

Notizen | math341

Jonas Wortmann

November 6, 2023

Contents

1	Komplexe Zahlen	2
1.1	Komplexe Zahlen als Matrizen	2
1.2	Polarkoordinaten	3
1.2.1	Potenzen	3
1.2.2	Beispiel	4
1.3	Wurzeln	4
1.3.1	Beispiel	4
1.3.2	Wurzelfunktion	5
1.4	Quadratische Gleichungen	5
1.5	Fundamentalsatz der Algebra	5
2	Komplexe Funktionen	6
2.1	Stetigkeit	6
2.2	Differenzierbarkeit	6
2.2.1	Holomorph	7
2.3	Differentiationsregeln	7
3	Reihen	8
3.1	Potenzreihen	8
3.1.1	Produkt von Potenzreihen	9
3.1.2	Verschiebung	9
3.1.3	Vertauschnug	9
3.2	Exponentialfunktion	9

1 Komplexe Zahlen

Die **komplexen Zahlen** sind alle Terme der Form $x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$. i ist die **imaginäre Einheit**, mit $i^2 = -1$. Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} := \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Die komplexen Zahlen können auch als eine Ebene aufgefasst werden, $x + yi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Die Gleichheit ist definiert als, $x + yi = a + bi \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.

Folgende Operationen sind definiert

- $(x + yi) + (a + bi) := (x + a) + (y + b)i$
- $(x + yi) \cdot (a + bi) := xa + xbi + yai + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$.

Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Dann ist die **komplex konjugierte** Zahl $\bar{z} := x - yi$. Praktisch ist dann, $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$. Zudem ist die **Norm** einer komplexen Zahl $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl $z = x + yi \neq 0 + 0i$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - yi)$. Folgende Rechenregeln sind gültig

- Kommutativität: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativität: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Distributivität: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- Kehrwertregel: $\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$
- Konjugation: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper, der \mathbb{R} enthält.

1.1 Komplexe Zahlen als Matrizen

$$[(x + yi)(a + bi)]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Eine komplexe Zahl kann also als Matrix dargestellt werden

$$[x + yi]_{\mathbb{R}^2 \times 2} := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Es gilt dann

$$[z_1 \cdot z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^2 \times 2} \cdot [z_2]_{\mathbb{R}^2} \quad (1.3)$$

$$[z_1 + z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^2 \times 2} + [z_2]_{\mathbb{R}^2} \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^2 \times 2} = [z]_{\mathbb{R}^2 \times 2}^{-1}. \quad (1.5)$$

$$\text{Also } \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbb{C} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jede Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ ist das Produkt einer Drehung $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ und einer Streckung $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

Für jede komplexe Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gibt es eindeutige $r > 0, \theta \in [0, 2\pi) : z = r(\cos \theta + \sin \theta i)$.

$$\text{Hier ist } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|z\| \text{ und } \theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & ; x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 < y \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & ; x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & ; x = 0 > y \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & ; y < 0 < x \end{cases}$$

1.2 Polarkoordinaten

Die komplexen Zahlen können in **Polarkoordinaten** dargestellt werden

$$\mathbb{C} \ni z = re^{i\theta} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + \sin \theta i, \quad (1.6)$$

mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Die Eindeutigkeit von r lässt sich zeigen durch

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|re^{i\theta}\| = \|r\| \underbrace{\|e^{i\theta}\|}_{=1} = r. \quad (1.7)$$

Die Eindeutigkeit von θ lässt sich zeigen durch

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Die Multiplikation ist definiert durch

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}; \quad (1.9)$$

und der Kehrwert

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)}. \quad (1.10)$$

1.2.1 Potenzen

Wird eine komplexe Zahl potenziert, gilt

$$k \in \mathbb{Z} : z^k = r^k e^{(i\theta)^k} = r^k e^{i(k\theta)}. \quad (1.11)$$

1.2.2 Beispiel

$$(1 + i)^{100}. \quad (1.12)$$

In Polarkoordinaten ist $1 + i$,

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \theta = \arg(1 + i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \quad 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (1.13)$$

Die Potenz ist dann

$$\begin{aligned} (1 + i)^{100} &= \sqrt{2}^{100} e^{i(100\frac{\pi}{4})} \\ &= 2^{50} e^{i25\pi} \\ &= 2^{50} e^{i\pi} \\ &= -2^{50}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.3 Wurzeln

Löse die Gleichung $z^k = \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, mit $z = re^{i\theta}$ und $\alpha = se^{i\beta}$. Der erste Teil der Lösung ist

$$r^k = s = \|\alpha\| \Leftrightarrow r = \sqrt[k]{\|\alpha\|} \geq 0. \quad (1.15)$$

Es muss also gelten

$$e^{ik\theta} = e^{i\beta} \Leftrightarrow k\theta - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (1.16)$$

Diese Gleichung hat k Lösungen

$$\theta_1 = \frac{\beta}{k}, \theta_2 = \frac{\beta}{k} + \frac{1}{k}2\pi, \theta_3 = \frac{\beta}{k} + \frac{2}{k}2\pi, \dots, \theta_k = \frac{\beta}{k} + \frac{k-1}{k}2\pi. \quad (1.17)$$

1.3.1 Beispiel

Löse die Gleichung $z^4 = r^4 e^{i4\theta} = 1$. $1 = 1e^{i0}$, also ist $s = 1$ und $\beta = 0$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[4]{1} = 1 \\ \theta_1 &= \frac{0}{4} = 0 \\ \theta_2 &= \frac{0}{4} + \frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2} \\ \theta_3 &= \frac{0}{4} + \frac{2}{4}2\pi = \pi \\ \theta_4 &= \frac{0}{4} + \frac{3}{4}2\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Also $z = e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1.3.2 Wurzelfunktion

Die k -te Wurzelfunktion ist definiert als

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{re^{i\theta}} = \sqrt[k]{r}e^{i\frac{\theta}{k}}, \quad (1.18)$$

für $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann ist $\sqrt[k]{z}$ eine Lösung der Gleichung $\alpha^k = z$.

Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist nicht stetig, da

$$\sqrt{1} = \sqrt{1e^{i0}} = \sqrt{1}e^{i\frac{0}{2}} = 1 \quad (1.19)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i\pi - \frac{\varepsilon}{2}} = e^{i\pi} = -1. \quad (1.20)$$

1.4 Quadratische Gleichungen

Löse die Gleichung $z^2 + pz + q = 0; p, q \in \mathbb{C}$. Mit quadratischer Ergänzung

$$z^2 + pz + q = z^2 + pz + \frac{1}{4}p^2 + q - \frac{1}{4}p^2 \quad (1.21)$$

$$= \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right). \quad (1.22)$$

Daraus folgt

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q \quad (1.23)$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \quad (1.24)$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (1.25)$$

Diese Gleichung ist die komplexe Wurzel, sie hat also immer mindestens zwei Lösung.

1.5 Fundamentalsatz der Algebra

Der **fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes k -Polynom

$$P(z) = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j, \alpha_k \neq 0 \quad (1.26)$$

insgesamt k Nullstellen hat, also

$$\exists z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C} \Rightarrow P(z) = \alpha_k \prod_{j=1}^k (z - z_j). \quad (1.27)$$

2 Komplexe Funktionen

Eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |z_k - z| \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}$. Für ein $z \in U$

$$\lim_{h \rightarrow z} f(h) = \alpha \in \mathbb{C} \text{ existiert,} \quad (2.2)$$

falls \forall Folgen $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq U$ mit $h_k \neq z, \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = z$, gilt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f(h_k) = \alpha$.

2.1 Stetigkeit

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}$. f heißt stetig in $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\lim_{h \rightarrow z} f(h) = f(z). \quad (2.3)$$

2.2 Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt **komplex differenzierbar** in $z \in U$, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z) \text{ existiert.} \quad (2.4)$$

Sei $f(z) = \alpha_j z^j$ ein Polynom von Grad $k \in \mathbb{N}$, mit $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \neq 0$. Dann ist

$$f'(z) = j \alpha_j z^{j-1}. \quad (2.5)$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $Df \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m \times n}$, falls

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0} \in \mathbb{R}^n} \frac{f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) - Df_{(\vec{x})} \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \text{ existiert.} \quad (2.6)$$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt, dass $f'(z)$ in $z = x + iy$ existiert, genau dann wenn

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ existiert und } Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [f'(z)]_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}. \quad (2.7)$$

Falls $f'(z) = a + ib$, dann ist $Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. f ist genau dann differenzierbar, wenn $\partial_1 F_1 = \partial_2 F_2$ und $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$.

2.2.1 Holomorph

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph** auf U wenn $f'(z) \in \mathbb{C} \forall z \in U$ existiert und in jedem Punkt auf U stetig komplex differenzierbar ist.

2.3 Differentiationsregeln

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in z komplex differenzierbar, dann ist f in z stetig.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$$\text{i) } (\alpha f)'(z) = \alpha f'(z), \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\text{ii) } (f_1 + f_2)'(z) = f_1'(z) + f_2'(z)$$

$$\text{iii) } (f_1 f_2)'(z) = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$$

$$\text{iv) } \left(\frac{f_1}{f_2} \right)'(z) = \frac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) f_2'(z)}{f_2^2(z)}, f_2(z) \neq 0$$

Sei $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$

$$\text{v) } (g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z)$$

3 Reihen

Sei $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad (3.1)$$

konvergiert, falls die Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^n z_k \quad (3.2)$$

in \mathbb{C} gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergieren. Die Reihe konvergiert absolut, falls

$$\sum_{k=0}^n |z_k| \quad (3.3)$$

konvergiert. Die Reihe **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert.

Jede CAUCHY-Folge konvergiert in \mathbb{C} . \mathbb{C} ist also **metrisch vollständig**.

3.1 Potenzreihen

Sei $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Man definiert die **Potenzreihe** mit Koeffizienten α_k als

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k. \quad (3.4)$$

Man definiert

$$R := \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|\alpha_k|}} \quad R := \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right|} \in [0, +\infty], \quad (3.5)$$

mit $0^{-1} := +\infty$ und $\infty^{-1} := 0$. Dann

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |z|^k$ konvergiert absolut für $|z| < R$.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ divergiert für $|z| > R$.

Sei $f(z)$ eine Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Man definiert $g(Z) := \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k z^{k-1}$, dann hat g den Konvergenzradius R und $f'(z) = g(z)$, falls $|z| < R$.

f ist auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ unendlich oft differenzierbar und

$$f^{(n)} := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \alpha_k z^{k-n} \quad (3.6)$$

mit Konvergenzradius R . Die Stammfunktion ist dann

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} z^{k+1} + c \quad c \in \mathbb{C}. \quad (3.7)$$

3.1.1 Produkt von Potenzreihen

Seien zwei Potenzreihen $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ und $g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j$. Das Produkt ist

$$f(z)g(z) = (\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots)(\beta_0 + \beta_1 z + \dots) \quad (3.8)$$

$$= \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) z + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0) z^2 + \dots \quad (3.9)$$

Die Konvergenzradien der Potenzreihen seien R und $R' \in [0, \infty]$. Man definiert $h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_{n-k}) z^n$. Dann hat h einen Konvergenzradius von mindestens $R'' \geq \min(R, R')$ und $f(z)g(z) = h(z)$ für $|z| < \min(R, R')$.

3.1.2 Verschiebung

Sei die Potenzreihe $f(z) := \sum \alpha_k z^k$. Die um z_0 verschobene Potenzreihe ist $g(h) = f(z_0 + h)$, $|z_0| < R$. Sei $|z_0| < R$ und

$$g(h) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} h^n, \quad (3.10)$$

dann ist der Konvergenzradius mindestens $R' \geq R - |z_0|$ und $g(h) = f(z_0 + h)$, falls $|z_0| + |h| < R$.

3.1.3 Vertauschung

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |c_{kn}| < \infty$, dann dürfen die Summen vertauscht werden

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn}. \quad (3.11)$$

3.2 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion hat eine Reihendarstellung

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \quad (3.12)$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion

$$\exp'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{k!} z^{k-1} \quad (3.13)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} \quad (3.14)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad (3.15)$$

$$= \exp(z). \quad (3.16)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2). \quad (3.17)$$

Sei $y \in \mathbb{R}$, dann ist

$$|\exp(yi)| = 1. \quad (3.18)$$

Wird y verändert, dreht sich also die Exponentialfunktion um den Einheitskreis. Wird der Realteil (x) verändert, ändert sich der Betrag der Funktion.

Die Exponentialfunktion lässt sich auch durch andere Funktionen darstellen

$$\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z) \quad (3.19)$$

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z). \quad (3.20)$$