

Методы оптимизации

Отчет по лабораторной работе №1
“Алгоритмы одномерной минимизации функции”

Вариант 1

Выполнили:

Михайлов Максим
Загребина Мария
Кулагин Ярослав

Команда:

$\forall \bar{R} \in \mathcal{R}^n : \mathbf{R}(\bar{R}) \in \mathcal{R}$
(КаМаЗ)

Группа: М3237

1 Цель

Реализовать алгоритмы одномерной минимизации функции:

- Метод дихотомии
- Метод золотого сечения
- Метод Фибоначчи
- Метод парабол
- Комбинированный метод Брента

Протестировать алгоритмы на $f(x) = x^2 + e^{-0.35x}$ в интервале $[-2; 3]$ и других функциях, сравнить методы друг с другом.

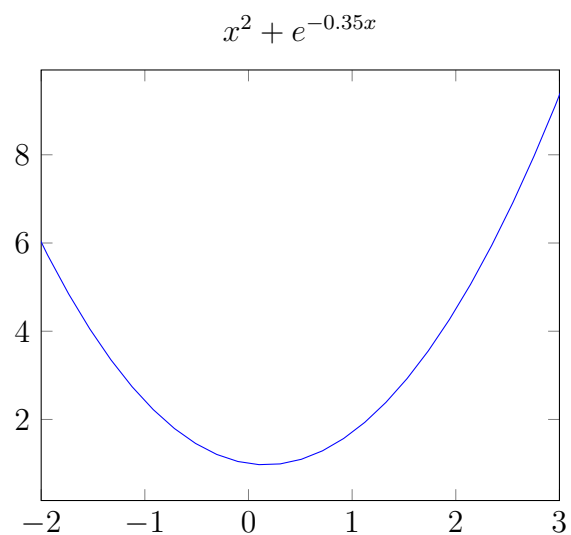
2 Ход работы

2.1 Аналитическое решение

$$\begin{aligned}0 &= f'(x) = 2x - 0.35e^{-0.35x} \\2x &= 0.35e^{-0.35x} \\800 \cdot 0.35x &= 49 \frac{1}{e^{0.35x}} \\0.35x &:= W(z) \\800 \cdot W(z) &= 49 \frac{W(z)}{z} \\\frac{49}{800} &= z \\0.35x &= W\left(\frac{800}{49}\right) \\x &= \frac{20}{7} \cdot W\left(\frac{800}{49}\right)\end{aligned}$$

W -функция Ламберта не может быть выражена в элементарных функциях, поэтому аналитическое решение приближенное:

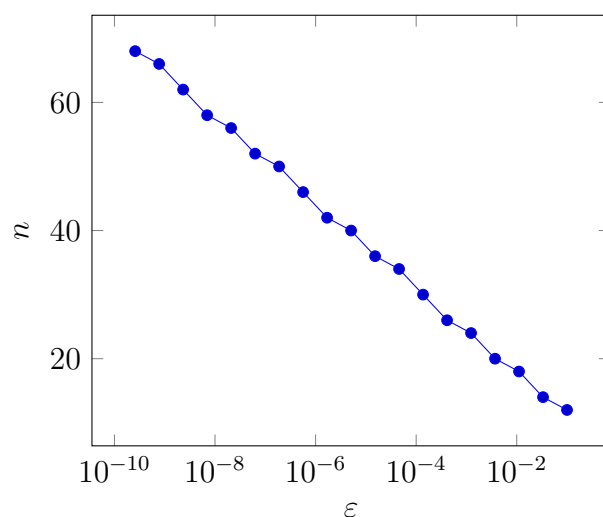
$$\begin{cases} x_{\min} \approx 0.16517 \\ y_{\min} \approx 0.9711 \end{cases}$$



2.2 Метод дихотомии

N	a	b	% длины предыдущего отрезка	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1	-2	3	100	0.5	1.08946	0.5	1.08946
2	-2	0.5	50	-0.75	1.86268	-0.75	1.86268
3	-0.75	0.5	50	-0.125	1.06035	-0.125	1.06035
4	-0.125	0.5	50	0.1875	0.971638	0.1875	0.971638
5	-0.125	0.1875	50	0.03125	0.990099	0.0312501	0.990099
6	0.03125	0.1875	50	0.109375	0.974405	0.109375	0.974405
7	0.109375	0.1875	50	0.148437	0.971407	0.148438	0.971407
8	0.148437	0.1875	50.0001	0.167969	0.971119	0.167969	0.971119
9	0.148437	0.167969	50.0001	0.158203	0.971162	0.158203	0.971162
10	0.158203	0.167969	50.0003	0.163086	0.971115	0.163086	0.971115
11	0.163086	0.167969	50.0005	0.165527	0.971111	0.165527	0.971111
12	0.163086	0.165527	50.001	0.164307	0.971112	0.164307	0.971112
13	0.164307	0.165527	50.002	0.164917	0.971111	0.164917	0.971111
14	0.164917	0.165527	50.0041	0.165222	0.971111	0.165222	0.971111
15	0.164917	0.165222	50.0082	0.16507	0.971111	0.16507	0.971111
16	0.16507	0.165222	50.0164	0.165146	0.971111	0.165146	0.971111
17	0.165146	0.165222	50.0327	0.165184	0.971111	0.165184	0.971111
18	0.165146	0.165184	50.0655	0.165165	0.971111	0.165165	0.971111
19	0.165165	0.165184	50.1307	0.165174	0.971111	0.165175	0.971111
20	0.165165	0.165175	50.2608	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111
21	0.16517	0.165175	50.5188	0.165172	0.971111	0.165172	0.971111
22	0.16517	0.165172	51.027	0.165171	0.971111	0.165171	0.971111
23	0.16517	0.165171	52.0127	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111

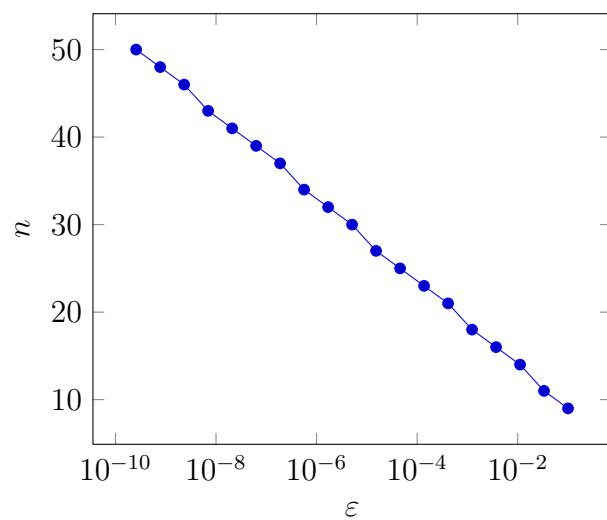
График зависимости количества измерений n от логарифма задаваемой точности ε



2.3 Метод золотого сечения

N	a	b	% длины предыдущего отрезка	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1	-2	3	100	-0.0901699	1.04019	1.09017	1.87127
2	-2	1.09017	61.8034	-0.81966	2.00411	-0.0901699	1.04019
3	-0.81966	1.09017	61.8034	-0.0901699	1.04019	0.36068	1.0115
4	-0.0901699	1.09017	61.8034	0.36068	1.0115	0.63932	1.20824
5	-0.0901699	0.63932	61.8034	0.188471	0.971685	0.36068	1.0115
6	-0.0901699	0.36068	61.8034	0.0820393	0.978425	0.188471	0.971685
7	0.0820393	0.36068	61.8034	0.188471	0.971685	0.254249	0.9795
8	0.0820393	0.254249	61.8034	0.147817	0.971429	0.188471	0.971685
9	0.0820393	0.188471	61.8034	0.122692	0.97302	0.147817	0.971429
10	0.122692	0.188471	61.8034	0.147817	0.971429	0.163346	0.971114
11	0.147817	0.188471	61.8034	0.163346	0.971114	0.172942	0.971175
12	0.147817	0.172942	61.8034	0.157414	0.971174	0.163346	0.971114
13	0.157414	0.172942	61.8034	0.163346	0.971114	0.167011	0.971114
14	0.157414	0.167011	61.8034	0.16108	0.971129	0.163346	0.971114
15	0.16108	0.167011	61.8034	0.163346	0.971114	0.164746	0.971111
16	0.163346	0.167011	61.8034	0.164746	0.971111	0.165611	0.971111
17	0.163346	0.165611	61.8034	0.164211	0.971112	0.164746	0.971111
18	0.164211	0.165611	61.8034	0.164746	0.971111	0.165076	0.971111
19	0.164746	0.165611	61.8034	0.165076	0.971111	0.16528	0.971111
20	0.164746	0.16528	61.8034	0.16495	0.971111	0.165076	0.971111
21	0.16495	0.16528	61.8034	0.165076	0.971111	0.165154	0.971111
22	0.165076	0.16528	61.8034	0.165154	0.971111	0.165202	0.971111
23	0.165076	0.165202	61.8034	0.165124	0.971111	0.165154	0.971111
24	0.165124	0.165202	61.8034	0.165154	0.971111	0.165173	0.971111
25	0.165154	0.165202	61.8034	0.165173	0.971111	0.165184	0.971111
26	0.165154	0.165184	61.8034	0.165166	0.971111	0.165173	0.971111
27	0.165166	0.165184	61.8034	0.165173	0.971111	0.165177	0.971111
28	0.165166	0.165177	61.8034	0.16517	0.971111	0.165173	0.971111
29	0.165166	0.165173	61.8034	0.165168	0.971111	0.16517	0.971111
30	0.165168	0.165173	61.8034	0.16517	0.971111	0.165171	0.971111
31	0.165168	0.165171	61.8034	0.165169	0.971111	0.16517	0.971111
32	0.165169	0.165171	61.8034	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111

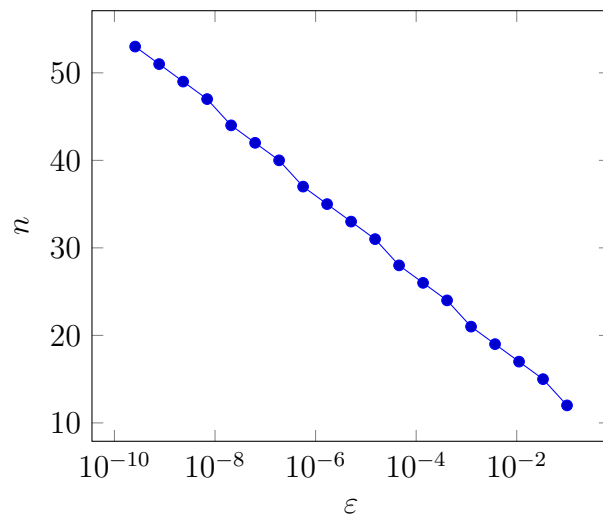
График зависимости количества измерений n от логарифма задаваемой точности ε



2.4 Метод Фибоначчи

N	a	b	% длины предыдущего отрезка	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1	-2	3	100	-0.0901699	1.04019	1.09017	1.87127
2	-2	1.09017	61.8034	-0.81966	2.00411	-0.0901699	1.04019
3	-0.81966	1.09017	61.8034	-0.0901699	1.04019	0.36068	1.0115
4	-0.0901699	1.09017	61.8034	0.36068	1.0115	0.63932	1.20824
5	-0.0901699	0.63932	61.8034	0.188471	0.971685	0.36068	1.0115
6	-0.0901699	0.36068	61.8034	0.0820393	0.978425	0.188471	0.971685
7	0.0820393	0.36068	61.8034	0.188471	0.971685	0.254249	0.9795
8	0.0820393	0.254249	61.8034	0.147817	0.971429	0.188471	0.971685
9	0.0820393	0.188471	61.8034	0.122692	0.97302	0.147817	0.971429
10	0.122692	0.188471	61.8034	0.147817	0.971429	0.163346	0.971114
11	0.147817	0.188471	61.8034	0.163346	0.971114	0.172942	0.971175
12	0.147817	0.172942	61.8034	0.157414	0.971174	0.163346	0.971114
13	0.157414	0.172942	61.8034	0.163346	0.971114	0.167011	0.971114
14	0.157414	0.167011	61.8034	0.16108	0.971129	0.163346	0.971114
15	0.16108	0.167011	61.8034	0.163346	0.971114	0.164746	0.971111
16	0.163346	0.167011	61.8034	0.164746	0.971111	0.165611	0.971111
17	0.163346	0.165611	61.8034	0.164211	0.971112	0.164746	0.971111
18	0.164211	0.165611	61.8034	0.164746	0.971111	0.165076	0.971111
19	0.164746	0.165611	61.8034	0.165076	0.971111	0.16528	0.971111
20	0.164746	0.16528	61.8034	0.16495	0.971111	0.165076	0.971111
21	0.16495	0.16528	61.8034	0.165076	0.971111	0.165154	0.971111
22	0.165076	0.16528	61.8034	0.165154	0.971111	0.165202	0.971111
23	0.165076	0.165202	61.8034	0.165124	0.971111	0.165154	0.971111
24	0.165124	0.165202	61.8034	0.165154	0.971111	0.165173	0.971111
25	0.165154	0.165202	61.8033	0.165173	0.971111	0.165184	0.971111
26	0.165154	0.165184	61.8037	0.165166	0.971111	0.165173	0.971111
27	0.165166	0.165184	61.8026	0.165173	0.971111	0.165177	0.971111
28	0.165166	0.165177	61.8056	0.16517	0.971111	0.165173	0.971111
29	0.165166	0.165173	61.7978	0.165168	0.971111	0.16517	0.971111
30	0.165168	0.165173	61.8182	0.16517	0.971111	0.165171	0.971111
31	0.165168	0.165171	61.7647	0.165169	0.971111	0.16517	0.971111
32	0.165169	0.165171	61.9048	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111
33	0.16517	0.165171	61.5385	0.16517	0.971111	0.165171	0.971111
34	0.16517	0.165171	62.5	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111
35	0.16517	0.16517	60	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111

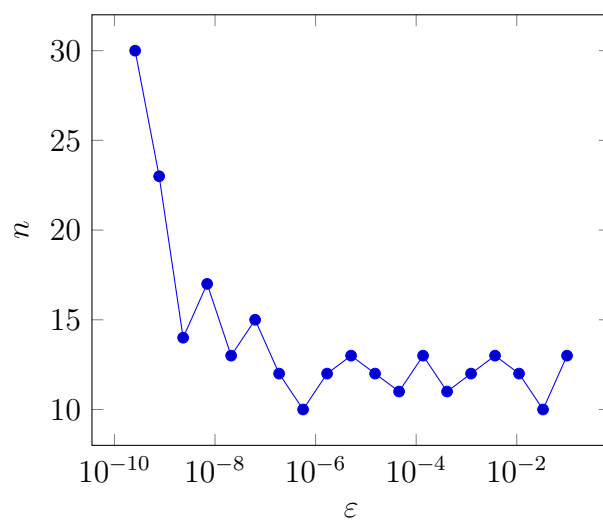
График зависимости количества измерений n от логарифма задаваемой точности ε



2.5 Метод парабол

N	a	b	% длины предыдущего отрезка	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$
1	-2	3	100	-2	6.01375	2.20094	5.30699	3	9.34994
2	-2	2.20094	84.0188	-2	6.01375	0.180922	0.971373	2.20094	5.30699
3	-2	0.180922	51.9151	-2	6.01375	0.179732	0.971335	0.180922	0.971373
4	-2	0.179732	99.9454	-2	6.01375	0.16542	0.971111	0.179732	0.971335
5	-2	0.16542	99.3434	-2	6.01375	0.165293	0.971111	0.16542	0.971111
6	-2	0.165293	99.9941	-2	6.01375	0.165173	0.971111	0.165293	0.971111
7	-2	0.165173	99.9945	-2	6.01375	0.165171	0.971111	0.165173	0.971111
8	-2	0.165171	99.9999	-2	6.01375	0.16517	0.971111	0.165171	0.971111
9	-2	0.16517	100	-2	6.01375	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111
10	-2	0.16517	100	-2	6.01375	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111

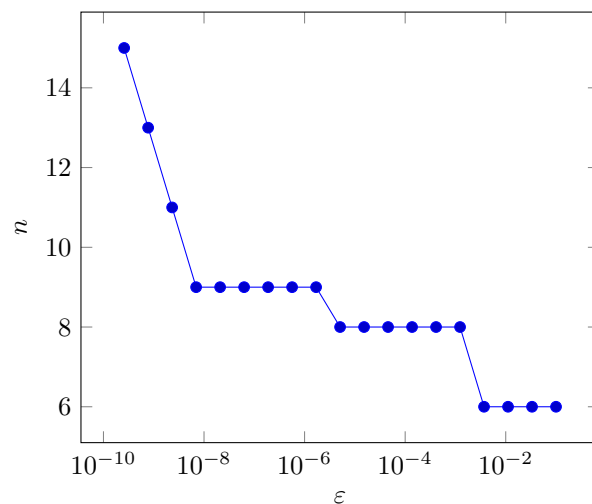
График зависимости количества измерений n от логарифма задаваемой точности ε



2.6 Комбинированный метод Брента

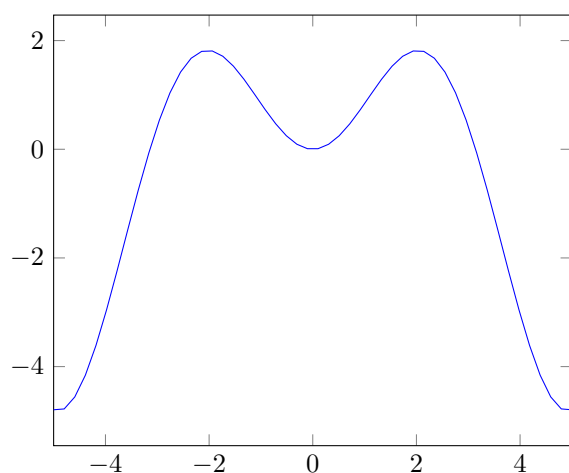
N	a	b	%	u	$f(u)$	w	$f(w)$	x	$f(x)$	v	$f(v)$
1	-2	3	100	1.09017	1.87127	3	9.34994	3	9.34994	3	9.34994
2	-2	3	100	-0.0901699	1.04019	3	9.34994	1.09017	1.87127	3	9.34994
3	-2	1.09017	61.8034	0.161282	0.971127	1.09017	1.87127	-0.0901699	1.04019	3	9.34994
4	-0.0901699	1.09017	38.1966	0.165893	0.971111	-0.0901699	1.04019	0.161282	0.971127	1.09017	1.87127
5	0.161282	1.09017	78.6966	0.165168	0.971111	0.161282	0.971127	0.165893	0.971111	-0.0901699	1.04019
6	0.161282	0.165893	0.496316	0.16517	0.971111	0.165893	0.971111	0.165168	0.971111	0.161282	0.971127
7	0.165168	0.165893	15.7285	0.16517	0.971111	0.165168	0.971111	0.16517	0.971111	0.165893	0.971111
8	0.16517	0.165893	99.6737	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111	0.16517	0.971111	0.165168	0.971111

График зависимости количества измерений n от логарифма задаваемой точности ε

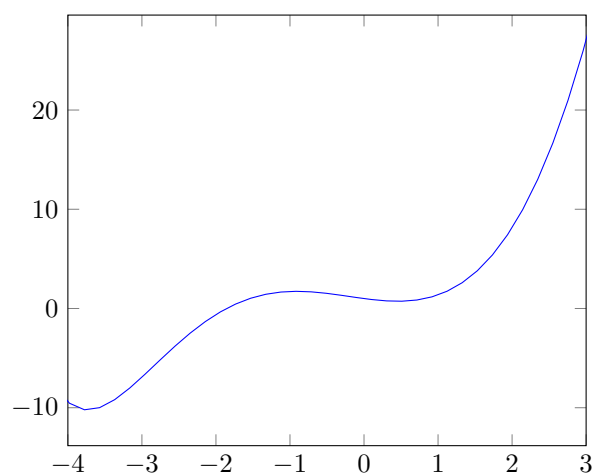


3 Тестирование на многомодальных функциях

3.1 $f(x) = \sin(x) \cdot x$

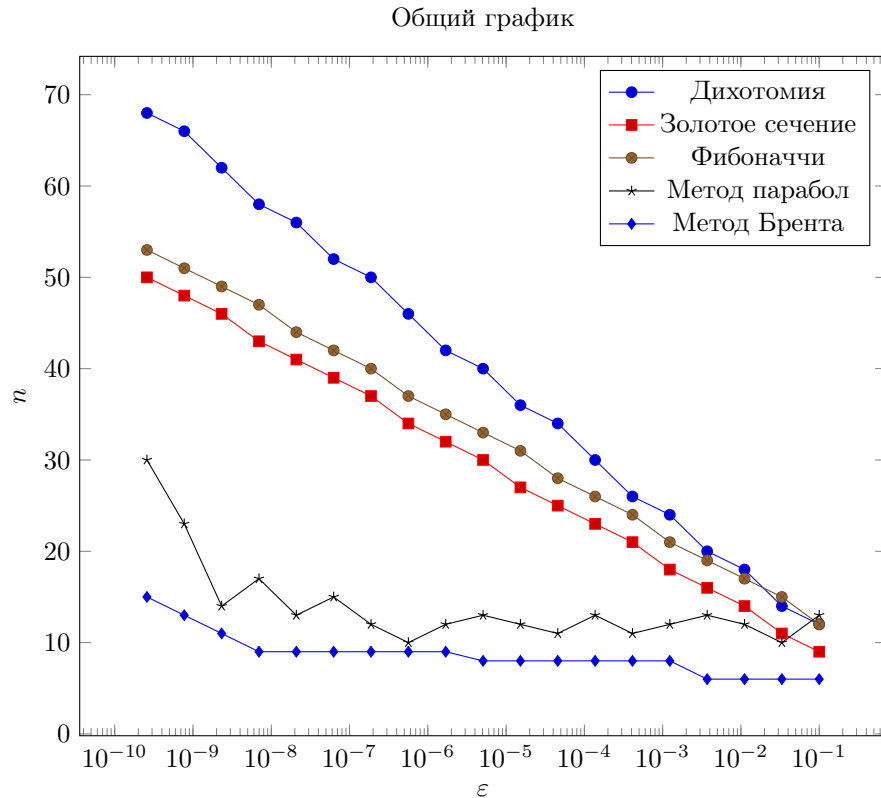


3.2 $f(x) = x^3 + e^{-x}$



	$f(x) = \sin(x) \cdot x$	$f(x) = x^3 + e^{-x}$
Верный ответ	4.91318	-3.73308
Дихотомия	2.2594e-16	0.458962
Золотое сечение	2.80886e-16	0.458962
Фибоначчи	2.2594e-16	0.458962
Параболы	4.91318	-3.73308
Метод Брента	4.91318	0.458962

4 Выводы



Для каждого метода таблица построена при $\varepsilon = 10^{-6}$

Из рассмотренных алгоритмов эффективнее всего сходится комбинированный алгоритм Брента, т.к. он сочетает в себе преимущества метода парабол и золотого сечения — квадратичная сходимость в окрестности решения и гарантированно линейная сходимость вне окрестности.

Оптимизируемая функция весьма точно аппроксимируется параболой, т.к. $e^{-0.35x} \ll x^2$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, поэтому метод парабол сходится очень быстро, но может привести к неустойчивым биениям. Из-за склейки точек невозможно добиться такой же большой точности, как и у остальных методов (на рассмотренной функции при $\varepsilon = 10^{-10}$)

Методы Фибоначчи и золотого сечения используют больше шагов, но в 2 раза реже считают значение функции, поэтому в общем случае выгоднее метода дихотомии.

Ни один из рассмотренных алгоритмов не гарантирует нахождение глобального минимума многомодальной функций, но всегда находится локальный.

5 Исходный код

5.1 Оптимизация

5.1.1 Рассматриваемый отрезок

5.1.2 Общий класс оптимизаторов

5.1.3 Общий класс оптимизаторов, рассматривающих 2 точки

5.1.4 Метод дихотомии

5.1.5 Метод золотого сечения

5.1.6 Метод Фибоначчи

5.1.7 Метод парабол

5.1.8 Комбинированный метод Брента

5.2 Графический интерфейс