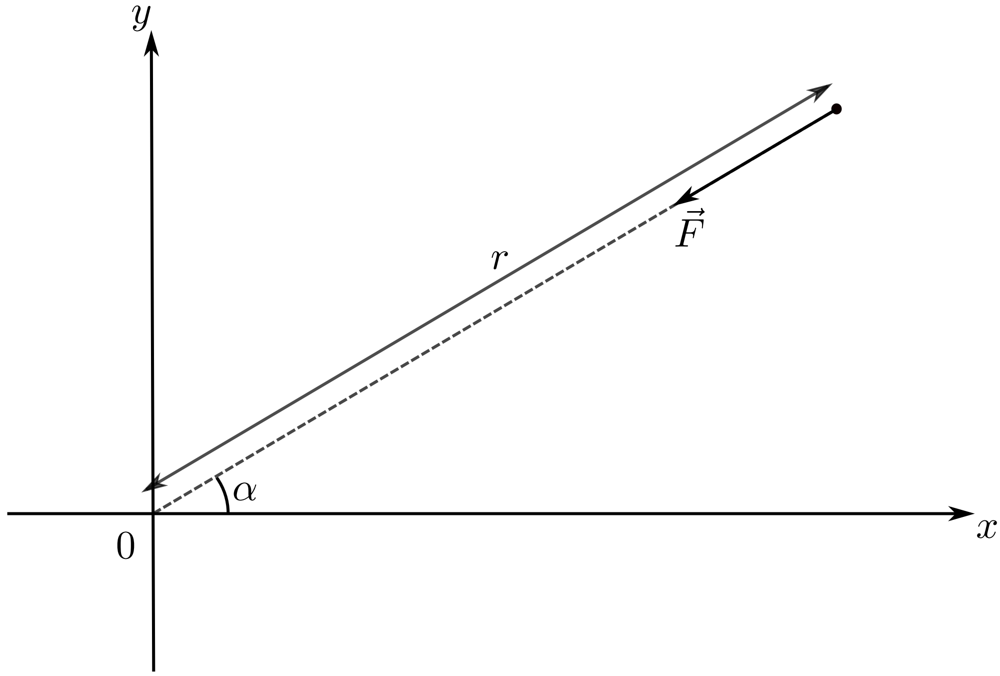
1 Тело массы m движется на плоскости x, y притягиваясь к точке $(0, 0)$ с силой a^2mr, где r - расстояние до этой точки. Найти движение тела при начальных условиях $x(0) = d, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = v$ и траекторию этого движения.



$$\begin{cases} F\cos\alpha = -m\ddot{x} \\ F\sin\alpha = -m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -m\ddot{x} \\ F\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2mr\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -m\ddot{x} \\ a^2mr\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a^2x = \ddot{x} \\ -a^2y = \ddot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a^2 = \lambda^2 \\ -a^2 = \aleph^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pm ia = \lambda \\ \pm ia = \aleph \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at) \\ y = C_3 \cos(at) + C_4 \sin(at) \end{cases}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} d = C_1 \\ 0 = C_3 \end{cases}$$

Посчитаем производные x, y и подставим другие начальные условия:

$$\begin{cases} x' = -aC_1 \sin(at) + aC_2 \cos(at) \\ y' = -aC_3 \sin(at) + aC_4 \cos(at) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = aC_2 \\ v = aC_4 \end{cases}$$

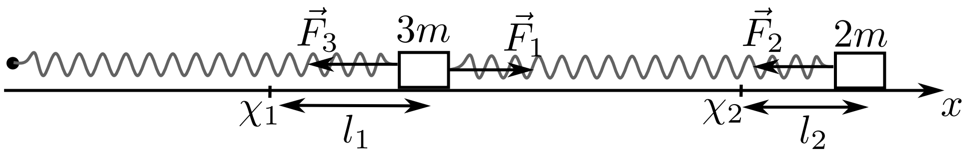
Итого:

$$\begin{cases} d = C_1 \\ 0 = C_3 \\ 0 = C_2 \\ \frac{v}{a} = C_4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = d \cos(at) \\ y = \frac{v}{a} \sin(at) \end{cases}$$

Траектория этого движения при $d \neq 0, v \neq 0$ — эллипс. Если одно из $\{d, v\}$ равно 0, то траектория — отрезок на оси. Если оба d, v равны 0, то траектория — точка $0, 0$.

Итого есть три различных траектории — эллипс, прямая и точка.

2 Один конец пружины закреплен неподвижно в точке 0, а к другому прикреплен груз массы $3m$, соединённый другой пружиной с грузом массы $2m$. Оба груза двигаются без трения по одной прямой, проходящей через точку 0. Каждая из пружин растягивается на величину x под действием силы a^2mx. Найти возможные периодические движения системы.



Пусть $\xi_1(t), \xi_2(t)$ — координаты первого и второго груза в момент времени t, а χ_1, χ_2 — точки равновесия соответствующих грузов.

Вот что происходит, если у бедных студентов забрать букву x, начинаются всякие загогулины.

Запишем второй закон Ньютона для обоих грузов сразу в проекции на ось Ox:

$$\begin{cases} F_1 - F_3 = 3m\ddot{\xi}_1 \\ -F_2 = 2m\ddot{\xi}_2 \end{cases}$$

Заметим, что первая пружина деформирована на $l_1 = \xi_1 - \chi_1$, а вторая на $\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1$. Тогда:

$$\begin{cases} F_3 = a^2m(\xi_1 - \chi_1) \\ F_1 = F_2 = a^2m(\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 - F_3 = 3m\ddot{\xi}_1 \\ -F_2 = 2m\ddot{\xi}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a^2m(\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1) - a^2m(\xi_1 - \chi_1) = 3m\ddot{\xi}_1 \\ -a^2m(\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1) = 2m\ddot{\xi}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a^2(\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1) - a^2(\xi_1 - \chi_1) = 3\ddot{\xi}_1 \\ -a^2(\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1) = 2\ddot{\xi}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a^2(\xi_2 - 2\xi_1 - \chi_2 + 2\chi_1) = 3\ddot{\xi}_1 \\ -a^2(\xi_2 - \xi_1 - \chi_2 + \chi_1) = 2\ddot{\xi}_2 \end{cases}$$

Пусть $\zeta_1 = \xi_1 - \chi_1, \zeta_2 = \xi_2 - \chi_2$.

$$\begin{cases} a^2(\zeta_2 - 2\zeta_1) = 3\ddot{\zeta}_1 \\ -a^2(\zeta_2 - \zeta_1) = 2\ddot{\zeta}_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2a^2}{3} - \lambda^2 & \frac{a^2}{3} \\ \frac{a^2}{3} & -\frac{a^2}{2} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = \pm ia \\ \lambda = \pm \frac{ia}{\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \zeta_1 = C_1 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_2 \cos(at) + C_3 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_4 \sin(at) \\ \zeta_2 = C_5 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_6 \cos(at) + C_7 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_8 \sin(at) \end{cases}$$

Выразим константы друг через друга:

$$\triangleleft \zeta_1 = C_1 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right), \zeta_2 = C_5 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right)$$

$$-a^2(\zeta_2 - \zeta_1) = 2\ddot{\zeta}_2$$

$$-a^2(C_5 - C_1) \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) = 2C_5 \left(-\frac{a}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right)\right)'$$

$$-a^2(C_5 - C_1) \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{a^2}{3} C_5 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right)$$

$$-3(C_5 - C_1) = -C_5$$

$$3C_1 = 2C_5$$

$$1.5C_1 = C_5$$

$$\triangleleft \zeta_1 = C_3 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right), \zeta_2 = C_7 \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right)$$

$$-a^2(\zeta_2 - \zeta_1) = 2\ddot{\zeta}_2$$

$$-a^2(C_7 - C_3) \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) = 2C_7 \left(\frac{a}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right)\right)'$$

$$-a^2(C_7 - C_3)\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{a^2}{3}C_7\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right)$$
$$-3(C_7 - C_3) = -C_7$$
$$3C_3 = 2C_7$$
$$1.5C_3 = C_7$$

$$\triangleleft \zeta_1 = C_2\cos(at), \zeta_2 = C_6\cos(at)$$
$$-a^2(\zeta_2 - \zeta_1) = 2\ddot{\zeta}_2$$
$$-a^2(C_6 - C_2)\cos(at) = -2C_6a^2\cos(at)$$
$$C_2 = -C_6$$

$$\triangleleft \zeta_1 = C_4\sin(at), \zeta_2 = C_8\sin(at)$$
$$-a^2(\zeta_2 - \zeta_1) = 2\ddot{\zeta}_2$$
$$-a^2(C_8 - C_4)\sin(at) = -2C_6a^2\sin(at)$$
$$C_4 = -C_8$$

Итого:

$$\begin{cases} \zeta_1 = C_1\cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_2\cos(at) + C_3\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_4\sin(at) \\ \zeta_2 = 1.5C_1\cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) - C_2\cos(at) + 1.5C_3\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) - C_4\sin(at) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \xi_1 = \chi_1 + C_1\cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_2\cos(at) + C_3\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) + C_4\sin(at) \\ \xi_2 = \chi_2 + 1.5C_1\cos\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) - C_2\cos(at) + 1.5C_3\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}\right) - C_4\sin(at) \end{cases}$$

Выразим константы через величины, имеющие физический смысл. Есть *(я знаю)* два способа это сделать — либо подставить $t = 0$ и $t = \frac{\sqrt{6}\pi}{2a}$, чтобы занулить косинус и синус соответственно. Но величина “координата груза в момент времени $\frac{\sqrt{6}\pi}{2a}$” не очень звучит, поэтому буду использовать второй способ — подставить $t = 0$ и взять производную, чтобы выразить через начальные координаты и скорости.

$$\begin{cases} \xi_1(0) = \chi_1 + C_3 + C_4 \\ \xi_2(0) = \chi_2 + 1.5C_3 - C_4 \\ \xi_1'(0) = C_1 + C_2 \\ \xi_2'(0) = 1.5C_1 - C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1(0) - \chi_1 - C_3 = C_4 \\ \xi_2(0) = \chi_2 + 2.5C_3 - \xi_1(0) + \chi_1 \\ \xi_1'(0) - C_1 = C_2 \\ \xi_2'(0) = 2.5C_1 - \xi_1'(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1(0) - \chi_1 - 0.4(\xi_2(0) - \chi_2 - \chi_1 + \xi_1(0)) = C_4 \\ 0.4(\xi_2(0) - \chi_2 - \chi_1 + \xi_1(0)) = C_3 \\ \xi_1'(0) - 0.4(\xi_2'(0) + \xi_1'(0)) = C_2 \\ 0.4(\xi_2'(0) + \xi_1'(0)) = C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.6\xi_1(0) - 0.6\chi_1 - 0.4\xi_2(0) - 0.4\chi_2 = C_4 \\ 0.4(\xi_2(0) - \chi_2 - \chi_1 + \xi_1(0)) = C_3 \\ 0.6\xi_1'(0) - 0.4\xi_2'(0) = C_2 \\ 0.4(\xi_2'(0) + \xi_1'(0)) = C_1 \end{cases}$$

Можно заметить, что при любом $t = \frac{2\pi n}{a}, n \in \mathbb{Z}$ значения всех тригонометрических функций равны, поэтому период $t = \frac{2\pi}{a}$

3 На концах вала закреплены два шкива, моменты инерции которых I_1 и I_2. При повороте одного шкива относительно другого на любой угол ϕ вследствие деформации вала возникают упругие силы с крутящим моментом $K\phi$. Найти частоту крутильных колебаний вала при отсутствии внешних сил.

Пусть угол первого и второго шкива $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ в момент времени t. Тогда упругие силы вала $K(\alpha_1 - \alpha_2)$. Т.к. это единственные силы, действующие на шкивы, запишем вращательный аналог второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\alpha}_1 = -K(\alpha_1 - \alpha_2) \\ I_2\ddot{\alpha}_2 = K(\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

Пусть $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Тогда:

$$\ddot{\alpha} = -K\alpha\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)$$
$$\lambda^2 = -C$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{C}$$

i появилось, т.к. C очевидно положительный.

$$\alpha = C_1\cos(\sqrt{C}t) + C_2\sin(\sqrt{C}t), C = K\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)$$

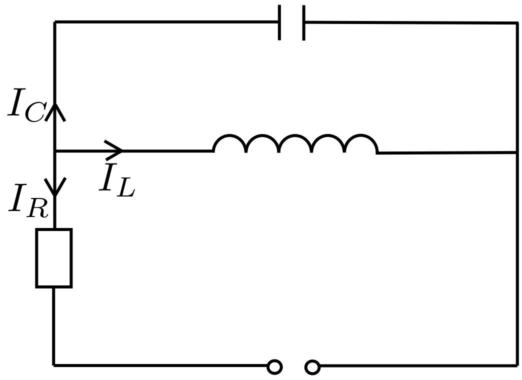
Найдём частоту колебаний. Это $1/$ длительность одного колебания. Длительность колебания — $\frac{2\pi}{\sqrt{C}}$ (период тригонометрических функций). Итого частота *(в герцах)*:

$$\frac{\sqrt{K(I_1 + I_2)}}{2\pi\sqrt{I_1 I_2}}$$

4 К источнику току с напряжением $E = V\sin wt$ последовательно соединено сопротивление R. Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых включена самоиндукция L, а в другой ёмкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через сопротивление R. При какой частоте w сила тока наибольшая? Наименьшая?

$$U_R + U_C + U_L = E$$
$$U_R + 2U_C = E$$

По Кирхгофу:



$$I_R = I_C + I_L$$
$$I_C = C\dot{U}_C$$
$$I_L = \frac{1}{L}\int_0^t U_L = \frac{1}{L}\int_0^t U_C$$
$$I_R = I_C + I_L$$
$$I_R = C\dot{U}_C + \frac{1}{L}\int_0^t U_C$$
$$I_R = \frac{1}{2}C\dot{E} - \frac{1}{2}C\dot{U}_R + \frac{1}{L}\int_0^t \frac{E - U_R}{2}$$
$$2I_R = CVw\cos(wt) - CR\dot{I}_R + \frac{1}{L}\int_0^t (E - U_R)$$
$$2\dot{I}_R = -CVw^2\sin(wt) - CR\ddot{I}_R + \frac{1}{L}(E - U_R)$$
$$2\dot{I}_R = -CVw^2\sin(wt) - CR\ddot{I}_R + \frac{1}{L}(V\sin(wt) - U_R)$$
$$CR\ddot{I}_R + 2\dot{I}_R + \frac{U_R}{L} = -CVw^2\sin(wt) + \frac{V\sin(wt)}{L}$$
$$\ddot{I}_R + \frac{2}{CR}\dot{I}_R + \frac{I_R}{LC} = -\frac{1}{R}Vw^2\sin(wt) + \frac{V\sin(wt)}{LRC}$$

Решим методом вариации постоянных. Для этого решим уравнение без правой части:

$$\lambda^2 + \frac{2}{CR}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$
$$\lambda = \frac{-\frac{1}{CR} \pm \sqrt{\frac{1}{(CR)^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Первый случай: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2CR}, I_R = C_1 e^{-t/2CR} + C_2 t e^{-t/2CR}$

Второй случай: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, I_R = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Третий случай: $\lambda \notin \mathbb{R}, I_R = e^{-t/2CR}(C_1\cos(\frac{4t}{LC} - \frac{t}{(CR)^2}) + C_2\sin(\frac{t}{LC} - \frac{t}{(CR)^2}))$

Дальше нужно просто закончить метод вариации для каждого из трех случаев и найти максимум/минимум I_R. Однако, сейчас 5 утра, поэтому сделаем вид, что я это все выполнил.

5 Какое условие достаточно наложить на собственные значения матрицы A, чтобы система уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax + f(t)$ имела периодическое решение при всякой непрерывной вектор-функции $f(t)$ периода w?

Если f имеет вид $a\cos(2\pi wt) + b\sin(2\pi wt)$, то очевидно $\lambda \neq -2\pi iw$. Однако не все периодические функции имеют такой вид и я не могу дать ответ в общем случае. Есть идея, что достаточно того, чтобы матрица была периодической, т.е. $\exists k \in \mathbb{N}_+ : A^k = A$, но это условие не переводится в собственные значения.