physik321 | Notizen

Jonas Wortmann

October 24, 2023

Contents

1 Überblick Elektrodynamik

Das Ziel ist die Untersuchung der Ursache und Wirkung von elektrischen ($\vec{E}$) und magnetischen ($\vec{B}$) Feldern auf elektrische Ladungen (q).

Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass auf elektrisch geladene Körper eine elektromagnetische Kraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{1.1}$$

mit $\vec{v}$ der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, wirkt. Diese Kraft führt zu einer Bewegungsänderung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right]. \tag{1.2}$$

Der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und (bewegten) Ladungen sind die **Maxwell–Gleichungen**

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad c^2\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \tag{1.4}$$

Zusammen mit Randbedingungen an **Grenzflächen** bestimmen sie alle Effekte der Elektrodynamik.

2 Statische Felder

Die Maxwell–Gleichungen für statische Felder sind

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad c^2 \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \tag{2.2}$$

Man kann sehen, dass die Gleichungen für statische Felder entkoppeln und sie sich in **Elektrostatik** und **Magnetostatik** aufteilen.

2.1 Eletrostatik

Die Grundgrößen der klassischen Mechanik sind die Masse, Länge und Zeit. Eine wichtige Grundgröße in der Elektrostatik ist die elektrische Ladung. Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass Körper in einen elektrischen Zustand versetzt werden können (z.B. können geladene Körper andere geladene Körper anziehen). Dieses Phänomen ist mechanisch nicht erklärbar. Dieser Zustand ist auch auf andere Körper übertragbar, woraus folgt, dass es sich um eine substanzartige Größe handeln muss.

Diese Größe ist die **elektrische Ladung** q. Bei der Übertragung fließt ein elektrischer Strom I. Die Ladung des Elektrons ist negativ, also $q < 0$. Zudem ist sie additiv, es existiert also die Gesamtladung $Q = \sum_i q_i$. In abgeschlossenen Systemen ist die Summe aus positiven und negativen Ladungen konstant. Die Ladungen sind **gequantelt**, es existiert also eine nicht teilbare Elementarladung e, also gilt immer, dass $q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Elektron} &: n = -1 \\ \text{Proton} &: n = +1 \\ \text{Neutron} &: n = 0 \\ \text{Atomkern} &: n = Z. \end{aligned}$$

In der Elektrodynamik wird dieses Prinzip allerdings verallgemeinert. Man führt die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein, also $Q = \int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r$. Für Punktladungen gilt dann $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Befinden sich zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand von einem Meter im Vakuum, dann wirkt eine Kraft von

$$F = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8,854}\,\mathrm{N}. \tag{2.3}$$

Dann haben q_1 und q_2 eine Ladung von $|q_1| = |q_2| = 1\,\mathrm{C}$. Die Elementarladung ist $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Stromdichte

Für bewegte Ladungen existiert die Stromdichte $\vec{j}$. Sie gibt die Ladung pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung an. Betrachte als Beispiel eine homogene Ladungsverteilung von N Teilchen mit Ladung q und Geschwindigkeit $\vec{v}$, dann ist die Ladungsdichte $\vec{j} = \frac{N}{V} q \vec{v}$. Die Stromstärke I ist dann $I = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}\vec{f} = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}\left(\vec{r}\right) \vec{n}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}f$. Die Einheit ist 1 A, was einem Ladungstransport von 1 C in einer Sekunde entspricht.

Ladungserhaltung

Die Ladungserhaltung kann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung** beschrieben werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}. \tag{2.4}$$

2.1.1 Coulomb'sche Gesetz

Zwei Ladungen q_1 und q_2 befinden sich im Abstand $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ zum Ursprung. Der Abstand zwischen diesen Ladungen ist $\vec{r}_{12}$. Dieser Abstand soll viel größer sein also die Ausdehnung von q_1 und q_2. Die Kraft zwischen diesen Ladungen ist

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.5}$$

Sie ist also direkt proportional zu q_1 und q_2, $|\vec{F}_{12}| \propto |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$, sie wirkt entlang von F_{12}. Diese Kraft gilt nur für **ruhende** Ladungen.

Experimentelle Tatsachen

Die Proportionalitätskonstante ist $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Das Superpositionsprinzip erlaubt es die Kraft auf mehrere Ladungen zu berechnen

$$\vec{F}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^{n} q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_j\right|^3}. \tag{2.6}$$

2.1.2 Das elektrische Feld

Das elektrische Feld, bzw. die Feldlinien, erlauben eine Abstraktion der Kraftwirkung. Für Punktladungen ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_j\right|^3}. \tag{2.7}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho\left(r'\right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}. \tag{2.8}$$

Der Integrand kann umgeschrieben werden als

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{2.9}$$

also ist $\vec{E}$ ein Gradientenfeld des skalaren Potentials

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}^3 r \qquad \vec{E}\left(\vec{r}\right) = -\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{r}\right). \tag{2.10}$$

Die Poisson–Gleichung ist

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.11}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist das Grundproblem der Elektrostatik.

Die Äquipotentialflächen sind konstant, also $\varphi\left(\vec{r}\right) = \text{const.}$. Die Coulomb–Kraft ist konservativ $\operatorname{rot} q\vec{E} = 0$. Da die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ ist das Potential $V\left(\vec{r}\right) = q\varphi\left(\vec{r}\right)$.

Das Linienintegral über $\vec{E}$ ist wegabhängig

$$\varphi\left(\vec{r}\right) - \varphi\left(\vec{r}_0\right) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\left(\vec{r}'\right) \mathrm{d}\vec{r}' = U\left(\vec{r}, \vec{r}_0\right). \tag{2.12}$$

Für n Punktladungen gilt

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\sum_{j=1}^{n} q_j \delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \rho\left(\vec{r}\right) = \sum_{j=1}^{n} q_j \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_j\right). \tag{2.13}$$

2.1.3 Beispiel: Homogen geladene Kugel

Der Ursprung wird in das Zentrum der geladenen Kugel mit Radius R gelegt. Eine Probeladung befindet sich im Abstand $\vec{r}$ zum Zentrum. Die Ladungsdichte der Kugel ist

$$\rho\left(\vec{r}'\right) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}'| = r' \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2.14}$$

Das Potential ist dann

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{K}(R)} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r' \qquad (2.15)\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r'^2\,\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi' \int_0^{\pi}\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^R r'^2\,\mathrm{d}r'\,\frac{1}{rr'}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}\Big|_0^{\pi}\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R r'\,\mathrm{d}r'\,\left[|r+r'|-|r-r'|\right]\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R \mathrm{d}r' \begin{cases} 2rr' & , r\le r' \\ 2r'^2 & , r > r' \end{cases}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Für $\vec{r}$ außerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r > R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R 2r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \qquad (2.17)$$

Für $\vec{r}$ innerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r < R$

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\left[\int_0^r 2r'^2\,\mathrm{d}r' + \int_r^R 2rr'\,\mathrm{d}r'\right] = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\left[\frac{2r^3}{3}+r\left(R^2-r^2\right)\right] \qquad (2.18)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(3R^2-r^2\right)\frac{1}{2R^3}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Das elektrische Feld außerhalb ($r > R$) bzw. innerhalb ($r < R$) ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R^3}\vec{\nabla}\left(3R^2-r^2\right) \qquad (2.20)\\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\\
&= \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}\frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

2.2 Mittlere Quelldichte – Satz von Gauss

Sei ein Volumen mit den Kanten $\Delta x, \Delta y$ und Δz. Der Mittelpunkt ist $\vec{r}_0\,(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Die Flächennormalen sind $\Delta\vec{f}_1, \ldots, \Delta\vec{f}_6$ ($\vec{f}_1$ zeigt entlang der Δx–Achse)

$$\Delta\vec{f}_1 = \Delta y\Delta x\,\vec{e}_x = -\Delta\vec{f}_2 \qquad (2.22)$$
$$\Delta\vec{f}_3 = \Delta x\Delta z\,\vec{e}_y = -\Delta\vec{f}_4 \qquad (2.23)$$
$$\Delta\vec{f}_5 = \Delta x\Delta y\,\vec{e}_z = -\Delta\vec{f}_6. \qquad (2.24)$$

Das elektrische Feld, welches den Quader durchsetzt ist

$$\oint \vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \iint \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left[E_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-E_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\right] \tag{2.25}$$

$$+\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\left[E_y\left(x,y_0+\frac{\Delta y}{2},z\right)-E_y\left(x,y_0-\frac{\Delta y}{2},z\right)\right] \tag{2.26}$$

$$+\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left[E_z\left(x,y,z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)-E_z\left(x,y,z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]. \tag{2.27}$$

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung (da $\Delta x, \Delta y$ und Δz klein sind),

$$= \int \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\left(x_0,y,z\right)\Delta x+\mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right) \tag{2.28}$$

$$+\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\left(x,y_0,z\right)\Delta y+\mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right) \tag{2.29}$$

$$+\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(x,y,z_0\right)\Delta z+\mathcal{O}\left(\Delta z^3\right)\right). \tag{2.30}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} = \partial x E_x\left(x_0,y_1,z_1\right)+\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right) \tag{2.31}$$

$$+\,\partial y E_y\left(x_2,y_0,z_2\right)+\mathcal{O}\left(\Delta y^2\right) \tag{2.32}$$

$$+\,\partial z E_z\left(x_3,y_3,z_0\right)+\mathcal{O}\left(\Delta z^2\right). \tag{2.33}$$

Der Limes von $\Delta V \to 0$ gibt dann

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} = \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}_0\right). \tag{2.34}$$

Beliebige Volumina können mit Quadern ausgeschöpft werden. Flächenintegrale über gemeinsame Grenzflächen heben sich auf. Am Ende bleibt nur die äußere Grenzfläche übrig. Damit ist der Satz von Gauss

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}V. \tag{2.35}$$

Wendet man diesen Satz auf die Elektrostatik an, folgt

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_{S(V)}\mathrm{d}\vec{f}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{2.36}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_{S(V)}\mathrm{d}\vec{f}\left(-\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \tag{2.37}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_V \mathrm{d}^3r\,\operatorname{div}\,\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{2.38}$$

Es gilt $\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$. Damit kann geschrieben werden

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho\left(\vec{r}'\right) \mathrm{d}^3 r' \int_V \delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \mathrm{d}V \tag{2.39}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{\varepsilon_0} Q\left(V\right) \tag{2.40}$$

$$= \int_V \operatorname{div} \vec{E}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}^3 r. \tag{2.41}$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich für beliebige Volumina V sagen

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{E}\left(\vec{r}\right) - \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0} \right) \mathrm{d}^3 r = 0. \tag{2.42}$$

Daraus folgen die MAXWELL'schen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0} \qquad \oint_{S(V)} \vec{E}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}\vec{f} = \frac{Q\left(V\right)}{\varepsilon_0}. \tag{2.43}$$

Da $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \tag{2.44}$$

2.2.1 Beispiel: Bestimmung von E mit Gauss'schem Satz

Sei eine homogen geladene Kugel mit Radius R und einem elektrischem Feld von

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = E_r\left(r,\varphi,\theta\right) \vec{e}_r + E_\varphi\left(r,\varphi,\theta\right) \vec{e}_\varphi + E_\theta\left(r,\varphi,\theta\right) \vec{e}_\theta. \tag{2.45}$$

Die MAXWELL–Gleichung besagt,

$$\oint_{S(V)} \vec{E}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}\vec{f} = \frac{q\left(V\right)}{\varepsilon_0} \tag{2.46}$$

Die Kugel ist rotationssymmetrisch um die x–,y– und z–Achse, also unabhängig von θ und φ. Das Feld ist also nur noch von Radius r abhängig.

Wird an der x–y–Ebene gespiegelt, wird θ zu $\pi-\theta$, also $E_z = E_r\left(r\right)\cos\theta - E_\theta\left(r\right)\sin\theta$. Zudem gilt $\cos\left(\pi-\theta\right) = -\cos\left(\theta\right)$ und $\sin\left(\pi-\theta\right) = \sin\left(\theta\right)$. Aus dieser Spiegelung folgt, dass $E_z \to -E_z$ und $E_\theta = 0$. Aus den Spiegelungen an der x–z– und y–z–Ebene kann man analog sagen, dass $E_\varphi = 0$.

Für das gesamte Feld folgt dann

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = E_r\left(r\right) \vec{e}_r. \tag{2.47}$$

Jetzt kann der Satz von GAUSS angewendet werden

$$\int_{S(V_r)} \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = E_r 4\pi r^2 = \frac{q(V_r)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & ,r > R \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\dfrac{r^3}{R^3} & ,r < R \end{cases}. \tag{2.48}$$

Das Feld ist also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{r^2} & ,r > R \\ \dfrac{r}{R^3} & ,r < R \end{Bmatrix}\vec{e}_r. \tag{2.49}$$

2.3 Integraldarstellung – Satz von Stokes

Für die Integraldarstellung der MAXWELL'schen Gleichungen wird die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve C verwendet

$$Z = \oint_C \vec{a}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.50}$$

Sei ein geschlossener Weg in der xy–Ebene mit Mittelpunkt $\vec{r}_0$. Die Fläche ist $\Delta F = \Delta x \Delta y$ und die Normale $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$Z = \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} \left[a_x\left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - a_x\left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\right]\mathrm{d}x \tag{2.51}$$

$$+ \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left[a_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z_0\right) - a_y\left(y + \frac{\Delta y}{2}, y, z_0\right)\right]\mathrm{d}y \tag{2.52}$$

$$= \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} \left[-\partial_y a_x(x, y_0, z_0)\,\Delta y + \mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right]\mathrm{d} \tag{2.53}$$

$$= \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left[-\partial_x a_y(x_0, y, z_0)\,\Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right]\mathrm{d}. \tag{2.54}$$

Betrachtet man dann die Fläche

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{Z}{\Delta F} = \left(\partial_x a_y(\vec{r}_0) - \partial_y a_x(\vec{r}_0)\right) \tag{2.55}$$

$$= \left(\mathrm{rot}\,\vec{a}(\vec{r}_0)\right)_z. \tag{2.56}$$

Daraus folgt der **Satz von** STOKES

$$\oint_{\partial F} \vec{a}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_F \mathrm{rot}\,(\vec{a}(\vec{r}))\,\mathrm{d}\vec{f}. \tag{2.57}$$

Mit diesem Satz sind die MAXWELL'schen Gleichungen dann

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad\qquad \oint_C \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{2.58}$$

2.4 Punktladungen

Die Ladungsdichte einer Punktladung kann mit Hilfe der Delta–Distribution dargestellt werden (kartesische oder Kugelkoordinaten)

$$\rho\left(\vec{r}\right) = q\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \qquad \rho\left(\vec{r}\right) = q\frac{1}{r_0^2 \sin\left(\theta_0\right)}\delta\left(r - r_0\right)\delta\left(\varphi - \varphi_0\right)\delta\left(\theta - \theta_0\right). \tag{2.59}$$

Das Potential lässt sich schreiben als

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\delta\left(\vec{r}_0 - \vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r' \tag{2.60}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}. \tag{2.61}$$

2.4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugeloberfläche mit Ladungsdichte $\rho\left(\vec{r}\right) = \sigma$. Die Gesamtladung in Kugelkoordinaten im Abstand R vom Zentrum ist

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \delta\left(r - R\right)\sigma r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi 2\sigma R^2 = 4\pi R^2\sigma. \tag{2.62}$$

Die Ladung einer Punktladung in Kugelkoordinaten ist

$$\int_{\mathbb{R}^3} q\frac{1}{r_0^2\sin\theta_0}\delta\left(r - r_0\right)\delta\left(\varphi - \varphi_0\right)\delta\left(\theta - \theta_0\right)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = q\frac{1}{r_0^2\sin\theta_0}r_0^2\sin\theta_0 \tag{2.63}$$

$$= q. \tag{2.64}$$

2.5 Feldverhalten an Grenzflächen

2.5.1 Gauss'sche Fläche

Man betrachtet ein GAUSS'sches Kästchen mit der Höhe von Δx auf einer Grenzfläche mit Normale $\vec{n}$ eines elektrischen Feldes. Die Normalen $\mathrm{d}\vec{f}$ des Kästchens sind orthogonal zu der Grenzfläche. Es existiert ein Feld außerhalb der Fläche $\vec{E}_a$ und innerhalb der Fläche $\vec{E}_i$. Auf der Grenzfläche befindet sich die Flächenladungsdichte σ. Hier wird der Satz von GAUSS verwendet

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = \int_{S(\Delta V)} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} \to \lim_{\Delta x\to 0}\Delta F\vec{n}\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right). \tag{2.65}$$

Wird Δx gegen 0, dann bleibt nur noch die Fläche $\Delta F\vec{n}\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right)$ übrig.

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Delta V}\rho\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Delta F. \tag{2.66}$$

Insgesamt ist also

$$E_a^n - E_i^n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2.67}$$

Die Normalkomponente an der Grenzfläche ist unstetig, macht also einen Sprung, wenn $\sigma \neq 0$.

2.5.2 Stokes'sche Fläche

Man betrachtet jetzt eine Stokes'sche Fläche auf der selben Grenzfläche. Die Höhe der Fläche ist Δx. Die Breite der Fläche ist Δl_i und Δl_a. Die Normale $\Delta \vec{F} = \vec{t} \Delta F$ der Fläche liegt in der Grenzfläche. Es gilt $\Delta \vec{l}_a = \Delta l \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) = -\Delta \vec{l}_i$. Der Stokes'sche Satz besagt

$$0 = \int_{\Delta F} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{f} = \int_{\partial \Delta F} \vec{E}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} \to \lim_{\Delta x \to 0} \Delta l \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right) = 0. \tag{2.68}$$

Daraus folgt, dass die Tangentialkomponenten des $\vec{E}$–Feldes stetig durch die Grenzflächen gehen. Eine Oberflächenladungsdichte spielt für das $\vec{E}$–Feld keine Rolle.

2.6 Elektrostatische Feldenergie

Die Krafteinwirkung auf eine Punktladung ist $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$. Verschiebt man diese Punktladung von A nach B muss eine Arbeit verrichtet werden

$$W_{AB} = -\int_B^A \vec{F}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} = q\left(\varphi(A) - \varphi(B)\right). \tag{2.69}$$

$W_{AB} > 0$, wenn Arbeit am System verrichtet wird. Die Energie einer Ladungsverteilung wird als die Arbeit bezeichnet, um die Ladungen aus dem Unendlichen zusammenzuziehen.

2.6.1 Energie von N Punktladungen

Punktladungen q_j befinden sich an den Punkten $\vec{r}_j$. Da mit jeder weiteren „zusammengezogenen" Ladung das Feld verändert wird, wird nur die $i-1$te Ladung betrachtet. Die Arbeit für diese Ladung ist die Summe aus allen Ladung bis zur $i-1$ten Ladung

$$\varphi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \qquad W_i = q_i \varphi(\vec{r}_i). \tag{2.70}$$

Die Summation über alle Ladungen $i = 1, \dots, N$ ist

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{2.71}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i,j=1; i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{2.72}$$

Dieser Ausdruck kann für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ρ verallgemeinert werden

$$W_c = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.73}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r}) \qquad \Bigg| -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.74}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\,(\Delta\varphi(\vec{r}))\,\varphi(\vec{r}) \tag{2.75}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\,\overbrace{\left(-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)}^{\vec{E}}\left(-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right) \tag{2.76}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\oint \mathrm{d}\vec{f}\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r|\vec{E}(\vec{r})|^2. \tag{2.77}$$

Für Ladungen im Unendlichen wird das erste Integral gleich null, da $\varphi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$ und $\varphi\vec{\nabla}\varphi \propto \frac{1}{r^3}$. Das Flächenintegral im Unendlichen ist damit

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{\mathcal{K}_r} \mathrm{d}\vec{f}\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) \propto \lim_{r\to\infty}\int \mathrm{d}\Omega\frac{1}{r^3}r^2 = 0. \tag{2.78}$$

Für die Energiedichte bleibt dann

$$w_c = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2 \geq 0\,\text{positiv–semidefinit}\,. \tag{2.79}$$

Das Problem bei der kontinuierlichen Ladungsdichte ist, dass sie die Selbstenergie der Ladung enthält.

2.6.2 Beispiel: 2 Punktladungen

Das elektrische Feld für zwei Punktladungen ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right). \tag{2.80}$$

Die Energiedichte berechnet sich dann zu

$$w_{2\,\text{pt.}} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^4}\right) + \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right). \tag{2.81}$$

Sie jetzt eine unendlich große unendlich verdünnte Ladungswolke. Diese Ladungswolke kann man als homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung q darstellen. Für die Arbeit, um alle Ladungen auf den Punkt in der Mitte zusammenzuziehen, gilt

$$W_{\text{Kugel}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{1}{R}. \tag{2.82}$$

Um eine Punktladung darzustellen wird $R \to 0$. Dabei wird aber die Arbeit unendlich. Physikalisch ist dies aber kein Problem, da die Selbstenergie selbst keinen Effekt hat. Nur die Energiedifferenz bzw. der wechselwirkungsanteil ist von Relevanz.

2.7 Multipolentwicklung

Die Annahme ist eine räumlich begrenzte (Radius R) Ladungsverteilung ρ und keine Randbedingungen im Endlichen. Von Interesse ist hier der Effekt im Unendlichen, also die **Fernzone**. Das allgemeine Potential ist $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Man sucht das Potential für $r \gg R$. Dafür wird eine TAYLOR–Entwicklung um $\frac{r'}{r} \ll 1$ angesetzt.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = e^{-\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}}\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\,\vec{r}')^2 - r^2r'^2}{r^5} + \ldots. \tag{2.83}$$

Damit ist das Potential dann

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\int \mathrm{d}^3r'\vec{r}'\rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\frac{3(\vec{r}\,\vec{r}')^2 - r^2r'^2}{r^5}\rho(\vec{r}') + \ldots. \tag{2.84}$$

Wenn die Terme ab inklusive $\frac{1}{r^3}$ wegfallen (da sie so klein sind), vereinfacht sich das Potential zu $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$. Die Momente der Ladungsverteilungen sind dann

$$\text{Monopol}: \vec{p}_M = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}') \propto \frac{1}{r} \tag{2.85}$$

$$\text{Dipol}: \vec{p}_D = \int \mathrm{d}^3r'\vec{r}'\rho(\vec{r}') \propto \frac{1}{r^2} \tag{2.86}$$

$$\text{Quadrupol}: \vec{p}_Q = \int \mathrm{d}^3r'\left(3r_i'r_j' - \delta_{ij}r'^2\right)\rho(\vec{r}') \propto \frac{1}{r^3}. \tag{2.87}$$

Wenn $Q \neq 0$, dann ist der Monopolterm dominant in der Fernzone. Wenn $Q = 0$, dann ist der Dipolmoment dominant. Für zwei entgegengerichtete gleichgroße Ladungen ist das Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$. Der Dipol in einem Punkt ist $\vec{p}(\vec{r}) = \lim_{d\to 0, q\to\infty} q\vec{d}$, sodass $\vec{p}$ endlich wird. Das Potential des Dipols lässt sich dann mit dem Dipolmoment schreiben: $\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_D\vec{r}}{r^3}$.

Wenn $Q = 0$ und $\vec{p} = 0$, dann dominiert der Quadropolmoment. Das Potential ist $\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{r_ir_j}{r^5}$. Ein Quadrupol kann durch zwei antiparallele Dipole realisiert werden.

2.8 Randwertproblem in der E–Statik

Falls es keine Randbedingungen gibt, ist die Lösung der POISSON–Gleichung das POISSON–Integral

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \varphi(\vec{r}). \tag{2.88}$$

Oft ist aber $\rho(\vec{r})$ in einem Raumgebiet V und φ, oder $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi = -E^{(n)}$ auf $S(V)$ gegeben.

3 Delta–Distribution

$$\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)=0\,\forall\vec{r}\neq\vec{r}_0. \tag{3.1}$$

$$\int_V \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\,\mathrm{d}^3r=\begin{cases}1 & ,\vec{r}_0\in V\\ 0 & ,\vec{r}_0\notin V\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\int_V f\left(\vec{r}\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\,\mathrm{d}^3r=\begin{cases}f\left(\vec{r}_0\right) & ,\vec{r}_0\in V\\ 0 & ,\vec{r}_0\notin V\end{cases} \tag{3.3}$$

4 Flächenintegrale

Sei die Fläche $\mathcal{F} := \{\vec{r}\,(u,v)\,|\,(u,v) \in D\}$. Der Normalenvektor zur Fläche ist $\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}\vec{a} \times \mathrm{d}\vec{b}$, mit

$$\mathrm{d}\vec{a} = \vec{r}\,(u, v + \mathrm{d}v) - \vec{r}\,(u,v) \approx \partial_v \vec{r}\,(u,v)\,\mathrm{d}v \tag{4.1}$$

$$\mathrm{d}\vec{b} = \vec{r}\,(u + \mathrm{d}u, v) - \vec{r}\,(u,v) \approx \partial_u \vec{r}\,(u,v)\,\mathrm{d}u \tag{4.2}$$

$$\mathrm{d}\vec{f} = \partial_v \vec{r}\,(u,v) \times \partial_u \vec{r}\,(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4.3}$$

Die Vektoren $\partial_v \vec{r}$ und $\partial_u \vec{r}$ spannen die Tangentialebene in $\vec{r}\,(u,v)$ auf.

Der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{a}\,(\vec{r})$ durch eine Fläche S, bzw. eine geschlossene Fläche $S\,(V)$ mit $\mathrm{d}\vec{f}$ als Flächennormale ist gegeben durch

$$\varphi_S\,(\vec{a}) = \int_S \vec{a}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_S \vec{a}\,(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}f \tag{4.4}$$

$$\varphi_{S(v)}\,(\vec{a}) = \oint_{S(V)} \vec{a}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = \oint_{S(V)} \vec{a}\,(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}f. \tag{4.5}$$

4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugel mit dem Radius R, dann sind die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = R\vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi. \tag{4.7}$$

Das Flächenelement ist dann

$$\mathrm{d}\vec{f} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R^2\sin\theta\,\vec{e}_r \tag{4.8}$$