

Notizen | math341

Jonas Wortmann

October 11, 2023

Contents

1	Komplexe Zahlen	2
1.1	Komplexe Zahlen als Matrizen	2

1 Komplexe Zahlen

Die **komplexen Zahlen** sind alle Terme der Form $x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$. i ist die **imaginäre Einheit**, mit $i^2 = -1$. Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} := \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Die komplexen Zahlen können auch als eine Ebene aufgefasst werden, $x + yi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Die Gleichheit ist definiert als, $x + yi = a + bi \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.

Folgende Operationen sind definiert

- $(x + yi) + (a + bi) := (x + a) + (y + b)i$
- $(x + yi) \cdot (a + bi) := xa + xbi + yai + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$.

Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Dann ist die **komplex konjugierte** Zahl $\bar{z} := x - yi$. Praktisch ist dann, $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$. Zudem ist die **Norm** einer komplexen Zahl $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl $z = x + yi \neq 0 + 0i$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - yi)$. Folgende Rechenregeln sind gültig

- Kommutativität: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativität: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Distributivität: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- Kehrwertregel: $\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$
- Konjugation: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper, der \mathbb{R} enthält.

1.1 Komplexe Zahlen als Matrizen

$$[(x + yi)(a + bi)]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Eine komplexe Zahl kann also als Matrix dargestellt werden

$$[x + yi]_{\mathbb{R}^2 \times 2} := \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Es gilt dann

$$[z_1 \cdot z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^2 \times 2} \cdot [z_2]_{\mathbb{R}^2} \quad (1.3)$$

$$[z_1 + z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^2 \times 2} + [z_2]_{\mathbb{R}^2} \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}_{\mathbb{R}^2 \times 2} = [z]_{\mathbb{R}^2 \times 2}^{-1}. \quad (1.5)$$

$$\text{Also } \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbb{C} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jede Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ ist das Produkt einer Drehung $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ und einer Streckung $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

Für jede komplexe Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gibt es eindeutige $r > 0, \theta \in [0, 2\pi) : z = r(\cos \theta + \sin \theta i)$.

$$\text{Hier ist } r = \sqrt{x^2 + y^2} = ||z|| \text{ und } \theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & ; x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 < y \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & ; x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & ; x = 0 > y \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & ; y < 0 < x \end{cases}$$