Bose-Einstein-Kondensat

Makroskopische Wellenfkt. $\Psi_0(\vec{x}) = \sqrt{N_0}\, e^{i\frac{\theta}{\hbar}}\varphi_0(\vec{x})$; Totale Teilchen: $N = N_0 + N_{ex}$

(unter N_0: Kondensat-Besetzungszahl)

(über $\Omega(E)$: Entartungsgrad)

mikrokanon. Ensemble: $S = -\sum\limits_{\substack{i \\ E_i = E}} \ln \frac{1}{\Omega(E)} = \sum\limits_{\substack{i \\ E_i = E}} \ln \Omega(E) = S_{BEC} + S_0 = \ln 1 + S_{E>0} = S_{E>0}$

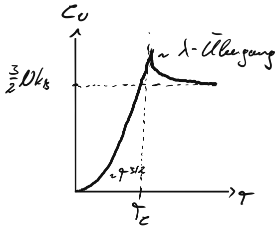
großkanon. Ensemble: $\Omega = k_B T \int dE\, \rho(E) \ln(1 - e^{-\beta(E-\mu)})$

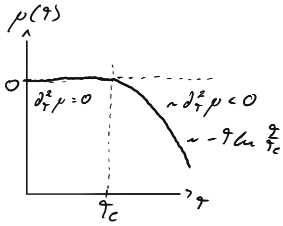
$\Rightarrow S = -(\partial_T \Omega)_{V,\mu} = -k_B \int dE\, \rho(E) \ln(1 - e^{-\beta(E-\mu)}) - k_B T \int dE\, \rho(E)(-b(E))\left(\frac{E-\mu}{k_B T^2}\right) = -\frac{\Omega}{T} + \frac{\langle E \rangle}{T} - \frac{\mu}{T} N \qquad (\Omega = U - TS - \mu N)$ ✓

$\rightsquigarrow S \sim T^{3/2}$

$\Rightarrow c_V = (\partial_T Q)_{V,\mu} = T(\partial_T S)_{V,\mu}$

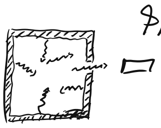
Hochtemp. Limes:
$$\left.\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} f(E) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1} = e^{-\beta(E-\mu)} \\ \lim_{T\to\infty} b(E) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}-1} = e^{-\beta(E-\mu)} \end{aligned}\right\} \text{beides Boltzmann}$$





Bei T_c: $\partial_T^2 \mu = \begin{cases} 0, & T \le T_c \\ < 0, & T > T_c \end{cases}$

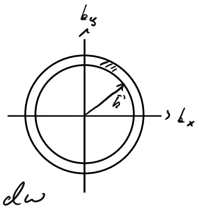
Bosonen ohne Teilchenzahlerhaltung: Schwarzkörperstrahlung; $\mu = 0$ keine Teilchenzahlerhaltung



Photon-Gas bei Temperatur T

„Schwarzer Körper": emittiert/absorbiert Photonen bei allen Frequenzen mit gleichen Wahrscheinlichkeiten.

Zustandsdichte Photonen



Lichtgeschw.

$E = \hbar\omega = c\,|\vec k|$

2 Polarisations-Freiheitsgrade

$$\Rightarrow \rho(\omega)\,d\omega = 2\,\frac{4\pi k^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}\,dk = \underbrace{V\,\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}}_{\rho(\omega)}\,d\omega$$

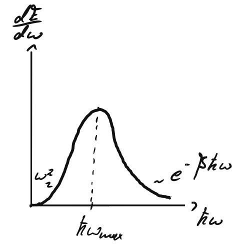
großkanon. Potential: $\Omega = V\,\frac{(k_B T)^4}{\pi^2(\hbar c)^3}\int_0^\infty dx\; x^2 \ln(1-e^{-x}) \quad \Big| \; x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$

$$= -\underbrace{\gamma}_{\frac{\pi^2 k_B^4}{45(\hbar c)^3}}\, V\, T^4$$

Druck: $p_{Ph} = -(\partial_V \Omega)_{T,\mu=0} = \gamma\, T^4$

spektrale Energiedichte: $\frac{dE_\omega}{d\omega} = \rho(\omega)\,\hbar\omega\; b(\hbar\omega) = V\,\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\,\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$ ← Planck'sche Strahlungsgesetz

Zustandsdichte — Energie pro Photon — Wahrscheinlichkeitsbes. pro besetztem Zustand



$\omega_{max} \approx 2.822\, k_B T$

→ Erster Hinweis auf die Quantisierung der Energie der Photonen (UV-Katastrophe)

→ Messung d. Temperaturen von Sternen (≈ Schwarzstrahler)

Energieinhalt des Photonengases

$\langle E\rangle = U = \int_0^\infty d\omega\,\frac{dE_\omega}{d\omega} = V\,\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \quad \Big| \; x := \beta\hbar\omega \quad \Rightarrow U \sim T^4$ ← Stefan-Boltzmann-Gesetz

Allgemeine (basisfreie) Formulierung d. statistischen Physik

Dichte-Matrix

QM: Aus d. Wahrscheinlichkeitsfkt. wird eine Matrix

Problem: Zeitentwicklung des Systems: Schrödingergleichung zeitabhängig
=> Energieeigenzustände nicht definiert.

Betrachte Ensemble von Realisierungen eines Vielteilchensystems
↳ nicht notwendigerweise in Eigenzuständen

→ Vielteilchenbasis: $\{ |\Psi_i\rangle |_{i=0,1,2,\dots} \}$: orthonormale Basis

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $\{ h_i |_{i=0,1,2,\dots} \}$: Wahrscheinlichkeitsfaktoren (rel. Häufigkeit eines Vielteilchenzust.; Gewichtsfaktoren)

→ phys. beobachtbare, stat. Mittelwerte

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\substack{i=0 \\ \uparrow \\ \text{Zustände}}}^{\infty} h_i \langle \Psi_i | \hat{A} | \Psi_i \rangle$$

$$= \sum_i h_i \sum_n \langle \Psi_i | n \rangle \langle n | \hat{A} | \Psi_i \rangle$$

$$= \sum_{n,i} h_i \langle n | \hat{A} \underbrace{| \Psi_i \rangle \langle \Psi_i |}_{P_i} n \rangle$$

Projektor P_i : $P_i | \phi \rangle = | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \phi \rangle$

$$P_i^2 = |\Psi_i\rangle \underbrace{\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle}_{=1} \langle \Psi_i | = |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = P_i$$ ← P_i ist ein Projektor

Def. $\hat{W} = \sum_i h_i \underbrace{|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|}_{P_i}$ ← Dichtematrix, Dichteoperator im Vielteilchen-Hilbert-Raum

=> Mittelwert: $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \langle n | \hat{A} \hat{W} | n \rangle = \mathrm{tr}(\hat{A}\hat{W})$ ← basisunabhängig

Spezialfall: $\hat{H} | \Psi_i \rangle = E_i | \Psi_i \rangle$ & das System ist im Gleichgewicht

↳ $h_i = \frac{1}{Z_c} e^{-\beta E_i}$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \sum_{n,i} \frac{1}{Z_c} e^{-\beta E_i} \langle n | \hat{A} | \Psi_i \rangle \underbrace{\langle \Psi_i | n \rangle}_{\delta_{in}}$$ | wähle $|n\rangle$ als Energieeigenzustände

$$= \sum_i \frac{1}{Z_c} e^{-\beta E_i} \langle i | \hat{A} | i \rangle$$ ← Energieeigenzustand

$$= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{Z_c} e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} \right)$$

Zeitabhängigkeit für den Dichteoperator (Schrödinger-Bild)

$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_i, t\rangle = \hat{H} |\psi_i, t\rangle$

$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi_i, t| = \langle \psi_i, t | \hat{H}$

$\Rightarrow i\hbar \, |\psi_i, t\rangle\langle\psi_i, t| = \hat{H} |\psi_i, t\rangle\langle \psi_i, t| - |\psi_i, t\rangle\langle\psi_i, t|\hat{H} = [\hat{H}, P_i]$

Mit Dichtematrix: $i\hbar \frac{d}{dt}\hat{W}(t) = \sum_i \underbrace{h_i}_{\substack{=\text{const.}(t) \\ \text{Gewichtsfaktoren} \\ \text{zu } t=0 \text{ (Anfangsw.)}}} [\hat{H}, P_i] = [\hat{H}, \hat{W}(t)]$

$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} \hat{W}(t) = [\hat{H}, \hat{W}(t)]$ mit Anfangsbed. $h_i = h_i(0)$

↳ von Neumann-Gleichung (Bewgl. der Wahrscheinlichkeiten)

N.B.: Heisenberg: $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}(t) = [\hat{A}, \hat{H}]$

s. Vorzeichen

Zeitentwicklung d. Wahrscheinlichkeit: $|\psi_i, t\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi_i, 0\rangle$

$\Rightarrow \hat{W}(t) = \sum_i h_i e^{-i\hat{H}t} |\psi_i, 0\rangle\langle\psi_i, 0| e^{i\hat{H}t}$

statistische Mittelwerte

$i\hbar \dot{\hat{W}}(t) = [\hat{H}, \hat{W}(t)]$

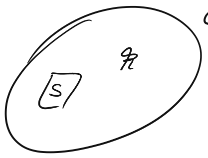
$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{tr}(\hat{A}\hat{W}(t))$

Bewgl. Mittelwert: $i\hbar \frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = i\hbar \, \mathrm{tr}(\hat{A} \frac{d}{dt}\hat{W}(t))$

$\Leftrightarrow \frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \mathrm{tr}(\hat{A}[\hat{H}, \hat{W}(t)])$

↳ 1D-DGL 1. Ordnung

reduzierte Dichtematrix



$G = R \cup S$

z.B.: System S mit Reservoir R
Einzelner Spin im Gesamtteilchensys

Vollständiges ONB $\{|n_s\rangle\}, \{|n_R\rangle\}$ der Teilsysteme

Vollständiges ONB $\{|n_s\rangle \otimes |n_R\rangle\}$ des Gesamtsystems

Gesamtzustandsvektor $|\Psi_i\rangle = \sum_{n_s, n_R} a_{n_s, n_R} |n_s\rangle \otimes |n_R\rangle$

$\hat{A}$ wirkt nur in S

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{tr}(\hat{A}\hat{W})$$

$$= \sum_n \langle n|\hat{A}\hat{W}|n\rangle$$

$$= \sum_{n,m} \langle n|\hat{A}|m\rangle\langle m|\hat{W}|n\rangle \qquad \left.\begin{aligned} \hat{A}|n_s\rangle &= a_s|n_s'\rangle \\ \hat{A}|n_R\rangle &= |n_R\rangle \end{aligned}\right\} \langle n_R|\hat{A}|m_R\rangle = \delta_{n_R m_R}$$

$\hat{A}$ wirkt nur in S

$$= \sum_{\substack{n_s, n_R \\ m_s, m_R}} \langle n_s|\hat{A}|m_s\rangle \delta_{n_R m_R} \langle m_s m_R|\hat{W}|n_s n_R\rangle \qquad \Big|\ |n_s n_R\rangle = |n_s\rangle \otimes |n_R\rangle$$

$$= \sum_{n_s, m_s} \langle n_s|\hat{A}|m_s\rangle \sum_{n_R} \langle m_s \underbrace{n_R}_{=\delta_{n_R m_R} m_R}|\hat{W}|n_s n_R\rangle \qquad \Big|\ \sum_{m_s} |m_s\rangle\langle m_s| = \mathbb{1}_s$$

$$= \sum_{n_s} \langle n_s|\hat{A}\hat{W}_s|n_s\rangle \qquad \Big|\ \hat{W}_s := \sum_{n_R} \langle n_R|\hat{W}|n_R\rangle = \underbrace{\mathrm{tr}_R(\hat{W})}_{\text{reduzierte Dichtematrix}}$$

nur über R

$$= \mathrm{tr}_s(\hat{A}\hat{W}_s)$$

Matrix-Elemente: $(\hat{W})_{\underbrace{m_s m_R}_{m}, \underbrace{n_s n_R}_{n}}$

$$\hookrightarrow \mathrm{tr}_R(\hat{W}) = \sum_{\substack{n_R \\ (=m_R)}} (\hat{W})_{m_s \overbrace{n_R, n_s n_R}^{\text{Spur}}}$$

← Matrix nur im S-Unterraum

Zusammenfassung: Dichte-Matrix

$\hat{W} = \sum_i h_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$; $\{|\psi\rangle\}$: ONB d. Wahrscheinlichkeitssystems

$\rightarrow$ Gleichgewicht: $\hat{W} = \frac{1}{Z_c} e^{-\beta\hat{H}}$ $\quad Z_c = \mathrm{tr}(\hat{W})$

$\rightarrow$ stat. Mittelwert: $\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{tr}(\hat{A}\hat{W})$

$\rightarrow$ spez. Entropie: $S = \mathrm{tr}(\hat{W}\ln\hat{W})$

$\rightarrow$ red. Dichte-Matrix: Produktbasis: System $\otimes$ Reservoir: $\{|\psi_i\rangle \,|\, |\psi_i\rangle = |n_R\rangle|n_S\rangle\}$

$\rightarrow \hat{W} = \sum_{n_S, n_R} h_{n_S n_R} |n_S\rangle|n_R\rangle\langle n_R|\langle n_S|$

$\hat{W}_S = \sum_{n_R} \langle n_R|\hat{W}|n_R\rangle = \sum_{n_S, n_R} h_{n_S n_R} |n_S\rangle\langle n_S|$

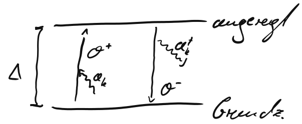
$\langle\hat{A}_S\rangle = \mathrm{tr}_S(\hat{A}\hat{W}_S)$

Breuer, Petruccione: Theory of open quantum systems (Oxford)

Dynamik offener Quantensysteme

(Lehrbeispiel 2-Niveau-System)

Betrachte $\rightarrow$ System: Spin-$\frac{1}{2}$ im B-Feld: $-g\mu_B B\sigma_z = \frac{1}{2}\Delta\sigma_z$



$\rightarrow$ Reservoir: Bad von H.O. mit Frequenzen ω_k

$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{V}$; $\hat{H}_S = \frac{1}{2}\Delta\sigma_z$

$\hat{H}_0 = \hat{H}_S + \hat{H}_B$ $\qquad \hat{H}_B = \sum_k \hbar\omega_k \big(a_k^\dagger a_k + \underbrace{\tfrac{1}{2}\mathbb{1}}_{}\big)$

Verschiebung d. Nullpunktsenergie
kann vernachlässigt werden (nur Verschiebung)

$\hat{V} = \gamma\sum_k (\sigma^+ a_k + \sigma^- a_k^\dagger)$

Pauli-Matrizen: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma$

H.O.: $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$

Wechselwirkungsbild

Schrödinger: $i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\Psi(t)\rangle$

↳ Operatoren $\hat{A} = \text{const.}(t)$

Heisenberg: zeitabhängige Operatoren

$$WW: \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle = \underbrace{\langle\Psi(t)|e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}}_{\langle\Psi^i(t)|}\underbrace{e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} A e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}}_{\hat{A}^i(t)}\underbrace{e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}|\Psi(t)\rangle}_{|\Psi^i(t)\rangle}$$

$\rightarrow \hat{A}^i(t) = e^{i/\hbar H_0 t}\hat{A}e^{-i/\hbar H_0 t}$

$\Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}^i(t) = [\hat{A}^i(t), H_0]$

Zustände: $|\Psi^i(t)\rangle = e^{i/\hbar H_0 t}|\Psi(t)\rangle$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi^i(t)\rangle = -H_0 e^{i/\hbar H_0 t}|\Psi(t)\rangle + e^{i/\hbar H_0 t}(\hat{H}_0 + \hat{V})\overbrace{|\Psi(t)\rangle}^{=e^{-i/\hbar H_0 t}|\Psi^i(t)\rangle}$$

$$= \hat{V}^i(t)|\Psi^i(t)\rangle$$

Born-Markov-Mastergleichung

Born: 2. Ordnung

Markov: Relaxationszeiten des Bads ≪ Relaxationszeiten System (realisiert d. großes Volumen)

Dichte-Matrix: $\hat{W} \equiv \hat{\rho}$

Anfangsbed.: $\hat{\rho}(t=0) = \hat{\rho}_S(0)\otimes\hat{\rho}_B(0) = \hat{\rho}_S(0)\hat{\rho}_B(0)$; Darstellung: $\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix}\hat{\rho}_S(0) & 0\\ 0 & \hat{\rho}_B(0)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\hat{\rho}_S(0) & 0\\ 0 & \mathbb{1}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & \hat{\rho}_B(0)\end{pmatrix}$$

Bwgl. ρ: $i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}^i(t) = [\hat{V}^i(t), \hat{\rho}^i(t)]$ (*); $\hat{\rho}^i(t) = \sum_n p_n|\Psi_n^i\rangle\langle\Psi_n^i|$ ← Herleitung wie von-Neumann
(von-Neumann im WW-Bild)

Integration: $\hat{\rho}^i(t) = \hat{\rho}^i(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\,[\hat{V}^i(t'), \hat{\rho}^i(t')]$ (**)

$tr([\cdot,\cdot]) = 0$

Da sich das System in einem Zustand befindet: $tr(\hat{\rho}(t)) = 1$

↳ Iteration 1. Ordnung reicht nicht, da $\hat{V}^i(t)$ keinen Beitrag liefert ⇒ An- & Abregung des Zustands hintereinander ergibt keinen Unterschied im Zustand

(**) in (*): $\frac{d}{dt}\hat{\rho}^i(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{V}^i(t), \underbrace{\hat{\rho}^i(0)}_{=\hat{\rho}_S^i(0)\hat{\rho}_B^i(0)}] - \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_0^t dt'\,[\hat{V}^i(t'), [\hat{V}^i(t'), \hat{\rho}^i(t')]]$ (***)

Born-Näherung: $tr_B(\ldots)$

$\Rightarrow \hat{\rho}_S^i(t) = tr_B(\hat{\rho}^i(t))$ ~ auf (***) angewandt $\Rightarrow tr([\hat{V}^i(t), \hat{\rho}^i(0)]) = 0$, da $\hat{\rho}^i(0) = \hat{\rho}_S^i(0)\hat{\rho}_B^i(0)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^i(t) = (\frac{i}{\hbar})^2 tr_B\left(\int_0^t dt' [\hat{V}^i(t'), [\hat{V}^i(t'), \hat{\rho}^i(t')]]\right)$ ~ nicht exakt / iterativ: Born'sche Näherung

Markov-Näherung (Bad beeinflusst System, nicht andersrum)

a) Bad Volumen » System Volumen

b) Bad Relaxationszeit $\tau_B \ll \tau_S$

$\Rightarrow \hat{\rho}_B^i(t) = \hat{\rho}_B^i(0) \equiv \hat{\rho}_B$ Das Bad relaxiert so schnell, dass es zu jedem Zeitpunkt im Anfangszustand ist

$\Rightarrow \hat{\rho}^i(t) = \hat{\rho}_S^i(t)\hat{\rho}_B \quad \forall t \geq 0$

Damit $\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S^i(t) = (\frac{i}{\hbar})^2 tr_B\left(\int_0^t dt' [\hat{V}^i(t'), [\hat{V}^i(t'), \hat{\rho}_S^i(t')\hat{\rho}_B]]\right)$

~> 2. Näherung: Gedächtniszeit des Systems kurz