1 Elektrostatik

1.1 Elementarladungen

Ladungsträger kommen als freie Ladungen vor. Mit dem Milikanversuch wurde gezeigt, dass sie als ganzzahlige Veilfache einer positiven oder negativen Elementarladung $Q = \pm n_{\mathbb{N}} e$ vorkommen, mit

$$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\,.$$

Die Ladungen entsprechen den Angriffspunkten der elektromagnetischen Kräften (analog wie die Masse der Angriffspunkt der Gravitation ist). Ruhende Ladungen führen zu anziehenden oder abstoßenden Kräften. Zu sehen ist auch, dass das Abstandsverhalten dasselbe, wie das der Gravitation ist. Zudem weisen bewegte Ladungen eine geschwindigkeitsabhängige Kraft auf. Dies ist der Ursprung des Magnetismus und der Lorentzkraft.

Der Wert der Elementarladung ist eine Naturkonstante und hängt nicht von dem Bewegungszustand.

Die Zahl der Elementarladungen ist erhalten

$$\sum_{i,j} \left(q_i^- + q_j^+\right) = \text{ const.}.$$

Neutronen sind elektrisch neutrale Teilchen. Sie haben eine Lebensdauer von $\tau_n \approx 16 \cdot 60\,\mathrm{s}$ und zerfallen in

$$n \to p^+ + e^- + \overline{\nu}_{e^-}.$$

Dies zeigt, dass Ladungserhaltung auch gilt, wenn Ladungsträger erzeugt oder vernichtet werden.

Die **Stromstärke** wird in Ampère A angegeben. Die **Ladung** in As oder C und entspricht der Ladung, die durch den Querschnitt eines elektrischen Leiters mit der Stromstärke von $1\mathrm{A}$ in einer Sekunde fließt. Die **Spannung** V wird in $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$ angegeben. Die **Faraday–Konstante** ist die Ladung von einem Mol eines Stoffes, also $F = e \cdot N_A$.

Ladungsinfluenz

Wenn sich ein Körper mit Ladungsträgern einem leitenden Körper nähert, verschieben sich die beweglichen Ladungsträger des leitenden Körpers in Abhängigkeit der Ladung des sich annähernden Körpers.

1.2 Coulomb–Gesetz

Zwischen gleichnamigen Ladungen wirkt eine abstoßende Kraft

$$F \propto Q_1 \cdot Q_2.$$

Bei konstanten Ladungen und größer werdendem Abstand sinkt diese Kraft mit

$$\frac{1}{r_{12}^2},$$

wobei r_{12} der Abstand zwischen den Ladungen 1 und 2 ist. Daraus folgt das **Coulombsche Kraftgesetz**

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}^2 \qquad f = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \text{ in SI mit } [f] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{As}}\,\mathrm{m}\,.$$

f beinhaltet die Komponente des Schwächungsfaktors ε^{-1}. Im Vakuum beträgt dieser 1, in Luft ≈ 1, in Wasser 80. ε_0 ist die **elektrische Feldkonstante** mit einem Wert von $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}\,\mathrm{V}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$. Im Vakuum ist $\varepsilon = 1$ und $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}}$, was zur Folge hat, dass wenige Ladungsträger genügen um große Spannungen zu erzeugen.

1.3 Potentielle Energie

Die Coulomb–Kraft ist ein, analog zur Gravitationskraft, konservatives Kraftfeld. Um die potentielle Energie zu errechnen wird sich zuerst die potentielle Energie zwischen zwei Ladungen in einem Abstand von $r = \infty$ als $E_p(\infty) = 0$ definiert. Man kann dann zeigen, dass

$$\begin{aligned} E_p(r) = E_p(r) - E_p(\infty) = W_{a,\infty\to r} &= -\int_\infty^r \vec{F}_c\,(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \\ &= \int_r^\infty \vec{F}_c\,(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Dies entspricht der Arbeit die benötigt wird, Ladungen von einem Abstand r zu einem Abstand von $r = \infty$ zu bringen. Sind drei Ladungen in einem System gilt

$$W_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}\right).$$

Für N Ladungen gilt dann

$$E_p = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Besser ist allerdings mit einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu rechnen

$$E_p = \left[\int_V\int_V \frac{\rho(r')\rho(r'')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}\,''|}\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau''\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0},$$

mit $\rho(r)_i$ als Ladungsdichte und τ als infinitesimales Volumenelement. Zudem gilt

$$\Delta Q_i = \Delta\tau \cdot \rho(r_i).$$

1.4 Elektrisches Feld

Die Kraft die auf eine Testladung wirkt, wenn sie in einem Abstand von $\vec{r}_{jq}$ zu einem Körper mit elektrischer Ladung ist, ist

$$\begin{aligned} F_q = \sum_j F_{jq} &= q \sum_j \frac{Q_j \cdot \hat{r}_{jq}}{r_{jq}^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= q \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{el. Feldstärke}} . \end{aligned}$$

Besteht das System nur aus zwei Ladungen, so gelten äquivalente Ausdrücke

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}_1) &= \frac{q_1 \hat{r}_1}{r_1^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \\ \vec{E}_2(\vec{r}_2) &= \frac{q_2 \hat{r}_2}{r_2^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= -\frac{q_2 \hat{r}_1}{r_1^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} . \end{aligned}$$

Bei der Ermittlung des elektrischen Feldes muss die Probeladung ausgeschlossen werden.

1.4.1 Wirbelfreiheit eines el. Feldes

Wenn ein elektrisches Feld durchschritten wird und wieder am Anfangspunkt angekommen wird, wird keine Arbeit verrichtet

$$\begin{aligned} W &= \oint \left(\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) \\ \frac{W}{q} &= \oint \left(\frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) = \oint \left(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine fundamentale Eigenschaft von elektrostatischen Feldern. Alternativ lässt sich auch die Rotation betrachten

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

1.5 Elektrisches Potential

Wird ein Weg von p_1 nach p_2 durch ein elektrisches Feld gewählt gilt

$$\begin{aligned}\frac{W_{q,1\to 2}}{q} &= \frac{1}{q}\int_{p_1}^{p_2}\left(\vec{F}_c\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)\\ &= \int_{p_2}^{p_1}\left(\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)\\ &= \varphi_2-\varphi_1\\ &= U_{21}.\end{aligned}$$

φ_2, φ_1 ist dann das elektrische Potential mit U_{21} der Potentialsdifferenz.Anders ausgedrückt, da $\vec{E}$ konservativ ist

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{r}\right).$$

Die Einheit ist $[\varphi] = \frac{\mathrm{W_{el}}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} = \mathrm{V}$, sowie $[\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

1.5.1 Punktladungen

Das Potential einer Punktladung ist

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0}\\ &= \int_r^{\infty}\left(\vec{E}\left(\vec{r}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right)\\ &= \int_r^{\infty}\frac{Q\left(\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.\end{aligned}$$

Das Potential einer Ladungsverteilung mit N Punktladungen Q_i and Orten $\vec{r}_i$ mit $i\in\mathbb{N}$

$$\varphi\left(\vec{r}_p\right) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q_i}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_p\right|},$$

wobei $\vec{r}_p$ der Abstand zur Probeladungs / zum Betrachtungspunkt ist.

1.5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte

Eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte $\rho\left(\vec{r}_i\right)$ im Volumenelement $\Delta\tau_i$ ist

$$\Delta Q_i = \rho\left(\vec{r}_i\right)\cdot\Delta\tau_i.$$

Das elektrostatische Potential im Beobachtungspunkt $\vec{r}_p$ ist

$$\begin{aligned}\varphi\left(\vec{r}_p\right) &= \left[\lim_{\Delta\tau\to \mathrm{d}\tau, N\to\infty}\sum_{i=n}^{N}\frac{\rho\left(r_i\right)\Delta\tau_i}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_p\right|}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_V\left(\frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_p\right|}\cdot \mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

Ein einfaches Beispiel ist das Wasserstoffatom, wessen Potential einem $\frac{1}{r}$–Verhalten folgt. Da das Proton viel schwerer als das Elektron ist, kann es als fast statisch angenommen werden und beide Ladungen sind Punktladungen. Schwerere Atome sind deutlich komplexer. Der Kern kann weiterhin als Punktladungs angenommen werden, aber die Elektronen werden zahlreicher, also kommt es zu einer Ladungsverteilung, und die Elektronen beeinflussen sich gegenseitig. Im Kern wirken zudem die langreichweitigen abstoßenden Kräfte zwischen den Protonen, mit der potentiellen Energie

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \propto \mathrm{Z}\,;$$

und die kurzreichweitigen starken Wechselwirkungen der Nukleonen, welche dieses Potential kompensieren, mit

$$E_a \propto \mathrm{A}\,.$$

Existieren (vor Allem in schweren Kernen) mehr Neutronen als Protonen, dann ist der Kern stabil. Ab einer gewissen Massezahl, bzw. Ungleichgewicht von Protonen und Neutronen ist der Kern nicht mehr stabil. Dies ist die Ursache für Kernspaltung. Die dabei freiwerdende Energie ist zu einem kleinen Teil die Coulomb–Abstoßung, zum größeren Teil allerdings die starke Wechselwirkung.

1.6 1. Maxwell–Gesetz

Mit der $\frac{1}{r^2}$–Abhängigkeit und dem Gauß'schen Satz lässt sich eine Beziehung zwischen der Ladungsverteilung und einem elektrischen Feld herstellen.

Gauß'scher Satz und Stromdichte

Der Strom $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ ist die Ladung pro Zeiteinheit. Er lässt sich auch als Fläche mal Stromdichte $\vec{A} \cdot \vec{j} = A \cdot \hat{n} \cdot \vec{j}$ darstellen. Für eine beliebige Fläche A lässt sich schreiben

$$I = \int_A \left(\vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A}' \right).$$

Für eine geschlossene Fläche (integration über die Oberfläche) gilt

$$I = \oint_O \left(\vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{O}' \right).$$

Benutzt man einen Quader als Volumenelement, dann fließt auf einer Seite eine Stromdichte von $j_x(x)$ bzw. $\mathrm{d}Q_x^-$ rein und auf der anderen Seite eine Stromdichte von $j_x(x+\mathrm{d}x)$ bzw. $\mathrm{d}Q_x^+$ wieder raus

$$\mathrm{d}Q_x^+ = j_x\,(x + \mathrm{d}x)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}Q_x^- = j_x\,(x)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Q_x &= \mathrm{d}Q_x^+ - \mathrm{d}Q_x^- \\
&= \left[j_x\left(x+\mathrm{d}x\right) - j_x\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial j_x}{\partial x}\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{=\mathrm{d}V}\,\mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}Q_x^2}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} &= \frac{\partial j_x}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Analog für y und z Richtung ist dann die Gesamtladung

$$\frac{\mathrm{d}Q^2}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{j} = \vec{\nabla}\vec{j}.$$

Falls $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, dann ist $\vec{j}$ Quellenfrei. Der Gauß'sche Satz besagt dann

$$\begin{aligned}
I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \int_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V \\
&\overset{!}{=} \oint \left(\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A}\right).
\end{aligned}$$

Elektrischer Kraftfluss

Der elektrische Kraftfluss Φ ist proportional zur Zahl der durch A hindurchtretende Feldlinien

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \int_A \left(\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}'\right) \\
&= \int_A E\cos\alpha\,\mathrm{d}A' \\
\mathrm{d}\Phi_E &= E\cdot\,\mathrm{d}A'\cos\alpha \\
&= \left(\vec{E}\cdot\,\mathrm{d}\vec{A}'\right),
\end{aligned}$$

mit α dem Winkel zwischen der Flächennormalen und den elektrischen Feldlinien. Ist eine Ladung von einer Kugel eingeschlossen ist der elektrische Kraftfluss

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \oint_{\text{Kugelschale}} \left(\vec{E}\cdot\,\mathrm{d}\vec{A}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{Q}{r^2}r^2\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint\,\mathrm{d}R \\
&= \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Der Abfall der Feldstärke mit $\frac{1}{r^2}$ wird durch den Zuwachs der Kugeloberfläche mit r^2 kompensiert. Dies ist auch der Fall, wenn die Integration über eine beliebige geschlossene Fläche durchgeführt wird. Sollte die Ladung keine Punktladungs, sondern eine Ladungsverteilung sein, dann gelten diese Zusammenhänge solange, wie die Ladungsverteilung die gleichen Symmetrien wie die Punktladung aufweist. Man kann also jedem Volumenelement $\mathrm{d}\tau$ ein Ladungselement $\mathrm{d}Q$ zuordnen, also $\mathrm{d}Q = \rho_E(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\tau$. Der Beitrag zum elektrischen Kraftfluss ist dann $\mathrm{d}\Phi_E = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Im allgemeinen, bzw die **erste Maxwell'sche Gleichung**

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int_V \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \left(\rho_E(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\tau\right) \\ &\overset{!}{=} \int \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}A'\right).\end{aligned}$$

1. Maxwell'sche Gesetz: Die Quelldichte des elektrostatischen Feldes $\operatorname{div}\vec{E}$ ist proportional zur Ladungsdichte ρ mit dem Proportionalitätsfaktor $\varepsilon\varepsilon_0$

$$\oint_A \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right) = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \rho.$$

Da das elektrostatische Feld ein konservatives Kraftfeld ist kann man es mit dem Gradienten des skalaren Feld eines elektrostatischen Potentials herleiten $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$. Setzt man diesen Ausdruck noch ein erhält man die **Poissongleichung**

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Betrachtet man den Kraftfluss im Außenraum $r > R$ einer kugelsymmetrischen Ladung mit Radius R, so gilt

$$\oint_{A_{\text{Kugel}}} \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}'\right) = \int_{A_{\text{Kugel}}} E(r) \cdot \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{r})}_{=1} \cdot \mathrm{d}A = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Wendet man nun das erste Maxwell'sche Gesetz an, folgt (für $r > R$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho(r)\,\mathrm{d}\tau &= \oint_A \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}'\right) \qquad |r > R \\ \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} &= E(r) \cdot 4\pi r^2 \\ \vec{E}(r) &= \frac{Q}{r^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\hat{r}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass das Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung im Außenraum identisch mit einer gleichstarken Punktladung im Mittelpunkt ist. Dies ist auch der Grund, warum im Coulomb–Gesetz 4π vorkommt. Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Sollte man das elektrische Feld innerhalb einer Ladungsverteilung, mit $\rho =$ const. betrachten, also $r < R$, folgt

$$\begin{aligned} q = \int_{V_{\text{Kugel}\, r<R}} \rho\,(r)\ \mathrm{d}\tau &= \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 \\ &= Q \frac{r^3}{R^3} \\ \vec{E}\,(\vec{r}) &= \frac{q}{r^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \hat{r} \\ &= \frac{Qr}{R^3} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

und das Potential

$$\varphi\,(r) = \frac{Q}{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right).$$

Ein wichtiges Beispiel ist der Atomkern mit $\rho =$ const.. Die Protonen bauen ein Coulombpotential auf, welches andere Atomkerne auf Distanz hält.

1.7 Oberflächenladung auf Leitern

Leiter sind makroskopische Objekte, in denen sich Elektronen frei bewegen können und ortsfeste Ionen hinterlassen. Wird ein Leiter mit einer Ladung „beladen“, dann verteilt sich die Ladung in einem elektrostatischen Gleichgewicht auf der Oberfläche und das Innere des Leiters bleibt neutral. Befindet sich im Inneren eine nicht kompensierte überschüssige Ladung, dann induziert diese ein el. Feld, welches die freien Ladungsträger anzieht und somit die Ladung kompensiert (die gleiche Ladung wird dann auf die Oberfläche geschoben).

Im folgenden wird von elektrostatischen Situationen ausgegangen, also die Ladungsträger bewegen sich nicht.

Betrachtet man nun eine Ladungsverteilung auf einer beliebigen gekrümmten Oberfläche und die Ladungen befinden sich in einem Gleichgewicht, dann baut jede Ladung ein zur Oberfläche orthogonales $E_\perp$–Feld auf (mit $E_{||} = 0$, da sich die Ladungen sonst nicht mehr in einem Gleichgewicht befinden würden). Im Inneren ist $\vec{E} = 0$. In einem Abstand d zur Oberfläche ist das elektrische Potential $\varphi\,(d) =$ const.. Diese Flächen werden **Äquipotentialflächen** genannt. Jeder Weg $\vec{s}$ parallel zu der Oberfläche steht immer senkrecht zu $\vec{E}$. $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{s}} = 0$.

Man führt die Größe **Oberflächenladungsdichte** σ ein, welche die Ladungsdichte an der Oberfläche beschreibt, da die Ladungsdichte selbst nur an der Oberfläche $\rho \neq 0$ ist. Entferne man sich also ein ε von der Oberfläche wäre sie wieder $\rho = 0$. Sie wird definiert als Ladung pro Fläche

$$\mathrm{d}Q = \sigma \cdot \mathrm{d}A \qquad [\sigma] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Der elektrische Kraftfluss ist dann

$$\mathrm{d}\Phi_E = \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right) = E \cdot \mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma\,\mathrm{d}A}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

also

$$\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E.$$

Die Gesamtladung Q ist geometrieabhängig, aber im allgemeinen

$$Q = A \cdot \sigma.$$

Sie ist auf der Oberfläche gleichverteilt. Das Potential mit R als Radius der Ladungsverteilung

$$\varphi = \frac{Q}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\varphi}{R}.$$

Je kleiner also der Radius R, desto größer wird das elektrische Feld E. Da die Coulomb–Kraft proportional zur Feldstärke ist, führt dies zur Emission von Ladungsträgern bei hohen Spannungen. Zum Beispiel fängt sich ein S–förmiger Leiter an zu drehen, wenn die angelegte Spannung hoch genug ist, sodass die Ladungsträger in die Luft emittiert werden.

Faraday'scher Käfig
Ist ein Raum von elektrischen Leitern umschlossen, so bleibt der Raum innerhalb des Käfigs Feldfrei und es existiert nur ein Feld am Rand des Käfigs. Dies geschieht aufgrund des ersten Maxwell'schen Gesetzes.

1.8 Influenz

Wird ein elektrisch neutraler Leiter in ein E–Feld gebracht, dann sammeln sich negative Ladungsträger auf der einen und hinterlassen potivie Löcher auf der anderen Seite. Durch diese Ladungsverschiebung baut sich ein Gegenfeld E' auf, welches genau so stark ist, dass das ursprüngliche Feld im Inneren des Leiters kompensiert wird

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) + \vec{E}'\left(\vec{r}'\right) = 0.$$

Dasselbe Phänomen ist auch zu beobachten, wenn man zwei Leiter zwischen zwei Kondensatorplatten, welche ein E–Feld aufgebaut haben, hält. Zieht man die beiden Leiter etwas auseinander, dann wird zwischen diesen Leitern ein E–Feld aufgebaut, und sie werden geladen.

Der Grund für diese **Influenz** ist die sogenannte **Spiegelladung**. Wirkt ein elektrisches Feld einer Punktladung Q auf einen Leiter im Abstand d, dann wird in diesem eine Spiegelladung $-Q$ im Abstand d induziert. Ladung und Spiegelladung ziehen sich aufgrund der Coulomb–Kraft mit dem Abstand $2d$ an.

1.9 Kondensatoren und Kapazität von Leitern

Man betrachtet einen einzelnen, isolierten Leiter. Das Potential ist streng proportional zur Ladung Q auf dem Leiter. Die Kapazität eines solchen Leiters ist

$$C = \frac{Q}{\varphi\left(Q\right) - \varphi\left(Q = 0\right)} = \frac{Q}{U} \qquad [C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}\,,$$

mit U der Spannung. Die Kapazität ist also die Ladung geteilt durch die Potentialdifferenz des Leiters mit und ohne Ladungs gegenüber seiner Umgebung.

Beispiel: Kapazität einer leitenden Kugel
Das elektrostatische Potential einer leitenden Kugel ist

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

Die Kapazität ist dann

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Kondensatoren
Bei Kondensatoren kann die Kapazität durch Influenz gesteigert werden. Wird auf Kondensatorplatte eine Spannung angelegt, dann baut sich auf der anderen Platte eine Spiegelladung auf. Die Gesamtladung sowie das E–Feld im elektrostatischen Fall bleibt konstant

$$\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = \frac{Q}{A} = \text{const.}.$$

Zwischen den Platten ist die Ladung sowie die Ladungsdichte $Q = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Daraus folgt, dass $-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$. In einer Dimension gilt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0\\
&\varphi(x) = ax + b \qquad \left|\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi_1\\ \varphi(d) &= \varphi_2\end{aligned}\right. \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = U\\
&\varphi(x) = -\frac{U}{d} + \varphi_1.
\end{aligned}$$

Dann ist das elektrische Feld

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\operatorname{grad}\varphi\\
&= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{=0}, \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{=0}\right)\\
&= \left(\frac{U}{d}, 0, 0\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_x d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_x A}{E_x d} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{A}{d}.$$

Je kleiner als oder Abstand d, desto größer die Kapazität C.

Schaltet man zwei Kondensatoren parallel, so addieren sich die Kapazitäten, da sich die

Flächen addieren. Schaltet man zwei Kondensatoren in Reihe, dann ist an dem ersten Kondensator eine Spannung $+Q$ welche eine Spiegelladung $-Q$ induziert, welche eine Speigelladung $+Q$ am nächsten Kondensator induziert, welche eine Spiegelladung $-Q$ induziert. Bei dieser Schaltung gilt $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

1.10 Energiedichte

Feldlinien lassen sich in die zwei Komponenten der positiven Ladungen mit dem $\vec{E}^{+}$–Feld und negativen Ladungen mit dem $\vec{E}^{-}$–Feld aufteilen, wobei gilt $|\vec{E}^{+} + \vec{E}^{-}| = E = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 A}$. Die beiden Feldstärken haben die Relation $|\vec{E}^{+}| = |\vec{E}^{-}| = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 A}$. Die korrespondierenden Kräfte sind $\vec{F}^{+} = (+Q)\,\vec{E}^{-} = -\vec{F}^{-} = (-Q)\,\vec{E}^{+}$, mit $|\vec{F}^{+}| = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon\varepsilon_0 A} = |\vec{F}^{-}|$. Mit d dem Abstand der Kondensatorplatten folgt für die Arbeit (entspricht der potentiellen Energie des $\vec{E}$–Feldes)

$$W_{d\to 0} := |\vec{F}^{+}| \cdot d = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon\varepsilon_0 A} \cdot d := E_p(d) - E_p(0).$$

Für den Plattenkondensator gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{A} = \varepsilon\varepsilon_{=}E \\ E_p\left(d\right) &= \frac{1}{2}\frac{\left(\varepsilon\varepsilon_0 AE\right)^2}{\varepsilon\varepsilon_0 A}d \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \quad A \cdot d}_{=\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V} \quad . \end{aligned}$$

Pro Volumenelement gilt

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}V} = \rho_{E_p} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

was der Energiedichte des elektrischen Feldes entspricht.

Der Kondensator kann auch als Energiespeicher benutzt werden. Es gilt $C \cdot d = \varepsilon\varepsilon_0 A$, womit

$$E_p\left(C, Q, U\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{Cd} = \frac{1}{2}U^2 C = \frac{1}{2}QU.$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Kondensatoren.

1.11 Elektrischer Dipol und elektrisches Dipolmoment

Das elektrische **Potential eines Dipols** setzt sich aus den Beiträgen beider Ladungen zusammen

$$\varphi_D\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{+Q}{|\vec{r}_+|} + \frac{-Q}{|\vec{r}_-|}\right),$$

mit d dem Abstand der Ladungen und $\vec{r}_+$, $\vec{r}_-$ dem Abstand der jeweiligen Ladung zur Probeladung. Man betrachtet hier nur Fälle für $r \gg d$, da der Dipol auf mikroskopischer und der Abstand zur Probeladung auf makroskopischer Skala ist. Mit θ dem Winkel zwischen $\frac{d}{2}$ und $\vec{r}$ folgen die Näherungen $|\vec{r}^{+} \approx |\vec{r}| - \frac{d}{2}\cos\theta$ und $|\vec{r}^{-}| \approx |\vec{r}| + \frac{d}{2}\cos\theta$, also

$$\varphi\left(r,\theta\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-\frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r+\frac{d}{2}\cos\theta}\right),$$

mit $\frac{1}{r-a} + \frac{1}{r+a} = \frac{2a}{r^2-a^2}$ folgt

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}.$$

Also gilt für das Potential eines Dipols

$$\varphi_D\left(r,\theta\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon}\frac{d\cos\theta}{r^2} \qquad \varphi_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Dieses fällt im Gegensatz zum Monopol mit $\frac{1}{r^2}$ ab. Hätte das Dipol zwei gleichnamige Ladungen würde es wiederum mit $\frac{1}{r}$ abfallen.

Mit $d\cos\theta = \vec{d}\cdot\hat{r}$ folgt das **Dipolmoment**

$$\vec{p} = \vec{d}\cdot Q.$$

Schreibt man das Potential mit dem Dipolmoment um, gilt

$$\varphi\left(r,\theta\right) \approx \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

1.11.1 Elektrisches Feld des Dipolsmoments

Das elektrische Feld des Dipolmoments ist

$$\vec{\nabla}\cdot\varphi = \vec{E}.$$

Es bietet sich an hier Kugelkoordinaten zu verwenden

$$\vec{\nabla}_{r,\theta,\varphi} = \partial_r\hat{r} + \frac{1}{r}\partial_\theta\hat{\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\partial_\Phi\hat{\Phi}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(r,\theta\right) &= -\vec{\nabla}_{r,\theta,\Phi}\cdot\varphi\left(r,\theta\right)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right).\end{aligned}$$

Man erkennt, dass das $\vec{E}$–Feld eines Dipols mit $\frac{1}{r^3}$ abfällt, wohingegen das $\vec{E}$–Feld eines Monopols mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt. Zudem kann man erkennen, dass das $\vec{E}$–Feld nicht mehr kugelsymmetrisch ist.

1.12 Dipolmoment im elektrischen Feld

Existiert ein Dipolmoment in einem $\vec{E}$–Feld, dann wirkt darauf eine Kraft $\vec{F}^{\pm} = \pm Q\vec{E}$, sowie ein Drehmoment

$$M = M^{+} + M^{-} = \left(\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}^{+}\right) + \left(\frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{F}^{-}\right) = Q\left(\vec{d} \times \vec{E}\right) = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Die potentielle Energie ist dann abhängig von dem Winkel θ (der Winkel zwischen dem $\vec{E}$–Feld und dem Dipolmoment)

$$E_p\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) - E_p(\theta) = \vec{x}\vec{F}^{+} + \left(-\vec{x}\vec{F}^{-}\right) = d\cos\theta QE = pE\cos\theta.$$

Viele Moleküle haben einen permanenten Dipol, wonach sie sich unter Einfluss eines $\vec{E}$–Feldes ausrichten.

1.12.1 Isolatoren im elektrischen Feld, Dielektrika

Leiter besitzen freie Ladungsträger, welches sich durch das Material bewegen können und so das $\vec{E}$–Feld im Inneren vollständig kompensieren können. Bei **Dielektrika** können sich Ladungsträger nicht frei bewegen, aber lokal verschieben, indem sich zum Beispiel Dipole nach dem $\vec{E}$–Feld ausrichten. Dies kann allerdings, nicht wie bei Leitern, ein $\vec{E}$–Feld vollständig kompensieren, sondern nur abschwächen.

Füllt man ein Kondensatorfeld mit einem Dielektrikum, dann erhöht sich die Kapazität um ε

$$C_D = \frac{\varepsilon Q_0}{U_0} = \varepsilon C_0,$$

mit Q_0, U_0 und C_0 als Ausgangsgrößen des Kondensators. Die potentielle Energie ist dann

$$E_p = \frac{1}{2}C_d U^2 = \frac{1}{2}\varepsilon C_0 U^2.$$

1.12.2 Zylinderkondensator

Ein Zylinder der Länge l und mit dem Radius r erzeugt mit der Außenwand und einem Stab durch die Mitte, mit dem Radius R_1 ein radialsymmetrisches elektrisches Feld

$$\begin{aligned}\int_A \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \\ 2\pi r l E &= \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l}.\end{aligned}$$

Mit dem Abstand von der Außenseite des Stabs zur Zylinderwand R_2 ergibt sich die Spannung zu

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} E\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Die Kapazität ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Mit dem Faktor ε lässt sich auch ein Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten einbauen.

1.12.3 Dielektrische Verschiebung

Bisher gilt der Ausdruck

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}r = \oint_A \left(\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}\right).$$

Man definiert nun $\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \vec{D}$, also

$$\int\left(\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{A}\right) = \int_V \rho\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}V = Q \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho.$$

Es ist nützlich den Einfluss des Dielektrikums explizit kenntlich zu machen. Man führt also die **dielektrische Polarisation** $\vec{P}$ ein

$$\vec{D} := \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} := \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E} \qquad \vec{P} = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

mit χ als **dielektrische Suszeptibilität**.

Wenn ein $\vec{E}$–Feld auf ein Atom wirkt, dann verschiebt es dort die positiven und negativen Ladungen. Der mittlere Abstand dieser Ladungen sei d und das produzierte Feld sei $\vec{E}_{\mathrm{pol}}$ mit den Ladungen Q^-_{pol} und Q^+_{pol}. Dann ergibt sich für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_{\mathrm{pol}} = \frac{Q_{\mathrm{pol}}}{A} = \frac{N\cdot d\cdot A\cdot q}{A} = Nqd = Np,$$

mit N der Dichte der Dipole, q der Ladungs $\mathbb{Z}e$ eines Dipols und p der Polarisation eines einzelnen Dipols. Für die Dichte gilt

$$Np := \frac{1}{V}\sum_i |\vec{p}_i| = |\vec{P}|,$$

also für die Oberflächendichte

$$\sigma_{\text{pol}} = |\vec{P}|.$$

Solange $|\vec{E}|$ klein gegenüber der Feldstärke im Molekül / Atom ist, dann ist

$$\vec{p}_i \propto \vec{E} = \vec{E}_D \Rightarrow \vec{p}_i = \alpha \cdot \vec{E}_D,$$

mit α als Materialkonstante welche die Polarisierbarkeit eines Materials angibt.

Betrachtet man nun die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q im Dielektrikum, gilt (mit $\vec{E}_V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ im Vakuum)

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{\sigma - \sigma_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} \\ &= E_V - \frac{|\vec{P}|}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}_D &= \frac{\vec{E}_V}{1+\chi} \\ &= \frac{\vec{E}_V}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_D = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_D = \varepsilon_0 \left(\vec{E}_V - \vec{E}_D \right).$$

1.13 Dielektrischer Verschiebungsstrom

Der dielektrische Verschiebungsstrom ist die effektive Formulierung der elektrostatik in Materie. Mit dem ersten Maxwell–Gesetz

$$\begin{aligned} \oint \left(\vec{E}_D \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right) &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{ges}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q + Q_{\text{pol}}) \\ \operatorname{div} \vec{E}_D &= \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{ges}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (q + q_{\text{pol}}) \\ \operatorname{div} \left[\vec{E}_V - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \right] &= \frac{1}{\varepsilon_0} (q + q_{\text{pol}}). \end{aligned}$$

Mit $\operatorname{div} \vec{P} = -q_{\text{pol}}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_V$ folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E}_D + \operatorname{div} \vec{P} \\ &= q + q_{\text{pol}} - q_{\text{pol}} \\ &= q. \end{aligned}$$

Die Divergenz des dielektrischen Verschiebungsfeld ist also die freie Ladung

$$\oint \left(\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right) = Q_{\text{frei}} \mathrel{\hat{=}} \text{Ladungsträger auf den Kondensatorplatten}.$$

1.14 Elektrisches Feld an Grenzflächen

Wenn ein elektrisches Feld orthogonal auf ein Dielektrum trifft, dann staucht sich dieses Feld um den Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$. Trifft das $\vec{E}$–Feld in einem Winkel auf ein Dielektrum, lässt sich dieses in eine orthogonale und parallele Komponente aufteilen. Die orthogonale Komponente wird wie gehabt mit $\frac{1}{\varepsilon}$ gestaucht, die parallele allerdings nicht. Stellt man sich einen Weg von A nach B in einem Vakuum, von B nach C von Vakuum in Dielektrikum, von C nach D im Dielektrikum und schließlich von D nach A von Dielektrikum nach Vakuum, dann ist

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

da das $\vec{E}$–Feld konservativ ist und die Übertritte BC und DA verschwinden. Für die Strecke AB und CD gilt also

$$\int_A^B \vec{E}_{||}^{\text{außen}}\,\mathrm{d}\vec{s}_1 + \int_C^D \vec{E}_{||}^{\text{innen}}\,\mathrm{d}\vec{s}_2 \to \mathrm{d}\vec{s}_1 = -\,\mathrm{d}\vec{s}_2.$$

Daraus folgt

$$\vec{E}_{||}^{\text{außen}} = \vec{E}_{||}^{\text{innen}},$$

sonst würde auf einem geschlossenen Weg Arbeit verrichtet werden. Betrachtet man nun dem Winkel α zwischen der orthogonalen und schrägen Komponente des $\vec{E}$–Feldes im Vakuum und β analog in dem Dielektrikum, gilt

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{E}_\perp|}{|\vec{E}_{||}|} \qquad \tan\beta = \frac{|\vec{E}_\perp|\frac{1}{\varepsilon}}{|\vec{E}_{||}|}$$

womit das Brechungsgesetz für elektrische Felder folgt

$$\tan\alpha = \varepsilon\tan\beta.$$

2 Elektrostatik

2.1 Elementarladungen

Ladungsträger kommen als freie Ladungen vor. Mit dem Milikanversuch wurde gezeigt, dass sie als ganzzahlige Veilfache einer positiven oder negativen Elementarladung $Q = \pm n_{\mathbb{N}} e$ vorkommen, mit

$$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\,.$$

Die Ladungen entsprechen den Angriffspunkten der elektromagnetischen Kräften (analog wie die Masse der Angriffspunkt der Gravitation ist). Ruhende Ladungen führen zu anziehenden oder abstoßenden Kräften. Zu sehen ist auch, dass das Abstandsverhalten dasselbe, wie das der Gravitation ist. Zudem weisen bewegte Ladungen eine geschwindigkeitsabhängige Kraft auf. Dies ist der Ursprung des Magnetismus und der Lorentzkraft.

Der Wert der Elementarladung ist eine Naturkonstante und hängt nicht von dem Bewegungszustand.

Die Zahl der Elementarladungen ist erhalten

$$\sum_{i,j} \left(q_i^- + q_j^+\right) = \text{ const.}\,.$$

Neutronen sind elektrisch neutrale Teilchen. Sie haben eine Lebensdauer von $\tau_n \approx 16 \cdot 60\,\mathrm{s}$ und zerfallen in

$$n \to p^+ + e^- + \overline{\nu}_{e^-}.$$

Dies zeigt, dass Ladungserhaltung auch gilt, wenn Ladungsträger erzeugt oder vernichtet werden.

Die **Stromstärke** wird in Ampère A angegeben. Die **Ladung** in As oder C und entspricht der Ladung, die durch den Querschnitt eines elektrischen Leiters mit der Stromstärke von $1\mathrm{A}$ in einer Sekunde fließt. Die **Spannung** V wird in $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$ angegeben. Die **Faraday–Konstante** ist die Ladung von einem Mol eines Stoffes, also $F = e \cdot N_A$.

Ladungsinfluenz

Wenn sich ein Körper mit Ladungsträgern einem leitenden Körper nähert, verschieben sich die beweglichen Ladungsträger des leitenden Körpers in Abhängigkeit der Ladung des sich annähernden Körpers.

2.2 Coulomb–Gesetz

Zwischen gleichnamigen Ladungen wirkt eine abstoßende Kraft

$$F \propto Q_1 \cdot Q_2.$$

Bei konstanten Ladungen und größer werdendem Abstand sinkt diese Kraft mit

$$\frac{1}{r_{12}^2},$$

wobei r_{12} der Abstand zwischen den Ladungen 1 und 2 ist. Daraus folgt das **Coulombsche Kraftgesetz**

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = f \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}^2 \qquad f = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \text{ in SI mit } [f] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{As}}\,\mathrm{m}\,.$$

f beinhaltet die Komponente des Schwächungsfaktors ε^{-1}. Im Vakuum beträgt dieser 1, in Luft ≈ 1, in Wasser 80. ε_0 ist die **elektrische Feldkonstante** mit einem Wert von $\varepsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As}\,\mathrm{V}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$. Im Vakuum ist $\varepsilon = 1$ und $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}}$, was zur Folge hat, dass wenige Ladungsträger genügen um große Spannungen zu erzeugen.

2.3 Potentielle Energie

Die Coulomb–Kraft ist ein, analog zur Gravitationskraft, konservatives Kraftfeld. Um die potentielle Energie zu errechnen wird sich zuerst die potentielle Energie zwischen zwei Ladungen in einem Abstand von $r = \infty$ als $E_p(\infty) = 0$ definiert. Man kann dann zeigen, dass

$$\begin{aligned} E_p(r) = E_p(r) - E_p(\infty) = W_{a,\infty\to r} &= -\int_\infty^r \vec{F}_c\,(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \\ &= \int_r^\infty \vec{F}_c\,(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\vec{r}\,' \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Dies entspricht der Arbeit die benötigt wird, Ladungen von einem Abstand r zu einem Abstand von $r = \infty$ zu bringen. Sind drei Ladungen in einem System gilt

$$W_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}}\right).$$

Für N Ladungen gilt dann

$$E_p = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Besser ist allerdings mit einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu rechnen

$$E_p = \left[\int_V \int_V \frac{\rho(r')\rho(r'')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}\,''|}\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau''\right]\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0},$$

mit $\rho(r)_i$ als Ladungsdichte und τ als infinitesimales Volumenelement. Zudem gilt

$$\Delta Q_i = \Delta\tau \cdot \rho(r_i).$$

2.4 Elektrisches Feld

Die Kraft die auf eine Testladung wirkt, wenn sie in einem Abstand von $\vec{r}_{jq}$ zu einem Körper mit elektrischer Ladung ist, ist

$$\begin{aligned} F_q = \sum_j F_{jq} &= q \sum_j \frac{Q_j \cdot \hat{r}_{jq}}{r_{jq}^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= q \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{el. Feldstärke}} \quad . \end{aligned}$$

Besteht das System nur aus zwei Ladungen, so gelten äquivalente Ausdrücke

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}_1) &= \frac{q_1 \hat{r}_1}{r_1^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \\ \vec{E}_2(\vec{r}_2) &= \frac{q_2 \hat{r}_2}{r_2^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= -\frac{q_2 \hat{r}_1}{r_1^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} . \end{aligned}$$

Bei der Ermittlung des elektrischen Feldes muss die Probeladung ausgeschlossen werden.

2.4.1 Wirbelfreiheit eines el. Feldes

Wenn ein elektrisches Feld durchschritten wird und wieder am Anfangspunkt angekommen wird, wird keine Arbeit verrichtet

$$\begin{aligned} W &= \oint \left(\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) \\ \frac{W}{q} &= \oint \left(\frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) = \oint \left(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine fundamentale Eigenschaft von elektrostatischen Feldern. Alternativ lässt sich auch die Rotation betrachten

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

2.5 Elektrisches Potential

Wird ein Weg von p_1 nach p_2 durch ein elektrisches Feld gewählt gilt

$$\begin{aligned}\frac{W_{q,1\to 2}}{q} &= \frac{1}{q}\int_{p_1}^{p_2}\left(\vec{F}_c \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)\\ &= \int_{p_2}^{p_1}\left(\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)\\ &= \varphi_2 - \varphi_1\\ &= U_{21}.\end{aligned}$$

φ_2, φ_1 ist dann das elektrische Potential mit U_{21} der Potentialsdifferenz.Anders ausgedrückt, da $\vec{E}$ konservativ ist

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{r}\right).$$

Die Einheit ist $[\varphi] = \frac{\mathrm{W_{el}}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} = \mathrm{V}$, sowie $[\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

2.5.1 Punktladungen

Das Potential einer Punktladung ist

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0}\\ &= \int_r^\infty \left(\vec{E}\left(\vec{r}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right)\\ &= \int_r^\infty \frac{Q\left(\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.\end{aligned}$$

Das Potential einer Ladungsverteilung mit N Punktladungen Q_i and Orten $\vec{r}_i$ mit $i \in \mathbb{N}$

$$\varphi\left(\vec{r}_p\right) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_p\right|},$$

wobei $\vec{r}_p$ der Abstand zur Probeladungs / zum Betrachtungspunkt ist.

2.5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte

Eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte $\rho\left(\vec{r}_i\right)$ im Volumenelement $\Delta\tau_i$ ist

$$\Delta Q_i = \rho\left(\vec{r}_i\right)\cdot\Delta\tau_i.$$

Das elektrostatische Potential im Beobachtungspunkt $\vec{r}_p$ ist

$$\begin{aligned}\varphi\left(\vec{r}_p\right) &= \left[\lim_{\Delta\tau\to\mathrm{d}\tau, N\to\infty}\sum_{i=n}^{N}\frac{\rho\left(r_i\right)\Delta\tau_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_p\right|}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_V\left(\frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_p\right|}\cdot \mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

Ein einfaches Beispiel ist das Wasserstoffatom, wessen Potential einem $\frac{1}{r}$–Verhalten folgt. Da das Proton viel schwerer als das Elektron ist, kann es als fast statisch angenommen werden und beide Ladungen sind Punktladungen. Schwerere Atome sind deutlich komplexer. Der Kern kann weiterhin als Punktladungs angenommen werden, aber die Elektronen werden zahlreicher, also kommt es zu einer Ladungsverteilung, und die Elektronen beeinflussen sich gegenseitig. Im Kern wirken zudem die langreichweitigen abstoßenden Kräfte zwischen den Protonen, mit der potentiellen Energie

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \propto \mathrm{Z}\,;$$

und die kurzreichweitigen starken Wechselwirkungen der Nukleonen, welche dieses Potential kompensieren, mit

$$E_a \propto \mathrm{A}\,.$$

Existieren (vor Allem in schweren Kernen) mehr Neutronen als Protonen, dann ist der Kern stabil. Ab einer gewissen Massezahl, bzw. Ungleichgewicht von Protonen und Neutronen ist der Kern nicht mehr stabil. Dies ist die Ursache für Kernspaltung. Die dabei freiwerdende Energie ist zu einem kleinen Teil die Coulomb–Abstoßung, zum größeren Teil allerdings die starke Wechselwirkung.

2.6 1. Maxwell–Gesetz

Mit der $\frac{1}{r^2}$–Abhängigkeit und dem Gauß'schen Satz lässt sich eine Beziehung zwischen der Ladungsverteilung und einem elektrischen Feld herstellen.

Gauß'scher Satz und Stromdichte

Der Strom $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ ist die Ladung pro Zeiteinheit. Er lässt sich auch als Fläche mal Stromdichte $\vec{A} \cdot \vec{j} = A \cdot \hat{n} \cdot \vec{j}$ darstellen. Für eine beliebige Fläche A lässt sich schreiben

$$I = \int_A \left(\vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A}' \right).$$

Für eine geschlossene Fläche (integration über die Oberfläche) gilt

$$I = \oint_O \left(\vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{O}' \right).$$

Benutzt man einen Quader als Volumenelement, dann fließt auf einer Seite eine Stromdichte von $j_x(x)$ bzw. $\mathrm{d}Q_x^-$ rein und auf der anderen Seite eine Stromdichte von $j_x(x + \mathrm{d}x)$ bzw. $\mathrm{d}Q_x^+$ wieder raus

$$\mathrm{d}Q_x^+ = j_x\,(x + \mathrm{d}x)\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}Q_x^- = j_x\,(x)\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Q_x &= \mathrm{d}Q_x^+ - \mathrm{d}Q_x^- \\
&= \left[j_x\left(x + \mathrm{d}x\right) - j_x\left(x\right)\right]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial j_x}{\partial x}\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{=\mathrm{d}V}\,\mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}Q_x^2}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} &= \frac{\partial j_x}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Analog für y und z Richtung ist dann die Gesamtladung

$$\frac{\mathrm{d}Q^2}{\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{j} = \vec{\nabla}\vec{j}.$$

Falls $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, dann ist $\vec{j}$ Quellenfrei. Der Gauß'sche Satz besagt dann

$$\begin{aligned}
I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \int_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V \\
&\stackrel{!}{=} \oint\left(\vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A}\right).
\end{aligned}$$

Elektrischer Kraftfluss

Der elektrische Kraftfluss Φ ist proportional zur Zahl der durch A hindurchtretende Feldlinien

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \int_A \left(\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}'\right) \\
&= \int_A E\cos\alpha\,\mathrm{d}A' \\
\mathrm{d}\Phi_E &= E\cdot\,\mathrm{d}A'\cos\alpha \\
&= \left(\vec{E}\cdot\,\mathrm{d}\vec{A}'\right),
\end{aligned}$$

mit α dem Winkel zwischen der Flächennormalen und den elektrischen Feldlinien. Ist eine Ladung von einer Kugel eingeschlossen ist der elektrische Kraftfluss

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \oint_{\text{Kugelschale}}\left(\vec{E}\cdot\,\mathrm{d}\vec{A}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{Q}{r^2}r^2\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint\,\mathrm{d}R \\
&= \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Der Abfall der Feldstärke mit $\frac{1}{r^2}$ wird durch den Zuwachs der Kugeloberfläche mit r^2 kompensiert. Dies ist auch der Fall, wenn die Integration über eine beliebige geschlossene Fläche durchgeführt wird. Sollte die Ladung keine Punktladungs, sondern eine Ladungsverteilung sein, dann gelten diese Zusammenhänge solange, wie die Ladungsverteilung die gleichen Symmetrien wie die Punktladung aufweist. Man kann also jedem Volumenelement $\mathrm{d}\tau$ ein Ladungselement $\mathrm{d}Q$ zuordnen, also $\mathrm{d}Q = \rho_E(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\tau$. Der Beitrag zum elektrischen Kraftfluss ist dann $\mathrm{d}\Phi_E = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Im allgemeinen, bzw die **erste Maxwell'sche Gleichung**

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int_V \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \left(\rho_E(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\tau\right) \\ &\overset{!}{=} \int \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}A'\right).\end{aligned}$$

1. Maxwell'sche Gesetz: Die Quelldichte des elektrostatischen Feldes $\operatorname{div}\vec{E}$ ist proportional zur Ladungsdichte ρ mit dem Proportionalitätsfaktor $\varepsilon\varepsilon_0$

$$\oint_A \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right) = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \rho.$$

Da das elektrostatische Feld ein konservatives Kraftfeld ist kann man es mit dem Gradienten des skalaren Feld eines elektrostatischen Potentials herleiten $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$. Setzt man diesen Ausdruck noch ein erhält man die **Poissongleichung**

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Betrachtet man den Kraftfluss im Außenraum $r > R$ einer kugelsymmetrischen Ladung mit Radius R, so gilt

$$\oint_{A_{\text{Kugel}}} \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}'\right) = \int_{A_{\text{Kugel}}} E(r) \cdot \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{r})}_{=1} \cdot \mathrm{d}A = E(r) \cdot 4\pi r^2.$$

Wendet man nun das erste Maxwell'sche Gesetz an, folgt (für $r > R$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho(r)\,\mathrm{d}\tau &= \oint_A \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}'\right) \qquad |r > R \\ \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} &= E(r) \cdot 4\pi r^2 \\ \vec{E}(r) &= \frac{Q}{r^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\hat{r}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass das Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung im Außenraum identisch mit einer gleichstarken Punktladung im Mittelpunkt ist. Dies ist auch der Grund, warum im Coulomb–Gesetz 4π vorkommt. Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Sollte man das elektrische Feld innerhalb einer Ladungsverteilung, mit $\rho =$ const. betrachten, also $r < R$, folgt

$$\begin{aligned} q = \int_{V_{\text{Kugel}\, r<R}} \rho\left(r\right)\, \mathrm{d}\tau &= \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 \\ &= Q\frac{r^3}{R^3} \\ \vec{E}\left(\vec{r}\right) &= \frac{q}{r^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\hat{r} \\ &= \frac{Qr}{R^3}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\hat{r} \end{aligned}$$

und das Potential

$$\varphi\left(r\right) = \frac{Q}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right).$$

Ein wichtiges Beispiel ist der Atomkern mit $\rho =$ const.. Die Protonen bauen ein Coulombpotential auf, welches andere Atomkerne auf Distanz hält.

2.7 Oberflächenladung auf Leitern

Leiter sind makroskopische Objekte, in denen sich Elektronen frei bewegen können und ortsfeste Ionen hinterlassen. Wird ein Leiter mit einer Ladung „beladen“, dann verteilt sich die Ladung in einem elektrostatischen Gleichgewicht auf der Oberfläche und das Innere des Leiters bleibt neutral. Befindet sich im Inneren eine nicht kompensierte überschüssige Ladung, dann induziert diese ein el. Feld, welches die freien Ladungsträger anzieht und somit die Ladung kompensiert (die gleiche Ladung wird dann auf die Oberfläche geschoben).

Im folgenden wird von elektrostatischen Situationen ausgegangen, also die Ladungsträger bewegen sich nicht.

Betrachtet man nun eine Ladungsverteilung auf einer beliebigen gekrümmten Oberfläche und die Ladungen befinden sich in einem Gleichgewicht, dann baut jede Ladung ein zur Oberfläche orthogonales $E_\perp$–Feld auf (mit $E_{||} = 0$, da sich die Ladungen sonst nicht mehr in einem Gleichgewicht befinden würden). Im Inneren ist $\vec{E} = 0$. In einem Abstand d zur Oberfläche ist das elektrische Potential $\varphi\left(d\right) =$ const.. Diese Flächen werden **Äquipotentialflächen** genannt. Jeder Weg $\vec{s}$ parallel zu der Oberfläche steht immer senkrecht zu $\vec{E}$. $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{s}} = 0$.

Man führt die Größe **Oberflächenladungsdichte** σ ein, welche die Ladungsdichte an der Oberfläche beschreibt, da die Ladungsdichte selbst nur an der Oberfläche $\rho \neq 0$ ist. Entferne man sich also ein ε von der Oberfläche wäre sie wieder $\rho = 0$. Sie wird definiert als Ladung pro Fläche

$$\mathrm{d}Q = \sigma \cdot \mathrm{d}A \qquad [\sigma] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Der elektrische Kraftfluss ist dann

$$\mathrm{d}\Phi_E = \left(\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}\right) = E \cdot \mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, \mathrm{d}A}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

also

$$\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E.$$

Die Gesamtladung Q ist geometrieabhängig, aber im allgemeinen

$$Q = A \cdot \sigma.$$

Sie ist auf der Oberfläche gleichverteilt. Das Potential mit R als Radius der Ladungsverteilung

$$\varphi = \frac{Q}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\varphi}{R}.$$

Je kleiner also der Radius R, desto größer wird das elektrische Feld E. Da die Coulomb–Kraft proportional zur Feldstärke ist, führt dies zur Emission von Ladungsträgern bei hohen Spannungen. Zum Beispiel fängt sich ein S–förmiger Leiter an zu drehen, wenn die angelegte Spannung hoch genug ist, sodass die Ladungsträger in die Luft emittiert werden.

Faraday'scher Käfig
Ist ein Raum von elektrischen Leitern umschlossen, so bleibt der Raum innerhalb des Käfigs Feldfrei und es existiert nur ein Feld am Rand des Käfigs. Dies geschieht aufgrund des ersten Maxwell'schen Gesetzes.

2.8 Influenz

Wird ein elektrisch neutraler Leiter in ein E–Feld gebracht, dann sammeln sich negative Ladungsträger auf der einen und hinterlassen potivie Löcher auf der anderen Seite. Durch diese Ladungsverschiebung baut sich ein Gegenfeld E' auf, welches genau so stark ist, dass das ursprüngliche Feld im Inneren des Leiters kompensiert wird

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) + \vec{E}'\left(\vec{r}'\right) = 0.$$

Dasselbe Phänomen ist auch zu beobachten, wenn man zwei Leiter zwischen zwei Kondensatorplatten, welche ein E–Feld aufgebaut haben, hält. Zieht man die beiden Leiter etwas auseinander, dann wird zwischen diesen Leitern ein E–Feld aufgebaut, und sie werden geladen.

Der Grund für diese **Influenz** ist die sogenannte **Spiegelladung**. Wirkt ein elektrisches Feld einer Punktladung Q auf einen Leiter im Abstand d, dann wird in diesem eine Spiegelladung $-Q$ im Abstand d induziert. Ladung und Spiegelladung ziehen sich aufgrund der Coulomb–Kraft mit dem Abstand $2d$ an.

2.9 Kondensatoren und Kapazität von Leitern

Man betrachtet einen einzelnen, isolierten Leiter. Das Potential ist streng proportional zur Ladung Q auf dem Leiter. Die Kapazität eines solchen Leiters ist

$$C = \frac{Q}{\varphi\left(Q\right) - \varphi\left(Q = 0\right)} = \frac{Q}{U} \qquad [C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}\,,$$

mit U der Spannung. Die Kapazität ist also die Ladung geteilt durch die Potentialdifferenz des Leiters mit und ohne Ladungs gegenüber seiner Umgebung.

Beispiel: Kapazität einer leitenden Kugel
Das elektrostatische Potential einer leitenden Kugel ist

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

Die Kapazität ist dann

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Kondensatoren
Bei Kondensatoren kann die Kapazität durch Influenz gesteigert werden. Wird auf Kondensatorplatte eine Spannung angelegt, dann baut sich auf der anderen Platte eine Spiegelladung auf. Die Gesamtladung sowie das E–Feld im elektrostatischen Fall bleibt konstant

$$\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = \frac{Q}{A} = \text{const.}.$$

Zwischen den Platten ist die Ladung sowie die Ladungsdichte $Q = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Daraus folgt, dass $-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$. In einer Dimension gilt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \\
&\varphi(x) = ax + b \qquad \left|\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi_1\\ \varphi(d) &= \varphi_2\end{aligned}\right. \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = U \\
&\varphi(x) = -\frac{U}{d} + \varphi_1.
\end{aligned}$$

Dann ist das elektrische Feld

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\operatorname{grad}\varphi \\
&= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{=0}, \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}_{=0}\right) \\
&= \left(\frac{U}{d}, 0, 0\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_x d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_x A}{E_x d} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{A}{d}.$$

Je kleiner als oder Abstand d, desto größer die Kapazität C.

Schaltet man zwei Kondensatoren parallel, so addieren sich die Kapazitäten, da sich die

Flächen addieren. Schaltet man zwei Kondensatoren in Reihe, dann ist an dem ersten Kondensator eine Spannung $+Q$ welche eine Spiegelladung $-Q$ induziert, welche eine Speigelladung $+Q$ am nächsten Kondensator induziert, welche eine Spiegelladung $-Q$ induziert. Bei dieser Schaltung gilt $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

2.10 Energiedichte

Feldlinien lassen sich in die zwei Komponenten der positiven Ladungen mit dem $\vec{E}^{+}$–Feld und negativen Ladungen mit dem $\vec{E}^{-}$–Feld aufteilen, wobei gilt $|\vec{E}^{+} + \vec{E}^{-}| = E = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 A}$. Die beiden Feldstärken haben die Relation $|\vec{E}^{+}| = |\vec{E}^{-}| = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 A}$. Die korrespondierenden Kräfte sind $\vec{F}^{+} = (+Q)\,\vec{E}^{-} = -\vec{F}^{-} = (-Q)\,\vec{E}^{+}$, mit $|\vec{F}^{+}| = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon\varepsilon_0 A} = |\vec{F}^{-}|$. Mit d dem Abstand der Kondensatorplatten folgt für die Arbeit (entspricht der potentiellen Energie des $\vec{E}$–Feldes)

$$W_{d\to 0} := |\vec{F}^{+}| \cdot d = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon\varepsilon_0 A} \cdot d := E_p(d) - E_p(0).$$

Für den Plattenkondensator gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Q}{A} = \varepsilon\varepsilon_{=}E \\ E_p\left(d\right) &= \frac{1}{2}\frac{\left(\varepsilon\varepsilon_0 AE\right)^2}{\varepsilon\varepsilon_0 A}d \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \underbrace{A \cdot d}_{=\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V} . \end{aligned}$$

Pro Volumenelement gilt

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}V} = \rho_{E_p} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

was der Energiedichte des elektrischen Feldes entspricht.

Der Kondensator kann auch als Energiespeicher benutzt werden. Es gilt $C \cdot d = \varepsilon\varepsilon_0 A$, womit

$$E_p\left(C, Q, U\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{Cd} = \frac{1}{2}U^2 C = \frac{1}{2}QU.$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Kondensatoren.

2.11 Elektrischer Dipol und elektrisches Dipolmoment

Das elektrische **Potential eines Dipols** setzt sich aus den Beiträgen beider Ladungen zusammen

$$\varphi_D\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{+Q}{|\vec{r}_{+}|} + \frac{-Q}{|\vec{r}_{-}|}\right),$$

mit d dem Abstand der Ladungen und $\vec{r}_{+}$, $\vec{r}_{-}$ dem Abstand der jeweiligen Ladung zur Probeladung. Man betrachtet hier nur Fälle für $r \gg d$, da der Dipol auf mikroskopischer und der Abstand zur Probeladung auf makroskopischer Skala ist. Mit θ dem Winkel zwischen $\frac{d}{2}$ und $\vec{r}$ folgen die Näherungen $|\vec{r}^{+} \approx |\vec{r}| - \frac{d}{2}\cos\theta$ und $|\vec{r}^{-}| \approx |\vec{r}| + \frac{d}{2}\cos\theta$, also

$$\varphi\left(r,\theta\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r-\frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r+\frac{d}{2}\cos\theta}\right),$$

mit $\frac{1}{r-a} + \frac{1}{r+a} = \frac{2a}{r^2-a^2}$ folgt

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}.$$

Also gilt für das Potential eines Dipols

$$\varphi_D\left(r,\theta\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon}\frac{d\cos\theta}{r^2} \qquad \varphi_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Dieses fällt im Gegensatz zum Monopol mit $\frac{1}{r^2}$ ab. Hätte das Dipol zwei gleichnamige Ladungen würde es wiederum mit $\frac{1}{r}$ abfallen.

Mit $d\cos\theta = \vec{d}\cdot\hat{r}$ folgt das **Dipolmoment**

$$\vec{p} = \vec{d}\cdot Q.$$

Schreibt man das Potential mit dem Dipolmoment um, gilt

$$\varphi\left(r,\theta\right) \approx \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

2.11.1 Elektrisches Feld des Dipolsmoments

Das elektrische Feld des Dipolmoments ist

$$\vec{\nabla}\cdot\varphi = \vec{E}.$$

Es bietet sich an hier Kugelkoordinaten zu verwenden

$$\vec{\nabla}_{r,\theta,\varphi} = \partial_r\hat{r} + \frac{1}{r}\partial_\theta\hat{\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\partial_\Phi\hat{\Phi}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(r,\theta\right) &= -\vec{\nabla}_{r,\theta,\Phi}\cdot\varphi\left(r,\theta\right)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right).\end{aligned}$$

Man erkennt, dass das $\vec{E}$–Feld eines Dipols mit $\frac{1}{r^3}$ abfällt, wohingegen das $\vec{E}$–Feld eines Monopols mit $\frac{1}{r^2}$ abfällt. Zudem kann man erkennen, dass das $\vec{E}$–Feld nicht mehr kugelsymmetrisch ist.

2.12 Dipolmoment im elektrischen Feld

Existiert ein Dipolmoment in einem $\vec{E}$–Feld, dann wirkt darauf eine Kraft $\vec{F}^{\pm} = \pm Q\vec{E}$, sowie ein Drehmoment

$$M = M^{+} + M^{-} = \left(\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}^{+}\right) + \left(\frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{F}^{-}\right) = Q\left(\vec{d} \times \vec{E}\right) = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Die potentielle Energie ist dann abhängig von dem Winkel θ (der Winkel zwischen dem $\vec{E}$–Feld und dem Dipolmoment)

$$E_p\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) - E_p(\theta) = \vec{x}\vec{F}^{+} + \left(-\vec{x}\vec{F}^{-}\right) = d\cos\theta QE = pE\cos\theta.$$

Viele Moleküle haben einen permanenten Dipol, wonach sie sich unter Einfluss eines $\vec{E}$–Feldes ausrichten.

2.12.1 Isolatoren im elektrischen Feld, Dielektrika

Leiter besitzen freie Ladungsträger, welches sich durch das Material bewegen können und so das $\vec{E}$–Feld im Inneren vollständig kompensieren können. Bei **Dielektrika** können sich Ladungsträger nicht frei bewegen, aber lokal verschieben, indem sich zum Beispiel Dipole nach dem $\vec{E}$–Feld ausrichten. Dies kann allerdings, nicht wie bei Leitern, ein $\vec{E}$–Feld vollständig kompensieren, sondern nur abschwächen.

Füllt man ein Kondensatorfeld mit einem Dielektrikum, dann erhöht sich die Kapazität um ε

$$C_D = \frac{\varepsilon Q_0}{U_0} = \varepsilon C_0,$$

mit Q_0, U_0 und C_0 als Ausgangsgrößen des Kondensators. Die potentielle Energie ist dann

$$E_p = \frac{1}{2}C_d U^2 = \frac{1}{2}\varepsilon C_0 U^2.$$

2.12.2 Zylinderkondensator

Ein Zylinder der Länge l und mit dem Radius r erzeugt mit der Außenwand und einem Stab durch die Mitte, mit dem Radius R_1 ein radialsymmetrisches elektrisches Feld

$$\begin{aligned}\int_A \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \\ 2\pi r l E &= \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l}.\end{aligned}$$

Mit dem Abstand von der Außenseite des Stabs zur Zylinderwand R_2 ergibt sich die Spannung zu

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} E \, \mathrm{d}r \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Die Kapazität ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Mit dem Faktor ε lässt sich auch ein Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten einbauen.

2.12.3 Dielektrische Verschiebung

Bisher gilt der Ausdruck

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}r = \oint_A \left(\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right).$$

Man definiert nun $\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$, also

$$\int \left(\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right) = \int_V \rho\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}V = Q \qquad \mathrm{div}\, \vec{D} = \rho.$$

Es ist nützlich den Einfluss des Dielektrikums explizit kenntlich zu machen. Man führt also die **dielektrische Polarisation** $\vec{P}$ ein

$$\vec{D} := \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} := \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{P} = (\varepsilon - 1)\, \varepsilon_0 \vec{E} = \chi\varepsilon_0 \vec{E},$$

mit χ als **dielektrische Suszeptibilität**.

Wenn ein $\vec{E}$–Feld auf ein Atom wirkt, dann verschiebt es dort die positiven und negativen Ladungen. Der mittlere Abstand dieser Ladungen sei d und das produzierte Feld sei $\vec{E}_{\text{pol}}$ mit den Ladungen Q_{pol}^- und Q_{pol}^+. Dann ergibt sich für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{pol}}}{A} = \frac{N \cdot d \cdot A \cdot q}{A} = Nqd = Np,$$

mit N der Dichte der Dipole, q der Ladungs $\mathbb{Z}e$ eines Dipols und p der Polarisation eines einzelnen Dipols. Für die Dichte gilt

$$Np := \frac{1}{V} \sum_i |\vec{p}_i| = |\vec{P}|,$$

also für die Oberflächendichte

$$\sigma_{\text{pol}} = |\vec{P}|.$$

Solange $|\vec{E}|$ klein gegenüber der Feldstärke im Molekül / Atom ist, dann ist

$$\vec{p}_i \propto \vec{E} = \vec{E}_D \Rightarrow \vec{p}_i = \alpha \cdot \vec{E}_D,$$

mit α als Materialkonstante welche die Polarisierbarkeit eines Materials angibt.

Betrachtet man nun die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q im Dielektrikum, gilt (mit $\vec{E}_V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ im Vakuum)

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{\sigma - \sigma_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} \\ &= E_V - \frac{|\vec{P}|}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}_D &= \frac{\vec{E}_V}{1+\chi} \\ &= \frac{\vec{E}_V}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_D = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_D = \varepsilon_0 \left(\vec{E}_V - \vec{E}_D \right).$$

2.13 Dielektrischer Verschiebungsstrom

Der dielektrische Verschiebungsstrom ist die effektive Formulierung der elektrostatik in Materie. Mit dem ersten Maxwell–Gesetz

$$\begin{aligned} \oint \left(\vec{E}_D \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right) &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{ges}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(Q + Q_{\text{pol}} \right) \\ \operatorname{div} \vec{E}_D &= \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{ges}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q + q_{\text{pol}} \right) \\ \operatorname{div} \left[\vec{E}_V - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \right] &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q + q_{\text{pol}} \right). \end{aligned}$$

Mit $\operatorname{div} \vec{P} = -q_{\text{pol}}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_V$ folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E}_D + \operatorname{div} \vec{P} \\ &= q + q_{\text{pol}} - q_{\text{pol}} \\ &= q. \end{aligned}$$

Die Divergenz des dielektrischen Verschiebungsfeld ist also die freie Ladung

$$\oint \left(\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right) = Q_{\text{frei}} \mathrel{\hat{=}} \text{Ladungsträger auf den Kondensatorplatten}.$$

2.14 Elektrisches Feld an Grenzflächen

Wenn ein elektrisches Feld orthogonal auf ein Dielektrum trifft, dann staucht sich dieses Feld um den Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$. Trifft das $\vec{E}$–Feld in einem Winkel auf ein Dielektrum, lässt sich dieses in eine orthogonale und parallele Komponente aufteilen. Die orthogonale Komponente wird wie gehabt mit $\frac{1}{\varepsilon}$ gestaucht, die parallele allerdings nicht. Stellt man sich einen Weg von A nach B in einem Vakuum, von B nach C von Vakuum in Dielektrikum, von C nach D im Dielektrikum und schließlich von D nach A von Dielektrikum nach Vakuum, dann ist

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

da das $\vec{E}$–Feld konservativ ist und die Übertritte BC und DA verschwinden. Für die Strecke AB und CD gilt also

$$\int_A^B \vec{E}_{||}^{\text{außen}}\,\mathrm{d}\vec{s}_1 + \int_C^D \vec{E}_{||}^{\text{innen}}\,\mathrm{d}\vec{s}_2 \to \mathrm{d}\vec{s}_1 = -\,\mathrm{d}\vec{s}_2.$$

Daraus folgt

$$\vec{E}_{||}^{\text{außen}} = \vec{E}_{||}^{\text{innen}},$$

sonst würde auf einem geschlossenen Weg Arbeit verrichtet werden. Betrachtet man nun dem Winkel α zwischen der orthogonalen und schrägen Komponente des $\vec{E}$–Feldes im Vakuum und β analog in dem Dielektrikum, gilt

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{E}_\perp|}{|\vec{E}_{||}|} \qquad \tan\beta = \frac{|\vec{E}_\perp|\frac{1}{\varepsilon}}{|\vec{E}_{||}|}$$

womit das Brechungsgesetz für elektrische Felder folgt

$$\tan\alpha = \varepsilon\tan\beta.$$

a