1

Линейной заменой уничтожить член с первой производной. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$. Указать через пробел замену и получившиеся уравнение.

$$y := a(x)z \quad y' = a'z + az' \quad y'' = a''z + az'' + 2a'z'$$

$$\begin{aligned}
x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y &= 0 \\
x^2(a''z + az'' + 2a'z') - 2x(a'z + az') + (x^2+2)az &= 0 \\
x^2a''z + x^2az'' + 2x^2a'z' - 2xa'z - 2xaz' + x^2az + 2az &= 0 \\
x^2a''z + x^2az'' + z'(2x^2a' - 2xa) - 2xa'z + x^2az + 2az &= 0 \\
2x^2a' - 2xa &= 0 \\
xa' - a &= 0 \\
a' &= \frac{a}{x} \\
\frac{da}{a} &= \frac{dx}{x} \\
\ln|a| &= \ln|x| + C \\
|a| &= |x|e^C \\
a &= \pm xe^C \\
a &= xC \\
a' &= C \\
a'' &= 0 \\
x^2z''xC - 2xzC + x^2zxC + 2zxC &= 0 \\
x^2z''xC + x^2zxC &= 0 \\
x^3C(z'' + z) &= 0
\end{aligned}$$

2

Заменой независимого переменного уничтожить член с первой производной. $xy'' - y' - 4x^3y = 0$. Указать через пробел замену и получившиеся уравнение.

$$t := \varphi(x) \quad y'_x = \varphi'_x y'_t \quad y''_{xx} = \varphi''_{xx}y'_t + (\varphi'_x)^2 y''_{tt}$$

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0$$

Далее все производные y берутся по t, все производные φ — по x

$$\begin{aligned}
x(\varphi''y' + \varphi'^2y'') - \varphi'y' - 4x^3y &= 0\\
x\varphi''y' + x\varphi'^2y'' - \varphi'y' - 4x^3y &= 0\\
x\varphi'^2y'' + (x\varphi'' - \varphi')y' - 4x^3y &= 0\\
x\varphi'' - \varphi' &= 0\\
x\varphi'' &= \varphi'\\
t &:= \varphi'\\
xt' &= t\\
t &= xC\\
\varphi' &= xC\\
\varphi &= \frac{xC}{2} + A\\
\varphi'' &= C\\
x^3C^2y'' - 4x^3y &= 0
\end{aligned}$$

3

Найти линейно независимое решение в виде ряда. $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$. Собрать ряды в функцию. Если ответов несколько указать через пробел.

Пусть $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y &= 0\\
(1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n &= 0\\
\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x^{n-2} - x^n) - 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n &= 0\\
\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x^{n-2} - x^n) - 4\sum_{n=2}^{+\infty} na_nx^n - 4a_1x - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_nx^n - 2a_0 - 2a_1x &= 0\\
\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n(x^{n-2} - x^n) - 4na_nx^n - 2a_nx^n\right) - 2a_0 - 6a_1x &= 0
\end{aligned}$$

Все коэффициенты при x_n равны 0:

$$\begin{cases} a_0 = a_2 \\ 6a_3 - 6a_1 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4na_n - 2a_n = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_1 = a_3 \\ (n^2+3n+2)a_{n+2} = (n^2 - n + 4n + 2)a_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_1 = a_3 \\ (n^2+3n+2)a_{n+2} = (n^2 + 3n + 2)a_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_0 = a_2 \\ a_1 = a_3 \\ a_{n+2} = a_n \end{cases}$$

Пусть $a_0 = 1, a_1 = 0$. Тогда $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$. При $x \in (-1, 1)$ этот ряд сходится к $\dfrac{1}{1-x^2}$, иначе этот ряд не сходится.

Пусть $a_0 = 0, a_1 = 1$. Тогда $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$. При $x \in (-1, 1)$ этот ряд сходится к $\dfrac{x}{1-x^2}$, иначе этот ряд не сходится.

4

Решить $y'^4 - y'^2 = y^2$. Условия Коши $y(-2\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$, рассмотрите $x, y < 0$ укажите $y(-\pi/3)$.

$y \equiv 0$ — решение

$$\begin{aligned} y'^4 - y'^2 &= y^2 \\ p &:= y' \\ p^4 - p^2 &= y^2 \\ \pm\sqrt{p^4 - p^2} &= y \\ \pm\frac{(4p^3 - 2p)dp}{2\sqrt{p^4 - p^2}} &= dy \end{aligned}$$

$$\pm\frac{(4p^3-2p)dp}{2\sqrt{p^4-p^2}} = pdx$$
$$\pm\frac{(2p^3-1)dp}{\sqrt{p^4-p^2}} = dx$$
$$\pm\frac{(2p^3-1)dp}{p\sqrt{p^2-1}} = dx$$
$$\pm\int\frac{(2p^3-1)dp}{p\sqrt{p^2-1}} = x$$
$$\pm\int\frac{2p^2dp}{\sqrt{p^2-1}} \mp \int\frac{dp}{p\sqrt{p^2-1}} = x$$
$$\pm\sqrt{p^2-1}p \pm \ln(2p+2\sqrt{p^2-1}) \pm \arcsin\frac{1}{|p|} + C = x$$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{p^2-1}p \\ x = \pm\sqrt{p^2-1}p \pm \ln(2p+2\sqrt{p^2-1}) \pm \arcsin\frac{1}{|p|} + C \end{cases}$$

Подставим условие Коши:

$$\begin{cases} -2\sqrt{3} = \pm\sqrt{p^2-1}p \\ -2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} \pm \ln(2p+2\sqrt{p^2-1}) \pm \arcsin\frac{1}{|p|} + C \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2\sqrt{3} = \pm\sqrt{p^2-1}p \\ 0 = \pm \ln(2p+2\sqrt{p^2-1}) \pm \arcsin\frac{1}{|p|} + C \end{cases}$$

Таким образом, есть два случая: $p \in \{\mp 2, \pm i\sqrt{3}\}$. Хочется верить, что в комплексные числа лезть не надо, поэтому рассмотрим $p = \mp 2$.

$$0 = \pm\ln(\mp 4 + 2\sqrt{3}) \pm \arcsin\frac{1}{2} + C$$
$$0 = -\ln(4 + 2\sqrt{3}) - \arcsin\frac{1}{2} + C$$
$$\ln(4+2\sqrt{3}) + \arcsin\frac{1}{2} = C$$

Найдём $y(-\frac{\pi}{3})$:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{p^2-1}p \\ -\frac{\pi}{3} = -\sqrt{p^2-1}p - \ln(2p + 2\sqrt{p^2-1}) - \arcsin\frac{1}{|p|} + \ln(4+2\sqrt{3}) + \arcsin\frac{1}{2} \end{cases}$$

$p \approx 1.35475$. $y \approx -1.2382$

5

$2y'^2(y - xy') = 1$. Коши $y(1) = 55/18$. Найти $y(1/9)$

$$\begin{aligned} 2y'^2(y - xy') &= 1 \\ p &:= y' \\ y &= px + C \\ 2p^2(px + C - px) &= 1 \\ 2p^2C &= 1 \\ C &= \frac{1}{2p^2} \\ y &= px + \frac{1}{2p^2} \\ dy &= pdx + xdp - \frac{dp}{p^3} \\ pdx &= pdx + xdp - \frac{dp}{p^3} \\ 0 &= xdp - \frac{dp}{p^3} \\ x &= \frac{1}{p^3} \\ x^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{p} \\ y' &= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \\ \int y'dx &= \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} \\ y &= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C \end{aligned}$$

Подставим условие Коши:

$$\begin{aligned}\frac{55}{18} &= \frac{3}{2} + C \\ \frac{55-27}{18} &= C \\ \frac{14}{9} &= C\end{aligned}$$

Найдём $y(1/9)$:

$$\begin{aligned}y(1/9) &= \frac{3}{2}\frac{1}{9^{2/3}} + \frac{14}{9} \\ &= \frac{1}{2\cdot 3^{1/3}} + \frac{14}{9}\end{aligned}$$