

# Методы оптимизации

Отчет по лабораторной работе №2  
“Алгоритмы минимизации многомерных функций”

Выполнили:

Михайлов Максим  
Загребина Мария  
Кулагин Ярослав

Команда:

$\forall \bar{R} \in \mathcal{R}^n : \mathbf{R}(\bar{R}) \in \mathcal{R}$   
(КаМаЗ)

Группа: М3237

# 1 Цели

1. Реализовать алгоритмы минимизации функций:
  - Метод градиентного спуска
  - Метод наискорейшего спуска
  - Метод сопряженных градиентов
2. Исследовать скорость сходимости в зависимости от выбора алгоритма одномерной оптимизации в методе наискорейшего спуска.
3. Проанализировать траектории методов на различных квадратичных функциях
4. Исследовать зависимость числа итераций от следующих входных параметров:
  - Число обусловленности
  - Размерность пространства

# 2 Вычислительная схема методов

## 2.1 Метод градиентного спуска

## 2.2 Метод наискорейшего спуска

## 2.3 Метод сопряженных градиентов

# 3 Ход работы

## 3.1 Скорость сходимости в зависимости от выбора алгоритма одномерной оптимизации

Следующие измерения проводились для функции  $f = x^2 + y^2 - xy + 4x + 3y - 1$

Точка минимума  $(-3.66667, -3.33333)$ .

Начальная точка  $(2, 2)$

$\varepsilon = 10^{-6}$

1. Метод золотого сечения

№	$x_1$	$x_2$	$\alpha$	Итераций одномерного поиска
0	2	2	0.666666	19
1	1.48785	1.57321	0.666666	19
2	0.982971	1.13785	0.666666	19
3	0.484755	0.69488	0.666666	19
4	-0.00744836	0.245237	0.666666	19
5	-0.494338	-0.210155	0.666666	19
6	-0.976651	-0.670391	0.666666	19
7	-1.45515	-1.13459	0.666666	19
8	-1.93063	-1.60188	0.666666	19
9	-2.4039	-2.07141	0.666666	19
10	-2.87578	-2.54234	0.666666	19
11	-3.34709	-3.01384	0.451891	19
12	-3.66675	-3.33325	0.000112783	19
13	-3.66667	-3.33333	8.85782e-07	19
14	-3.66667	-3.33333	0	0

## 2. Метод фибоначчи

№	$x_1$	$x_2$	$\alpha$	Итераций одномерного поиска
0	2	2	0.666666	30
1	1.48785	1.57321	0.666666	30
2	0.98297	1.13785	0.666666	30
3	0.484754	0.694879	0.666666	30
4	-0.00745045	0.245235	0.666666	30
5	-0.494341	-0.210157	0.666666	30
6	-0.976654	-0.670394	0.666666	30
7	-1.45516	-1.13459	0.666666	30
8	-1.93064	-1.60188	0.666666	30
9	-2.40391	-2.07142	0.666666	30
10	-2.87578	-2.54235	0.666666	30
11	-3.3471	-3.01384	0.451883	30
12	-3.66675	-3.33325	0.000113101	30
13	-3.66667	-3.33333	8.85782e-07	0

## 3. Метод золотого сечения

№	$x_1$	$x_2$	$\alpha$	Итераций одномерного поиска
0	2	2	0.666666	27
1	1.48785	1.57321	0.666666	27
2	0.982971	1.13785	0.666666	27
3	0.484755	0.69488	0.666666	27
4	-0.00744873	0.245237	0.666666	27
5	-0.494339	-0.210155	0.666666	27
6	-0.976651	-0.670392	0.666666	27
7	-1.45515	-1.13459	0.666666	27
8	-1.93063	-1.60188	0.666666	27
9	-2.4039	-2.07141	0.666666	27
10	-2.87578	-2.54234	0.666666	27
11	-3.34709	-3.01384	0.45189	27
12	-3.66675	-3.33325	0.000113103	27
13	-3.66667	-3.33333	8.85782e-07	0

#### 4. Метод Брента

№	$x_1$	$x_2$	$\alpha$	Итераций одномерного поиска
0	2	2	0.666666	14
1	1.48785	1.57321	0.666666	14
2	0.982971	1.13785	0.666666	14
3	0.484754	0.694879	0.666666	14
4	-0.00744959	0.245236	0.666666	14
5	-0.49434	-0.210156	0.666666	14
6	-0.976653	-0.670393	0.666666	14
7	-1.45515	-1.13459	0.666666	14
8	-1.93064	-1.60188	0.666666	14
9	-2.4039	-2.07142	0.666666	14
10	-2.87578	-2.54235	0.666666	14
11	-3.34709	-3.01384	0.451887	5
12	-3.66675	-3.33325	0.000113191	18
13	-3.66667	-3.33333	8.85782e-07	0

Таким образом, количество итераций метода наискорейшего спуска не зависит от выбора способа одномерного поиска, но это влияет на скорость работы. Метод парабол не практически не работает для данной функции.

### 3.2 Траектории методов на различных функциях

Во всех вычислениях для алгоритма наискорейшего спуска использовался метод Брента.  
 $\varepsilon = 10^{-6}$

Начальная точка (-3, 3)

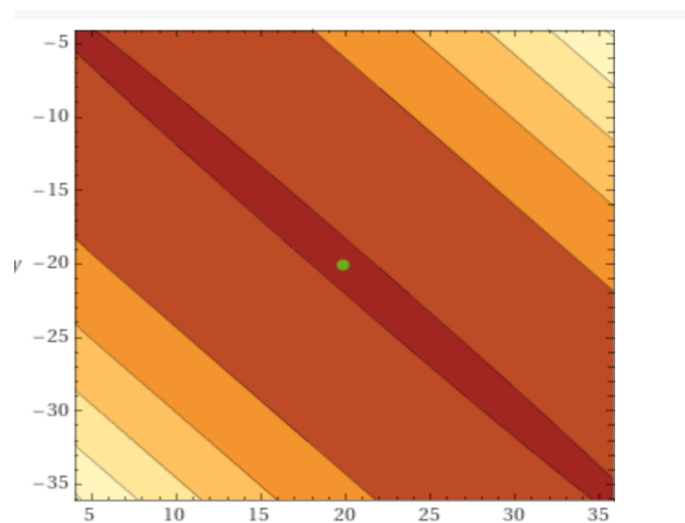
1.  $f_1 = x^2 + y^2 - xy + 4x + 3y - 1$

Точка минимума (-3.66667 -3.33333),  $\alpha = 0.5$  для метода градиентного спуска.

Метод	$x_1$	$x_2$	Количество итераций
Градиентный спуск	-3.66667	-3.33333	33
Наискорейший спуск	-3.66667	-3.33333	22
Сопряженные градиенты	-3.66667	-3.33333	3

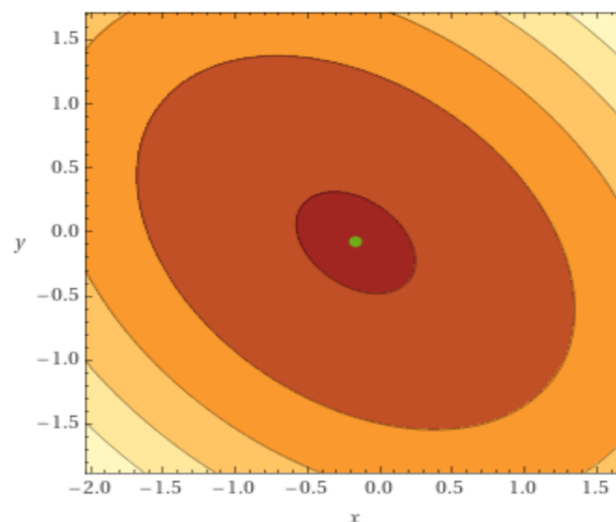
2.  $f_2 = 254x^2 + 506xy + 254y^2 + 50x + 130y - 111$   
Точка минимума (19.9112, -20.0888),  $\alpha = 0.00196$

Метод	$x_1$	$x_2$	Количество итераций
Градиентный спуск	4.26471	-4.44222	1002
Наискорейший спуск	4.26714	-4.44465	1002
Сопряженные градиенты	19.9112	-20.0888	3



3.  $f_3 = 108x^2 + 116y^2 + 5xy + 43x + 33y - 211$   
Точка минимума (-0.195879, -0.13802),  $\alpha = 0.00446$

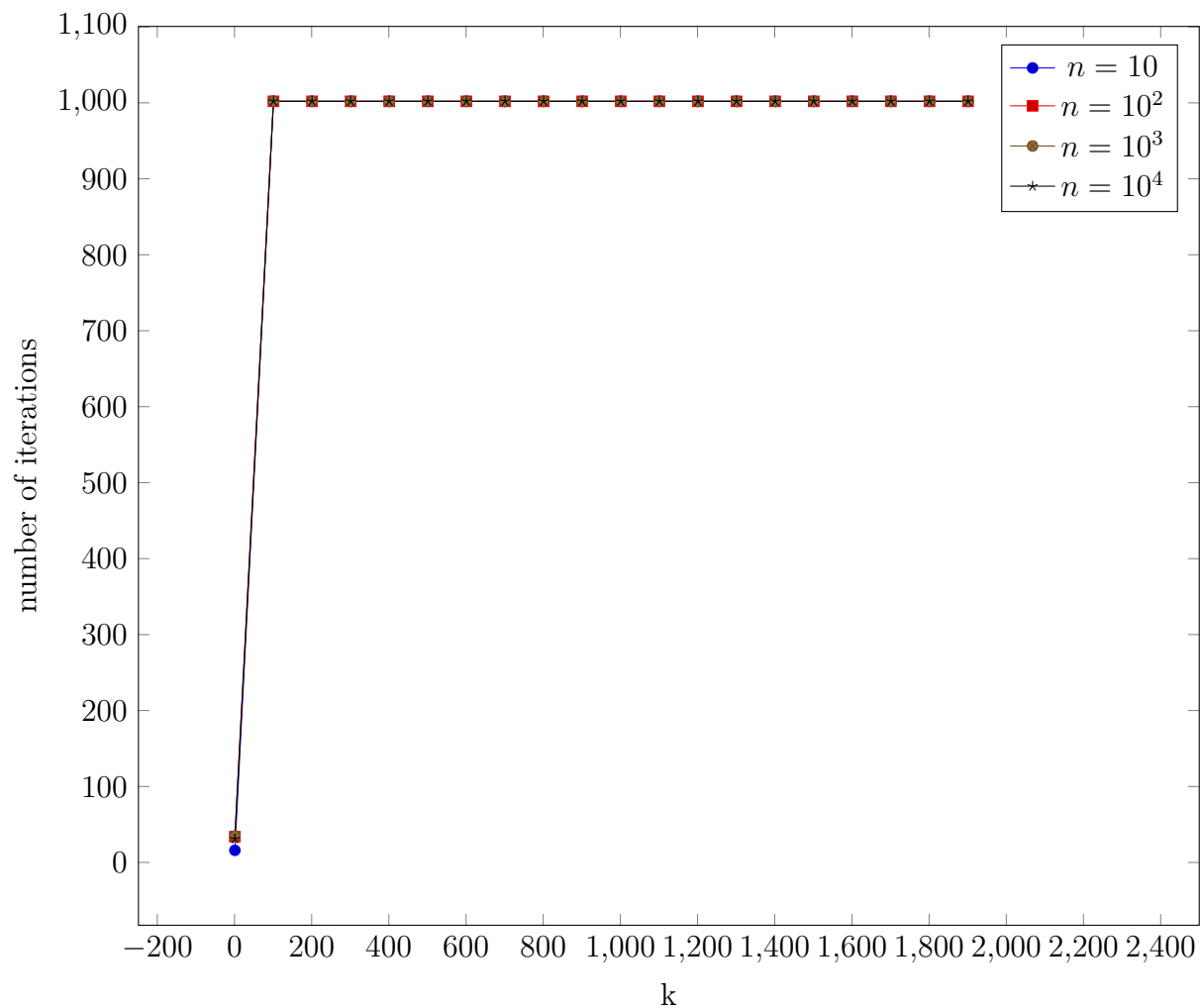
Метод	$x_1$	$x_2$	Количество итераций
Градиентный спуск	-0.167826	-0.0843702	973
Наискорейший спуск	-0.167825	-0.0843697	658
Сопряженные градиенты	-0.167826	-0.0843704	3



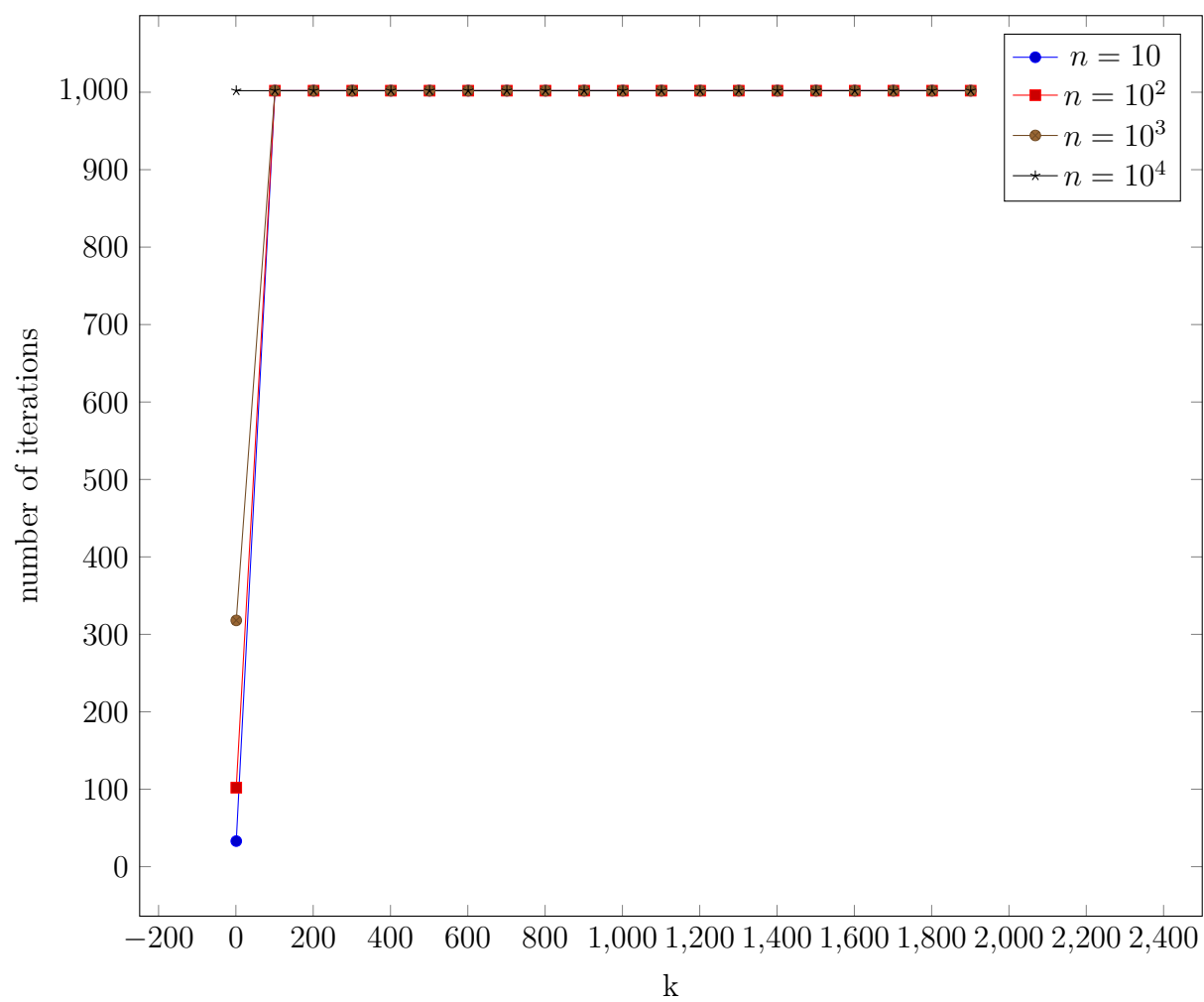
По данным таблиц видно, что первые 2 метода в общем случае не могут найти минимум овражной функции (вторая) и используют во много раз больше итераций для случайных функций, чем третий метод. И еще что-нибудь на основе траекторий.

### 3.3 Скорость сходимости в зависимости от числа обусловленности и размерности пространства

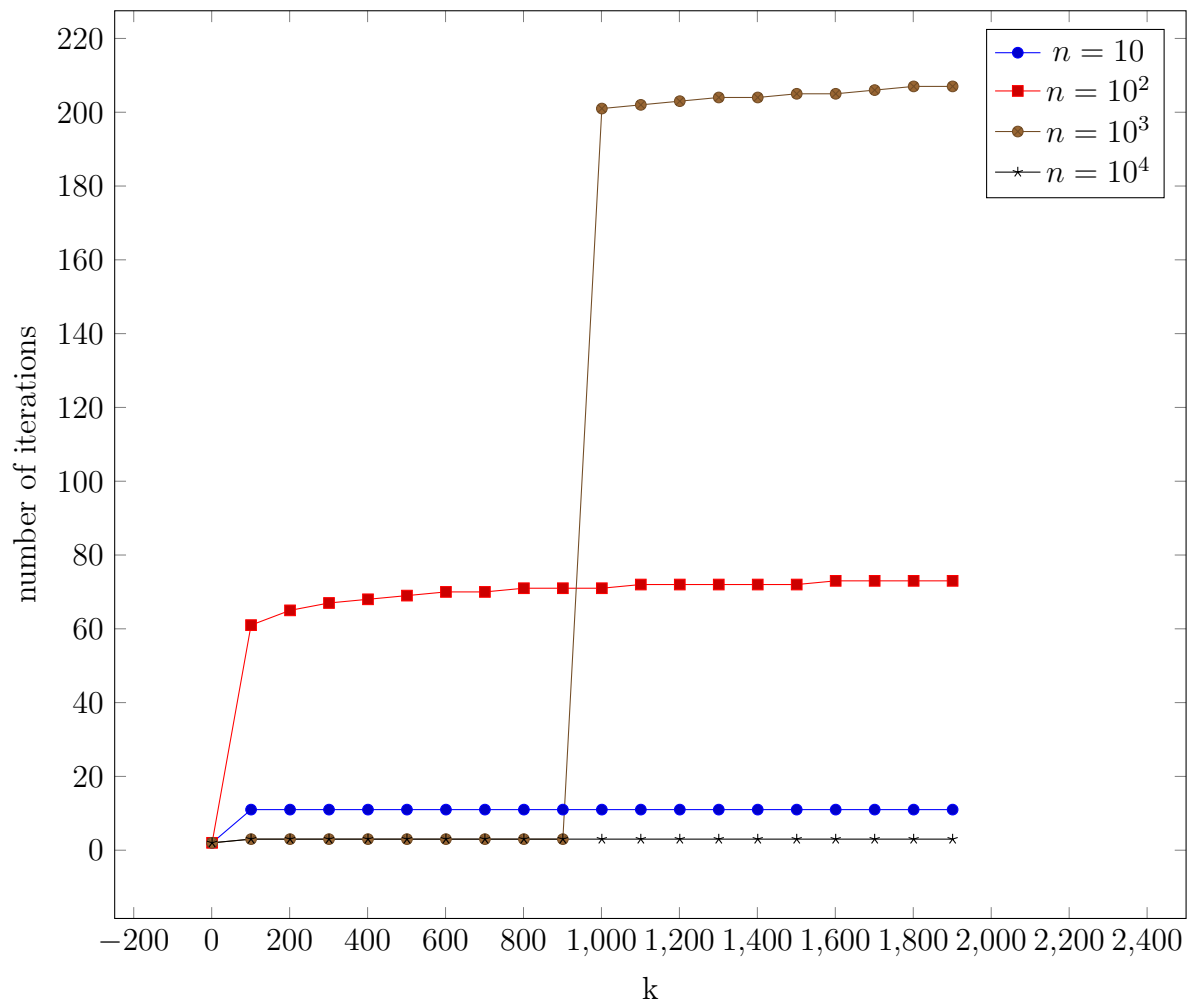
- Метод градиентного спуска



- Метод наискорейшего спуска



- Метод сопряженных градиентов



## 4 Выводы

## 5 Графический интерфейс

## 6 Код

Не забыть сделать текстовое описание и диаграмму классов