

physik321 | Notizen

Jonas Wortmann

October 22, 2023

Contents

1	Überblick Elektrodynamik	2
2	Statische Felder	3
2.1	Elektrostatik	3
2.1.1	Coulomb'sche Gesetz	4
2.1.2	Das elektrische Feld	4
2.1.3	Beispiel: Homogen geladene Kugel	5
2.2	Mittlere Quelldichte – Satz von GAUSS	6
2.2.1	Beispiel: Bestimmung von E mit GAUSS'schem Satz	8
2.3	Integraldarstellung – Satz von STOKES	9
2.4	Punktladungen	10
2.4.1	Beispiel: Kugeloberfläche	10
2.5	Feldverhalten an Grenzflächen	10
2.5.1	GAUSS'sche Fläche	10
2.5.2	STOKES'sche Fläche	11
2.6	Elektrostatische Feldenergie	11
3	Delta-Distribution	12
4	Flächenintegrale	13
4.1	Beispiel: Kugeloberfläche	13

1 Überblick Elektrodynamik

Das Ziel ist die Untersuchung der Ursache und Wirkung von elektrischen (\vec{E}) und magnetischen (\vec{B}) Feldern auf elektrische Ladungen (q).

Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass auf elektrisch geladene Körper eine elektromagnetische Kraft

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (1.1)$$

mit \vec{v} der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, wirkt. Diese Kraft führt zu einer Bewegungsänderung

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \quad (1.2)$$

Der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und (bewegten) Ladungen sind die **Maxwell–Gleichungen**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \quad (1.4)$$

Zusammen mit Randbedingungen an **Grenzflächen** bestimmen sie alle Effekte der Elektrodynamik.

2 Statische Felder

Die MAXWELL-Gleichungen für statische Felder sind

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2)$$

Man kann sehen, dass die Gleichungen für statische Felder entkoppeln und sie sich in **Elektrostatik** und **Magnetostatik** aufteilen.

2.1 Elektrostatik

Die Grundgrößen der klassischen Mechanik sind die Masse, Länge und Zeit. Eine wichtige Grundgröße in der Elektrostatik ist die elektrische Ladung. Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass Körper in einen elektrischen Zustand versetzt werden können (z.B. können geladene Körper andere geladene Körper anziehen). Dieses Phänomen ist mechanisch nicht erklärbar. Dieser Zustand ist auch auf andere Körper übertragbar, woraus folgt, dass es sich um eine substanzartige Größe handeln muss.

Diese Größe ist die **elektrische Ladung** q . Bei der Übertragung fließt ein elektrischer Strom I . Die Ladung des Elektrons ist negativ, also $q < 0$. Zudem ist sie additiv, es existiert also die Gesamtladung $Q = \sum_i q_i$. In abgeschlossenen Systemen ist die Summe aus positiven und negativen Ladungen konstant. Die Ladungen sind **gequantelt**, es existiert also eine nicht teilbare Elementarladung e , also gilt immer, dass $q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$

Elektron : $n = -1$

Proton : $n = +1$

Neutron : $n = 0$

Atomkern : $n = Z$.

In der Elektrodynamik wird dieses Prinzip allerdings verallgemeinert. Man führt die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein, also $Q = \int_V \rho(\vec{r}) \, d^3r$. Für Punktladungen gilt dann $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Befinden sich zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand von einem Meter im Vakuum, dann wirkt eine Kraft von

$$F = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8,854} \text{ N}. \qquad (2.3)$$

Dann haben q_1 und q_2 eine Ladung von $|q_1| = |q_2| = 1 \text{ C}$. Die Elementarladung ist $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Stromdichte

Für bewegte Ladungen existiert die Stromdichte \vec{j} . Sie gibt die Ladung pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung an. Betrachte als Beispiel eine homogene Ladungsverteilung von N Teilchen mit Ladung q und Geschwindigkeit \vec{v} , dann ist die Ladungsdichte $\vec{j} = \frac{N}{V} q \vec{v}$. Die Stromstärke I ist dann $I = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, df$. Die Einheit ist 1 A, was einem Ladungstransport von 1 C in einer Sekunde entspricht.

Ladungserhaltung

Die Ladungserhaltung kann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung** beschrieben werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (2.4)$$

2.1.1 Coulomb'sche Gesetz

Zwei Ladungen q_1 und q_2 befinden sich im Abstand \vec{r}_1 und \vec{r}_2 zum Ursprung. Der Abstand zwischen diesen Ladungen ist \vec{r}_{12} . Dieser Abstand soll viel größer sein also die Ausdehnung von q_1 und q_2 . Die Kraft zwischen diesen Ladungen ist

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.5)$$

Sie ist also direkt proportional zu q_1 und q_2 , $|\vec{F}_{12}| \propto |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$, sie wirkt entlang von F_{12} . Diese Kraft gilt nur für **ruhende** Ladungen.

Experimentelle Tatsachen

Die Proportionalitätskonstante ist $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Das Superpositionsprinzip erlaubt es die Kraft auf mehrere Ladungen zu berechnen

$$\vec{F}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^n q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Das elektrische Feld

Das elektrische Feld, bzw. die Feldlinien, erlauben eine Abstraktion der Kraftwirkung. Für Punktladungen ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}. \quad (2.7)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.8)$$

Der Integrand kann umgeschrieben werden als

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.9)$$

also ist \vec{E} ein Gradientenfeld des skalaren Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}). \quad (2.10)$$

Die Poisson-Gleichung ist

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.11)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist das Grundproblem der Elektrostatik.

Die Äquipotentialflächen sind konstant, also $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$. Die Coulomb-Kraft ist konservativ $\operatorname{rot} q\vec{E} = 0$. Da die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ist das Potential $V(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$.

Das Linienintegral über \vec{E} ist wegababhängig

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' = U(\vec{r}, \vec{r}_0). \quad (2.12)$$

Für n Punktladungen gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\sum_{j=1}^n q_j \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (2.13)$$

2.1.3 Beispiel: Homogen geladene Kugel

Der Ursprung wird in das Zentrum der geladenen Kugel mit Radius R gelegt. Eine Probeladung befindet sich im Abstand \vec{r} zum Zentrum. Die Ladungsdichte der Kugel ist

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}'| = r' \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.14)$$

Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{K}(R)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R r'^2 dr' \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \int_0^R r' dr' [|r + r'| - |r - r'|] \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \int_0^R dr' \begin{cases} 2rr' & , r \leq r' \\ 2r'^2 & , r > r' \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Für \vec{r} außerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r > R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \int_0^R 2r'^2 dr' = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (2.17)$$

Für \vec{r} innerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r < R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \left[\int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R 2rr' dr' \right] = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \left[\frac{2r^3}{3} + r(R^2 - r^2) \right] \quad (2.18)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \frac{1}{2R^3}. \quad (2.19)$$

Das elektrische Feld außerhalb ($r > R$) bzw. innerhalb ($r < R$) ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R^3} \vec{\nabla} (3R^2 - r^2) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ &= \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \frac{\vec{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2 Mittlere Quelldichte – Satz von Gauss

Sei ein Volumen mit den Kanten $\Delta x, \Delta y$ und Δz . Der Mittelpunkt ist $\vec{r}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Die Flächennormalen sind $\Delta \vec{f}_1, \dots, \Delta \vec{f}_6$ (\vec{f}_1 zeigt entlang der Δx -Achse)

$$\Delta \vec{f}_1 = \Delta y \Delta x \vec{e}_x = -\Delta \vec{f}_2 \quad (2.22)$$

$$\Delta \vec{f}_3 = \Delta x \Delta z \vec{e}_y = -\Delta \vec{f}_4 \quad (2.23)$$

$$\Delta \vec{f}_5 = \Delta x \Delta y \vec{e}_z = -\Delta \vec{f}_6. \quad (2.24)$$

Das elektrische Feld, welches den Quader durchsetzt ist

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \iint dy \, dz \left[E_x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - E_x \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \quad (2.25)$$

$$+ \iint dx \, dz \left[E_y \left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - E_y \left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \quad (2.26)$$

$$+ \iint dx \, dy \left[E_z \left(x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right) - E_z \left(x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{2} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung (da $\Delta x, \Delta y$ und Δz klein sind),

$$= \int dy \, dz \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} (x_0, y, z) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3) \right) \quad (2.28)$$

$$+ \int dx \, dz \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} (x, y_0, z) \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y^3) \right) \quad (2.29)$$

$$+ \int dx \, dy \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} (x, y, z_0) \Delta z + \mathcal{O}(\Delta z^3) \right). \quad (2.30)$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{S(V)} \vec{E} \, d\vec{f} = \partial_x E_x(x_0, y_1, z_1) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.31)$$

$$+ \partial_y E_y(x_2, y_0, z_2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \quad (2.32)$$

$$+ \partial_z E_z(x_3, y_3, z_0) + \mathcal{O}(\Delta z^2). \quad (2.33)$$

Der Limes von $\Delta V \rightarrow 0$ gibt dann

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(V)} \vec{E} \, d\vec{f} = \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_0). \quad (2.34)$$

Beliebige Volumina können mit Quadern ausgeschöpft werden. Flächenintegrale über gemeinsame Grenzflächen heben sich auf. Am Ende bleibt nur die äußere Grenzfläche übrig. Damit ist der Satz von GAUSS

$$\oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) \, dV. \quad (2.35)$$

Wendet man diesen Satz auf die Elektrostatik an, folgt

$$\oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \, d^3r' \int_{S(V)} d\vec{f} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \, d^3r' \int_{S(V)} d\vec{f} \left(-\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (2.37)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \, d^3r' \int_V d^3r \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.38)$$

Es gilt $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Damit kann geschrieben werden

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}') d^3r' \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(V) \quad (2.40)$$

$$= \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) d^3r. \quad (2.41)$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich für beliebige Volumina V sagen

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \right) d^3r = 0. \quad (2.42)$$

Daraus folgen die MAXWELL'schen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{f} = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}. \quad (2.43)$$

Da $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (2.44)$$

2.2.1 Beispiel: Bestimmung von E mit Gauss'schem Satz

Sei eine homogen geladene Kugel mit Radius R und einem elektrischem Feld von

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \varphi, \theta) \vec{e}_r + E_\varphi(r, \varphi, \theta) \vec{e}_\varphi + E_\theta(r, \varphi, \theta) \vec{e}_\theta. \quad (2.45)$$

Die MAXWELL-Gleichung besagt,

$$\oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{f} = \frac{q(V)}{\varepsilon_0} \quad (2.46)$$

Die Kugel ist rotationssymmetrisch um die x -, y - und z -Achse, also unabhängig von θ und φ .

Das Feld ist also nur noch von Radius r abhängig.

Wird an der x - y -Ebene gespiegelt, wird θ zu $\pi - \theta$, also $E_z = E_r(r) \cos \theta - E_\theta(r) \sin \theta$. Zudem gilt $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ und $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$. Aus dieser Spiegelung folgt, dass $E_z \rightarrow -E_z$ und $E_\theta = 0$. Aus den Spiegelungen an der x - z - und y - z -Ebene kann man analog sagen, dass $E_\varphi = 0$.

Für das gesamte Feld folgt dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \vec{e}_r. \quad (2.47)$$

Jetzt kann der Satz von GAUSS angewendet werden

$$\int_{S(V_r)} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{f} = E_r 4\pi r^2 = \frac{q(V_r)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon_0} & , r > R \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3} & , r < R \end{cases}. \quad (2.48)$$

Das Feld ist also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r^2} & , r > R \\ \frac{r}{R^3} & , r < R \end{cases} \vec{e}_r. \quad (2.49)$$

2.3 Integraldarstellung – Satz von Stokes

Für die Integraldarstellung der MAXWELL'schen Gleichungen wird die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve C verwendet

$$Z = \oint_C \vec{a}(\vec{r}) \, d\vec{r}. \quad (2.50)$$

Sei ein geschlossener Weg in der xy -Ebene mit Mittelpunkt \vec{r}_0 . Die Fläche ist $\Delta F = \Delta x \Delta y$ und die Normale $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$Z = \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} \left[a_x \left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) - a_x \left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \right] dx \quad (2.51)$$

$$+ \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \left[a_y \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) - a_y \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) \right] dy \quad (2.52)$$

$$= \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} \left[-\partial_y a_x(x, y_0, z_0) \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y^3) \right] dx \quad (2.53)$$

$$= \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \left[-\partial_x a_y(x_0, y, z_0) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3) \right] dy. \quad (2.54)$$

Betrachtet man dann die Fläche

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{Z}{\Delta F} = (\partial_x a_y(\vec{r}_0) - \partial_y a_x(\vec{r}_0)) \quad (2.55)$$

$$= (\text{rot } \vec{a}(\vec{r}_0))_z. \quad (2.56)$$

Daraus folgt der **Satz von STOKES**

$$\oint_{\partial F} \vec{a}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_F \text{rot } (\vec{a}(\vec{r})) \, d\vec{f}. \quad (2.57)$$

Mit diesem Satz sind die MAXWELL'schen Gleichungen dann

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \qquad \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r} = 0. \quad (2.58)$$

2.4 Punktladungen

Die Ladungsdichte einer Punktladung kann mit Hilfe der Delta-Distribution dargestellt werden (kartesische oder Kugelkoordinaten)

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \rho(\vec{r}) = q \frac{1}{r_0^2 \sin(\theta_0)} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\theta - \theta_0). \quad (2.59)$$

Das Potential lässt sich schreiben als

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}') d^3r' \quad (2.60)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (2.61)$$

2.4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugeloberfläche mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \sigma$. Die Gesamtladung in Kugelkoordinaten im Abstand R vom Zentrum ist

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(r - R) \sigma r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = 2\pi 2\sigma R^2 = 4\pi R^2 \sigma. \quad (2.62)$$

Die Ladung einer Punktladung in Kugelkoordinaten ist

$$\int_{\mathbb{R}^3} q \frac{1}{r_0^2 \sin\theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\theta - \theta_0) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr = q \frac{1}{r_0^2 \sin\theta_0} r_0^2 \sin\theta_0 \quad (2.63)$$

$$= q. \quad (2.64)$$

2.5 Feldverhalten an Grenzflächen

2.5.1 Gauss'sche Fläche

Man betrachtet ein GAUSS'sches Kästchen mit der Höhe von Δx auf einer Grenzfläche mit Normale \vec{n} eines elektrischen Feldes. Die Normalen $d\vec{f}$ des Kästchens sind orthogonal zu der Grenzfläche. Es existiert ein Feld außerhalb der Fläche \vec{E}_a und innerhalb der Fläche \vec{E}_i . Auf der Grenzfläche befindet sich die Flächenladungsdichte σ . Hier wird der Satz von GAUSS verwendet

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) d^3r = \int_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F \vec{n} (\vec{E}_a - \vec{E}_i). \quad (2.65)$$

Wird Δx gegen 0, dann bleibt nur noch die Fläche $\Delta F \vec{n} (\vec{E}_a - \vec{E}_i)$ übrig.

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} \rho(\vec{r}) d^3r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta F. \quad (2.66)$$

Insgesamt ist also

$$E_a^n - E_i^n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.67)$$

Die Normalkomponente an der Grenzfläche ist unstetig, macht also einen Sprung, wenn $\sigma \neq 0$.

2.5.2 Stokes'sche Fläche

Man betrachtet jetzt eine STOKES'sche Fläche auf der selben Grenzfläche. Die Höhe der Fläche ist Δx . Die Breite der Fläche ist Δl_i und Δl_a . Die Normale $\Delta \vec{F} = \vec{t} \Delta F$ der Fläche liegt in der Grenzfläche. Es gilt $\Delta \vec{l}_a = \Delta l (\vec{t} \times \vec{n}) = -\Delta \vec{l}_i$. Der STOKES'sche Satz besagt

$$0 = \int_{\Delta F} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{f} = \int_{\partial \Delta F} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{r} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta l (\vec{t} \times \vec{n}) (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 0. \quad (2.68)$$

Daraus folgt, dass die Tangentialkomponenten des \vec{E} -Feldes stetig durch die Grenzflächen gehen. Eine Oberflächenladungsdichte spielt für das \vec{E} -Feld keine Rolle.

2.6 Elektrostatische Feldenergie

Die Krafteinwirkung auf eine Punktladung ist $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$. Verschiebt man diese Punktladung von A nach B muss eine Arbeit verrichtet werden

$$W_{AB} = - \int_B^A \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = q(\varphi(A) - \varphi(B)). \quad (2.69)$$

$W_{AB} > 0$, wenn Arbeit am System verrichtet wird. Die Energie einer Ladungsverteilung wird als die Arbeit bezeichnet, um die Ladungen aus dem Unendlichen zusammenzuziehen.

3 Delta-Distribution

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \forall \vec{r} \neq \vec{r}_0. \quad (3.1)$$

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \, d^3r = \begin{cases} 1 & , \vec{r}_0 \in V \\ 0 & , \vec{r}_0 \notin V \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \, d^3r = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & , \vec{r}_0 \in V \\ 0 & , \vec{r}_0 \notin V \end{cases} \quad (3.3)$$

4 Flächenintegrale

Sei die Fläche $\mathcal{F} := \{\vec{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$. Der Normalenvektor zur Fläche ist $d\vec{f} = d\vec{a} \times d\vec{b}$, mit

$$d\vec{a} = \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) \approx \partial_v \vec{r}(u, v) dv \quad (4.1)$$

$$d\vec{b} = \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) \approx \partial_u \vec{r}(u, v) du \quad (4.2)$$

$$d\vec{f} = \partial_v \vec{r}(u, v) \times \partial_u \vec{r}(u, v) du dv. \quad (4.3)$$

Die Vektoren $\partial_v \vec{r}$ und $\partial_u \vec{r}$ spannen die Tangentialebene in $\vec{r}(u, v)$ auf.

Der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ durch eine Fläche S , bzw. eine geschlossene Fläche $S(V)$ mit $d\vec{f}$ als Flächennormale ist gegeben durch

$$\varphi_S(\vec{a}) = \int_S \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \int_S \vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) df \quad (4.4)$$

$$\varphi_{S(V)}(\vec{a}) = \oint_{S(V)} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \oint_{S(V)} \vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) df. \quad (4.5)$$

4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugel mit dem Radius R , dann sind die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \theta \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R \vec{e}_\theta \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R \sin \theta \vec{e}_\varphi. \quad (4.7)$$

Das Flächenelement ist dann

$$d\vec{f} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin \theta \vec{e}_r \quad (4.8)$$