

Notizen - B.Sc. Physik | physik111

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Größen</b>	<b>5</b>
1.1	Impuls . . . . .	5
1.2	Drehimpuls . . . . .	5
1.3	Trägheitsmoment . . . . .	5
1.4	Kraft . . . . .	5
1.5	Drehmoment . . . . .	5
1.6	Energie . . . . .	6
1.7	Arbeit . . . . .	6
1.8	Leistung . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>6</b>
2.1	Was ist Physik? . . . . .	6
2.2	Maßsysteme . . . . .	6
2.3	Maßstandards . . . . .	7
2.4	Zeit . . . . .	8
2.5	Masse . . . . .	9
2.6	Normen der SI-Einheiten . . . . .	9
2.7	Dimensionsanalyse . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Massenpunkte</b>	<b>10</b>
3.1	Kinematik . . . . .	10
3.2	Wechsel des Koordinatensystems . . . . .	15
3.2.1	Galilei-Transformation . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Dynamik</b>	<b>15</b>
4.1	Kinematik . . . . .	15
4.2	Der Impuls . . . . .	16
4.3	Drehimpuls . . . . .	18
4.4	Impulserhaltung . . . . .	19
4.5	Klassifikation von Stößen . . . . .	20
4.6	Ortsabhängige Kräfte und Kraftfelder . . . . .	20
4.7	Konservative Kraftfelder . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Energie</b>	<b>21</b>
5.1	Potenzielle Energie . . . . .	21
5.2	Kinetische Energie . . . . .	21
5.3	Energieerhaltung der Mechanik . . . . .	22
5.4	Potential . . . . .	22
5.5	Arbeit . . . . .	23
5.6	Leistung . . . . .	24

<b>6</b>	<b>Labor- und Schwerpunktsystem</b>	<b>24</b>
6.1	Stöße im Schwerpunktsystem (CMS)	25
6.2	Eindimensionales Stoßgesetz	25
6.3	Zwei- und dreidimensionale Stöße	26
6.4	Zusammenfassung der Erhaltungssätze	26
<b>7</b>	<b>Trägheitskräfte und beschleunigte Bezugssysteme</b>	<b>27</b>
7.1	Gleichförmig rotierendes Bezugssystem	27
7.2	Äquivalenz von träger und schwerer Masse	29
7.3	Trägheitsmoment	29
7.3.1	Translationsbeschleunigung	31
7.4	Rotation um eine freie Achse (Trägheitstensor)	31
7.4.1	Hauptträgheitsachsensystem (HTA)	32
7.5	Eulersche Gleichungen	33
<b>8</b>	<b>Gravitationsfeld ausgedehnter Massenverteilungen</b>	<b>34</b>
8.1	Kugel	34
8.2	Mechanik starrer Körper	35
<b>9</b>	<b>Mechanische Schwingungen</b>	<b>35</b>
9.1	Harmonische Schwingungen	35
9.1.1	Physikalisches und mathematisches Pendel	36
9.2	Komplexe Zahlen	37
9.3	Überlagerungen von Schwingungen	38
9.3.1	$\omega_1 = \omega_2 = \omega$	38
9.3.2	$\omega_1 \neq \omega_2$	39
9.3.3	$\omega_1 \approx \omega_2$ (Schwebung)	39
9.4	Energie und Leistung von Schwingungen	39
<b>10</b>	<b>Deformierbare Körper</b>	<b>40</b>
10.1	Aggregatzustände	40
10.2	Verformung fester Körper	41
10.3	Hookesches Gesetz	41
10.4	Mechanische Spannung	41
10.5	Volumenänderung	42
10.6	Biegung eines Balken	42
<b>11</b>	<b>Reibung</b>	<b>43</b>
<b>12</b>	<b>Ruhende Flüssigkeiten und Gase</b>	<b>43</b>
12.1	Kompression und Druck	44
12.2	Flüssigkeiten und Gase im Schwerfeld	44
12.3	Auftrieb	45
12.4	Oberflächeneffekte bei Flüssigkeiten	45

**13 Notizen****47**

# 1 Physikalische Größen

## 1.1 Impuls

Der Impuls

$$\vec{p} \left[ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{N} \cdot \text{s}^{-1} \right] = m \cdot \vec{v}$$

ist die Größe, die den mechanischen Bewegungszustand einer Masse charakterisiert. Sie vergrößert sich mit der Masse bzw. der Geschwindigkeit. Der Impuls ist eine vektorielle Größe, ausschließlich für die Translation.

## 1.2 Drehimpuls

Der Drehimpuls

$$\vec{L} \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \right] = \vec{r} \times \vec{p} = I \cdot \vec{\omega}$$

ist die Größe, die den mechanischen Bewegungszustand einer Masse charakterisiert. Sie ist eine pseudovektorielle Größe, ausschließlich für die Rotation.

## 1.3 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment

$$I \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \right] = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV \quad I_{ij} = \rho \int_V [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \delta_{ij} - (r_i \cdot r_j)] dV.$$

ist die Größe, die die Trägheit eines Körpers gegenüber seiner Winkelgeschwindigkeit angibt. Sie ist eine skalare Größe oder ein Tensor.

## 1.4 Kraft

Die Kraft

$$\vec{F} \left[ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \right] = m \cdot \vec{a}$$

ist die Größe, die die Einwirkung auf eine Masse beschreibt, die sie beschleunigt, das heißt, ihre Geschwindigkeit oder Richtung ändert, bzw. verformt; dabei wird Arbeit verrichtet, also ändert sich die Energie der Masse oder des Systems verändert. Sie ist eine vektorielle Größe.

## 1.5 Drehmoment

Das Drehmoment

$$\vec{M} \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m} \right] = \vec{r} \times \vec{F} = I \cdot \vec{\omega}$$

ist die Größe, die die Einwirkung einer Kraft beschreibt, welche in einer Rotationsbewegung resultiert, wenn sie in einem Winkel an eine Masse angreift. Sie ist eine vektorielle Größe.

## 1.6 Energie

Die Energie

$$E \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{W} \cdot \text{s} = \text{J} \right] = \sum_i E_i \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad E_{\text{pot}} = mgh$$

ist die Größe, die die abgegebene Strahlung oder verrichtete Arbeit beschreibt. In einem abgeschlossenem System bleibt sie immer erhalten.

## 1.7 Arbeit

Die Arbeit

$$\vec{W} \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{W} \cdot \text{s} = \text{J} \right] = \vec{F} \cdot s$$

ist die Größe, die die Energiedifferenz bei einer Kraft über eine bestimmte Strecke beschreibt. Sie ist eine vektorielle Größe.

## 1.8 Leistung

Die Leistung

$$P \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = \text{W} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \right] = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

ist die Größe, die die verrichtete Arbeit, bzw. aufgewendete Energie über einen Zeitraum beschreibt.

# 2 Einführung

## 2.1 Was ist Physik?

Modell  $\xrightarrow{\text{Vorhersage}}$  Beobachtung  $\rightarrow$  Experiment  $\xrightarrow{\text{Messung}}$  Theorie (falsifizierbar)

empirisch : Natur beobachten, erkennen

quantitativ : Messungen

reduktionistisch : möglichst wenige Gesetze

abstrahierend : vereinfachte Annahmen + Korrekturen

## 2.2 Maßsysteme

SI-System

· Länge: 1 m (Meter)

· Zeit: 1 s (Sekunde)

- Masse: 1 kg (Kilogramm)
- Stoffmenge: 1 mol (Mol)
- Temperatur: 1 K (Kelvin)
- el. Lichtstärke: 1 A (Ampere)
- Lichtstärke: 1 Cd (Candela)

—

- Elektronenvolt: Die Energie, die ein Elektron  $e^-$  erhält, wenn es 1 V durchläuft. (1 eV)
- astronomische Einheit: 1 Ae  $\approx 1.5 \cdot 10^{11}$  m, der Abstand von der Erde zur Sonne.
- Lichtjahr: 1 Lj  $\approx \pi \cdot 10^7$  s  $\cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 9,45 \cdot 10^{15}$  m, die Strecke die das Licht in einem Jahr zurücklegt.
- Parsec:  $1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AE}}{\tan\left(\frac{2\pi}{360 \cdot 3600}\right)} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ AE} \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ m} \approx 3,26 \text{ Lj}$  Die Scheinbare Bewegung eines nahen Sterns um eine Bogensekunde.
- Ångström:  $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} \approx \text{Atomradius}$
- Fermi- / Femtometer:  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \approx \text{Protonenradius}$

## 2.3 Maßstandards

Messungen werden mit Eichnormalen verglichen. Standards:

- genügend genau
- Reproduzierbar
- 'wenig' technischer Aufwand

andere Methoden:

· Messungen mit der Laufzeit des Lichts (LIDAR = light detection and ranging). Zum Messen der Distanz zwischen Erde und Mond: Licht wird von der Erde auf einen Spiegel auf dem Mond geschossen, reflektiert, und die Zeit gemessen bis das Licht wieder an der Erde ankommt.

- Triangulation: allgemeines Dreieck,  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \rightarrow \text{messe } c, \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow a, b$
- Extragalaktische Messungen indirekt über Rotverschiebung
- Messung mit Beugung von Wellen: optische Mikroskope  $\lambda 500 \text{ nm}$ , Elektronenmikroskope  $\lambda 0,1 \text{ nm}$ . Streuexperimente  $\lambda 10^{-18} \text{ m}$

## 2.4 Zeit

Messungen von Zeitintervallen  $\Delta t$ , z.B.

- Zählen periodischer Prozesse mit Frequenz  $\nu = [\nu] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$

Schwingungsdauer Pendel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g.$$

Sonnenzeit:

$$d_{\text{Stern}} = \frac{2\pi}{\omega_E} \quad \omega_E : \text{Winkelgeschw. der Erde.}$$

Wird noch zum Abgleichen mit der Atomzeit genutzt. Die Präzision  $\frac{\Delta\nu}{\nu}$  einer solchen Uhr liegt zwischen  $10^{-14}$  und  $10^{-17}$

Zum Messen von kurzen Zeiten, z.B. eines Teilchens mit der Geschw.  $v \approx c$ :

Ein Teilchen durchfliegt 2 Detektoren (Szintillatoren) in denen jeweils bei Durchlauf ein Signal abgegeben wird und mit einer „Clock“ verglichen wird. Weiß man die Frequenz der Clock, so kann man die Zeit zwischen den Beiden Signalen messen. Diese Apparatur hat eine Auflösung von  $10^{-10}$ .

Zum messen von langen Zeiten wird der radioaktive Zerfall genutzt:

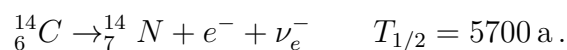
$$\begin{aligned} t = 0 &: N_0 \text{ Kerne} \\ t = T_{1/2} &: N_0 \cdot \frac{1}{2} \\ t = 2T_{1/2} &: N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ t = 3T_{1/2} &: N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0 \cdot \frac{1}{2}^{\frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad [\lambda] = \text{s}^{-1}.$$

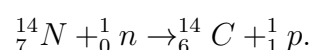
alternativ als DGL:

$$dN = N(t+dt) - N(t) \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t).$$

Nutzen zur Zeitmessung:  ${}^{14}_6\text{C}$



Produktion in der Atmosphäre:





Wenn eine Pflanze stirbt, findet kein  $CO_2$  Austausch mehr statt.  $^{14}C$  zerfällt  $\rightarrow$  Aktivität nimmt mit  $e^{-\lambda t}$  ab. Messungen der  $^{14}C$ -Aktivität im Vergleich mit lebenden Pflanzen führt zur Bestimmung des Alters von organischen Materialien.

Zeiten in der Natur:

$$\text{Alter des Universums} : 5 \cdot 10^{17} \text{ s}$$

$$\text{Erde um die Sonne} : \pi \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\text{Lichtweg 1 m} : 3 \text{ ns}$$

## 2.5 Masse

Die Definition erfolgt über die atomare Masse und Avogadrozahl. Man stellt eine hochreine Si-Kugel her und berechnet den Gitterabstand sowie den Radius. Damit kann man die Anzahl der Atome auf  $10^{-13}$  bis  $10^{-14}$  genau bestimmen. Die Abweichung der Kugel liegt bei  $50 \text{ nm}$ .

Atomare Masseinheit:

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m_{^{12}C} = 1,6605656 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Das mol eines Systems ist die Stoffmenge, das aus eben so vielen Teilchen wie  $12 \text{ g } ^{12}C$  besteht. Avogadrozahl  $N_A$ :

$$1 \text{ mol} = 6,02214179(30) \cdot 10^{23} \text{ Teilchen}.$$

Massen der Natur:

$$\text{Elektron} : 10^{-30} (\approx 511 \text{ kev})$$

## 2.6 Normen der SI-Einheiten

- Sekunde: Sie wird definiert durch die Konstante der Cäsiumfrequenz  $\Delta\nu$ , der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergang des Grundzustandes des Cäsium-Isotops  $^{133}\text{Cs}$ . Der Zahlenwert ist auf 9192631770 festgelegt, wenn sie in der Einheit Hz bzw  $\text{s}^{-1}$  angegeben wird.
- Meter: Er wird definiert durch die Konstante der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$ . Der Zahlenwert ist auf 299792458 festgelegt, wenn sie in der Einheit  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  angegeben wird und die Sekunde durch  $\Delta\nu$  definiert ist.
- Kilogramm: Es wird definiert durch die Konstante des Planck'schen Wirkungsquantum  $h$ . Der Zahlenwert ist auf  $6,62607015 \cdot 10^{-34}$  festgelegt, wenn sie in der Einheit  $\text{J} \cdot \text{s}$  bzw.  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  angegeben wird und die Sekunde und der Meter durch  $\Delta\nu$  und  $c$  definiert sind.
- Ampere: Es wird definiert durch die Konstante der Elementarladung  $e$ . Der Zahlenwert ist auf  $1,602176634 \cdot 10^{-19}$  festgelegt, wenn sie in der Einheit C bzw.  $\text{A} \cdot \text{s}$  angegeben

wird und die Sekunde durch  $\Delta v$  definiert ist.

- Kelvin: Es wird definiert durch die Boltzmann-Konstante  $k$ . Der Zahlenwert ist auf  $1,380649 \cdot 10^{-23}$  festgelegt, wenn sie in der Einheit  $\text{A} \cdot \text{K}^{-1}$  bzw.  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  angegeben wird und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch  $h, c$  und  $\Delta v$  definiert sind.
- Mol: Ein Mol enthält genau  $6,02214076 \cdot 10^{23}$  Einzelteilchen. Diese Zahl ist der festgelegte numerische Wert der Avogadrokonstante  $N_A$ , ausgedrückt in der Einheit  $\text{mol}^{-1}$ , und wird als Avogadrozahl bezeichnet. Die Stoffmenge, Symbol  $n$ , eines Systems ist ein Maß für eine Anzahl spezifischer Einzelteilchen. Dies kann ein Atom, Molekül, Ion, Elektron sowie ein anderes Teilchen oder eine Gruppe solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.
- Candela: Sie wird definiert durch die Konstante  $K_{\text{cd}}$ , das photometrische Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung von  $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ . Der Zahlenwert ist auf 683 festgelegt, wenn sie in der Einheit  $\text{Im} \cdot \text{W}^{-1}$  bzw.  $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3$  angegeben wird und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch  $h, c$  und  $\Delta v$  definiert sind.

## 2.7 Dimensionsanalyse

Mit der Dimensionsanalyse lässt sich die Zusammensetzung der Einheiten einer Gleichung bestimmen. Es wird angenommen, dass eine Größe nur von den anderen Größen des Systems beschrieben werden kann. Zum Beispiel gilt für ein Pendel:

$$T = m^a \cdot l^a \cdot g^c.$$

$T$  hängt also von einer Potenz der Masse, der Länge und der Gravitationskraft ab.

$$\begin{aligned} \text{s} &= \text{kg}^a \text{m}^a \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^c \\ \Leftrightarrow a &= 0, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 3 Massenpunkte

### 3.1 Kinematik

In der Kinematik wird die Beschreibung der Bewegung und nicht deren Ursache behandelt. Der Massenpunkt ist eine Idealisierung mit Vernachlässigung der Ausdehnung und oft eine Reduktion auf die Bewegung des Schwerpunkts (also keine Rotation, Verformung, ...).

#### Masse

Bei der Masse wird zwischen den beiden Definitionen der schweren Masse (die Gravitationskraft die auf einen Körper wirkt) und der trägen Masse (die Kraft die auf einen Körper wirkt, wenn

er beschleunigt wird). Die Unterscheidung zwischen beiden Massen findet nur auf sprachlicher Ebene statt, also gilt immer  $m_{\text{schwer}} = m_{\text{träge}}$ .

## Ortsvektor und Bahnkurve

$\vec{r}$  beschreibt den Ort eines Massenpunktes zur Zeit  $t$ :  $\vec{r}(t)$  in einem Koordinatensystem mit

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

## Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{pmatrix}$$

## Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{r} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

## beliebige Bewegung im Raum

Eine beliebige Bewegung im Raum lässt sich als Funktion  $\vec{r}(t)$  beschreiben. Darauf folgt für die Geschwindigkeit

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{t_2 - t_1} = \vec{v}_{\text{mittel}}.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t).$$

$\vec{v}$  ist ein Vektor tangential zur Bahnkurve  $\vec{r}$  und hat im allgemeinen nicht dieselbe Richtung wie  $\vec{r}$ . Die Geschwindigkeit  $v = |\vec{v}|$  und wird in  $\frac{v}{\frac{m}{s}}$  angegeben.

Berechnung der Bahnkurve wenn  $\vec{v}(t)$  bekannt ist

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{d\vec{r}}{dt'} dt' = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0.$$

Das bedeutet für  $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'.$$

Für verschiedene Bewegungen gilt

$$\text{gleichförmig : } \vec{v}(t) = \overrightarrow{\text{const}} \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + t \cdot \vec{v}$$

$$\text{geradlinig : Richtung von } \vec{v} \text{ konstant } \vec{v}(t) = \vec{e}_v v(t)$$

Die Beschleunigung wird durch die Änderung der Geschwindigkeit angegeben.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t).$$

$\vec{a}$  ist ein Vektor tangential zur Bahnkrüve  $\vec{v}$  und hat im allgemeinen nicht dieselbe Richtung wie  $\vec{v}$ . Die Geschwindigkeit  $a = |\vec{a}|$  und wird in  $\frac{a}{\frac{m}{s^2}}$  angegeben.

Falls  $\vec{a}(t) = \text{const}$  ist, gilt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2.$$

Für  $t_0 = 0$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2.$$

Die Geschwindigkeit kann dann durch

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'.$$

angegeben werden.

Das heißt für die verallgemeinerte Gleichung einer Bahnkurve gilt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \left( \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right) dt'.$$

## Schiefer Wurf

Der schiefe Wurf ist ein System mit einer ...

... gleichförmigen Bewegung in  $x$

... gleichmäßigen Beschleunigung in  $z$

Darauf folgt

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t \\y(t) &= 0 \\z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h\end{aligned}$$

Also folgt für die Wurfparabel  $z(x)$

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + h.$$

### Kreisbewegung

Eine gleichförmige Kreisbewegung wird mit  $\frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$  Für die Winkelgeschwindigkeit gilt dann  $\omega := \frac{d\varphi}{dt}$  mit  $\frac{\omega}{\frac{1}{s}}$ . Die Umlauffrequenz  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  mit  $\frac{\nu}{\frac{1}{s}} = \frac{\nu}{\text{Hz}}$ , bzw für die Umlaufzeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\varphi(t) = \int_{t'=0}^t \omega dt = \omega \cdot t (+\varphi_0).$$

Für eine Kreisbahn in der x-y-Ebene gelten folgende Zusammenhänge.

Der Ort auf der Kreisbahn kann mit  $\vec{R}(t)$  angegeben werden

$$\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = R \vec{e}_R.$$

Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \sin \omega t \\ \omega R \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega R \vec{e}_T.$$

Analog für die Beschleunigung (welche in das Zentrum zeigt:  $\vec{e}_a = -\vec{e}_R$ )

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos \omega t \\ -\omega^2 R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 R \vec{e}_a = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_a.$$

Diese Gleichungen gelten für  $\vec{v} \perp \vec{R}$ .

Für eine allgemeine Kreisbewegung im Raum wird  $\vec{\omega}$  so gewählt, dass  $\vec{\omega} \perp \vec{v} \perp \vec{R}$  ist. Dann gilt  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ .

## Allgemeine krummlinige Bewegung

Für eine allgemeine krummlinige Bewegung gilt für  $\vec{v}$ , dass dieser immer tangential zur Bahnkurve ist.

$$\vec{v} = v \vec{e}_T$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \underbrace{\dot{v} \vec{e}_T}_{\vec{a}_T} + \underbrace{v \dot{\vec{e}}_T}_{\vec{a}_N}$$

Mit

$\vec{a}_N = 0$  : geradelinige Bewegung

$\vec{a}_T = 0$  : krummlinige Bewegung mit  $|\vec{v}| = \text{const.}$  Für  $|\vec{a}_N| = \text{const.} \Rightarrow$  Kreisbahn

Für die allgemeine Bewegung in der x-y-Ebene gilt

$$\vec{e}_T = \underbrace{|\vec{e}_T|}_{=1} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \vec{e}_N = \underbrace{|\vec{e}_N|}_{=1} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Für die Ableitung gilt

$$\dot{\vec{e}}_T = \frac{d}{dt} \vec{e}_T = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \vec{e}_N.$$

Bei einer Kreisbahn gilt, dass  $\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}$  Mithilfe einer lokalen Approximation durch einer Kreisbahn kann die krummlinige Bahn beschrieben werden.

$$ds = \rho d\varphi \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} v$$

Für die Beschleunigung gilt dann

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_T + v \dot{\vec{e}}_T = \dot{v} \vec{e}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_N.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}.$$

In einem Kreis gilt dann der Zusammenhang

$$\dot{v} = 0 \rightarrow |\vec{a}| = |\vec{a}_N| = \frac{v^2}{r}.$$

## 3.2 Wechsel des Koordinatensystems

Translation:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\theta}$$

$$\vec{v}' = \vec{v}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Wobei  $\vec{\theta}$  die Verschiebung des Koordinatensystems ist. Es gilt die Annahme  $t' = t$ .

### 3.2.1 Galilei-Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$$

$$t' = t$$

Die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  ist konstant.  $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{u}t$  und  $\vec{\theta}_0 = \vec{0}$ .

$$\text{Länge : } \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Galilei-invariant

$$\text{Geschwindigkeit : } \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

nicht Galilei-invariant

$$\text{Geschw.-Differenzen : } \Delta \vec{v}' = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'$$

Galilei-invariant

Die Grundgesetze der nicht-relativistischen Physik sind Galilei-invariant.

## 4 Dynamik

### 4.1 Kinematik

Die Kraft als Ursache der Bewegungsänderung:

1. Trägheitsgesetz
2. Aktionsgesetz  $F = ma$
3. Reaktionsgesetz actio=reactio

#### Trägheitsgesetz

Wenn keine äußere Kraft auf einen Körper wirkt, so bleibt er im Zustand der ...

... Ruhe, wenn er vorher in Ruhe war.

... gleichförmigen Bewegung, wenn er vorher in Bewegung war.

Wobei die Ruhe nur ein Spezialfall der gleichförmigen Bewegung mit  $v = 0$  ist.

Das Trägheitsgesetz ist Galilei-invariant und die Bewegung braucht keinen stetigen Antrieb (falls er keine Reibung erfährt, also eine Kraft die entgegen der Bewegungsrichtung zeigt).

Des Weiteren wird ein einheitliches Bezugssystem benötigt, da Bewegung relativ zum Beobachter ist. Dazu wird oft ein Inertialsystem benutzt, welches relativ zu einem Fixstern ruht.

### Aktionsgesetz

Die Beschleunigung die ein Körper erfährt ist ...

... proportional zur Kraft, die auf ihn wirkt.

... umgekehrt proportional zu seiner Masse.

Also:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}.$$

Dieser Zusammenhang gilt unter folgenden Annahmen:

$$\vec{F} = m \vec{a} \text{ gilt für } m = \text{const}$$

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

nicht wenn  $v \approx c$

Die Einheit der Kraft ist

$$1\text{Newton} = \frac{N}{\frac{kg \cdot m}{s^2}}.$$

Da die Kraft eine vektorielle Größe ist gilt für mehrere angreifende Kräfte:

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Mit der resultierenden Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i.$$

### Reaktionsgesetz

Übt ein Körper auf einen zweiten eine Kraft  $\vec{F}_{12}$  aus, so übt dieser ebenfalls eine Kraft  $\vec{F}_{21}$  auf den ersten auf.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

## 4.2 Der Impuls

Der Impuls wird definiert als

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Mit

$$\frac{p}{kg \frac{m}{s}} = \frac{p}{Ns}.$$



Die Verallgemeinerungen der Newton-Gesetze:

1. NG  $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$
2. NG  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dot{\vec{p}}$
3. NG  $\dot{\vec{p}}_{12} = -\dot{\vec{p}}_{21} \Leftrightarrow \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}$ : Impulserhaltung

Für die Impulsänderung ("Kraftstoß") gilt

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

Für  $\Delta\vec{p}$  macht es keinen unterschied, ob viel Kraft in kurzer Zeit, oder wenig Kraft in langer Zeit wirkt.

### Systeme mit veränderlicher Masse

Beispiele:

Rakete (Treibstoff wird verbraucht):  $\dot{m} < 0$

Flugzeug, das betankt wird  $\dot{m} > 0$

relativistisch beschleunigte Teilchen

Konkret für die Rakete:

Massenänderung :  $dm < 0$

Geschw. Rakete relativ zur Erde :  $\vec{v}$

Geschw. Rakete relativ zum Gas :  $\vec{v}_{\text{gas}} = \text{const}$

Schubkraft :  $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dot{m} \cdot \vec{v}_{\text{gas}}$

$\vec{v}$  und  $\vec{v}_{\text{gas}}$  ist relativ zu unterschiedlichen Bezugssystemen definiert.

relativ zur Erde :  $\vec{v} + \vec{v}_{\text{gas}} = (v - v_{\text{gas}}) \vec{e}_x$

Der Impuls als eine Funktion der Zeit im Ruhesystem der Erde

$$t : \vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = mv\vec{e}_x$$

$$dt : \vec{p}(dt) = dm dv$$

$$t + dt : \vec{p}(t + dt) = \underbrace{(m + dm)(v(t) + dv)}_{\text{Rakete}} \vec{e}_x - \underbrace{dm(v(t) - v_{\text{gas}})}_{\text{Gas}} \vec{e}_x$$

Ohne eine äußere Kraft gilt die Impulserhaltung  $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = 0 = m dv + dm v_{\text{gas}}$

$$dv = -v_{\text{gas}} \frac{dm}{m}$$

$$v(t) = v_0 + v_{\text{gas}} \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (\text{Raketengleichung})$$

Nach der Brenndauer  $T_s$

$$v(T_s) = v_0 + v_{\text{gas}} \ln \left( 1 + \frac{m_{\text{Treibstoff}}}{m_{\text{Nutzlast}}} \right).$$

Steighöhe (mit  $m(t) = qt$ : der Massenverlust pro Zeit)

$$z(t) = \int v(t) dt = (v_0 + v_{\text{gas}})t + v_{\text{gas}} \left( \frac{m_0}{q} - t \right) \ln \left( 1 - \frac{q}{m_0}t \right) - \frac{1}{2}gt^2.$$

### 4.3 Drehimpuls

Der Drehimpuls eines Massepunkts bezüglich des Koordinatenursprungs mit dem Impuls  $p$  ist gegeben durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Wobei  $\vec{L} \perp \vec{r}$  und  $\vec{L} \perp \vec{p}$  mit dem Betrag  $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m \cdot r \cdot v \cdot \sin(\angle(\vec{r}, \vec{v}))$

**Kreisbewegung  $\vec{r}(t)$  um dem Ursprung**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = mr^2\vec{\omega} \quad |\vec{L}| = m\omega r^2 = mvr.$$

Die Richtung von  $\vec{L}$  ist auch die Richtung von  $\vec{\omega}$ .

**Verallgemeinerte Bewegung  $\vec{r}(t)$**

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = mr^2\vec{\omega}.$$

Hier ist  $\vec{\omega}$  die momentane Kreisfrequenz der Kreisbewegung.

$\vec{L}$  hängt immer vom Bezugspunkt (Ursprung) ab und wird angegeben durch  $\frac{\vec{L}}{J_s}$ .

**Drehmoment**

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} := \vec{M} \quad \frac{M}{Nm}.$$

Wenn auf ein System kein äußeres Drehmoment wirkt, dann ist  $\dot{\vec{L}} = 0$ ;  $\vec{L} = \text{const.}$

**Impulserhaltung**

Wenn  $r$  reduziert wird, dann muss  $\omega$  vergrößert werden, um  $L$  zu erhalten. Wenn  $\vec{L}$  gedreht wird, dann benötigt man  $\vec{M}$ . Der Gesamtdrehimpuls des Systems verändert sich nicht.

Bei einer Kollision von zwei Kugeln mit geringem Drehimpuls, werden sie auseinander gestoßen (wenig Drehimpuls bleibt erhalten). Wenn diese Kugeln einen großen Drehimpuls haben, rollen sie nach der Kollision weiter in die Bewegungsrichtung.

**Drehimpuls und Ursprung**

Für einen MP und der Ursprung im Zentrum

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{F} &= -m\omega^2 \vec{r} \\ \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{R} = 0\end{aligned}$$

Für den Ursprung versetzt entlang der  $\vec{\omega}$ -Achse

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \\ \vec{M} &= \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F} \neq 0\end{aligned}$$

Zwei MP mit  $\Delta\varphi = \pi$

$$\vec{M} = 0$$

## 4.4 Impulserhaltung

Laut dem 3. Newton-Gesetz ist ein System abgeschlossen, wenn keine äußere Kraft auf das System wirkt, also  $\dot{\vec{p}}_{\text{ges}} = 0$ , also

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Damit ist der Impuls erhalten.

Beispiele:

Für zwei Massen  $m_1 = m_2$  mit  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$  und  $\vec{p}_2 = 0$  gilt

$$\begin{aligned}\vec{p}'_1 &= 0 \\ \vec{p}'_2 &\neq 0 \\ \vec{p}_{\text{ges}} &= \vec{p}_1 = \vec{p}'_2\end{aligned}$$

Für zwei Massen  $2m_1 = m_2$  mit  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$  und  $\vec{p}_2 = 0$  gilt

$$\begin{aligned}\vec{p}'_1 &= 0 \\ \vec{p}'_2 &\neq 0 \\ \vec{p}_{\text{ges}} &= \vec{p}_1 = \vec{p}'_2\end{aligned}$$

Für zwei Massen  $m_1 \ll m_2$  mit  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$  und  $\vec{p}_2 = 0$  gilt

$$\begin{aligned}\vec{p}'_1 &= -\vec{p}_1 \\ \vec{p}'_2 &=? \\ \vec{p}_{\text{ges}} &= \vec{p}_1 = \vec{p}'_2\end{aligned}$$

Für einen inelastischen Stoß (Zusammenhaltung durch z.B. Knete; Hier wird die kinetische Energie nicht erhalten, da ein Teil von ihr bei der Verformung der Knete verloren geht.) mit  $m_1$  und  $m_2$ , sowie  $\vec{v}_1 \neq 0$  und  $\vec{v}_2 = 0$  gilt

$$m = m_1 + m_2$$

$$mv = (m_1 + m_2) v' \rightarrow v' = \frac{1}{2}v$$

## 4.5 Klassifikation von Stößen

Abhängig von der Veränderung der kinetischen Energie

$$\text{Impuls : } \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\text{Energie : } \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1'^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2'^2 + Q$$

Für

$Q = 0$  : elastischer Stoß

$Q < 0$  : inelastischer Stoß (Umwandlung von  $E_{\text{kin}}$ )

$Q > 0$  : superelastischer Stoß (Stoßpartner gibt gesamte Energie ab).

2-dimensionale Stöße

$$\text{zentraler Stoß : } \vec{p}_1 \neq 0; \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \vec{p}'_1 = 0; \vec{p}_2 = \vec{p}_1$$

$$\text{nicht zentraler Stoß : } \vec{p}_1 \neq 0; \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \vec{p}'_{T1} = -\vec{p}_{T2}$$

## 4.6 Ortsabhängige Kräfte und Kraftfelder

Ortsabhängige Kraft werden durch ein Kraftfeld beschrieben.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) \text{ oder } \vec{F}(r, \theta, \varphi).$$

Das Kraftfeld mathematisch ausgedrückt ist es eine Abbildung  $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$ , bzw  $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ , also ein Vektorfeld.

Ein Spezialfall ist die Zentralkraft  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$  welche Kugelsymmetrisch um einen Massepunkt nach außen (bzw innen) wirkt. Beispiele für Zentralkraftfelder ist die Gravitationskraft oder Coloumbkraft.

In der theoretischen Physik wird für ein Feld  $\vec{F}(\vec{r})$  die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  gesucht.

## 4.7 Konservative Kraftfelder

Wenn die Arbeit nicht vom gewählten Weg  $A \rightarrow B$  abhängt, heißt das Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ. Es gilt für  $W_{\text{geschlossener Weg}}$

$$W_{\text{g.W.}} = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Zum Beispiel sind homogene Felder oder zeitunabhängige Zentralfelder ( $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}_r$ ) konservative Felder. Die Reibungskraft hingegen ist nicht konservativ, weil sie immer entgegen der Bewegungsrichtung steht, also abhängig vom Weg von  $A \rightarrow B$  ist.

In der Vektoranalysis lässt sich eine konservative Kraft wie folgt schreiben

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0.$$

Wobei  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

## 5 Energie

### 5.1 Potenzielle Energie

In einem konservativen Kraftfeld ist die Arbeit unabhängig vom Weg  $A \rightarrow B$

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}.$$

Da die Arbeit nur von dem Ortsvektor  $\vec{r}_{A/B}$  abhängig ist, lässt sich schreiben

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = E_{\text{pot}}(\vec{r}_A) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_B).$$

Die geleistete Arbeit ist dann die Differenz  $\Delta E_{\text{pot}}$ . Die zu leistende Arbeit ist negativ, wenn die Kraft entgegen zur Bewegung gerichtet ist, also  $\vec{F} d\vec{r} < 0$ . Der Nullpunkt der potentiellen Energie kann willkürlich gesetzt werden, da das System immer zu einem Bezugspunkt definiert ist.

### 5.2 Kinetische Energie

Die Arbeit kann auch geschrieben werden als

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt'.$$

Mit  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$  folgt

$$= m \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \vec{v}' d\vec{v}' = m \frac{1}{2} [v^2 - v_0^2] = \underbrace{E_{\text{kin}}(B)}_{\vec{v}} - \underbrace{E_{\text{kin}}(A)}_{\vec{v}_0}.$$

Also lässt sich für die kinetische Energie schreiben

$$E_{\text{kin}}(v) := \frac{1}{2}mv^2.$$

### 5.3 Energieerhaltung der Mechanik

Mit

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} d\vec{r} &= E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B) \\ &= \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = E_{\text{kin}}(B) - E_{\text{kin}}(A) \end{aligned}$$

folgt

$$E_{\text{pot}}(A) + E_{\text{pot}}(B) = E_{\text{kin}}(B) + E_{\text{kin}}(A)$$

also (für konservative Kraftfelder)

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$

Im allgemeinen gilt

$$\sum_{E\text{-Formen}} E_i = \text{const.}$$

Damit ergeben sich zusammenhänge wie der freie Fall mit  $v = \sqrt{2gh}$

### 5.4 Potential

Die potenzielle Energie in einem Kraftfeld hängt oft von Eigenschaften des Objekts ab, auf das die Kraft ausgeübt wird.

$$\text{Gravitation : } G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$$

$$\text{elektrische Feldkonstante : } \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Das Potential im allgemeinen ist die potentielle Energie pro Probemasse (eine Masse die die Eigenschaft des Feldes erzeugt)

$$dW = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{F_x dx + F_y dy + F_z dz} = -dE_{\text{pot}}.$$

Die Kraft ist dann der Gradient von der potentiellen Energie (diese zeigt immer in die Richtung der größten positiven Änderung)

$$\vec{F} = -\text{grad}E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}E_{\text{pot}}(\vec{r}).$$

Damit folgt (für konservative Felder)

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= - \int \vec{F} \, d\vec{r} & \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{F} &= -\vec{\nabla}E_{\text{pot}} & \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

## 5.5 Arbeit

Die Arbeit  $W$  beschreibt die Energie die benötigt wird um ein Massenpunkt mit einer Kraft über eine Strecke zu bewegen.

$$dW = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{F_x dx + F_y dy + F_z dz} = F_{||} ds = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = -dE_{\text{pot}}(\vec{r}).$$

Für die Gesamtarbeit auf dem Weg von A nach B gilt

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt.$$

Wenn  $\vec{F} \perp d\vec{r}$  dann gilt  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  also wird keine Arbeit verrichtet.

Die Arbeit angegeben in  $\frac{W}{Nm}$  bzw  $\frac{W}{J}$  oder  $\frac{W}{W_{\text{Watts}}}$

### Beispiele

Wagen auf schiefer Ebene

$$W = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{r} = \int_A^B (mg \sin \alpha) \vec{e}_R \, d\vec{r} = -mgh.$$

Federkraft

$$W = \int_A^B \vec{F}_H \, d\vec{r} = - \int_0^x Dx' \, dx' = \frac{1}{2} Dx^2.$$

Freier Fall

$$W = \int_h^0 \vec{F} \, d\vec{r} = -mg[0 - h] = mgh > 0 = \frac{1}{2}mv^2 v_{\text{end}} = \sqrt{2gh}$$

Reibungskraft

$$W = \int_A^B \vec{F}_R \, d\vec{r} = -F_R l.$$

## 5.6 Leistung

Die Leistung wird definiert als Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Mit  $\frac{P}{J_s}$  oder  $\frac{P}{W_{\text{Watt}}}$

Das bedeutet für den Zusammenhang zwischen der Leistung und Arbeit

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## 6 Labor- und Schwerpunktsystem

Der Wechsel zwischen gleichförmig bewegten Bezugssystemen (die Galilei-transformation) verändert die wirkenden Kräfte nicht. Also ist  $m, \vec{a}$  G-invariant.

Für das zweite Newton-Gesetz für Systeme aus  $n$  Massepunkten gilt

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Das System aus  $n$  Massepunkten verhält sich gegenüber externen Kräften wie ein MP mit

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}.$$

Für

$$\vec{F}_{\text{extern}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i.$$

Der Schwerpunkt oder Massemittelpunkt eines Systems wird angegeben durch

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

In einem System bei dem der Startpunkt der Nullpunkt ist:  $\vec{R}^* := 0$ . Der Schwerpunkt bewegt sich also mit  $\vec{V}$  gegen das ortsfeste Laborsystem. Der Zusammenhang zwischen den Ortsvektoren im Laborsystem ( $\vec{r}_i$ ) und Schwerpunktsystem ( $\vec{r}_i^*$ ).

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{R}.$$

Damit gilt für zwei Massepunkte ( $\vec{r}_{12}^* = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$ )

$$\vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}^* \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}^*.$$



Die Kraftwirkung in einem Schwerpunktsystem mit der Gravitation (wobei  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ )

$$\vec{F}_{21} = \mu \frac{d\vec{v}_{21}}{dt} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

## 6.1 Stöße im Schwerpunktsystem (CMS)

Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^* &= \vec{r}_i - \vec{R} = \vec{r}_i - \vec{v}t \\ \vec{v}_i^* &= \vec{v}_i - \vec{v} \\ \vec{a}_i^* &= \vec{a}_i\end{aligned}$$

Mit  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

Konkret für den zwei-Körper-Stoß

$$\vec{v}_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Daraus folgt für den Impuls

$$\vec{p}_1^* = \mu \vec{v}_{12} \quad \vec{p}_2^* = \mu \vec{v}_{21}.$$

Bei einem elastischen Stoß ( $|\vec{p}_1^{*'}| = |\vec{p}_1^*|$ ) wird der Impuls vollständig übertragen, wohingegen bei einem unelastischen Stoß ( $|\vec{p}_1^{*'}| < |\vec{p}_1^*|$ ) nicht. In einem CMS ist der Gesamtimpuls immer null

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0 = \vec{p}_1^{*'} + \vec{p}_2^{*'}.$$

## 6.2 Eindimensionales Stoßgesetz

**elastisch**

Die kinetische Energie bleibt erhalten.

$$\text{Impulssatz : } m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$\text{Energiesatz : } m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

Für die Geschwindigkeiten gilt

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\text{Annäherungsgeschw.}} = \underbrace{v_2' - v_1'}_{\text{Separationsgeschw.}}.$$

Im Zusammenhang mit den Massen

$$\begin{aligned}v'_1 &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \\v'_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2\end{aligned}$$

Wenn  $v_2 = 0$  und  $m_1 = m_2$  ist, dann gilt für  $v'_2$

$$v'_2 = v_1.$$

Wenn  $v_2 = 0$  und  $m_2 \gg m_1$  ist, dann gilt für  $v'_2$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \approx 0.$$

### inelastisch

Die kinetische Energie bleibt nicht erhalten  $\rightarrow$  sie hängt von der Inelastizität  $Q$  ab.

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v' \Leftrightarrow v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}v_1 \quad \text{falls } m_1 = m_2, v_2 = 0.$$

Damit folgt für  $E_{\text{kin}}$

$$E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(2m)v'^2 = \frac{1}{2}E_{\text{kin}}.$$

## 6.3 Zwei- und dreidimensionale Stöße

Im CMS gibt es  $n - 1$  unbekannte Streuwinkel für  $n$  Dimensionen. Bei Kugelsymmetrie der Kraftwirkung gibt es auch in drei Dimensionen nur einen Streuwinkel. Die Umrechnung von  $\theta^* \leftrightarrow \theta$  mithilfe der Galileitransformation.

Für den Spezialfall  $\vec{v}_2 = 0, m_1 = m_2$  dann gilt

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}'_1 \perp \vec{p}'_2.$$

## 6.4 Zusammenfassung der Erhaltungssätze

Noether-Theorem: Jede Erhaltungsgröße eines Systems steht in Symmetrie zueinander.

$\frac{d}{dt}E_{\text{gesamt}} = 0$	$\Delta E_{\text{extern}} = 0$	$t \rightarrow t'$
$\frac{d}{dt}\vec{p}_{\text{gesamt}} = 0$	$\vec{F}_{\text{extern}} = 0$	$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' + \vec{r}$
$\frac{d}{dt}\vec{L}_{\text{gesamt}} = 0$	$\vec{M}_{\text{extern}} = 0$	$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = V_{\text{Drehung}}(\vec{x})$

## 7 Trägheitskräfte und beschleunigte Bezugssysteme

In einem Inertialsystem gilt  $\vec{F} = m\vec{a}$ ,  $\vec{F} = 0$ ,  $\vec{p} = 0$  (Trägheitsgesetz). Wenn dieses System beschleunigt wird, dann wirkt eine Scheinkraft (Trägheitskraft) auf die Objekte in dem Bezugssystem, obwohl das Objekt in dem Bezugssystem nicht beschleunigt wird. In einem Aufzug wird zum Beispiel die Gewichtskraft bei der Beschleunigung des Aufzugs verringert; Und erhöht, wenn der Aufzug bremst. Falls die Beschleunigungskraft gleich der Normalkraft ist, befindet sich das Objekt im freien Fall.

beschl. System

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{A}t$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{A}t^2$$

Laborsystem

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{A}t$$

$$\vec{v} = \vec{r}' + \frac{1}{2}\vec{A}t^2$$

Für das Objekt im beschl. System gilt  $\vec{r}' = \text{const}$ ,  $\vec{v}' = \vec{a}' = 0$ , aber auf ihn wird eine Kraft  $\vec{F} = -m\vec{A}$ . Der Beobachter sieht  $\vec{a} = \vec{A}$  und  $\vec{F} = +m\vec{A}$ . Also treten im beschl. System Trägheitskräfte auf.

### 7.1 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem

Ein System rotiert um die  $x_3$ -Achse mit  $\omega = \text{const}$  und  $w_3 = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $w_{1,2} = 0$ . Der MP bleibt stationär zu einem Beobachter von außen. Der Ortsvektor ändert sich nicht, also gilt

$$\vec{r} = \sum_i x_i(t) \vec{e}_i = \sum_i x'_i(t) \vec{e}'_i = \vec{r}'.$$

Für einen Beobachter der von außen ruht gilt

$$S(x_i, \vec{e}_i).$$

Für einen Beobachter der in dem rotierenden System ruht gilt

$$S'(x'_i, \vec{e}'_i).$$

Die Geschwindigkeit des MP ist

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum \dot{x}_i \vec{e}_i = \dot{\vec{r}}' = \underbrace{\sum \dot{x}_i \vec{e}'_i}_{\vec{v}'} + \underbrace{\sum x'_i \dot{\vec{e}}'_i}_{\vec{u}'}$$

Die Beschleunigung des MP

$$\begin{aligned}\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} &= \sum \ddot{x}_i \vec{e}_i = \ddot{\vec{r}}' = \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{u}) \\ &= \vec{a}' + \text{Beschleunigung durch Scheinkräfte}\end{aligned}$$

Mit  $\vec{\omega} = \text{const}$  gilt

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} = \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = r (\vec{\omega} \times \vec{e}_r) \\ r \left( \vec{\omega} \times \sum \vec{e}_i \right) &= r \left( \vec{\omega} \times \sum \vec{e}'_i \right)\end{aligned}$$

Die Bewegung des S'-System

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}'_i &= \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \\ \ddot{\vec{e}}'_i &= \vec{\omega} \times \dot{\vec{e}}'_i\end{aligned}$$

Also gilt für die Geschw.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \sum x'_i \vec{e}'_i = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

bzw. für die Beschl.

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \sum \dot{x}'_i \dot{\vec{e}}'_i + \sum x'_i \ddot{\vec{e}}'_i = \vec{a}' + 2 (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Darauf folgt

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{\vec{a}_c}_{\text{Coriolisb.}} + \underbrace{\vec{a}_{ZF}}_{\text{Zentrifugalb.}}.$$

Für die Coriolis- und Zentrifugalkraft gilt dann

$$\begin{aligned}F_c &= 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega}) = -2m (\vec{\omega} \times \vec{v}') \\ \vec{F}_{ZF} &= m \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = -\vec{F}_{\text{Zentipetal}}\end{aligned}$$

$\vec{F}_{ZF}$  existiert immer, auch wenn der MP in S' ruht.  $\vec{F}_c$  nur dann, wenn sich der MP in S' mit der Komponente  $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$  bewegt.

### Erde als rotierendes Bezugssystem

Die Trägheitskräfte  $\vec{F}_c, \vec{F}_{ZF}$  sind im Betrag ca. 0.35% der Gravitationskraft.

$$\text{Winkelgeschw. : } \omega_E = 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Rotationsgeschw. Äquator : } v_E = 470 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{Rotationsgeschw. eines Breitengrads : } v(\theta) = \omega_E R_e \cos \theta$$

## Messung der Gravitationskonstante

Die Gravitationskonstante wird mit Hilfe eines Pendels bestimmt. Zwei Massen im Abstand  $l$  an einem Stab hängen an einem flachen Seil. Neben diesen Massen befinden sich zwei schwerere Objekte, die sich nicht frei bewegen können. Aufgrund der Gravitationskraft werden die kleineren Massen von den größeren angezogen und das Pendel lenkt sich aus, bis die Rückstellkraft gleich der Gravitationskraft ist

$$F_r = ma = \gamma \frac{mM}{r^2} = F_g.$$

Befestigt man in der Mitte des Pendels einen Laser, so kann man über eine große Distanz  $L$  die Bewegung des Lasers auslesen und so den Winkel der Auslenkung bestimmen, sowie  $r$ , die Strecke, die die kleinen Massen zurücklegen.

$$\frac{\Delta s}{2L} = \sin(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi$$

$$\Delta r = \frac{l}{2} \cdot \Delta\varphi.$$

Daraus folgt für  $\Delta r$

$$\Delta r = \frac{l}{2} \cdot \frac{\Delta s}{2L}.$$

$\gamma$  lässt sich dann wie folgt bestimmen

$$F = 2 \cdot \gamma \frac{mM}{r^2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{ar^2}{2M} \quad a = \frac{2\Delta r}{t^2} = \frac{2}{t^2} \frac{l}{2} \frac{\Delta s}{2L}.$$

## 7.2 Äquivalenz von träger und schwerer Masse

$$\underbrace{m_T a}_{\text{Trägheit}} \stackrel{?}{=} \underbrace{\gamma \frac{m_S M_S}{r^2}}_{\text{Schwere}}.$$

Mithilfe verschiedener Experimente (z.B. Masse an einem Seil in einem rotierenden Bezugssystem; Eötvös-Experiment) kann bestätigt werden, dass sich diese Massen nicht unterscheiden. Experimentell konnte eine Präzision von

$$\frac{m_S - m_T}{m_S} < 10^{-15}$$

nachgewiesen werden.

## 7.3 Trägheitsmoment

Die Trägheit eines Körpers beschreibt sein Bestreben danach, in Ruhe bzw. gleichförmiger Bewegung zu Verharren, solange keine äußeren Kräfte auf diesen einwirken. Die Trägheit gegenüber der Beschleunigung ist die Masse und die Trägheit gegenüber der Drehbeschleunigung ist das Trägheitsmoment.

Konkret für das Trägheitsmoment gilt

$$\begin{aligned}
 I &:= \int_V r_{\perp}^2 \, dm = \int_V r_{\perp}^2 \varrho \, dV \\
 E_{\text{rot}} &:= \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r_{\perp}^2 \, dm
 \end{aligned}$$

wobei  $r_{\perp}$  der Abstand orthogonal zur Drehachse ist. Für die Kreisbewegung gilt  $\vec{v}_{i\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp}$ . Dann folgt für die Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Wenn man die Translation und Rotation vergleicht kann man folgende Parallelen feststellen.

$$\begin{aligned}
 m &\Leftrightarrow I \\
 v &\Leftrightarrow \omega \\
 \vec{p} = m \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{L} = I \vec{\omega} \\
 E = \frac{p^2}{2m} &\Leftrightarrow E = \frac{L^2}{2I}
 \end{aligned}$$

Für den Gesamtdrehimpuls gilt also

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \int_V r_{\perp}^2 \vec{\omega} \, dm = \vec{\omega} \int_V r_{\perp}^2 \, dm = I \vec{\omega}.$$

Konkret für verschiedene Körper gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Hohlzylinder} &: I = MR^2 \\
 \text{Vollzylinder} &: I = \frac{1}{2} MR^2 \\
 \text{dünner Stab} &: I = \frac{1}{12} Ml^2 \\
 \text{homogene Kugel} &: I = \frac{2}{5} MR^2 \\
 \text{Hohlkugel} &: I = \frac{2}{3} MR^2 \\
 \text{Hantel} &: I = 2MR^2
 \end{aligned}$$

wobei  $R$  der orthogonale Abstand zur Drehachse ist.

### Steiner'scher Satz

Falls die Drehachse nicht im Schwerpunkt des Körpers ist gilt für  $I'$

$$I' = I + a^2 M.$$

$a$  ist der Abstand des Schwerpunkts zur Drehachse. Hierzu muss gelten  $I' \perp I$ .

### 7.3.1 Translationsbeschleunigung

Die Translationsbeschleunigung eines SP ist gleich der Umfangsbeschleunigung  $r\dot{\omega}$  des herabrollenden Körpers (Zylinder).

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = r\dot{\omega} = r \frac{Mgr \sin \alpha}{I_{SP} + Mr^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_{SP}}{Mr^2}} = a.$$

### Maxwell Rad

Für ein rotierendes Rad gilt folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} \text{Vollrad : } a &= \frac{r^2 Mg}{\frac{1}{2}MR^2 + Mr^2} \\ \text{Hohlrad : } a &= \frac{r^2 Mg}{MR^2 + Mr^2}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt dann

$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{br^2}}.$$

Für das Vollrad gilt  $b = 2$  und das Hohlrad  $b = 1$ .

## 7.4 Rotation um eine freie Achse (Trägheitstensor)

Der Drehimpuls von Masselementen  $\Delta m_i$  eines Körpers mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  um eine beliebige Achse durch den SP

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = \sum_i \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ &= \sum_i \Delta m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \\ &= \sum_i \Delta m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\vec{L} = \underbrace{\int_V r^2 \vec{\omega} \, dm}_{||\vec{\omega}||} - \underbrace{\int_V (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \, dm}_{\text{nicht } ||\vec{\omega}||}.$$

Für die einzelnen Komponenten gilt

$$\begin{aligned}
 L_x &= \int_V (r^2 \omega_x - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)) \, dm \\
 &= \omega_x \underbrace{\int_V (r^2 - x^2) \, dm}_{I_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int_V xy \, dm}_{-I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int_V xz \, dm}_{-I_{xz}} \\
 L_y &= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{zy}\omega_z \\
 L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z
 \end{aligned}$$

Es gilt im Allgemeinen

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Für die Rotationsenergie gilt

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_V (\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) \, dm = \frac{1}{2} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega.$$

Es tragen also alle Elemente von  $I$  zur Rotationsenergie bei.

$\omega$  kann auch nicht parallel zu den Koordinatenachsen liegen

$$\omega_x = \omega \cos \alpha$$

$$\omega_y = \omega \cos \beta$$

$$\omega_z = \omega \cos \gamma$$

#### 7.4.1 Hauptträgheitsachsensystem (HTA)

Die Diagonalelemente des Trägheitstensors sind die Trägheitsmomente um die jeweiligen Achsen. Alle nicht-Diagonalelemente sind symmetrisch zueinander. (Zum Berechnen des Trägheitstensors muss also die Diagonalmatrix bestimmt werden. Die EW sind die Hauptträgheitsmomente und die EV sind parallel zu den Trägheitsachsen.)

$$I = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}.$$

Für den Trägheitsmoment um eine beliebige Achse  $\vec{\omega}$  im HTA-System mit den Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gilt

$$I = I_a \cos^2 \alpha + I_b \cos^2 \beta + I_c \cos^2 \gamma \quad \vec{L} = \{L_a, L_b, L_c\} = \{\omega_a I_a, \omega_b I_b, \omega_c I_c\}.$$



$$E_{\text{rot}} = \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c}.$$

## Ellipsoid

Für einen allgemeinen Ellipsoiden kann mithilfe von einem Vektor  $R$

$$x = R \cos \alpha$$

$$y = R \cos \beta$$

$$z = R \cos \gamma$$

welcher in Richtung von  $\omega_{x,y,z}$  zeigt, lässt sich folgender Ausdruck schreiben

$$R^2 I = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2xy I_{xy} + 2xz I_{xz} + 2yz I_{yz}.$$

Der Ausdruck  $R^2 I = k = \text{const.}$   $I_\omega$  lässt sich dann ausdrücken als

$$I_\omega = \frac{k}{R^2}$$

wobei  $R$  der mittlere Abstand vom Ursprung ist.

Für die Rotationsenergie gilt dann

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I}.$$

Die Rotation richtet sich immer entlang dem größtem  $I$  aus.

## 7.5 Eulersche Gleichungen

Die Eulersche Gleichung beschreibt die Rotation um eine freie Achse bei beliebiger Drehachse  $\vec{\omega}$ .

$$\begin{aligned} \text{Laborsystem : } \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{D} \\ \text{Hauptachsensystem : } \frac{d\vec{L}'}{dt} &= \frac{d\vec{L}}{dt} - (\vec{\omega} \times \vec{L}') & \text{Coriolisbeschl. } \vec{a}' &= \vec{a} - (\vec{\omega} \times \vec{v}') \\ \vec{D} &= \frac{d\vec{L}'}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L}') \end{aligned}$$

Für die Komponenten  $a, b$  und  $c$  gilt schließlich

$$D_a = I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_c \omega_b$$

$$D_b = I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_a \omega_c$$

$$D_c = I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_b \omega_a$$

## 8 Gravitationsfeld ausgedehnter Massenverteilungen

Die bisherige Anschauung von Massen war immer nur in Massepunkten, allerdings lässt sich Mithilfe des Superpositionsprinzips die Kraftwirkung zwischen ausgedehnten MP herleiten. Es gilt

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$E_{\text{pot}} = \sum_i E_{\text{pot } i}$$

### 8.1 Kugel

Das Gravitationspotential einer Kugel besitzt folgende zwei Eigenschaften.

- 1 Außerhalb der Kugel ( $d \geq r$ ) hängt das Potential nur vom Abstand zum Zentrum der Kugel ab,  $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(d)$ .
- 2 Innerhalb der Kugel ( $d < r$ ) hängt es nur vom Teil der Masse ab, der näher am Zentrum liegt. Die Massenanteile außerhalb der Kugel  $|\vec{r}| > d$  spielen keine Rolle.

$R$  : Abstand zwischen Probemasse und Volumenelement

$r$  : Abstand Volumenelement zum Ursprung

$a$  : Abstand Probemasse zum Ursprung

#### Kugelschale

Das Potential aufgrund von  $dM$  am Ort  $\vec{a}$  ist dann

$$dE_{\text{pot}} = -\gamma m \rho \frac{r^2 \sin \theta \, dr \, d\phi \, d\theta}{R(\theta)} \quad R(\theta) = \sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}.$$

Für

$$a > r : dE_{\text{pot}} = -\gamma \frac{mdM}{a} \quad F_z = -\gamma \frac{mdM}{a^2}$$

$$r > a > 0 : dE_{\text{pot}} = -\gamma \frac{mdM}{r} \quad F_z = 0$$

wobei  $r$  der Radius und  $M$  die Masse der Kugelschale ist.

#### Vollkugel

Bei der Vollkugel wird über das Kugelvolumen integriert. Für  $a > R_0 > r$

$$E_{\text{pot}} = -\gamma m \rho 4\pi \frac{1}{a} \int_0^{R_0} r^2 \, dr = -\gamma \frac{mM}{a} \quad F_z = -\gamma \frac{mM}{a^2}.$$

Für  $r < a < R_0$  und  $a < r < R_0$

$$E_{\text{pot}} = -\gamma m \rho 4\pi \left[ \int_0^a \frac{r^2}{a} dr + \int_a^R r dr \right] = \gamma \frac{mM}{2R_0^3} [a^2 - 3R_0^2] \quad F_z = -\gamma \frac{mM}{R_0^3} a.$$

## 8.2 Mechanik starrer Körper

Die Betrachtung räumlich ausgedehnter aber nicht verformbarer Körper in einem System von MP mit  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$  Die Bewegungsgleichungen werden auf 3 Koordinaten des Schwerpunkts und 3 Rotationswinkel beschränkt.

$$\begin{array}{ll} \text{Masse} & M = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \\ \text{Volumen} & V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \\ \text{Dichte} & \varrho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \end{array}$$

Für den Grenzfall  $N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} V &= \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \Delta V_i =: \int_V dV \\ M &= \int_V \varrho(x, y, z) dV =: \int_V dm \end{aligned}$$

Das Volumenelement  $dV$  wird in kartesischen- bzw. Kugelkoordinaten wie folgt definiert

$$\begin{aligned} dV_{\text{kartesisch}} &= dx dy dz \\ dV_{\text{polar}} &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

## 9 Mechanische Schwingungen

### 9.1 Harmonische Schwingungen

Die harmonische Schwingung ist eine mechanische Bewegung, die ein System beschreibt, welches wiederholt zwischen zwei Amplituden immer wieder durch einen Ruhepunkt schwingt. Jede harmonische Schwingung lässt sich durch die Gleichung

$$m\ddot{x} = -kx$$

beschreiben, wobei  $k$  die Materialeigenschaft ist, die maximale Amplitude begrenzt, bevor eine Schwingung in einer Resonanzkatastrophe endet (die Auslenungskraft ist also größer als die Konstante mal die Strecke). Um die Eigenfrequenz eines Systems zu berechnen kann folgender

Ansatz verwendet werden

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + B \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \varphi = 0$$

folgt dann

$$A \sin(\omega_0 t + \varphi) + B \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

$$A \sin(0) + B \cos(0) = 0$$

$$B = 0.$$

Die Gleichung ist also

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Setzt man nun  $x(t)$  in die Differenzialgleichung ein, folgt für die Eigenfrequenz

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x \\ \frac{d^2}{dt^2} A \sin(\omega_0 t + \varphi) &= -\frac{k}{m} A \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi) &= -\frac{k}{m} A \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

### 9.1.1 Physikalisches und mathematisches Pendel

Weiter unterscheidet man zwischen physikalischen und mathematischen Pendeln. Physikalische Pendel haben eine ausgedehnte Massenverteilung (z. B. ein pendelnder Stab), also auch ein Trägheitsmoment, sowie ein durch die Gravitation verursachtes Drehmoment

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt folgende Gleichung

$$\begin{aligned} D &= -rmg \sin \varphi \\ &\approx -rmg \varphi \\ &= I \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Hier lassen sich Symmetrien mit der Gleichung der harmonische Schwingung, bzw. Eigenfrequenz sehen

$$\ddot{\varphi} = -\frac{rmg}{I}\varphi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{rmg}{I}}.$$

Bei mathematischen Pendeln hingegen betrachtet man nur eine Punktmasse an einem langen masselosen Stab der Länge  $l$ . Für die Eigenfrequenz gilt dann mit  $I = mR^2 + mr^2$ , wobei  $mR^2 = 0$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Die Periode lässt sich jeweils durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ausdrücken.

## 9.2 Komplexe Zahlen

Die Schwingung kann auch in komplexen Zahlen  $|z|e^{i\varphi}$  ausgedrückt werden, da folgende Gleichungen gelten

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$

$$e^{i2\pi} = 1$$

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$$

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$$

Die Schwingungsgleichung sieht dann wie folgt aus

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad z(t) = z_0 e^{i\omega t}.$$

Die Ableitungen sind

$$\dot{z}(t) = i\omega z_0 e^{i\omega t} = i\omega z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 z(t)$$

Für eine allgemeine Lösung gilt

$$z(t) = z_{01} e^{i\omega_0 t} + z_{02} e^{-i\omega_0 t}.$$

Die Lösung eines physikalischen Problems muss allerdings immer reell sein, insofern

$$z_{01} = z_{02}^* =: z_0 (= a + ib) \quad z(t) = z_0 e^{i\omega_0 t} + z_0^* e^{-i\omega_0 t} = \zeta + \zeta^* = 2\Re[\zeta] = x(t) \in \mathbb{R}.$$

Es gibt zwei Anfangsbedingungen, auslenken und loslassen

$$\begin{aligned} z(t=0) &=: x_0 = z_0 + z_0^* \\ \dot{z}(t=0) &=: 0 = i\omega_0 z_0 - i\omega_0 z_0^* \end{aligned}$$

sowie ausstoßen

$$\begin{aligned} z(t=0) &=: 0 = z_0 + z_0^* \\ \dot{z}(t=0) &=: v_0 = i\omega_0 z_0 - i\omega_0 z_0^* \end{aligned}$$

### 9.3 Überlagerungen von Schwingungen

Ein MP kann gleichzeitig in mehreren Richtung schwingen, also gibt es eine Überlagerung in 2 oder 3 Dimensionen. Mehrere MP, die gekoppelt sind, können schwingen, also gibt es eine Überlagerung in einer Dimension.

#### 9.3.1 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$x_1(t) = a \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad x_2(t) = b \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Die Überlagerung ergebe sich aus

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Wenn beide Schwingungen harmonisch sind, folgt daraus, dass die überlagerte Schwingung auch wieder harmonisch ist

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2 \\ B &= -a \sin \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan \varphi &= -\frac{B}{A} \end{aligned}$$

Es gibt zwei Spezialfälle

$$a = b \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

$$x(t) = 2a \cos(\omega t + \varphi).$$

$a = b$  **und**  $\varphi_1 \neq \varphi_2$

$$x(t) = \alpha \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cos(\omega t + \varphi) \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Die Amplitude ist dann

$$\alpha \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} < 2a \quad \text{für } \varphi_1 - \varphi_2 = \pi \Rightarrow \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1 \text{ Amplitude verschwindet.}$$

### 9.3.2 $\omega_1 \neq \omega_2$

Die Annahmen  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  und  $a = b$  werden getroffen. Dann folgt daraus, dass die Überlagerte Schwingung keine harmonische Schwingung mehr ist

$$x(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

### 9.3.3 $\omega_1 \approx \omega_2$ (Schwebung)

Die approximative harmonische Schwingung mit mittlerer Frequenz  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  deren Amplitude die langsam veränderliche Funktion

$$\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

gegenüber der Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ . Das ist die sogenannte Schwebung.

## 9.4 Energie und Leistung von Schwingungen

Bei einer freien Schwingung ohne Dämpfung wird kinetische in potenzielle Energie umgewandelt

$$E_{\text{pot}} - \int_x^0 kx' dx' = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Für die mittlere Energie des Systems gilt, dass sie identisch sind und jeweils  $\frac{1}{2}$  der Gesamtenergie des Systems haben

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{pot}} dt = \frac{1}{T} \frac{m\omega_0^2}{2} \int_0^T x^2(t) dt$$

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{kin}} dt = \frac{1}{T} \frac{m}{2} \int_0^T \dot{x}^2(t) dt$$

wobei

$$x(t) = A \sin \omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos \omega_0 t$$

Für die Gesamtenergie gilt

$$E_{\text{ges}} = \underbrace{\frac{1}{4}m\omega_E^2 A^2}_{\text{pot}} + \underbrace{\frac{1}{4}m\omega_E^2 A^2}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\omega_E^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega_E^2 \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_W)^2}.$$

## 10 Deformierbare Körper

### 10.1 Aggregatzustände

Aggregatzustände beruhen auf dem Verhältnis von potentieller (Bindungsenergie) und kinetischer Energie der Atome. Die Kraft die auf ein Atom wirkt ist gegeben durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}$$

bzw. in einem Gitter

$$\vec{F}_{\text{Atom } i} = \sum_j \vec{F}_j(\vec{r}_{ij}).$$

Die potentielle Energie ist proportional zu verschiedenen Materialeigenschaften

$$E_{\text{pot}} \propto \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}.$$

Wenn sich die potentielle Energie im Gleichgewichtszustand (also im Minimum  $E_{\text{pot}}(r_0) = E_{\text{min}}$ ) befinden, dann ordnen sich die Atome in einem Gitter an. Der Verlauf der Energie ist allerdings auch von der Temperatur abhängig. Die Anordnung im Gitter kann ausgedrückt werden als

$$\vec{r}_{ij} = n_{ij}^a \vec{a} + n_{ij}^b \vec{b} + n_{ij}^c \vec{c} \quad \text{Gitter} : \{n_{ij}^a \vec{a} + n_{ij}^b \vec{b} + n_{ij}^c \vec{c} \mid n_{ij}^k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Fest:**  $\langle E_{\text{kin}} \rangle \ll \langle E_{\text{bind}} \rangle$

Materialien die sich elastisch Verformen lassen, erhalten ihre Gitterstruktur bei und sind reversibel. Bei plastischer Verformung geht die Deformation über die Elastizitätsgrenze hinaus und es entstehen neue Strukturen nach der Krafteinwirkung oder es kommt zum Bruch. Die Dichte liegt bei  $\rho \approx 1 - 20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

**Gas:**  $\langle E_{\text{kin}} \rangle \gg \langle E_{\text{bind}} \rangle$

Bei Gasen herrscht eine Unordnung, sie haben keine Oberfläche, Eigenvolumen oder Form. Sie sind hoch kompressibel und füllen jeden Raum aus. Die Dichte liegt bei  $\rho \approx 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

**Flüssig:**  $\langle E_{\text{kin}} \rangle \approx \langle E_{\text{bind}} \rangle$

Die Atome in einer Flüssigkeit sind leicht verschiebbar aber das Volumen bleibt ungefähr konstant, was dazu führt das Flüssigkeiten inkompressibel sind. Die Dichte liegt bei  $\rho \approx 0.5 - 1.3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .



## 10.2 Verformung fester Körper

Wirkt auf einen Körper der Länge  $l$  und Querschnitt  $A$  eine Zugkraft  $F$  in x-Richtung so verlängert sich die Länge um  $\Delta l$ . Es gilt für ausreichend kleine  $\Delta l$

$$F = \underbrace{E}_{\text{Elastizität}} \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{l}.$$

$E$  ist das Elastizitätsmodul mit  $[E] = [\frac{N}{m^2}]$ . Bei Materialien mit großen  $E$  benötigt man eine große Kraft um eine Verlängerung zu erzielen.

## 10.3 Hookesches Gesetz

Aus der Zugspannung  $\sigma = \frac{F}{A}$  folgt

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{l}}{A} = E \cdot \epsilon$$

mit  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$  als die Dehnung. Entwickelt man  $E_{\text{pot}}$  in einer Taylorreihe um  $r_0$  ( $E_{\text{pot}}(r_0) = E_{\text{min}}$ ), so kann man für kleine Auslenkungen  $r - r_0$  alle Terme mit Potenzen  $n \geq 3$  vernachlässigen; es folgt

$$E_{\text{pot}}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r - r_0)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n E_{\text{pot}}}{\partial r^n} \right)$$

$$F = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \right] \cdot \left( \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} = (r - r_0) \cdot \left( \frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} = (r - r_0) \cdot k$$

Plottet man den Graphen für  $\sigma(\epsilon)$  dann steigt die Funktion erst linear, bis die dann langsam abschwächt bis sie fast gerade wird (Fließgrenze: Das Material wird obwohl keine Kraft mehr wirkt trotzdem noch gedehnt  $\rightarrow$  es ist energetisch Vorteilhafter für das Material sich zu verschieben, anstatt zu seiner Ursprungsform zurückzugehen.); dann kommt die Zereißgrenze und der Graph knickt ab.

## 10.4 Mechanische Spannung

Als Scherung bezeichnet man eine tangential angreifende Kraft, die einen Körper um den Winkel  $\alpha$  an einer Fläche  $A$  verschiebt. Für die Scherspannung gilt

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A} \quad \tau = \underbrace{G}_{\text{Scherm modul}} \cdot \alpha.$$

## 10.5 Volumenänderung

Das anlegen einer Zugspannung führt zu einer Volumenänderung des Körpers. Die Längendehnung  $\Delta l > 0$  führt zu einer Querkontraktion mit  $\Delta d < 0$ .

$$\Delta V = (d + \Delta d)^2 \cdot (l + \Delta l) - d^2 l \quad \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d}.$$

Analog gilt für eine Kompression, also  $\Delta d > 0, \Delta l < 0$ , durch einen Druck  $p$ , wobei

$$p = \frac{F}{A} = - \underbrace{K}_{\text{Kompressionsmodul}} \cdot \frac{\Delta V}{V}.$$

Der Bezug zum Elastizitätsmodul entsteht über die Querkontraktionszahl oder Poissonzahl  $\mu$

$$\mu = - \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} \quad \frac{1}{K} = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \quad \sigma = E \cdot \varepsilon = -p.$$

## 10.6 Biegung eines Balken

Bei der Biegung eines Balken gibt es einen Teil, der gestaucht und einen Teil der gedehnt wird. Dazwischen liegt die neutrale Faser. Dieses Verhalten kann mit einem Kreis genähert werden, wobei der Radius des Kreises  $r$ , mit der neutralen Faser  $l = r\varphi$  der Rand des Kreises ist. Darüber und -runter befindet sich der gedehnte bzw. gestauchte Teil des Balken. Dann gilt  $l \pm \Delta l = (r + y) \cdot \varphi \Rightarrow \Delta l = y\varphi = y \frac{l}{r}$ , sowie

$$\begin{aligned} \text{Zug- bzw. Druckspannung : } \sigma &= E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \frac{y}{r} \\ \text{Druck : } p &= -E \cdot \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

Für die Kraft am Flächenelement  $dA$  gilt dann

$$dF = \sigma \cdot dA = E \frac{y}{r} dA$$

bzw. für den Drehmoment

$$\begin{aligned} dM_z &= y \cdot dF = \frac{E \cdot y^2}{r} \cdot dA \\ M_z &= \underbrace{\int y^2 dA}_B \cdot \frac{E}{r} \\ \text{Krümmungsradius } r &= B \cdot E \cdot \frac{1}{M_z} \end{aligned}$$

Weitere Biegemomente für verschiedene Flächen

$$\text{Quadrat } h \times b : B = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{2}{3}b \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}h^3b$$

$$\text{Kreis} : B = \frac{\pi}{4}R^4$$

$$\text{Hohlkreis mit Wanddicke } r : B = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

$$\text{Stahlträger mit } b \times h, H : B = \frac{1}{12}(h^3b - H^3b)$$

## 11 Reibung

Da die Oberflächen realer Körper nicht idealisiert glatt sind, sondern kleine Unebenheiten haben, wirkt eine Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Dabei wird zwischen Haft- und Gleitreibung unterschieden

### Haftreibung

Die Haftreibung ist die Reibung, die überwunden werden muss, um einen Körper in Bewegung zu setzen. Es gilt

$$F_H = \mu_H \cdot F_N \cdot \cos \alpha$$

wobei  $\mu_H$  der Haftreibungskoeffizient – eine Materialeigenschaft – ist.

### Gleitreibung

Sobald der Körper in Bewegung ist führt dies oft zu einer Reduktion der Reibung. Es gilt

$$F_G = \mu_G \cdot F_N$$

wobei  $\mu_G$  der Gleitreibungskoeffizient – eine Materialeigenschaft – ist.

### Rollreibung

Analog gibt es auch beim Abrollen eines Rades oder einer Kugel eine Reibung. Es gilt

$$F_R = \mu_R \cdot F_N$$

wobei  $\mu_R$  der Rollreibungskoeffizient – eine Materialeigenschaft – ist.

Zum Vergleich

$$\frac{\mu_R}{r} \ll \mu_G \ll \mu_H.$$

## 12 Ruhende Flüssigkeiten und Gase

Die Besonderheit von Flüssigkeiten ist, dass die Atome frei querverschiebbar sind. Das Schermodul ist also 0, bzw. existieren keine Tangentialkräfte. Wird z.B. Wasser in einer

Zentrifuge an die Außenwände gedrückt, kann die Höhe in Abhängigkeit von dem Abstand zum Mittelpunkt angegeben werden, mit

$$z(r) = \frac{\omega^2}{g} \int_0^r r' dr' = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

## 12.1 Kompression und Druck

Die Definition des Drucks ist

$$p = \frac{F_N}{A}$$

was zur Volumenänderung

$$\frac{dV}{V} = - \underbrace{\kappa}_{\text{Kompressibilität}} \cdot dp.$$

Die Relation zum Kompressionsmodul ist  $\kappa = K^{-1}$  bzw.

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}.$$

Der Druck selbst wirkt von allen Seiten und ist in der Flüssigkeit bzw. im Gas konstant verteilt. Für eine Flüssigkeit der Fläche  $A_2$ , auf die ein Druck der Flüssigkeit der Fläche  $A_1$  übertragen wird, gilt

$$p_1 = p_2 \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}.$$

### Boyle-Mariotte Gesetz für Gase

Bei konstanter Temperatur gilt

$$p \propto \frac{1}{V} \Rightarrow p \cdot V = p \cdot \frac{m}{\rho} = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Die Kompressibilität von Gasen ist also

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{p}.$$

## 12.2 Flüssigkeiten und Gase im Schwerfeld

Wenn sich ein Gas oder eine Flüssigkeit in einem Schwerfeld befindet, dann wirkt eine Gravitationskraft auf sie, welche Druck erzeugt

$$dp = -\frac{dmg}{A} = -\rho dV \frac{g}{A} \stackrel{dV=Adz}{=} -g\rho(z) dz.$$

Dabei treten unterschiedliche Effekte für Flüssigkeiten und Gase auf

Flüssigkeiten :  $\rho(z) \approx \rho = \text{const}$

$$\text{Gase : } \frac{\rho(z)}{p(z)} = \text{const} = \frac{\rho_0}{p_0} \rightarrow \rho(z) = p(z) \cdot \frac{\rho_0}{p_0}$$

Es folgt also für den Druck bei Flüssigkeiten in Abhängigkeit der Tiefe (hydrostatischer Druck), bzw. bei Gase in Abhängigkeit der Höhe (barometrische Höhenformel)

$$\begin{aligned}
 p(z_1) &= p(z_2) - g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z) \, dz & dp &= -g \frac{\rho_0}{p_0} p(z) \, dz \\
 p(z_1) &\stackrel{\rho(z) \approx \rho}{=} p(z_2) - g\rho(z_2 - z_1) & \int_{p_0}^p \frac{1}{p'} \, dp' &= -g \frac{\rho_0}{p_0} \int_{z_0}^z dz' \\
 p(h) &= p_0 + \rho gh & \ln \frac{p}{p_0} &= -g \frac{\rho_0}{p_0} \underbrace{z - z_0}_h \\
 & & \ln p_0 &= \ln p + \ln \left( e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} h} \right) \\
 & & p(h) &= p_0 \cdot e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} h}
 \end{aligned}$$

### 12.3 Auftrieb

Der hydrostatische Druck steigt in Abhängigkeit der Tiefe an und erzeugt einen Auftrieb. Die wirkenden Kräfte sind

$$F_L = -F_R \quad F_{\text{ges}} = F_G + F_A.$$

Der Druck von links und rechts gleich sich aus, es bleibt also nur die Gravitationskraft nach unten und die Auftriebskraft nach oben. Es folgt

$$\begin{aligned}
 F_{\text{ges}} &= F_G + F_A \\
 &= -m \cdot g + \underbrace{A(p_2 - p_1)}_{p = \frac{F}{A}} \\
 &= -\rho_K \cdot V_K \cdot g + A \cdot \rho_{Fl.} \cdot g \cdot (z_2 - z_1) \\
 &= (\rho_{Fl.} - \rho_K) \cdot V_K \cdot g.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich auf das Archimedesprinzip – Gewicht der verdrängten Flüssigkeit – zurückführen. Dieses Prinzip gilt für beliebige Formen und Volumen. Man unterscheidet zwischen drei Fällen

$$F_A > F_G : \text{schwimmt}$$

$$F_A = F_G : \text{schwebt}$$

$$F_A < F_G : \text{sinkt}$$

### 12.4 Oberflächeneffekte bei Flüssigkeiten

Im inneren einer Flüssigkeit sind Atome immer von anderen Atomen umgeben und es gilt näherungsweise, dass sich die Kräfte der Atome aufeinander ausgleichen. An der Oberfläche wirkt allerdings eine Kraft nach innen, da keine Atome mehr über den Atomen am Rand sind.

Es ist also Energie nötig, um Atome an die Oberfläche zu bringen, da

$$E_{\text{pot}}(\text{Oberfl.}) > E_{\text{pot}}(\text{Innen}).$$

Flüssigkeiten „versuchen“ also ihre Oberfläche zu minimieren (schwereleose Flüssigkeiten nehmen also eine Kugelform an). Vergrößert man also die Oberfläche um  $\Delta A$  muss also eine Arbeit  $\Delta W$  verrichtet werden. Man definiert die spezifische Oberflächenenergie als

$$\varepsilon \left[ \frac{J}{m^2} \right] = \frac{\Delta W}{\Delta A}.$$

Daraus folgt für die Oberflächenspannung

$$\varepsilon = \frac{F}{2l} = \frac{dW}{dA} =: \sigma \left[ \frac{N}{m} \right].$$

Die Oberflächenspannung hat zur Folge, dass **benetzte** Flüssigkeiten sich an senkrechten Wänden hochziehen und **nicht benetzte** Flüssigkeiten absinken. Die Benetztheit bezeichnet die Materialeigenschaft, wie weit sich eine Flüssigkeit an einen Festkörper anlegt, bzw. wie groß die Krümmung der Oberfläche wird. Dieses Phänomen hat mit Kraftwirkung der Luft, Flüssigkeit und Wand zu tun (jedes Material will seine Oberfläche minimieren). Es existieren drei Oberflächenspannungen und Kräfte über dem Grenzlinienstück (dem Stück, bei dem die Flüssigkeit die Wand berührt)  $l$

$$\begin{array}{ll} \sigma_{WF} : \text{Wand} - \text{Flüssigkeit} & F_{WF} = \sigma_{WF} \cdot l \\ \sigma_{WL} : \text{Wand} - \text{Luft} & F_{WL} = \sigma_{WL} \cdot l \\ \sigma_{FL} : \text{Flüssigkeit} - \text{Luft} & F_{FL} = \sigma_{FL} \cdot l. \end{array}$$

Im Gleichgewicht gilt

$$F_{WL} = F_{FW} + F_{FL} \cos \varphi \quad \cos \varphi = \frac{\sigma_{WL} - \sigma_{WF}}{\sigma_{FL}}.$$

$\varphi$  ist der Winkel zwischen der Tangente an der Krümmung und der Wand. Folgende zwei Fälle werden unterschieden

$$\begin{array}{l} \sigma_{WL} > \sigma_{WF} \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi < \frac{\pi}{2} : \text{konkav} \\ \sigma_{WL} < \sigma_{WF} \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow \varphi > \frac{\pi}{2} : \text{konvex} \end{array}$$

## 13 Notizen

Hier könnten Ihre Notizen stehen.

Zusammenhang zwischen Einheiten

$$\text{Impuls } P \left[ kg \frac{m}{s} \right] = \int F \, dt$$

$$\text{Kraft } F[N] = \frac{dE}{dr} = \frac{dP}{dt}$$

$$\text{Energie } E[J] = \int F \, dr$$

$$\text{Leistung } P \left[ \frac{J}{s} \text{ oder } W \right] = \frac{dE}{dt}$$

$$\text{Arbeit } W[J] = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$\text{Deformierung } \sigma, \tau, p \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

$$\text{Kompressionsmodul } \kappa [Pa^{-1} = \frac{m^2}{N}]$$