

# Notizen | math341

Jonas Wortmann

October 13, 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>2</b>
1.1	Komplexe Zahlen als Matrizen . . . . .	2
1.2	Polarkoordinaten . . . . .	3
1.2.1	Potenzen . . . . .	3
1.2.2	Beispiel . . . . .	4

# 1 Komplexe Zahlen

Die **komplexen Zahlen** sind alle Terme der Form  $x + yi$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $i$  ist die **imaginäre Einheit**, mit  $i^2 = -1$ . Die Menge der komplexen Zahlen ist  $\mathbb{C} := \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

Die komplexen Zahlen können auch als eine Ebene aufgefasst werden,  $x + yi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Die Gleichheit ist definiert als,  $x + yi = a + bi \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$ .

Folgende Operationen sind definiert

- $(x + yi) + (a + bi) := (x + a) + (y + b)i$
- $(x + yi) \cdot (a + bi) := xa + xbi + yai + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$ .

Sei  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ . Dann ist die **komplex konjugierte** Zahl  $\bar{z} := x - yi$ . Praktisch ist dann,  $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$ . Zudem ist die **Norm** einer komplexen Zahl  $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl  $z = x + yi \neq 0 + 0i$  ist  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - yi)$ . Folgende Rechenregeln sind gültig

- Kommutativität:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  und  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativität:  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$  und  $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Distributivität:  $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- Kehrwertregel:  $\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$
- Konjugation:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  und  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$  ist ein Körper, der  $\mathbb{R}$  enthält.

## 1.1 Komplexe Zahlen als Matrizen

$$[(x + yi)(a + bi)]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Eine komplexe Zahl kann also als Matrix dargestellt werden

$$[x + yi]_{\mathbb{R}^2 \times 2} := \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Es gilt dann

$$[z_1 \cdot z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^2 \times 2} \cdot [z_2]_{\mathbb{R}^2} \quad (1.3)$$

$$[z_1 + z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^2 \times 2} + [z_2]_{\mathbb{R}^2} \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^2 \times 2} = [z]_{\mathbb{R}^2 \times 2}^{-1}. \quad (1.5)$$

$$\text{Also } \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbb{C} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jede Matrix  $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  ist das Produkt einer Drehung  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  und einer Streckung  $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ .

Für jede komplexe Zahl  $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , gibt es eindeutige  $r > 0, \theta \in [0, 2\pi) : z = r(\cos \theta + \sin \theta i)$ .

$$\text{Hier ist } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|z\| \text{ und } \theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & ; x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 < y \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & ; x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & ; x = 0 > y \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & ; y < 0 < x \end{cases}$$

## 1.2 Polarkoordinaten

Die komplexen Zahlen können in **Polarkoordinaten** dargestellt werden

$$\mathbb{C} \ni z = re^{i\theta} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + \sin \theta i, \quad (1.6)$$

mit  $r > 0$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Die Eindeutigkeit von  $r$  lässt sich zeigen durch

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|re^{i\theta}\| = \|r\| \underbrace{\|e^{i\theta}\|}_{=1} = r. \quad (1.7)$$

Die Eindeutigkeit von  $\theta$  lässt sich zeigen durch

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Die Multiplikation ist definiert durch

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}; \quad (1.9)$$

und der Kehrwert

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)}. \quad (1.10)$$

### 1.2.1 Potenzen

Wird eine komplexe Zahl potenziert, gilt

$$k \in \mathbb{Z} : z^k = r^k e^{(i\theta)^k} = r^k e^{i(k\theta)}. \quad (1.11)$$

### 1.2.2 Beispiel

$$(1 + i)^{100}. \quad (1.12)$$

In Polarkoordinaten ist  $1 + i$ ,

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \theta = \arg(1 + i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \quad 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (1.13)$$

Die Potenz ist dann

$$\begin{aligned} (1 + i)^{100} &= \sqrt{2}^{100} e^{i(100\frac{\pi}{4})} \\ &= 2^{50} e^{i25\pi} \\ &= 2^{50} e^{i\pi} \\ &= -2^{50}. \end{aligned} \quad (1.14)$$