1 Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс.

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{r'}$$
$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{r^2}{r'^2}$$
$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{r^2}{r'^2}$$
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{r^2}{r'^2}$$
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{r^2 + r'^2}{r'^2}$$
$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r'}$$
$$\frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r'}$$
$$\frac{r^2 + r'^2}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|} = \frac{1}{r'}$$
$$t := r' \quad r'' = t't$$
$$\frac{r^2 + t^2}{|r^2 + 2t^2 - rt't|} = \frac{1}{t}$$
$$r^2 t + t^3 = |r^2 + 2t^2 - rt't|$$
$$\pm r^2 t \pm t^3 = r^2 + 2t^2 - rt't$$

Не решается, попробуем в декартовых координатах.

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = y'^2$$
$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{y'^2 + 1}$$
$$R = \frac{n}{\cos \alpha}$$
$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = n\sqrt{y'^2 + 1}$$

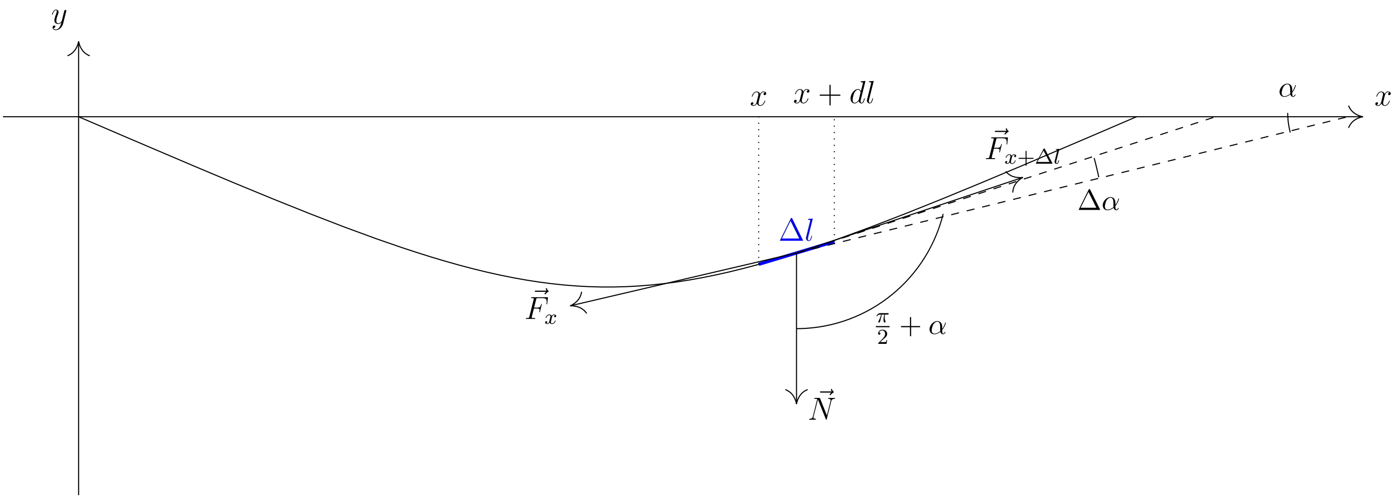
$$\begin{aligned}
1 + y'^2 &= |y''|n \\
\frac{1}{n} &= \frac{|y''|}{1 + y'^2} \\
\pm\frac{1}{n} &= \frac{y''}{1 + y'^2} \\
\pm\frac{1}{n} &= \operatorname{arctg}' y' \\
\int \pm\frac{1}{n}dx &= \int \operatorname{arctg}' y' dx \\
\pm\frac{x}{n} + C &= \operatorname{arctg} y' \\
\operatorname{tg}\left(\pm\frac{x}{n} + C\right) &= y' \\
\int \operatorname{tg}\left(\pm\frac{x}{n} + C\right) dx &= \int dy \\
\int \operatorname{tg}\left(\pm\frac{x}{n} + C\right) dx &= y + C_1
\end{aligned}$$

Найдём этот интеграл:

$$\begin{aligned}
t := \pm\frac{x}{n} + C \quad t' &= \pm\frac{1}{n} \\
\int \operatorname{tg}\left(\pm\frac{x}{n} + C\right) dx &= \int \pm \operatorname{tg}(t) n dt \\
&= \mp n \ln|\cos x|
\end{aligned}$$

Ответ: $y = \mp n \ln|\cos x| - C_1$

2 Определить форму равновесия нерастяжимой нити с закрепленными концами, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу длины нагрузка одинакова (цепи цепного моста). Весом самой нити пренебречь.



Обозначения: $\vec{F}$ — сила натяжения нити, $\vec{N}$ — нагрузка на отрезок, α — угол, Δl — длина рассматриваемого отрезка, x — координата начала отрезка, ρ — удельная плотность нити.

Т.к. нить в состоянии равновесия, $\vec{a} = \vec{0}$.

Т.к. нагрузка распределена равномерно, $|N| = \rho\Delta l$, где ρ — удельная нагрузка.

По второму закону Ньютона:

$$\vec{F}_x + \vec{F}_{x+\Delta l} + \vec{N} = \vec{0}$$

Спроецируем перпендикулярно $\vec{F}_x$:

$$|F_{x+\Delta l}| \sin(\Delta\alpha) = |N| \cos\alpha$$
$$|F_{x+\Delta l}| = \frac{|N| \cos\alpha}{\sin(\Delta\alpha)}$$

Спроецируем перпендикулярно $\vec{F}_{x+dl}$:

$$|F_x| \sin(\Delta\alpha) = |N| \cos(\alpha + \Delta\alpha)$$

$$|F_x| = \frac{|N|\cos(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\Delta\alpha)}$$

Спроецируем параллельно $\vec{F}_x$:

$$\begin{aligned}
|F_x| + |N|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= |F_{x+\Delta l}|\cos(\Delta\alpha) \\
\frac{|N|\cos(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\Delta\alpha)} + |N|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \frac{|N|\cos\alpha}{\sin(\Delta\alpha)}\cos(\Delta\alpha) \\
\frac{\cos(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin(\Delta\alpha)} - \sin\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin(\Delta\alpha)}\cos(\Delta\alpha) \\
\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha\sin(\Delta\alpha) &= \cos\alpha\cos(\Delta\alpha) \\
\cos(\alpha + \Delta\alpha) &= \cos(\alpha - \Delta\alpha)
\end{aligned}$$

???

Не работает, будем проецировать на оси:

На x:

$$\begin{aligned}
F_{x+\Delta l}\cos(\alpha + \Delta\alpha) &= F_x\cos\alpha \\
\frac{F_{x+\Delta l}\cos(\alpha + \Delta\alpha)}{\Delta l} &= \frac{F_x\cos\alpha}{\Delta l} \\
\frac{F_{x+\Delta l}\cos(\alpha + \Delta\alpha) - F_x\cos\alpha}{\Delta l} &= 0 \\
(F_x\cos\alpha)' &= 0 \\
F_x\cos\alpha &= \text{const} = C
\end{aligned}$$

На y:

$$\begin{aligned}
F_{x+dl}\sin(\alpha + \Delta\alpha) &= F_x\sin\alpha + N \\
F_{x+dl}\sin(\alpha + \Delta\alpha) - F_x\sin\alpha &= \rho\Delta l \\
\frac{F_{x+dl}\sin(\alpha + \Delta\alpha) - F_x\sin\alpha}{\Delta l} &= \rho
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(F_x \sin\alpha)' &= \rho \\
\int (F_x \sin\alpha)' dx &= \int \rho dx \\
F_x \sin\alpha &= \rho x + C_1 \\
\frac{C}{\cos\alpha} \sin\alpha &= \rho x + C_1 \\
C \operatorname{tg}\alpha &= \rho x + C_1
\end{aligned}
$$

3 $y' = e^{xy'/y}$

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{xy'/y} \\
t := \frac{xy'}{y} \quad y' &= \frac{yt}{x} \\
\frac{yt}{x} &= e^t \\
y &= \frac{xe^t}{t} \\
e^t = y' &= \left(\frac{xe^t}{t}\right)' \\
&= \frac{e^t}{t} + x\left(\frac{e^t}{y}\right)' \\
&= \frac{e^t}{t} + x\left(\frac{te^tt' - e^tt'}{t^2}\right) \\
&= \frac{e^t}{t} + x\frac{e^tt'}{t^2}(t-1) \\
e^t &= \frac{e^t}{t} + x\frac{e^tt'}{t^2}(t-1) \\
1 &= \frac{1}{t} + x\frac{t'}{t^2}(t-1) \\
t &= 1 + x\frac{t'}{t}(t-1) \\
t - 1 &= x\frac{t'}{t}(t-1) \qquad (1) \\
1 &= x\frac{t'}{t} \\
t &= xt' \\
t &= Cx \\
y &= \frac{xe^{Cx}}{Cx}
\end{aligned}
$$

$$y = \frac{e^{Cx}}{C}$$

В силу (1) надо рассмотреть случай $t = 1$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{xe^t}{t} \\ y &= xe \end{aligned}$$

Ответ: $y = \dfrac{e^{Cx}}{C}$ или $y = xe$

4 $xy' - y = \ln y$

$$\begin{aligned} xy' - y &= \ln y \\ xy' &= y + \ln y \\ \frac{y'}{y + \ln y} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{dy}{y + \ln y} &= \ln|x| + C \end{aligned}$$

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях.

5 $yy'' = 2xy'^2 \quad y(2) = 2 \quad y'(2) = 0.5$

$$\begin{aligned} yy'' &= 2xy'^2 \\ t := \frac{y'}{y} \quad t' &= \frac{yy'' - y'^2}{y^2} \quad yy'' = t'y^2 + y'^2 \\ t'y^2 + y'^2 &= 2xy'^2 \qquad (1) \\ t' + \frac{y'^2}{y^2} &= 2x\frac{y'^2}{y^2} \qquad (2) \\ t' + t^2 &= 2xt^2 \\ t' &= t^2(2x - 1) \\ \frac{t'}{t^2} &= 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^2} &= \int (2x-1)dx \\
-\frac{1}{t} &= x^2 - x + C \\
-\frac{y}{y'} &= x^2 - x + C \\
-\frac{2}{0.5} &= 4 - 2 + C \\
-4 &= 4 - 2 + C \\
-6 &= C \\
-\frac{y}{y'} &= x^2 - x - 6 \\
-\frac{y'}{y} &= \frac{1}{x^2 - x - 6} \\
\int -\frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x^2 - x - 6} \\
-\ln|y| + C &= \int \frac{dx}{x^2 - x - 6}
\end{aligned} \tag{3}$$

Разобьем $\frac{1}{x^2 - x - 6}$ на сумму дробей:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-3)(x+2)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \\
1 &= A(x+2) + B(x-3) \\
A = \frac{1}{5} &\quad B = -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\ln|y| + C &= \int \left(\frac{1}{5(x-3)} - \frac{1}{5(x+2)} \right) dx \\
-\ln|y| + C &= \frac{1}{5} \left(\ln|x-3| - \ln|x+2| \right) \\
-\ln|2| + C &= \frac{1}{5} \left(\ln|2-3| - \ln|2+2| \right) \\
-\ln 2 + C &= \frac{1}{5} \left(\ln 1 - \ln 4 \right) \\
-5\ln 2 + 5C &= -2\ln 2 \\
5C &= 3\ln 2
\end{aligned} \tag{4}$$

$$C = 0.6 \ln 2$$

При переходе (1) $\Rightarrow$ (2) надо проверить случай $y \equiv 0$, но он не подходит в условие $y(2) = 2$.

(3), (4) — подстановка $x = 2$.

Ответ: $-\ln|y| + 0.6\ln 2 = \frac{1}{5}\left(\ln|x-3| - \ln|x+2|\right)$

6 $2yy''' = y'$

$$\begin{aligned}
2yy''' &= y' \\
t := y' \quad y''' &= t''t^2 + t't \\
2y(t''t^2 + t't) &= t \qquad (1) \\
2y(t''t + t') &= 1 \\
2(t''t + t') &= \frac{1}{y} \\
2(t''t + t') - \frac{1}{y} &= 0
\end{aligned}$$

Очевидно $y \equiv \text{const}$ — решение из (1), других я не нашел

7 $yy'' + y'^2 = 1$

$$\begin{aligned}
yy'' + y'^2 &= 1 \\
t := y' \quad y'' &= t'y \\
y^2t' + t^2 &= 1 \\
y^2t' + t^2 &= 1 \\
y^2t' &= 1 - t^2 \qquad (1) \\
t' &= \frac{1-t^2}{y^2} \qquad (2) \\
\frac{t'}{1-t^2} &= \frac{1}{y^2} \\
\int \frac{dt}{1-t^2} &= \int \frac{dy}{y^2} \\
\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} &= -\frac{1}{y} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{2(1+t)} - \int \frac{dt}{2(1-t)} &= -\frac{1}{y} + C \\
\frac{1}{2}(\ln|1+t| - \ln|1-t|) &= -\frac{1}{y} + C \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| &= -\frac{1}{y} + C \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y'}{1-y'}\right| &= -\frac{1}{y} + C \\
\left|\frac{1+y'}{1-y'}\right|^{\frac{1}{2}} &= e^{-\frac{1}{y}} \cdot e^{C}
\end{aligned}$$

$y \equiv 0$ — не решение, поэтому переход (1) $\Rightarrow$ (2) не теряет решений.

Не работает, попробуем $t = \dfrac{y'}{y}$:

$$\begin{gathered}
yy'' + y'^2 = 1 \\
t := \frac{y'}{y} \quad t' = \frac{yy'' - y'^2}{y^2} \quad yy'' = t'y^2 + y'^2 \\
t'y^2 + 2y'^2 = 1 \\
t' + 2t^2 = \frac{1}{y^2}
\end{gathered}$$

Это уравнение Рикатти, частное решение $t = \dfrac{1}{y}$:

$$-\frac{1}{y^2} + 2\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$\begin{gathered}
t' + 2t^2 = \frac{1}{y^2} \\
a := t - \frac{1}{y} \quad a' = t' + \frac{1}{y^2} \quad a^2 = t^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2t}{y} \\
a' - \frac{1}{y^2} + 2\left(a^2 - \frac{1}{y^2} + \frac{2t}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \\
a' + a^2 + \frac{2t}{y} = \frac{2}{y^2}
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
a' + a^2 + \frac{2\left(a + \frac{1}{y}\right)}{y} &= \frac{2}{y^2} \\
a' + a^2 + \frac{2a}{y} &= 0 \\
a' &= -a^2 - \frac{2a}{y} \qquad (2) \\
b := \frac{1}{a} \quad b' &= -\frac{a'}{a^2} \\
\frac{a'}{a^2} &= -1 - \frac{2}{ay} \\
-b' &= -1 - \frac{2b}{y} \\
b' &= 1 + \frac{2b}{y} \\
b' - \frac{2b}{y} &= 1 \\
\frac{b'}{y^2} - \frac{2b}{y^3} &= \frac{1}{y^2} \\
\frac{b'}{y^2} - b(y^{-2})' &= \frac{1}{y^2} \\
\left(\frac{b}{y^2}\right)' &= \frac{1}{y^2} \\
\int \left(\frac{b}{y^2}\right)' dy &= \int \frac{1}{y^2} dy \\
\frac{1}{\left(t - \frac{1}{y}\right) y^2} &= -\frac{1}{y} + C \\
\frac{1}{y^2 \frac{y'}{y} - y} &= -\frac{1}{y} + C \\
\frac{1}{yy' - y} &= -\frac{1}{y} + C \\
\frac{1}{y' - 1} &= -1 + yC \\
yC &= y'(yC - 1) \\
\frac{yC}{yC - 1} &= y' \\
x &= \int \frac{dy}{\frac{yC}{yC-1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x &= \int \frac{yC - 1}{yC} dy \\
x &= \int dy - \int \frac{1}{yC} dy \\
x &= y - \frac{\ln|y|}{C} + C_1
\end{aligned}
$$

По (2) $a \equiv 0$ подходит:

$$
\begin{aligned}
t - \frac{1}{y} &= 0 \\
\frac{y'}{y} - \frac{1}{y} &= 0 \\
y' &= 1 \\
y &= x + C
\end{aligned}
$$

Ответ: $x = y - \frac{\ln|y|}{C} + C_1$ и $y = x + C$