^2$$
$$\sqrt{y^2-1} = |y'|$$
$$\pm\sqrt{y^2-1} = y'$$
$$\pm1 = \frac{y'}{\sqrt{y^2-1}}$$
$$\int\pm1dx = \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$$
$$x + C = \cosh^{-1}(y)$$

Подставим M:

$$C = \cosh^{-1}(1)$$
$$C = 0$$

Ответ: $x = \cosh^{-1}(y)$