# physik321 | Notizen

Jonas Wortmann

October 17, 2023

# Contents

# 1 Überblick Elektrodynamik

Das Ziel ist die Untersuchung der Ursache und Wirkung von elektrischen ($\vec{E}$) und magnetischen ($\vec{B}$) Feldern auf elektrische Ladungen ($q$).

Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass auf elektrisch geladene Körper eine elektromagnetische Kraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{1.1}$$

mit $\vec{v}$ der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, wirkt. Diese Kraft führt zu einer Bewegungsänderung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right]. \tag{1.2}$$

Der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und (bewegten) Ladungen sind die **Maxwell–Gleichungen**

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad c^2\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \tag{1.4}$$

Zusammen mit Randbedingungen an **Grenzflächen** bestimmen sie alle Effekte der Elektrodynamik.

# 2 Statische Felder

Die Maxwell–Gleichungen für statische Felder sind

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \tag{2.2}$$

Man kann sehen, dass die Gleichungen für statische Felder entkoppeln und sie sich in **Elektrostatik** und **Magnetostatik** aufteilen.

## 2.1 Eletrostatik

Die Grundgrößen der klassischen Mechanik sind die Masse, Länge und Zeit. Eine wichtige Grundgröße in der Elektrostatik ist die elektrische Ladung. Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass Körper in einen elektrischen Zustand versetzt werden können (z.B. können geladene Körper andere geladene Körper anziehen). Dieses Phänomen ist mechanisch nicht erklärbar. Dieser Zustand ist auch auf andere Körper übertragbar, woraus folgt, dass es sich um eine substanzartige Größe handeln muss.

Diese Größe ist die **elektrische Ladung** $q$. Bei der Übertragung fließt ein elektrischer Strom $I$. Die Ladung des Elektrons ist negativ, also $q < 0$. Zudem ist sie additiv, es existiert also die Gesamtladung $Q = \sum_i q_i$. In abgeschlossenen Systemen ist die Summe aus positiven und negativen Ladungen konstant. Die Ladungen sind **gequantelt**, es existiert also eine nicht teilbare Elementarladung $e$, also gilt immer, dass $q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Elektron} &: n = -1 \\ \text{Proton} &: n = +1 \\ \text{Neutron} &: n = 0 \\ \text{Atomkern} &: n = Z. \end{aligned}$$

In der Elektrodynamik wird dieses Prinzip allerdings verallgemeinert. Man führt die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein, also $Q = \int_V \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r$. Für Punktladungen gilt dann $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Befinden sich zwei Ladungen $q_1$ und $q_2$ im Abstand von einem Meter im Vakuum, dann wirkt eine Kraft von

$$F = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8,854}\,\mathrm{N}. \tag{2.3}$$

Dann haben $q_1$ und $q_2$ eine Ladung von $|q_1| = |q_2| = 1\,\mathrm{C}$. Die Elementarladung ist $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

**Stromdichte**

Für bewegte Ladungen existiert die Stromdichte $\vec{j}$. Sie gibt die Ladung pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung an. Betrachte als Beispiel eine homogene Ladungsverteilung von $N$ Teilchen mit Ladung $q$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$, dann ist die Ladungsdichte $\vec{j} = \frac{N}{V} q \vec{v}$. Die Stromstärke $I$ ist dann $I = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}\,(\vec{r})\,\vec{n}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}f$. Die Einheit ist 1 A, was einem Ladungstransport von 1 C in einer Sekunde entspricht.

**Ladungserhaltung**

Die Ladungserhaltung kann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung** beschrieben werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}. \tag{2.4}$$

### 2.1.1 Coulomb'sche Gesetz

Zwei Ladungen $q_1$ und $q_2$ befinden sich im Abstand $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ zum Ursprung. Der Abstand zwischen diesen Ladungen ist $\vec{r}_{12}$. Dieser Abstand soll viel größer sein also die Ausdehnung von $q_1$ und $q_2$. Die Kraft zwischen diesen Ladungen ist

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.5}$$

Sie ist also direkt proportional zu $q_1$ und $q_2$, $|\vec{F}_{12}| \propto |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$, sie wirkt entlang von $F_{12}$. Diese Kraft gilt nur für **ruhende** Ladungen.

**Experimentelle Tatsachen**

Die Proportionalitätskonstante ist $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Das Superpositionsprinzip erlaubt es die Kraft auf mehrere Ladungen zu berechnen

$$\vec{F}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^{n} q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \tag{2.6}$$

### 2.1.2 Das elektrische Feld

Das elektrische Feld, bzw. die Feldlinien, erlauben eine Abstraktion der Kraftwirkung. Für Punktladungen ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \tag{2.7}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho\,(r')\, \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{2.8}$$

Der Integrand kann umgeschrieben werden als

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{2.9}$$

also ist $\vec{E}$ ein Gradientenfeld des skalaren Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}). \tag{2.10}$$

Die Äquipotentialflächen sind konstant, also $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$. Die Coulomb–Kraft ist konservativ $\operatorname{rot} q\vec{E} = 0$. Da die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ist das Potential $V(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$.

Das Linienintegral über $\vec{E}$ ist wegabhängig

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\,\mathrm{d}\vec{r}' = U(\vec{r},\vec{r}_0). \tag{2.11}$$

Für $n$ Punktladungen gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\sum_{j=1}^n q_j\delta(\vec{r}'-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n q_j\delta(\vec{r}-\vec{r}_j). \tag{2.12}$$

### 2.1.3 Beispiel: Homogen geladene Kugel

Der Ursprung wird in das Zentrum der geladenen Kugel mit Radius $R$ gelegt. Eine Probeladung befindet sich im Abstand $\vec{r}$ zum Zentrum. Die Ladungsdichte der Kugel ist

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}'| = r' \le R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2.13}$$

Das Potential ist dann

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{K}(R)} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' && (2.14)\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r'^2\,\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi' \int_0^\pi \sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^R r'^2\,\mathrm{d}r'\, \frac{1}{rr'}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}\Big|_0^\pi\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R r'\,\mathrm{d}r'\,[|r+r'|-|r-r'|]\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R \mathrm{d}r' \begin{cases} 2rr' & , r\le r' \\ 2r'^2 & , r > r' \end{cases}. && (2.15)
\end{aligned}$$

Für $\vec{r}$ außerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r > R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R 2r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{2.16}$$

Für $\vec{r}$ innerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r < R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\left[\int_0^r 2r'^2\,\mathrm{d}r' + \int_r^R 2rr'\,\mathrm{d}r'\right] = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\left[\frac{2r^3}{3} + r\left(R^2 - r^2\right)\right] \tag{2.17}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)\frac{1}{2R^3}. \tag{2.18}$$

Das elektrische Feld außerhalb ($r > R$) bzw. innerhalb ($r < R$) ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R^3}\vec{\nabla}\left(3R^2 - r^2\right) \tag{2.19}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$= \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{2.20}$$

## 2.2 Mittlere Quelldichte und Satz von Gauss

Sei ein Volumen mit den Kanten $\Delta x, \Delta y$ und $\Delta z$. Der Mittelpunkt ist $\vec{r}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Die Flächennormalen sind $\Delta\vec{f}_1, \ldots, \Delta\vec{f}_6$ ($\vec{f}_1$ zeigt entlang der $\Delta x$–Achse)

$$\Delta\vec{f}_1 = \Delta y\Delta x\,\vec{e}_x = -\Delta\vec{f}_2 \tag{2.21}$$

$$\Delta\vec{f}_3 = \Delta x\Delta z\,\vec{e}_y = -\Delta\vec{f}_4 \tag{2.22}$$

$$\Delta\vec{f}_5 = \Delta x\Delta y\,\vec{e}_z = -\Delta\vec{f}_6. \tag{2.23}$$

Das elektrische Feld, welches den Quader durchsetzt ist

$$\oint \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = \iint \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left[E_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - E_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\right] \tag{2.24}$$

$$+ \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\left[E_y\left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - E_y\left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z\right)\right] \tag{2.25}$$

$$+ \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left[E_z\left(x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) - E_z\left(x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)\right]. \tag{2.26}$$

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung (da $\Delta x, \Delta y$ und $\Delta z$ klein sind),

$$= \int \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y, z)\,\Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right) \tag{2.27}$$

$$+ \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}(x, y_0, z)\,\Delta y + \mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right) \tag{2.28}$$

$$+ \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}(x, y, z_0)\,\Delta z + \mathcal{O}\left(\Delta z^3\right)\right). \tag{2.29}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f}=\partial x E_x\left(x_0,y_1,z_1\right)+\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right) \tag{2.30}$$

$$+\,\partial y E_y\left(x_2,y_0,z_2\right)+\mathcal{O}\left(\Delta y^2\right) \tag{2.31}$$

$$+\,\partial z E_z\left(x_3,y_3,z_0\right)+\mathcal{O}\left(\Delta z^2\right). \tag{2.32}$$

Der Limes von $\Delta V\to 0$ gibt dann

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f}=\operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}_0\right). \tag{2.33}$$

Beliebige Volumina können mit Quadern ausgeschöpft werden. Flächenintegrale über gemeinsame Grenzflächen heben sich auf. Am Ende bleibt nur die äußere Grenzfläche übrig. Damit ist der Satz von GAUSS

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f}=\int_V\operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}V. \tag{2.34}$$

Wendet man diesen Satz auf die Elektrostatik an, folgt

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_{S(V)}\mathrm{d}\vec{f}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{2.35}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_{S(V)}\mathrm{d}\vec{f}\left(-\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \tag{2.36}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_V\mathrm{d}^3r\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{2.37}$$

Es gilt $\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$. Damit kann geschrieben werden

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_V\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}V \tag{2.38}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r=\frac{1}{\varepsilon_0}Q\left(V\right) \tag{2.39}$$

$$=\int_V\operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r. \tag{2.40}$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich für beliebige Volumina $V$ sagen

$$\int_V\left(\operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)-\frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}^3r=0. \tag{2.41}$$

Daraus folgen die MAXWELL'schen Gleichungen

$$\operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)=\frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0} \tag{2.42}$$

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f}=\frac{Q\left(V\right)}{\varepsilon_0}. \tag{2.43}$$

Da $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \tag{2.44}$$

### 2.2.1 Integraldarstellung

Für die Integraldarstellung der MAXWELL'schen Gleichungen wird die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{a}\,(\vec{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve $C$ verwendet

$$Z = \oint_C \vec{a}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.45}$$

Sei ein geschlossener Weg in der $xy$–Ebene mit Mittelpunkt $\vec{r}_0$. Die Fläche ist $F = \Delta x \Delta y$ und die Normale $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$\begin{aligned}
Z &= \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} \left[a_x\left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - a_x\left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\right]\,\mathrm{d}x && (2.46)\\
&+ \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left[a_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z_0\right) - a_y\left(y + \frac{\Delta y}{2}, y, z_0\right)\right]\,\mathrm{d}y && (2.47)\\
&= \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} \left[-\partial_y a_x\,(x, y_0, z_0)\,\Delta y + \mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right]\,\mathrm{d} && (2.48)\\
&= \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left[-\partial_x a_y\,(x_0, y, z_0)\,\Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right]\,\mathrm{d}. && (2.49)
\end{aligned}$$

Betrachtet man dann die Fläche

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{Z}{F} &= \left(\partial_x a_y\,(\vec{r}_0) - \partial_y a_x\,(\vec{r}_0)\right) && (2.50)\\
&= \left(\operatorname{rot}\vec{a}\,(\vec{r}_0)\right)_z && (2.51)
\end{aligned}$$

# 3 Delta–Distribution

$$\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) = 0\,\forall\vec{r} \neq \vec{r}_0. \tag{3.1}$$

$$\int_V \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\,\mathrm{d}^3r = \begin{cases} 1 & ,\vec{r}_0 \in V \\ 0 & ,\vec{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\int_V f\left(\vec{r}\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\,\mathrm{d}^3r = \begin{cases} f\left(\vec{r}_0\right) & ,\vec{r}_0 \in V \\ 0 & ,\vec{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{3.3}$$

# 4 Flächenintegrale

Sei die Fläche $\mathcal{F} := \{\vec{r}\,(u,v)\,|\,(u,v) \in D\}$. Der Normalenvektor zur Fläche ist $\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}\vec{a} \times \mathrm{d}\vec{b}$, mit

$$\mathrm{d}\vec{a} = \vec{r}\,(u, v + \mathrm{d}v) - \vec{r}\,(u,v) \approx \partial_v \vec{r}\,(u,v)\;\mathrm{d}v \tag{4.1}$$

$$\mathrm{d}\vec{b} = \vec{r}\,(u + \mathrm{d}u, v) - \vec{r}\,(u,v) \approx \partial_u \vec{r}\,(u,v)\;\mathrm{d}u \tag{4.2}$$

$$\mathrm{d}\vec{f} = \partial_v \vec{r}\,(u,v) \times \partial_u \vec{r}\,(u,v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4.3}$$

Die Vektoren $\partial_v \vec{r}$ und $\partial_u \vec{r}$ spannen die Tangentialebene in $\vec{r}\,(u,v)$ auf.

Der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{a}\,(\vec{r})$ durch eine Fläche $S$, bzw. eine geschlossene Fläche $S\,(V)$ mit $\mathrm{d}\vec{f}$ als Flächennormale ist gegeben durch

$$\varphi_S\,(\vec{a}) = \int_S \vec{a}\,(\vec{r})\;\mathrm{d}\vec{f} = \int_S \vec{a}\,(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,(\vec{r})\;\mathrm{d}f \tag{4.4}$$

$$\varphi_{S(v)}\,(\vec{a}) = \oint_{S(V)} \vec{a}\,(\vec{r})\;\mathrm{d}\vec{f} = \oint_{S(V)} \vec{a}\,(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,(\vec{r})\;\mathrm{d}f. \tag{4.5}$$

## 4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugel mit dem Radius $R$, dann sind die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = R\vec{e}_\theta \qquad\qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi. \tag{4.7}$$

Das Flächenelement ist dann

$$\mathrm{d}\vec{f} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R^2\sin\theta\,\vec{e}_r \tag{4.8}$$