Klausurvorbereitung | math241

Jonas Wortmann

September 22, 2023

In Kursiv sind meine Notizen / Kommentare

Contents

1 Mengenlehre

1.1 Abgeschlossen

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $X \backslash M$ offen ist.
Sie ist auch abgeschlossen, wenn $M' \subseteq M$ (1.2).

1.2 Offen

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **offen**, falls alle $x \in M$ innere Punkte von M sind.
Sie heißt auch offen, falls $M = M^\circ$ (1.1).

1.3 Beschränkt

Ein Element $a \in S$ heißt **Infimum** (größte untere Schranke) von M, wenn $\forall x \in S : a \leq x$.
Ein Element $b \in S$ heißt **Supremum** (kleinste obere Schranke) von M, wenn $\forall x \in S : b \geq x$.
Eine Menge M heißt **beschränkt**, wenn die sowohl von einem Infimum, also auch einem Supremum **beschränkt** wird.

Sie ist auch beschränkt, wenn die Norm (4.1) eines Vektors nicht beliebig groß werden kann.

1.4 Kompakt

Eine Menge M heißt **kompakt**, wenn sie **abgeschlossen** und **beschränkt** ist.

1.5 Innerer Punkt

Ein Punkt $x \in M$ heißt **innerer Punkt** von M, wenn

$$\exists K_r(x) : K_r(x) \subseteq M \tag{1.1}$$

mit $K_r(x)$ einer offenen Kugel (9.1).

Die Menge der inneren Punkte wird als M° bezeichnet.
Die inneren Punkte des geschlossenen Intervalls $[a, b]$ sind genau die zum offenen Intervall (a, b) gehörenden Punkte.
Falls M abzählbar ist, ist $M^\circ = \{\}$.

1.6 Häufungspunkt

Ein Punkt $x \in M$ heißt **Häufungspunkt** [1] von M, wenn

$$M \cap K_r^\bullet(x) \neq \{\} \qquad \forall r > 0, \tag{1.2}$$

mit $K_r^\bullet(x)$ einer punktierten offenen Kugel (9.2).

Die Menge der Häufungspunkte wird als M' bezeichnet.

[1] *Falls um einen Punkt in M noch ein Kreis gezeichnet werden kann, welcher noch in M liegt.*

Die Häufungspunkte des offenen Intervalls (a, b) sind alle Punkte, die zu dem Intervall gehören, sowie a und b, da die Umgebung von a und b auch zum Intervall gehören.[2]

1.7 Isolierter Punkt

Ein Punkt $x \in M$ heißt **isolierter Punkt** [3] von M, wenn

$$x \in M \qquad \wedge \qquad x \notin M'. \tag{1.3}$$

1.8 Rand

Der **Rand** einer Menge M

1.9 Abschluss

Der **Abschluss** einer Menge M ist

$$\overline{M} := M \cup \partial M = M \cup M' \tag{1.4}$$

1.10 Überdeckung

Eine **Familie** $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von A heißt **Überdeckung** von $B \subset A$, wenn

$$B \subset \bigcup_{i \in I} A_i. \tag{1.5}$$

1.11 Konvexe Mengen

Eine Menge M heißt **konvex**, wenn für alle Elemente die Verbindungsstrecke auch in der Menge liegt. Dies bedeutet auch, dass die Menge an keiner Stelle **konkav** ist.

1.12 Wegzusammenhägend

Eine Menge heißt **wegzusammenhängend**, falls für jedes Paar $x, y \in M$ gilt

$$w : [a, b] \in M \to M \qquad x = w(a), y = w(b). \tag{1.6}$$

In diesem fall ist die **Spur** in der Menge, also $\operatorname{Spur}(w) \subseteq M$. [4]
Jede konvexe (1.11) Teilmenge eines normierten Raumes ist wegzusammenhängend.
Jedes Intervall ist wegzusammenhängend.

[2] *Obwohl $a, b \notin (a, b)$, sind sie trotzdem Häufungspunkte, da nur die Umgebung der Kugel (also die punktierte Kugel) geschnitten mit der Menge nicht die leere Menge ergeben darf.*
[3] *Ein isolierter Punkt ist eine einpunktige Menge.*
[4] *Die leere Menge ist nach dieser Definition auch wegzusammenhänged.*

1.13 Zusammenhängend

Ein metrischer Raum (X, d_X) heißt **zusammenhängend**, wenn X nicht als eine Vereinigung von zwei nichtleeren, offenen, disjunkten Mengen dargestellt werden kann.

1.14 Einfach zusammenhängend

Eine Menge M heißt **einfach zusammenhängend**, wenn ∂M zusammenhängend ist.

1.15 Konkatenation

1.16 Gebiet

In der Topologie wird eine offene, nichtleere und zusammenhängende Menge **Gebiet** genannt.

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergenzkriterien

2.1.1 Leibniz–kriterium

Sei a_n eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n. \tag{2.1}$$

2.1.2 Majorantenkriterium

Seien a_n und b_n zwei Folgen. Falls

$$0 \leq a_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}\,. \tag{2.3}$$

2.1.3 Wurzelkriterium

Sei a_n eine Folge, dann

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}\,. \tag{2.4}$$

2.1.4 Quotientenkriterium

Sei a_n eine Folge, dann

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}\,. \tag{2.5}$$

2.1.5 Integralkriterium

Sei $f(x)$ eine monoton fallende Funktion und

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,. \tag{2.6}$$

Daraus folgt

$$\int_0^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert}\,. \tag{2.7}$$

2.2 Cauchy–Folge

3 Funktionen

3.1 Injektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist **injektiv**, wenn

$$\forall a, b \in X : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b. \tag{3.1}$$

3.2 Surjektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ ist **surjektiv**, wenn

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y. \tag{3.2}$$

3.3 Stetigkeit

3.4 Stetige Erweiterung

3.5 Supremum und Infimum

3.6 Weg

Sei X ein topologischer Raum und $I = [a, b]$ ein Intervall. Ist $f : I \to X$ eine stetige Funktion, dann heißt f **Weg** in X.

Ein Weg ist geschlossen, falls $f(a) = f(b)$.

Die **Länge** eines Weges ist gegeben durch

$$L = \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t, \tag{3.3}$$

mit $f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}$.

3.7 Normalbereiche

3.8 Satz von Maximum und Minimum

Sei eine Funktion f auf der kompakten Menge M stetig, dann nimmt f auf M ein Maximum oder Minimum an, bzw.

$$\exists x_1, x_2 \in M : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2). \tag{3.4}$$

3.9 Zwischenwertsatz

3.10 Signum–Funktion

3.11 Taylor–Reihe

3.12 Indikator–Funktion / charakteristische Funktion

Die **Indikator–Funktion** oder **charakteristische Funktion** einer einer Teilmenge $M \subseteq X$, ist

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, x \in M \\ 0, & \text{falls}\, x \notin M \end{cases}. \tag{3.5}$$

4 Metrische Räume

4.1 Norm

Eine Funktion $||\cdot|| : X \to Y$ ist eine Norm, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

- Dreiecksungleichung: $||a|| + ||b|| \geq ||a + b||$.
- Homogenität: $||\lambda a|| = |\lambda| ||a||, \lambda \in X$.
- Positive Definitheit: $||a|| \geq 0, ||a|| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

5 Mehrdimensionale Anaylsis

5.1 Integralrechnung

5.1.1 Riemann–Integrierbar

5.1.2 Lebesgue–Integrierbar

Eine Funktion f heißt **Lebesgue–integrierbar**, falls gilt

$$\int\limits_{\{x|f(x)\geq 0\}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty \qquad \wedge \qquad \int\limits_{\{x|f(x)\leq 0\}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty, \tag{5.1}$$

mit λ dem Lebesgue–Maß [5] (6.6). Das **Lebesgue–Integral** ist dann die Differenz der beiden Integrale.

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\int |f(x)|\,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty \tag{5.2}$$

5.1.3 Satz von Fubini

Sei eine Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_c^d \int_a^b f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

5.1.4 Satz von Fubini–Tonelli

[6] Sei eine Funktion f reell messbar und $\iint |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$, dann gilt

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{5.4}$$

5.1.5 Wegintegrale

1. Art

Das Wegintegral einer stetigen Funktion über einen Weg ist definiert als

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\dot{\gamma}(t)||\,\mathrm{d}t, \tag{5.5}$$

mit $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ dem Weg, $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t}$ und $||\cdot||$ der Norm.

2. Art

[5] *Das λ beschreibt die Länge der Rechtecke unter der Funktion*
[6] *Dieser Satz funktioniert auch bei unendlichen Summen*

Das Wegintegral eines stetigen Vektorfeldes über einen Weg ist definiert als

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t. \tag{5.6}$$

5.1.6 Oberflächenintegral

1. Art

Das skalare Oberflächenintegral einer skalaren Funktion über eine Oberfläche ist definiert als

$$\iint_{\mathcal{F}} f \, \mathrm{d}\sigma := \iint_{\mathcal{F}} f(\varphi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \right\| \mathrm{d}(u,v), \tag{5.7}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f \, \mathrm{d}V := \iiint_{\mathcal{V}} f(\Phi(u,v,w)) \cdot |D\Phi(u,v,w)| \, \mathrm{d}(u,v,w), \tag{5.8}$$

mit $\varphi(u,v), \Phi(u,v,w)$ den Parametrisierungen (9.6) von x, y und z, $||\cdot||$ der Norm und D der Jacobi–Matrix.

Das Integral über die Oberfläche kann auch mit Hilfe der Jacobi–Matrix geschrieben werden, was auf das Kreuzprodukt zurückführt.

2. Art

Das vektorielle Oberflächenintegral einer vektorwertigen Funktion über eine Oberfläche ist definiert als

$$\iint_{\mathcal{F}} f \, \mathrm{d}\sigma := \iint_{\mathcal{F}} f(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \right) \mathrm{d}(u,v), \tag{5.9}$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} f \, \mathrm{d}V := \iiint_{\mathcal{V}} f(\Phi(u,v,w)) \cdot |D\Phi(u,v,w)| \, \mathrm{d}(u,v,w). \tag{5.10}$$

5.2 Differentialrechnung

5.2.1 Satz von Schwarz

Sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ k–mal total differenzierbar, dann können die partiellen Ableitungen vertauscht werden.

6 Maßtheorie

6.1 $\boldsymbol{\sigma}$–Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$, also eine Menge von Teilmengen, mit $\mathcal{P}$ der Potenzmenge von M, heißt **$\boldsymbol{\sigma}$–Algebra**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind;

- $\mathcal{A}$ enthält die Grundmenge, also $M \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich der Komplementbildung, also $M \in \mathcal{A} \wedge M^c \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen, sind also $A_1, A_2, \ldots, A_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ enthalten, so ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

6.2 Jordan–Maß

Das **Jordan–Maß** beschreibt den Inhalt, $|M|$, einer Menge, sodass

$$|M| := \int_Z \chi_M \, \mathrm{d}V_M, \tag{6.1}$$

mit Z einer n–Zelle (9.3) und χ_M der charakteristischen Funkton über M (3.5).

Der Inhalt des Jordan–Maß ist

$$\mu^n([a,b[) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \qquad [a,b[:= \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i[, \tag{6.2}$$

mit $[a,b[$ einem halboffenen n–dimensionalem Hyperrechteck [7] . Es wird $\mu(\{\}) := 0$ definiert.

Es sei

$$\mathcal{J}^n := \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} I_k : I_1, \ldots, I_m, \text{ paarweise disjunkt} \right\} \tag{6.3}$$

die Menge aller endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter [8] Hyperrechtecke.

Der **innere** und **äußere Inhalt** einer beschränkten Menge M ist dann

$$\underline{i^n}(M) := \sup\{\mu^n(A) : A \in \mathcal{J}^n, A \subset M\} \tag{6.4}$$

$$\overline{i^n}(M) := \inf\{\mu^n(B) : B \in \mathcal{J}^n, B \supset M\}. \tag{6.5}$$

[9]

[7] *Hyperrechteck heißt einfach ein Rechteck in höheren Dimensionen.*

[8] *Paarweise disjunkt bedeutet, dass alle Hyperrechtecke disjunkt sind.*

[9] *Bei dem Inneren Inhalt ist A echte Teilmenge von M, also ist A „in M“ bzw. „kleiner“ als M, weshalb das Supremum verwendet werden muss um das größte Hyperrechteck (das am nächsten zum Rand von M) zu finden. Bei dem äußeren Inhalt ist das genau andersherum; M ist echte Teilmenge von B, also ist M in B, weshalb das kleinste Hyperrecheck (auch am nächsten an M) gefunden werden muss.*

6.2.1 Quadrierbar / Jordan–messbar

Eine Menge M heißt **quadrierbar** oder **Jordan–messbar**, wenn die charakteristische Funktion χ_M (3.5) auf einer kompakten n–Zelle Z (9.3) Riemann–integrierbar ist, id est $\chi_M \in \mathcal{R}(Z, \mathbb{R})$.

Sie heißt auch Jordan–messbar, wenn sie beschränkt ist und $i^n(M) := \underline{i^n}(M) = \overline{i^n}(M)$ (6.4) gilt.

Wenn B nicht zusammenhängend ist, ist B auch nicht quadrierbar.

6.2.2 Lebesgue–messbar

Eine Funktion ist **Lebesgue–messbar**, wenn der innere und der äußere Inhalt (6.4) gleich sind. Das **Lebesgue–Maß** ist dann

$$\lambda_n(M) = \underline{i^n}(M) = \overline{i^n}(M). \tag{6.6}$$

[10]

6.3 Jordan–Nullmenge

Eine Jordan–messbare Menge M ist eine **Jordan–Nullmenge**, falls $\overline{i^n}(M) = 0$ (6.5).

[10] *Das λ beschreibt die Länge der Rechtecke unter der Funktion*

7 Hilberträume

Der **Hilbertraum** ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen mit einem Skalarprodukt, der vollständig bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist (in dem also jede Cauchy–Folge konvergiert). Ein Hilbertraum ist ein **Banachraum**, also ein vollständig normierter Vektorraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert ist.

8 Lagrange–Multiplikatoren

Verfahren für Maxima und Minima:

1. *Sei eine Funktion f auf einer Menge M mit $g_1, g_2, \ldots, g_i$ Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen müssen dabei alle gleich 0 sein.*
2. *Überprüfe ob f mit dem Satz von Maximum und Minimum ein Maximum oder Minimum animmt. (Überprüfe ob f stetig und M kompakt ist.)*
3. *Bilde den Gradienten von $g_1, g_2, \ldots, g_i$.*
4. *Überprüfe ob die Gradienten der Nebenbedingungen linear unabhängig sind. Falls sie linear abhängig sind, kann die Menge M nicht mehr parametrisiert* (9.6) *werden.*
5. *Stelle die Funktion $L = f - \sum_i \lambda_i g_i$ auf.*
6. *Bilde den Gradienten von L und setzte ihn gleich 0.*
7. *Stelle das Gleichungssystem aus* (6.) *auf.*
8. *Löse das Gleichungssystem nach $x_1, x_2, \ldots, x_i$ auf und setzte in g ein, um die Werte für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ herauszufinden. Dadurch ergeben sich die Punkte $p_i = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$, die potentielle Extremstellen darstellen.*
9. *Setzte p_i in die Funktion f ein. Die größten Funktionswerte sind Maxima, die kleinsten Funktionswerte sind Minima.*

Falls keine Nebenbedingungen gegeben sind, ist das Verfahren

1. $\nabla f = 0$ *lösen.*
2. *Die kritischen Punkte in die Hesse–Matrix* (9.5) *einseten*
   - *H pos. definit: Minima*
   - *H neg. definit: Maxima*
   - *H indefinit: Sattelpunkt*
   - *H semidefinit: keine Aussage*

Sollte die Nebenbedingung eine Ungleichung sein, lässt sie sich in eine echte Ungleichung und Gleichung aufteilen ($\leq \to <, =$). *Die echte Ungleichung wird mit dem Verfahren falls es keine Nebenbedingungen gibt berechnet und die kiritschen Punkte mit der Nebenbedingung überprüft. Die Gleichung lässt sich dann mit dem Verfahren nach Lagrange berechnen.*

9 Wichtige Begriffe

9.1 Offene Kugel

Eine **offene Kugel** in (X, d) mit Radius $r > 0$ und Zentrum $x \in X$ ist die Menge

$$K_r(x) := \{x \in X : d(x, z) < r\} \qquad z \in X. \tag{9.1}$$

Jede offene Kugel ist eine offene Menge.

9.2 Punktierte offene Kugel

Eine **punktierte offene Kugel** ist eine offene Kugel (9.1) ohne das Zentrum

$$K_r^\bullet(x) := K_r(x) \setminus \{x\}. \tag{9.2}$$

9.3 Zelle

Eine **kompakte n–Zelle** $Z \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Mengenprodukt $Z = I_1 \times \ldots \times I_n$ von kompakten Intervallen $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$.

$$Z = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n\}. \tag{9.3}$$

Analog ist eine **offene n–Zelle** eine Mengenprodukt von offenen Intervallen.

9.4 Jacobi–Matrix

$$D(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

9.5 Hesse–Matrix

$$H(f) = (D(\nabla f))^T, \tag{9.5}$$

mit D der Jacobi–Matrix (9.4).

9.6 Parametrisierung

Eine **Parametrisierung** beschreibt das Austauschen von einer Variable durch andere Variablen, die sie beschreiben. Zum Beispiel lässt sich mit der Bedingung $x + y + z = 1$

eine Parametrisierung von f durchführen

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

Zylinderkoordinaten sind auch eine Parametrisierung

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to f(r,\theta,z') = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z' \end{pmatrix}. \tag{9.7}$$