

# 响应曲面实验 设计与分析

2022

六西格玛黑带课程培训



# 课程内容

1

响应曲面实验概述

2

响应曲面实验设计原理

3

响应曲面实验设计分析实例

4

**BB**考试例题讲解

1

响应曲面实验概述

2

响应曲面实验设计原理

3

响应曲面实验设计分析实例

4

**BB**考试例题讲解

# 响应曲面实验概述

- 在实际工作中，常常需要研究响应变量 $y$ 究竟如何随着自变量的变化而变化，从而使响应变量达到所期望的目标值（望大、望小、望目）
- 通常做法为：先用二水平的因子实验的数据，拟合一个线性的回归方程。如果发现有弯曲的趋势，则进一步拟合一个含有二次项的回归方程： $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2$
- 所拟合的方程比线性关系多出了平方项，因此原有设计点得到的实验数据就不够用了
- 采用“序贯实验策略”：先拟合线性关系，然后再根据实验结果增补一些试验点。其特点为前一阶段的实验数据可以被后一阶段实验所使用。这样将大大节约实验成本。
- 最常用的设计方法为：中心复合实验设计（central composite design, CCD）和BOX-BEHNKEN设计。

1

响应曲面实验概述

2

响应曲面实验设计原理

3

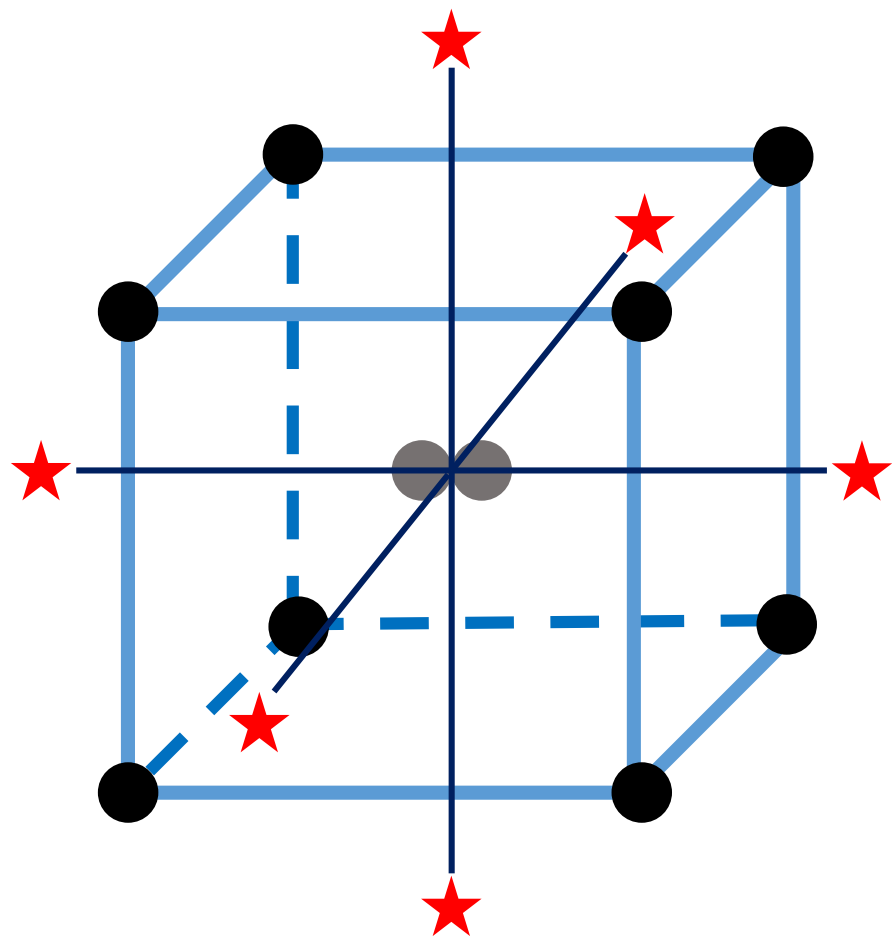
响应曲面实验设计分析实例

4

**BB**考试例题讲解

# 响应曲面实验设计原理

## □中心复合设计



3因子中心复合设计布点示意图（均已代码化）

图中各点含义如下：

- 立方体点（角点）●：各维度坐标值为 $\pm 1$
- 中心点●：各维度坐标值均为0
- 星号点（轴点）★：除了一个维度坐标值为 $\pm \alpha$ ，其余皆为0。

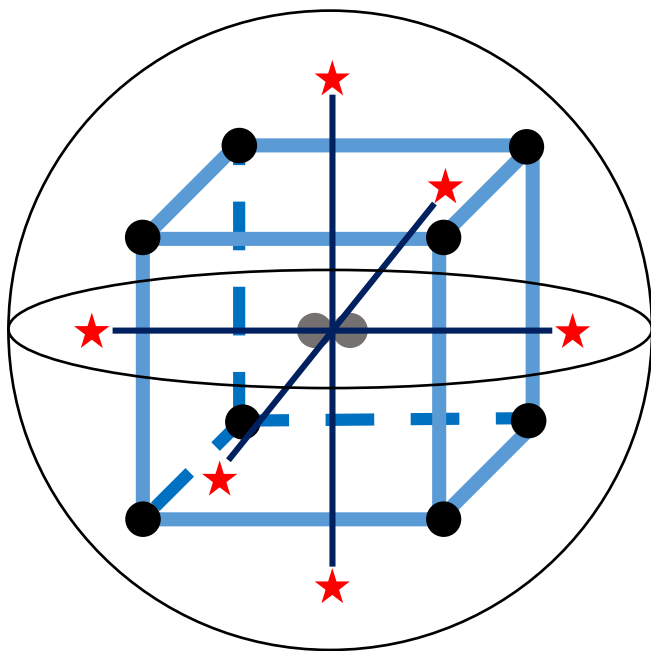
CCD设计需要考虑的问题：

- ◆ 如何选择全因子实验部分？
- ◆ 如何确定星号点的位置（ $\alpha$ 取值）？
- ◆ 如何确定中心点的个数？

# 响应曲面实验设计原理

## □中心复合设计——如何确定星号点的位置（ $\alpha$ 取值）？

$\alpha$ 的选取上要满足旋转性，所谓**旋转性**：将来在某点处预测值的方差仅与该点到试验点中心的距离有关，而与所在方位无关，即响应变量的预测精度在以设计中心为球心的球面上是相同的。



经过数学证明，全因子实验 $\alpha$ 取值公式为 $\alpha = 2^{k/4}$

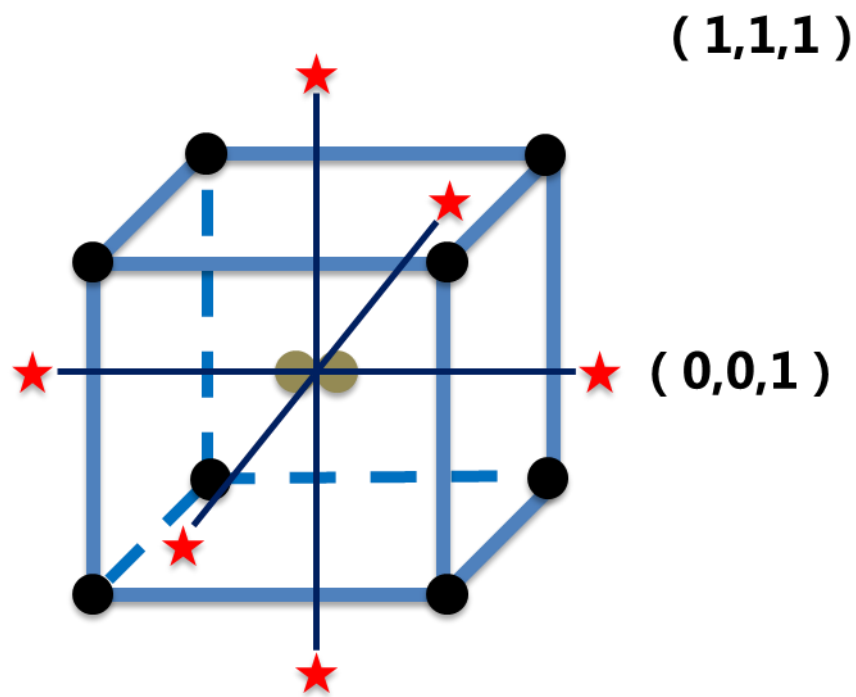
( $k=2, \alpha=1.414$ ;  $k=3, \alpha=1.682$ ;  $k=4, \alpha=2, \dots$ )

按照这种方法得到的实验安排既满足序贯性要求，又满足旋转性要求，因此特称为**中心复合序贯设计**（central composite circumscribed, CCC），是CCD中最常用的一种。

# 响应曲面实验设计原理

## □中心复合设计——如何确定星号点的位置（ $\alpha$ 取值）？

当实验水平安排不能超过立方体边界时（如电流、压力、浓度有上限），可以直接将 $\alpha = \pm 1$ ，此时会将原CCD缩小到整个立方体内，这种实验设计丧失了序贯性，但是可以保证实验的旋转性。特称为**中心复合有界设计**（central inscribed design, CCI）

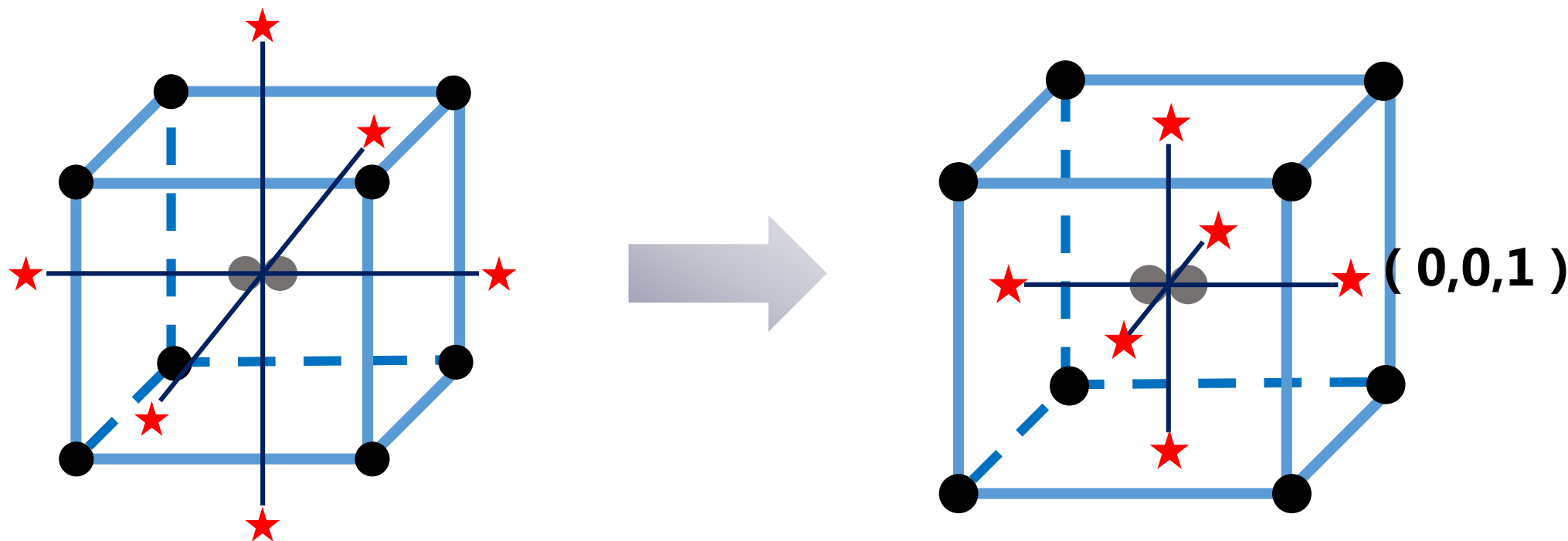




# 响应曲面实验设计原理

## □中心复合设计——如何确定星号点的位置（ $\alpha$ 取值）？

当某些实验水平变化较麻烦，希望控制因子水平数时，可以直接将 $\alpha=1$ 。这就意味着星号点向中心收缩而设在立方体表面上。这样既减少了因子水平数，又可以保证实验的序贯性，但是失去了旋转性。特称为**中心复合表面设计**（central composite face-centered design, CCF）



# 响应曲面实验设计原理

## □中心复合设计——小结

名称	缩写	$\alpha$ 取值	旋转性	序贯性	应用场合
中心复合序贯设计	CCC	$2^{k/4}$	√	√	最常用
中心复合有界设计	CCI	$\pm 1$	√	×	需控制因子水平范围
中心复合表面设计	CCF	$\pm 1$	×	√	需控制因子水平数目

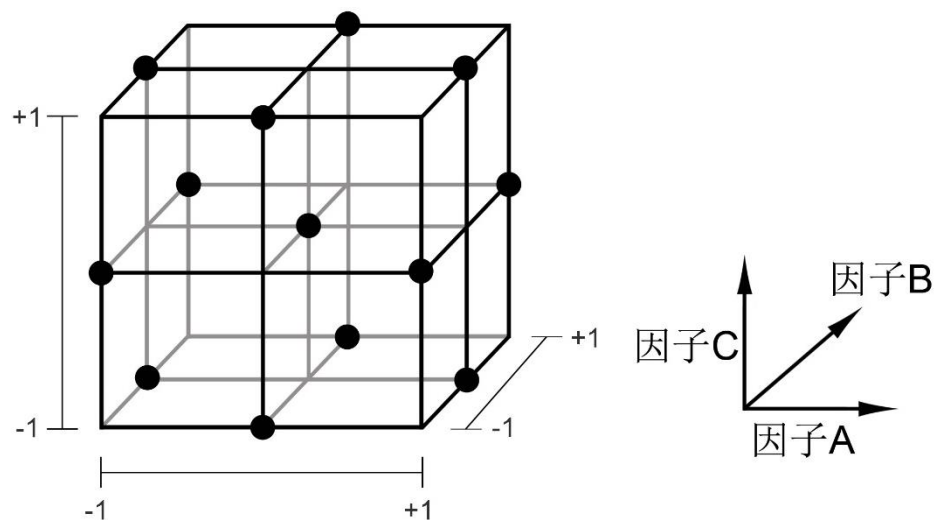
# 响应曲面实验设计原理

□ CCD设计试验点个数——尽可能满足一致均匀精度

因子数	立方体点	星号点	中心点	总计
2	4	4	5	13
3	8	6	6	20
4	16	8	6	30
5	32	10	10	52
5	16	10	7	33

# 响应曲面实验设计原理

## □ Box-Behnken设计



- 将因子各试验点取在正方体棱的中点上
- 所需点数比CCD要少
- 具有近似旋转性
- 适合立方体顶点无法获取数据时使用
- 没有序贯性

1

响应曲面实验概述

2

响应曲面实验设计原理

3

响应曲面实验设计分析实例

4

**BB**考试例题讲解

# 响应曲面实验设计分析实例

## □提高烧碱纯度问题——背景介绍

在烧碱生产中，经过因子的筛选，最后得知反应炉内压力及温度是两个关键因子。在改进阶段先进行了全因子实验，因子A压力的低水平及高水平分别取50pa和60pa，因子B反应温度的低水平及高水平分别取260℃和320℃。在中心点也做了3次试验，试验结果如表所示：

标准序	运行序	中心点	区组	压力	温度	纯度
1	5	1	1	50	260	98.08
2	3	1	1	60	260	95.38
3	2	1	1	50	320	97.28
4	6	1	1	60	320	94.65
5	7	0	1	55	290	97.82
6	1	0	1	55	290	97.54
7	4	0	1	55	290	97.98

# 响应曲面实验设计分析实例

## □提高烧碱纯度问题——全因子实验分析

### Step1. 拟合选定模型

拟合因子：纯度 与 压力，温度

纯度 的估计效应和系数（已编码单位）

项	效应	系数	系数标准误	T	P
常量		96.961	0.4150	233.63	0.000
压力	-2.665	-1.332	0.5490	-2.43	0.094
温度	-0.765	-0.382	0.5490	-0.70	0.536
压力*温度	0.035	0.018	0.5490	0.03	0.977

S = 1.09803 PRESS = 134.203

R-Sq = 68.01% R-Sq（预测） = 0.00% R-Sq（调整） = 36.01%

纯度 的方差分析（已编码单位）

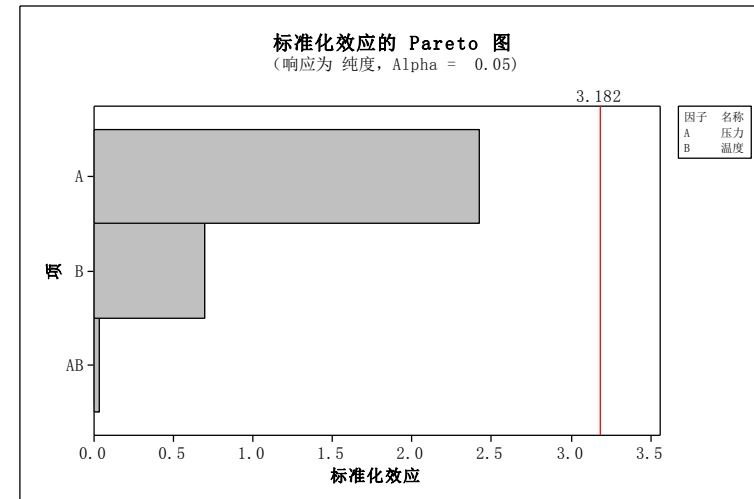
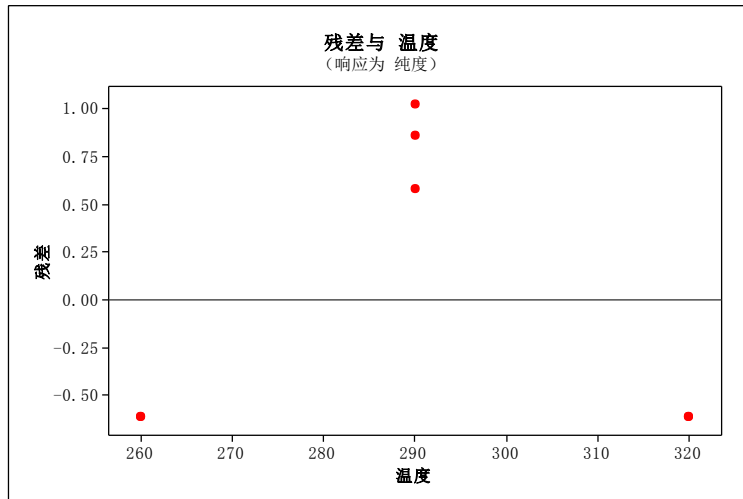
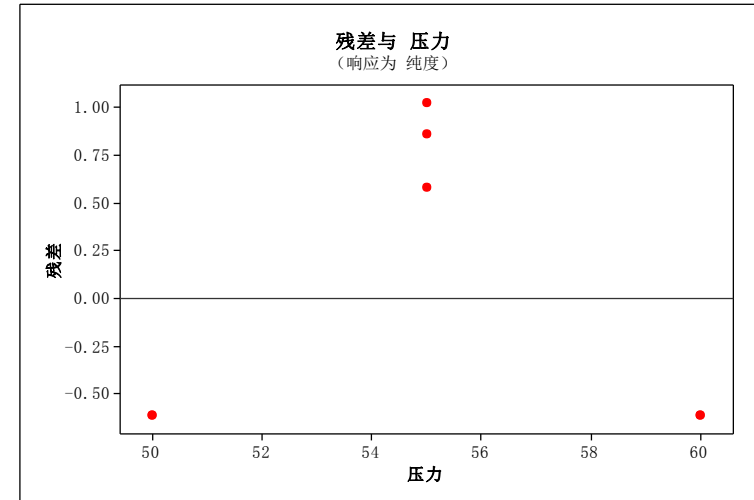
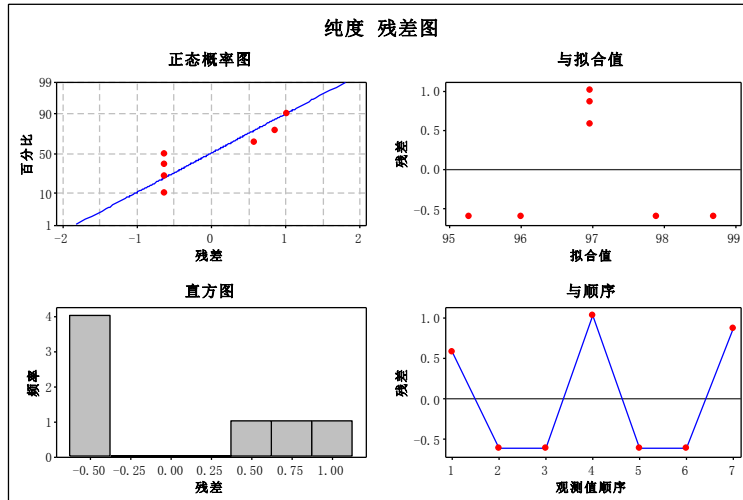
来源	自由度	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
主效应	2	7.6874	7.68745	3.84372	3.19	0.181
压力	1	7.1022	7.10222	7.10222	5.89	0.094
温度	1	0.5852	0.58522	0.58522	0.49	0.536
2因子交互作用	1	0.0012	0.00123	0.00123	0.00	0.977
压力*温度	1	0.0012	0.00123	0.00123	0.00	0.977
残差误差	3	3.6170	3.61701	1.20567		
弯曲	1	3.5178	3.51781	3.51781	70.92	0.014
纯误差	2	0.0992	0.09920	0.04960		
合计	6	11.3057				

- 主效应不显著！
- 存在弯曲！
- 模型拟合效果很差！

# 响应曲面实验设计分析实例

## □ 提高烧碱纯度问题——全因子实验分析

### Step2. 分析拟合效果





# 响应曲面实验设计分析实例

## □ 提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

### Step1. 响应曲面实验设计

全因子实验结果表明：

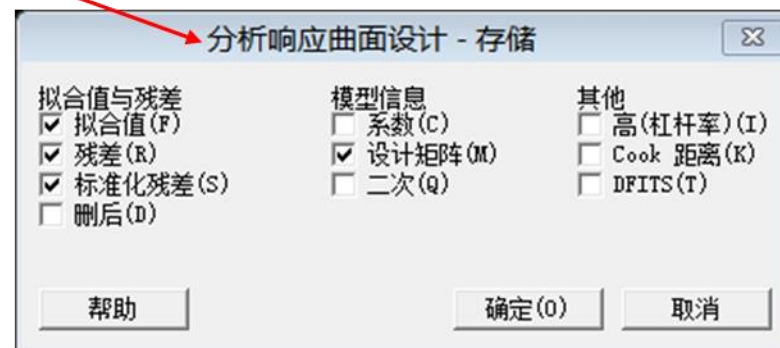
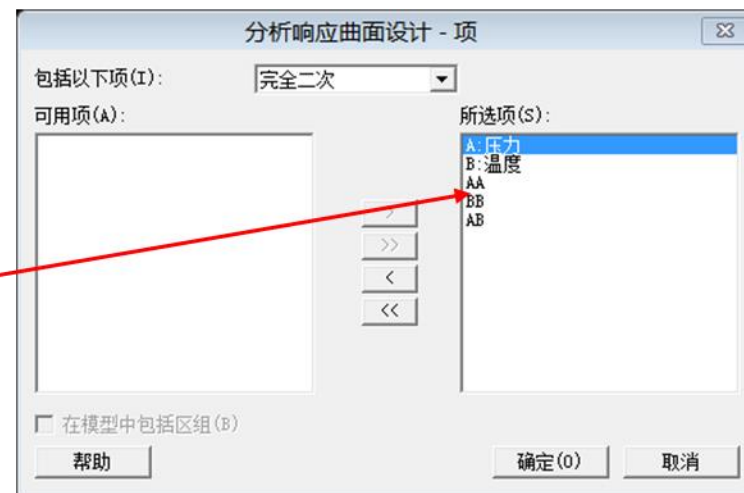
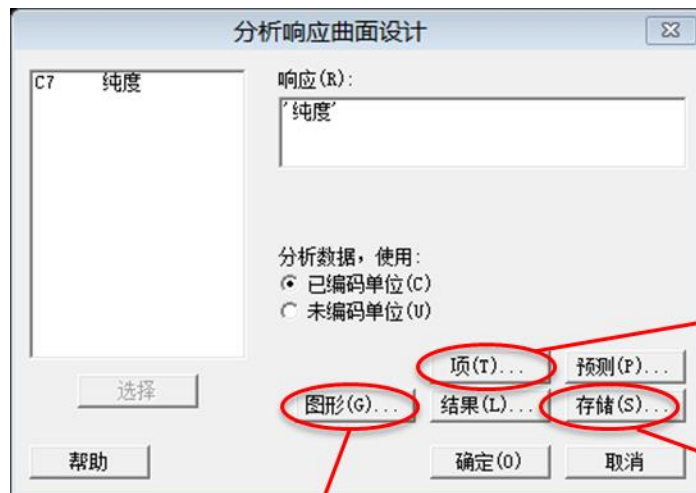
- 实验数据有明显的弯曲，提示我们试验区域已经达到了响应变量的最佳区域；
- 此时仅靠线性方程式不能描述事实的，需补充星号点；

标准顺序	运行顺序	点类型	区组	压力	温度	纯度
1	5	1	1	50.0	260.0	98.08
2	3	1	1	60.0	260.0	95.38
3	2	1	1	50.0	320.0	97.28
4	6	1	1	60.0	320.0	94.65
5	10	1	1	47.9	290.0	97.01
6	8	1	1	62.1	290.0	93.23
7	9	1	1	55.0	247.6	97.91
8	11	1	1	55.0	332.4	96.57
9	7	0	1	55.0	290.0	97.82
10	1	0	1	55.0	290.0	97.54
11	4	0	1	55.0	290.0	97.98

# 响应曲面实验设计分析实例

## □ 提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

### Step2. 响应曲面实验结果分析



# 响应曲面实验设计分析实例

## 提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

### Step2. 响应曲面实验结果分析——拟合效果分析

响应曲面回归:纯度 与 压力, 温度

纯度 的估计回归系数

项	系数	系数标准误	T	P
常量	97.7804	0.10502	931.066	0.000
压力	-1.8911	0.09114	-20.750	0.000
温度	-0.6053	0.09092	-6.657	0.001
压力*压力	-2.5822	0.15339	-16.835	0.000
温度*温度	-0.4615	0.15314	-3.014	0.030
压力*温度	0.0351	0.18253	0.192	0.855

S = 0.181900 PRESS = 0.693667

R-Sq = 99.35% R-Sq (预测) = 97.27% R-Sq (调整) = 98.70%

④ 交叉效应不明显。

③ R-Sq&R-Sq (调整) 都很好, 说明回归效果度量也很好。

纯度 的方差分析

来源	自由度	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
回归	5	25.2310	25.2310	5.0462	152.51	0.000
线性	2	15.7127	15.7127	7.8563	237.44	0.000
压力	1	14.2464	14.2464	14.2464	430.57	0.000
温度	1	1.4663	1.4663	1.4663	44.31	0.001
平方	2	9.5171	9.5171	4.7585	143.82	0.000
压力*压力	1	9.2166	9.3772	9.3772	283.40	0.000
温度*温度	1	0.3005	0.3005	0.3005	9.08	0.030
交互作用	1	0.0012	0.0012	0.0012	0.04	0.855
压力*温度	1	0.0012	0.0012	0.0012	0.04	0.855
残差误差	5	0.1654	0.1654	0.0331		
失拟	3	0.0662	0.0662	0.0221	0.45	0.747
纯误差	2	0.0992	0.0992	0.0496		
合计	10	25.3964				

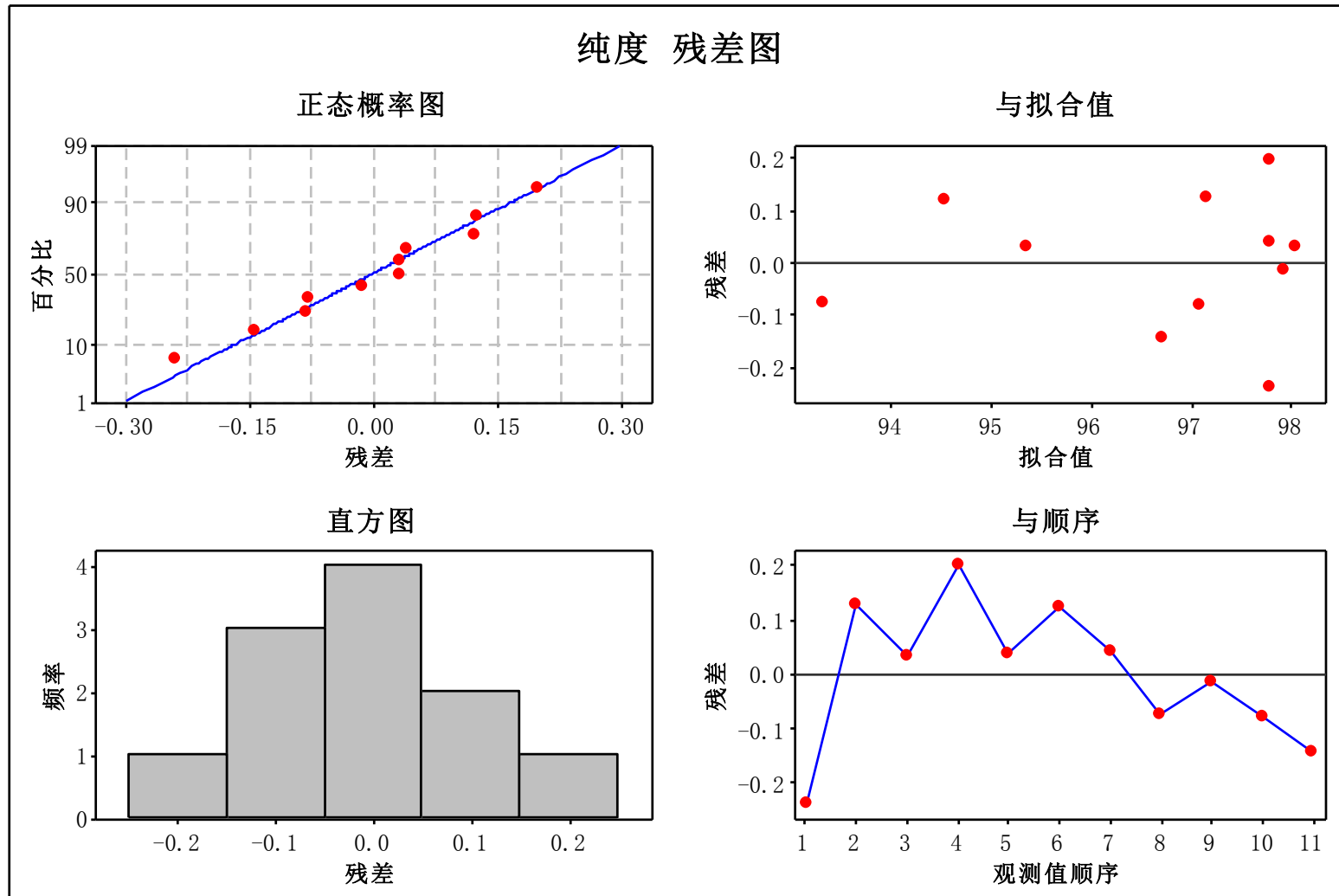
①  $p < 0.05$ , 拒绝原假设, 模型整体有效。

②  $p$  远大于 0.05, 无法拒绝原假设, 模型整体有效

# 响应曲面实验设计分析实例

□ 提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

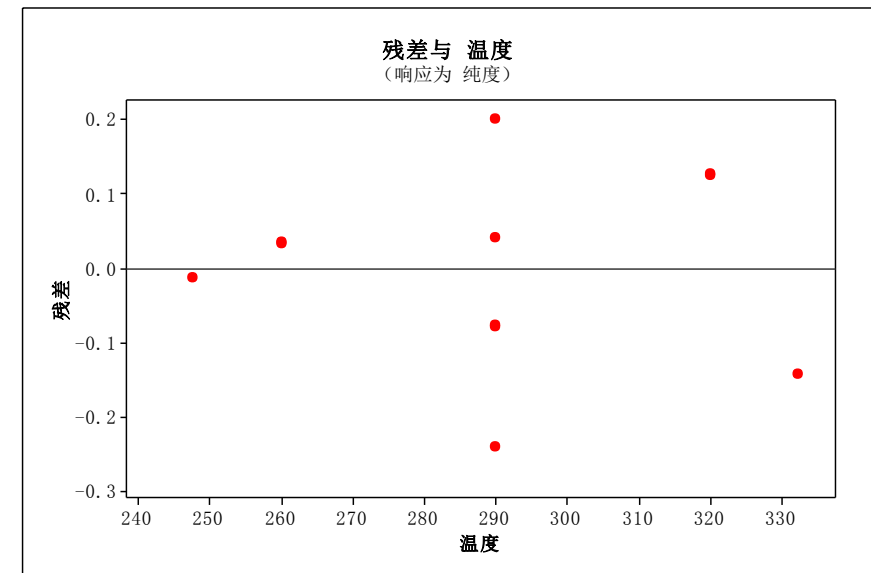
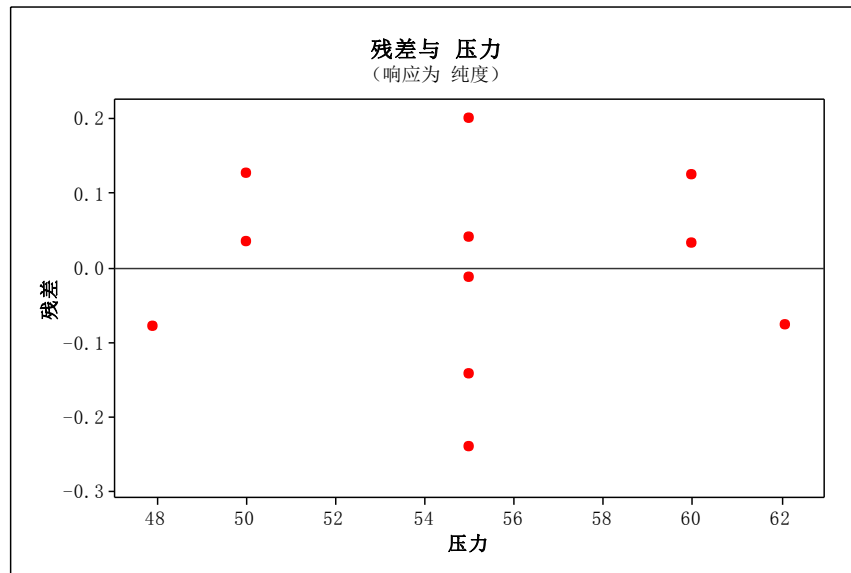
Step2. 响应曲面实验结果分析——残差分析



# 响应曲面实验设计分析实例

## □提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

### Step2. 响应曲面实验结果分析——残差分析



# 响应曲面实验设计分析实例

## 提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

### Step2. 响应曲面实验模型改进

响应曲面回归:纯度 与 压力, 温度

纯度 的估计回归系数

项	系数	系数标准误	T	P
常量	97.7804	0.09622	1016.177	0.000
压力	-1.8911	0.08350	-22.647	0.000
温度	-0.6053	0.08331	-7.265	0.000
压力*压力	-2.5822	0.14054	-18.373	0.000
温度*温度	-0.4615	0.14031	-3.289	0.017

S = 0.166665 PRESS = 0.546550

R-Sq = 99.34% R-Sq (预测) = 97.85% R-Sq (调整) = 98.91%

纯度 的方差分析

来源	自由度	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
回归	4	25.2298	25.2298	6.3074	227.07	0.000
线性	2	15.7127	15.7127	7.8563	282.83	0.000
压力	1	14.2464	14.2464	14.2464	512.88	0.000
温度	1	1.4663	1.4663	1.4663	52.79	0.000
平方	2	9.5171	9.5171	4.7585	171.31	0.000
压力*压力	1	9.2166	9.3772	9.3772	337.58	0.000
温度*温度	1	0.3005	0.3005	0.3005	10.82	0.017
残差误差	6	0.1667	0.1667	0.0278		
失拟	4	0.0675	0.0675	0.0169	0.34	0.836
纯误差	2	0.0992	0.0992	0.0496		
合计	10	25.3964				

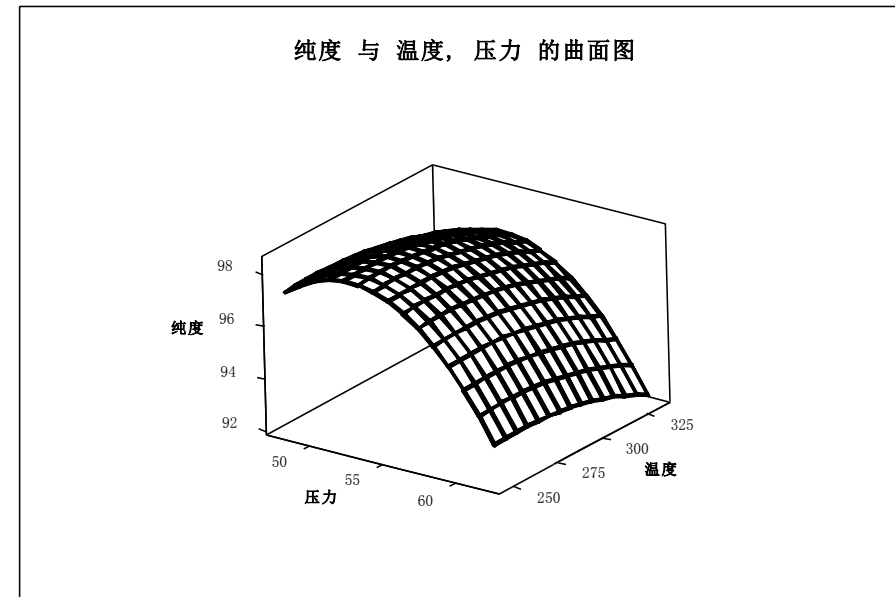
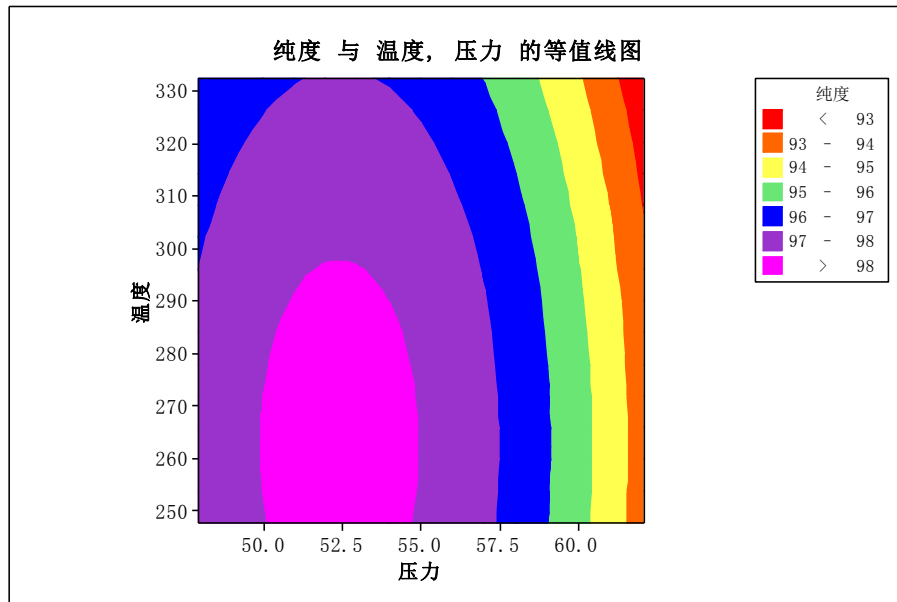
纯度 的估计回归系数, 使用未编码单位的数据

项	系数
常量	-59.9731
压力	5.36834
温度	0.134611
压力*压力	-0.0512244
温度*温度	-2.56700E-04

# 响应曲面实验设计分析实例

## □ 提高烧碱纯度问题——响应曲面实验分析

### Step2. 响应曲面实验最终拟合结果



$$y = -59.973 + 5.36834 * \text{压力} + 0.134611 * \text{温度} - 0.0512244 \text{压力}^2 - 0.0002567 \text{温度}^2$$

1

响应曲面实验概述

2

响应曲面实验设计原理

3

响应曲面实验设计分析实例

4

**BB**考试例题讲解



# BB考试例题讲解

73. 在进行响应曲面设计中，常常选用 CCD 方法而不用 BOX-Behnken 设计，其**最主要**理由是：

- A. CCD 有旋转性，而 Box-Behnken 设计没有旋转性
- B. CCD 有序贯性，而 Box-Behnken 设计没有序贯性
- C. CCD 试验点比 BOX-Behnken 设计试验点少
- D. 以上各项都对



# BB考试例题讲解

对于响应曲面方法的正确叙述是：

- A. 响应曲面方法是试验设计方法重的一种
- B. 响应曲面方法是在最优区域内建立响应变量与各自变量的二次回归方程
- C. 响应曲面方法可以找到响应变量最优区域
- D. 响应曲面方法可以判明各因子显著或不显著

ABD，C中没有提到自变量的设置。



# BB考试例题讲解

在因子设计阶段，对三个因子A、B、C，进行二水平全因子共11次试验后，可以确认3者皆显著，但却发现了显著的弯曲。决定增做些试验点，形成响应曲面设计。一个团队成员建议在新设计中使用CCF。他这样建议的好处是：

- A. 原有的11次试验结果仍然可以利用
- B. 新设计仍保持有旋转性
- C. 新设计对每个因子仍只需安排3个水平
- D. 新设计对每个因子的代码水平仍保持在  $(-1, 1)$  范围内

ACD，

CCF的特点：

- 不具有旋转性，但有序贯性（原来试验都有用）；
- 在原来的设计区间的高低值设置的预测精度高；
- 因子的设置不需要超出规定的水平；
- 每个因子只需要三个水平。

# BB考试例题讲解

六西格玛团队在半导体封装中某个工艺的改善过程中已经完成了三个因子的全因子试验设计，但是发现存在明显的曲性。为了优化工艺参数希望拟合出2阶模型，但是输入因素“功率”（单位:mW）原先的高、低水平分别为40和50，由此产生的轴向延伸试验点分别为 37.93 和 52.07；超出了设备可控制的功率设置范围 [38.5 , 51.5]。这时，由于试验成本很高，团队希望尽量使用上次全因子设计的数据。以下哪种方法最适合该格六西格玛团队采用？

A. 改用Box-Behnken设计试验方案

B. 改用三水平设计

C. 使用中心复合设计近似旋转性试验方案，轴向延伸试验点自定义改为38.5和51.5，其他不变

D. 使用中心复合设计 CCI 试验方案，先确定轴向延伸试验点为 38.5和 51.5，再推出高、低水平试验点为40.4和49.6

# BB考试例题讲解

在提高压塑扳断裂强度的全因子试验中，对于因子 A（温度，两水平取为 220 及 240 摄氏度）、因子B（压力，两水平取为 360 及 400 帕）进行了含3个中心点共7次试验后，发现响应曲面有严重的弯曲现象 为此希望进行响应曲面设计，得到二阶回归方程。由于压力机最高只能取400帕，本试验的成本又较高，希望能在归纳出二阶回归方程的条件下尽量减少试验次数，最好的方法是：

- A. 采用CCC，只再增加4个星号点（轴向点）试验
- B. 采用CCI，只再增加4个星号点（轴向点）试验
- C. 采用CCF，只再增加4个星号点（轴向点）试验
- D. 采用CCF，除再增加4个星号点（轴向点）试验，还要再增加3个中心试验点

THANK YOU !