Notizen | math341

Jonas Wortmann

October 13, 2023

Contents

1 Komplexe Zahlen

Die **komplexen Zahlen** sind alle Terme der Form $x + y\mathrm{i}; x, y \in \mathbb{R}$. i ist die **imaginäre Einheit**, mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} := \{x + y\mathrm{i} : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Die komplexen Zahlen können auch als eine Ebene aufgefasst werden, $x + y\mathrm{i} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Die Gleichheit ist definiert als, $x + y\mathrm{i} = a + b\mathrm{i} \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.
Folgende Operationen sind definiert

- $(x + y\mathrm{i}) + (a + b\mathrm{i}) := (x + a) + (y + b)\,\mathrm{i}$
- $(x + y\mathrm{i}) \cdot (a + b\mathrm{i}) := xa + xb\mathrm{i} + ya\mathrm{i} + yb\mathrm{i}^2 = (xa - yb) + (xb + ya)\,\mathrm{i}$.

Sei $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Dann ist die **komplex konjugierte** Zahl $\overline{z} := x - y\mathrm{i}$. Praktisch ist dann, $z \cdot \overline{z} = (x + y\mathrm{i}) \cdot (x - y\mathrm{i}) = x^2 + y^2$. Zudem ist die **Norm** einer komplexen Zahl $||z|| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl $z = x + y\mathrm{i} \neq 0 + 0\mathrm{i}$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{||z||^2} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - y\mathrm{i})$.
Folgende Rechenregeln sind gültig

- Kommutativität: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativität: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Distributivität: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- Kehrwertregel: $\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$
- Konjugation: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper, der $\mathbb{R}$ enthält.

1.1 Komplexe Zahlen als Matrizen

$$[(x + y\mathrm{i})(a + b\mathrm{i})]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Eine komplexe Zahl kann also als Matrix dargestellt werden

$$[x + y\mathrm{i}]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} := \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Es gilt dann

$$[z_1 \cdot z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \cdot [z_2]_{\mathbb{R}^2} \tag{1.3}$$
$$[z_1 + z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} + [z_2]_{\mathbb{R}^2} \tag{1.4}$$
$$\left[\frac{1}{z}\right]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = [z]^{-1}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}. \tag{1.5}$$

Also $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{C} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Jede Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ ist das Produkt einer Drehung $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ und einer Streckung $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

Für jede komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, gibt es eindeutige $r > 0, \theta \in [0, 2\pi) : z = r(\cos\theta + \sin\theta\mathrm{i})$.

Hier ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} = ||z||$ und $\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & ; x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 < y \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & ; x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & ; x = 0 > y \\ 2\pi + \arctan\frac{y}{x} & ; y < 0 < x \end{cases}$

1.2 Polarkoordinaten

Die komplexen Zahlen können in **Polarkoordinaten** dargestellt werden

$$\mathbb{C} \ni z = re^{\mathrm{i}\theta} \qquad e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \sin\theta\mathrm{i}, \tag{1.6}$$

mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Die Eindeutigkeit von r lässt sich zeigen durch

$$||z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = ||re^{\mathrm{i}\theta}|| = ||r|| \underbrace{||e^{\mathrm{i}\theta}||}_{=1} = r. \tag{1.7}$$

Die Eindeutigkeit von θ lässt sich zeigen durch

$$e^{\mathrm{i}\theta_1} = e^{\mathrm{i}\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Die Multiplikation ist definiert durch

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}; \tag{1.9}$$

und der Kehrwert

$$\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{\mathrm{i}(-\theta)}. \tag{1.10}$$

1.2.1 Potenzen

Wird eine komplexe Zahl potenziert, gilt

$$k \in \mathbb{Z} : z^k = r^k e^{(\mathrm{i}\theta)^k} = r^k e^{\mathrm{i}(k\theta)}. \tag{1.11}$$

1.2.2 Beispiel

$$(1+\mathrm{i})^{100}. \tag{1.12}$$

In Polarkoordinaten ist $1+\mathrm{i}$,

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \theta = \arg(1+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}. \tag{1.13}$$

Die Potenz ist dann

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{100} &= \sqrt{2}^{100} e^{\mathrm{i}\left(100\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= 2^{50}e^{\mathrm{i}25\pi}\\ &= 2^{50}e^{\mathrm{i}\pi}\\ &= -2^{50}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

1.3 Wurzeln

Löse die Gleichung $z^k = \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, mit $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ und $\alpha = se^{\mathrm{i}\beta}$. Der erste Teil der Lösung ist

$$r^k = s = ||\alpha|| \Leftrightarrow r = \sqrt[k]{||\alpha||} \geq 0. \tag{1.15}$$

Es muss also gelten

$$e^{\mathrm{i}k\theta} = e^{\mathrm{i}\beta} \Leftrightarrow k\theta - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.16}$$

Diese Gleichung hat k Lösungen

$$\theta_1 = \frac{\beta}{k}, \theta_2 = \frac{\beta}{k} + \frac{1}{k}2\pi, \theta_3 = \frac{\beta}{k} + \frac{2}{k}2\pi, \ldots, \theta_k = \frac{\beta}{k} + \frac{k-1}{k}2\pi. \tag{1.17}$$

1.3.1 Beispiel

Löse die Gleichung $z^4 = r^4e^{\mathrm{i}4\theta} = 1$. $1 = 1e^{\mathrm{i}0}$, also ist $s = 1$ und $\beta = 0$.

$$r = \sqrt[4]{1} = 1 \qquad \begin{aligned}\theta_1 &= \frac{0}{4} = 0\\ \theta_2 &= \frac{0}{4} + \frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2}\\ \theta_3 &= \frac{0}{4} + \frac{2}{4}2\pi = \pi\\ \theta_4 &= \frac{0}{4} + \frac{3}{4}2\pi = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Also $z = e^{\mathrm{i}0}, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, e^{\mathrm{i}\pi}, e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

1.3.2 Wurzelfunktion

Die k–te Wurzelfunktion ist definiert als

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{re^{\mathrm{i}\theta}} = \sqrt[k]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{k}}, \tag{1.18}$$

für $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann ist $\sqrt[k]{z}$ eine Lösung der Gleichung $\alpha^k = z$.

Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht stetig, da

$$\sqrt{1} = \sqrt{1e^{\mathrm{i}0}} = \sqrt{1}e^{\mathrm{i}\frac{0}{2}} = 1 \tag{1.19}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{e^{\mathrm{i}(2\pi-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\mathrm{i}\pi - \frac{\varepsilon}{2}} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1. \tag{1.20}$$

1.4 Quadratische Gleichungen

Löse die Gleichung $z^2 + pz + q = 0; p, q \in \mathbb{C}$. Mit quadratischer Ergänzung

$$z^2 + pz + q = z^2 + pz + \frac{1}{4}p^2 + q - \frac{1}{4}p^2 \tag{1.21}$$

$$= \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right). \tag{1.22}$$

Daraus folgt

$$\left(z + \frac{p_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q \tag{1.23}$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \tag{1.24}$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.25}$$

Diese Gleichung ist die komplexe Wurzel, sie hat also immer mindestens zwei Lösung.

1.5 Fundamentalsatz der Algebra

Der **fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes k–Polynom

$$P(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \alpha_k \neq 0 \tag{1.26}$$

insgesamt k Nullstellen hat, also

$$\exists z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C} \Rightarrow P(z) = \alpha_k \prod_{j=1}^{k} (z - z_j). \tag{1.27}$$