

Notizen - B.Sc. Physik | physik211

Jonas Wortmann

September 23, 2023

Contents

1	Grundzüge der Wärmelehre	4
1.1	Ideale Gaskonstante	5
1.2	Wärmemenge und Wärmetransport	6
1.2.1	Wärmekapazität	6
2	Grundzüge zur kinetischen Gastheorie	8
2.1	Gasdruck als dynamischer Druck stoßender Moleküle	8
2.1.1	Geschwindigkeitsverteilung	9
2.1.2	Partialdrücke	9
3	Innere Energie	10
3.1	Einatomige Gase – Äquipartitionsgesetz	10
3.2	Zweiatomige Gase	10
3.3	Zusammenhang: innere Energie und Wärme	10
3.4	Maxwell–Boltzmann–Verteilung	11
4	Thermodynamik	12
4.1	Erster Hauptsatz der Thermodynamik	12
4.1.1	Isobare Zustandsänderung	13
4.1.2	Adiabatische Zustandsänderung	13
4.1.3	Isotherme Zustandsänderung	14
4.2	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	15
4.2.1	Kreisprozess	15
4.2.2	Carnot–Maschine	15
4.2.3	Stirling–Motor	17
4.3	Entropie	17
5	Reale Gase und Van der Waals–Gleichung	18
5.1	Innere Energie	18
5.2	Joule–Thomson–Effekt und Enthalpie	18
5.2.1	Verflüssigung und Verfestigung	19
5.3	Verdampfungswärme, Clausius Clapeyronsche Gleichung	20
6	Elektrostatik	22
6.1	Elementarladungen	22
6.2	Coulomb–Gesetz	22
6.3	Potentielle Energie	23
6.4	Elektrisches Feld	24
6.4.1	Wirbelfreiheit eines el. Feldes	24
6.5	Elektrisches Potential	25
6.5.1	Punktladungen	25

6.5.2	Kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte	25
6.6	1. Maxwell–Gesetz	26
6.7	Oberflächenladung auf Leitern	29
6.8	Influenz	30
6.9	Kondensatoren und Kapazität von Leitern	31
6.10	Energiedichte	32
6.11	Elektrischer Dipol und elektrisches Dipolmoment	33
6.11.1	Elektrisches Feld des Dipolmoments	33
6.11.2	Dipolmoment im elektrischen Feld	34
6.11.3	Isolatoren im elektrischen Feld, Dielektrika	34
6.11.4	Zylinderkondensator	35
6.11.5	Dielektrische Verschiebung	35
6.12	Dielektrischer Verschiebungsstrom	36
6.13	Elektrisches Feld an Grenzflächen	37
7	Elektrischer Strom	39
7.1	Ladungserhaltung	39
7.2	Elektrischer Widerstand, Ohm’sches Gesetz	40
7.2.1	Dioden	40
7.2.2	Ohm’sches Gesetz	40
7.3	Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes	41
7.4	Stromleistung	42
7.5	Stromkreise und Kirchhoff’sche Regeln	42
7.5.1	1. Kirchhoff’sche Regel / Knotenregel	42
7.5.2	2. Kirschhoff’sche Regel / Maschenregel	43
7.5.3	Widerstände	43
7.6	Stromtransport durch verschiedene Materialien	43
7.6.1	Gase	43
7.6.2	Festkörper	44
7.6.3	Thermoelektrische Phänomene	44
8	Magnetismus	45
8.1	Magnetische Felder	45
8.1.1	Hall–Sonde	45
8.2	Lorentzkraft	46
8.3	Magnetischer Fluss, Ampere’sches Gesetz, Stoke’scher Satz	46
8.3.1	Helmholtz–Spule	47
8.4	Magnetisches Vektorpotential und Biot–Savart–Gesetz	47
8.5	Magnetische Dipole	48
8.5.1	Atomare magnetische Momente	49
8.6	Materie im Magnetfeld	50
8.6.1	Magnetisierung	50

8.6.2	Diamagnetismus	51
8.6.3	Paramagnetismus	52
8.6.4	Ferromagnetismus	52
9	Einschub: Spezielle Relativitätstheorie	53
9.1	Lorentz-Transformation	53
9.1.1	Konsequenz für die Gleichzeitigkeit	53
9.1.2	Herleitung der Lorentztransformation	54
9.2	Längenkontraktion	55
9.3	Zeitdilatation	56
9.4	4er-Vektor	56
9.4.1	Matrixdarstellung der Lorentz-T	57
9.5	Kausalität	57
9.6	Gegeninduktion	60
9.7	Energie des magnetischen Feldes	61
9.8	Maxwell'scher Verschiebungsstrom	62
9.9	Vollständige Maxwell-Gleichungen	63
9.10	Freie EM-Wellen	64

1 Grundzüge der Wärmelehre

Die **Wärme** als makroskopische Eigenschaft eines Objekts ist definiert als der statistische Mittelwert der kinetischen Energie für mikroskopische Konstitutionen, wobei die makroskopische kinetische Energie dabei nicht berücksichtigt wird. Die Wärme kann also als „innere“ Energie eines Körpers verstanden werden.

Wärme kann einem Körper durch mechanische Reibung und Absorption von Strahlung (Schall, elektromagnetisch, radioaktiv) hinzugefügt, bzw. durch Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen oder durch Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit entzogen werden.

Die **Temperatur** hat eine tiefe Verbindung zu mikroskopischen Eigenschaften. Im Alltag wird die Temperatur auf einer Skala mit Fixpunkten angegeben.

Celsius-Skala in $^{\circ}\text{C}$ mit dem Buchstaben ν . Fixpunkte sind:

$\nu = 0^{\circ}\text{C}$, der Gefrierpunkt von H_2O

$\nu = 100^{\circ}\text{C}$, der Siedepunkt von H_2O

Kelvin-Skala in K mit dem Buchstaben T . Fixpunkte sind:

$T = 0\text{ K}$, der Zustand totaler Erstarrung der Bewegung von Atomen (QM nicht zu erreichen, annähernd sind alle Teilchen in ihrem Grundzustand)

$T_{\text{Trip}} = 273,16\text{ K} \approx 0,0098^{\circ}\text{C}$ und $p = 613\text{ Pa}$, der Tripelpunkt von H_2O , bei dem alle Phasen von H_2O auftreten (also wenn alle Aggregatzustände auftreten und miteinander in Gleichgewicht stehen).

Eine Messung von konstanten Änderungen von Materialeigenschaften kann als eine Funktion der Temperatur angegeben werden.

Wärmeänderung von Stoffen

Feste Stoffe haben bei einer Temperatur einen mittleren Abstand bei einer bestimmten potenziellen Energie. Wenn der mittlere Abstand wächst, steigt auch die Schwingungsamplitude, bzw. die potenzielle Energie, was zur Erhöhung der Temperatur führt.

Im Umkehrschluss führt Wärme zu Längenänderung $\Delta l = l - l_0 = l(\nu) - l(\nu_0)$. Das Δl ist Materialabhängig. Die relativen Längenänderungen zwischen zwei Temperaturen (ν, ν_0) und zwei unterschiedlichen Stoffen bleibt approximativ konstant.

$$\frac{\alpha_{l_0}^a}{\alpha_{l_0}^b} = \frac{\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)_a}{\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)_b} \approx \text{const.} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_a}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_b} \approx \text{const.}$$

wobei $\alpha_{l_0}^a$ und $\alpha_{l_0}^b$ Längenänderungskoeffizienten sind. Für l und V gilt dann

$$l = l_0 [1 + \alpha_{l_0} (\nu - \nu_0) + \beta_{l_0} (\nu - \nu_0)^2 + \dots]$$

$$V = V_0 [1 + \alpha_{V_0} (\nu - \nu_0) + \beta_{V_0} (\nu - \nu_0)^2 + \dots].$$

Diese Größen sind aber nicht gleich für alle Stoffe (deshalb zeigen Thermometer mit verschiedenen Stoffen unterschiedliche Temperaturen an). Für Gase gilt allerdings

$$\frac{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_a}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_b} \stackrel{\text{ideale Gase}}{=} 1.$$

Wärmeausdehnung von Gasen

Im folgenden wird V_0 als das Volumen eines Gases bei einer Temperatur von $\nu = 0^\circ\text{C}$ festgelegt. Die Volumenänderung eines Gases fällt wesentlich größer aus als bei Festkörpern. Misst man aber das Volumen eines Gases muss man den Druck sehr konstant halten. Einen solchen Prozess nennt man **isobaren Prozess**.

Das **Gesetz von Gay–Lussac** besagt

$$V(\nu) = V_0(1 + \alpha\nu)$$

mit $\alpha = \alpha_{V_0} = (273,15^\circ\text{C})^{-1}$. Gase haben also ein universelles α_{V_0} und $\beta_{V_0} = 0$. Gase welche dem GL–Gesetz folgen werden ideale Gase genannt.

Wird der Druck p berücksichtigt, dann betrachtet man das Volumen als Funktion des Drucks und der Temperatur $V(p, \nu)$. Für $\nu = \text{const.}$ heißt dieser Prozess **isotherm**.

Mit dem **Boyle–Mariotte Gesetz** folgt

$$p \cdot V(p, \nu) = p_0 \cdot V(p_0, \nu).$$

Daraus folgt das **Boyle–Mariotte–Gay–Lussac Gesetz**

$$p \cdot V = p_0 \cdot V(p_0, \nu_0 = 0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \alpha\nu) = p_0 \cdot V_0 \cdot (1 + \alpha\nu) \quad \alpha = (273,15^\circ\text{C})^{-1}.$$

Dieses Gesetz ist eine Zustandsgleichung und stellt einen Zusammenhang zwischen den Größen eines idealen Gases her. Weiterhin gilt

$$p, V \propto \nu \Rightarrow \frac{p \cdot V}{\nu} = \text{const.} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \Rightarrow p(T) = p_0(1 + \alpha(T - T_0)).$$

1.1 Ideale Gaskonstante

Ideale Gase weisen eine homogene Dichteverteilung auf und die Teilchen bewegen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Zudem gilt, dass sie bei gleicher Anzahl von Molekülen, Druck und Temperatur das gleiche Volumen einnehmen. Deswegen lässt sich eine Gasmenge in Einheiten von Molekülzahlen messen. Dazu wird ein **Mol** verwendet. Ein Mol ist die Menge von N_A (Avogadro–Konstante) Molekülen eines Stoffes. Daraus folgt das **Molvolumen**, also das Volumen von einem Mol idealen Gases unter Normalbedingungen ($p = p_A = 1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$, $\nu = 0^\circ\text{C}$). Der Messwert liegt bei

$$V_M = 22,4 \text{ dm}^3 \quad p \cdot V = n \cdot p_N \cdot V_M \cdot (1 + \alpha\nu) = n \cdot \frac{p_N \cdot V_M}{T_0} \cdot T = n \cdot R \cdot T$$

wobei R die allgemeine Gaskonstante ist. Sie gibt die Energie pro Mol pro Kelvin an und hat einen Wert von $8.314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{Mol}}$.

Boltzmann–Konstante

Später wird durch eine stochastische Analyse einzelner Atome pro Mol durchgeführt. Dabei verwendet man die Boltzmann–Konstante

$$k = \frac{R}{N_A}.$$

Diese entspricht der Energie pro Atom bzw. Molekül pro Kelvin und liegt bei $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

1.2 Wärmemenge und Wärmetransport

Wenn zwei Stoffe mit unterschiedlicher Temperatur in Kontakt kommen kommt es zu einem Wärmeausgleich durch **Wärmeleitung**, **–strahlung** oder **Konvektion** (bei Gasen und Flüssigkeiten). Zu welcher Mischtemperatur sich ein System ausgleich wird durch die Wärmemenge Q angegeben

$$\Delta Q = \underbrace{c}_{\text{spez. Wärmekapazität}} \cdot \underbrace{m}_{\text{Stoffmenge}} \cdot \Delta T.$$

Die Energie der Mischtemperatur bleibt immer Erhalten

$$\Delta E = \Delta Q_{\text{warm}} + \Delta Q_{\text{kalt}} = 0.$$

Daraus ergeben sich folgende Proportionalitäten

$$\Delta E \propto (T_{\text{warm}} - T_{\text{misch}}) c_{\text{warm}} \cdot m_{\text{warm}} + (T_{\text{kalt}} - T_{\text{misch}}) c_{\text{kalt}} \cdot m_{\text{kalt}} = 0.$$

Daraus folgt für die Mischtemperatur

$$T_{\text{misch}} = \frac{T_{\text{kalt}} c_{\text{kalt}} m_{\text{kalt}} + T_{\text{warm}} c_{\text{warm}} m_{\text{warm}}}{c_{\text{kalt}} \cdot m_{\text{kalt}} + c_{\text{warm}} \cdot m_{\text{warm}}}.$$

1.2.1 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität eines Körpers beschreibt die ihm zugeführte Wärme Q und der damit bewirkten Temperaturerhöhung ΔT

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

Wärmekapazität von Festkörpern

In der Nähe von Normalbedingungen lässt sich die Wärmekapazität von Festkörpern mithilfe eines vereinfachten Modell beschreiben. Das **Dulong–Petit–Gesetz** beschreibt, dass ein mol

eines Festkörpers, unabhängig seiner Stoffeigenschaften, fast die gleiche Wärmemenge speichert

$$C = \frac{r}{2}R = 3R,$$

mit r gleich 3 Schwingungsfreiheitsgraden plus 3 potenziellen Energien.

2 Grundzüge zur kinetischen Gastheorie

Das Ziel ist es die Wärmelehre auf mikroskopischen Grundlagen zu erarbeiten. Gasmoleküle bewegen sich zufällig durch ein Medium, was es erschwert sich die Trajektorie jedes einzelnen Gasmoleküls zu berechnen. Zur genaueren Analyse werden also zum Beispiel die einzelnen Geschwindigkeiten der Moleküle histogrammiert. Wenn man Histogramme als eine Funktion von x genügend ausgemessen hat, dann kann mit den Messwerten N der Ausdruck $\frac{\Delta N(x)}{\Delta x}$ aufgestellt werden, um eine Verteilungsfunktion $f(x)$ abzuschätzen. $f(x)$ ist dabei die PDF (Probability Density Function). Daraus folgt

$$c \cdot f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, z \rightarrow \infty} \frac{\Delta N(x)}{\Delta x} = \frac{dN(x)}{dx}$$

wobei z die Anzahl der Messungen ist. Damit folgt für N und die Konstante $c = N$

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot f(x) dx = N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = N \cdot 1.$$

2.1 Gasdruck als dynamischer Druck stoßender Moleküle

In einem Zeitintervall Δt treffen ΔN Moleküle oder Atome auf ein Wandstück ΔA , welche einen Druck bzw. Impulsübertragung ΔP auf die Wand ausüben. Diese kompensiert mit $\Delta F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ oder sie wird weggedrückt. Der Druck wird beschrieben durch

$$p_a = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\Delta P}{\Delta t \cdot \Delta A}.$$

Auf mikroskopischer Ebene treffen die Atome mit dem Impuls $p = m \cdot v$ auf die Wand und werden reflektiert mit einem neuen Impuls von $p' = m \cdot v'$. Zur resultierenden Kraft auf die Wand trägt nur die Normalkomponente bei. Die Anzahl an Molekülen pro Volumeninhalt ist $n = \frac{dN}{dV}$. Wenn alle n Moleküle mit einer fixen Geschwindigkeit v_x gegen eine Wand der Fläche ΔA auftreffen, kann man dies als Teilchenstrom

$$\Delta I = \underbrace{j_x}_{=\frac{n}{2}v_x} \cdot \hat{n}_A \cdot \Delta A = \frac{n}{2} v_x \cdot \hat{n}_A \cdot \Delta A$$

bezeichnen. \hat{n}_A ist die Normale zur Fläche A . Der Teilchenstrom ist hier als die pro Zeiteinheit durch eine Querschnittsfläche durchtretende Menge an Teilchen. Im allgemeinen Fall kann ein Volumenstrom als $I_{\text{vol}} = A \cdot (\vec{v} \cdot \hat{n}_A)$ geschrieben werden. Die Stöße die von einem Teilchenstrom ausgehen sind

$$\Delta Z = \Delta I \cdot \Delta t.$$

Pro Molekül wird ein Impuls von $m \cdot v_x$ übertragen. Also ist der Gesamtimpuls

$$\Delta P = \Delta Z \cdot m \cdot v_x = \frac{n}{2} m v_x^2 \cdot \Delta A \cdot \Delta t;$$

Und der Druck

$$p_a = \frac{\Delta P}{\Delta t \cdot \Delta A} = \frac{n}{2} m v_x^2 = m v_x j_x.$$

2.1.1 Geschwindigkeitsverteilung

Da offensichtlich nicht jedes Teilchen dieselbe Geschwindigkeit v_x hat, folgt v_x einer Geschwindigkeitsverteilung $f(v_x)$

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn(v_x)}{dv_x} dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} n f(v_x) dv_x.$$

Für die Stomdichte j_x folgt also

$$j_x \rightarrow dj_x(v_x) \Rightarrow p_a \rightarrow dp_a = m v_x dj_x(v_x) = m v_x^2 \frac{dn}{dv_x} dv_x.$$

Der Druck ist dann

$$p_a = \int_0^{+\infty} m v_x^2 \frac{dn}{dv_x} dv_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} m v_x^2 n f(v_x) dv_x = \frac{n \cdot m}{2} \cdot \overline{v_x^2}.$$

Daraus folgt der totale Druck, welcher zwei mal p_a ist, da die Teilchen wieder von der Wand zurück geworfen werden. Die Energie pro Raumrichtung ist jeweils $\frac{1}{3}$ der gesamten kinetischen Energie.

$$p = n \cdot m \cdot \overline{v_x^2} = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \overline{E_{\text{kin}}}.$$

Auch für das ideale Gasgesetz lässt sich ein Ausdruck finden

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot n \cdot V \cdot \overline{E_{\text{kin}}} = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \overline{E_{\text{kin}}} \stackrel{1 \text{ Mol Teilchen}}{=} \frac{2}{3} N_A \cdot \overline{E_{\text{kin}}} = R \cdot T,$$

wobei N die Gesamtanzahl an Teilchen ist. Die mittlere Energie pro Teilchen ist dann

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T,$$

wobei k die Boltzmann-Konstante ist. Pro Kelvin Temperaturanstieg steigt die kinetische Energie also um $\frac{3}{2}k$.

2.1.2 Partialdrücke

Unter dem Gesamtdruck versteht man die Addition aller Partialdrücke verschiedener Gase bzw. Moleküle auf dieselbe Fläche. Die mittlere Geschwindigkeit von Molekülen eines Gases kann mithilfe der **Brownschen-Bewegung** angegeben werden

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\overline{E_{\text{kin}}}}{m}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

3 Innere Energie

Die innere Energie eines Gases wird definiert als die Gesamtenergie aus der Wärmebewegung von Molekülen.

3.1 Einatomige Gase – Äquipartitionsgesetz

Bei einatomigen Gasen entspricht die innere Energie der kinetischen Energie also der Summe der Energien aller Atome

$$U = E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot N \cdot k \cdot T.$$

Jeder translationische Freiheitsgrad (x, y, z) bekommt die gleiche mittlere Energie. Pro Atom gibt es also $\frac{1}{2}kT$ Freiheitsgrade. Wenn jedes Atom den gleichen Beitrag zum Druck leistet, heißt dies **Äquipartitionsgesetz**.

3.2 Zweiatomige Gase

Zweiatomige Gase sind Gase, in denen jedes Molekül aus zwei Atomen besteht (und nicht, dass das Gas aus zwei Molekülen besteht), welche elastisch aneinander gebunden sind. Die Freiheitsgrade werden um zwei Winkel erweitert, da sich die Atome umeinander rotieren können, sowie um eine Schwingung der Verbindungsachse. Auch hier erhält jeder der sechs Freiheitsgrade den gleichen Energieanteil. Die kinetische Energie ist damit

$$\overline{E_{\text{kin}}} = 6 \cdot \frac{1}{2} kT = 3 \cdot k \cdot T.$$

Dies teilt sich auf in Translation mit $\frac{3}{2}kT$, Rotation kT und Schwingung $\frac{1}{2}kT$ Freiheitsgraden. Die innere Energie dieses Gases ist dann

$$U = \frac{7}{2} \cdot N \cdot k \cdot T \quad U = \frac{r}{2} \cdot N \cdot k \cdot T,$$

wobei r die Anzahl der Freiheitsgrade sind. Dieser Wert wird häufig aufgrund quantenmechanischer Prinzipien nicht erreicht. Die Ursache dafür ist, dass die Schwingungsfreiheitsgrade nicht angeregt werden, da es nur ganzzahlige Anregungen geben darf.

3.3 Zusammenhang: innere Energie und Wärme

Wird einem Gas ΔQ Wärme hinzugefügt, wird seine Energie um den gleichen Betrag erhöht

$$\Delta U = \Delta Q = mc_v \Delta T,$$

mit C_V als die spezifische Wärmekapazität. Diese Gleichung gilt nur, wenn es keine andere Energieumsetzung gibt. c_v kann als Molwärme

$$c_v = \frac{r}{2}R = \frac{r}{2}N_A k$$

definiert werden. Diese ist kein Stoffabhängiger Wert, sondern sie ist für ideale Gase proportional zu ihren Freiheitsgraden.

3.4 Maxwell–Boltzmann–Verteilung

Die Maxwell–Boltzmann–Verteilung beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung von Molekülen eines idealen Gases. Die Verteilung hat die Form

$$dW(v) dv = f(v) dv = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv.$$

Das Maximum der Verteilung ist

$$v_w = \sqrt{\frac{2kT}{m}};$$

der Mittelwert liegt bei

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \int_0^{+\infty} v f(w) dv.$$

4 Thermodynamik

Vorab sollten vier verschiedene Zustandsänderungen dargestellt werden

$$\text{isochor } dV = 0$$

$$\text{isobar } dp = 0$$

$$\text{adiabatisch } dQ = 0$$

$$\text{isoterm } dT = 0.$$

4.1 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik beschreibt die Energieerhaltung in thermodynamischen Systemen. Er sagt aus, dass die Energie eines abgeschlossenen Systems konstant ist.

Die zugeflossene Wärme eines isochoren Systems ohne, dass Arbeit am Gas verrichtet wird, kann vollständig mit

$$dU = dQ = C_V dT \quad (1)$$

beschrieben werden.

Energie kann auch durch mechanische Arbeit zugeführt werden. Hier wird ein Stempel betrachtet, welcher ein ideales Gas mit einer Kraft

$$F_a = p_a \cdot q$$

komprimiert. p_a ist der durch die Kraft hervorgerufene Druck und q die Querschnittsfläche des Stempels. Die resultierende Volumenänderung ist

$$dV = -q dx.$$

Die geleistete Arbeit ist dann

$$dW_a = F_a dx = pq dx = -p dV,$$

was mit Zusammenführung von (1) zu dem Ausdruck des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre führt

$$dU = dQ - p dV.$$

Die innere Energie ändert sich also als Funktion der thermischen und mechanischen Energiezufuhr. Der erste Hauptsatz besagt zudem, dass es kein **Perpetuum Mobile 1. Art** geben kann.

4.1.1 Isobare Zustandsänderung

Wird einem Gas mit $n = 1 \text{ mol}$, $p = \text{const.}$ eine Wärmemenge dQ zugeführt, so erwärmt sich das Gas und sein Volumen vergrößert sich um

$$V = nRTp^{-1} = RTp^{-1}.$$

In dem obigen Kompressionsversuch wird der Stempel herausgedrückt und das Gas verrichtet eine mechanische Arbeit. dU wird dann um den Betrag dieser mechanischen Arbeit kleiner als die zugeführte Wärme. Diese Änderung kann durch

$$dU = C_V dT$$

dargestellt werden. Mit $p dV = R dT$ und $p = \text{const.}$ folgt

$$dQ = C_V dT + R dT = (C_V + R) dT.$$

Man definiert $C_P = C_V + R$ als **isobare Molwärme**. Der Unterschied zur Molwärme von R ergibt sich aus dem Mehrbedarf an Energie, welche in mechanische Arbeit umgewandelt umgesetzt wird.

Vergleicht man die im folgenden eingeführte adiabatische und isothermische Zustandsänderung, kann man sehen, dass Adiabaten einen steileren Verlauf in einem p - V -Diagramm haben. Das müssen sie auch, da bei der Kompression die auftretende Erhitzung nicht abgekühlt werden kann (da kein Wärmetransport stattfindet erhöht sich T schneller). Durch diesen steileren Verlauf muss jede Adiabate jede Isotherme schneiden, woraus sich ein Kreisprozess bilden lässt. Die geleistete isotherme Arbeit entspricht dann der Fläche unter der Kurve von $V_1 \rightarrow V_2$.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = -W_{a,V_1 \rightarrow V_2}.$$

4.1.2 Adiabatische Zustandsänderung

Prozesse mit $dQ = 0$ heißen **adiabatisch**. Daraus folgt für die Gleichung des ersten Hauptsatzes

$$dU = -dQ - p dV = -p dV \quad U = C_V T = \frac{r}{2} RT = \frac{r}{2} pV.$$

Betrachtet man nun $d(U) = d(pV)$ folgt

$$dU = \frac{r}{2} d(pV) = \frac{r}{2} (p dV + V dp) = -p dV,$$

wobei die letzte Gleichung aus dem ersten Hauptsatz folgt. Stellt man diese Terme um erhält man

$$\frac{\frac{r}{2} + 1}{\frac{r}{2}} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}.$$

Durch integration beider Seiten erhält man

$$\begin{aligned}\gamma \ln V &= -\ln p + \text{const.} \\ \ln(V^\gamma) &= \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \text{const.}\right) \\ V^\gamma &= \frac{\text{const.}}{p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die **Adiabatengleichung** und der **Adiabatenkoeffizient**

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma = \text{const.} \quad \gamma = \frac{r+2}{r} = \frac{C_P}{C_V}.$$

Mit $pV = RT$ folgt

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const.}$$

Für einen Temperaturanstieg von $T_1 \rightarrow T_2$ gilt

$$W_{a,1 \rightarrow 2} = C_V(T_2 - T_1) = \frac{r}{2}R(T_2 - T_1).$$

4.1.3 Isotherme Zustandsänderung

Bei der isothermen Kompression erhält man einen Spezialfall der Gesetzmäßigkeiten des Boyle–Mariotte–Gesetz

$$pV = \text{const.}$$

Zur Realisierung von $T = \text{const.}$ wird ein Versuch mit einem Wärmebad gemacht. Dieses wird thermisch an ein ideales Gas gekoppelt mithilfe einer thermisch leitenden Wand. Die Idee ist es „unendlich“ viel Energie aus dem Wärmebad in das ideale Gas zu geben oder vom idealen Gas aufzunehmen, dass sich die Temperatur des Gases nicht ändert, wenn das Gas von einem Stempel komprimiert oder expandiert wird. Das ideale Gas ist thermisch von der Umgebung isoliert. Der erste Hauptsatz ist dann

$$dU = C_V dT = 0.$$

Das bedeutet, dass die mechanische Arbeit der Kompression vollständig in Wärme umgesetzt wird

$$dQ = p dV.$$

Diese wird vom Wärmebad absorbiert. Wird das Gas isotherm expandiert, dann fließt die gesamte entnommene Wärme in mechanische Arbeit. Es gilt

$$dW_a = -p dV = -\frac{RT}{V} dV.$$

Hier aus kann explizit die isotherme Arbeit bei Volumenänderung von $V_1 \rightarrow V_2$ bestimmt werden

$$W_{a,V_1 \rightarrow V_2} = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right).$$

4.2 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Es gibt vier verschiedene Modellprozesse, mit deren Verknüpfungen Wärmekraftmaschinen „gebaut“ werden können. Jede Wärmekraftmaschine folgt dem Wirkungsgrad von

$$\eta \leq \eta_i = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

wobei T_1 das warme und T_2 das kalte Reservoir ist. η ist beschränkt, es gibt also kein **Perpetuum Mobile zweiter Art**, welches Arbeit aus bloßem Abkühlen gewinnt.

4.2.1 Kreisprozess

Kreisprozesse sind Prozesse, bei denen ein System von einem thermodynamischen Zustand in einen anderen Zustand geht und dann wieder in den selben thermodynamischen Zustand zurückkehrt. Dabei muss auch das Arbeitsmedium, sowie mechanische Teile berücksichtigt werden, welche auch in die selben thermodynamischen Zustände zurückkehren müssen. Das Medium durchläuft dann auf dem $p - V$ -Diagramm eine geschlossene Kurve.

4.2.2 Carnot-Maschine

Eine Carnot-Maschine ist eine idealisierte Modellmaschine, mit zwei Isothermen und zwei Adiabaten. Diese Prozesse funktionieren ohne Reibung und ohne Wärmeverlust. Zudem gibt es keinen Druckunterschied auf beiden Seiten des Kolbens, sowie keiner Temperaturdifferenz zwischen den Medium und den Wärmebädern. Die Prozesse sind auch quasistatisch (der Kreisprozess ist vollständig reversibel). Die Carnot-Maschine funktioniert wie folgt.

1. Das Gas ist in einem Kolben an ein Wärmebad der Temperatur T_1 angeschlossen. Der Stempel expandiert das Gas isotherm

$$p_1 \rightarrow p_2 \quad V_1 \rightarrow V_2 \quad T_1 \quad W_1 = -Q_1 = RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) < 0 \because V_1 < V_2.$$

2. Das Gas wird von dem Wärmebad abgeschirmt. Der Stempel expandiert das Gas adiabatisch

$$p_2 \rightarrow p_3 \quad V_2 \rightarrow V_3 \quad T_1 \rightarrow T_2 \quad W_2 = C_V(T_2 - T_1) < 0 \because T_2 < T_1.$$

3. Das Gas wird an ein Wärmebad der Temperatur T_2 angeschlossen. Der Stempel komprimiert das Gas isotherm

$$p_3 \rightarrow p_4 \quad V_3 \rightarrow V_4 \quad T_2 \quad W_3 = -Q_2 = RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) > 0 \because V_3 > V_4.$$

4. Das Gas wird von dem Wärmebad abgeschirmt. Der Stempel komprimiert das Gas adiabatisch

$$p_4 \rightarrow p_1 \quad V_4 \rightarrow V_1 \quad T_2 \rightarrow T_1 \quad W_4 = C_V(T_2 - T_1) > 0 \because T_1 > T_2.$$

Zu sehen ist, dass das Gas vollständig durch einen Kreisprozess gelaufen ist und wieder seinen thermodynamischen Ausgangszustand erreicht hat. Wenn die Arbeit $W < 0$ ist, dann leistet die Maschine arbeit; wenn $W > 0$ ist, konsumiert die Maschine arbeit. Daraus folgt

$$W_a = \sum_{i=1}^4 W_i = W_1 + W_3 < 0.$$

Diese vier Volumina können allerdings nicht unabhängig voneinander sein, da es sonst nicht zu einem Kreisprozess kommen würde.

Betrachtet man nur die Adiabaten sieht man, dass

$$\begin{aligned} T_1 V_2^{\gamma-1} &= T_2 V_3^{\gamma-1} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_4^{\gamma-1} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= \frac{V_3}{V_4} \\ \Rightarrow W_a &= R(T_1 - T_2) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned}$$

Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad wird als Verhältnis zwischen der geleisteten Arbeit W_a über der hineingesteckten Wärme. Speziell für die Carnot-Maschine ergibt sich

$$\eta_i = \frac{-W_a}{Q_1} = \frac{|W_a|}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Wärmepumpen

Diese können realisiert werden, indem der Kreisprozess im $p - V$ -Diagramm gegen den Uhrzeigersinn läuft. Mit dieser Maschine wird mechanische Arbeit aufgenommen und dadurch wird Wärme produziert. Gleichzeitig wird dem kühleren Reservoir Wärme entzogen und dem wärmeren Reservoir zugefügt. Der Wirkungsgrad hier ist

$$\eta_i = \frac{|Q_1|}{|W_a|} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta_i}.$$

Je kleiner also der Wärmeunterschied zwischen den beiden Reservoiren, desto effizienter läuft die Wärmepumpe.

4.2.3 Stirling–Motor

Hier Erklärung von Motor

4.3 Entropie

Die Entropie beschreibt das Maß an Unordnung in einem System. Bei einem reversiblen Prozess ist der thermodynamische Zustand des Arbeitsgases nach einem Zyklus identisch. Abweichungen können über die reduzierte Wärmemenge beschrieben werden mit $\frac{Q_n}{T_n}$. Es gilt weiterhin für die Arbeit, bzw. für die Summe der reduzierten Wärmemengen im Carnot–Prozess

$$-W_a = Q_1 + Q_2 = \eta_i Q_1 \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

In der Realität ist die WKM nicht ideal, also ist der Wärmefluss auch nicht ideal, dann folgt

$$\frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q'_2}{T_2} < 0.$$

Auch durch Reibungsverluste wird den beiden Reservoirien Wärme hinzugeführt

$$\frac{Q_1 - Q_{1R}}{T_1} - \frac{Q_2 + Q_{2R}}{T_2} = -\frac{Q_{1R}}{T_1} - \frac{Q_{2R}}{T_2} < 0.$$

Verallgemeinert man diese Ausdrücke auf Kreisprozesse, dann gilt

$$\lim_{\Delta Q_K \rightarrow 0} \sum_K \frac{\Delta Q_K}{T_K} = \oint \frac{1}{T} dQ = \oint \frac{1}{T(s)} \frac{dQ(s)}{ds} ds.$$

Dabei unterscheidet man zwischen reversibel und irreversibel

$$\begin{aligned} \text{reversibel} : \oint \frac{1}{T} dQ &= 0 & \Delta S &= S(P_1) - S(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{T} dQ \\ \text{irreversibel} : \oint \frac{1}{T} dQ &< 0 & \Delta S &= S(P_1) - S(P_2) > \int_{P_1, \text{irrev.}}^{P_2} \frac{1}{T} dQ. \end{aligned}$$

In allen abgeschlossenen Systemen nimmt die Entropie im Laufe der Zeit zu, denn $dQ = 0$. Reversible Systeme haben eine konstante Entropie, irreversible eine Entropiezunahme. Bei Systemen in denen Energie gewonnen wird ohne das Arbeit geleistet wird, nimmt die Entropie ab. Die Entropie eines idealen Gases im $p - V$ -Diagramm ist

$$S(V, T) = R \cdot \ln \left(\frac{V}{V_n} \right) + C_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right).$$

Bei mikroskopischen Prozessen gilt für die Entropie

$$S = k_B \ln W,$$

mit W als die Anzahl der möglichen Konfigurationen eines Gases.

5 Reale Gase und Van der Waals–Gleichung

Bisher ist die Vereinfachung getroffen worden, dass Moleküle keine Ausdehnung (Eigenvolumen: V_a) und Attraktion (Bindungskräfte) besitzen. In der Realität ist dies nicht der Fall, also brauchen Druck und Volumen einen Korrekturterm

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT.$$

Der Term $\frac{a}{V^2}$ heißt Binnendruck, welcher den gemessenen Druck verringert. Die Ursache ist, dass das Lennard–Jones–Potential

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \right]$$

zwischen zwei Molekülen einen anziehenden und abstoßenden Zweig hat. Die Summe der anziehenden Kräfte am Rand eines Gases ist nicht null und es ergibt sich eine nach innen gerichtete Kraft (da das Molekül nicht von allen Seiten angezogen wird). Das hat zur Folge, dass der Druck eines Gases verringert wird. Schaut man sich den Zusammenhang zwischen der Kraft und der Dichte ergibt sich

$$|\vec{F}_a| \propto \rho = \frac{m}{V} \quad F \propto \rho^2 = \frac{m^2}{V^2} \Rightarrow \frac{a}{V^2} = p_b,$$

wobei a ein Parameter ist, welcher die Stärke der Anziehung parametrisiert.

Der Term b heißt Kovolumen und entspricht $b \approx 4 \cdot V_a \cdot n$. Die Existenz geht daraus hervor, dass sich Gasmoleküle nicht beliebig nahe kommen können, die besitzen also einen Grenzabstand von $\approx 2r_a = d_a$. Zudem kann das Gasmolekül nur bis zum Rand L von dem Behälter / Umgebung das es umgibt, womit das korrigierte Volumen $V' = (L - 2r_a)^3$ ist.

5.1 Innere Energie

Das Gas muss jetzt Arbeit gegen den Binnendruck leisten

$$U(V) = \int_0^V p_b dV' = \int_0^V \frac{a}{V'^2} dV' = -\frac{a}{V}.$$

Dieser Vorgang reduziert die zur Verfügung stehende innere Energie. Also gilt für ein reales Gas

$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

5.2 Joule–Thomson–Effekt und Enthalpie

In einem thermisch isoliertem System existiert ein Volumen, welches von einem Vakuum, im selben thermisch isolierten System, abgeschirmt ist. Dann wird ein Spalt geöffnet, sodass das Gas in das Vakuum gelangen kann. Es wird keine mechanische Arbeit geleistet und keine Wärme zugeführt. Bei einem idealen Gas ist also $dU = 0$ und $dT = 0$. Bei einem realen Gas

ist $dT \neq 0$ also gilt

$$0 = dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) dV = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV$$

$$dT = -\frac{a}{C_V V^2} dV.$$

T reduziert sich also. Dieser Effekt ist der Joule–Thomson–Effekt.

Ein anderer adiabatischer Prozess ist zum Beispiel, wenn zwei Stempel ein Gas durch eine kleine Öffnung in einem thermisch isoliertem System drücken. Die Druckdifferenz ist $p_1 - p_2$ also

$$U_1 - U_2 = \Delta W_a = -p_1 V_1 + p_2 V_2.$$

Man definiert dann die **Enthalpie** als

$$H = U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 = \text{const.}$$

Bei konstantem H gilt für ein ideales Gas

$$dH = 0 = d(U + pV) = d(C_V T + RT) = (C_V + R) dT.$$

Für ein VdW–Gas gilt

$$dH = \frac{\partial H}{\partial T} dT + \frac{\partial H}{\partial V} dV = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dV} \approx \frac{RTb - 2a}{(C_V + R)V^2}.$$

Die Temperatur wird auch Inversionstemperatur

$$T_I = \frac{2a}{Rb}.$$

genannt.

5.2.1 Verflüssigung und Verfestigung

Bei hohem V, T geht die VdW–Gleichung in das ideale Gasgesetz über. Das ideale Gasgesetz weist eindeutige p, V –Paare auf, das VdW–Gesetz allerdings bis zu drei V pro p .

Van der Waals–Kurve

Die Verflüssigung eines Gases beginnt bei einem tiefen T mit den Volumina V_1, V_2, V_3 sowie p_S, p . Bei einer isothermen Kompression beginnt das Gas bei V_2 zu kondensieren. Die Verringerung des Volumens bei konstantem Druck nennt man Sättigungsdruck p_S . Es gibt also die gleiche Menge an Gas und Flüssigkeit, id est die Verdampfungsrate f_V ist gleich der Kondensierungsrate f_K . Die Bestimmung dieses Sättigungsdrucks funktioniert mit Hilfe der Maxwell–Konstruktion. In der Isothermen schneidet der Sättigungsdruck die Kurve so, dass zwei gleichgroße Flächenstücke entstehen (über und unter dem Sättigungsdruck). Es gibt einen Grenzbereich jeder Isothermen, bei dem die beiden Volumina $V_1(T)$ und $V_2(T)$ für größer

werdendes T zusammenfallen. Dies passiert bei einer Temperatur T_k und Druck p_k , wobei diese als kritischer Punkt bezeichnet wird. Sie beschreibt den Übergang eines VdW–Gases in ein ideales Gas. Der Wert für diese Temperatur ist

$$\frac{\partial p_k}{\partial V_k} = \frac{\partial^2 p_k}{\partial (V_k)^2} = 0 \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} = \frac{4}{27}T_I.$$

Isotherme mit $T > T_k$ haben für alle p ein eindeutiges V . Diese Substanzen sind bei allen p gasförmig.

Sieden und Verdunsten

Ist bei gegebener Temperatur der Sättigungsdampfdruck größer als der Luftdruck, dann bilden sich Gasblasen welche die Flüssigkeit verdrängen und in die Luft übergehen. Dieser Prozess bedeutet Sieden. Ist der Sättigungsdampfdruck kleiner als der Luftdruck, dann bilden sich keine Gasblasen, sondern nur einzelne Moleküle entkommen an der Oberfläche. Dieser Prozess wird Verdunsten genannt.

Linde–Verfahren

Ein Gas lässt sich mit Hilfe des Linde–Verfahrens verflüssigen. Dabei kühlt man ein Gas isotherm bei einem hohen Druck mit $T < T_I$. Ein Drosselventil entspannt das Gas und aufgrund des Joule–Thomson–Effekts geht T unter den Kondensationspunkt.

5.3 Verdampfungswärme, Clausius Clapeyronsche Gleichung

Zum Verdampfen entlang des Sättigungsdrucks muss der Substanz Wärme zugeführt werden. Die Verdampfungswärme

$$\frac{Q_V}{T} = \frac{dp_S}{dT} (V_g - V_{fl}).$$

1. Es wird eine mechanische Ausdehnungsarbeit gegen den äußeren Druck geleistet

$$W_a = p_S(V_2 - V_1).$$

2. Die innere Verdampfungswärme ist die Arbeit gegen den anziehenden Teil des Lennard–Jones–Potentials

Die Summe dieser beiden Arbeiten nennt man latente (verborgene) Wärme. Man nennt sie so, weil der Stoff die Wärme aufnimmt, sich die Temperatur aber nicht ändert. Die wird vollständig genutzt, um gegen die mechanische Ausdehnungsarbeit und gegen das Potential zu arbeiten. Einen ähnlichen Effekt gibt es auch beim Schmelzen.

Die hineingesteckte Wärme wird bei der Kondensation wieder frei.

WKM als Wärmepumpe

Bei einer WKM als Wärmepumpe werden die Phasenübergänge genutzt um viel Energie zu speichern bzw. wieder abzugeben.

1. Arbeitsgas wird verdichtet
2. Arbeitsgas verflüssigt sich → Abgabe der Wärme an Reservoir
3. Flüssigkeit wird mit Ventil entspannt
4. Flüssigkeit verdampft → Aufnahme von Wärme bei konstantem Druck

Die Wärme entspricht der Enthalpie bei konstantem Druck.

$$dH + dQ \begin{cases} dQ = dU + p dV \\ dH = dU + p dV + \underbrace{V dp}_{\text{const.}} \end{cases}$$

Arbeitszahl

Die Arbeitszahl ist

$$\varepsilon = \frac{I_Q + I_{\text{el}}}{I_{\text{el}}}.$$

6 Elektrostatik

6.1 Elementarladungen

Ladungsträger kommen als freie Ladungen vor. Mit dem Milikanversuch wurde gezeigt, dass sie als ganzzahlige Vielfache einer positiven oder negativen Elementarladung $Q = \pm n_{\text{N}} e$ vorkommen, mit

$$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Die Ladungen entsprechen den Angriffspunkten der elektromagnetischen Kräften (analog wie die Masse der Angriffspunkt der Gravitation ist). Ruhende Ladungen führen zu anziehenden oder abstoßenden Kräften. Zu sehen ist auch, dass das Abstandsverhalten dasselbe, wie das der Gravitation ist. Zudem weisen bewegte Ladungen eine geschwindigkeitsabhängige Kraft auf. Dies ist der Ursprung des Magnetismus und der Lorentzkraft.

Der Wert der Elementarladung ist eine Naturkonstante und hängt nicht von dem Bewegungszustand.

Die Zahl der Elementarladungen ist erhalten

$$\sum_{i,j} (q_i^- + q_j^+) = \text{const.}$$

Neutronen sind elektrisch neutrale Teilchen. Sie haben eine Lebensdauer von $\tau_n \approx 16 \cdot 60 \text{ s}$ und zerfallen in

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Dies zeigt, dass Ladungserhaltung auch gilt, wenn Ladungsträger erzeugt oder vernichtet werden.

Die **Stromstärke** wird in Ampère A angegeben. Die **Ladung** in As oder C und entspricht der Ladung, die durch den Querschnitt eines elektrischen Leiters mit der Stromstärke von 1A in einer Sekunde fließt. Die **Spannung** V wird in $\frac{\text{J}}{\text{As}} = \frac{\text{J}}{\text{C}}$ angegeben. Die **Faraday-Konstante** ist die Ladung von einem Mol eines Stoffes, also $F = e \cdot N_A$.

Ladungsinfluenz

Wenn sich ein Körper mit Ladungsträgern einem leitenden Körper nähert, verschieben sich die beweglichen Ladungsträger des leitenden Körpers in Abhängigkeit der Ladung des sich annähernden Körpers.

6.2 Coulomb-Gesetz

Zwischen gleichnamigen Ladungen wirkt eine abstoßende Kraft

$$F \propto Q_1 \cdot Q_2.$$

Bei konstanten Ladungen und größer werdendem Abstand sinkt diese Kraft mit

$$\frac{1}{r_{12}^2},$$

wobei r_{12} der Abstand zwischen den Ladungen 1 und 2 ist. Daraus folgt das **Coulombsche Kraftgesetz**

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12} \quad f = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \text{ in SI mit } [f] = \frac{\text{V}}{\text{As}} \text{ m}.$$

f beinhaltet die Komponente des Schwächungsfaktors ϵ^{-1} . Im Vakuum beträgt dieser 1, in Luft ≈ 1 , in Wasser 80. ϵ_0 ist die **elektrische Feldkonstante** mit einem Wert von $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Im Vakuum ist $\epsilon = 1$ und $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$, was zur Folge hat, dass wenige Ladungsträger genügen um große Spannungen zu erzeugen.

6.3 Potentielle Energie

Die Coulomb-Kraft ist ein, analog zur Gravitationskraft, konservatives Kraftfeld. Um die potentielle Energie zu errechnen wird sich zuerst die potentielle Energie zwischen zwei Ladungen in einem Abstand von $r = \infty$ als $E_p(\infty) = 0$ definiert. Man kann dann zeigen, dass

$$\begin{aligned} E_p(r) &= E_p(r) - E_p(\infty) = W_{a,\infty \rightarrow r} = - \int_{\infty}^r \vec{F}_c(\vec{r}') \, d\vec{r}' \\ &= \int_r^{\infty} \vec{F}_c(\vec{r}') \, d\vec{r}' \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{r} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Dies entspricht der Arbeit die benötigt wird, Ladungen von einem Abstand r zu einem Abstand von $r = \infty$ zu bringen. Sind drei Ladungen in einem System gilt

$$W_a = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} \right).$$

Für N Ladungen gilt dann

$$E_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}.$$

Besser ist allerdings mit einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu rechnen

$$E_p = \left[\int_V \int_V \frac{\rho(r') \rho(r'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d\tau' d\tau'' \right] \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0},$$

mit $\rho(r)_i$ als Ladungsdichte und τ als infinitesimales Volumenelement. Zudem gilt

$$\Delta Q_i = \Delta\tau \cdot \rho(r_i).$$

6.4 Elektrisches Feld

Die Kraft die auf eine Testladung wirkt, wenn sie in einem Abstand von \vec{r}_{jq} zu einem Körper mit elektrischer Ladung ist, ist

$$\begin{aligned} F_q &= \sum_j F_{jq} = q \sum_j \frac{Q_j \cdot \hat{r}_{jq}}{r_{jq}^2} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \\ &= q \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{el. Feldstärke}}. \end{aligned}$$

Besteht das System nur aus zwei Ladungen, so gelten äquivalente Ausdrücke

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}_1) &= \frac{q_1 \hat{r}_1}{r_1^2} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \\ \vec{E}_2(\vec{r}_2) &= \frac{q_2 \hat{r}_2}{r_2^2} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \\ &= -\frac{q_2 \hat{r}_1}{r_1^2} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Bei der Ermittlung des elektrischen Feldes muss die Probeladung ausgeschlossen werden.

6.4.1 Wirbelfreiheit eines el. Feldes

Wenn ein elektrisches Feld durchschritten wird und wieder am Anfangspunkt angekommen wird, wird keine Arbeit verrichtet

$$\begin{aligned} W &= \oint \left(\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \right) \\ \frac{W}{q} &= \oint \left(\frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \cdot d\vec{s} \right) = \oint \left(\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine fundamentale Eigenschaft von elektrostatischen Feldern. Alternativ lässt sich auch die Rotation betrachten

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.5 Elektrisches Potential

Wird ein Weg von p_1 nach p_2 durch ein elektrisches Feld gewählt gilt

$$\begin{aligned}\frac{W_{q,1 \rightarrow 2}}{q} &= \frac{1}{q} \int_{p_1}^{p_2} (\vec{F}_c \cdot d\vec{s}) \\ &= \int_{p_2}^{p_1} (\vec{E} \cdot d\vec{s}) \\ &= \varphi_2 - \varphi_1 \\ &= U_{21}.\end{aligned}$$

φ_2, φ_1 ist dann das elektrische Potential mit U_{21} der Potentialsdifferenz. Anders ausgedrückt, da \vec{E} konservativ ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}).$$

Die Einheit ist $[\varphi] = \frac{W_{el}}{Q} = \frac{J}{As} = V$, sowie $[\vec{E}] = \frac{V}{m}$.

6.5.1 Punktladungen

Das Potential einer Punktladung ist

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} \\ &= \int_r^\infty (\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}) \\ &= \int_r^\infty \frac{Q(\hat{r} \cdot d\vec{r})}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.\end{aligned}$$

Das Potential einer Ladungsverteilung mit N Punktladungen Q_i and Orten \vec{r}_i mit $i \in \mathbb{N}$

$$\varphi(\vec{r}_p) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_p|},$$

wobei \vec{r}_p der Abstand zur Probeladung / zum Betrachtungspunkt ist.

6.5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte

Eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}_i)$ im Volumenelement $\Delta\tau_i$ ist

$$\Delta Q_i = \rho(\vec{r}_i) \cdot \Delta\tau_i.$$

Das elektrostatische Potential im Beobachtungspunkt \vec{r}_p ist

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}_p) &= \left[\lim_{\Delta\tau \rightarrow d\tau, N \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^N \frac{\rho(r_i) \Delta\tau_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_p|} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \left(\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} \cdot d\tau \right).\end{aligned}$$

Ein einfaches Beispiel ist das Wasserstoffatom, dessen Potential einem $\frac{1}{r}$ -Verhalten folgt. Da das Proton viel schwerer als das Elektron ist, kann es als fast statisch angenommen werden und beide Ladungen sind Punktladungen. Schwerere Atome sind deutlich komplexer. Der Kern kann weiterhin als Punktladung angenommen werden, aber die Elektronen werden zahlreicher, also kommt es zu einer Ladungsverteilung, und die Elektronen beeinflussen sich gegenseitig. Im Kern wirken zudem die langreichweitigen abstoßenden Kräfte zwischen den Protonen, mit der potentiellen Energie

$$E_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \propto Z;$$

und die kurzreichweitigen starken Wechselwirkungen der Nukleonen, welche dieses Potential kompensieren, mit

$$E_a \propto A.$$

Existieren (vor Allem in schweren Kernen) mehr Neutronen als Protonen, dann ist der Kern stabil. Ab einer gewissen Massezahl, bzw. Ungleichgewicht von Protonen und Neutronen ist der Kern nicht mehr stabil. Dies ist die Ursache für Kernspaltung. Die dabei freiwerdende Energie ist zu einem kleinen Teil die Coulomb-Abstoßung, zum größeren Teil allerdings die starke Wechselwirkung.

6.6 1. Maxwell-Gesetz

Mit der $\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeit und dem Gauß'schen Satz lässt sich eine Beziehung zwischen der Ladungsverteilung und einem elektrischen Feld herstellen.

Gauß'scher Satz und Stromdichte

Der Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ ist die Ladung pro Zeiteinheit. Er lässt sich auch als Fläche mal Stromdichte $\vec{A} \cdot \vec{j} = A \cdot \hat{n} \cdot \vec{j}$ darstellen. Für eine beliebige Fläche A lässt sich schreiben

$$I = \int_A \left(\vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' \right).$$

Für eine geschlossene Fläche (integration über die Oberfläche) gilt

$$I = \oint_O \left(\vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{O}' \right).$$

Benutzt man einen Quader als Volumenelement, dann fließt auf einer Seite eine Stromdichte von $j_x(x)$ bzw. dQ_x^- rein und auf der anderen Seite eine Stromdichte von $j_x(x+dx)$ bzw. dQ_x^+ wieder raus

$$\begin{aligned} dQ_x^+ &= j_x(x+dx) dy dz dt \\ dQ_x^- &= j_x(x) dy dz dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 dQ_x &= dQ_x^+ - dQ_x^- \\
 &= [j_x(x + dx) - j_x(x)] dy dz dt \\
 &= \frac{\partial j_x}{\partial x} \underbrace{dx dy dz}_{=dV} dt \\
 \frac{dQ_x^2}{dV dt} &= \frac{\partial j_x}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

Analog für y und z Richtung ist dann die Gesamtladung

$$\frac{dQ^2}{dV dt} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

Falls $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, dann ist \vec{j} Quellenfrei. Der Gauß'sche Satz besagt dann

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{dQ}{dt} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV \\
 &\stackrel{!}{=} \oint \left(\vec{j} \cdot d\vec{A} \right).
 \end{aligned}$$

Elektrischer Kraftfluss

Der elektrische Kraftfluss Φ ist proportional zur Zahl der durch A hindurchtretende Feldlinien

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \int_A \left(\vec{E} \cdot d\vec{A}' \right) \\
 &= \int_A E \cos \alpha dA' \\
 d\Phi_E &= E \cdot dA' \cos \alpha \\
 &= \left(\vec{E} \cdot d\vec{A}' \right),
 \end{aligned}$$

mit α dem Winkel zwischen der Flächennormalen und den elektrischen Feldlinien. Ist eine Ladung von einer Kugel eingeschlossen ist der elektrische Kraftfluss

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \oint_{\text{Kugelschale}} \left(\vec{E} \cdot d\vec{A} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{r^2} r^2 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \oint d\Omega \\
 &= \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}.
 \end{aligned}$$

Der Abfall der Feldstärke mit $\frac{1}{r^2}$ wird durch den Zuwachs der Kugeloberfläche mit r^2 kompensiert. Dies ist auch der Fall, wenn die Integration über eine beliebige geschlossene Fläche durchgeführt wird. Sollte die Ladung keine Punktladung, sondern eine Ladungsverteilung sein,

dann gelten diese Zusammenhänge solange, wie die Ladungsverteilung die gleichen Symmetrien wie die Punktladung aufweist. Man kann also jedem Volumenelement $d\tau$ ein Ladungselement dQ zuordnen, also $dQ = \rho_E(\vec{r}) \cdot d\tau$. Der Beitrag zum elektrischen Kraftfluss ist dann $d\Phi_E = \frac{dQ}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Im allgemeinen, bzw die **erste Maxwell'sche Gleichung**

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int_V \frac{dQ}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V (\rho_E(\vec{r}) \cdot d\tau) \\ &\stackrel{!}{=} \int (\vec{E} \cdot d\vec{A}').\end{aligned}$$

1. Maxwell'sche Gesetz: Die Quelledichte des elektrostatischen Feldes $\text{div } \vec{E}$ ist proportional zur Ladungsdichte ρ mit dem Proportionalitätsfaktor $\varepsilon\varepsilon_0$

$$\oint_A (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = \int_V \text{div } \vec{E} d\tau \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho.$$

Da das elektrostatische Feld ein konservatives Kraftfeld ist kann man es mit dem Gradienten des skalaren Feld eines elektrostatischen Potentials herleiten $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$. Setzt man diesen Ausdruck noch ein erhält man die **Poissongleichung**

$$-\text{div grad } \varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Betrachtet man den Kraftfluss im Außenraum $r > R$ einer kugelsymmetrischen Ladung mit Radius R , so gilt

$$\oint_{A_{\text{Kugel}}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}') = \int_{A_{\text{Kugel}}} E(r) \cdot \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{r})}_{=1} \cdot dA = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Wendet man nun das erste Maxwell'sche Gesetz an, folgt (für $r > R$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho(r) d\tau &= \oint_A (\vec{E} \cdot d\vec{A}') \quad |r > R \\ \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} &= E(r) \cdot 4\pi r^2 \\ \vec{E}(r) &= \frac{Q}{r^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \hat{r}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass das Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung im Außenraum identisch mit einer gleichstarken Punktladung im Mittelpunkt ist. Dies ist auch der Grund, warum im Coulomb-Gesetz 4π vorkommt. Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Sollte man das elektrische Feld innerhalb einer Ladungsverteilung, mit $\rho = \text{const.}$ betrachten, also $r < R$, folgt

$$\begin{aligned} q &= \int_{V_{\text{Kugel } r < R}} \rho(r) \, d\tau = \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 \\ &= Q \frac{r^3}{R^3} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \hat{r} \\ &= \frac{Qr}{R^3} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

und das Potential

$$\varphi(r) = \frac{Q}{R} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right).$$

Ein wichtiges Beispiel ist der Atomkern mit $\rho = \text{const.}$. Die Protonen bauen ein Coulombpotential auf, welches andere Atomkerne auf Distanz hält.

6.7 Oberflächenladung auf Leitern

Leiter sind makroskopische Objekte, in denen sich Elektronen frei bewegen können und ortsfeste Ionen hinterlassen. Wird ein Leiter mit einer Ladung „beladen“, dann verteilt sich die Ladung in einem elektrostatischen Gleichgewicht auf der Oberfläche und das Innere des Leiters bleibt neutral. Befindet sich im Inneren eine nicht kompensierte überschüssige Ladung, dann induziert diese ein el. Feld, welches die freien Ladungsträger anzieht und somit die Ladung kompensiert (die gleiche Ladung wird dann auf die Oberfläche geschoben).

Im folgenden wird von elektrostatischen Situationen ausgegangen, also die Ladungsträger bewegen sich nicht.

Betrachtet man nun eine Ladungsverteilung auf einer beliebigen gekrümmten Oberfläche und die Ladungen befinden sich in einem Gleichgewicht, dann baut jede Ladung ein zur Oberfläche orthogonales E_{\perp} -Feld auf (mit $E_{\parallel} = 0$, da sich die Ladungen sonst nicht mehr in einem Gleichgewicht befinden würden). Im Inneren ist $\vec{E} = 0$. In einem Abstand d zur Oberfläche ist das elektrische Potential $\varphi(d) = \text{const.}$. Diese Flächen werden **Äquipotentialflächen** genannt. Jeder Weg \vec{s} parallel zu der Oberfläche steht immer senkrecht zu \vec{E} . $\frac{d\varphi}{ds} = 0$.

Man führt die Größe **Oberflächenladungsdichte** σ ein, welche die Ladungsdichte an der Oberfläche beschreibt, da die Ladungsdichte selbst nur an der Oberfläche $\rho \neq 0$ ist. Entferne man sich also ein ϵ von der Oberfläche wäre sie wieder $\rho = 0$. Sie wird definiert als Ladung pro Fläche

$$dQ = \sigma \cdot dA \quad [\sigma] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Der elektrische Kraftfluss ist dann

$$d\Phi_E = (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = E \cdot dA = \frac{dQ}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma dA}{\epsilon\epsilon_0},$$

also

$$\sigma = \varepsilon \varepsilon_0 \cdot E.$$

Die Gesamtladung Q ist geometrieabhängig, aber im allgemeinen

$$Q = A \cdot \sigma.$$

Sie ist auf der Oberfläche gleichverteilt. Das Potential mit R als Radius der Ladungsverteilung

$$\varphi = \frac{Q}{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\varphi}{R}.$$

Je kleiner also der Radius R , desto größer wird das elektrische Feld E . Da die Coulomb-Kraft proportional zur Feldstärke ist, führt dies zur Emission von Ladungsträgern bei hohen Spannungen. Zum Beispiel fängt sich ein S -förmiger Leiter an zu drehen, wenn die angelegte Spannung hoch genug ist, sodass die Ladungsträger in die Luft emittiert werden.

Faraday'scher Käfig

Ist ein Raum von elektrischen Leitern umschlossen, so bleibt der Raum innerhalb des Käfigs feldfrei und es existiert nur ein Feld am Rand des Käfigs. Dies geschieht aufgrund des ersten Maxwell'schen Gesetzes.

6.8 Influenz

Wird ein elektrisch neutraler Leiter in ein E -Feld gebracht, dann sammeln sich negative Ladungsträger auf der einen und hinterlassen positive Löcher auf der anderen Seite. Durch diese Ladungsverschiebung baut sich ein Gegenfeld E' auf, welches genau so stark ist, dass das ursprüngliche Feld im Inneren des Leiters kompensiert wird

$$\vec{E}(\vec{r}) + \vec{E}'(\vec{r}') = 0.$$

Das selbe Phänomen ist auch zu beobachten, wenn man zwei Leiter zwischen zwei Kondensatorplatten, welche ein E -Feld aufgebaut haben, hält. Zieht man die beiden Leiter etwas auseinander, dann wird zwischen diesen Leitern ein E -Feld aufgebaut, und sie werden geladen.

Der Grund für diese **Influenz** ist die sogenannte **Spiegelladung**. Wirkt ein elektrisches Feld einer Punktladung Q auf einen Leiter im Abstand d , dann wird in diesem eine Spiegelladung $-Q$ im Abstand d induziert. Ladung und Spiegelladung ziehen sich aufgrund der Coulomb-Kraft mit dem Abstand $2d$ an.

6.9 Kondensatoren und Kapazität von Leitern

Man betrachtet einen einzelnen, isolierten Leiter. Das Potential ist streng proportional zur Ladung Q auf dem Leiter. Die Kapazität eines solchen Leiters ist

$$C = \frac{Q}{\varphi(Q) - \varphi(Q=0)} = \frac{Q}{U} \quad [C] = \frac{C}{V} = F,$$

mit U der Spannung. Die Kapazität ist also die Ladung geteilt durch die Potentialdifferenz des Leiters mit und ohne Ladung gegenüber seiner Umgebung.

Beispiel: Kapazität einer leitenden Kugel

Das elektrostatische Potential einer leitenden Kugel ist

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{R}.$$

Die Kapazität ist dann

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

Kondensatoren

Bei Kondensatoren kann die Kapazität durch Influenz gesteigert werden. Wird auf Kondensatorplatte eine Spannung angelegt, dann baut sich auf der anderen Platte eine Spiegelladung auf. Die Gesamtladung sowie das \vec{E} -Feld im elektrostatischen Fall bleibt konstant

$$\sigma = \epsilon\epsilon_0 E = \frac{Q}{A} = \text{const.}$$

Zwischen den Platten ist die Ladung sowie die Ladungsdichte $Q = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Daraus folgt, dass $-\text{div grad } \varphi = 0$. In einer Dimension gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0 \\ \varphi(x) &= ax + b \quad \left| \begin{array}{l} \varphi(0) = \varphi_1 \\ \varphi(d) = \varphi_2 \end{array} \right. \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = U \\ \varphi(x) &= -\frac{U}{d} + \varphi_1. \end{aligned}$$

Dann ist das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{=0}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}_{=0} \right) \\ &= \left(\frac{U}{d}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Damit folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_x d} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_x A}{E_x d} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Je kleiner als oder Abstand d , desto größer die Kapazität C .

Schaltet man zwei Kondensatoren parallel, so addieren sich die Kapazitäten, da sich die Flächen addieren. Schaltet man zwei Kondensatoren in Reihe, dann ist an dem ersten Kondensator eine Spannung $+Q$ welche eine Spiegelladung $-Q$ induziert, welche eine Spiegelladung $+Q$ am nächsten Kondensator induziert, welche eine Spiegelladung $-Q$ induziert. Bei dieser Schaltung gilt $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

6.10 Energiedichte

Feldlinien lassen sich in die zwei Komponenten der positiven Ladungen mit dem \vec{E}^+ -Feld und negativen Ladungen mit dem \vec{E}^- -Feld aufteilen, wobei gilt $|\vec{E}^+ + \vec{E}^-| = E = \frac{Q}{\varepsilon \varepsilon_0 A}$. Die beiden Feldstärken haben die Relation $|\vec{E}^+| = |\vec{E}^-| = \frac{1}{2} \frac{Q}{\varepsilon \varepsilon_0 A}$. Die korrespondierenden Kräfte sind $\vec{F}^+ = (+Q) \vec{E}^- = -\vec{F}^- = (-Q) \vec{E}^+$, mit $|\vec{F}^+| = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon \varepsilon_0 A} = |\vec{F}^-|$. Mit d dem Abstand der Kondensatorplatten folgt für die Arbeit (entspricht der potentiellen Energie des \vec{E} -Feldes)

$$W_{d \rightarrow 0} := |\vec{F}^+| \cdot d = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon \varepsilon_0 A} \cdot d := E_p(d) - E_p(0).$$

Für den Plattenkondensator gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{A} = \varepsilon \varepsilon_0 E \\ E_p(d) &= \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon \varepsilon_0 A E)^2}{\varepsilon \varepsilon_0 A} d \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \underbrace{A \cdot d}_{= \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 V}. \end{aligned}$$

Pro Volumenelement gilt

$$\frac{dE_p}{dV} = \rho_{E_p} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2,$$

was der Energiedichte des elektrischen Feldes entspricht.

Der Kondensator kann auch als Energiespeicher benutzt werden. Es gilt $C \cdot d = \varepsilon \varepsilon_0 A$, womit

$$E_p(C, Q, U) = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon \varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{C d} = \frac{1}{2} U^2 C = \frac{1}{2} Q U.$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Kondensatoren.

6.11 Elektrischer Dipol und elektrisches Dipolmoment

Das elektrische **Potential eines Dipols** setzt sich aus den Beiträgen beider Ladungen zusammen

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{+Q}{|\vec{r}_+|} + \frac{-Q}{|\vec{r}_-|} \right),$$

mit d dem Abstand der Ladungen und \vec{r}_+, \vec{r}_- dem Abstand der jeweiligen Ladung zur Probeladung. Man betrachtet hier nur Fälle für $r \gg d$, da der Dipol auf mikroskopischer und der Abstand zur Probeladung auf makroskopischer Skala ist. Mit θ dem Winkel zwischen $\frac{d}{2}$ und \vec{r} folgen die Näherungen $|\vec{r}^+| \approx |\vec{r}| - \frac{d}{2} \cos \theta$ und $|\vec{r}^-| \approx |\vec{r}| + \frac{d}{2} \cos \theta$, also

$$\varphi(r, \theta) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \theta} \right),$$

mit $\frac{1}{r-a} + \frac{1}{r+a} = \frac{2a}{r^2-a^2}$ folgt

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta}.$$

Also gilt für das Potential eines Dipols

$$\varphi_D(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \quad \varphi_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Dieses fällt im Gegensatz zum Monopol mit $\frac{1}{r^2}$ ab. Hätte das Dipol zwei gleichnamige Ladungen würde es wiederum mit $\frac{1}{r}$ abfallen.

Mit $d \cos \theta = \vec{d} \cdot \hat{r}$ folgt das **Dipolmoment**

$$\vec{p} = \vec{d} \cdot Q.$$

Schreibt man das Potential mit dem Dipolmoment um, gilt

$$\varphi(r, \theta) \approx \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

6.11.1 Elektrisches Feld des Dipolmoments

Das elektrische Feld des Dipolmoments ist

$$-\vec{\nabla} \cdot \varphi = \vec{E}.$$

Es bietet sich an hier Kugelkoordinaten zu verwenden

$$\vec{\nabla}_{r,\theta,\varphi} = \partial_r \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta \hat{\theta} + \frac{1}{\cos \theta} \partial_\phi \hat{\phi}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \theta) &= -\vec{\nabla}_{r, \theta, \Phi} \cdot \varphi(r, \theta) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}).\end{aligned}$$

Man erkennt, dass das \vec{E} -Feld eines Dipols mit $\frac{1}{r^3}$ abfällt, wohingegen das \vec{E} -Feld eines Monopols mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt. Zudem kann man erkennen, dass das \vec{E} -Feld nicht mehr kugelsymmetrisch ist.

6.11.2 Dipolmoment im elektrischen Feld

Existiert ein Dipolmoment in einem \vec{E} -Feld, dann wirkt darauf eine Kraft $\vec{F}^\pm = \pm Q\vec{E}$, sowie ein Drehmoment

$$M = M^+ + M^- = \left(\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}^+ \right) + \left(-\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}^- \right) = Q \left(\vec{d} \times \vec{E} \right) = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Die potentielle Energie ist dann abhängig von dem Winkel θ (der Winkel zwischen dem \vec{E} -Feld und dem Dipolmoment)

$$E_p \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) - E_p(\theta) = \vec{x} \vec{F}^+ + \left(-\vec{x} \vec{F}^- \right) = d \cos \theta Q E = p E \cos \theta.$$

Viele Moleküle haben einen permanenten Dipol, wonach sie sich unter Einfluss eines \vec{E} -Feldes ausrichten.

6.11.3 Isolatoren im elektrischen Feld, Dielektrika

Leiter besitzen freie Ladungsträger, welche sich durch das Material bewegen und so das \vec{E} -Feld im Inneren vollständig kompensieren können. Bei **Dielektrika** können sich Ladungsträger nicht frei bewegen, aber lokal verschieben, indem sich zum Beispiel Dipole nach dem \vec{E} -Feld ausrichten. Dies kann allerdings, nicht wie bei Leitern, ein \vec{E} -Feld vollständig kompensieren, sondern nur abschwächen.

Füllt man ein Kondensatorfeld mit einem Dielektrikum, dann erhöht sich die Kapazität um ϵ

$$C_D = \frac{\epsilon Q_0}{U_0} = \epsilon C_0,$$

mit Q_0, U_0 und C_0 als Ausgangsgrößen des Kondensators. Die potentielle Energie ist dann

$$E_p = \frac{1}{2} C_d U^2 = \frac{1}{2} \epsilon C_0 U^2.$$

6.11.4 Zylinderkondensator

Ein Zylinder der Länge l und mit dem Radius r erzeugt mit der Außenwand und einem Stab durch die Mitte, mit dem Radius R_1 ein radialsymmetrisches elektrisches Feld

$$\begin{aligned}\int_A \vec{E} \, d\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV \\ 2\pi r l E &= \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l}.\end{aligned}$$

Mit dem Abstand zur Zylinderwand R_2 ergibt sich die Spannung zu

$$\begin{aligned}U &= \int_{R_1}^{R_2} E \, dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l} \frac{1}{r} \, dr \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\end{aligned}$$

Die Kapazität ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Mit dem Faktor ε lässt sich auch ein Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten einbauen.

6.11.5 Dielektrische Verschiebung

Bisher gilt der Ausdruck

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) \, dV = \oint_A (\vec{E} \cdot d\vec{A}).$$

Man definiert nun $\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$, also

$$\int (\vec{D} \cdot d\vec{A}) = \int_V \rho(\vec{r}) \, dV = Q \quad \text{div } \vec{D} = \rho.$$

Es ist nützlich den Einfluss des Dielektrikums explizit kenntlich zu machen. Man führt also die **dielektrische Polarisation** \vec{P} ein

$$\vec{D} := \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} := \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} \quad \vec{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

mit χ als **dielektrische Suszeptibilität**.

Wenn ein \vec{E} -Feld auf ein Atom wirkt, dann verschiebt es dort die positiven und negativen Ladungen. Der mittlere Abstand dieser Ladungen sei d und das produzierte Feld sei

\vec{E}_{pol} mit den Ladungen Q_{pol}^- und Q_{pol}^+ . Dann ergibt sich für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{pol}}}{A} = \frac{N \cdot d \cdot A \cdot q}{A} = Nqd = Np,$$

mit N der Dichte der Dipole, q der Ladung Ze eines Dipols und p der Polarisierung eines einzelnen Dipols. Für die Dichte gilt

$$Np := \frac{1}{V} \sum_i |\vec{p}_i| = |\vec{P}|,$$

also für die Oberflächendichte

$$\sigma_{\text{pol}} = |\vec{P}|.$$

Solange $|\vec{E}|$ klein gegenüber der Feldstärke im Molekül / Atom ist, dann ist

$$\vec{p}_i \propto \vec{E} = \vec{E}_D \Rightarrow \vec{p}_i = \alpha \cdot \vec{E}_D,$$

mit α als Materialkonstante welche die Polarisierbarkeit eines Materials angibt.

Betrachtet man nun die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q im Dielektrikum, gilt (mit $\vec{E}_V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ im Vakuum)

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{\sigma - \sigma_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} \\ &= E_V - \frac{|\vec{P}|}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}_D &= \frac{\vec{E}_V}{1 + \chi} \\ &= \frac{\vec{E}_V}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_D = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_D = \varepsilon_0 (\vec{E}_V - \vec{E}_D).$$

6.12 Dielektrischer Verschiebungsstrom

Der dielektrische Verschiebungsstrom ist die effektive Formulierung der elektrostatik in Materie. Mit dem ersten Maxwell-Gesetz

$$\begin{aligned} \oint (\vec{E}_D \cdot d\vec{A}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{ges}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q_{\text{frei}} + Q_{\text{fest}}) \\ \text{div } \vec{E}_D &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{ges}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}}) \\ \text{div } \left[\vec{E}_V - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \right] &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{fest}}). \end{aligned}$$

Mit $\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{fest}}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_V + \vec{P}$ folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E}_D + \operatorname{div} \vec{P} \\ &= \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{fest}} - \rho_{\text{fest}} \\ &= \rho_{\text{frei}}.\end{aligned}$$

Die Divergenz des dielektrischen Verschiebungsfeld ist also die freie Ladung

$$\oint (\vec{D} \cdot d\vec{A}) = Q_{\text{frei}} \hat{=} \text{Ladungsträger auf den Kondensatorplatten}.$$

6.13 Elektrisches Feld an Grenzflächen

Wenn ein elektrisches Feld orthogonal auf ein Dielektrum trifft, dann staucht sich dieses Feld um den Faktor ε^{-1} . Trifft das \vec{E} -Feld in einem Winkel auf ein Dielektrum, lässt sich dieses in eine orthogonale und parallele Komponente aufteilen. Die orthogonale Komponente wird wie gehabt mit ε^{-1} gestaucht, die parallele allerdings nicht. Stellt man sich einen Weg von A nach B in einem Vakuum, von B nach C von Vakuum in Dielektrikum, von C nach D im Dielektrikum und schließlich von D nach A von Dielektrikum nach Vakuum vor, dann ist

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0,$$

da das \vec{E} -Feld konservativ ist und die Übertritte BC und DA verschwinden. Für die Strecke AB und CD gilt also

$$\int_A^B \vec{E}_{\parallel}^{\text{außen}} d\vec{s}_1 + \int_C^D \vec{E}_{\parallel}^{\text{innen}} d\vec{s}_2 \rightarrow d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_2.$$

Daraus folgt

$$\vec{E}_{\parallel}^{\text{außen}} = \vec{E}_{\parallel}^{\text{innen}},$$

sonst würde auf einem geschlossenen Weg Arbeit verrichtet werden. Betrachtet man nun den Winkel α zwischen der orthogonalen und schrägen Komponente des \vec{E} -Feldes im Vakuum und β analog in dem Dielektrikum, gilt

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{E}_{\perp}|}{|\vec{E}_{\parallel}|} \quad \tan \beta = \frac{|\vec{E}_{\perp}|^{\frac{1}{\varepsilon}}}{|\vec{E}_{\parallel}|}$$

womit das Brechungsgesetz für elektrische Felder folgt

$$\tan \alpha = \varepsilon \tan \beta.$$

Versuch: Öl zwischen Kondensatorplatten

Werden zwei Kondensatorplatten in ein Öl getaucht, so steigt das Öl die Platten um h nach

oben, wenn eine Spannung angelegt wird. Dabei wird eine mechanische Arbeit verrichtet

$$W_{\text{mech}} = \int_{z=0}^h \rho_{\text{fl.}} \underbrace{bdz}_{V(z)} dz = \frac{1}{2} \rho_{\text{fl.}} ghV(h),$$

mit b der Tiefe und d dem Abstand der Platten. Diese Arbeit muss gleich der elektrischen Arbeit verrichtet von dem Kondensator sein

$$W_{\text{el.}} = \frac{1}{2} U^2 C \varepsilon - \frac{1}{2} U^2 C = \dots = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E^2 V.$$

Daraus folgt die Höhe, die das Öl steigt

$$W_{\text{mech}} = W_{\text{el.}} \Rightarrow h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\rho_{\text{fl.}} g} E^2.$$

7 Elektrischer Strom

Strom beschreibt eine bewegte Ladung (im Gegensatz zur Elektrostatik). Dabei ist die Größe der **Stromstärke** wichtig. Sie ist die bewegte Ladung pro Zeit

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad [I] = \frac{\text{As}}{\text{s}} = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}.$$

Die Vorzeichen werden so gewählt, dass die Ladungsträger von + nach - fließen (auch technischer Strom).

Die **Stromdichte** j ist der Strom pro Fläche, bzw. der **Fluss**

$$\vec{j} = \frac{dI}{d\vec{A}} \quad I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad [j] = \frac{\text{C}}{\text{sm}^2}.$$

Strom mikroskopisch

In einem Würfel mit der Querschnittsfläche A , in dem Ladungsträger mit der Geschwindigkeit \vec{v} , der Ladung q und der Dichte n , ist der Strom

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nA dlq}{\frac{dl}{v}} = nqAv \quad v = \frac{I}{nqA}.$$

In einem Leiter aus Cu mit $n \approx 10^{29} \frac{e^-}{\text{m}^3}$, $I = 1 \text{ A}$ und $A = 1 \text{ mm}^2$ ist die Geschwindigkeit der Teilchen nur $v \approx 62,5 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$. Dies ist allerdings nicht mit der Geschwindigkeit mit der sich das \vec{E} -Feld ausbreitet zu verwechseln. In einem Leiter aus Cu ist sie immernoch $\approx c$.

Fließende Elektronen weisen drei verschiedene Effekte auf

Wärme: Wenn Elektronen durch einen Leiter fließen, dann geben sie kinetische Energie an die Gitteratome ab und heizen somit makroskopisch den Leiter auf. Dadurch dehnt sich dieser aus.

Elektrische Wirkung: Bewegte Ladungsträger ziehen zum Beispiel Bleistaub in einer Flüssigkeit an. Dieser Ordnet sich um die Kathoden an.

Magnetische Wirkung: Bewegte Ladungsträger erzeugen ein magnetisches Feld.

7.1 Ladungserhaltung

Aus der Definition des Flusses

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_V \text{div } \vec{j} dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \\ &= \int_V \frac{d}{dt} \rho dV \end{aligned}$$

folgt die **Kontinuitätsgleichung**

$$\operatorname{div} \vec{j} = \dot{\rho}.$$

Wenn $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$ dann handelt es sich um einen stationären Strom. Durch ändern des Vorzeichen bei ρ lassen sich positive oder negative Ladungsträger betrachten.

7.2 Elektrischer Widerstand, Ohm'sches Gesetz

Da sich Ladungsträger durch einen Leiter bewegen, benötigen sie eine Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$. Die Ladung bewegt sich dann entlang eines elektrischen Feldes $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ (die Differenz von φ ist die Spannung U). Die Frage ist dann, wie I und U zusammenhängen. In einem Diagramm mit I auf der Y -Achse und U auf der X -Achse, sieht man, dass ein idealer Leiter ohne Widerstand eine Parallele zur Y -Achse bei $U = 0$ ist. Die Elektronen können sich also frei bewegen. Ein nicht idealer Leiter mit Widerstand ist eine Gerade (bei $U = 0$ ist $I = 0$).

7.2.1 Dioden

Eine Diode hingegen besitzt eine **Sperrspannung** U_S bei der kein Stromfluss erlaubt, und eine **Durchbruchspannung** U_D bei der Stromfluss erlaubt ist. Die maximale Sperrspannung ist die Spannung entgegen der Durchflussrichtung bis zu der kein Strom fließen kann. Den Bereich, bei dem kein Stromfluss vorhanden ist, nennt man auch **Sperrbereich**.

Betrachtet man zum Beispiel einen Leiter aus Si mit vier Valenzelektronen. Ersetzt man in einem Gitter aus Si ein Atom mit Phosphor (fünf Valenzelektronen), dann ist das eine Elektron von Phosphor im Gitter quasi frei bewegbar. Diesen Vorgang nennt man **n-Dotierung** (n für negativ). Ersetzt man ein Si Gitter mit Bor (drei Valenzelektronen), dann entsteht nahe dem Bor ein positives Loch, da es insgesamt ein Elektron zu wenig gibt. Dieses positive Loch ist auch frei bewegbar, da die Elektronen zwischen den Atomen wandern können. Diesen Vorgang nennt man **p-Dotierung** (p für positiv).

Sind ein p-dotiertes und ein n-dotiertes Material nebeneinander, so entsteht eine Raumladungszone, in der sich die positiven Löcher und negativen Elektronen anziehen. Dadurch entsteht eine Potentialbarriere, die dafür sorgt, dass der Strom nur in eine Richtung fließen kann. Es muss erst genügend Spannung angelegt werden, damit Elektronen diese Barriere überkommen können.

Wird bei dem p-dotierten Material eine positive und bei dem n-dotierten Material eine negative Spannung angelegt, das wird die Raumladungszone kleiner und Strom fließt. Wird die Spannung andersherum angelegt, so vergrößert sie die Raumladungszone und es fließt kein Strom. Wird allerdings genügend Spannung angelegt, kann der Strom bei jeder Polung fließen.

Der Zustand in einem Atom, bei denen sich Elektronen frei bewegen können, nennt man Leitungsband; der Zustand bei denen sich Elektronen nicht bewegen können heißt Valenzband.

7.2.2 Ohm'sches Gesetz

Der mikroskopische Grund für unterschiedliche Steigungen der Proportionalität $U \propto I$ ist die Reibung die durch Elektronenstöße verursacht wird. Wenn sich ein Gleichgewicht zwischen

der elektrischen Kraft und der Reibungskraft einstellt, spricht man von statischem Strom. Die Geschwindigkeit der Elektronen ist proportional zum \vec{E} -Feld

$$\vec{v} \propto \mu \vec{E},$$

mit μ der **Beweglichkeit** / **Mobilität**. Diesen Zusammenhang kann man in den Ausdruck für die Stromdichte einsetzen

$$\vec{j} = nq \cdot \vec{v} = nq \cdot \mu \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E} \quad [\sigma] = \frac{\text{A}}{\text{Vm}} = \frac{1}{\Omega \text{m}},$$

mit σ der **spezifischen Leitfähigkeit** und $\rho = \frac{1}{\sigma}$ dem **spezifischen Widerstand** eines Materials. Dieser Ausdruck ist das **Ohm'sche Gesetz**.

Der Strom ist dann

$$I = A \cdot j = A \cdot \sigma \cdot \vec{E} = A \cdot \sigma \cdot \frac{U}{l} = \frac{U}{R} \quad R = \frac{l}{A \cdot \sigma} = \frac{l \cdot \rho}{A} \quad [R] = \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}},$$

mit R dem **elektrischen Widerstand**.

Potentiometer

Wird Strom an einer Stelle x von einem Widerstand der Länge l abgegriffen, dann reduziert sich der Widerstand um das Stück R_x , welches nach dem Abgriffpunkt kommt und es wird nur das Stück R_y vorher berücksichtigt. Die gemessene Spannung ist dann $U = R_x \cdot I$. Das Verhältnis aus Abgriffpunkt und Länge des Gesamtwiderstandes ist proportional zum Verhältnis des Widerstandes nach dem Abgriffpunkt und dem Gesamtwiderstand

$$\frac{x}{l} = \frac{R_x}{R}.$$

Daraus folgt für die gemessene Spannung

$$U = \frac{x}{l} U_0 = \frac{R_x}{R} U_0.$$

7.3 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Der Ohm'sche Widerstand ist eine Materialeigenschaft, welche die Stöße der Leitungselektronen beschreibt. Man erwartet, dass der Widerstand sinkt, wenn die Temperatur sinkt, da sich bei hoher Temperatur mehr Elektronen im Leitungsband befinden, also die mittlere freie Weglänge sinkt, bei denen Elektronen nicht miteinander stoßen.

Metalle

Bei Metallen nimmt die mittlere freie Weglänge ab, wenn die Temperatur steigt. Der spezifische Widerstand ist also abhängig von T

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha T + \beta T^2 + \dots).$$

Metalle sind in der Regel **Kaltleiter**. ρ ist minimal bei niedrigem T .

Halbleiter

Bei niedrigen Temperaturen in Halbleiter existieren keine freien Ladungsträger mehr. Die Elektronen müssen die sogenannte Bandlücke ΔE überwinden, um von dem Valenzband in das Leitungsband zu kommen. Dazu brauchen sie eine thermische Anregung. Die Anzahl der Elektronen, die in das Leitungsband gelangen ist Boltzmann-verteilt, mit

$$n(T) \propto e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}},$$

ρ ist also maximal bei hohem T .

Supraleiter

Bei einer gewissen Temperatur (für $T \rightarrow 0$, wobei es mittlerweile möglich ist diese Temperaturen durch verschiedene Legierungen zu erhöhen) ist der spezifische Widerstand eines Materials gleich 0. Diese Temperatur ist Materialabhängig und wird kritische Temperatur T_c genannt. Die Erklärung dafür liegt der Quantenmechanik zugrunde.

7.4 Stromleistung

Strom ist Ladungstransport, also wird Arbeit verrichtet

$$W = q(\varphi_2 - \varphi_1) = qU.$$

Strom ist also eine Ladungsmenge $Q = \int I dt$, die über eine Spannung U transportiert wird

$$W = \int I dt \cdot U.$$

Die Leistung ist dann

$$P = \frac{dW}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad [P] = \text{V} \cdot \text{A} = \text{W}.$$

In ohm'schen Leitern wird diese Arbeit durch Reibung in **joule'sche Wärme** umgewandelt.

7.5 Stromkreise und Kirchhoff'sche Regeln

7.5.1 1. Kirchhoff'sche Regel / Knotenregel

„Verzweigen sich mehrere Leiter in einem Punkt, ist die Summe der einlaufenden Ströme gleich der Summe der auslaufenden Ströme.“,

$$\sum_k I_k = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung für stationäre Ströme ist

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \rightarrow 0 = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV = \oint \vec{j} \, d\vec{A} = \sum_k I_k.$$

7.5.2 2. Kirchhoff'sche Regel / Maschenregel

„In jedem geschlossenen Stromkreis ist die Summe der Spannungen null.“,

$$\sum_k U_k = 0.$$

Es existiert ein Spannungsanstieg bei der Spannungsquelle und in –abfall über Widerstände. Diese Vorzeichen sind in der Summe zu berücksichtigen.

7.5.3 Widerstände

Für serielle Schaltungen gilt

$$\sum_k R_k = R_{\text{ges}}.$$

Für parallele Schaltungen gilt

$$\sum_k \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_{\text{ges}}}.$$

7.6 Stromtransport durch verschiedene Materialien

7.6.1 Gase

In nicht ionisierten Gasen fließt kein Strom; in vollständig ionisierten Gasen (Plasma) sind die Ladungsträger (sowohl positiv als auch negativ) frei beweglich. Die Ladungsträgerdichte in einem neutralen Gas ist identisch über alle Ladungen $n_+ = n_- = n$. Die Erzeugungsrate der Ladungsdichte über eine Zeit ist konstant, also $\frac{dn}{dt} = \alpha$. Die Vernichtungsrate, durch Rekombination von e^- und Ion^+ , ist $\frac{dn}{dt} = \beta$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein e^- und Ion^+ treffen ist proportional zu $n^- \cdot n^+ = n^2$. Die Gesamtdichte ist dann

$$\frac{dn}{dt} = \alpha - \beta n^2.$$

Es existiert ein Gleichgewicht bei

$$n = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dn}{dt} = 0.$$

Erzeugungsmechanismen

Es gibt verschiedene Methoden ein Plasma zu erzeugen.

1. Thermisch, durch Fusion von Atomen: $\text{Atom} + \text{Atom} \rightarrow 2\text{Ion}^+ + 2e^-$. Dieser Vorgang benötigt allerdings sehr hohe Temperaturen.

2. Elektronenstöße, wenn Elektronen ausreichend kinetische Energie haben. Mit $E_{\text{kin}} > E_{\text{ion}}$, folgt $e^- + \text{Atom} \rightarrow e^- + e^- + \text{Ion}^+$. Werden die Elektronen durch ein \vec{E} -Feld beschleunigt, fangen sie an mit Atomen zu stoßen und produzieren weitere Elektronen sowie Ionen. Da die Ionen aber viel langsamer als die Elektronen sind, wird in dem \vec{E} -Feld auf einer Seite eine positive Ladungsverteilung erzeugt, welche die Elektronen wieder abbremsen.
3. Photonionisation, indem ein Atom mit einem Photon beschossen wird, also $\gamma + \text{Atom} \rightarrow \text{Ion}^+ + e^-$.

7.6.2 Festkörper

In Festkörpern können sich Elektronen durch das **Leitungsband** bewegen. Das Leitungsband ist der Bereich, in dem Elektronen nur noch lose an die Atome gebunden sind. Dies ermöglicht ihnen, sich zwischen den Atomen zu bewegen, da die Leitungsbander in einem Atomgitter überlappen.

7.6.3 Thermoelektrische Phänomene

Werden Materialien auf einer Seite aufgeheizt und auf der anderen abgekühlt, dann bildet sich auf der kalten Seite ein negativer Ladungsüberschuss, da die Dichte der Elektronen, aufgrund der niedrigeren kinetischen Energie, zunimmt. Werden die heißen und kalten Seiten von zwei verschiedenen Materialien zusammengebracht, dann bildet sich an der Kontaktstelle eine Raumladungszone, die ein \vec{E} -Feld erzeugt, wodurch eine Spannung aufgebaut wird. Dieser Effekt heißt **Seebeck-Effekt**

$$T_A \neq T_B \quad \Rightarrow \quad U = (S_A - S_B)(T_A - T_B) \neq 0,$$

mit S dem Seebeck-Koeffizienten (Materialeigenschaft). Sollte kein Temperaturunterschied vorhanden sein, dann findet nur eine Diffusion von Elektronen zwischen dem Materialien statt.

In Abhängigkeit davon, in welche Richtung der Strom fließt, kann man die Kontaktstelle aufheizen oder abkühlen. Da die Elektronen unterschiedliche mittlere kinetische Energien haben, findet ein Temperatúraustausch statt, da sich bei dem Übergang von Elektronen in das jeweils andere Material die jeweilige mittlere kinetische Energie erhöht.

8 Magnetismus

Magnetische Kraft wird durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Es existiert kein magnetischer Monopol und keine magnetischen Ladungsträger.

8.1 Magnetische Felder

Ein Magnetfeld besteht aus **geschlossenen Feldlinien**, von Nord nach Süd. Das von Strom aufgebaute Magnetfeld dreht rechts um die technische Stromrichtung und seine Flächennormale ist parallel zur Stromrichtung

$$\psi_m := \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad [B] = \frac{Vs}{m^2} = T = \text{Tesla}.$$

Über eine geschlossene Oberfläche A treten gleichviele Feldlinien ein, wie diese verlassen. Dieser Ausdruck ist äquivalent dazu, dass Feldlinien geschlossen sind

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V \text{div } \vec{B} \cdot dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

Die Divergenz des Magnetischen Feldes entspräche der magnetischen Ladungsdichte, diese existiert allerdings nicht. \vec{B} ist also **Quellenfrei**.

\vec{B} -Felder sind allerdings **nicht Wirbelfrei**, also

$$\oint_s \vec{B} \, ds \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} \neq 0,$$

mit s einem Wegstück entlang einer Feldlinie.

Das Magnetfeld ist gegeben durch

$$B = \frac{\mu \mu_0}{2\pi} \frac{I}{r},$$

mit μ der Permeabilität und μ_0 der magnetischen Feldkonstante.

8.1.1 Hall-Sonde

Mit einer Hall-Sonde kann die Stärke eines Magnetfeldes gemessen werden. In der Hall-Sonde befindet sich ein flacher Leiter, durch den ein Strom fließt. Wird dieser Leiter in ein Magnetfeld geführt, werden die Elektronen in dem Leiter abgelenkt und bewegen sich zu einer der Seiten parallel zur Stromrichtung. Dadurch entsteht die Hall-Spannung quer durch den Leiter, welche mit der Stärke des Magnetfeldes in Zusammenhang gebracht werden kann.

8.2 Lorentzkraft

Magnetfelder üben eine Kraft aus, diese ist allerdings nicht proportional zur magnetischen Feldstärke, da sie orthogonal dazu wirkt

$$\vec{F} \perp \vec{B} \quad \vec{F} \cdot \vec{B} = 0.$$

Diesen Effekt kann man in einem Fadenstrahlrohr zeigen, bei dem Elektronen durch ein Magnetfeld auf eine Kreisbahn gezwungen werden. Die Kraft, die auf die Elektronen wirkt ist

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Magnetische Feldkonstante

Mit Hilfe der Lorentzkraft kann die magnetische Feldkonstante hergeleitet werden

$$\begin{aligned} F(\text{ein Ladungsträger}) &= qvB \\ F(\text{ganzer Leiter}) &= N \cdot qvB & N &= nAl \\ &= \underbrace{nAl \cdot qv}_I B \\ &= I \cdot B & B &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{r}. \end{aligned}$$

Mit $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$, als die Kraft, die auf zwei Leiter in einem Abstand von einem Meter mit einer Stromstärke von einem Ampere wirkt, folgt

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Nm}}{\text{A}^2}.$$

Mit der elektrischen Feldkonstante, gilt folgender Zusammenhang

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = c.$$

8.3 Magnetischer Fluss, Ampere'sches Gesetz, Stoke'scher Satz

Vergleicht man \vec{B} - und \vec{E} -Felder, sieht man, dass

$$\begin{array}{ll} \psi_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} & \Phi_e = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 & \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \text{div } \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}. \end{array}$$

Für einen Leiter mit konstantem \vec{B} -Feld über ein Wegstück $d\vec{s}$ auf den Feldlinien des Magnetfeldes gilt

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B \qquad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$= \mu_0 I.$$

Dieser Ausdruck ist das **Ampere'sche Gesetz**. Für eine Spule mit Windungsdichte n gilt

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = n \cdot \mu_0 I. \quad (1)$$

Der Strom durch eine geschlossene Oberfläche ist

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}.$$

Nach dem **Stoke'schen Satz** gilt allgemein

$$\oint_C \vec{k} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{k} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{k}) \cdot d\vec{A},$$

mit \vec{k} einem beliebigen Vektorfeld. Konkret für den Magnetismus

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

$$= \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}.$$

Daraus folgert man

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \text{rot } \vec{E} = 0$$

8.3.1 Helmholtz–Spule

Das Magnetfeld von zwei Spulen mit dem Radius R im Abstand z ist gegeben durch

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} R} \cdot \left[1 + \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} + \dots \right].$$

Sind beide Spulen nah genug aneinander, so entsteht zwischen den Spulen ein konstantes Magnetfeld.

8.4 Magnetisches Vektorpotential und Biot–Savart–Gesetz

Da $\text{div } \vec{B} = 0$ kann man die vektorielle Größe $\vec{A}(r)$ einführen, sodass

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B},$$

denn

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = 0.$$

\vec{A} ist allerdings nicht eindeutig, kann aber mit einer beliebigen Funktion f in Bezug gesetzt werden

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f,$$

da $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ ist, also

$$\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{B}.$$

Weiter kann man

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} = -\Delta \vec{A} \stackrel{!}{=} \mu_0 \vec{j},$$

betrachten, woraus folgt

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}} dV_2,$$

mit \vec{r}_1 als Ortsvektoren zu einem Volumenelement dV_2 , \vec{r}_1 als Ortsvektor zu $\vec{A}(\vec{r}_1)$ und \vec{r}_{12} als Vektor von $\vec{A}(\vec{r}_1)$ zu dem Volumenelement. Daraus kann das \vec{B} -Feld bestimmt werden. Auch das **Biot–Savart–Gesetz**

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}} dV_2.$$

8.5 Magnetische Dipole

Das Magnetfeld einer Leiterschleife entspricht dem Magnetfeld eines kurzen Stabmagneten. Entlang der Flächennormale existiert ein **magnetisches Dipolmoment**

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A},$$

mit I der Stromstärke.

Eine Leiterschleife der Höhe a und Breite b wird an der breiten Kante an einem Faden aufgehängt. Befindet sich diese Leiterschleife in einem Magnetfeld und es fließt ein Strom, dann dreht sie sich aufgrund der Lorentz-Kraft um ihren Aufhängepunkt. Die Kraft ist

$$\vec{F}_L = a \cdot I \left(\hat{e}_a \times \vec{B} \right).$$

Das Drehmoment ist dann

$$\begin{aligned} \vec{D} &= 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\hat{e}_a \times \vec{F}_L \right) \\ &= a \cdot b \cdot I \cdot (\hat{e}_b \times \hat{e}_a) \times \vec{B} \\ &= I \cdot \vec{A} \times \vec{B}. \end{aligned}$$

Verwendet man zudem den magnetischen Dipolmoment, folgt

$$\vec{D} = \vec{p}_m \times \vec{B}.$$

Die potenzielle Energie bzw. die Kraft ist dann

$$W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \quad \vec{F} = \left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \vec{B}.$$

8.5.1 Atomare magnetische Momente

Im Bohr'schen Atommodell kreist das Elektron um den Atomkern auf diskreten Bahnen. Dieser Orbit entspricht einem Strom, also

$$\begin{aligned} \text{Strom} &= \frac{\text{Ladung}}{\text{Periode}} & \text{Periode} &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{e^- \omega}{2\pi} & \omega &= \frac{v}{r} \\ &= \frac{e^- v}{2\pi r}. \end{aligned}$$

Das magnetische Dipolmoment ist dann

$$\begin{aligned} p_m &= \mu = I \cdot A \\ &= \frac{e^- v}{2\pi r} r^2 \pi \\ &= \frac{1}{2} e^- v r. \end{aligned}$$

Mit dem Drehimpuls $L = mvr$ folgt

$$\mu = \frac{e^-}{2m} L.$$

In der Quantenmechanik ist der Drehimpuls allerdings quantisiert, mit

$$L_z = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \cdot \hbar,$$

mit \hbar dem Planck'schen Wirkungsquantum. Dann gilt

$$|\vec{\mu}| = n \cdot \frac{e^- \hbar}{2m_e} = n \cdot \mu_B,$$

mit μ_B dem **Bohr'schen Magneton**.

8.6 Materie im Magnetfeld

Elektronen „drehen“ sich um sich selbst. Dies wird als Spin bezeichnet. Der Spin selbst, der Orbit der Elektronen und der Atomkern besitzen alle ein magnetisches Dipolmoment

$$\vec{\mu} = \sum \vec{\mu}_{\text{Spin}} + \sum \vec{\mu}_{\text{Orbit}} + \sum \vec{\mu}_{\text{Kern}}.$$

$\vec{\mu}_{\text{netto}}$ ist relativ klein, da sich diese Momente gegenseitig aufheben. Die Atome beeinflussen sich mit ihren Magnetfeldern trotzdem gegenseitig, was dazu führt, dass das magnetische Dipolmoment alternierend in die andere Richtung zeigt. Man unterscheidet

- Diamagnetismus: Befinden sich benachbarte Atome in einem Magnetfeld, dann wirkt eine Lorentz-Kraft auf ein Elektron zum Atomkern hin bzw. vom Atomkern weg. Dabei vergrößert sich v und μ bzw. reduziert sich v und μ , was dazu führt, dass sich ein Magnetfeld in die Richtung des größeren μ s bildet.
- Paramagnetismus: Beim Paramagnetismus werden Atome mithilfe eines Magnetfeldes geordnet. Sie richten sich alle entlang der Feldlinien. Wird das Magnetfeld wieder entfernt, gehen die Atome wieder in ihre Ausgangsrichtung zurück.
- Ferromagnetismus: Bei Ferromagneten sind die Dipole auch ohne äußeres Feld ausgerichtet.

8.6.1 Magnetisierung

Ein externes Magnetfeld in Materie wird durch Dipole modifiziert. Also

$$\vec{B}_{\text{Materie}} = \mu \vec{B}_{\text{Vakuum}},$$

mit μ_0 der Permeabilität. Die Ursache für die Abweichung von 1 der Permeabilität ist die **Magnetisierung**

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{\mu} \quad [M] = \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Dann ist das Magnetfeld

$$\vec{B}_{\text{Mat}} = \vec{B}_{\text{Vak}} + \mu_0 \vec{M} = \mu \vec{B}_{\text{Vak}}.$$

Vergleicht man mit dem \vec{E} -Feld, gilt

$$\vec{E}_D = \vec{E}_{\text{Vak}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{p} = \frac{\vec{E}_{\text{Vak}}}{\varepsilon}.$$

In der Elektrodynamik kann ε nicht kleiner als 1 werden. Die Permeabilität allerdings schon. Es ist also möglich das Magnetfeld in Materie größer als im Vakuum zu machen.

Man definiert das **magnetisierende Feld** oder **magnetische Erregung** mit

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B}_{\text{Mat}} - \mu_0 \vec{M} \right) & [H] &= \frac{[B]}{[\mu_0]} = \frac{\text{A}}{\text{m}} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{Vak}} \\ &= \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}_{\text{Mat}}.\end{aligned}$$

Damit kann das Ampere'sche Gesetz modifiziert werden

$$\begin{aligned}\oint_c \vec{B} \, d\vec{r} &= \mu_0 \sum I_i \\ &= \mu_0 I_{\text{ext}} + \mu_0 I_{\text{Mat}} \\ &= \oint_c \vec{B}_{\text{Vak}} \, d\vec{r} + \mu_0 \oint_c \vec{M} \, d\vec{r}\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \, d\vec{r} &= \mu_0 I_{\text{ext}} \\ \text{rot} (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) &= \mu_0 \vec{j}_{\text{ext}} \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{\text{ext}}.\end{aligned}$$

Die Größe des Feldes ist dann

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B},$$

mit χ_m der **magnetischen Suszeptibilität**.

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{Mat}} &= \vec{B}_{\text{Vak}} + \chi_m \vec{B}_{\text{Vak}} \\ &= (1 + \chi_m) \vec{B}_{\text{Vak}} \\ &= \mu B_{\text{Vak}}.\end{aligned}$$

Für

$$\begin{aligned}\chi_m < 0 &: \text{diamagnetisch } \vec{B}_{\text{Mat}} < \vec{B}_{\text{Vak}} \\ \chi_m > 0 &: \text{paramagnetisch } \vec{B}_{\text{Mat}} > \vec{B}_{\text{Vak}}.\end{aligned}$$

8.6.2 Diamagnetismus

Das „induzierte“ magnetische Dipolmoment impliziert dass $\vec{M} \propto -\vec{B}$ ist. Dies gilt für alle Stoffe und ist abhängig von der Temperatur.

8.6.3 Paramagnetismus

Es existieren Moleküle mit permanentem magnetischem Dipolmoment. Ist kein externes Feld angelegt, dann sind diese Dipolmomente stark verteilt, also $\vec{M} = 0$. Wird \vec{B}_{vak} angelegt, dann richten sich diese Dipolmomente aus, mit $\vec{M} \propto +\vec{B}$, was das \vec{B} -Feld verstärkt.

8.6.4 Ferromagnetismus

Hier ist $\chi_m \gg 0, \mu \gg 1$ also ist $\vec{B}_{\text{Mat}} \gg \vec{B}_{\text{vak}}$. Man erreicht eine kollektive Ausrichtung der magnetischen Dipolmomente. Das Dipolmoment wird durch den Spin-Effekt getragen und das Magnetfeld verschwindet nicht mit $\vec{B}_{\text{vak}} = 0$. Es bilden sich makroskopische Domänen.

9 Einschub: Spezielle Relativitätstheorie

In der klassischen Physik existieren folgende Probleme

1. Die Lorentz-Kraft hängt vom Bezugssystem ab.
2. Die Maxwell-Gleichungen sind nicht invariant unter Galileitransformation.

Bisher wird der dreidimensionale Raum als ein \mathbb{R}^3 -Vektorraum beschrieben. Die Annahme ist, dass die Zeit absolut und identisch für alle Orte ist. In der SRT ist das allerdings nicht mehr der Fall; es wird ein vierdimensionaler Vektor

$$u = (t_u, u_x, u_y, u_z),$$

mit einer Zeit und drei Geschwindigkeiten verwendet.

Prinzip der Relativität

Die SRT folgt aus dem speziellen Relativitätsprinzip,

1. dass die Naturgesetze der Mechanik und Elektrodynamik in allen Inertialsystemen gleich sind.
2. dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist.

9.1 Lorentz-Transformation

Bisher galt immer die Galileitransformation, mit

$$\begin{aligned}x' &= x - v_x \cdot t \\y' &= y - v_y \cdot t \\z' &= z - v_z \cdot t \\t' &= t.\end{aligned}$$

Die Galilei'sche Addition der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung ist

$$v' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u = v - u \quad a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} = a.$$

Die Geschwindigkeit ändert sich aber die Beschleunigung bleibt gleich. Ein Problem ergibt sich aber, wenn man Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit Galilei-transformiert, da sich dabei die Lichtgeschwindigkeit ändern würde.

9.1.1 Konsequenz für die Gleichzeitigkeit

In einem ct - x -Diagramm wird an Stelle $(0, 0)$ ein Lichtsignal in der Form eines Kegels in einem Winkel von 45° zur x -Achse ausgesandt. An den zwei Punkten $(A, 0)$ links und $(B, 0)$ rechts von Kegel sind zwei Beobachter in Ruhe in gleicher Entfernung zur Lichtquelle, also

$d(A, O) = d(B, O)$. Die Punkte (x, ct) werden in diesem Diagramm als **Ereignisse** bezeichnet. Die beiden Beobachter A und B sehen zur selben Zeit das selbe Ereignis des Lichtkegels, (A, t_1) und (B, t_1) , da sich A und B in Ruhe befinden. Die Orthogonale zur x -Achse vom Beobachter zum Lichtkegel wird **Weltlinie** genannt.

Jetzt werden O, A und B mit einer Geschwindigkeit u in x -Richtung verschoben. Die Weltlinien der drei Stellen werden um einen Winkel δ zur Normalen der x -Achse verschoben. Die Gegenkathete zu diesem Winkel am Zeitpunkt t_1 hat die Länge von $u \cdot t_1$. Da das Licht eine Strecke von $c \cdot t_1$ zurücklegt und in einem Winkel von 45° zur x -Achse steht, ergibt sich für den Winkel $\delta = \tan \frac{u}{c}$.

Aus diesem Winkel folgt, dass der Lichtkegel die Weltlinien von A und B zu verschiedenen Zeitpunkten schneidet. A bewegt sich auf den Lichtblitz zu und sieht ihn bei t_A ; B bewegt sich von dem Lichtblitz weg und sieht ihn bei t_B ; $t_A < t_B$. Die Begriffe „vorher“, „nachher“ und „gleichzeitig“ sind also vom Inertialsystem abhängig.

Mit t der Zeit im System S (A und B in Ruhe) und t' der Zeit im System S' (A und B bewegen sich mit u) folgt, dass $t \neq t'$, also gibt es keine absolute Zeit mehr. Vereint man beide Inertialsysteme in einer Darstellung, dann bleibt die x -Achse gleich und die ct' -Achse wird um einen Winkel $\delta = \tan \frac{u}{c}$ zur ct -Achse verschoben. Die x' -Achse verschoben um den Winkel δ zur x -Achse verbindet die Punkte gleicher Zeit in S' . Es gilt $\angle(t, t') = \angle(x, x') = \delta$. Alle Achsen werden in ein Koordinatensystem gezeichnet. Der Lichtkegel aus dem Ursprung in beiden Systemen ist die Winkelhalbierende, also identisch.

9.1.2 Herleitung der Lorentztransformation

Die Lorentz-Transformation ist eine Transformation, die das System S in das System S' überführen kann. Folgende Bedingungen sind zu erfüllen

1. $c = c'$.
2. Für $u \ll c$, sollte die Lorentz- in die Galilei-Transformation übergehen.
3. Die Transformation muss linear sein.

Ein Lichtblitz breitet sich im Vakuum kugelförmig mit dem Radius von $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ aus. Da sich Licht in jedem Inertialsystem mit der selben Geschwindigkeit ausbreitet, gilt auch $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$.

Um die Bedingung 1. und 2. zu erfüllen gibt es einen einfachen Ansatz, mit

$$x' = A(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = Bx + Dt,$$

mit A, B und D als unbekannte. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ (A(x - ut))^2 + y^2 + z^2 &= c^2 (Bx + Dt)^2 \\ A^2 x^2 + A^2 u^2 t^2 - 2A x u t + y^2 + z^2 &= c^2 (B^2 x^2 + D^2 t^2 + 2B x D t) \\ A^2 x^2 - c^2 B^2 x^2 + y^2 + z^2 - 2A x u t - 2c B x D t &= c^2 D^2 t^2 - A^2 u^2 t^2. \end{aligned}$$

Dieser Term muss mit $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ gleich sein. Damit das erfolgt, muss

$$\underbrace{A^2 x^2 - c^2 B^2 x^2}_{=x^2} + y^2 + z^2 \underbrace{- 2A x u t - 2c B x D t}_{=0} = \underbrace{c^2 D^2 t^2 - A^2 u^2 t^2}_{=c^2 t^2}$$

gelten. Daraus folgt ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Diese Unbekannten sind

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad B = -\frac{u}{c^2} \cdot A \quad D = A.$$

Im Allgemeinen wird eine andere Notation verwendet

$$A = D = \gamma \quad B = -\frac{\beta}{c} \gamma \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

Dann erhält man die **Lorentz-Transformation**

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - ut) & x' &= -\gamma (x - \beta ct) \\ y' &= y & y' &= y \\ z' &= z & z' &= z \\ t' &= \gamma \left(-\frac{\beta}{c} x + t \right) & ct' &= -\gamma \beta x + \gamma ct. \end{aligned}$$

Damit ist auch die 1. Bedingung erfüllt, also $u \ll c \Rightarrow \beta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1$ und die Lorentz-T geht in eine Galilei-T über.

Für den anderen Grenzfall gilt $u \rightarrow c \Rightarrow \beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow \infty$.

Für $u > c \Rightarrow \beta > 1, \Im(y) \neq 0$, also eine komplexe Transformation.

9.2 Längenkontraktion

Sei ein Stab der Länge l im System S . Der Stab bewegt sich mit der Geschwindigkeit u . Sei ein identischer Stab der Länge l' im Ruhesystem S' . Um die Länge des Stabes zu messen, müssen die Endkoordinaten x_1 und x_2 „gleichzeitig“ abgelesen werden, id est, man liest zum Zeitpunkt t_1 den Endpunkt ab und transformiert diesen Endpunkt in S' .

Die Länge des Stabes im Ruhesystem S' ist dann $L' = x'_2 - x'_1$ und die Länge in S ist

$L = x_2 - x_1$. Vergleicht man diese Längen mit einer Transformation, folgt

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\x'_2 &= \gamma(x_2 - \beta ct_1).\end{aligned}$$

Das bedeutet allerdings, dass $L = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1)$. Die Länge des Stabes hat sich also bei der Transformation von S nach S' um den Faktor $\frac{1}{\gamma}$ verkleinert. Eine Erklärung dafür ist, dass die Zeitpunkte die in S' gleichzeitig sind, in S nicht mehr gleichzeitig sind, da die Weltlinien der Systeme nicht parallel zueinander sind.

9.3 Zeitdilatation

Von einem Ort x_1 werden Lichtblitze ausgesandt. Der erste Blitz kommt bei dem Empfänger zum Zeitpunkt t_1 an. An dem Zeitpunkt t_1 wird dann an der Stelle (x, t_1) ein zweiter Lichtblitz ausgesandt, der bei t_2 beim Empfänger ankommt. Die Zeit zwischen den Lichtblitzen ist $\Delta t = t_2 - t_1$. In einem verschobenen Inertialsystem S' gilt dann $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Mit der Lorentz-T folgt

$$\begin{aligned}t'_1 &= \gamma\left(t_1 - \frac{\beta}{c}x_1\right) \\t'_2 &= \gamma\left(t_2 - \frac{\beta}{c}x_1\right).\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Von einem relativ zur Uhr bewegten Inertialsystem scheint also die Uhr langsamer zu laufen. Die Uhr läuft in ihrem Ruhesystem am schnellsten. Dies ist die **Eigenzeit** oder **proper time** τ .

Für den Grenzfall $\beta \rightarrow 1$ und $\gamma \rightarrow \infty$ bleibt die Zeit im mitbewegten System stehen. Betrachtet man ein infinitesimales Zeitintervall gilt $dt = \gamma d\tau$

9.4 4er-Vektor

Da die Zeit nicht mehr absolut ist, wird ein Vektor mit drei Raum- und einer Zeitkoordinate eingeführt

$$x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \quad x_\nu := (x_0, -x_1, -x_2, -x_3).$$

Das **4er-Produkt** ist

$$\begin{aligned}(x^\mu, y^\nu) &:= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 & \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \text{ mit } g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\&= x^0 y^0 - \vec{x} \vec{y},\end{aligned}$$

mit g der Metrik des Minkowski-Raums. Mit der Einstein'schen Summenkonvention ist dieser Vektor

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu.$$

Der Abstand von $x^\mu = (ct, \vec{x})$ ist

$$s = \sqrt{c^2 t^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

9.4.1 Matrixdarstellung der Lorentz-T

Die Matrixdarstellung der Lorentz-T ist

$$(x^\mu)' = \Lambda x^\mu.$$

Falls $S \rightarrow S'$ und β in x -Richtung, dann ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Λ wird auch als **Lorentz-boost** in x -Richtung bezeichnet.

9.5 Kausalität

Das Prinzip der Kausalität bedeutet, dass keine Information mit $v > c$ übertragen werden kann. Ein Punkt im Lichtkegel wird **zeitartig** genannt, da er mit $v < c$ erreicht werden kann. Ein Punkt auf dem Lichtkegel ist **lichtartig**, weil er nur mit $v = c$ erreicht werden kann. Ein Punkt unter dem Lichtkegel ist **raumartig** und kann nicht kausal erreicht werden, da dies nur mit $v > c$ gänge. Gäbe es unendlich schnelle Signale, könnten sich raumartige Ereignisse verständigen und durch Reflexion ihre Vergangenheit beeinflussen.

Man betrachte

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu.$$

Es gelten folgende Zusammenhänge

$s^2 > 0$: zeitartig und kausal verknüpft

$s^2 = 0$: lichtartig und auf dem Lichtkegel kausal verknüpft

$s^2 < 0$: raumartig und kausal nicht verknüpfbar .

hier vl 19

Betrachtet man eine Spule mit $N = nl$ Windungen, mit n der Windungen pro Meter und l der Länge der Spule, dann ist der magnetische Fluss, der durch die Spule induziert wird

$$\Psi_m = B \cdot A = \mu_0 \cdot n \cdot A \cdot I.$$

Der induzierte Strom ist dann

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -N \cdot \dot{\Psi}_m = -\mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A \cdot \dot{I} \\ &= -L \cdot \dot{I} \quad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \underbrace{V}_{=A \cdot l} \end{aligned}$$

Der Strom ist dann

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Es existiert also eine Zeitverzögerung bis sich der Strom als $\frac{U}{R}$ einstellt. Bei der Abschaltung gilt

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Die Induktivität hemmt also den Stromfluss.

9.6 Gegeninduktion

Seien zwei Leiterschleifen mit Strömen I_1 und I_2 beliebiger Geometrie mit den Flächen A_1 , und der Normale $d\vec{A}_1$ und A_2 , $d\vec{A}_2$. Seien zudem zwei Wegstücke $d\vec{s}_1$ und $d\vec{s}_2$ mit dem Verbindungsvektor \vec{r}_{12} . Das magnetische Vektorpotential durch den Stromfluss I_1 ist

$$\vec{A}(\vec{r}_{12}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{1}{r^2} d\vec{s}_1.$$

Der magnetische Fluss durch die zweite Spule ist dann

$$\begin{aligned} \Psi_m &= \int_{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{A}_2 \\ &= \int_{A_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{A}_2 \\ &= \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{1}{r_{12}} d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1 \\ &= L_{12} \cdot I_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt der Ausdruck der **gegenseitigen Induktivität**,

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{1}{r_{12}} d\vec{s}_2 d\vec{s}_1.$$

Ist $d\vec{s}_1 \perp d\vec{s}_2 \Rightarrow L_{12} = 0$; ist $d\vec{s}_1 \parallel d\vec{s}_2 \Rightarrow L_{12} = \max(L_{12})$.

Betrachtet man eine große Spule 1 mit einer kleinen Spule 2 im Inneren, dann gilt für das Magnetfeld der ersten Spule

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1 & \Psi_m &= B_1 \cdot A_1 \\ U_{\text{int}} &= -N_2 \dot{\Psi}_m \\ &= -N_2 A_2 \dot{B}_1 \\ &= -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2 \dot{I}_1 \\ &= L \cdot \dot{I}_1 \end{aligned}$$

Es wird allerdings angenommen, dass $A_1, l_1 \gg A_2, l_2$.

9.7 Energie des magnetischen Feldes

Betrachtet man wieder einen Stromkreis mit Spule, dann fließt beim Abschalten noch ein Strom über den Widerstand. Dadurch bleibt noch Energie im Magnetfeld der Spule gespeichert

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P dt \\ &= \int_0^\infty UI dt \\ &= \int_0^\infty IR^2 dt \\ &= \int_0^\infty I_0^2 e^{-2\frac{R}{L}t} R dt \\ &= I_0^2 \left[-\frac{L}{2R} e^{-2\frac{R}{L}t} \right]_0^\infty R \\ &= \frac{1}{2} I_0^2 L. \end{aligned}$$

Die Energiedichte ist dann

$$\begin{aligned} W &= \frac{W_{\text{mag}}}{V} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \end{aligned}$$

Die Energie und die Energiedichte von elektrischen Feldern ist

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2 \quad W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Fügt man die Ausdrücke des elektrischen und magnetischen Feldes zusammen, folgt

$$W_{\text{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

In Materie gilt dann

$$\begin{aligned} W_{\text{em}} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\varepsilon E^2 + \frac{c^2}{\mu} B^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E \cdot D + B \cdot H) \quad D = \varepsilon \varepsilon_0 E \quad H = \frac{1}{\mu \mu_0} B \end{aligned}$$

9.8 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Man betrachte zwei Ladungen q, Q mit der Geschwindigkeit v im Inertialsystem S . S' ist das Ruhesystem beider Ladungen. Die Kräfte, die in S bzw. S' wirken, sind

$$\begin{aligned} F_x &= qE_x & F_x &= F'_x = qE'_x \\ F_y &= q(E_y - v_x B_z) & F_y &= \gamma F'_y = qE'_y \\ F_z &= q(E_z + v_x B_y) & F_z &= \gamma F'_z = qE'_z. \end{aligned}$$

Die Felder sind jeweils

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - v_x B_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v_x}{c^2} E_z\right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + v_x B_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v_x}{c^2} E_y\right) \end{aligned}$$

Damit zwei Beobachter in S und S' zu den gleichen Naturgesetzen kommen, müssen die Feldgleichungen symmetrisch unter $(\vec{E}, \vec{B}) \mapsto (-\vec{B}, \frac{1}{c^2} \vec{E})$ sein.

Im ladungsfreien Raum gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Symmetrisch muss also gelten

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Damit ist die vierte Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Verschiebungsstrom

Betrachtet man einen Kondensator bei Wechselstrom, gilt

$$\dot{Q} := I_v = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt},$$

mit I_v dem Verschiebungsstrom

$$\begin{aligned} I_v &= \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \, d\vec{A} \\ &= \varepsilon_0 \Phi_{\text{el}}. \end{aligned}$$

Die vierte Maxwell–Gleichung in Integralform ist dann

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \, d\vec{r} &= \mu_0 I + \mu_0 I_v \\ &= \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \vec{E} \, d\vec{A}. \end{aligned}$$

9.9 Vollständige Maxwell–Gleichungen

Integralform

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

Differentialform

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \end{aligned}$$

In Materie

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}$$

9.10 Freie EM–Wellen

Es gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

sowie

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \Delta \vec{E}.$$

Daraus folgt die **Wellengleichung** für $\vec{E}(x, t)$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Analog gilt für das \vec{B} –Feld

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$