

physik321 | Notizen

Jonas Wortmann

October 12, 2023

Contents

1	Überblick Elektrodynamik	2
2	Statische Felder	3
2.1	Eletrostatik	3
2.1.1	Coulomb'sche Gesetz	4
2.1.2	Das elektrische Feld	4
2.1.3	Beispiel: Homogen geladene Kugel	5
2.1.4	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	6
3	Delta-Distribution	7
4	Flächenintegrale	8
4.1	Beispiel: Kugeloberfläche	8

1 Überblick Elektrodynamik

Das Ziel ist die Untersuchung der Ursache und Wirkung von elektrischen (\vec{E}) und magnetischen (\vec{B}) Feldern auf elektrische Ladungen (q).

Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass auf elektrisch geladene Körper eine elektromagnetische Kraft

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (1.1)$$

mit \vec{v} der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, wirkt. Diese Kraft führt zu einer Bewegungsänderung

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \quad (1.2)$$

Der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und (bewegten) Ladungen sind die **Maxwell–Gleichungen**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \quad (1.4)$$

Zusammen mit Randbedingungen an **Grenzflächen** bestimmen sie alle Effekte der Elektrodynamik.

2 Statische Felder

Die Maxwell-Gleichungen für statische Felder sind

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2)$$

Man kann sehen, dass die Gleichungen für statische Felder entkoppeln und sie sich in **Elektrostatik** und **Magnetostatik** aufteilen.

2.1 Elektrostatik

Die Grundgrößen der klassischen Mechanik sind die Masse, Länge und Zeit. Eine wichtige Grundgröße in der Elektrostatik ist die elektrische Ladung. Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass Körper in einen elektrischen Zustand versetzt werden können (z.B. können geladene Körper andere geladene Körper anziehen). Dieses Phänomen ist mechanisch nicht erklärbar. Dieser Zustand ist auch auf andere Körper übertragbar, woraus folgt, dass es sich um eine substanzartige Größe handeln muss.

Diese Größe ist die **elektrische Ladung** q . Bei der Übertragung fließt ein elektrischer Strom I . Die Ladung des Elektrons ist negativ, also $q < 0$. Zudem ist sie additiv, es existiert also die Gesamtladung $Q = \sum_i q_i$. In abgeschlossenen Systemen ist die Summe aus positiven und negativen Ladungen konstant. Die Ladungen sind **gequantelt**, es existiert also eine nicht teilbare Elementarladung e , also gilt immer, dass $q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$

Elektron : $n = -1$

Proton : $n = +1$

Neutron : $n = 0$

Atomkern : $n = Z$.

In der Elektrodynamik wird dieses Prinzip allerdings verallgemeinert. Man führt die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein, also $Q = \int_V \rho(\vec{r}) \, d^3r$. Für Punktladungen gilt dann $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Befinden sich zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand von einem Meter im Vakuum, dann wirkt eine Kraft von

$$F = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8,854} \text{ N}. \qquad (2.3)$$

Dann haben q_1 und q_2 eine Ladung von $|q_1| = |q_2| = 1 \text{ C}$. Die Elementarladung ist $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Stromdichte

Für bewegte Ladungen existiert die Stromdichte \vec{j} . Sie gibt die Ladung pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung an. Betrachte als Beispiel eine homogene Ladungsverteilung von N Teilchen mit Ladung q und Geschwindigkeit \vec{v} , dann ist die Ladungsdichte $\vec{j} = \frac{N}{V} q \vec{v}$. Die Stromstärke I ist dann $I = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) df$. Die Einheit ist 1 A, was einem Ladungstransport von 1 C in einer Sekunde entspricht.

Ladungserhaltung

Die Ladungserhaltung kann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung** beschrieben werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (2.4)$$

2.1.1 Coulomb'sche Gesetz

Zwei Ladungen q_1 und q_2 befinden sich im Abstand \vec{r}_1 und \vec{r}_2 zum Ursprung. Der Abstand zwischen diesen Ladungen ist \vec{r}_{12} . Dieser Abstand soll viel größer sein als die Ausdehnung von q_1 und q_2 . Die Kraft zwischen diesen Ladungen ist

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.5)$$

Sie ist also direkt proportional zu q_1 und q_2 , $|\vec{F}_{12}| \propto |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$, sie wirkt entlang von \vec{r}_{12} . Diese Kraft gilt nur für **ruhende** Ladungen.

Experimentelle Tatsachen

Die Proportionalitätskonstante ist $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Das Superpositionsprinzip erlaubt es die Kraft auf mehrere Ladungen zu berechnen

$$\vec{F}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^n q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Das elektrische Feld

Das elektrische Feld, bzw. die Feldlinien, erlauben eine Abstraktion der Kraftwirkung. Für Punktladungen ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}. \quad (2.7)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.8)$$

Der Integrand kann umgeschrieben werden als

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.9)$$

also ist \vec{E} ein Gradientenfeld des skalaren Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}). \quad (2.10)$$

Die Äquipotentialflächen sind konstant, also $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$. Die Coulomb-Kraft ist konservativ $\text{rot } q\vec{E} = 0$. Da die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ist das Potential $V(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$.

Das Linienintegral über \vec{E} ist wegababhängig

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' = U(\vec{r}, \vec{r}_0). \quad (2.11)$$

Für n Punktladungen gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\sum_{j=1}^n q_j \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (2.12)$$

2.1.3 Beispiel: Homogen geladene Kugel

Der Ursprung wird in das Zentrum der geladenen Kugel mit Radius R gelegt. Eine Probeladung befindet sich im Abstand \vec{r} zum Zentrum. Die Ladungsdichte der Kugel ist

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}'| = r' \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.13)$$

Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{K}(R)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}} \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R r'^2 dr' \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \int_0^R r' dr' [|r + r'| - |r - r'|] \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \int_0^R dr' \begin{cases} 2rr' & , r \leq r' \\ 2r'^2 & , r > r' \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für \vec{r} außerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r > R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \int_0^R 2r'^2 dr' = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (2.16)$$

Für \vec{r} innerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r < R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \left[\int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R 2rr' dr' \right] = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{r} \left[\frac{2r^3}{3} + r(R^2 - r^2) \right] \quad (2.17)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \frac{1}{2R^3}. \quad (2.18)$$

Das elektrische Feld außerhalb ($r > R$) bzw. innerhalb ($r < R$) ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R^3} \vec{\nabla} (3R^2 - r^2) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ &= \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \frac{\vec{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.1.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

3 Delta-Distribution

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \forall \vec{r} \neq \vec{r}_0. \quad (3.1)$$

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \, d^3r = \begin{cases} 0 & , \vec{r}_0 \notin V \\ 1 & , \vec{r}_0 \in V \end{cases} \quad (3.2)$$

4 Flächenintegrale

Sei die Fläche $\mathcal{F} := \{\vec{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$. Der Normalenvektor zur Fläche ist $d\vec{f} = d\vec{a} \times d\vec{b}$, mit

$$d\vec{a} = \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) \approx \partial_v \vec{r}(u, v) dv \quad (4.1)$$

$$d\vec{b} = \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) \approx \partial_u \vec{r}(u, v) du \quad (4.2)$$

$$d\vec{f} = \partial_v \vec{r}(u, v) \times \partial_u \vec{r}(u, v) du dv. \quad (4.3)$$

Die Vektoren $\partial_v \vec{r}$ und $\partial_u \vec{r}$ spannen die Tangentialebene in $\vec{r}(u, v)$ auf.

4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugel mit dem Radius R , dann sind die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \theta \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R \vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R \sin \theta \vec{e}_\varphi. \quad (4.5)$$

Das Flächenelement ist dann

$$d\vec{f} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin \theta \vec{e}_r \quad (4.6)$$