Notizen - B.Sc. Physik | math241

Inhaltsverzeichnis

1 Topologie metrischer Räume **4**
- 1.1 Norm . . . 4
  - 1.1.1 Normierter Raum . . . 4
- 1.2 Innenprodukträume . . . 5
  - 1.2.1 Cauchy–Bunjakowski–Schwarz–Ungleichung . . . 6
- 1.3 L^2–Raum . . . 6
- 1.4 Offene und punktierte offene Kugel . . . 6
- 1.5 Vollständige Räume . . . 7
- 1.6 Abschluss und Rand . . . 7
- 1.7 Dichte Mengen . . . 8
- 1.8 Isometrie und isometrische Isomorphie . . . 8
- 1.9 Äquivalenzrelationen von Normen . . . 8
- 1.10 Abstand zu einer kompakten Menge . . . 8

2 Folgen und Stetigkeit **9**
- 2.1 Konvergenz und Cauchy–Folgen . . . 9
  - 2.1.1 Konvergenz . . . 9
  - 2.1.2 Konvergenz in $\mathbb{K}^m$ . . . 9
- 2.2 Teilfolgen und kompakte Mengen . . . 9
  - 2.2.1 Überdeckung . . . 10
  - 2.2.2 Erweiterte reelle Zahlengrade . . . 10
  - 2.2.3 Obere und untere Grenzwerte . . . 10
- 2.3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen . . . 11
- 2.4 Topologische Stetigkeit . . . 12
- 2.5 Komponentenweise Stetigkeit . . . 12
- 2.6 l^p–Produktnormen . . . 12
- 2.7 Stetigkeit von Einschränkungen . . . 13
- 2.8 Lipschitz–Stetigkeit . . . 13
- 2.9 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen . . . 14
- 2.10 Wegzusammenhängende Mengen und stetige Funktionen . . . 14

3 Stetige Lineare Operatoren **15**
- 3.1 Beschränkte Funktionen . . . 15
- 3.2 Polynome mehrerer Variablen . . . 17
- 3.3 Operationen mit Grenzwerten der Funktionen . . . 17
  - 3.3.1 Links– und rechtsseitige / obere und untere Grenzwerte von Funktionen . . . 18

4 Matrizen **18**
- 4.1 Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen . . . 18
  - 4.1.1 Adjungierte und selbstadjungierte quadratische Matrizen . . . 18

4.1.2 Spektralsatz 19

5 Mehrdimensionale Differenzialgleichungen 19

6 Mehrdimentionale Integralrechnung 19

7 Vektoranalysis 19

8 Hilberträume, L^2–Räume und Fourierreihen 19

9 Variationsrechnung und Laplace–Operator 19

10 Notizen 19

1 Topologie metrischer Räume

Ein metrischer Raum (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abstandsfunktion

$$d : X \times X \to [0, +\infty)$$

die die folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in X$ haben

(a) $d(x, y) \geq 0$ d ist positiv semidefinit

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ zusammen mit (a) ist d positiv definit

(c) $d(x, y) = d(y, x)$ Symmetrie

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Dreiecksungleichung

Die Funktion $d(\cdot, \cdot)$ heißt auch der Abstand oder die Metrik.

Sei M eine Teilmenge des metrischen Raums (X, d). Dann ist (M, d) auch ein metrischer Raum

$$(M, \rho) \text{ mit } \rho = d|_{M \times M} \text{ ist ein metrischer Raum.}$$

Der Abstand ρ heißt induzierter Abstand durch den Abstand d. Man sagt auch, dass die Betragsnorm $|\cdot|$ den Abstand $d_2(x, y) = |x - y|$ in $\mathbb{K}^n$ induziert.

1.1 Norm

Sei ein V Vektorraum. Eine Funktion $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn sie folgende Eigenschaften $\forall u, v \in V$ besitzt

(a) $||u|| \geq 0$ (positive Semidefinitheit)

(b) $||u|| = 0$ genau wenn $u = 0_V$ (zusammen mit (a) positive Definitheit)

(c) $||\alpha u|| = |\alpha| \, ||u|| \, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(d) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (Dreiecksungleichung)

1.1.1 Normierter Raum

Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ heißt normierter Vektorraum, wenn V mit einer Norm $||\cdot||$ ausgerüstet wird. In diesem Fall schreibt man den normierten Raum als $(V, ||\cdot||)$.

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Mit $d(v, u) = ||v - u||$ ist (V, d) dann ein metrischer Raum.

Beispiel: Einheitsspähre

Sei $S^2 = \partial K_1(0)$ die Einheitssphäre in $(\mathbb{R}^3, d_2), d_2(x, y) := |x - y|$. Dann ist $(S^2, d_2) = (S^2, d_2|_{S^2 \times S^2})$ der metrische Raum mit dem induzierten Abstand $d_2|_{S^2 \times S^2}$.

Beispiel: l^2**–Raum**
Sei $l^2 = l^2(\mathbb{N}) = l^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ die Menge aller Folgen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit den Koordinaten $x_j \in \mathbb{K}\,\forall j$, sodass $\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2 < +\infty$. Das heißt

$$l^2 = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2 < +\infty \right\}$$

wobei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \ldots$ also abzählbar unendlich ist. Dann ist l^2 ein Vektorraum und ein normierter Raum mit der Norm

$$||x||_2 = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Innenprodukträume

Das innere Produkt oder auch Skalarprodukt findet sich in dem l^2–Raum wieder, also als unendliche Aufsummierung

$$\langle x, y \rangle_{l^2} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

Das innere Produkt induziert die Norm $||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle_{l^2}}$ und den Abstand $||x-y||_2$.

Das innere Produkt bzw. Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{K}$$

mit folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in V$

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (komplexe Konjugation)

(b) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \langle\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Linearität bezogen auf die zweite Variable)

(b') $\langle z, \alpha x + \beta y \langle = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle$ (im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

(c) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(d) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit einem inneren Produkt heißt **Innenproduktraum**. Wenn die Eigenschaften (a)–(c) erfüllt werden heißt der Vektorraum **Halbhilbertraum**.

Norm
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein Innenproduktraum. Dann ist $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V.

1.2.1 Cauchy–Bunjakowski–Schwarz–Ungleichung

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ ein Halbhilbertraum. Dann gilt

$$| \langle x, y \rangle_V | \leq ||x||_V ||y||_V \qquad ||x||_V := \sqrt{\langle x, x \rangle_V}.$$

1.3 L^2–Raum

Seien $-\infty < a < b < +\infty$. Die Menge $C_{\mathbb{K}}[a, b]$ der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf $[a, b]$ ist ein Vektorraum bzgl. der Addition und Multiplikation der Funktionen mit Skalaren. Mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x \qquad f, g \in C_{\mathbb{K}}[a, b]$$

ist $C_{\mathbb{K}}[a, b]$ ein Innenproduktraum. Wobei $\overline{g} : x \mapsto \overline{g(x)}$.

1.4 Offene und punktierte offene Kugel

Sei (X, d) ein metischer Raum. Sei $E \subseteq X$. Eine offene Kugel mit einem Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $z \in X$ ist die Menge

$$K_r(z) := \{x \in K : d(z, x) < r\}.$$

Eine punktierte offene Kugel ist eine Kugel ohne Zentrum, also die Menge

$$K_r^\bullet(z) := \{x \in K : 0 < d(z.x) < r\} = K_r(z) \setminus \{z\}.$$

innere, Häufungs- und isolierte Punkte

Ein Punkt $p \in E$ heißt innerer Punkt von E, wenn es eine offene Kugel $K_r(p)$ gibt, sodass $K_r(p) \subseteq E$. Die Menge aller inneren Punkte von E bezeichnet man als E^o.

Ein Punkt $p \in X$ heißt Häufungspunkt von E, wenn $E \cap K_r^\bullet(p) \neq \{\} \forall r > 0$. Die Menge aller Häufungspunkte von E wird als E' bezeichnet.

Falls $p \in E$ und $p \notin E'$, wird p als isolierter Punkt bezeichnet.

Eine Menge $E \subseteq X$ heißt offen, falls $E = E^o$. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X^c := X \backslash E$ offen ist. Sie ist auch genau dann abgeschlossen, wenn $E' \subseteq E$.

Wenn $p \in E'$, gibt es in jeder $K_r(p)$ unendlich viele Punkte von E, da sich immer ein Punkt in einer ε–Umgebung befindet.

Vereinigungen und Schnitte

Für jede Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ offener Mengen G_α ist ihre Vereinigung $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{A}} G_\alpha$ offen.
Für jede endliche Familie $\{G_j\}_{j=1}^n$ offener Mengen G_j ist ihre Schnittmenge $\bigcap_{j=1}^n G_j$ offen.
Für jede Familie $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ abgeschlossener Mengen F_α ist ihre Schnittmenge $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{A}} F_\alpha$ abgeschlossen.
Für jede endliche Familie $\{F_j\}_{j=1}^n$ abgeschlossener Mengen F_j ist ihre Vereinigung $\bigcup_{j=1}^n F_j$ abgeschlossen.
Es glit immer für beliebige Familien und Mengen

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\mathbb{A}} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{A}} E_\alpha^c \qquad \left(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{A}} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{A}} E_\alpha^c.$$

1.5 Vollständige Räume

Es gibt verschiedene vollständige Räume:

(a) Falls jede Cauchy–Folge im metrischen Raum (X, d) konvergiert, heißt (X, d) vollständig.

(b) Ein normierter Raum $(V, ||\cdot||)$ heißt vollständig, wenn V mit dem induzierten Abstand $d(u, v) = ||u - v||$ vollständig ist.

(c) Ein Innenproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt vollständig, wenn der induzierte Raum $(V, ||\cdot||)$ mit $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ vollständig ist.

Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum**. Ein vollständiger Innenproduktraum heißt **Hilberraum** ($l^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ und $l^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z})$ sind Hilberräume).
Sei (X, d) vollständig. Betrachten wir $E \subset X$ als ein metrischen Unterraum (E, d) von (X, d). Dann ist (E, d) genau dann vollständig, wenn E im (X, d) abgeschlossen ist.

1.6 Abschluss und Rand

Sei $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen von (X, d) mit der Eigenschaft $E \subseteq E_\alpha$. Dann heißt die abgeschlossene Menge $\overline{E} := \bigcap_{\alpha\in\mathbb{A}} E_\alpha$ Abschluss von M. Die Menge $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ heißt Rand von M. Es gelten zudem

1. $\overline{E} = ((E^c)^o)^c$
2. $\partial E = ((E^c)^o \cup E^o)^c = \overline{E} \backslash E^o$

E ist genau dann abgeschlossen, wenn $E = \overline{E}$.
Der Abschluss und Rand kann auch durch Konvergenz beschrieben werden.

1. $p \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\exists \{p_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, sodass $\lim p_n = p$.
2. $p \in \partial E$ genau dann, wenn $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ und $\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset E^c$, sodass $\lim x_n = 0 = \lim y_n$.

$\overline{E} = E \cup E' = E \cup \partial E$.

1.7 Dichte Mengen

Eine Menge $E \subseteq X$ heißt dicht in X, wenn $\overline{E} = X$. Sei (X, d) vollständig. Sei $E \subseteq X$ und sei (E, d) der induzierte metrische Raum. Dann ist $(\overline{E}, d)$ eine Vervollständigung von (E, d). Falls E zusätzlich dicht in X ist, ist (X, d) eine Vervollständigung von (E, d).

1.8 Isometrie und isometrische Isomorphie

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

1. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt Isometrie, wenn $d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d_X(x_1, x_2)\, \forall x_1, x_2 \in X$.

2. Eine Isometrie φ heißt isometrischer Isomorphismus, wenn φ surjektiv ist.

Ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt Vervollständigung von (X, d), wenn es eine solche Isometrie $\varphi : X \to \hat{X}$, sodass das Bild $\varphi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$ dicht in $\hat{X}$ ist. Jeder metrische Raum kann vervollständigt werden. Eine Vervollständigung ist wesentlich eindeutig, in dem Sinn, dass zwei Vervollständigungen $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ immer isometrisch isomorph sind, das heißt es existiert ein isometrischer Isomorphismus $\Phi : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$.

1.9 Äquivalenzrelationen von Normen

Eine Relation $\sim$ auf einer abstrakten Menge M heißt Äquivalenzrelation wenn $\sim$ die folgenden Eigenschaften hat

1. Reflexivität $x \sim x\, \forall x \in M$.

2. Transitivität $(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

3. Symmetrie $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

Normen $|\cdot|_\alpha$ und $|\cdot|_\beta$ auf einem Vektorraum W sind äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, sodass

$$c_2|w|_\alpha \leq |w|_\beta \leq c_1|w|_\alpha\, \forall w \in W.$$

Auf $\mathbb{K}^m$ sind alle Normen äquivalent. Auf jedem endlichdimensionalem Vektorraum V sind alle Normen äquivalent.

1.10 Abstand zu einer kompakten Menge

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei

$$\operatorname{dist}(E, M) = \inf\nolimits_{y \in M}^{x \in E} d_X(x, y)$$

der Abstand zwischen den Mengen $E, M \subseteq X$. Falls $E = \{x\}$ schreibt man

$$\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}_M(x).$$

2 Folgen und Stetigkeit

2.1 Konvergenz und Cauchy–Folgen

2.1.1 Konvergenz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ konvergiert gegen $p \in X$, wenn $\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0$. In diesem Fall sagt man, dass p der Grenzwert oder Limes von $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist.

Cauchy–Folgen

Eine Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ heißt Cauchy–Folge, wenn es $\forall \varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$.

2.1.2 Konvergenz in $\mathbb{K}^m$

Sei $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x^{[n]} = \left(x_1^{[n]}, x_2^{[n]}, \ldots, x_m^{[n]}\right) \in \mathbb{K}^m$ eine Folge in $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert in $\mathbb{K}^m$ gegen $x = (x_1, \ldots, x_m)$
2. $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen x komponentenweise

Diese Äquivalenzen stimmen mit den Analogen Sätzen zu Cauchy–Folge überein.

Häufungspunkt

Die Menge aller Häufungspunkte ist E'. $p \in E'$ genau dann, wenn $\exists \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E\backslash\{p\}$, sodass $lim p_n = p$.
Eine Teilmenge M des normierten Raums $\mathbb{K}^m$ ist genau dann kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{K}^m$ ist.

2.2 Teilfolgen und kompakte Mengen

Sei $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge im metrischen Raum (X, d). Betrachtet man eine streng monoton steigende Teilfolge $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $\{p_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wenn diese Folge gegen $p \in X$ konvergiert, dann heißt p Teilfolgengrenzwert. Wenn $\lim_{n\to\infty} p_n = p \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{n_k} = p$.

Folgenkompaktheit

Eine Menge $K \subseteq X$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ einen Teilfolgengrenzwert in K hat. In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Menge K genau dann kompakt, wenn K folgenkompakt ist.

Eine Teilmenge E eines metrischen Raums (X, d) heißt beschränkt, wenn $E \subsetneq K_r(z)$ für offene Kugeln $K_r(x)$ in X ist. Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt. Im l^2 ist die Einheitskugel $\overline{K_1(0)}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt.

2.2.1 Überdeckung

Eine offene Überdeckung der Menge E ist eine Familie $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ von offenen Mengen, sodass $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Wenn zusätzlich $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{A}_1}$ für eine Teilindexmenge $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}$, sagt man, dass $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}_1}$ eine Teilüberdeckung ist. Falls die Indexmenge endlich ist, sagt man, dass G eine endliche Überdeckung ist. Eine Menge K heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

2.2.2 Erweiterte reelle Zahlengrade

Sei

$$\hat{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} | -\infty < x < \infty \,\forall x \in \mathbb{R}$$

die erweiterte reelle Zahlengrade und sei $\arctan(\pm\infty) := \pm\frac{\pi}{2}$. Definiert man

$$d_{\arctan}(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, x, y \in \hat{\mathbb{R}},$$

dann ist $\left(\hat{\mathbb{R}}, d_{\arctan}\right)$ ein kompakter metrischer Raum.

Für eine reelle Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ bedeutet definitionsgemäß, dass der Limes $\lim_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$ gegen $\pm\infty$ im metrischen Raum $\left(\hat{\mathbb{R}}, d_{\arctan}\right)$ konvergiert.

Für jede Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ ist die Menge T aller Teilfolgengrenzwerte nicht leer.

2.2.3 Obere und untere Grenzwerte

Sei T wie oben, dann

1. $\lim_{n\to\infty} \inf x_n := \inf T$ heißt unterer Grenzwert von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sup x_n := \sup T$ heißt oberer Grenzwert von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ konvergiert genau dann in $\hat{\mathbb{R}}$, wenn $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n$.
Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert genau dann im $\mathbb{R}$, wenn die oberen und unteren Grenzwerte gleich und endlich sind.

Konvergenzradius der Potenzreihe
Für jede Potenzreihe

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k (z - z_0)^k \qquad a_k \in \mathbb{C}\,\forall,$$

gibt es eine Zahl $\rho \in [0, +\infty]$, die Konvergenzradius heißt, sodass

1. die Reihe konvergiert absolut $\forall z \in K_\rho(z0)$.
2. die Reihe divergiert in $\mathbb{C}$ $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - z_0| > \rho\}$.

3. $\rho = \left(\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$, wobei

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \limsup|a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty \\ +\infty & \text{, wenn } \limsup|a_n|^{\frac{1}{n}} = 0 \end{cases}.$$

Die Kreisscheibe $K_\rho(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ heißt Konvergenzkreis.

2.3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Sei $E \subseteq X$ und sei $f : E \to Y$ eine Funktion. Sei $p \in E'$. Die Funktion f hat einen Grenzwert q an der Stelle p, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q \,\forall\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E \,\text{mit}\, \lim x_n = p.$$

In diesem Fall schreibt man $\lim_{x\to p} f(x_n) = q$ oder $f(x) \to p$ als $x \to p$. Eine äquivalente Definition ist: Eine Funktion $f : E \to Y$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in E$, falls

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 | d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,\forall x \in K_\delta(x_0).$$

Falls x_0 ein isolierter Punkt von E ist, ist f an x_0 immer stetig. Falls $x_0 \in E'$, ist f und x_0 genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Falls f an der Stelle x_0 stetig ist, heißt x_0 eine Stetigkeitsstelle von f. Wenn f an der Stelle x_0 unstetig ist, heißt x_0 eine Unstetigkeitsstelle von f. In metrischen Räumen sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent. In topologischen Räumen generell nicht. Ist eine Funktion f stetig für jedes $x \in M \subseteq E$, so heißt f stetig auf der Menge M. Falls hier $M = E$ der Definitionsbereicht ist, sagt man, dass f eine stetige Funktion ist.

Stetigkeit der Norm
Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Die Norm sei $||\cdot|| : V \to [0, +\infty)$. Alle Vektoren $u \in V$ sind Stetigkeitsstellen von $||\cdot||$.

Stetigkeit von Kompositionen
Seien $f : E \to Y$ und $g : M \to Z$, wobei $f(E) \subseteq M \subseteq Y$. Dann ist die Komposition von f mit g die Funktio $h : E \to Z$, die durch $h(X) = g(f(X)), x \in E$ definiert wird. Die Bezeichnung für die Komposition ist $h = g \circ f$.

1. Ist f stetig in $x \in E$ und g stetig in $f(x) \in M$, so ist h stetig in x.
2. Ist f stetig auf E und ist g stetig auf $f(E)$, dann ist h stetig auf E.

Stetigkeit der quadratischen Form $\langle u, u\rangle$
Sei $(V, \langle u, u\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{K}$. Dann ist die Funktion $q : V \to \mathbb{R}, q(u) = \langle u, u\rangle$ stetig auf V. $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \Rightarrow q(u) = ||u||^2$ ist die Komposition von der stetigen Funktion $||\cdot||$

mit der stetigen Funktion $g(y) = y^2, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass die quadratische Form q stetig ist.

2.4 Topologische Stetigkeit

Seien X und Y zwei metrische Räume. Sei $f : X \to Y$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. f ist stetig auf X
2. Für jede offene Menge $G \subset Y$ ist ihr Urbild
$$f^{-1}(G) := \{x \in X | f(x) \in G\}$$
eine offene Menge in X. Dies ist auch die Definition der Stetigkeit in topologischen Räumen.
3. Für jede abgeschlossene Menge $F \subseteq Y$ ist $f^{-1}(F)$ abgeschlossen.

2.5 Komponentenweise Stetigkeit

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $R \subseteq X$ und $m \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f : E \to \mathbb{K}^m$ kann man komponentenweise als $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), x \in E$ dargestellt werden. $f_j : E \to \mathbb{K}$ ist dann die j–te Komponentenfunktion von f. Wenn dies gilt sind folgende zwei Aussagen äquivalent.

1. f ist stetig an der Stelle $x \in E$.
2. Alle f_j mit $j = 1, \ldots, m$ sind stetig an der Stelle $x \in E$.

2.6 l^p–Produktnormen

Die Funktion $|| \cdot ||_\infty : V \to [0, +\infty)$, mit $||u||_{(+)\infty} := \max_{1 \le j \le m} ||u_j||_{V_j}$, ist eine Norm im Produktvektorraum $V = V_1 \times \ldots \times V_m$.

Sei $1 \le p < +\infty$. Die Funktion $|| \cdot ||_p : V \to [0, +\infty)$, mit $||u||_p := \left(\sum_{j=1}^m ||u_j||_{V_j}^p\right)^{\frac{1}{p}}$, ist eine Norm im Produktvektorraum $V = V_1 \times \ldots \times V_m$.

Stetigkeit im Produktvektorraum

Sei $1 \le p \le +\infty$. Sei $f : E \to X$. Dann gilt

1. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $v = (v_1, \ldots, v_m) \in E$, wenn sie stetig an der Stelle v, wenn es im Produktvektorraum $(V, || \cdot ||_p)$ zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass
$$d_X (f(u), f(v)) < \varepsilon \, \forall u \in E : ||u - v||_p < \delta.$$
2. Die Funktion f heißt stetig auf E, wenn f stetig an jeder Stelle $v \in E$ ist.

Die Stetigkeit der Funktion ist unabhängig von dem Wert des Parameters p, weil alle Produktnormen $||\cdot||_p$ mit verschiedenen p äquivalent sind.

Äquivalente Normen

Normen $|\cdot|_\alpha$ und $|\cdot|_\beta$ auf einem Vektorraum W sind äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, sodass

$$c_2|w|_a \leq |w|_\beta \leq c_1|w|_\alpha \, \forall w \in W.$$

Äquivalente Normen generieren gleiche Topologie und gleiche Systeme der Umgebung.

Das Skalarprodukt $f(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$ ist stetig auf dem Produktraum $V = H \times H$ bezüglich einer der Produktnormen $||\cdot||_p$.

Stetigkeit bezüglich einer Variablen

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq V = V_1 \times \ldots \times V_m$. Sei $f : E \to X$ eine Funktion $f(u_1, \ldots, u_m)$, die für die Werte der Variablen $u_1 \in V_1, \ldots, u_m \in V_m$ mit $(u_1, \ldots, u_m) \in E$ definiert ist. Die Funktion f heißt stetig bezüglich der Variablen u_j an der Stelle $v = (v_1, \ldots, v_m) \in E$, wenn die Funktion $g(u_j) = f(v_1, \ldots, v_{j-1}, u_j, v_{j+1}, \ldots, v_m)$ von der Variablen u_j stetig an der stelle $u_j = v_j$ ist (hier sind alle v_k mit $k \neq j$ fixiert und sind keine Variablen für g). Wenn f an der Stelle $v = (v_1, \ldots, v_m) \in E$ stetig im Sinne des Produktraums ist, ist f stetig an der Stelle v bezüglich jeder Variablen $u_j, j = 1, \ldots, m$. Generell impliziert die Stetigkeit für jede Variable nicht die Stetigkeit im Sinne des Produktraumes.

2.7 Stetigkeit von Einschränkungen

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$. Sei $f : E \to Y$. Falls $f : E \to Y$ stetig auf E ist und $M \subseteq E$, ist die Einschränkung $f|_M : M \to Y$ auch stetig auf M. (Erinnerung: $g = f|_M$ ist die solche Funktion $g : M \to Y$, sodass $g(x) = f(x) \, \forall x \in M$.)

Sei $M_x = \{x\}$ mit $x \in E$. Dann ist $f|_M$ stetig für beliebige Funktionen f. Dies ist allerdings nicht verbunden mit der Stetigkeit von f an der Stelle x. In der Tat ist x ein isolierter Punkt von der einpunktigen Menge M_x. So ist $f|_{M_x}$ immer stetig in einem isolierten Punkt ihres Definitionsbereichs in M_x.

Sei $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} E_\alpha$ und sei $f|_{E_\alpha}$ stetig $\forall \alpha \in \mathbb{A}$. Das impliziert nicht, dass f stetig auf E ist.

2.8 Lipschitz–Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$. Eine Funktion $f : E \to Y$ heißt Lipschitz–stetig, wenn

$$\exists \alpha > 0 | d_Y \left(f(p), f(q) \right) \leq \alpha d_X(p, q) \, \forall p, q \in E.$$

In diesem Fall heißt α eine Lipschitz–Konstante von f. Jede Isometrie ist Lipschitz–stetig mit der Lipschitz–Konstante $\alpha = 1$, weil dann gilt

$$d_Y\left(f(p), f(q)\right) = d_X(p, q).$$

Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.

2.9 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Sei $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann

1. $-\infty < m \leq M < +\infty$.

2. $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, sodass $f\left(x_{\min}\right) = m$ und $f\left(x_{\max}\right) = M$.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$. Sei E kompakt. Sei $f : E \to Y$ stetig. Dann

1. ist $f(E)$ eine kompakte Teilmenge von Y.

2. ist $f(E)$ abgeschlossen und beschränkt.

3. ist f beschränkt (eine Funktion heißt beschränkt, wenn ihr Bild beschränkt ist).

2.10 Wegzusammenhängende Mengen und stetige Funktionen

Zwischenwertsatz von Bolzano
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall. Im Besonderen, falls $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in I$, dann besitzt die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung $x \in I$.

Wege
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $E \subseteq X$. Sei $-\infty < a < b < +\infty$. Jede stetige Funktion $w \in \mathcal{C}\left([a, b], X\right)$ heißt Weg in X. Dieser Weg hat den Anfangspunkt $w(a)$ und Endpunkt $w(b)$. Die Spur $\operatorname{Spur}(w) = w\left([a, b]\right)$ des Weges w ist definitionsgemäß sein Bild.

Wegzusammenhängende Mengen
Eine Menge E heißt wegzusammenhängend, falls es zu jedem Paar $x, y \in E$ ein Weg $w : [a, b] \to E$ gibt, mit $x = w(a)$ und $y = w(b)$. In diesem Falls ist $\operatorname{Spur}(w) \subseteq E$.

Sei V ein normierter Raum. Jede Spur eines Weges ist wegzusammenhängend. Eine einpunktige Menge ist wegzusammenhängend. Die leere Menge ist auch wegzusammenhängend.

Seien $u, v \in V$. Die Strecke

$$[u, v] = \{(1 - t)u + tv : t \in [0, 1]\} \subset V$$

ist die Spur des Weges

$$w(t) = (1-t)u + tv, t \in [0,1].$$

Die Strecke $[u,v]$ ist wegzusammenhängend.

Konvexe Mengen
Eine Menge $M \subseteq V$ heißt konvex, falls für jede Strecke $[u,v]$ mit Endpunkten $u, v \in M$ gilt

$$[u,v] \subseteq M.$$

Jede konvexe Teilmenge M eines normierten Raums ist wegzusammenhängend.
Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$. Sei $x \in \mathbb{K}^m$.

1. Die Mengen $K_r(x)$ und $\overline{K_r(x)}$ sind konvex und so wegzusammenhängend.
2. Die Menge $\partial K_r(x)$ ist nicht konvex, aber wegzusammenhängend.

Sei $E \subseteq X$ wegzusammenhängend und sei $f : E \to Y$ stetig. Dann ist $f(E)$ wegzusammenhängend.

Sei $E \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

1. E ist ein Intervall.
2. E ist konvex.
3. E ist wegzusammenhängend.

Mehrdimensionaler Zwischenwertsatz
Sei $E \subseteq X$ wegzusammenhängend und sei $f : E \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

1. ist $f(E)$ ein Intervall.
2. ist hat die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung $x \in E$, wenn es für $y \in \mathbb{R}$: $x_1, x_2 \in E : f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$.

3 Stetige Lineare Operatoren

Eine Abbildung $A : V \to W$ heißt linearer Operator (Homomorphismus) falls

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A(u_1) + \beta A(u_2) \, \forall u_1, u_2 \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

3.1 Beschränkte Funktionen

Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ zwei normierte Räume über $\mathbb{K}$.

1. Eine Funktion $f : E \to Y$ heißt beschränkt, wenn ihr Bild $f(E)$ beschränkt ist.
   Eine Funktion f heißt beschränkt auf $M \subseteq E$, wenn $f(M)$ beschränkt ist.

2. Ein linearer Operator $A : V \to W$ heißt beschränkt, wenn A auf der Einheitskugel $K_1(0) \subseteq V$ beschränkt ist.

Ein linearer Operator kann gleichzeitig als linearer Operator beschränkt und als Funktion unbeschränkt sein. Ein linearer Operator $A : V \to W$ ist genau dann beschränkt, wenn $||A|| < +\infty$.

Raum der beschränkten linearen Operatoren
Die Menge $\mathbb{L}(V, W)$ aller beschränkten linearen Operatoren $A : V \to W$ ist ein Vektorraum mit der natürlichen Vektorraumstruktur $(\alpha A + \beta B)(u) = \alpha Au + \beta Bu, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $\mathbb{L}(V, W)$ ist ein normierter Raum mit der Norm

$$||A|| := \sup_{||u||_V < 1} ||Au||_W.$$

Äquivalente Formen in der Norm $\mathbb{L}(V, W)$

$$||A|| = \sup_{||u||_V < 1} ||Au||_W = \sup_{||u||_V \leq 1} ||Au||_W = \sup_{||u||_V = 1} ||Au||_W = \sup_{u \neq 0_V} \frac{||Au||_W}{||u||_V}.$$

Einheitsoperator
Sei $V = W$. Dann betrachtet man den Einheitsoperator als

$$I = I_V : V \to W, Iu = u \, \forall u \in V.$$

Dann ist

$$||I|| = \sup_{u \neq 0_V} \frac{||Iu||_V}{||u||_V} = \sup_{u \neq 0_V} \frac{||u||_V}{||u||_V} = 1.$$

Die folgenden Aussagen sind für lineare Operatoren äquivalent.

1. A ist beschränkt.
2. A ist stetig auf V.
3. A ist stetig in einem Punkt $u \in V$.
4. A ist stetig im Nullvektor $u = 0_V$.

Sei $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Jeder lineare Operator $A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ ist stetig und so beschränkt
2. Sei V endlichdimensional. Dann ist jeder linearer Operator $A : V \to W$ beschränkt und so stetig.

Linearform
Man betrachte den Fall, wenn $W = \mathbb{K}$ endlichdimensional ist. Ein linearer Operator $L : V \to \mathbb{K}$ heißt Linearform.

3.2 Polynome mehrerer Variablen

Sei $V = \mathbb{K}^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : x_j \in \mathbb{K}\,\forall j\}$. Sei $c \in \mathbb{K}$. Generell heißt $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ **Monom**, wenn

$$f(x_1, \ldots, x_m) = c_n x^n := c_{n_1,\ldots,n_m} \cdot x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m} \qquad n_j \in \mathbb{N}_0\,\forall j.$$

Hier ist $n = (n_1, \ldots, n_m)$ ein Multiindex. Die Konstanten $c_n = c_{n_1,\ldots,n_m} \in \mathbb{K}$ heißt Koeffizient. Falls $c_n \neq 0$, heißt die Summe der Exponenten

$$||n||_1 = \sum_{j=1}^{m} n_j$$

Grad des Monoms. Falls $c_n = 0$, dann ist das Monom eine Konstante und hat definitionsgemäß den Grad 0.

Eine Summe von Monomen

$$P(x) = \sum_{||n||_1 \leq N} c_n x^n, P : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$$

heißt **Polynom**. Der Grad von einem Polynom ist $\deg P = \max\{||n||_1 : c_n \neq 0\}$. Jedes Polynom ist stetig.

3.3 Operationen mit Grenzwerten der Funktionen

Sei $E \subseteq X$ mit (X, d_X). Sei $p \in E'$. Seien $f, g \in \text{Abb}(E, \mathbb{C})$, sodass

$$\lim_{x \to p} f(x) = a \in \mathbb{C} \wedge \lim_{x \to p} g(x) = b \in \mathbb{C}.$$

Dann

1. $\lim_{x \to p}(f + g)(x) = a + b$.
2. $\lim_{x \to p}(fg)(x) = ab$.
3. Falls zusätzlich $b \neq 0$ und p ein Häufungspunkt von $g^{-1}(\mathbb{C}n\{0\} = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$ ist, dann gilt $\lim_{x \to p}(\frac{f}{g})(x) = \frac{a}{b}$.

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Seien $f, g \in \text{Abb}(E, V), \alpha \in \text{Abb}(E, \mathbb{K})$, sodass $\lim_{x \to p} f(x) = u \in V, \lim_{x \to p} g(x) = w \in V, \lim_{x \to p} \alpha(x) = a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

1. $\lim_{x \to p}(f + g)(x) = u + w$.
2. $\lim_{x \to p}(\alpha f)(x) = au$.
3. Falls zusätzlich $a \neq 0$ und p ein Häufungspunkt von $\alpha^{-1}(\mathbb{C}n\{0\} = \{x \in E : \alpha(x) \neq 0\}$ ist, dann gilt $\lim_{x \to p}(\frac{f}{\alpha})(x) = \frac{u}{\alpha}$.
4. Wenn $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum ist, gilt $\lim_{x \to p} \langle f, g\rangle = \langle u, w\rangle$.

3.3.1 Links– und rechtsseitige / obere und untere Grenzwerte von Funktionen

Sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Seien $a \in \mathbb{R}, m \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \to Y$.

1. Falls a ein Häufungspunkt von $M_{a-} := M \cap (-\infty, a)$ ist, definiert man

$$\lim_{x\to a-0} f(x) := \lim_{x\to a} f|_{M_{a-}}.$$

   Andere Bezeichnungen sind

$$f(a-o) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x).$$

2. Falls a ein Häufungspunkt von $M_{a+} := M \cap (a, +\infty)$ ist, definiert man

$$\lim_{x\to a+0} f(x) := \lim_{x\to a} f_{M_{a+}}.$$

   Andere Bezeichnungen sind

$$f(a+o) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Sei $E \subseteq X$. Sei $p \in E'$. Sei $f : E \to \hat{\mathbb{R}}$.

1. $\lim_{x\to p} \inf f(x) := \lim_{\delta\to 0+0} \inf_{x\in E\cap K_\delta^\bullet(p)} f(x)$.
2. $\lim_{x\to p} \sup f(x) := \lim_{\delta\to 0+0} \inf_{x\in E\cap K_\delta^\bullet(p)} f(x)$.

Mit $K_\delta^\bullet(p) = K_\delta(p)n\{p\} = \{x \in X : 0 < d_X(x,p) < \delta\}$.

4 Matrizen

4.1 Spektralsatz für selbstadjungierte Matrizen

Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{K}^{m\times n} = \text{Mat } (m\times n, \mathbb{K})$ die Menge aller $m \times n$–Matrizen $A = (a_{j,k})_{1\le j\le m}^{1\le k\le n}$ mit Einträgen $a_{j,k} \in \mathbb{K}$. Dann ist $\mathbb{K}^{m\times n}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit gewöhnlicher Addition und Multiplikation mit Skalaren $\gamma \in \mathbb{K}$

$$A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})_{1\le j\le m}^{1\le k\le n} \qquad \gamma A = (\gamma a_{j,k})_{1\le l\le m}^{1\le k\le n} \qquad A, b \in \mathbb{K}^{m\times n}.$$

4.1.1 Adjungierte und selbstadjungierte quadratische Matrizen

Sei jetzt $n = m \in \mathbb{N}$. Eine quadratische Matrix $B = (b_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt adjungierte Matrix von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, falls

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

In diesem Fall schreibt man $B = A^*$, was äquivalent zu $b_{j,k} = \overline{a_{k,j}}\, \forall j, k$ ist. Adjungiert bedeutet also transponiert–konjugiert.

$A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt selbstadjungierte Matrix, falls $A = A^*$, also falls $a_{j,k} = \overline{a_{k,j}}\,\forall j,k$.

4.1.2 Spektralsatz

Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\left\{u^k\right\}_{k=1}^n$ des Raums $\mathbb{C}^n$, sodass

1. $Au^k = \lambda_k u^k\,\forall k$, das heißt u^k sind Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_k.
2. $\lambda_k \in \mathbb{R}\,\forall k$ und $\{\lambda_k\}$ ist die Menge aller Eigenwerte von A mit den entsprechenden Vielfachen.

Spektralsatz für symmetrische Matrizen
Falls alle $a_{j,k} \in \mathbb{R}$ sind, ist $A = A^*$ äquivalent mit $a_{j,k} = a_{k,j}\,\forall j,k$. Das heißt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stellt in $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ genau dann einen selbstadjungierten linearen Operator dar, wenn A symmetrisch ist. In diesem Fall sind für jeden Eigenvektor u^k zu λ_k, $v^k = \Re\left(u^k\right)$ und $w^k = \Re\left(u^k\right)$ auch Eigenvektoren zu λ_k.In diesem Fall kann man eine Orthonormalbasis $\left[u^k\right]_{k=1}^n$ so wählen, dass $u_j^k \in \mathbb{R}\,\forall j,k$ ist.

Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die Eigenvektoren von A und sei $\left\{u^k\right\}_{k=1}^n$ die entsprechende Orthonormalbasis der Eigenvektoren. Betrachte $q_A(x) = \langle Ax, x\rangle_{\mathbb{C}^n}$ als eine $\mathbb{R}$–werte Funktion auf $\overline{K_1(0)} = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| \leq 1\}$. Dann ist

1. $m = \min_{|x|\leq 1} q_A(x) = \lambda_1$ und $M = \max_{|x|\leq 1} q_A(x) = \lambda_n$.a
2. u^1 und u^n globale Minima und Maxima von $q_A\Big|_{\overline{K_1(0)}}$, das heißt $q_A\left(u^1\right) = \lambda_1$ und $q_A\left(u^n\right) = \lambda_n$.

5 Mehrdimensionale Differenzialgleichungen

6 Mehrdimentionale Integralrechnung

7 Vektoranalysis

8 Hilberträume, L^2–Räume und Fourierreihen

9 Variationsrechnung und Laplace–Operator

10 Notizen