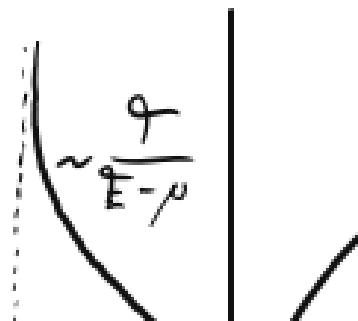


$C(\varepsilon)$

measured  
Bosons



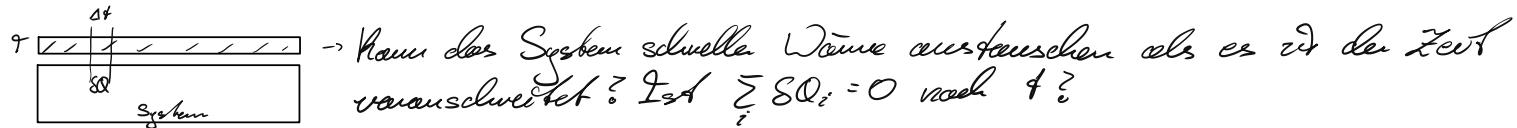




reversibel; exg. interne Zustandsänderung

$\Leftrightarrow \delta Q = 0 \Rightarrow$  zeitunabhängig

Dann ist der Prozess reversibel, wenn die aufgenommene Wärme wieder zurückgegeben werden: Wenn also keine Wärme aufgenommen wird, dann ist der Prozess immer reversibel  
 $\Leftrightarrow$  Zeitraum so klein, dass  $\delta Q = 0 \Rightarrow$  reversibel



irreversibel: Descriptiv Prozess der Wärme abgeben (z.B. Kühlung, endliche Zeit,...)

unabbrechbar: irreversibel < reversibel

$\Leftrightarrow$  Bei irrev. ist der Anteil  $Q$  der aus  $T_1$  extrahiert und in  $T_2$  umgesetzt und kleiner als der Optimale.

$$\eta^{\text{irrev.}} = 1 - \frac{18Q_{34}}{8Q_{12}} < \eta^{\text{rev.}} = \eta^c = 1 - \frac{q_c}{T_1}$$

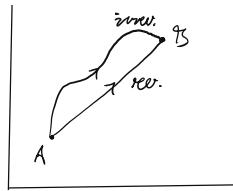
erreicht durch

irrev. Prozesse

wahl = 0 (und bei rev.)

$$\Leftrightarrow \frac{18Q_{34}}{T_1} - \frac{8Q_{12}}{T_1} < 0$$

$$\Rightarrow \oint \frac{\delta Q^{\text{irrev.}}}{T} < 0 \quad \begin{matrix} *S, \text{ da } S \text{ un def. auf} \\ \text{rev. Pfaden} \end{matrix}$$



$$C = \int_A^B \frac{\delta Q^{\text{irrev.}}}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T} < 0$$

$$\Rightarrow C: \int_A^B \frac{\delta Q^{\text{irrev.}}}{T} < \int_A^B \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T} \stackrel{!}{=} \Delta S$$

$S$  ist unabhängig vom Weg

V rev. Pfad

$$\text{Dre rev.: } \int_B^A \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T} = - \int_A^B \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T}$$

V rev. Pfad 'C': In einem therm. isolierten System ( $\delta Q^{\text{irrev.}} = 0$ ) kann die Entropie  $S$  bei einer Zustandsänderung nicht abnehmen, da  $\Delta S > \int_A^B \frac{\delta Q^{\text{irrev.}}}{T} = 0$  &  $\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q^{\text{rev.}}}{T} = 0$ .

22. 10.

## Degressionen

- > Thermodynamischer Zustand: beschrieben durch makroskopische Variablen (NICHT: Orte, Impulse)
- > Zustandsvariablen: Größen des therm. Zustand beschreiben (NICHT den Prozess)
- > Gleichgewichtszustand: Zustand nach  $t \rightarrow \infty$
- > Zustandsgleichung:  $F(T, N, p, V, \dots) = 0$
- > extensive Größe:  $A(\lambda V) = \lambda A(V)$  „Wenn das Volumen um  $\lambda$  vergrößert wird, dann vergrößert sich auch  $A$  um  $\lambda$ “
- > intensive Größe:  $X(\lambda V) = X(V)$  „Wenn das Volumen um  $\lambda$  vergrößert wird, dann ändert sich  $X$  nicht“

$$1. \text{Hauptsatz: } dU = \underbrace{\delta Q_i}_{\substack{\text{variiert nach} \\ \text{Arbeit am System}}} + \underbrace{\nu dV}_{\substack{\text{variiert nach} \\ \text{Arbeit am äußeren}}}$$

(chemisch tot.)  
Zugpendlung  
äußeren Feld

$$- \underbrace{\nu dV}_{\substack{\text{variiert nach} \\ \text{Arbeit am System}}} + \underbrace{\nu dV}_{\substack{\text{variiert nach} \\ \text{Arbeit am äußeren}}}$$

$$- T_S dT$$

↳ Konvention: Erwärmung als Beitrag auf das System.  
 $dU$  ist eine fkt. extensive Größe.

$$2. \text{Hauptsatz: } \int^2 dS \geq 0$$

## Energie

$S$  nimmt im Gleichgewichtszustand ein absolutes Maximum an.



$$3. \text{Hauptsatz: } \lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0$$

## 2. Fundamentalsatz der Thermodynamik

$$dU = \overbrace{T dS}^{S_Q} - \nu dV + \mu dN$$

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{\mu}{\nu} dV - \frac{\partial \mu}{\partial N} dN$$

Da alle Differenzen verschwinden:  $(\partial_U S)_{\nu, N} = \frac{1}{T}$   
 $(\partial_V S)_{U, N} = \frac{\mu}{\nu}$   
 $(\partial_N S)_{U, V} = -\frac{\partial \mu}{\partial N}$

$\Rightarrow S$  ist eine extensive Größe

$$\Leftrightarrow S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \frac{d}{d\lambda} (\lambda S(U, V, N))$$

$$\Leftrightarrow \partial_U S U + \partial_V S V + \partial_N S N = S$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu}{T} U + \frac{\mu}{\nu} V - \frac{\partial \mu}{\partial N} N = S$$

$$\Rightarrow U = TS - \nu V + \mu N \quad (\text{Verallgemeinerung des 1. H.S.)}$$

Zettel:  $\mu = N k_B T$   
 > ableiten  $U = \frac{3}{2} k_B T$

Freie Energie  $S_Q = 0$

12. 11.

Eurenble-Theorie: Ensemble ist Zustand bei dem alle Mikrozustände derselben Weite in (gewissen) Zustandsgrößen hat.  
 ↳ Menge an Zuständen

3 Arten von Ensembles

	fest	beliebig	
→ mikrokanonisch:	$E_n, N$	-	↔ ideal
→ kanonisch:	$N$	$E$	↔ Wärmeverlust
→ großkanonisch:	-	$E_n, N$	↔ Wärme- & Teilchenaustausch

Theoretische Gleichgewicht für isoliertes System: mikrokanonisches Ensemble

$$E \text{ ist } W(u) = 0 \vee E_n + E = \text{const.} \Rightarrow W(u) = ?$$

→ Im Gleichgewicht: Maximierung des Entropies mit Nebenbed.

$$\sum_{\substack{u \\ E_u = E}} W(u) = 1 =: \sum_n' W(u)$$

Entsprechend Funktion der Wahrscheinl.-Verteilung

$$S\{W\} = -k_B \sum_n' W(u) \ln(W(u))$$

$$\text{Nebenbed: } \sum_n' W(u) = 1$$

$$\Rightarrow S_m\{W\} = S\{W\} + \lambda \left( \sum_n' W(u) - 1 \right)$$

Maximum von  $S_m$  aus:

$$\partial_\lambda S_m = 0 = \sum_n' W(u) - 1 \quad \text{Nebenbed.}$$

$$\tilde{\partial}_{x_1} S_m = 0 = -k_B \ln(W(u)) - k_B + \lambda$$

$$\Rightarrow W(u) = e^{-1+\lambda/k_B} = \text{const.}$$

↪  $\lambda$  muss so gewählt werden, dass  $\sum_n' W(u) = 1$

$$\Rightarrow W(u) = \frac{1}{\Omega(E)} \quad \sim \sum_n' W(u) = \Omega(E) \frac{1}{\Omega(E)} = 1$$

· Phasenraumsvolumen

· Anzahl der (Vielteilchen-)Zustände mit gewisser Energie  $E$

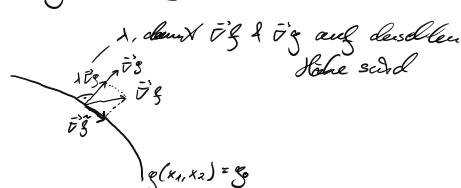
· Entartungsgrad

Fürschub: Lagrange-Multiplikatoren

Seien  $g$  &  $g'$  zwei Fkt. von  $x_1$  &  $x_2$ .

→ Maximum von  $g$  entlang  $g'$

$$\vec{\nabla} g = 0 : g \text{ lokales Maximum}$$



$$\rightarrow \tilde{g}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) - \lambda [g(x_1, x_2) - g_0]$$

→ Maximum mit Nebenbed.  $\vec{\nabla} \tilde{g} = 0$

Dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(u) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)} = \text{const.}, & \text{falls } E_n = E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S(E) = -k_B \sum_n' W(u) \ln(W(u)) = k_B \ln(\Omega(E))$$

15. 11.  
Bedeutung (Häufigkeit  $\omega_c(u)$ ), Ergebnis:  $\omega_c(u) = \frac{1}{Z_c} e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$ ;  $Z_c = \sum_u e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$

Zusammenhang Statistik & Thermodynamik aus Häufigkeit:  $\gamma (\sum_u E_u \omega_c(u) - \langle E \rangle)$   
→ Man definiert  $\tilde{T} = \beta = \frac{1}{\gamma}$

Inf. Änderung:  $\tilde{T} \rightarrow \tilde{T} + d\tilde{T} \Rightarrow d\omega_c(u)$

Änderung der mittleren Energie:  $d\langle E \rangle = \sum_u E_u d\omega_c(u)$

Änderung der Entropie:  $dS = -k_B \sum_u (\ln(\omega_c(u)) + 1) d\omega_c(u)$   
 $= -k_B \sum_u (-\frac{E_u}{k_B \tilde{T}} - \ln Z_c + 1) d\omega_c(u)$

↳ Differenz vor & nach der Änderung:  $\sum_u d\omega_c(u) = 0$   
 $\Rightarrow -\ln Z_c + 1 = 0$

$$= k_B \sum_u \frac{E_u}{k_B \tilde{T}} d\omega_c(u)$$

$$= \frac{1}{\tilde{T}} d\langle E \rangle \quad \begin{matrix} 1. \text{ Hauptsatz} \\ \text{Thermo.} \end{matrix} \Rightarrow \tilde{T} = T$$

↳ (alle inneren Energien)

Zusammenhang von Freier Energie

$$F = (1 - TS) = \langle E \rangle - TS  
= \sum_u E_u \omega_c(u) + k_B T \sum_u \omega_c(u) \ln \left( \frac{e^{-\frac{E_u}{k_B T}}}{Z_c} \right)  
= -k_B T \ln Z_c$$

Verbreiterung der Wahrscheinl.:  $\omega_c(u) = \frac{1}{Z_c} e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$  : Boltzmann-Verteilung  
 $Z_c = \sum_u e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$  : Zust.-Summe  
 $F = -k_B T \ln Z_c$  : Freie Energie  
 $\Rightarrow Z_c = e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$  : Erzeugende Funktion

Statisches thermodyn. System,  $c_0 = 0$

$$c_V = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \sum_u E_u \frac{e^{-\frac{E_u}{k_B T}}}{Z_c}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{Z_c} \right) = -\frac{1}{Z_c^2} \sum_u \frac{E_u}{k_B T^2} e^{-\frac{E_u}{k_B T}} = \frac{1}{k_B T^2} \frac{\langle E \rangle}{Z_c}$$

$$\Rightarrow c_V = \frac{1}{k_B T^2} \sum_u (E_u^2 - E_u \langle E \rangle) \frac{e^{-\frac{E_u}{k_B T}}}{Z_c}$$

$$= \frac{1}{k_B T^2} (\langle E_u^2 \rangle - \langle E \rangle^2)$$

$$= \frac{1}{k_B T^2} \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle \geq 0$$

thermodynam. Gleichgewicht mit Energied- & Teilchenzahlauswechsel  
 -> großbautesches Ensemble

Zwangseld:  $\sum_u \omega(u) = 1$

$$\sum_u E_u \omega(u) = \langle E \rangle = \text{const.}$$

$$\sum_u N_u \omega(u) = \langle N \rangle = \text{const.}$$

$$\text{Maximalung: } S_G = \sum_u (-k_B \omega(u) \ln(\omega(u)) + \lambda \omega(u) - \gamma E_u \omega(u) + \xi N_u \omega(u)) - \lambda + \gamma \langle E \rangle - \xi \langle N \rangle$$

↳ Es eignen sich 4 Bedingungen:  $\partial_x S = \partial_y S = \partial_\xi S = \partial_{\lambda} S = 0$

Lösung folgt aus dem Gl.

Fan den Parameter aus der anderen Gleichungen

$$\Rightarrow \text{Dann ist die Wahrscheinl. des groÙ. Potentials: } \omega_G(u) = \frac{1}{Z_G} e^{-\frac{\gamma E_u - \xi N_u}{k_B T}}$$

$$Z_G = \sum_u e^{-\frac{\gamma E_u - \xi N_u}{k_B T}}$$

Zusammenhang zw. Thermodynamik

$$\frac{\gamma}{k_B T} = \beta = \frac{1}{k_B T}, \frac{\xi}{k_B T} = \frac{\mu}{k_B T}$$

Anderung:  $\tilde{T} \rightarrow \tilde{T} + d\tilde{T}, \tilde{\rho} \rightarrow \tilde{\rho} + d\tilde{\rho}, E_u \text{ unverändert}$

$$d\langle E \rangle = \sum_u E_u d\omega_G(u)$$

$$d\langle N \rangle = \sum_u N_u d\omega_G(u)$$

$$\Rightarrow dS = -k_B \sum_u \left( -\frac{E_u}{k_B \tilde{T}} + \frac{\tilde{\rho}}{k_B \tilde{T}} N_u - \ln Z_G - 1 \right) d\omega_G(u); \sum_u d\omega_G(u) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_u E_u d\omega_G(u) = d\langle E \rangle = \tilde{T} dS + \tilde{\rho} d\langle N \rangle \\ \Rightarrow \tilde{T} = T \text{ & } \tilde{\rho} = \rho^{\text{chem. Potentiel}}$$

$$\omega_G(u) = \frac{1}{Z_G} e^{-\frac{E_u - \mu N_u}{k_B T}}$$

$$Z_G = \sum_u e^{-\frac{E_u - \mu N_u}{k_B T}} \quad \text{groÙ. Zustandsumme}$$

Summe über alle Zustände,  
 nicht nur alle Energien

$$\text{groÙ. Potentiel: } \Omega = \langle E \rangle - TS - \mu V \\ = \sum_u \omega_G(u) (E_u - \mu N_u + k_B T \ln \omega_G(u)) \\ = -k_B T \ln Z_G + \frac{\mu V}{k_B T}$$

13. 11.

Was ist die Energie des Systems  
in Abhängigkeit der Variablen?

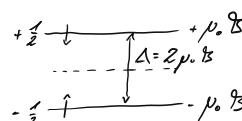
Einsatz	Potential	Techn. Güte Variablen
mitkonstante $\omega(u) = \frac{1}{Z(E)} e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$ , $E_u = E = \text{const.}$	$G = E = \text{const.}$	$S, V$
konstante $\omega(u) = \frac{1}{Z_c} e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$ $Z_c = \sum_u e^{-\frac{E_u}{k_B T}}$ $F = -k_B T \ln Z_c$	$F = \langle E \rangle - TS$	$T, V$
großkanonisch $\omega(u) = \frac{1}{Z_G} e^{-\frac{E_u - \mu U_u}{k_B T}}$ $Z_G = \sum_u e^{-\frac{E_u - \mu U_u}{k_B T}}$ $G = -k_B T \ln Z_G$	$G = \langle E \rangle - TS - \mu U$	$T, \mu$

In thermodynamischen Limes liegen alle Ensembles der gleichen physikalischen Ergebnisse. Die Ensembles sind im Limes allerdings nicht gleich, da sie unterschiedlich über verschiedene Zustände summieren.

Ideale Systeme: mittl. WD-Bereiche

2-Dreien-System (Spin  $\frac{1}{2}$ ); kanonische Behandlung

$\rightarrow$  Spin  $\frac{1}{2}$  im Magnetfeld:  $H_i = -g \mu_0 \vec{\sigma}_i \cdot \vec{B} = -2 \mu_0 s_{x,i} \vec{B}$ ,  $i \in [1, N]$ ,  $N \gg 1$ ,  $s_{x,i} = \pm \frac{1}{2}$



Ziel:  $Z_c$  berechnen

$$\rightarrow E_u = \sum_{i=1}^N E_i, \quad Z_c = \sum_{s_1=\pm\frac{1}{2}} \sum_{s_2=\pm\frac{1}{2}} \dots \sum_{s_N=\pm\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_1 + E_2 + \dots + E_N}{k_B T}} \quad \begin{array}{l} \text{Summe über alle möglichen Zustände eines Teilchens} \\ \text{über alle } N \text{ Teilchen} \end{array}$$

$$\rightarrow E_u = \sum_{i=1}^N E(s_i) = \sum_{i=1}^N (-2 s_i \mu_0 \vec{B})$$

$$\Rightarrow Z_c = \sum_{s_1=\pm\frac{1}{2}} \sum_{s_2=\pm\frac{1}{2}} \dots \sum_{s_N=\pm\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_1(s_1)}{k_B T}} e^{-\frac{E_2(s_2)}{k_B T}} \dots e^{-\frac{E_N(s_N)}{k_B T}}$$

$$= \prod_{i=1}^N \sum_{s_i=\pm\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_i(s_i)}{k_B T}}$$

$$= \left( \sum_{s_i=\pm\frac{1}{2}} e^{-\frac{E_i(s_i)}{k_B T}} \right)^N \quad \begin{array}{l} \text{Hier wird über alle möglichen Zustände EINES Teilchens} \\ \text{summiert} \end{array}$$

$$= (Z_{c,1})^N, \quad Z_{c,1} = \sum_{s_i=\pm\frac{1}{2}} e^{-\frac{-2 s_i \mu_0 \vec{B}}{k_B T}} = 2 \cosh \frac{2 \mu_0 \vec{B}}{2 k_B T} \quad \begin{array}{l} \text{Für } N \text{ Teilchen werden} \\ N \text{ Summen gebraucht} \end{array}$$

Wenn die Gesamtenergie die Summe der Energien der einzelnen Teilchen ist, dann faktoriert die kanon. Zustandssummme in die  $N$ -te Potenz der 1-Teilchen-Zustandssummme.

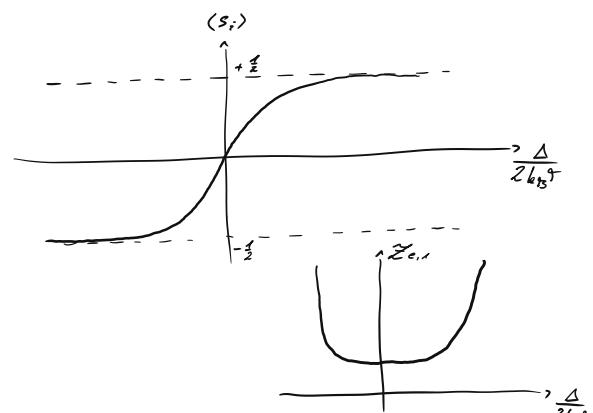
## Nichtlineare Spur und Temperaturen T

$$\langle s_i \rangle = \sum_{s_1 \in \{ \pm \}} \sum_{s_2 \in \{ \pm \}} \dots \sum_{s_N \in \{ \pm \}} s_i \omega_i(s_1) \omega_i(s_2) \dots \omega_i(s_N)$$

$$= \sum_{s_i \in \{ \pm \}} s_i e^{-\frac{2 \mu_0 B}{k_B T}} \frac{1}{Z_{c,i}}$$

$$= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2 \mu_0 B}{k_B T}\right)$$

nu das i-te Teilchen trägt einen Beitrag ( $\sim s_i$ ) da alle  $\omega_i$  kollabieren.



$$\text{Magnetisierung: } \mathcal{M} = g \mu_B N \langle s_i \rangle = \frac{1}{2} g \mu_B N \tanh\left(\frac{2 \mu_0 B}{k_B T}\right)$$

Thermodynamische Beziehung: therm. Potenzial:  $F = U - TS - \mathcal{M}B$ , da  $dU = TdS - Bd\mathcal{M}$

$$\hookrightarrow \mathcal{M} = (\partial_B F)_T$$

$\uparrow$

(Beziehung mit  $F = -k_B T \ln Z_c$ )

## Spezifische Wärme

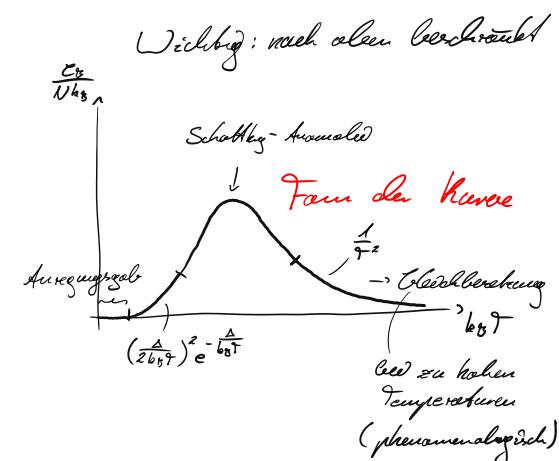
$$F(T) = -k_B T \ln Z_c = -N k_B T \ln Z_{c,1}$$

$$S(T) = -(\partial_T F)_B = N k_B \left[ \ln\left(2 \cosh\left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right)\right) - \frac{\Delta}{2k_B T} \tanh\left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right) \right]$$

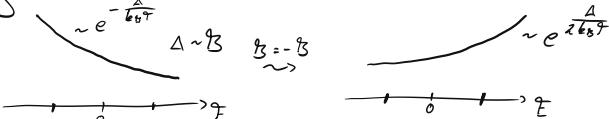
spezifische Wärme bei  $B = \text{const.}$ :  $c_B(T) = (\partial_T S)_B$

$$= T (\partial_T S)_B$$

$$= N k_B \left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right)^2 \frac{1}{\cosh\left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right)}$$



## Systeme mit nach oben beschränktem Energiedispersuum



↪ Umkehrung kann von  $\Delta \rightarrow -\Delta$  als  $T \rightarrow -T$  betrachtet werden

↪ Richtung von Spurssystemen durch Umkehrung des Magnetfeldes

# Harmozischer Oszillator (qm)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \hbar\omega (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \frac{1}{2}), \quad n_i = \alpha_i^\dagger \alpha_i$$

$$E = \sum_{i=1}^N \hbar\omega (n_i + \frac{1}{2})$$

1-Teilchen

$$= \sum_{i=1}^N E^{(i)}$$

$$Z_c = (Z_{c,1})^N = \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E^{(i)}}{k_B T}} \right)^N$$

geman. Reihe

innerer Fall  
bei n. W-W-Tell.

$$= \left( e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \right)^N$$

$$= \left( \frac{1}{2 \sinh(\frac{\hbar\omega}{k_B T})} \right)^N$$

$$\langle E \rangle = \langle E \rangle = N \langle E^{(i)} \rangle$$

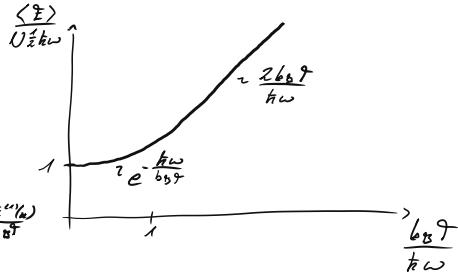
$$\therefore \langle E^{(i)} \rangle = -\partial_T \ln Z_{c,1} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \sum_{n=0}^{\infty} E^{(i)}(n) e^{-\frac{E^{(i)}(n)}{k_B T}}$$

$$\langle E \rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} E^{(i)}(n) \mathcal{W}_i(n)$$

$$= N \sum_{n=0}^{\infty} E^{(i)}(n) \frac{e^{-\frac{E^{(i)}(n)}{k_B T}}}{Z_{c,1}}$$

| Hierzu:  $\frac{e^{-\beta E^{(i)}(n)}}{Z_{c,1}}$

$$= \partial_T \frac{e^{-\beta E^{(i)}(n)}}{Z_{c,1}} \rightarrow \text{Ableitung & Summe vertauschen}$$



22.11.

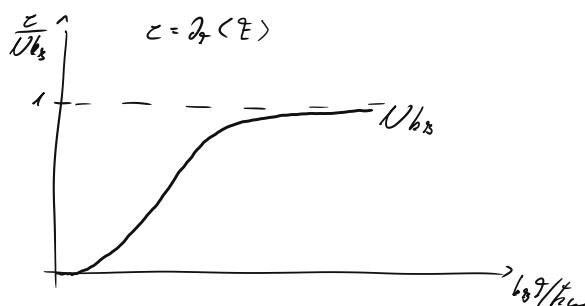
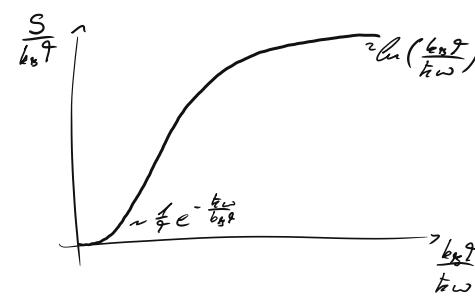
unihar. Oszillatorenquadrat

$$\langle \hat{n}_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n_i \frac{1}{Z_{c,1}} e^{-(\frac{1}{k_B T} \hbar\omega (n_i + \frac{1}{2}))} = -\partial_{\hbar\omega} \ln Z_{c,1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\coth(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1)$$

$$\rightarrow \langle E^{(i)} \rangle = \hbar\omega (\langle \hat{n}_i \rangle + \frac{1}{2})$$

$$\text{Freie Energie: } F = -k_B T \ln Z_c = -N k_B T \ln Z_c = N(-k_B T \ln(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}) + \frac{\hbar\omega}{2})$$

$$\text{Entropie: } S = -N k_B (\ln(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}) - \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1})$$



Gesetzverteilungssatz:  $\mathcal{H} \sim \text{Freiheitsgrad}^2 \Rightarrow$  Beitrag  $\frac{1}{2} k_B$  zur spez. Wärme

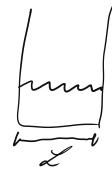
# Das klassische, reelle Gas & das Gibbs-Paradoxon

Gesamtenergi e:  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (\rho_{x_i}^2 + \rho_{y_i}^2 + \rho_{z_i}^2)$

$N$  Teilchen in einem Kasten der Länge  $L$ ;  $V = L^3$

qm:  $Y_{\vec{k}_i}(\vec{x}_i) = \frac{1}{V} e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{x}_i}$ ;  $k_i = \vec{p}_i$

( $\rightarrow$  Quantisierung:  $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{L} (n_{xi} \hat{e}_x + n_{yi} \hat{e}_y + n_{zi} \hat{e}_z)$ ;  $n_{xi,yi,zi} \in \mathbb{Z}$ )



Zustandssumme:

$$Z_c = (Z_1)^{N,d}; \quad d: \text{Dimensionen}$$

$N: \text{Teilchenzahl}$

$$\Rightarrow Z_{c,1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E}{2m} \left( \frac{2\pi k}{L} \right)^2 n^2 \frac{1}{k_B T}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_T^2}{L^2} n^2} \quad | \lambda_T = \frac{2\pi k}{\sqrt{2m k_B T}}$$

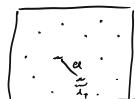
$$\Leftrightarrow k_B T = \frac{1}{2m} \underbrace{\left( \frac{2\pi k}{\lambda_T} \right)^2}_{\text{p eines Teilchens}} \quad \Rightarrow \text{thermische Impuls}$$

mit de-Broglie Wellenlänge  $\lambda_T$

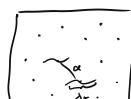
$\lambda_T$  ist die thermische Wellenlänge. Die de-Broglie Wellenlänge eines Teilchens, dessen kinetische Energie  $\frac{(2\pi k)^2}{2m}$  gleich seiner thermischen Energie  $k_B T$  ist.

mittlerer Teilchenabstand:  $\alpha$ ;

$\hookrightarrow \alpha > \lambda_T: \lambda_T \ll \alpha \Rightarrow$  Ort der Teilchen kann sehr gut bis auf eine Wellenlänge bestimmen.



$\alpha < \lambda_T: \lambda_T \gtrsim \alpha \Rightarrow$  Teilchen nicht mehr unterscheidbar, da sich ihre Wellenfkt. aufgrund d. großen Wellenlänge überlappen. Bestimmung bis auf eine Wellenlänge kann kein konkretes Ergebnis liefern.



klassische Zustandssumme:  $(Z_{c,1})^{N,d} = \int dx_1^d \dots \int dx_N^d \int dp_1^d \dots \int dp_N^d e^{-\beta \left( \sum_i \frac{1}{2m} (\rho_{x_i}^2 + \rho_{y_i}^2 + \rho_{z_i}^2) \right)} \frac{1}{(2\pi k)^{3d}}$

$\hookrightarrow$  Normierung des Impulses mit  $\frac{1}{(2\pi k)^d}$  für  $d$ -dim.

$$Z_c = (Z_{c,1})^{V \cdot d}$$

$$Z_{c,1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_1^2}{kT} n^2}$$

Therm. Limes:  $L \rightarrow \infty$ ; Divergenz  $\sum \rightarrow /$  wegen  $L \gg \lambda_1$  (für genügend hohes  $T$ )

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Z_{c,1} = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\left(\frac{u}{\lambda_1}\right)^2} u^2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1} \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow Z_c = \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1} \sqrt{\pi} \right)^{V \cdot d} \quad V = L^d$$

$$\text{Free Energy: } F = -N k_B T \ln \left( \sqrt{\pi}^d \frac{V^d}{\lambda_1^d} \right) = -\frac{d}{2} N k_B T \ln \left( \frac{V^d}{\lambda_1^d} \right) \quad | \Delta = \frac{2\pi^2 k^2}{m \lambda_1^2}$$

$$\text{Entropy: } S = -(d_F)_V = \frac{d}{2} N k_B \ln \left( \frac{V^d}{\lambda_1^d} \right) + \frac{d}{2} N k_B ; \quad S = S(\ln V) \Rightarrow S \text{ ist v. exponen.}$$

$$\text{Intern. Energie: } U = F + TS = \frac{d}{2} N k_B T$$

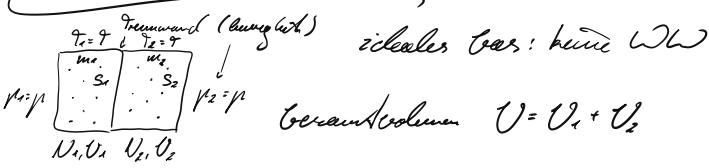
$$\text{spes. Wärme: } c_V = (d_U)_V = T(d_S)_V = \frac{d}{2} N k_B$$

$\hookrightarrow$  In Übereinstimmung mit dem Gleichverteilungssatz

$$\text{Druck: } p = -(d_F)_T = \frac{N k_B T}{V} \Leftrightarrow pV = N k_B T : \text{Zustandsg. des idealen Gases}$$

$$dT = T dS - p dV + p dN$$

## Das Gibbs-P佯adoxon



Eutropia mit Trennwand

$$\begin{aligned} \rightarrow S &= S_1 + S_2 \quad | \quad d=3 \\ &= \frac{3}{2} k_B (2N_1 \ln(\sqrt{\alpha} \frac{V_1'''}{\lambda_{T,1}}) + 2N_2 \ln(\sqrt{\alpha} \frac{V_2'''}{\lambda_{T,2}}) + N_1 + N_2) \end{aligned}$$

Eutropia ohne Trennwand

$$\begin{aligned} \rightarrow S' &= S'_1 + S'_2 \\ &= \frac{3}{2} k_B (2N_1 \ln(\sqrt{\alpha} \frac{V'''}{\lambda_{T,1}}) + 2N_2 \ln(\sqrt{\alpha} \frac{V'''}{\lambda_{T,2}}) + N_1 + N_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S' > S$ , da die Volumina ohne Trennwand größer sind als mit Trennwand.

$S \approx S'$  ist eine gute Annäherung, da  $V_1 \approx V$  &  $V_2 \approx V$ .

Das Eutropia stützt aufgrund der Trennung: Differenzengesetz  $\Delta S = S' - S > 0$

P佯adoxon: identische Gase  $m_1 = m_2 = m$

$$\Delta S = S' - S = \frac{3}{2} k_B (2N_1 \ln((\frac{V_1 + V_2}{V})^{1/3}) + 2N_2 \ln((\frac{V_1 + V_2}{V})^{1/3})) > 0$$

Da aber die Gase identisch sind, kommt es bei Entfernen der Trennwand nicht zu einer Zustandsänderung:  $\tilde{\Delta S} = 0$

$\hookrightarrow$  Die Berechnung zeigt allerdings  $\Delta S > 0$

$\Rightarrow$  Autoren: QT; in den klassischen Statistik nicht Lösbar.

$\Rightarrow$  Problem: Differenzengesetz

Zurück: klassische Annahme: Teilchen von links nach rechts wechselt Zustand

$\hookrightarrow$  ABER: Moleküle bleiben gleich

# Quasiteilchenzustand

Konstruktive Abbildung d. Zustände: Berechnungszahl darstellung  
 Wellengt. eines Vielteilchenzustands:  $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{\text{Permutation}}^{\text{jede Permutation}} \prod_{i=1}^N (\pm 1)^{\alpha_i} \Psi_{\alpha_i}(\vec{x}_i) \dots \Psi_{\alpha_N}(\vec{x}_N)$

jeder  $\alpha_i$  ein Zustand  
 $\alpha_i$ : Quantenzahlen  
 $\alpha_i = \alpha_1, \dots, \alpha_N$   
 P. Ordn. v.  $\alpha_i$ : gerade: +1  
 ungerade: -1  
 Summe über alle Permutationen  
 unterschiedlich

Berechnungszahl darstellung  $n_{\alpha_i}$ : Wie viele Teilchen sind

1-Teilchen-Zustand  $|\alpha_i\rangle$ ,  $i \in \mathbb{N}$   
 N-Teilchen-Zustand bestimmt durch Berechnungszahlen  $n_{\alpha_i}$  von  $|\alpha_i\rangle$   
 $\rightarrow \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = |n_{\alpha_1}, \dots, n_{\alpha_N}\rangle$ : je Rauhstruktur sind die Teilchen nach unterschiedlichen  
 ↳ Symmetrie für Baronen      ↳ Besetzen;  $n_{\alpha_i} = 0, 1$   
 Antisymmetrie für Fermionen      ↳ Fermionen;  $n_{\alpha_i} \in \mathbb{N}$

Betrachte Energie eines Zustands  $|\alpha_i\rangle$  mit Berechnungszahl  $n_{\alpha_i}$

$$\rightarrow E' = n_{\alpha_i} E_{\alpha_i}, \quad H' |\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i} |\alpha_i\rangle$$

$$\text{Zusammengez. E. } E = \sum_{\alpha_i} n_{\alpha_i} E_{\alpha_i}$$

kanonische Erweiterung:  $\sum_{\alpha_i} n_{\alpha_i} = N$   $\wedge$  Wollen  $n_{\alpha_i}$  kann nicht unabhängig gezählt werden

↪ Verwendung der Großkanonischen Ensemble  
 ↪ Möglichkeiten  $n_{\alpha_i}$  zu zählen ist erreichbar

=> Beziehungen N, E

$$\text{Zustandssumme: } Z_G = \sum_{\substack{\alpha_i \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \exp\left(-\frac{E - \mu}{k_B T}\right) = \sum_{\substack{n_{\alpha_i} \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \left(\sum_{\alpha_i} n_{\alpha_i} E_{\alpha_i} - \mu \sum_{\alpha_i} n_{\alpha_i}\right)\right)$$

Das ideale Fermigas:  $n_{\alpha_i} \in \{0, 1\}$

$$Z_G = \sum_{\substack{n_{\alpha_i} \in \{0, 1\} \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \left(\sum_{\alpha_i} n_{\alpha_i} (E_{\alpha_i} - \mu)\right)\right)$$

$$= \prod_{\alpha_i \in \mathbb{N}} \prod_{\alpha_i} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} (n_{\alpha_i} E_{\alpha_i} - \mu)\right)$$

$$= \prod_{\alpha_i \in \mathbb{N}} \left(1 + \exp\left(-\frac{1}{k_B T} (E_{\alpha_i} - \mu)\right)\right) \quad \wedge \text{Salbordanz bzgl. der 1-T-Quasiteilchenzustände}$$

$$= \prod_{\alpha_i} Z_{G,1}$$

$$\Omega = -k_B T \ln Z_G = -k_B T \sum_{\alpha_i} \ln Z_{G,1}(\alpha_i, \mu, T)$$

Mittlere Besetzungszahl

$$\langle n_{\alpha_i} \rangle = \sum_{n_{\alpha_i}=0,1} \nu_{\alpha_i} \omega_0(\{\alpha_i\}) = \sum_{n_{\alpha_i}=0,1} \nu_{\alpha_i} \frac{e^{-\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{k_B T}}}{Z_0(\alpha_i, \mu, T)}$$

Zustand i. Teilchen

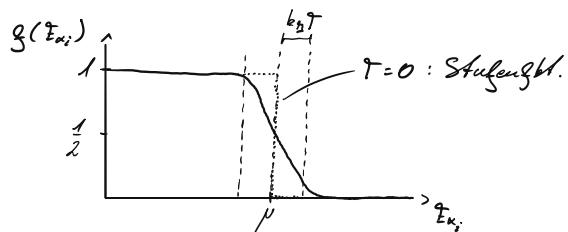
$\stackrel{j+i \Rightarrow \Sigma=1}{\text{da } \omega_0 \text{ normiert}}$

$$= -k_B T \partial_{E_{\alpha_i}} \ln Z_0(\alpha_i, \mu, T)$$

$$= \frac{e^{-\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{k_B T}}} = g(E_{\alpha_i})$$

$\Rightarrow$  Ableitung gibt s.o.

$\leftarrow$  Fermi-Dirac-Verteilung  
(Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand besetzt ist)



Fermi-Energie  $E_F = \mu (T=0)$

$\hookrightarrow$  Energie der zu den Zuständen bereitstehenden Zustände

### Zustandsdichte

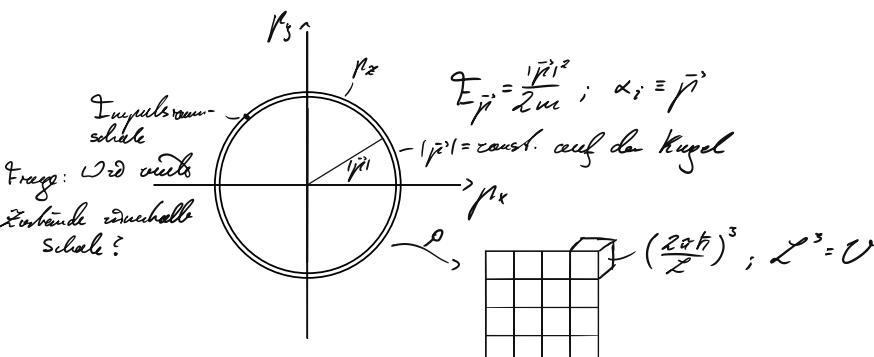
Eigenschaft des Zustands  $\alpha_i$ :

Gesamtzählerzahl:  $\langle N \rangle = \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \langle n_{\alpha_i} \rangle = \sum_{\alpha_i>0}^{\infty} g(E_{\alpha_i}) = \int dE \rho(E) g(E)$

$= \sum_{\alpha_i>0} \delta(E - E_{\alpha_i})$   $\hookrightarrow$  Zustandsdichte

$\delta$ -Peak an jeder Stelle mit Eigenenergi

$\rightarrow$  Zustandsdichte für massive Teilchen in  $d=3$  Dimensionen



$$\rho_0(E) dE = \frac{4\pi p^2 d\vec{p} / V}{(2\pi\hbar)^3} \left| \begin{array}{l} p(E) = \sqrt{2mE} \\ \frac{dp}{dE} = \frac{\partial p}{\partial E} dE = (\frac{\partial p}{\partial E})^{-1} dE \\ = \frac{1}{\sqrt{2mE}} = v \end{array} \right. dE$$

$$= \frac{4\pi p^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dr} dE$$

$$= \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \sqrt{E} dE$$

$$= V \underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty} \sqrt{E} dr}_{= \sqrt{2}\pi^2\hbar^3} = \sqrt{2}\pi^2\hbar^3$$

$$\rho(E) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi} \sigma^2 h^3} V \sqrt{E} = C_s V \sqrt{E}$$

→ Ausdrücken durch die abs. Energie  $E_F$

$$\text{Conzentrationszahl: } \langle N \rangle = \frac{4\pi}{3} V C_s \int_0^{E_F} dE \sqrt{E}$$

$$= 2V C_s \frac{2}{3} E_F^{3/2} = N$$

$$\Leftrightarrow E_F = \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \quad | \frac{N}{V} = n \text{ Teilchenichte}$$

$$\Rightarrow \rho(E) = \frac{3}{4} n \frac{1}{E_F} \sqrt{\frac{E}{E_F}} V$$

Teilchenzahlfunktionen (in Zustand  $|\alpha_i\rangle$ )

$$\langle (n_{\alpha_i} - \langle n_{\alpha_i} \rangle)^2 \rangle = \langle (n_{\alpha_i}^2 + \langle n_{\alpha_i} \rangle^2 - 2n_{\alpha_i} \langle n_{\alpha_i} \rangle) \rangle$$

$$= \langle n_{\alpha_i}^2 \rangle + \langle n_{\alpha_i} \rangle^2 - 2 \langle n_{\alpha_i} \rangle^2$$

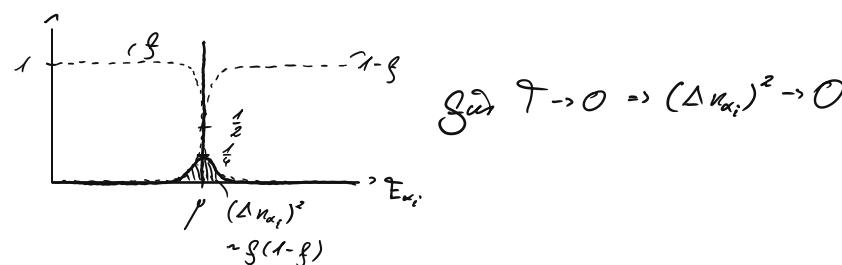
$$= \underbrace{\langle n_{\alpha_i}^2 \rangle}_{=\langle n_{\alpha_i} \rangle \text{ S. Fermium, da } n_{\alpha_i} \in [0,1]} - \langle n_{\alpha_i} \rangle^2$$

$$= \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} g(E_{\alpha_i})(1-g(E_{\alpha_i}))$$

Fiktiv Berichtigungszahlfunktionen

$$\frac{\sqrt{\langle \Delta n^2 \rangle}}{\langle N \rangle} = \frac{\left[ \int dE \rho(E) g(E)(1-g(E)) \right]^{1/2}}{\int dE \rho(E) g(E)} \sim \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Hinweis: Linie  $V \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\sqrt{\langle \Delta n^2 \rangle}}{\langle N \rangle} \rightarrow 0$



weitere Berechnungen

$$\Omega = -k_B T \sum_{\alpha_i} \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{\alpha_i} - \mu)} \right) \quad | g(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

$$= k_B T \sum_{\alpha_i} \ln g(-(\bar{E}_{\alpha_i} - \mu))$$

$$= k_B T \sum_{\alpha_i} \ln (1 - g(\bar{E}_{\alpha_i}))$$

$$= k_B T / dE \rho(E) \ln (1 - g(\bar{E}_{\alpha_i})) \quad | \text{Graf Shannisches Potentiel f. n-fach Fermionen}$$

Funziped:  $d\Omega = -SdT - \mu dV - Ndp$

$$S = -(\partial_T \Omega)_{V,N} = k_B \sum_{\alpha_i} \left( \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{\alpha_i} - \mu)} \right) + \frac{E_{\alpha_i} - \mu}{k_B T} \underbrace{\frac{e^{-\beta(E_{\alpha_i} - \mu)}}{1 + e^{-\beta(E_{\alpha_i} - \mu)}}}_{= g(E_{\alpha_i})} \right) \geq 0$$

$$= -\frac{\Omega}{T} + k_B \sum_{\alpha_i} \beta(E_{\alpha_i} - \mu) g(E_{\alpha_i})$$

Inne Energie:  $\mathcal{U} = \Omega + TS + \mu N = \dots = \sum_{\alpha_i} E_{\alpha_i} g(E_{\alpha_i}) = \langle E_{\alpha_i} \rangle$

spezifische Wärme:  $c_V = (\partial_T S)_{V,\mu} = -T (\partial_T S)_{N,\mu} = -S - (\partial_T \Omega)_{V,\mu} + \sum_{\alpha_i} (E_{\alpha_i} - \mu) \partial_T g(E_{\alpha_i})$

# Spins - Magnetisierung & -Suszeptibilität

$$\Omega_n = \Omega + \nabla B ; \quad d\Omega = -SdT - \rho dV - Vdp - Bd\eta$$

$$\sim \eta = (\partial_B \Omega_n)_{T, V, p} \quad d\Omega_n = + - - + - + - + \eta d\eta$$

→ Magnetisierung durch Ableitung von  $\Omega_n$

direkte Berechnung

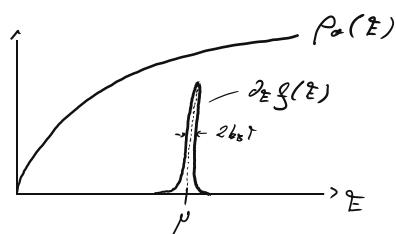
$$\eta = 2 \rho_0 \sum_{\alpha_i} \alpha_i g(E_{\alpha_i}) \quad | \quad \alpha_i \in \left\{ \pm \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}; \alpha_i \in \{\bar{p}, \sigma\}$$

$$= \rho_0 \sum_{\bar{p}} \left( g(E_{\bar{p}, \uparrow}) - g(E_{\bar{p}, \downarrow}) \right) \quad | \quad E_{\bar{p}, \sigma} = \underbrace{E_{\bar{p}}(B=0)}_{\text{quadratische}} - \underbrace{2\rho_0 B}_{\text{Zweiter}} = E_{\bar{p}}(B=0) \pm \rho_0 B$$

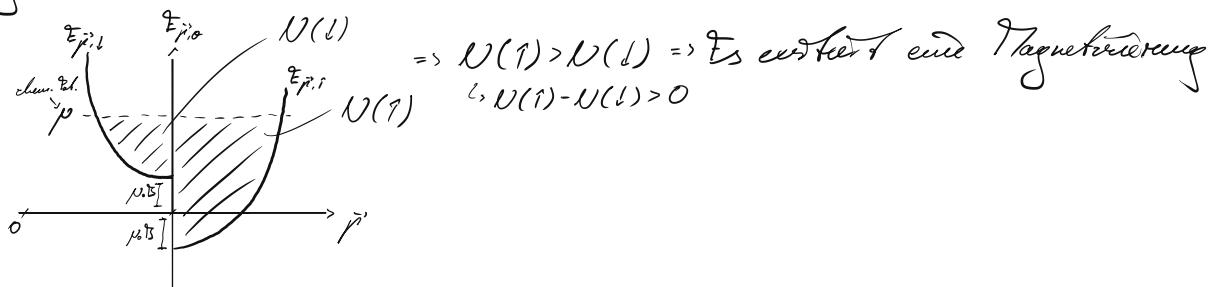
$$= \rho_0 \int dE \rho_0(E) \left( g(E_{\bar{p}, \uparrow}) - g(E_{\bar{p}, \downarrow}) \right)$$

$$= 2\rho_0^2 B \int dE \rho_0(E) (-\partial_E g(E)) \quad \text{mit divergent für } T \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \chi = (\partial_B \eta)_{T, V, p} = 2\rho_0^2 / \int dE \rho_0(E) (-\partial_E g(E))$$



physikalische Größen sind bestimmt durch die Zustandsdichte an d. Fermi-Kante.

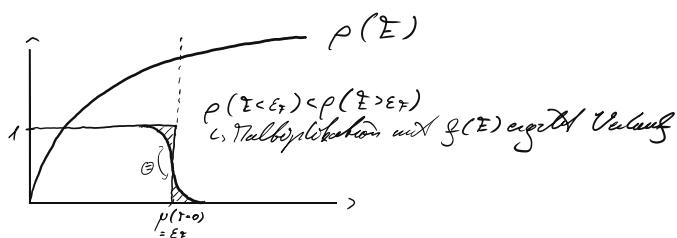


## Chemisches Potential

→ großkanon. Ensemble:  $\mu = \text{const}$  ( $d\mu = 0$ ) → thermodyn. Ableitungen

↪ allerdings unterschiedlich für unterschiedliche  $T$ :  $\mu(T_1) \neq \mu(T_2)$

↪  $N = \langle N \rangle = \text{const} \Rightarrow \mu$  ist Lagrangemultiplikator für  $N = \langle N \rangle$



# TiefTemperaturentwicklung: Sonnenfeld - Entwicklung

→ Idee:  $\Omega(E) \sim \partial_E \Omega(E)$  durch partielle Integration

$$\Omega = -k_B T \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dE \rho_{\sigma}(E) \ln(1 + e^{-\frac{E-\mu}{k_B T}})$$

$$= - \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dE \alpha_{\sigma}(E) \Omega(E)$$

$$= - \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dE \alpha_{\sigma}(E) (-\partial_E \Omega(E))$$

$$|\partial_E \ln(1 + e^{-\frac{E-\mu}{k_B T}}) = -\frac{1}{k_B T} \Omega(E)$$

$$\alpha_{\sigma}(E) = \int_{-\infty}^E dE' \rho_{\sigma}(E')$$

↪ Integrationsgrenzen liegen keinen Bezug

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{-\frac{E-\mu}{k_B T}}) = 0$$

$$\rho_{\sigma}(E < 0) = 0$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dE (E - \mu)^n (-\partial_E \Omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dE E^n \partial_E \left( \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} \right) \text{ Fermi-Int.}$$

$$= 1, n=0$$

$$0, n \text{ ungerade}$$

$$\frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2, n=2$$

$$\frac{\pi^2}{15} (k_B T)^4, n=4$$

$$|\mathcal{C}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE' \alpha_{\sigma}(E') = \int_{-\infty}^E dE' \int_{-\infty}^{E'} dE \rho_{\sigma}(E)$$

↪ sehr langsam mit der Energie steigende Fkt.

⇒ Taylor-Entwicklung um  $E=\mu$

$$\mathcal{C}_{\sigma}(E) = \mathcal{C}_{\sigma}(\mu) + \mathcal{C}'_{\sigma}(\mu)(E-\mu) + \frac{1}{2} \mathcal{C}''_{\sigma}(\mu)(E-\mu)^2 + \mathcal{O}(3)$$

Sobald man  $I_n$  und  $\Omega$  an dem folgt!

$$\Rightarrow \Omega = \sum_{\sigma} \left( -\mathcal{C}_{\sigma}(\mu) - \frac{\pi^2}{6} \rho_{\sigma}(\mu) (k_B T)^2 + \mathcal{O}((k_B T)^4) \right) = -\mu V_{\mu=0}$$

TiefTemperaturverhalten physikalischer Größen mit  $\Omega = 0$

→ chem. Potenzial

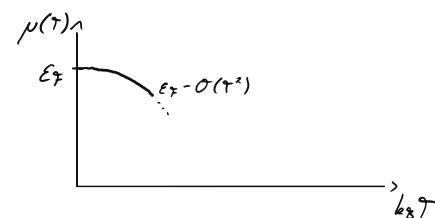
$$\mathcal{N} = -\partial_{\mu} \Omega = 2 \left( \partial_{\mu} \mathcal{C}_{\sigma}(\mu) + \frac{\pi^2}{6} \partial_{\mu} \rho_{\sigma=1,2}(\mu) (k_B T)^2 + \mathcal{O}((k_B T)^4) \right)$$

= const.

$$\Leftrightarrow \mu(\tau) = E_F - \frac{\pi^2}{6} \rho(E_F) \partial_E \rho(E) \Big|_{E=E_F} (k_B T)^2 + \mathcal{O}((k_B T)^4)$$

$$|\partial_{\mu} \mathcal{C}_{\sigma}(\mu) = \alpha(\mu) = \overbrace{\alpha(E_F)}^{\lim_{T \rightarrow 0} \mu = E_F} + \alpha'(E_F)(\mu(\tau) - E_F) + \dots$$

$$= \alpha(E_F) + \rho(E_F)(\mu(\tau) - E_F) + \dots$$



spur. Wärme

$$\rightarrow S = -(\partial_T \Omega)_{V, \mu}, \mu \text{ fest, aber } \mu = \mu(T)$$

$$= 2 \frac{\pi^2}{3} \rho(E_F) k_B T \underset{\text{extensiv}}{\sim} V$$

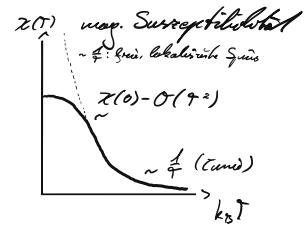
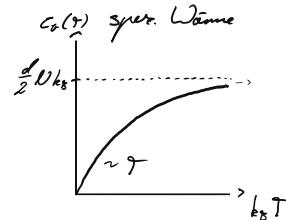
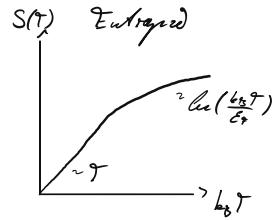
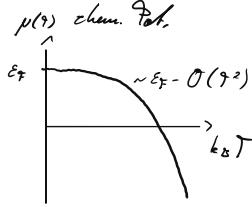
$$C_V = T (\partial_T S)_{V, \mu} = S \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0, \text{ da } S \sim T \text{ ist der TiefTemperaturrest.}$$

linear gegen 0

Fermi-Gas: Hochtemperatur Grenzfall (ganzes V. Schlf)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \quad \underset{T \rightarrow \infty}{\underline{\mu(T) \sim -k_B T \ln(\frac{1}{e^{-\mu}})}}, \quad = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \rightarrow \text{klassische stat. Grenzfall}$$

T-Abhängigkeit phys. Größen: Fermi-Gas



Übergang QM → cl.:  $\lambda_T = \frac{2\pi k}{\sqrt{2m k_B T}} = \frac{2\pi}{\beta^2} ; \lambda_T \underset{\text{Testbarkeit.}}{\approx} \alpha_0$   
 $\hookrightarrow$  QM Behandlung  $\checkmark$  ja? nicht gen?

# Das ideale Dose-Gas

## Kraufgrößen von Quantengasen

Festchen	Spir	Stabilität (Berechnungszahl)	Tiefdruckabhängigkeit
Fermionen	$\frac{1}{2}$	0,1	$\langle N \rangle = \text{const.}$

Boronen ( $\alpha$ )	10	$N$	$\langle N \rangle = \text{const.} \quad (\text{Fermionen, ...}) \quad \mu = \mu(\tau)$
Boronen ( $\alpha$ )			$\langle N \rangle = \text{beliebig}$ $(\text{Thomassen, Thielmann, ...}) \quad \mu = 0$

→ Zusammenhang Spir - Ordnungszahl : Spir - Stabilität - Theorem

Boronen mit  $\langle N \rangle = \text{const.}$  : Dose - Einstellung - Kondensations

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Zustandszähler : } Z_i &= \sum_{\alpha_i} \exp(-\beta \sum_{k_i} (\varepsilon_{k_i} - \mu) n_{k_i}) \\ &\stackrel{\substack{\text{Berechnungszahl} \sim \frac{n_{k_i}}{\alpha_i} \in [0] \\ \text{1-Zustände}}}{} \quad \text{Richter; Kauflandkriterium: } \varepsilon_{k_i} - \mu > 0 \quad \forall \alpha_i \Rightarrow \mu < 0 \because \min(\varepsilon_{k_i}) = 0 \\ &= \prod_{\alpha_i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu) n_{k_i}) \\ &\stackrel{\substack{\text{=} \prod_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu))}}}{=} \prod_{\alpha_i=0}^{\infty} Z_{G,1}(\alpha_i) \end{aligned}$$

$$Z_{G,1} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)) = \frac{1}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu))}$$

$$\text{Großkanon. Potentiel : } \Omega = -k_B T \ln Z_i$$

$$\begin{aligned} &= -k_B T \sum_{k_i} \ln ((1 - e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)})^{-1}) \\ &= k_B T \sum_{k_i} \ln (1 - e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)}) \end{aligned}$$

$$\text{Vergleich Fermionen : } \Omega = \partial k_B T \sum_{k_i} \ln (1 + e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)}) \quad \partial : \text{Unterschiede}$$

Mittlere Berechnungszahl für Boronen

$$\langle n_{k_i} \rangle = \sum_{\substack{n_{k_i}=0 \\ \alpha_i \leq 0}}^{\infty} n_{k_i} \underbrace{\prod_{\alpha_i=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)} n_{k_i}}{Z_{G,1}(\alpha_i)}}_{= L_G(\{n_{k_i}\})}$$

$$\text{Normierung } \zeta = \sum_{n_{k_i}=0}^{\infty} n_{k_i} \frac{e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)} n_{k_i}}{Z_{G,1}(\alpha_i)}$$

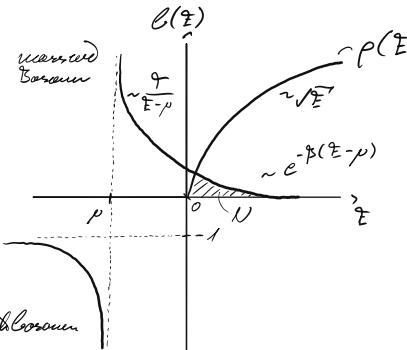
$$= -\partial_{\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)} \ln Z_{G,1}(\alpha_i)$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)} - 1} \quad \text{Dose - Einstellung - Urtreibung}$$

$$= \zeta(\varepsilon_{k_i}) \quad \rightarrow \text{Berechnungswahrscheinlichkeit der Detektion}$$

$\uparrow \Rightarrow \langle N \rangle \text{ beliebig}$   
Bei Absorption wird Detektionsrate um ganz allgemein Verteilung von  $\mu$  geändert → nur bei Boronen möglich

$\ell(\varepsilon_{\alpha_i})$  ist end. Zahl  $\rightarrow$  liegt zwischen 0 und 1



$$\text{Entropie: } S = -(\partial \ell / \partial T)_{T, \mu} = -\frac{1}{T} + \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \ell(\varepsilon_{\alpha_i} - \mu) \ell'(\varepsilon_{\alpha_i})$$

$$\begin{aligned} \text{Innere Energie: } U &= \mu + TS + \mu N = \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} (\varepsilon_{\alpha_i} - \mu) \ell(\varepsilon_{\alpha_i}) + \mu N \\ &= \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \varepsilon_{\alpha_i} \ell(\varepsilon_{\alpha_i}) \\ &= \langle \varepsilon_{\alpha_i} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Teilchenzahl: } N = \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \ell(\varepsilon_{\alpha_i})$$

### Thermische Wellentheorie

$$\rightarrow \lambda_T = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m k_B T}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \infty > \alpha_0 \quad \text{Lokalisiertes } x \cdot p \geq \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow x \cdot \frac{\hbar}{\lambda_T} \geq \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{\lambda_T}{2}$$

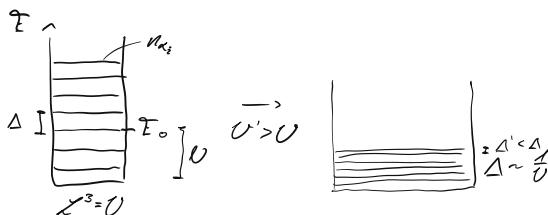
$$\text{Teilchendichte: } n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \sum_k \ell(\varepsilon_k) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{V} + \frac{1}{V} \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$\sum \sim \int$ , wenn Abstand  $\ll$  Energie von Welle  $\nabla \varepsilon$

$$\hookrightarrow \Delta \varepsilon \ll \varepsilon_k, \varepsilon_k > 0, \Delta \varepsilon \sim \frac{1}{V}$$

Aufbau Grundzustand  $\varepsilon_0 = 0$

### Bose-Einstein-Kondensat



$$N = \sum_{\alpha_i} n_{\alpha_i} \sim V$$

$\hookrightarrow$  Fall d. Zustände mit einem Energiedehnwellen

$$N(\varepsilon) \sim V$$

$$\Rightarrow n_{\alpha_i} \approx \text{const.}(V) \Rightarrow \text{extensiv}$$

$$\text{Teilchendichte } n = \frac{N}{V}$$

Zerlegungszahl d. Grundzustands ( $\alpha_0 = 0$ ),  $\varepsilon(\alpha_0) = 0$

$$\Rightarrow n = \frac{N}{V} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} = \frac{N_0}{V} + \frac{1}{V} \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$\downarrow$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \Delta(\varepsilon) = 0$$

Berechnungsschleife im Grundzustand  $\frac{V_0}{T} = n_0$

Berechnungszahl im ausgeregelten Zustand:  $N_{ex} = \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{1}{e^{(\beta(E-\mu))}-1} \quad | \mu \neq 0$

$$= \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{1}{e^{\beta(E)-\beta\mu}} \quad | x := \beta E$$

$$= V_{C_3} (k_B T)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}}_{\Gamma(\frac{3}{2}) \zeta(\frac{3}{2})}$$

$$\hookrightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

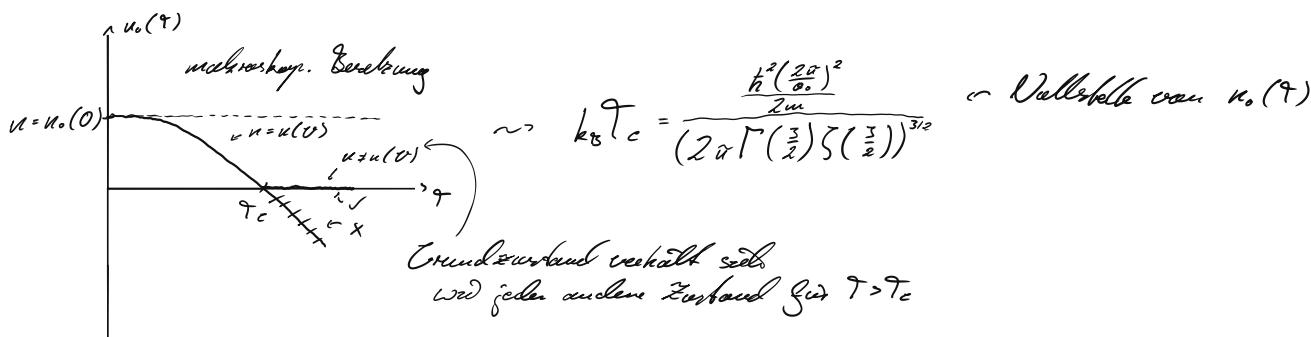
$$\Rightarrow N_{ex} = \frac{2\pi V}{\lambda_r^3} \Gamma(\frac{3}{2}) \zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.612 \frac{2\pi V}{\lambda_r^3} \sim T^{3/2}$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} N_{ex} = 0$$

$\lim_{T \rightarrow 0} N = N_0 = \frac{V_0}{T} > 0$ : unabhangig von kritischer Temperatur  $T_c$ , wird erreicht wenn  $N_{ex} < N$

↳ Bose-Einstein-Kondensat (Bose-Eos muss bei genugend tiefer Temperatur kondensieren)

Berechnung:  $n_0 = \frac{V_0}{V} = n \left( 1 - 2\pi \Gamma(\frac{3}{2}) \zeta(\frac{3}{2}) \frac{\alpha_0^3}{\lambda_r^3} \right) \quad \left| \frac{V}{V} = \frac{1}{\alpha_0^3} \right.$   
 $\downarrow$  Integral so.  
 $= n \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right)$  mit  $T_c$  definiert



### Chemisches Potential

$$N = \text{const.} = \underbrace{\int_0^\infty dE \rho(E) G(E)}_{(*)} \quad | T > T_c, G(E) = (e^{\beta(E-\mu)} - 1)^{-1}$$

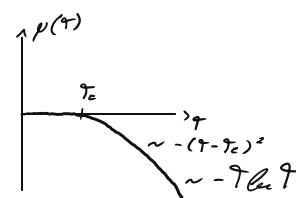
→ nicht geschlossene Lösbar, aber  $\partial_T \mu$  immer Lösbar

$$\partial_T \mu: 0 = \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{dG(E)}{dT}$$

$$= \int_0^\infty dE \rho(E) \frac{-e^{\beta(E-\mu)}}{(e^{\beta(E-\mu)} - 1)^2} \left( -\frac{E-\mu}{k_B T^2} - \frac{\partial \mu}{k_B T} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mu}{dT} = - \frac{1}{T_c} \frac{\int_0^\infty dE E^{3/2} \frac{1}{32\pi h^2 (E/2k_B T)}}{\int_0^\infty dE E^{1/2} \frac{1}{32\pi h^2 (E/2k_B T)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \mu}{dT^2} < 0$$



# Quanteneigenschaften des BEC

Da der Gas nicht WL werden um die Teilchen ein Kondensat (Grundzustand)  
 n: Teilchen in  $|x_0=0\rangle$  Oft freiheit.

Wellengf.  $\Psi_0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$

↳ Betrachtung der Ortsraum Bewegungsrichtung

$$\Rightarrow \Psi_0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | n_0 \rangle$$

$$= \prod_{i=1}^{n_0} \varphi_0(\vec{x}_i) e^{i\phi_i}$$

natürl Zustand

$$= \underbrace{e^{i\sum_{k=1}^{n_0} \phi_k}}_{\vec{\Phi} = \sum_{k=1}^{n_0} \phi_k} \prod_{i=1}^{n_0} \varphi_0(\vec{x}_i)$$

identische  $V_i$

$$\vec{\Phi} = \sum_{k=1}^{n_0} \phi_k \in [0, 2\pi] \quad \text{↳ Unterschied durch Phase}$$

Erwartungswert einer Größe  $\hat{F}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{i=1}^{n_0} \hat{g}(\vec{x}_i)$  (z.B. Impuls:  $\hat{g}(\vec{x}_i) = -i\hbar d\vec{x}_i / d\vec{p}_i = \vec{p}_i$ )  
 $\hat{F}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{i=1}^{n_0} \hat{p}_i$ )

$$\Rightarrow \langle \Psi_0 \{ \vec{x}_i \} | \sum_{i=1}^{n_0} \hat{g}(\vec{x}_i) | \Psi_0 \{ \vec{x}_i \} \rangle = n_0 \underbrace{\langle \varphi_0(\vec{x}) | \hat{g}(\vec{x}) | \varphi_0(\vec{x}) \rangle}_{\text{Teilchen- Erwartungswert}}$$

Vereinfachung:  $\Psi_0(\vec{x}) = \sqrt{n_0} e^{-\frac{\vec{\Phi}}{2}} \varphi_0(\vec{x})$   
Vektoren-  
eigenschaften  
der Verteilung Teilchen-  
Erwartungswert

$\Rightarrow$  Es  $\rightarrow$  Verteilungswerten kann durch die Teilchen-  
 Wellengf. beeinflusst werden, da alle Teilchen  
 ununterscheidbar sind.  
 ↳ makroskopische Wellengf.: Es reicht die  
 Heterogenität von den Koordinaten und Teilchen

Bemerkung: Kondensat hat Vektorcharat = 0

Rechnung = Stromung an Teilchen

↳ Da alle ein und selben Zustand sind  
 müssen alle Teilchen gleichstromen  
 $\Rightarrow$  Winkelwinkelwinkel gegen 0  
 ↳ es Stromen nicht alle Teilchen