1 $2x^2yy' + y^2 = 2$

$$y' = \frac{2-y^2}{2x^2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-y^2}{2x^2y}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{2-y^2}{2x^2}$$

$$\frac{ydy}{2-y^2} = \frac{dx}{2x^2}$$

$$\int \frac{ydy}{2-y^2} = \int \frac{dx}{2x^2}$$

$$\int \frac{ydy}{2-y^2} = -\frac{1}{2x}$$

$$t := 2-y^2$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{-dt}{t} = -\frac{1}{2x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|2-y^2| = -\frac{1}{2x} + C$$

$$\ln|2-y^2| = \frac{1}{x} + C$$

$$|2-y^2| = e^{\frac{1}{x}+C}$$

$$2-y^2 = \pm Ae^{\frac{1}{x}}$$

$$2-y^2 = Ae^{\frac{1}{x}}$$

$$y^2 = \pm(-Ae^{\frac{1}{x}} + 2)$$

Ответ: $y = \pm\sqrt{-Ae^{\frac{1}{x}} + 2}$

2 $y' = \cos(y - x)$

Особое решение: $y = x + 2\pi n$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(y - x)$$
$$\frac{dy - dx + dx}{dx} = \cos(y - x)$$
$$\frac{dy - dx}{dx} + 1 = \cos(y - x)$$
$$t := y - x$$
$$\frac{dy - dx}{dx} + 1 = \cos(y - x)$$
$$\frac{dt}{dx} + 1 = \cos(t)$$
$$dt + dx = dx \cos(t)$$
$$dt = dx(\cos(t) - 1)$$
$$\frac{dt}{\cos(t) - 1} = dx$$
$$\int \frac{dt}{\cos(t) - 1} = \int dx$$
$$\int \frac{dt}{\cos(t) - 1} = x + C$$
$$\int \frac{dt}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} - 1} = x + C$$
$$\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{-2 \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} dt = x + C$$
$$\int \frac{1}{-2 \cos \frac{t}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} dt = x + C$$
$$a := \operatorname{tg} \frac{t}{2} \quad da = \frac{dt}{2 \cos \frac{t}{2}}$$
$$\int \frac{1}{-a^2} da = x + C$$
$$\frac{1}{a} = x + C$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = x + C$$
$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y-x}{2}} = x + C$$
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x+C} = \frac{y-x}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $y = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x+C} + x + 2\pi n$ или $y = x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3 $y' - y = 2x - 3$

$$\frac{dy}{dx} - y = 2x - 3$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x + y - 3$$
$$t := 2x + y \quad \frac{dt}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dt}{dx} - 2 = t - 3$$
$$\frac{dt}{dx} = t - 1$$
$$\frac{dt}{dx} = t - 1 \quad (*)$$
$$\frac{dt}{t-1} = dx$$
$$\int \frac{dt}{t-1} = \int dx$$
$$\ln(t-1) = x + C$$
$$t - 1 = e^{x+C}$$
$$2x + y - 1 = e^{x+C}$$
$$(*) : \lhd t = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 1 - \text{подходит}$$

Ответ: $y = e^{x+C} + 1 - 2x$ или $y = 1 - 2x$

4 $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

$$t := 4x + 2y \quad \frac{dt}{dx} = 4 + 2\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{1}{2}\frac{dt}{dx} - 2 = \sqrt{t-1}$$
$$\frac{dt}{dx} = 2\sqrt{t-1} + 4$$
$$\frac{dt}{2\sqrt{t-1}+4} = dx$$
$$\int \frac{dt}{2\sqrt{t-1}+4} = \int dx$$
$$\int \frac{dt}{2\sqrt{t-1}+4} = x + C$$
$$a := \sqrt{t-1} \quad da = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$$
$$\int \frac{2ada}{2a+4} = x + C$$

$$\int \frac{ada}{a+2} = x + C$$
$$\int \left(1 - \frac{2}{a+2}\right) da = x + C$$
$$a - \int \frac{2}{a+2} da = x + C$$
$$a - 2\ln(a+2) = x + C$$
$$\sqrt{t-1} - 2\ln(\sqrt{t-1}+2) = x + C$$
$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C$$

Дальше не решается :(, но вроде дальше и не надо.

5 $x^2y' - \cos(2y) = 1, \;\; y(+\infty) = \frac{9\pi}{4}$

$$x^2\frac{dy}{dx} - \cos(2y) = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\cos(2y)}{x^2}$$
$$\frac{dy}{1+\cos(2y)} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{1+\cos(2y)} = \int \frac{dx}{x^2}$$
$$\int \frac{dy}{1+\cos(2y)} = -\frac{1}{x} + C$$
$$\int \frac{dy}{1+\frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{1+\operatorname{tg}^2 y}} = -\frac{1}{x} + C$$
$$\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 y}{2} dy = -\frac{1}{x} + C$$
$$\frac{y}{2} + \int \frac{\frac{1}{\cos^2 y} - 1}{2} dy = -\frac{1}{x} + C$$
$$\int \frac{1}{2\cos^2 y} dy = -\frac{1}{x} + C$$
$$\frac{\operatorname{tg} y}{2} = -\frac{1}{x} + C$$
$$\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + A$$
$$y = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{x} + A\right) + \pi n$$
$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{9\pi}{4}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{x} + A\right) + \pi n = \frac{9\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} A + \pi n = \frac{9\pi}{4} \Rightarrow n = 2$$
$$\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{4}$$
$$A = 1 + \pi k$$
$$\text{Ответ: } y = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{x} + 1\right) + 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

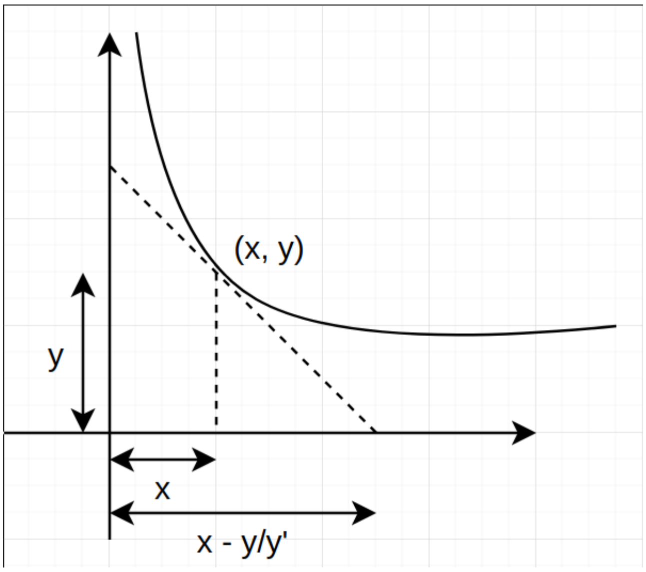
6 $3y^2y' + 16x = 2xy^3, y(x)$ огр. при $x \to +\infty$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 16x = 2xy^3$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2xy^3 - 16x$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2x(y^3 - 8)(*)$$

$$\frac{3y^2}{(y^3-8)}dy = 2xdx$$
$$\int \frac{3y^2}{y^3-8}dy = \int 2xdx$$
$$\int \frac{3y^2}{y^3-8}dy = 4x^2 + C$$
$$t := y^3 \quad dt = 3y^2dy$$
$$\int \frac{dt}{t-8} = 4x^2 + C$$
$$\ln(y^3-8) = 4x^2 + C$$
$$y^3 - 8 = e^{4x^2+C}$$
$$y = \sqrt[3]{e^{4x^2+C}+8}$$
$$\lim_{x\to+\infty} y \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{e^{4x^2+C}+8} \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^{4x^2+C} = \infty$$
$$(*) : \sphericalangle y = 2 \Rightarrow 12y' = 0 \Rightarrow y \equiv 2 - \text{подходит}$$
Ответ: $y \equiv 2$

7 Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2

Точки касания — x, y, точка пересечения оси абсцисс и касательной — $(x - \frac{y}{y'}, 0)$



$$a^2 = \frac{y\left(x - \frac{y}{y'} - x\right)}{2}$$
$$a^2 = -\frac{y^2}{2y'}$$
$$\frac{2y'}{y^2} = -\frac{1}{a^2}$$
$$\int \frac{2dy}{y^2} = \int -\frac{dx}{a^2}$$
$$\frac{-2}{y} = -\frac{x}{a^2} + C$$
$$\frac{2}{y} = \frac{x + A}{a^2}$$
$$y = \frac{2a^2}{x + A}$$

Для $y' > 0$ точка пересечения оси абсцисс и касательной — $(x + \frac{y}{y'}, 0)$, поэтому ответ $y = \frac{2a^2}{\pm x + A}$

8 Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

8.1 Кривые в 1 или 4 квадранте

Пусть угол в точке касания (*между радиусом и осью*) — α, тогда по условию угол между касательной и осью $\dfrac{\pi - \alpha}{2}$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{r}{r'}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{r d\alpha}{dr}$$
$$\frac{dr}{r} = \operatorname{ctg}\frac{\pi - \alpha}{2} d\alpha$$
$$\int \frac{dr}{r} = \int \operatorname{ctg}\frac{\pi - \alpha}{2} d\alpha$$
$$\ln|r| = \int \operatorname{ctg}\frac{\pi - \alpha}{2} d\alpha$$
$$t := \frac{\pi - \alpha}{2} \quad dt = \frac{-d\alpha}{2}$$

$$\ln|r| = -2\int \operatorname{ctg} t dt$$
$$\ln|r| = -2\ln|\sin t| + C$$
$$\ln r = -2\ln\left|\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right| + C$$
$$r = \sin^{-2}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)C_1$$
$$r = \cos^{-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)C_1$$
$$r = \frac{C_1}{\cos\alpha + 1}$$

8.2 Кривые в 2 или 3 квадранте

Пусть угол в точке касания (*между радиусом и осью*) — α, тогда по условию угол между касательной и осью $\frac{\alpha}{2}$

$$\ln|r| = \int \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha$$
$$\ln|r| = -2\ln|\sin t| + C$$
$$r = \sin^{-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^C$$

Получается такая же кривая.

9 Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой воды 2 м?

$\lhd n$ — поглощенная часть света

$$n' = kn$$
$$dn = kndh$$
$$\frac{dn}{n} = kdh$$
$$\ln n = kh + C$$

$$n = e^{kh}$$

$h = 0.35$ м, $n = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= e^{k \cdot 0.35} \\
\frac{1}{2} &= e^{k \cdot 0.35} \\
-\ln 2 &= k \cdot 0.35 \\
\frac{-\ln 2}{0.35} &= k
\end{aligned}$$

Найдём искомое:

$$\begin{aligned}
n &= e^{2k} \\
n &= e^{\frac{-2\ln 2}{0.35}} \\
n &= e^{\frac{-40\ln 2}{7}} \\
n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}} \\
\text{Ответ: } 1 - &\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}}
\end{aligned}$$

10 Резиновый шнур длиной в 1 м под действием силы f удлиняется на kf метров. На сколько удлинится такой же шнур длины l и веса P под действием своего веса, если подвесить за один конец?

Сила, действующая на участок шнура длиной dx на расстоянии x от точки подвеса:

$$F(x) = (l - x)\frac{P}{l}dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l kF(x)dx &= \int_0^l k(l-x)\frac{P}{l}dx \\
&= \frac{Pk}{l}\frac{l^2}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{Pkl}{2}$$

Помогите Даше-путешественнице найти в этой задаче дифур.

11 Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

Пусть топлива истекло $a(t)$ (по массе) в момент времени t

Сохранение импульса:

$$\begin{aligned} cda &= dv(M-a) \\ \frac{da}{(M-a)} &= \frac{dv}{c} \\ \int \frac{da}{(M-a)} &= \int \frac{dv}{c} \\ -\ln(M-a) &= \frac{v}{c} + C \\ -c\ln(M-a) - C &= v \end{aligned}$$

$v_0 = 0, a_0 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -c\ln(M) - C \\ C &= -c\ln(M) \end{aligned}$$

После сгорания топлива $a = M - m$

$$\begin{aligned} v &= -c\ln(M - M + m) + c\ln M \\ \text{Ответ: } v &= c\left(\ln\frac{M}{m}\right) \end{aligned}$$