physik311 | Notizen

Jonas Wortmann

October 16, 2023

Contents

1 Einführung

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Die Wellenlänge ist im Bereich von 400 nm bis 800 nm, das entspricht einer Frequenz von 750 THz bis 375 THz. Ein Lichtpuls kann nie kürzer als ein Zyklus sein.

1.1 Lichtquellen

– Lampe: Inkoherentes („ungeordnetes“) Licht

– Laser: Koherentes („geordnetes“, auch Wellen in „gleichschritt“) Licht

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Für diesen Fall betrachtet man nur die Lichtausbreitung in großer Entfernung von allen Quellen. Also ist $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Die MAXWELL–Gleichungen sind dann

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

In Materialien gilt dann

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \tag{2.6}$$

Hier ist ε die Dielektrizitätskonstante und μ die relative Permeabilität (in der Optik ist sie üblicherweise 1).

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot} \vec{E}\right) = \underbrace{\operatorname{div}\left(\operatorname{div} \vec{E}\right)}_{=0} - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{E} \qquad \mid \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \triangle \tag{2.7}$$

$$= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right). \tag{2.8}$$

Mit $\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ folgt

$$\triangle \vec{E} = \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.9}$$

Dies ist die **Wellengleichung** für das elektrische Feld. Man erwartet eine Ausbreitungsgeschwindigkeit mit

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}} \equiv \frac{c}{n}, \tag{2.10}$$

wobei $c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}^{-1}$ die Vakuumslichtgeschwindigkeit und $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ der Brechungsindex ist. Dann lässt sich die Wellengleichung wie folgt schreiben

$$\triangle \vec{E} = \frac{1}{v_{\mathrm{ph}}^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \overset{\text{Vakuum}}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.11}$$

Eine analoge Rechnung kann auch für das $\vec{B}$–Feld verwendet werden.

2.1 Einfachste Lösung der Wellengleichung: Ebene elektromag. Welle

Hier wird die Lichtausbreitung nur entlang einer Koordinate (z.B. z) betrachtet. Also ist $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}\left(z,t\right)$, bzw. $\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}=0$. Die Wellengleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{2.12}$$

Mit $\operatorname{div}\vec{E}=0$ folgt für ebene Wellen $\frac{\partial E}{\partial z}=0$, also ist $E_z=$ const..

Jetzt wählt man die Randbedingungen, dass $E_z=0$. Also ist $\vec{E}=\begin{pmatrix}E_x\left(z\right)\\E_y\left(z\right)\\0\end{pmatrix}$. Die Lösung der Wellengleichung ist dann

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(z,t\right)&=\vec{E}_0\cos\left(kz-\omega t\right) &(2.13)\\&=\vec{E}_0\cos\left(k\left(z-ct\right)\right), &(2.14)\end{aligned}$$

wobei $\frac{\omega}{k}=c$, mit $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ der **Wellenzahl** (λ der Wellenlänge) und $\vec{E}_0$ der Amplitude.

Die Transversalität (also die Ausbreitung nach oben und unten, $\vec{E}\perp\vec{e}_z$, allg. $\vec{E}_z\perp\vec{k}$) folgt aus $\operatorname{div}\vec{E}=0$ im ladungsfreien Raum. In Medien mit Raumladungen oder an Oberflächen ist auch eine longitudinale Polarisation möglich. Bisher gab es nur lineare Polarisationen; es ist aber auch eine Überlagerung von E_x und E_y möglich. Diese sind zirkulare und elliptische Polarisation.

Die Allgemeine Wellengleichung ist

$$\triangle\vec{E}=\left(\frac{n}{c}\right)^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \tag{2.15}$$

mit $v_{ph}=\frac{c}{n}$. Man erlaubt nun die Ausbreitung in eine beliebige Richtung sowie eine allgemeine Phase φ. Die Lösung ist dann

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi\right). \tag{2.16}$$

Diese Gleichung erfüllt die Wellengleichung, wenn

$$\vec{k}^2=\frac{n^2\omega^2}{c^2}. \tag{2.17}$$

Man bezeichnet sie auch als **Dispersionsrelation**.

Aus den MAXWELL–Gleichungen ist bekannt, dass

$$\vec{B}=\frac{1}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right). \tag{2.18}$$

Das zeigt, dass $\vec{B}\perp\vec{E}\wedge\vec{k}$ und $|\vec{B}|=\frac{n}{c}|\vec{E}|$.

Die Ursache der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie ist überwiegend der elektrische

Anteil der Welle (im sichtbaren Bereich).

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind nur im Fernfeld in Phase.

2.2 Energie und Impuls von Licht

Zuerst wird die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum eingeführt

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \qquad |\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}| \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{2.19}$$

Diese Gleichung wird zeitlich gemittelt, mit $E\left(t\right) = E_0 \cos\left(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t\right)$ und $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle W_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2. \tag{2.20}$$

Die mittlere Energiedichte, die pro Zeit durch ein Flächenelement transportiert wird ist

$$I = c\,\langle W_{\text{el}} \rangle \qquad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \tag{2.21}$$

Die Richtung des Energietransports wird durch den Poynting–Vektor angegeben

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad |\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}||\vec{B}| = \varepsilon_0 c E_0^2. \tag{2.22}$$

Man erkennt, dass

$$\left\langle |\vec{S}| \right\rangle = I \tag{2.23}$$

2.2.1 Strahlungsdruck

Strahlungsdruck ist der Druck, der durch emittierte, absorbierte und reflektierte elektromagnetische Strahlung auf eine Fläche ausgeübt wird. Der Impuls von Teilchen mit der Geschwindigkeit c ist

$$p = \frac{E}{c} = \frac{A \cdot t \cdot c \cdot \langle W_{\text{el}} \rangle}{c}. \tag{2.24}$$

Der Druck ist $\rho = \frac{|\vec{F}|}{A}$ mit $|\vec{F}| = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$,

$$\rho = \frac{I}{c}. \tag{2.25}$$

2.3 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Lichtstrahl $\vec{k}_i$ trifft aus einem Medium n_1 in ein Medium $n_2 > n_1$ und wird mit α zu $\vec{k}_r$ reflektiert. Das Licht wird auch um den Winkel β gebrochen und verläuft mit $\vec{k}_t$ durch das

Medium. Die $\vec{E}$–Felder sind dann

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{\mathrm{i}\left(\omega_i t - \vec{k}_i \vec{r}\right)} \tag{2.26}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{\mathrm{i}\left(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r}\right)} \tag{2.27}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0r} e^{\mathrm{i}\left(\omega_t t - \vec{k}_t \vec{r}\right)}. \tag{2.28}$$

Das Fermat'sche Prinizp besagt, dass eine Welle immer den Weg der minimalsten optische Laufzeit wählt. Es ist also möglich, dass sie in einem Medium mehr Zeit verbringt, bevor sie in das andere Medium wechselt.

2.3.1 Stetigkeit

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ und $\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}$ sind an Grenzflächen stetig. Die Normalkomponente von $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B}$ sind an Grenzflächen stetig.

Zunächst werden die $\vec{E}$–Felder betrachtet, wenn $\vec{r} = 0$ ist.

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_{0i} e^{\mathrm{i}\omega_i t} + \vec{E}_{0r} e^{\mathrm{i}\omega_r t}\right) \overset{!}{=} \vec{n} \times \vec{E}_{0t} e^{\mathrm{i}\omega_t t}. \tag{2.29}$$

Diese Gleichung muss für beliebige Zeiten t gelten. Es existiert nur eine nichttriviale Lösung wenn $\omega_r = \omega_i = \omega_t \equiv \omega$.

Einschub

An allgemeinen Grenzflächen bleibt die Frequenz gleich, also $\omega_{\text{vac}} = \omega_{\text{medium}}$,

$$E = E_0 \cos\left(kz - \omega t\right) = E_0 \cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k} t\right)\right], \tag{2.30}$$

mit $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = v_{\text{ph}}$, also

$$k_{\text{vac}} = \frac{k_{\text{medium}}}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vac}}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{medium}}}\frac{1}{n} \Leftrightarrow \lambda_{\text{Medium}} = \frac{1}{n}\lambda_{\text{vac}}. \tag{2.31}$$

Daraus folgt, dass $\omega = k\frac{c}{n}$.

Jetzt ist $\vec{r}$ ein beliebiger Punkt auf der Grenzfläche, also

$$e^{\mathrm{i}\omega t} \vec{n} \times \left(\vec{E}_{0,i} e^{-\mathrm{i}\vec{k}_i \vec{r}} + \vec{E}_{r,0} e^{-\mathrm{i}\vec{k}_r \vec{r}} - \vec{E}_{t,0} e^{-\mathrm{i}\vec{k}_t \vec{r}}\right)\Big|_{y=0} = 0. \tag{2.32}$$

Es muss für beliebiges $\vec{r}$ auf der Grenzfläche gelten

$$\vec{kk}_i \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r} \, \forall \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Für das einfallende Lichtfeld setzt man

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_{i,x} \\ k_{i,r} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} k_{i,x} \\ k_{i,r} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{r,x} \\ k_{r,y} \\ k_{r,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{z,x} \\ k_{t,y} \\ k_{t,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Das heißt, auch die reflektierten und transmutierten Strahlen bleiben in der Zeichenebene. Das gilt auch für

$$k_{r,x} = k_{i,x} \qquad k_r \sin\alpha' = k_i \sin\alpha \tag{2.36}$$

$$k_{t,x} = k_{i,x} \qquad k_t \sin\beta = k_i \sin\alpha. \tag{2.37}$$

Da ω immer gleich ist, ist $\frac{k}{n}$ konstant. Mit $k_i = k_r$ folgt $\alpha' = \alpha$. Aus den Gleichungen folgt auch, dass

$$k_t = \frac{n_2}{n_1} k_i \qquad n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta. \tag{2.38}$$

Diese Gleichung ist das SNELLIUS'sche Brechungsgesetz. Für $n_2 > n_1$ wird der Strahl zum Lot hin gebrochen.

2.3.2 Die Amplitude von reflektiertem und gebrochenen Strahl

Hier wird nur der Spezialfall des senkrecht Einfallenden Strahls betrachtet. Es gilt

$$\vec{E}_{0,i} + \vec{E}_{0,r} = \vec{E}_{0,t} \tag{2.39}$$

$$n_1 \left(\vec{E}_{0,i} - \vec{E}_{0,r} \right) = n_1 \vec{E}_{0,t} \tag{2.40}$$

$$\vec{B}_{0,i} + \vec{B}_{0,r} = \vec{B}_{0,t}. \tag{2.41}$$

Der Zusammenhang zwischen den Feldern ist

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \left(\vec{k} \times \vec{E} \right) \qquad \vec{k}_r = -\vec{k}_i. \tag{2.42}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$E_{0,r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_{0,i} \qquad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \tag{2.43}$$

mit r dem Reflexionskoeffizienten. Für $n_2 > n_1$, id est eine Relexion am optisch dichteren Medium, ist $r < 0$, daraus folgt ein Phasensprung von π. Das $\vec{E}$–Feld dreht sich also um. Die reflektierte Intensität ist

$$R = \frac{I_r}{I_i} = |r|^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2. \tag{2.44}$$

All das was nicht reflektiert, wird transmutiert

$$|r|^2 + |t|^2 = R + T = 1 \qquad t = \frac{E_{0,t}}{E_{0,r}}. \tag{2.45}$$