

# physik311 | Notizen

Jonas Wortmann

October 20, 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
1.1	Lichtquellen . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Die elektromagnetische Theorie des Lichts</b>	<b>3</b>
2.1	Einfachste Lösung der Wellengleichung: Ebene elektromag. Welle . . . . .	4
2.2	Energie und Impuls von Licht . . . . .	5
2.2.1	Strahlungsdruck . . . . .	5
2.3	Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen . . . . .	5
2.3.1	Stetigkeit . . . . .	6
2.3.2	Die Amplitude von reflektiertem und gebrochenen Strahl . . . . .	7
2.3.3	BREWSTER-Winkel . . . . .	8
2.3.4	Totalreflexion . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Die elektromagnetische Welle in Materie</b>	<b>10</b>
3.1	Absorption und Dispersion . . . . .	10

# 1 Einführung

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Die Wellenlänge ist im Bereich von 400 nm bis 800 nm, das entspricht einer Frequenz von 750 THz bis 375 THz. Ein Lichtpuls kann nie kürzer als ein Zyklus sein.

## 1.1 Lichtquellen

- Lampe: Inkoherentes („ungeordnetes“) Licht
- Laser: Koherentes („geordnetes“, auch Wellen in „gleichschritt“) Licht

## 2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Für diesen Fall betrachtet man nur die Lichtausbreitung in großer Entfernung von allen Quellen. Also ist  $\rho = 0$  und  $\vec{j} = 0$ . Die MAXWELL-Gleichungen sind dann

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

In Materialien gilt dann

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (2.6)$$

Hier ist  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante und  $\mu$  die relative Permeabilität (in der Optik ist sie üblicherweise 1).

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \underbrace{\operatorname{div} (\operatorname{div} \vec{E})}_{=0} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{E} \quad (2.7)$$

$$= \operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (2.8)$$

Mit  $\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  folgt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{E} = \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Dies ist die **Wellengleichung** für das elektrische Feld. Man erwartet eine Ausbreitungsgeschwindigkeit mit

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}} \equiv \frac{c}{n}, \quad (2.10)$$

wobei  $c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}^{-1}$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  der Brechungsindex ist. Dann lässt sich die Wellengleichung wie folgt schreiben

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{E} = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \stackrel{\text{Vakuum}}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

Eine analoge Rechnung kann auch für das  $\vec{B}$ -Feld verwendet werden.

## 2.1 Einfachste Lösung der Wellengleichung: Ebene elektromag. Welle

Hier wird die Lichtausbreitung nur entlang einer Koordinate (z.B.  $z$ ) betrachtet. Also ist  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z, t)$ , bzw.  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$ . Die Wellengleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.12)$$

Mit  $\text{div } \vec{E} = 0$  folgt für ebene Wellen  $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ , also ist  $E_z = \text{const.}$

Jetzt wählt man die Randbedingungen, dass  $E_z = 0$ . Also ist  $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ 0 \end{pmatrix}$ . Die Lösung der Wellengleichung ist dann

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad (2.13)$$

$$= \vec{E}_0 \cos(k(z - ct)), \quad (2.14)$$

wobei  $\frac{\omega}{k} = c$ , mit  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  der **Wellenzahl** ( $\lambda$  der Wellenlänge) und  $\vec{E}_0$  der Amplitude.

Die Transversalität (also die Ausbreitung nach oben und unten,  $\vec{E} \perp \vec{e}_z$ , allg.  $\vec{E}_z \perp \vec{k}$ ) folgt aus  $\text{div } \vec{E} = 0$  im ladungsfreien Raum. In Medien mit Raumladungen oder an Oberflächen ist auch eine longitudinale Polarisierung möglich. Bisher gab es nur lineare Polarisierungen; es ist aber auch eine Überlagerung von  $E_x$  und  $E_y$  möglich. Diese sind zirkulare und elliptische Polarisierung.

Die Allgemeine Wellengleichung ist

$$\text{div grad } \vec{E} = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.15)$$

mit  $v_{ph} = \frac{c}{n}$ . Man erlaubt nun die Ausbreitung in eine beliebige Richtung sowie eine allgemeine Phase  $\varphi$ . Die Lösung ist dann

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi). \quad (2.16)$$

Diese Gleichung erfüllt die Wellengleichung, wenn

$$\vec{k}^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}. \quad (2.17)$$

Man bezeichnet sie auch als **Dispersionsrelation**.

Aus den MAXWELL-Gleichungen ist bekannt, dass

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}). \quad (2.18)$$

Das zeigt, dass  $\vec{B} \perp \vec{E} \wedge \vec{k}$  und  $|\vec{B}| = \frac{n}{c} |\vec{E}|$ .

Die Ursache der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie ist überwiegend der elektrische

Anteil der Welle (im sichtbaren Bereich).

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind nur im Fernfeld in Phase.

## 2.2 Energie und Impuls von Licht

Zuerst wird die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum eingeführt

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \quad |\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}| \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (2.19)$$

Diese Gleichung wird zeitlich gemittelt, mit  $E(t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  und  $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle W_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2. \quad (2.20)$$

Die mittlere Energiedichte, die pro Zeit durch ein Flächenelement transportiert wird ist

$$I = c \langle W_{\text{el}} \rangle \quad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (2.21)$$

Die Richtung des Energietransports wird durch den POYNTING-Vektor angegeben

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E}| |\vec{B}| = \varepsilon_0 c E_0^2. \quad (2.22)$$

Man erkennt, dass

$$\langle |\vec{S}| \rangle = I \quad (2.23)$$

### 2.2.1 Strahlungsdruck

Strahlungsdruck ist der Druck, der durch emittierte, absorbierte und reflektierte elektromagnetische Strahlung auf eine Fläche ausgeübt wird. Der Impuls von Teilchen mit der Geschwindigkeit  $c$  ist

$$p = \frac{E}{c} = \frac{A \cdot t \cdot c \cdot \langle W_{\text{el}} \rangle}{c}. \quad (2.24)$$

Der Druck ist  $\rho = \frac{|\vec{F}|}{A}$  mit  $|\vec{F}| = \frac{dp}{dt}$ ,

$$\rho = \frac{I}{c}. \quad (2.25)$$

## 2.3 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Lichtstrahl  $\vec{k}_i$  trifft aus einem Medium  $n_1$  in ein Medium  $n_2 > n_1$  und wird mit  $\alpha$  zu  $\vec{k}_r$  reflektiert. Das Licht wird auch um den Winkel  $\beta$  (relativ zum Lot) gebrochen und verläuft

mit  $\vec{k}_t$  durch das Medium. Die  $\vec{E}$ -Felder sind dann

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \vec{r})} \quad (2.26)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})} \quad (2.27)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r})}. \quad (2.28)$$

Das FERMAT'sche Prinzip besagt, dass eine Welle immer den Weg der minimalsten optischen Laufzeit wählt. Es ist also möglich, dass sie in einem Medium mehr Zeit verbringt, bevor sie in das andere Medium wechselt.

### 2.3.1 Stetigkeit

Die Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  und  $\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B}$  sind an Grenzflächen stetig. Die Normalkomponente von  $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind an Grenzflächen stetig.

Zunächst werden die  $\vec{E}$ -Felder betrachtet, wenn  $\vec{r} = 0$  ist.

$$\vec{n} \times (\vec{E}_{0i} e^{i\omega_i t} + \vec{E}_{0r} e^{i\omega_r t}) \stackrel{!}{=} \vec{n} \times \vec{E}_{0t} e^{i\omega_t t}. \quad (2.29)$$

Diese Gleichung muss für beliebige Zeiten  $t$  gelten. Es existiert nur eine nichttriviale Lösung wenn  $\omega_r = \omega_i = \omega_t \equiv \omega$ .

### Einschub

An allgemeinen Grenzflächen bleibt die Frequenz gleich, also  $\omega_{\text{vac}} = \omega_{\text{medium}}$ ,

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t) = E_0 \cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right], \quad (2.30)$$

mit  $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = v_{\text{ph}}$ , also

$$k_{\text{vac}} = \frac{k_{\text{medium}}}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{medium}}} \frac{1}{n} \Leftrightarrow \lambda_{\text{Medium}} = \frac{1}{n} \lambda_{\text{vac}}. \quad (2.31)$$

Daraus folgt, dass  $\omega = k \frac{c}{n}$ .

Jetzt ist  $\vec{r}$  ein beliebiger Punkt auf der Grenzfläche, also

$$e^{i\omega t} \vec{n} \times (\vec{E}_{0,i} e^{-i\vec{k}_i \vec{r}} + \vec{E}_{r,0} e^{-i\vec{k}_r \vec{r}} - \vec{E}_{t,0} e^{-i\vec{k}_t \vec{r}}) \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.32)$$

Es muss für beliebiges  $\vec{r}$  auf der Grenzfläche gelten

$$\vec{k}_i \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r} \quad \forall \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Für das einfallende Lichtfeld setzt man

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_{i,x} \\ k_{i,r} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} k_{i,x} \\ k_{i,r} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{z,x} \\ k_{t,y} \\ k_{t,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Das heißt, auch die reflektierten und transmutierten Strahlen bleiben in der Zeichenebene. Das gilt auch für

$$k_{r,x} = k_{i,x} \quad k_r \sin \alpha' = k_i \sin \alpha \quad (2.36)$$

$$k_{t,x} = k_{i,x} \quad k_t \sin \beta = k_i \sin \alpha. \quad (2.37)$$

Da  $\omega$  immer gleich ist, ist  $\frac{k}{n}$  konstant. Mit  $k_i = k_r$  folgt  $\alpha' = \alpha$ . Aus den Gleichungen folgt auch, dass

$$k_t = \frac{n_2}{n_1} k_i \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \quad (2.38)$$

Diese Gleichung ist das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz. Für  $n_2 > n_1$  wird der Strahl zum Lot hin gebrochen.

### 2.3.2 Die Amplitude von reflektiertem und gebrochenen Strahl

Hier wird nur der Spezialfall des senkrecht Einfallenden Strahls betrachtet. Es gilt

$$\vec{E}_{0,i} + \vec{E}_{0,r} = \vec{E}_{0,t} \quad (2.39)$$

$$n_1 (\vec{E}_{0,i} - \vec{E}_{0,r}) = n_2 \vec{E}_{0,t} \quad (2.40)$$

$$\vec{B}_{0,i} + \vec{B}_{0,r} = \vec{B}_{0,t}. \quad (2.41)$$

Der Zusammenhang zwischen den Feldern ist

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \quad \vec{k}_r = -\vec{k}_i. \quad (2.42)$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$E_{0,r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_{0,i} \quad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (2.43)$$

mit  $r$  dem Reflexionskoeffizienten. Für  $n_2 > n_1$ , ist es eine Reflexion am optisch dichteren Medium, ist  $r < 0$ , daraus folgt ein Phasensprung von  $\pi$ . Das  $\vec{E}$ -Feld dreht sich also um. Die



reflektierte Intensität ist

$$R = \frac{I_r}{I_i} = |r|^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (2.44)$$

All das was nicht reflektiert, wird transmutiert

$$|r|^2 + |t|^2 = R + T = 1 \quad t = \frac{E_{0,t}}{E_{0,r}}. \quad (2.45)$$

### Allgemeiner Fall

Für das  $\vec{E}_i$ -Feld aus der Ebene der Brechung heraus und das  $\vec{B}$ -Feld orthogonal zu dem einfallenden Strahl in der Ebene gilt

$$r_\perp = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad t_\perp = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (2.46)$$

Für das  $\vec{E}_i$ -Feld orthogonal zu den einfallenden Strahlen in der Ebene gilt

$$r_\parallel = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad t_\parallel = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \quad (2.47)$$

### 2.3.3 Brewster-Winkel

Der BREWSTER-Winkel ist der Winkel, bei dem polarisiertes Licht vollständig transmittiert und gar nicht reflektiert wird. Dieses Phänomen tritt auf, wenn reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen ( $r_\parallel = 0$ ), also  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Der Winkel ist mit dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.48)$$

Der Reflexionskoeffizient für einen streifenden Einfall geht gegen 1.

### 2.3.4 Totalreflexion

Licht wird von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium geschickt. Für  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$  gibt es nur für den Fall  $\sin \beta \leq 1$  und  $\sin \alpha \leq \frac{n_2}{n_1}$  eine Lösung. Dies ist auch der Grenzwinkel für die totale Reflexion. Für  $\alpha_g < \alpha$  wird alles Licht reflektiert.

In Glasfaserkabeln wird sich die Totalreflexion zu nutze gemacht. Das Kabel ist ein Hohlzylinder, dessen Rand einen niedrigeren Brechungsindex  $n_1 < n_2$  hat, als der hohle Teil  $n_2$  des Zylinders. Dadurch kann Licht über große Strecken versendet werden.

Bei Totalreflexion gibt es eine **evaneszent** abfallende Welle

$$E \propto e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (2.49)$$

$k$  wird hier komplex.

Für heiße Luftschichten ist der Brechungsindex proportional zu

$$n \propto \frac{N}{V} = \frac{\rho}{k_B T}. \quad (2.50)$$

## 3 Die elektromagnetische Welle in Materie

### 3.1 Absorption und Dispersion

Als einfaches Modell wird angenommen, dass Materie aus vielen harmonischen Oszillatoren der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  besteht. Die Materie wird von einem elektrischen Feld durchsetzt

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.1)$$

Die Kraft, die auf das Elektron wirkt ist

$$F(t) = eE(t) = eE_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.2)$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t}. \quad (3.3)$$

Die Lösung dieser Gleichung funktioniert mit dem Ansatz  $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ . Die Amplitude ist

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}. \quad (3.4)$$

Ist die **Verstimmung**  $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega$ , dann gilt

$$\frac{1}{2\omega} \frac{1}{-\delta - i\frac{\Gamma}{2}} = \frac{1}{2\omega} \frac{-\delta + i\frac{\Gamma}{2}}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \quad (3.5)$$

Die Materie ist ein **Polarisator** mit  $P = Nex$  mit  $N$  der Zahl der Oszillatoren pro Volumen. Die Suszeptibilität ist definiert als  $\chi := \frac{P}{\varepsilon_0 E}$ . Sie ist also komplex

$$\chi = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m 2\omega} \frac{-\delta + i\frac{\Gamma}{2}}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (3.6)$$