physik311 | Notizen

Jonas Wortmann

November 20, 2023

Contents

1 Einführung **3**
1.1 Lichtquellen . . . 3

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts **4**
2.1 Einfachste Lösung der Wellengleichung: Ebene elektromag. Welle . . . 5
2.2 Energie und Impuls von Licht . . . 6
2.2.1 Strahlungsdruck . . . 6
2.3 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen . . . 6
2.3.1 Stetigkeit . . . 7
2.3.2 Die Amplitude von reflektiertem und gebrochenen Strahl . . . 8
2.3.3 Brewster–Winkel . . . 9
2.3.4 Totalreflexion . . . 9

3 Die elektromagnetische Welle in Materie **11**
3.1 Absorption und Dispersion . . . 11
3.1.1 Monochromatische Wellen . . . 12
3.2 Elektromagnetische Wellen in leitenden Medien . . . 13
3.2.1 Reflexion an absorbierenden Medien . . . 13
3.2.2 Farbe von Gegenständen . . . 13
3.3 Streuung elektromagnetischer Wellen . . . 14

4 Geometrische Optik **15**
4.1 Optische Abbildung . . . 15
4.2 Sphärische Hohlspiegel / Kugelspiegel . . . 15
4.3 Linsen . . . 16
4.3.1 Virtuelle Abbilldungen . . . 17
4.3.2 Abbildungen mit Linsen . . . 17
4.3.3 Dicke Linsen . . . 18
4.4 Vergrößernde optische Instrumente . . . 18

5 Matrizenoptik **19**
5.1 Beispiel: Ungestörte Fortpflanzung . . . 19
5.2 Beispiel: Dünne Linse . . . 19
5.3 Beispiel: Sphärischer Spiegel . . . 20
5.4 Beispiel: Zwei Linsen hintereinander . . . 20

6 Linsenfehler **21**
6.1 Chromatische Abberation . . . 21
6.1.1 Beispiel: Zweilinsiger Achromat . . . 21
6.1.2 Monochromatische Abberation . . . 21
6.1.3 Sphärische Abberation . . . 22

6.2 Weitere Bildfehler 22

7 Interferenz von Wellen **23**

7.1 YOUNG'sches Doppelspaltexperiment 23

7.2 Berechnung der Intensitätsverteilung 23

7.3 Kohärenz von Lichtquellen 24

1 Einführung

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Die Wellenlänge ist im Bereich von 400 nm bis 800 nm, das entspricht einer Frequenz von 750 THz bis 375 THz. Ein Lichtpuls kann nie kürzer als ein Zyklus sein.

1.1 Lichtquellen

- Lampe: Inkoherentes („ungeordnetes") Licht
- Laser: Koherentes („geordnetes", auch Wellen in „gleichschritt") Licht

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Für diesen Fall betrachtet man nur die Lichtausbreitung in großer Entfernung von allen Quellen. Also ist $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Die MAXWELL–Gleichungen sind dann

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \tag{2.1}$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

In Materialien gilt dann

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \tag{2.5}$$
$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \tag{2.6}$$

Hier ist ε die Dielektrizitätskonstante und μ die relative Permeabilität (in der Optik ist sie üblicherweise 1).

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} \vec{E}\right) = \underbrace{\operatorname{div}\left(\operatorname{div} \vec{E}\right)}_{=0} - \operatorname{div}\operatorname{grad} \vec{E} \tag{2.7}$$
$$= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right). \tag{2.8}$$

Mit $\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ folgt

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} \vec{E} = \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.9}$$

Dies ist die **Wellengleichung** für das elektrische Feld. Man erwartet eine Ausbreitungsgeschwindigkeit mit

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}} \equiv \frac{c}{n}, \tag{2.10}$$

wobei $c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}^{-1}$ die Vakuumslichtgeschwindigkeit und $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ der Brechungsindex ist. Dann lässt sich die Wellengleichung wie folgt schreiben

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} \vec{E} = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \overset{\text{Vakuum}}{=} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.11}$$

Eine analoge Rechnung kann auch für das $\vec{B}$–Feld verwendet werden.

2.1 Einfachste Lösung der Wellengleichung: Ebene elektromag. Welle

Hier wird die Lichtausbreitung nur entlang einer Koordinate (z.B. z) betrachtet. Also ist $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}\left(z,t\right)$, bzw. $\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}=0$. Die Wellengleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.12}$$

Mit $\operatorname{div}\vec{E}=0$ folgt für ebene Wellen $\frac{\partial E}{\partial z}=0$, also ist $E_z=$ const..

Jetzt wählt man die Randbedingungen, dass $E_z=0$. Also ist $\vec{E}=\begin{pmatrix}E_x\left(z\right)\\E_y\left(z\right)\\0\end{pmatrix}$. Die Lösung der Wellengleichung ist dann

$$\vec{E}\left(z,t\right)=\vec{E}_0\cos\left(kz-\omega t\right) \tag{2.13}$$

$$=\vec{E}_0\cos\left(k\left(z-ct\right)\right), \tag{2.14}$$

wobei $\frac{\omega}{k}=c$, mit $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ der **Wellenzahl** (λ der Wellenlänge) und $\vec{E}_0$ der Amplitude.

Die Transversalität (also die Ausbreitung nach oben und unten, $\vec{E}\perp\vec{e}_z$, allg. $\vec{E}_z\perp\vec{k}$) folgt aus $\operatorname{div}\vec{E}=0$ im ladungsfreien Raum. In Medien mit Raumladungen oder an Oberflächen ist auch eine longitudinale Polarisation möglich. Bisher gab es nur lineare Polarisationen; es ist aber auch eine Überlagerung von E_x und E_y möglich. Diese sind zirkulare und elliptische Polarisation.

Die Allgemeine Wellengleichung ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{E}=\left(\frac{n}{c}\right)^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \tag{2.15}$$

mit $v_{ph}=\frac{c}{n}$. Man erlaubt nun die Ausbreitung in eine beliebige Richtung sowie eine allgemeine Phase φ. Die Lösung ist dann

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right). \tag{2.16}$$

Diese Gleichung erfüllt die Wellengleichung, wenn

$$\vec{k}^2=\frac{n^2\omega^2}{c^2}. \tag{2.17}$$

Man bezeichnet sie auch als **Dispersionsrelation**.

Aus den Maxwell–Gleichungen ist bekannt, dass

$$\vec{B}=\frac{1}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right). \tag{2.18}$$

Das zeigt, dass $\vec{B}\perp\vec{E}\wedge\vec{k}$ und $|\vec{B}|=\frac{n}{c}|\vec{E}|$.

Die Ursache der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie ist überwiegend der elektrische

Anteil der Welle (im sichtbaren Bereich).

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind nur im Fernfeld in Phase.

2.2 Energie und Impuls von Licht

Zuerst wird die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum eingeführt

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \qquad |\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}| \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{2.19}$$

Diese Gleichung wird zeitlich gemittelt, mit $E(t) = E_0 \cos\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)$ und $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle W_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2. \tag{2.20}$$

Die mittlere Energiedichte, die pro Zeit durch ein Flächenelement transportiert wird ist

$$I = c\,\langle W_{\text{el}} \rangle \qquad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \tag{2.21}$$

Die Richtung des Energietransports wird durch den Poynting–Vektor angegeben

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}||\vec{B}| = \varepsilon_0 c E_0^2. \tag{2.22}$$

Man erkennt, dass

$$\left\langle |\vec{S}| \right\rangle = I \tag{2.23}$$

2.2.1 Strahlungsdruck

Strahlungsdruck ist der Druck, der durch emittierte, absorbierte und reflektierte elektromagnetische Strahlung auf eine Fläche ausgeübt wird. Der Impuls von Teilchen mit der Geschwindigkeit c ist

$$p = \frac{E}{c} = \frac{A \cdot t \cdot c \cdot \langle W_{\text{el}} \rangle}{c}. \tag{2.24}$$

Der Druck ist $\rho = \frac{|\vec{F}|}{A}$ mit $|\vec{F}| = \frac{\text{d}p}{\text{d}t}$,

$$\rho = \frac{I}{c}. \tag{2.25}$$

2.3 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Lichtstrahl $\vec{k}_i$ trifft aus einem Medium n_1 in ein Medium $n_2 > n_1$ und wird mit α zu $\vec{k}_r$ reflektiert. Das Licht wird auch um den Winkel β (relativ zum Lot) gebrochen und verläuft mit $\vec{k}_t$ durch das Medium. Die $\vec{E}$–Felder sind dann

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{\mathrm{i}\left(\omega_i t - \vec{k}_i \vec{r}\right)} \tag{2.26}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{\mathrm{i}\left(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \tag{2.27}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\mathrm{i}\left(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r}\right)}. \tag{2.28}$$

Das FERMAT'sche Prinizp besagt, dass eine Welle immer den Weg der minimalsten optischen Laufzeit wählt. Es ist also möglich, dass sie in einem Medium mehr Zeit verbringt, bevor sie in das andere Medium wechselt.

2.3.1 Stetigkeit

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ und $\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}$ sind an Grenzflächen stetig. Die Normalkomponente von $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind an Grenzflächen stetig.

Zunächst werden die $\vec{E}$–Felder betrachtet, wenn $\vec{r} = 0$ ist.

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_{0i} e^{\mathrm{i}\omega_i t} + \vec{E}_{0r} e^{\mathrm{i}\omega_r t}\right) \stackrel{!}{=} \vec{n} \times \vec{E}_{0t} e^{\mathrm{i}\omega_t t}. \tag{2.29}$$

Diese Gleichung muss für beliebige Zeiten t gelten. Es existiert nur eine nichttriviale Lösung wenn $\omega_r = \omega_i = \omega_t \equiv \omega$.

Einschub
An allgemeinen Grenzflächen bleibt die Frequenz gleich, also $\omega_{\text{vac}} = \omega_{\text{medium}}$,

$$E = E_0 \cos\left(kz - \omega t\right) = E_0 \cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right], \tag{2.30}$$

mit $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = v_{\text{ph}}$, also

$$k_{\text{vac}} = \frac{k_{\text{medium}}}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{medium}}}\frac{1}{n} \Leftrightarrow \lambda_{\text{Medium}} = \frac{1}{n}\lambda_{\text{vac}}. \tag{2.31}$$

Daraus folgt, dass $\omega = k\frac{c}{n}$.

Jetzt ist $\vec{r}$ ein beliebiger Punkt auf der Grenzfläche, also

$$e^{\mathrm{i}\omega t}\vec{n} \times \left(\vec{E}_{0,i} e^{-\mathrm{i}\vec{k}_i \vec{r}} + \vec{E}_{r,0} e^{-\mathrm{i}\vec{k}_r \vec{r}} - \vec{E}_{t,0} e^{-\mathrm{i}\vec{k}_t \vec{r}}\right)\Big|_{y=0} = 0. \tag{2.32}$$

Es muss für beliebiges $\vec{r}$ auf der Grenzfläche gelten

$$\vec{k}_i \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r} \qquad \forall \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Für das einfallende Lichtfeld setzt man

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_{i,x} \\ k_{i,r} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} k_{i,x} \\ k_{i,r} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{z,x} \\ k_{t,y} \\ k_{t,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Das heißt, auch die reflektierten und transmutierten Strahlen bleiben in der Zeichenebene. Das gilt auch für

$$k_{r,x} = k_{i,x} \qquad k_r \sin\alpha' = k_i \sin\alpha \tag{2.36}$$

$$k_{t,x} = k_{i,x} \qquad k_t \sin\beta = k_i \sin\alpha. \tag{2.37}$$

Da ω immer gleich ist, ist $\frac{k}{n}$ konstant. Mit $k_i = k_r$ folgt $\alpha' = \alpha$. Aus den Gleichungen folgt auch, dass

$$k_t = \frac{n_2}{n_1} k_i \qquad n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta. \tag{2.38}$$

Diese Gleichung ist das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz. Für $n_2 > n_1$ wird der Strahl zum Lot hin gebrochen.

2.3.2 Die Amplitude von reflektiertem und gebrochenen Strahl

Hier wird nur der Spezialfall des senkrecht Einfallenden Strahls betrachtet. Es gilt

$$\vec{E}_{0,i} + \vec{E}_{0,r} = \vec{E}_{0,t} \tag{2.39}$$

$$n_1 \left(\vec{E}_{0,i} - \vec{E}_{0,r} \right) = n_1 \vec{E}_{0,t} \tag{2.40}$$

$$\vec{B}_{0,i} + \vec{B}_{0,r} = \vec{B}_{0,t}. \tag{2.41}$$

Der Zusammenhang zwischen den Feldern ist

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \left(\vec{k} \times \vec{E} \right) \qquad \vec{k}_r = -\vec{k}_i. \tag{2.42}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$E_{0,r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_{0,i} \qquad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \tag{2.43}$$

mit r dem Reflexionskoeffizienten. Für $n_2 > n_1$, id est eine Relexion am optisch dichteren Medium, ist $r < 0$, daraus folgt ein Phasensprung von π. Das $\vec{E}$–Feld dreht sich also um. Die reflektierte Intensität ist

$$R = \frac{I_r}{I_i} = |r|^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 . \tag{2.44}$$

All das was nicht reflektiert, wird transmutiert

$$|r|^2 + |t|^2 = R + T = 1 \qquad t = \frac{E_{0,t}}{E_{0,r}}. \tag{2.45}$$

Allgemeiner Fall
Für das $\vec{E}_i$–Feld aus der Ebene der Brechung heraus und das $\vec{B}$–Feld orthogonal zu dem einfallenden Strahl in der Ebene gilt

$$r_\perp = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad t_\perp = \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \tag{2.46}$$

Für das $\vec{E}_i$–Feld orthogonal zu den einfallenden Strahlen in der Ebene gilt

$$r_{||} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \qquad t_{||} = \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}. \tag{2.47}$$

2.3.3 Brewster–Winkel

Der Brewster–Winkel ist der Winkel, bei dem polarisiertes Licht vollständig transmittiert und gar nicht reflektiert wird. Dieses Phänomen tritt auf, wenn reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen ($r_{||} = 0$), also $\alpha + \beta = 90°$. Der Winkel ist mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz

$$\tan\alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2.48}$$

Der Reflexionskoeffizient für einen streifenden Einfall geht gegen 1.

2.3.4 Totalreflexion

Licht wird von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium geschickt. Für $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ gibt es nur für den Fall $\sin\beta \leq 1$ und $\sin\alpha \leq \frac{n_2}{n_1}$ eine Lösung. Dies ist auch der Grenzwinkel für die totale Reflexion. Für $\alpha_g < \alpha$ wird alles Licht reflektiert.

In Glasfaserkabeln wird sich die Totalreflexion zu nutze gemacht. Das Kabel ist ein Hohlzylinder, dessen Rand einen niedrigeren Brechungsindex $n_1 < n_2$ hat, als der hohle Teil n_2 des Zylinders. Dadurch kann Licht über große Strecken versendet werden.

Bei Totalreflelexion gibt es eine **evaneszent** abfallende Welle

$$E \propto e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{2.49}$$

k wird hier komplex.

Für heiße Luftschichten ist der Brechungsindex proportional zu

$$n \propto \frac{N}{V} = \frac{\rho}{k_B T}. \tag{2.50}$$

3 Die elektromagnetische Welle in Materie

3.1 Absorption und Dispersion

Als einfaches Modell wird angenommen, dass Materie aus vielen harmonischen Oszillatoren der Resonanzfrequenz ω_0 besteht. Die Materie wird von einem elektrischen Feld durchsetzt

$$E(t) = E_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{3.1}$$

Die Kraft, die auf das Elektron wirkt ist

$$F(t) = eE(t) = eE_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{3.2}$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m} e^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{3.3}$$

Die Lösung dieser Gleichung funktioniert mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$. Die Amplitude ist

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma\omega}. \tag{3.4}$$

Ist die **Verstimmung** $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega$, dann gilt

$$\frac{1}{2\omega} \frac{1}{-\delta - \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}} = \frac{1}{2\omega} \frac{-\delta + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \tag{3.5}$$

Die Materie ist ein **Polarisator** mit $P = Nex$ mit N der Zahl der Oszillatoren pro Volumen. Die Suszeptibilität ist definiert als $\chi := \frac{P}{\varepsilon_0 E}$. Sie ist also komplex

$$\chi = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m 2\omega} \frac{-\delta + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{3.6}$$

Veränderung des einfallenden Feldes

Der komplexe Brechungsindex ist $\hat{n} = \mathcal{R}(\hat{n}) + \mathrm{i}\mathcal{I}(\hat{n})$.

$$\frac{c}{\hat{n}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}} \tag{3.7}$$

Mit $\mu \approx 1$ ist $\hat{n} = \sqrt{\varepsilon}$. Die Polarisation ist also

$$\begin{aligned} P &= \chi\varepsilon_0 E && (3.8)\\ &= (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 E && (3.9)\\ &= (\hat{n} - 1)\,\varepsilon_0 E. && (3.10) \end{aligned}$$

Die Suszeptibilität hat dann den Wert

$$\chi = \left(\hat{n}^2 - 1\right) = (\hat{n} - 1)(\hat{n} + 1) \approx 2(\hat{n} - 1). \tag{3.11}$$

Die Porportionalität des $\vec{E}$–Feldes ist

$$E \propto e^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} = e^{-\mathrm{i}\omega\left(t - \hat{n}\frac{z}{c}\right)} \tag{3.12}$$

$$= \underbrace{e^{-\mathcal{I}(\hat{n})\omega\frac{z}{c}}}_{e^{-\frac{\alpha}{2}z}} e^{-\mathrm{i}\omega\left(t - n\frac{z}{c}\right)} \tag{3.13}$$

α ist der **Absorptionskoeffizient**. Die Proportionalitäten sind $I \propto |E|^2 \propto e^{-\alpha z}$; $I = I_0 e^{-\alpha z}$. α kann auch über den **Absorptionsquerschnitt** σ berechnet werden, mit $\alpha = N\sigma$.

Für den Anteil von χ in Phase ist der Brechungsindex $n = 1 + \frac{1}{2}\mathcal{R}(\chi)$. Für den Anteil von χ 90° außer Phase ist $\alpha = \frac{\omega}{c}\mathcal{I}(\chi)$. Daraus folgt

$$\text{Absorption}: \alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0 c}\frac{\frac{\Gamma}{2}}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{3.14}$$

$$\text{Dispersion}: n = 1 + \frac{Ne^2}{4m\varepsilon_0\omega}\frac{-\delta}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}. \tag{3.15}$$

Die Absorptionsresonanzen in der UV Wellenlänge bestimmen den Brechungsindex im sichtbaren Bereich. Hier ist bei der normalen Dispersion $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} > 0$ entsprechend $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} < 0$.

Die Dispersion ist spektral breiter als die Absorption. Weit weg von der Resonanz ist sie proportional $\frac{1}{\omega - \omega_0}$ anstatt $\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2}$ (wie bei der Absorption).

3.1.1 Monochromatische Wellen

Das Feld von monochromatischen Wellen ist

$$E = E_0 \cos\left[k\left(x - v_{ph}t\right)\right], \tag{3.16}$$

mit $v_{ph} = \frac{c}{n}$. Für die Ausbreitung von Wellenpaketen ist die Phasen und Gruppengeschwigkeit relevant.

Das Feld entlang der z–Achse ist

$$E(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)\, e^{\mathrm{i}(k(\omega)z - \omega t)}\, \mathrm{d}\omega, \tag{3.17}$$

mit $k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega)$ und $n(\omega) = n(\omega_{\max}) + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}(\omega - \omega_{\max})$.

Die Einhüllende des Pulses (id est das Maximum von $|E(z,t)|^2$) breitet sich mit $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$, $k = \frac{\omega}{c}n$, aus. Führt man diese Rechnung aus, gilt

$$v_g = \frac{c}{n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}. \tag{3.18}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist v_{ph}, oberhalb der Resonanz $> c$. Die Gruppengeschwindigkeit ist $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} < c$ (außer in Bereichen starker Absorption).

3.2 Elektromagnetische Wellen in leitenden Medien

Das Modell für diesen Fall ist ein freies Elektronengas. Das Feld des Lichts ist $E = E_0 e^{\mathrm{i}\omega t}$. Im bisherigen Modell geht ω_0 gegen 0, da es keine Rückstellkraft gibt. Für hohe Frequenzen ist $\omega \gg (\text{ Stoßzeit })^{-1}$. Die Dämpfung Γ wird auch 0. Die Bewegungsgleichung reduziert sich dann zu

$$\ddot{x} = \frac{eE(t)}{m} \qquad \chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{Nex}{\varepsilon_0 E} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{-\omega^2}, \tag{3.19}$$

mit $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ und $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$ als die Frequenz mit der das Plasma schwingt. Der Brechungsindex ist $n = \sqrt{\varepsilon}$. Unter der Plasmafrequenz absorbiert das leitende Material (z.B. Metall), über der Plasmafrequenz wird Metall durchsichtig.

Für das Feld im Medium und $\omega \ll \omega_p$ ist die Porportionalität

$$E \propto e^{-\mathcal{I}(\hat{n})\omega z/c} = e^{-\mathcal{I}(\hat{n})2\pi 2/\lambda} \qquad I \propto |E|^2 \propto e^{-\mathcal{I}(\hat{n})4\pi z\lambda}. \tag{3.20}$$

3.2.1 Reflexion an absorbierenden Medien

Für den senkrechten Einfall ist

$$\hat{n} = \mathcal{R}(\hat{n}) + \mathrm{i}\mathcal{I}(\hat{n}). \tag{3.21}$$

Der Reflexionsindex ist dann

$$r = \frac{\hat{n}-1}{\hat{n}+1} \qquad R = |r|^2 = \frac{(n-1)^2 + \mathcal{I}^2(\hat{n})}{(n+1)^2 + \mathcal{I}^2(\hat{n})}. \tag{3.22}$$

Bei starker Absorption, also $\mathcal{I}(\hat{n}) \gg 1$ (ideal leitendes Metall für $\omega \ll \omega_p$), kommt es zu hoher Reflexion. Für Metalle besonders im Infrarotbereich. Im sichtbaren Sprektrum ist die Reflexion kleiner. Das Modell des Elektronengases ist schlechter für $\omega \approx \omega_p$.

3.2.2 Farbe von Gegenständen

Metalle besitzen eine hohe Leitfähigkeit. Dies führt zu einer breitbandigen hohen Reflexion und dem charakteristischen metallischen Glanz. Für Gold oder Kupfer (oder weitere) variiert die Relfexion in abhängigkeit von der Wellenläng ($R = R(\lambda)$). Dies führt zu einer Färbung.

Wenn bei Isolatoren keine Absorptionslinien im sichtbaren Spektralbereich vorhanden sind ist das Medium glasklar.

Inhomogene Oberflächen (z.B. Puder, raue Oberflächen) erscheinen weiß. Wasser ist fast glasklar, wohingegen Wasserdampf weiß erscheint.

Isolatoren mit schwacher Absorption haben die Farbe des transmutierten bzw. reflektierten Lichts. Isolatoren mit hoher Absorption haben einen metallischen Glanz.

Gelbes Glas erschient geld, da blaues Licht absorbiert und nur rotes und grünes Licht reflektiert bzw. transmutiert wird. Die Mischung aus rot und grün ist gelb. Weitere Farben sind

$$\text{magenta} = \text{rot} + \text{blau} \tag{3.23}$$

$$\text{cyan} = \text{blau} + \text{grün} \tag{3.24}$$

$$\text{gelb} = \text{rot} + \text{grün}\,. \tag{3.25}$$

Farbe kann auch durch Interferenz erzeugt werden.

3.3 Streuung elektromagnetischer Wellen

Weisses Licht wird an Molekülen in alle Richtungen gestreut. Wenn der Durchmesser der Moleküle d viel kleiner als die Wellenlänge λ ist, kommt es zur Rayleigh–Streuung. Die Streuung ist isotrop mit einem Wirkungsquerschnitt von

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}. \tag{3.26}$$

Für $\omega \ll \omega_0$ ist $\sigma \propto \omega^4$, das heißt, blaues Licht wird stärker als rotes Licht gestreut. (Der Himmel ist blau, weil blaues Licht von den Molekülen der Atmosphäre gestreut wird. Abends erscheint der Himmel rot, da das Licht eine größere Strecke durch die Atmosphäre zurücklegt und mehr rotes transmutiertes Licht ankommt.)

Für $\omega \approx \omega_0$ kommt es zu einer Resonanzstreuung. Für $\omega \gg \omega_0$, sowie die Streuung an freien Elektronen (und keine Rückstellkräfte, also $\omega_0 \to 0$), kommt es zur Thomson–Streuung, mit einem Wirkungsquerschnitt von

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)^2. \tag{3.27}$$

Sie ist unabhängig von der Lichtwellenlänge.

4 Geometrische Optik

Die Konzepte in diesem Kapitel sind allgemein gültig, wenn alle Dimensionen viel größer als die Wellenlänge sind.

Die ebene Welle bleibt weiterhin $E = E_0 \cos(kz - \omega t)$. Die Beugungseffekte am Rand von Lichtbündeln werden vernachlässigt.

Die Grundaxiome der geometrischen Optik sind:

i) In einem optisch homogenen Medium laufen die Lichtstrahlen geradlinig.

ii) An Grenzflächen zwischen zwei Medien wird Licht gemäß des SNELLIUS'schen Brechungsgesetzes reflektiert.

iii) Strahlen, die sich durchdringen, beeinflussen sich im Rahmen der linearen Optik nicht.

Die allgemeine Formulierung der ersten zwei Punkte ist das FERMAT'sche Prinzip der minimalen optischen Laufzeit zwischen zwei Punkten P_1 und P_2. Die Variation des Weges über die räumlich inhomogene Brechzahl muss also verschwinden,

$$\delta \int\limits_{S(P_1 \to P_2)} n(\vec{r})\, \mathrm{d}s = 0. \tag{4.1}$$

Die Interpretation davon ist, dass alle Wege außer des extremalen Wegs gemittelt werden und nur der extremale übrig bleibt.

4.1 Optische Abbildung

Die Motivation der optischen Abbildung ist das Sammeln von z.B. einer Lampe ausgesendeten Lichtstrahlen.

Reelle Abbildung

Ein Objekt (z.B. eine Lampe) kann mit Hilfe eines abbildenden Instruments (z.B. einer Linse) auf einem Schrim als ein reelles Bild abgebildet werden.

Elliptische Spiegel

Bei elliptischen Spiegeln werden alle Lichstrahlen, die von einem Brennpunkt ausgesendet werden, in den anderen Brennpunkt abgebildet.

4.2 Sphärische Hohlspiegel / Kugelspiegel

Sei ein Gegenstand auf der optischen Achse eines Hohlspiegels. Ein Lichtstrahl wird im Winkel γ ausgesendet und um den Winkel $2 \cdot \theta$ reflektiert. Der Mittelpunkt liegt auf der optischen Achse und wird um den Winkel θ refelktiert und kommt im Winkel α an. Der Bildpunkt befindet sich auf der optischen Achse und das Licht kommt im Winkel β an.

Der Abstand des Bildpunktes, des Mittelpunktes bzw. des Gegenstands zum Schnittpunkt von optischer Achse und Hohlspiegel ist b, R bzw. g.

Ziel ist es, die Position des Bildpunktes als Funktion der Gegenstandsweite zu bestimmen. Mit dem Reflexionsgesetz gilt $\theta = \alpha - \gamma = \beta - \alpha \Leftrightarrow \beta + \gamma = 2\alpha$. Hier kann die **paraxiale Näherung** verwendet werden. Diese Näherung besagt, dass alle Winkel sehr viel kleiner als 1 sind (achsnahe Strahlen). Zudem ist der Abstand d zwischen dem Lot auf die optische Achse des Reflexionspunktes und dem Spiegel viel kleiner als alle anderen Längen. h ist die Länge des Lots.

Die Näherungen sind dann

$$\tan\gamma \approx \gamma \approx \frac{h}{g} \tag{4.2}$$
$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{h}{R} \tag{4.3}$$
$$\tan\beta \approx \beta \approx \frac{h}{b}. \tag{4.4}$$

Aus $\beta + \gamma = 2\alpha$ folgt dann

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}. \tag{4.5}$$

Die Brennweite des Hohlspiegels ist definiert als

$$f := \frac{R}{2}. \tag{4.6}$$

Für konvexe Spiegel ist $R < 0$, also auch $f < 0$.

Damit lässt sich das **Abbildungsgesetz** schreiben als

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \tag{4.7}$$

Für $g \to \infty$ ist $b = f$.

Achsferne Strahlen, die in einem Winkel von z.B. 45° (zum Mittelpunkt) ankommen, werden wieder um 45° reflektiert. Die achsfernen Strahlen treffen sich mit den achsnahen Strahlen in einem Punkt. Die Abbildung ist nicht mehr scharf. Dieser Bildfehler lässt sich durch Verwendung eines Parabolspiegels vermeiden. Er lässt sich allerdings nur für die Fokussierung von parallelen Strahlen verwenden.

4.3 Linsen

Zunächst wird eine Abbildung durch eine brechende Kugelfläche betrachtet. Ein Lichtstrahl wird um den Winkel γ zur optischen Achse ausgesendet und kommt in Einfallswinkel θ_1 zur Normalen an. Der Lichtstrahl wird zum Lot hin um θ_2 gebrochen. Der Abstand von Gegenstand zur Linse ist g; der Abstand von Bild zur Linse ist b. Der Abstand des Mittelpunktes M zur Linse (die Weiterfühung der Normalen) auf der optischen Achse ist R. Der Einfallswinkel zum Bild ist β; der Einfallswinkel zum Mittelpunkt ist α. Die Höhe des Reflexionspunktes über der optischen Achse ist h.

Das Brechungsgesetz ist dann $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. In paraxialer Näherung gilt $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$. Zudem gilt $\theta_1 = \gamma + \alpha$ sowie $\theta_2 = \alpha - \beta$. Mit den Winkeln wie beim Hohlspiegel definiert ist das Gesetz

$$n_1 (\gamma + \alpha) = n_2 (\alpha - \beta) \tag{4.8}$$

$$n_1 \left(\frac{h}{g} + \frac{h}{R}\right) = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{b}\right) \tag{4.9}$$

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \tag{4.10}$$

Für eine dünne, auf beiden Seiten konvexe Linse, gilt für die Brechung an der Vorderseite bzw. an der Rückseite

$$\frac{n_a}{g} + \frac{n_l}{b_1} = \frac{n_l - n_a}{R_1} \qquad \frac{n_l}{g_2(= -b_1)} + \frac{n_a}{b} = \frac{n_a - n_2}{R_2}. \tag{4.11}$$

Hier ist n_l der Brechungsindex in der Linse und n_a der Brechungsindex außerhalb der Linse. Alle 1–er Indizes sind vor der Linse, alle 2–er Indizes sind hinter der Linse.

Für $n_a = 1$ (also Luft), und $n_l = n$, gilt für die Brennweite einer dünnen Linse

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{4.12}$$

Das Inverse der Brennweite wird auch als **Brechkraft** $D := \frac{1}{f}[\,\mathrm{Dioptrie}\,]$ definiert.

4.3.1 Virtuelle Abbilldungen

Abbildende Instrumente beeinflussen die Lichtstrahlen so, das sie dem Beobachter vom Ort des Bildes herkommenden erscheinen. Virtuelle Bilder können nicht mit einem Schrim aufgefangen werden (sie müssten mit einer weiteren Linse scharf gestellt werden).

4.3.2 Abbildungen mit Linsen

Für die allgemeine Konstruktion eines Bildes sind zwei Strahlen ausreichend. Es gibt verschiedene ausgezeichnete Strahlen die wie folgt konstruiert werden können.

i) Der Strahl parallel zur optischen Achse. Dieser geht durch den bildseitigen Brennpunkt.

ii) Der Strahl durch den Mittelpunkt der Linse. Dieser wird nicht abgelenkt.

iii) Der Strahl durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt. Dieser verläuft hinter der Linse parallel zur optischen Achse.

Man definiert die transversale Vergrößerung

$$V_T = \frac{B}{G} = \frac{f}{f-g}. \tag{4.13}$$

Für $g > f$ ist $V_T < 0$, das Bild steht also auf dem Kopf. $|V_T|$ wächst, wenn g sich dem Brennpunkt nähert.

4.3.3 Dicke Linsen

Wenn die Dicke der Linse gegenüber g, f, R_1 und R_2 nicht mehr vernachlässigbar ist.

Um das übliche Verfahren zur Bildkonstruktion zu verwenden, wird das Licht nicht mehr an den Oberflächen der Linse gebrochen, sondern an zwei Hauptebenen im Abstand h_1 und h_2 von der Mitte der Linse. Zwischen den Hauptebenen verlaufen die Strahlen parallel. Es gilt

$$h_{1,2} = \frac{(n-1)\,fd}{nR_{1,2}} \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)\,d}{nR_1R_2}\right]. \tag{4.14}$$

4.4 Vergrößernde optische Instrumente

Man definiert die **Vergrößerung** (oder auch **Winkelvergrößerung**) als

$$V := \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} =: \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}. \tag{4.15}$$

Der Sehwinkel ohne Instrument ist auch der Sehwinkel im Abstand von dem kleinsten Abstand S_0, bei dem der Gegenstand noch scharf abgebildet werden kann.

Eine Lupe ist eine Sammellinse mit kurzer Brennweite und $g < f$. Die Vergrößerungen lassen sich ohne Lupe mit $\varepsilon_0 = \frac{G}{S_0}$ und mit Lupe $\varepsilon = \frac{G}{g} \approx \frac{G}{f}$. Damit ist die Vergrößerung

$$V = \frac{S_0}{f}. \tag{4.16}$$

5 Matrizenoptik

Das Ziel in der Matrizenoptik ist die Berechnung von optischen Systemen mit mehreren Linsen. Für achsnahe Strahlen ist auch hier eine Linearisierung möglich. Mit paraxialer Optik sind für die Ausbreitung entlang einer Achse alle Winkel viel kleiner als 1.

Die Beschreibung der Strahlen erfolgt durch den Strahlvektor

$$\vec{r}(z) = \begin{pmatrix} r(z) \\ \alpha(z) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

mit $r(z)$ dem Abstand und $\alpha(z)$ dem Winkel zur optischen Achse z.

Trifft ein Strahl $\vec{r}_1(z)$ in ein Medium und verlässt dieses wieder mit $\vec{r}_2(z)$, gilt

$$\vec{r}_2 = \hat{M}\vec{r}_1 \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Für ein paraxiales optisches System gilt

$$\hat{M}_{\text{ges}} = \hat{M}_i \cdot \ldots \cdot \hat{M}_2 \cdot \hat{M}_1. \tag{5.3}$$

5.1 Beispiel: Ungestörte Fortpflanzung

Für eine unegestörte Fortpflanzung (ohne Brechung) gilt $r_2 = r_1 + \alpha l$ und $\alpha_1 = \alpha_2$, also

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + \alpha_1 l \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Es bestägigt also die Relation

$$\vec{r}_2 = \hat{M}\vec{r}_1 \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

5.2 Beispiel: Dünne Linse

Für eine dünne Linse mit Brennweite f gilt $r_1 = r_2$ und $\alpha_2 = \alpha_1 \frac{r_1}{f}$, also

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

5.3 Beispiel: Sphärischer Spiegel

Für eine sphärischen Spiegel mit Krümmungsradius R und Brennweite $f = \frac{R}{2}$ gilt

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

5.4 Beispiel: Zwei Linsen hintereinander

Mit der Matrixmethode kann unmittelbar die Wirkung von zwei Linsen hintereinander bestimmt werden.

Der Abstand der Linsen mit Brennweiten f_1 und f_2 sei d. Es ist

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\text{ges}} &= \hat{M}_2 \cdot \hat{M}_d \cdot \hat{M}_1 && (5.9) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} && (5.10) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}\right) & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}. && (5.11) \end{aligned}$$

Das System zeigt gewisse Analogien mit einer einzigen Linse der Brennweite $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$.

Es gibt folgende interessante Grenzfälle

i) Abstand $d \to 0$: Das System verhält sich nun wie eine einzige Linse mit Brennweite $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ oder $D = D_1 + D_2$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Abstand $d = f_1 + f_2$: Die Matrix hat dann die Form $\begin{pmatrix} 1 - \frac{f_1+f_2}{f_1} & f_1 + f_2 \\ 0 & 1 - \frac{f_1+f_2}{f_2} \end{pmatrix}$. Sind die Strahlen anfänglich parallel, dann bleibt die Steigung vor und nach dem Linsensystem identisch; die Strahlen werden aufgeweitet oder zusammengezogen.

6 Linsenfehler

Bisher war immer die Annahme, dass Linsen ideale optische Abbildungen erstellt haben. Linsen haben allerdings Fehler.

6.1 Chromatische Abberation

Weiterhin ist die Brennweite

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{6.1}$$

Allerdings hängt der Brechungsindex $n = n(\lambda)$ von der Wellenlänge λ ab. Wenn also weißes Licht an einer Linse gebrochen wird, ist bei normaler Dispersion $f_{\text{blau}} < f_{\text{rot}}$. Die Bildweite von blauem Licht ist kleiner als die Bildweite von rotem Licht. Die transversale Vergrößerung ist also abhängig von der Wellenlänge. Aus unterschiedlichen Glassorten zusammengesetzten Linsen kann die chromatische Abberation reduziert werden.

6.1.1 Beispiel: Zweilinsiger Achromat

Bei einem zweilinsigen (oder auch mehrlinsigen) Achromat werden zwei Linsen hintereinander gestellt, um der chromatischen Abberation entgegenzuwirken. Die Gesamte Brechkraft ist dann

$$D = D_1 + D_2 \qquad D_i(\lambda) = (n_i(\lambda) - 1)\rho_i, \tag{6.2}$$

mit $\rho_i := \left(\frac{1}{R_{i,1}} - \frac{1}{R_{i,2}}\right)$.

Mit so einem Zweilinser kann erreicht werden, dass die Brennweite für zwei Wellenlängen gleich ist. Üblich sind $\lambda_1 = 656\,\text{nm}$ und $\lambda_2 = 486\,\text{nm}$. Es soll also gelten

$$D(\lambda_1) = D(\lambda_2) \tag{6.3}$$

$$(n_1(\lambda_1) - 1)\rho_1 + (n_2(\lambda_1) - 1)\rho_2 \overset{!}{=} (n_1(\lambda_2) - 1)\rho_1 + (n_2(\lambda_2) - 1)\rho_2. \tag{6.4}$$

Damit liegt ρ_1/ρ_2 fest.

Die Angabe der Brennweite erfolgt üblicherweise bei der Wellenlänge von $\lambda_\alpha = 587\,\text{nm}$. Die Angabe der Dispersion erfolgt über die ABBE–Zahl $\nu = \frac{n(587\,\text{nm})-1}{n(486\,\text{nm})-n(656\,\text{nm})}$. Gläser hoher bzw. kleiner Dispersion sind Flint–Gläser bzw. Kron–Gläaser. Es gilt dann

$$\nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 = 0. \tag{6.5}$$

6.1.2 Monochromatische Abberation

Bei der monochromatischen Abberation treten durch Verwendung der Näherung $\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!}$ Bildfehler dritter Ordnung auf.

6.1.3 Sphärische Abberation

Kügelförmig geschliffene Linsen zeigen für Randstrahlen andere Brennweiten als für achsnahe Strahlen. Dies gilt sowohl für dicke, als auch für dünne Linsen.

6.2 Weitere Bildfehler

i) Koma: Strahlen, die schräg durch eine Linse fallen, haben asymmetrische Fehler. Die Strahlen die durch die Mitte der Linse gehen treffen sich also an einem anderen Ort, als die Strahlen, die durch den Rand der Linse gehen.

ii) Astigmatismus: Die Brennebene in der x–Richtung ist anders, als die Brennebene in y–Richtung. Dies tritt zum Beispiel auf, wenn eine Linse schräg durchlaufen wird.

    Zylinderlinsen weisen einen extrem starken Astigmatismus auf.

iii) Verzeichnung: Bei der Verzeichnung werden parallele Linien gekrümmt.

iv) Bildfeldwölbung: Bei der Bildwölbung ist nur die Bildmitte oder der Bildrand scharf.

Abbildungsfehler speilen meist bei großen Aperturen eine Rolle. Man verwendet eine Blende um die Strahlen außen möglichst zu verringern.

Man definiert die **Blendenzahl** F eines Objektives als

$$F := \frac{f}{D}. \tag{6.6}$$

Eine große Blendenzahl bedeutet, dass der Durchmesser der Blende kleiner wird.

7 Interferenz von Wellen

Allgemein ist die Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \tag{7.1}$$

mit $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ als Lösungen folgt mit der Linearität der Wellengleichung

$$\vec{E} = \alpha_1\vec{E}_1 + \alpha_2\vec{E}_2. \tag{7.2}$$

Aus dem Superpositionsprinzip für verschiedene sich überlagernde Wellen geht hervor

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \sum_m \vec{A}_m\left(\vec{r},t\right)e^{\mathrm{i}\varphi_m}, \tag{7.3}$$

mit A_m der Amplitude und φ_m der Phase. Die Intensität ist proportional zu $|\vec{E}|^2$

Spezialfall: zwei sich überlagernde Wellen
Es sei $I \propto |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$. Existiert nur ein Feld, ist $I = I_0 \propto |\vec{E}_1|^2$. Für $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$ (konstruktive Interferenz) ist $\vec{E} = 2\vec{E}_1$ und $I \propto 4|\vec{E}_1|^2$ also $I = 4I_0$. Ist allerdings $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$ (destruktive Interferenz), dann ist $\vec{E} = 0 = I$.

7.1 Young'sches Doppelspaltexperiment

Beim Young'schen Doppelspaltexperiment werden ebene Lichtwellen durch einen Doppelspalt geschickt. Dabei entsteht ein Interferenzmuster hinter dem Doppelspalt. Man kann erkennen, dass die Wellen konstruktiv und destruktiv interferieren, wobei sich Maxima und Minima bilden. Maxima werden mit m bezeichnet; das erste Maximum ist von der Ordnung $m = 0$. Für einen Spaltabstand von d ist der Gangunterschied zwischen zwei Wellen die in einem Winkel von φ austreten gleich $d\sin\varphi$. Für die konstruktive Interferenz gilt $d\sin\varphi = m\lambda$; für die destruktive Interferenz gilt $d\sin\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

7.2 Berechnung der Intensitätsverteilung

Sei der Abstand des beobachteten Punktes auf dem Schrim zur Mittellinie x_p. Die Vektoren zwischen Spalt und Schrim sind $r_{1,p}$ und $r_{2,p}$. Die Spaltbreite b ist sehr klein, jeder Spalt emittiert also eine Kugelwelle. Das Feld ist $E = E_{1,0}\cos\left(kr_{1,p} - \omega t\right) + E_{2,0}\cos\left(kr_{2,p} - \omega t\right)$, mit $\frac{\omega}{k} = c$ und $r_{i,p} = \sqrt{\left(x_p \pm \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$. Die Proportionalität der Intensität ist $I \propto \langle|E|^2\rangle$.

Man betrachtet nun den Fraunhofer'schen Grenzfall, wobei der Schrim unendlich weit vom Doppelspalt entfernt ist. Der Gangunterschied wird definiert als $g := d\sin\varphi = r_{2,p} - r_{1,p}$, mit $\tan\varphi = \frac{x_p}{D}$. Damit ist das Feld bzw. die Intensität

$$I \propto \left\langle |E_{1,0}\cos\left(k\left(r - \frac{d}{2}\sin\varphi\right) - \omega t\right) + E_{2,0}\cos\left(k\left(r + \frac{d}{2}\right) - \omega t\right)|^2\right\rangle. \tag{7.4}$$

Für $E_{1,0} = E_{2,0} = E_0$ ist

$$\left\langle \left| \frac{E_{1,0}}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\left(r-\frac{g}{2}\right)-\omega t\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\left(r+\frac{g}{2}\right)-\omega t\right)} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\left(r-\frac{g}{2}\right)-\omega t\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k\left(r+\frac{g}{2}\right)-\omega t\right)} \right)^{*} \right) \right|^{2} \right\rangle \tag{7.5}$$

$$= \left\langle \frac{E_0^2}{4} \left(2\cos\frac{kg}{2} \right)^2 \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr-\omega t)} \right|^2 \right\rangle, \tag{7.6}$$

mit $()^*$ dem komplex konjugiertem. Daraus folgt für die Intensität

$$I = 4\cos^2\frac{kg}{2} \underbrace{\left\langle \left| E_0 \cos\left(kr-\omega t\right) \right|^2 \right\rangle}_{\propto I_0} \tag{7.7}$$

$$= I_0 4\cos^2\frac{kg}{2} \tag{7.8}$$

$$= I_0 \cos^2 k\frac{d}{2}\sin\varphi. \tag{7.9}$$

Man erwartet Interferenzmaxima für $k\frac{d}{2}\sin\varphi = m\pi \Leftrightarrow d\sin\varphi = m\lambda$, mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

7.3 Kohärenz von Lichtquellen

Im folgenden wird die zeitliche Kohärenz (oder auch longitudinale Kohärenz) betrachtet.

Es wird angenommen, dass Licht eine Frequenzverteilung hat. Damit ist die Intensität abhängig von der Frequenz, also existiert auch ein $\nu_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$, bei dem die Intensität maximal wird.