1 $(x - y^2)y' = 1$

Найдём интегрирующий множитель μ:

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

Пусть $\mu'_x \equiv 0$

$$\begin{aligned} \mu'_y P &= (Q'_x - P'_y)\mu \\ \mu'_y(-1) &= 1\mu \\ \mu &= e^{-y} \end{aligned}$$

Домножим исходное уравнение на μ:

$$-e^{-y}dx + e^{-y}(x - y^2)dy = 0$$

Найдем $u(x, y)$, такое что:

$$\begin{cases} u'_x = -e^{-y} \\ u'_y = e^{-y}(x - y^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= \int -e^{-y}dx + g(y) \\ &= -e^{-y}x + g(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_y &= e^{-y}(x - y^2) \\ (-e^{-y}x + g(y))'_y &= e^{-y}(x - y^2) \\ e^{-y}x + g(y)'_y &= e^{-y}(x - y^2) \\ g(y)'_y &= -e^{-y}y^2 \\ g(y) &= \int -e^{-y}y^2dy + C \\ g(y) &= -e^{-y}(-y^2 - 2y - 2) + C \end{aligned}$$

$$u = -e^{-y}x - e^{-y}(-y^2 - 2y - 2) + C$$

Ответ: $-e^{-y}x - e^{-y}(-y^2 - 2y - 2) = C$

2 $x - y/y' = 2/y$

$$\begin{aligned}
x - \frac{y}{y'} &= \frac{2}{y} \\
\frac{y}{y'} &= x - \frac{2}{y} \\
\frac{y}{y'} &= \frac{xy - 2}{y} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{y}{xy - 2} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{xy - 2} \\
(xy - 2)dy &= y^2 dx \\
-y^2 dx + (xy - 2)dy &= 0
\end{aligned}$$

Найдём интегрирующий множитель μ:

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu$$

Пусть $\mu'_x \equiv 0$

$$\begin{aligned}
\mu'_y P &= (Q'_x - P'_y)\mu \\
\mu'_y(-y^2) &= (y + 2y)\mu \\
\mu'_y y &= -3\mu \\
\mu &= \frac{1}{y^3}
\end{aligned}$$

Домножим исходное уравнение на μ:

$$-\frac{1}{y}dx + \frac{xy-2}{y^3}dy = 0$$

Найдем $u(x, y)$, такое что:

$$\begin{cases} u'_x = -\frac{1}{y} \\ u'_y = \frac{xy-2}{y^3} \end{cases}$$

$$u = \int -\frac{1}{y}dx + g(y)$$
$$u = -\frac{x}{y} + g(y)$$

$$u'_y = \frac{xy-2}{y^3}$$
$$\left(-\frac{x}{y} + g(y)\right)'_y = \frac{xy-2}{y^3}$$
$$\frac{x}{y^2} + g'(y) = \frac{xy-2}{y^3}$$
$$g'(y) = \frac{-2}{y^3}$$
$$g(y) = \int \frac{-2}{y^3}dy + C$$
$$g(y) = \frac{1}{y^2} + C$$

$$u = -\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} + C$$

Ответ: $-\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = C$

3 $y' + y = xy^3$

$y \equiv 0$ — решение.

Это уравнение Бернулли при $p(x) = -1, q(x) = x, \alpha = 3$. Выполним стандартную замену $t = y^{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned} t := y^{-2} \quad t' &= -\frac{2y'}{y^3} \\ y' + y &= xy^3 \\ \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} &= x \\ -\frac{t'}{2} + t &= x \\ t' &= 2t - 2x \end{aligned}$$

Это линейное уравнение при $p(x) = 2, q(x) = -2x$

$$\begin{aligned} t &= \left(\int e^{-\int p} q dx\right) e^{\int p} \\ &= -2\left(\int e^{-\int 2} x dx\right) e^{\int 2} \\ &= -2\left(\int e^{-2x} x dx\right) e^{2x} \\ &= -\left(-e^{-2x}x + \int e^{-2x} dx\right) e^{2x} \\ &= -\left(-e^{-2x}x - \frac{e^{-2x}}{2} + C\right) e^{2x} \\ &= -\left(-x - \frac{1}{2}\right) + Ce^{2x} \\ &= x + \frac{1}{2} + Ce^{2x} \\ y^{-2} &= x + \frac{1}{2} + Ce^{2x} \end{aligned}$$

Ответ: $y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$ или $y \equiv 0$

4 $(xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0$

$$(xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0$$
$$x(y^4 - 1)dx + y(x + 1)dy = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Хочется поделить на $(y^4 - 1)$ и $(x + 1)$, но сначала надо рассмотреть случаи, когда они $\equiv 0$.

$$\begin{aligned} y^4 - 1 &\equiv 0 \\ y &\equiv 1 \\ y' &\equiv 1 \\ (x^4 - x)dx + (y + xy)y' &= 0 \\ 0dx + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, решение $y \equiv 1$ подходит.

$$\begin{aligned} x + 1 &\equiv 0 \\ x &\equiv -1 \\ x' &\equiv 0 \\ x(y^4 - 1)x' + y(x + 1)dy &= 0 \\ 0 + y \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, решение $x \equiv -1$ подходит.

$$\begin{aligned} x(y^4 - 1)dx + y(x + 1)dy &= 0 \\ \frac{x}{x+1}dx + \frac{y}{y^4 - 1}dy &= 0 \\ \frac{x}{x+1}dx &= -\frac{y}{y^4 - 1}dy \\ \int \frac{x}{x+1}dx &= -\int \frac{y}{y^4 - 1}dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1}dx &= \int dx - \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= x - \ln|x+1|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t &:= \frac{y^2}{2} \\ \int \frac{y}{y^4-1}dy &= \int \frac{1}{4t^2-1}dy \\ &= \int \frac{1}{(2t-1)(2t+1)}dy \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2t-1}dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2t+1}dy \\ &= \frac{\ln|2t-1|}{4} - \frac{\ln|2t+1|}{4} + C \\ &= \frac{\ln|y^2-1|}{4} - \frac{\ln|y^2+1|}{4} + C\end{aligned}$$

$$x - \ln|x+1| = -\frac{\ln|y^2-1|}{4} + \frac{\ln|y^2+1|}{4} + C$$

Ответ: $y \equiv 1$ или $x \equiv -1$ или $x - \ln|x+1| = -\frac{\ln|y^2-1|}{4} + \frac{\ln|y^2+1|}{4} + C$

5 $yy' + xyy'' = x(y')^2 + x^3$

$$\begin{aligned}yy' + xyy'' &= x(y')^2 + x^3 \\ y(xy')' &= (xy')y' + x^3 \\ y(xy')' - (xy')y' &= x^3 \\ \frac{y(xy')' - (xy')y'}{y^2} &= \frac{x^3}{y^2} \\ \left(\frac{xy'}{y}\right)' &= \frac{x^3}{y^2}\end{aligned}$$

:(

6 $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$

$y \equiv \text{const}$ - подходит

$$\begin{aligned}
y'' \cos y + (y')^2 \sin y &= y' \\
t := y' \quad y'' &= t't \\
t't \cos y + t^2 \sin y &= t \\
t' \cos y + t \sin y &= 1 \\
\frac{t'}{\cos y} + \frac{t \operatorname{tg} y}{\cos y} &= \frac{1}{\cos^2 y} \\
\frac{t'}{\cos y} + t \left(\frac{1}{\cos y}\right)' &= \frac{1}{\cos^2 y} \\
\left(\frac{t}{\cos y}\right)' &= \frac{1}{\cos^2 y} \\
\int \left(\frac{t}{\cos y}\right)' dy &= \int \frac{1}{\cos^2 y} dy \\
\frac{t}{\cos y} + C &= \operatorname{tg} y \\
t &= \sin y + C \cos y \\
y' &= \sin y + C \cos y \\
\frac{y'}{\sin y + C \cos y} &= 1 \\
\frac{dy}{\sin y + C \cos y} &= dx \\
\int \frac{dy}{\sin y + C \cos y} &= \int dx \\
\int \frac{dy}{\sin y + C \cos y} &= x + C_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a := \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) \quad dy &= \frac{2}{1+a^2} da \\
\int \frac{dy}{\sin y + C \cos y} &= \int \frac{\frac{2}{1+a^2} da}{\frac{2a}{1+a^2} + C \frac{1-a^2}{1+a^2}} \\
&= \int \frac{2da}{2a + C(1-a^2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{2da}{2a + C - Ca^2} \\
&= 2\int \frac{C}{\left(-Ca + \sqrt{C^2+1} + 1\right)\left(Ca + \sqrt{C^2+1} - 1\right)} da \\
&= 2\int \left(\frac{C}{2\sqrt{C^2+1}\left(Ca + \sqrt{C^2+1} - 1\right)} - \frac{C}{2\sqrt{C^2+1}\left(Ca - \sqrt{C^2+1} - 1\right)}\right) da \\
&= 2\int \left(\frac{C}{2\sqrt{C^2+1}\left(Ca + \sqrt{C^2+1} - 1\right)} - \frac{C}{2\sqrt{C^2+1}\left(Ca - \sqrt{C^2+1} - 1\right)}\right) da \\
&= \frac{\ln\left(\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) + \sqrt{C^2+1} - 1\right|\right) - \ln\left(\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) - \sqrt{C^2+1} - 1\right|\right)}{\sqrt{C^2+1}} + C_1 \\
x &= \frac{\ln\left(\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) + \sqrt{C^2+1} - 1\right|\right) - \ln\left(\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) - \sqrt{C^2+1} - 1\right|\right)}{\sqrt{C^2+1}} + C_1
\end{aligned}
$$

Ответ: $y \equiv C$ или $x = \frac{\ln\left(\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) + \sqrt{C^2+1} - 1\right|\right) - \ln\left(\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) - \sqrt{C^2+1} - 1\right|\right)}{\sqrt{C^2+1}} + C_1$

7 $y''''' - 6y'''' + 9y''' = 0$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$$

Корни - 0 кратности 3 и 3 кратности 2.

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$