physik321 | Notizen

Jonas Wortmann

November 28, 2023

Contents

1 Überblick Elektrodynamik

Das Ziel ist die Untersuchung der Ursache und Wirkung von elektrischen ($\vec{E}$) und magnetischen ($\vec{B}$) Feldern auf elektrische Ladungen (q).

Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass auf elektrisch geladene Körper eine elektromagnetische Kraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{1.1}$$

mit $\vec{v}$ der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, wirkt. Diese Kraft führt zu einer Bewegungsänderung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right]. \tag{1.2}$$

Der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und (bewegten) Ladungen sind die **Maxwell–Gleichungen**

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad c^2 \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \tag{1.4}$$

Zusammen mit Randbedingungen an **Grenzflächen** bestimmen sie alle Effekte der Elektrodynamik.

2 Statische Felder

Die Maxwell–Gleichungen für statische Felder sind

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad c^2 \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \tag{2.2}$$

Man kann sehen, dass die Gleichungen für statische Felder entkoppeln und sie sich in **Elektrostatik** und **Magnetostatik** aufteilen.

2.1 Eletrostatik

Die Grundgrößen der klassischen Mechanik sind die Masse, Länge und Zeit. Eine wichtige Grundgröße in der Elektrostatik ist die elektrische Ladung. Aus der experimentellen Beobachtung ist bekannt, dass Körper in einen elektrischen Zustand versetzt werden können (z.B. können geladene Körper andere geladene Körper anziehen). Dieses Phänomen ist mechanisch nicht erklärbar. Dieser Zustand ist auch auf andere Körper übertragbar, woraus folgt, dass es sich um eine substanzartige Größe handeln muss.

Diese Größe ist die **elektrische Ladung** q. Bei der Übertragung fließt ein elektrischer Strom I. Die Ladung des Elektrons ist negativ, also $q < 0$. Zudem ist sie additiv, es existiert also die Gesamtladung $Q = \sum_i q_i$. In abgeschlossenen Systemen ist die Summe aus positiven und negativen Ladungen konstant. Die Ladungen sind **gequantelt**, es existiert also eine nicht teilbare Elementarladung e, also gilt immer, dass $q = n \cdot e, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Elektron} &: n = -1 \\ \text{Proton} &: n = +1 \\ \text{Neutron} &: n = 0 \\ \text{Atomkern} &: n = Z. \end{aligned}$$

In der Elektrodynamik wird dieses Prinzip allerdings verallgemeinert. Man führt die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein, also $Q = \int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r$. Für Punktladungen gilt dann $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Befinden sich zwei Ladungen q_1 und q_2 im Abstand von einem Meter im Vakuum, dann wirkt eine Kraft von

$$F = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8,854}\,\mathrm{N}. \tag{2.3}$$

Dann haben q_1 und q_2 eine Ladung von $|q_1| = |q_2| = 1\,\mathrm{C}$. Die Elementarladung ist $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Stromdichte

Für bewegte Ladungen existiert die Stromdichte $\vec{j}$. Sie gibt die Ladung pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung an. Betrachte als Beispiel eine homogene Ladungsverteilung von N Teilchen mit Ladung q und Geschwindigkeit $\vec{v}$, dann ist die Ladungsdichte $\vec{j} = \frac{N}{V} q \vec{v}$. Die Stromstärke I ist dann $I = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_{\mathcal{F}} \vec{j}\,(\vec{r})\,\vec{n}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}f$. Die Einheit ist 1 A, was einem Ladungstransport von 1 C in einer Sekunde entspricht.

Ladungserhaltung

Die Ladungserhaltung kann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung** beschrieben werden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}. \tag{2.4}$$

2.1.1 Coulomb'sche Gesetz

Zwei Ladungen q_1 und q_2 befinden sich im Abstand $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ zum Ursprung. Der Abstand zwischen diesen Ladungen ist $\vec{r}_{12}$. Dieser Abstand soll viel größer sein also die Ausdehnung von q_1 und q_2. Die Kraft zwischen diesen Ladungen ist

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.5}$$

Sie ist also direkt proportional zu q_1 und q_2, $|\vec{F}_{12}| \propto |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$, sie wirkt entlang von F_{12}. Diese Kraft gilt nur für **ruhende** Ladungen.

Experimentelle Tatsachen

Die Proportionalitätskonstante ist $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Das Superpositionsprinzip erlaubt es die Kraft auf mehrere Ladungen zu berechnen

$$\vec{F}_1 = k q_1 \sum_{j=2}^{n} q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \tag{2.6}$$

2.1.2 Das elektrische Feld

Das elektrische Feld, bzw. die Feldlinien, erlauben eine Abstraktion der Kraftwirkung. Für Punktladungen ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \tag{2.7}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho\,(r')\, \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{2.8}$$

Der Integrand kann umgeschrieben werden als

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{2.9}$$

also ist $\vec{E}$ ein Gradientenfeld des skalaren Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}). \tag{2.10}$$

Die POISSON–Gleichung ist

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.11}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist das Grundproblem der Elektrostatik.

Die Äquipotentialflächen sind konstant, also $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$. Die Coulomb–Kraft ist konservativ $\operatorname{rot} q\vec{E} = 0$. Da die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ist das Potential $V(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$.

Das Linienintegral über $\vec{E}$ ist wegabhängig

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\,\mathrm{d}\vec{r}' = U(\vec{r},\vec{r}_0). \tag{2.12}$$

Für n Punktladungen gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\sum_{j=1}^n q_j\delta(\vec{r}'-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n q_j\delta(\vec{r}-\vec{r}_j). \tag{2.13}$$

2.1.3 Beispiel: Homogen geladene Kugel

Der Ursprung wird in das Zentrum der geladenen Kugel mit Radius R gelegt. Eine Probeladung befindet sich im Abstand $\vec{r}$ zum Zentrum. Die Ladungsdichte der Kugel ist

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } |\vec{r}'| = r' \le R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2.14}$$

Das Potential ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{K}(R)} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r'^2\,\mathrm{d}r' \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi' \int_0^{\pi}\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^R r'^2\,\mathrm{d}r'\ \frac{1}{rr'}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}\Big|_0^{\pi}\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R r'\,\mathrm{d}r'\left[|r+r'|-|r-r'|\right]\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R \mathrm{d}r' \begin{cases} 2rr' & ,r\le r' \\ 2r'^2 & ,r>r' \end{cases}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Für $\vec{r}$ außerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r>R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\int_0^R 2r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{2.17}$$

Für $\vec{r}$ innerhalb von $\mathcal{K}(R)$, also $r<R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\left[\int_0^r 2r'^2\,\mathrm{d}r' + \int_r^R 2rr'\,\mathrm{d}r'\right] = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{r}\left[\frac{2r^3}{3}+r\left(R^2-r^2\right)\right] \tag{2.18}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(3R^2-r^2\right)\frac{1}{2R^3}. \tag{2.19}$$

Das elektrische Feld außerhalb ($r>R$) bzw. innerhalb ($r<R$) ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R^3}\vec{\nabla}\left(3R^2-r^2\right) \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\\
&= \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}\frac{\vec{r}}{r^3}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2 Mittlere Quelldichte – Satz von Gauss

Sei ein Volumen mit den Kanten $\Delta x, \Delta y$ und Δz. Der Mittelpunkt ist $\vec{r}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Die Flächennormalen sind $\Delta\vec{f}_1, \ldots, \Delta\vec{f}_6$ ($\vec{f}_1$ zeigt entlang der Δx–Achse)

$$\Delta\vec{f}_1 = \Delta y\Delta x\,\vec{e}_x = -\Delta\vec{f}_2 \tag{2.22}$$

$$\Delta\vec{f}_3 = \Delta x\Delta z\,\vec{e}_y = -\Delta\vec{f}_4 \tag{2.23}$$

$$\Delta\vec{f}_5 = \Delta x\Delta y\,\vec{e}_z = -\Delta\vec{f}_6. \tag{2.24}$$

Das elektrische Feld, welches den Quader durchsetzt ist

$$\oint \vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \iint\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left[E_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-E_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\right] \tag{2.25}$$

$$+\iint\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\left[E_y\left(x,y_0+\frac{\Delta y}{2},z\right)-E_y\left(x,y_0-\frac{\Delta y}{2},z\right)\right] \tag{2.26}$$

$$+\iint\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left[E_z\left(x,y,z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)-E_z\left(x,y,z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]. \tag{2.27}$$

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung (da $\Delta x, \Delta y$ und Δz klein sind),

$$=\int\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\left(x_0,y,z\right)\Delta x+\mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right) \tag{2.28}$$

$$+\int\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\left(x,y_0,z\right)\Delta y+\mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right) \tag{2.29}$$

$$+\int\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(x,y,z_0\right)\Delta z+\mathcal{O}\left(\Delta z^3\right)\right). \tag{2.30}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} = \partial x E_x\left(x_0,y_1,z_1\right)+\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right) \tag{2.31}$$

$$+\partial y E_y\left(x_2,y_0,z_2\right)+\mathcal{O}\left(\Delta y^2\right) \tag{2.32}$$

$$+\partial z E_z\left(x_3,y_3,z_0\right)+\mathcal{O}\left(\Delta z^2\right). \tag{2.33}$$

Der Limes von $\Delta V \to 0$ gibt dann

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{S(V)}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} = \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}_0\right). \tag{2.34}$$

Beliebige Volumina können mit Quadern ausgeschöpft werden. Flächenintegrale über gemeinsame Grenzflächen heben sich auf. Am Ende bleibt nur die äußere Grenzfläche übrig. Damit ist der Satz von GAUSS

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}V. \tag{2.35}$$

Wendet man diesen Satz auf die Elektrostatik an, folgt

$$\oint_{S(V)}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_{S(V)}\mathrm{d}\vec{f}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{2.36}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_{S(V)}\mathrm{d}\vec{f}\left(-\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \tag{2.37}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho\left(\vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r'\int_V\mathrm{d}^3r\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{2.38}$$

Es gilt $\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$. Damit kann geschrieben werden

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho\left(\vec{r}'\right) \mathrm{d}^3 r' \int_V \delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \mathrm{d}V \tag{2.39}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{\varepsilon_0} Q\left(V\right) \tag{2.40}$$

$$= \int_V \operatorname{div} \vec{E}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}^3 r. \tag{2.41}$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich für beliebige Volumina V sagen

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{E}\left(\vec{r}\right) - \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0} \right) \mathrm{d}^3 r = 0. \tag{2.42}$$

Daraus folgen die MAXWELL'schen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0} \qquad \oint_{S(V)} \vec{E}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}\vec{f} = \frac{Q\left(V\right)}{\varepsilon_0}. \tag{2.43}$$

Da $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \tag{2.44}$$

2.2.1 Beispiel: Bestimmung von E mit Gauss'schem Satz

Sei eine homogen geladene Kugel mit Radius R und einem elektrischem Feld von

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = E_r\left(r,\varphi,\theta\right) \vec{e}_r + E_\varphi\left(r,\varphi,\theta\right) \vec{e}_\varphi + E_\theta\left(r,\varphi,\theta\right) \vec{e}_\theta. \tag{2.45}$$

Die MAXWELL–Gleichung besagt,

$$\oint_{S(V)} \vec{E}\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}\vec{f} = \frac{q\left(V\right)}{\varepsilon_0} \tag{2.46}$$

Die Kugel ist rotationssymmetrisch um die x–,y– und z–Achse, also unabhängig von θ und φ. Das Feld ist also nur noch von Radius r abhängig.

Wird an der x–y–Ebene gespiegelt, wird θ zu $\pi-\theta$, also $E_z = E_r\left(r\right)\cos\theta - E_\theta\left(r\right)\sin\theta$. Zudem gilt $\cos\left(\pi-\theta\right) = -\cos\left(\theta\right)$ und $\sin\left(\pi-\theta\right) = \sin\left(\theta\right)$. Aus dieser Spiegelung folgt, dass $E_z \to -E_z$ und $E_\theta = 0$. Aus den Spiegelungen an der x–z– und y–z–Ebene kann man analog sagen, dass $E_\varphi = 0$.

Für das gesamte Feld folgt dann

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = E_r\left(r\right) \vec{e}_r. \tag{2.47}$$

Jetzt kann der Satz von GAUSS angewendet werden

$$\int_{S(V_r)} \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{f} = E_r 4\pi r^2 = \frac{q(V_r)}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon_0} & ,r > R \\ \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3} & ,r < R \end{cases}. \tag{2.48}$$

Das Feld ist also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{r^2} & ,r > R \\ \frac{r}{R^3} & ,r < R \end{matrix}\right\}\vec{e}_r. \tag{2.49}$$

2.3 Integraldarstellung – Satz von Stokes

Für die Integraldarstellung der MAXWELL'schen Gleichungen wird die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve C verwendet

$$Z = \oint_C \vec{a}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.50}$$

Sei ein geschlossener Weg in der xy–Ebene mit Mittelpunkt $\vec{r}_0$. Die Fläche ist $\Delta F = \Delta x \Delta y$ und die Normale $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$Z = \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} \left[a_x\left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - a_x\left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\right]\mathrm{d}x \tag{2.51}$$

$$+ \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left[a_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z_0\right) - a_y\left(y + \frac{\Delta y}{2}, y, z_0\right)\right]\mathrm{d}y \tag{2.52}$$

$$= \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} \left[-\partial_y a_x(x, y_0, z_0)\,\Delta y + \mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\right]\mathrm{d} \tag{2.53}$$

$$= \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left[-\partial_x a_y(x_0, y, z_0)\,\Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^3\right)\right]\mathrm{d}. \tag{2.54}$$

Betrachtet man dann die Fläche

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{Z}{\Delta F} = \left(\partial_x a_y(\vec{r}_0) - \partial_y a_x(\vec{r}_0)\right) \tag{2.55}$$

$$= \left(\mathrm{rot}\,\vec{a}(\vec{r}_0)\right)_z. \tag{2.56}$$

Daraus folgt der **Satz von** STOKES

$$\oint_{\partial F} \vec{a}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_F \mathrm{rot}\left(\vec{a}(\vec{r})\right)\mathrm{d}\vec{f}. \tag{2.57}$$

Mit diesem Satz sind die MAXWELL'schen Gleichungen dann

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad \oint_C \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{2.58}$$

2.4 Punktladungen

Die Ladungsdichte einer Punktladung kann mit Hilfe der Delta–Distribution dargestellt werden (kartesische oder Kugelkoordinaten)

$$\rho\left(\vec{r}\right) = q\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \qquad \rho\left(\vec{r}\right) = q\frac{1}{r_0^2 \sin\left(\theta_0\right)}\delta\left(r - r_0\right)\delta\left(\varphi - \varphi_0\right)\delta\left(\theta - \theta_0\right). \tag{2.59}$$

Das Potential lässt sich schreiben als

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\delta\left(\vec{r}_0 - \vec{r}'\right)\,\mathrm{d}^3r' \tag{2.60}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}. \tag{2.61}$$

2.4.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugeloberfläche mit Ladungsdichte $\rho\left(\vec{r}\right) = \sigma$. Die Gesamtladung in Kugelkoordinaten im Abstand R vom Zentrum ist

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \delta\left(r - R\right)\sigma r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi 2\sigma R^2 = 4\pi R^2\sigma. \tag{2.62}$$

Die Ladung einer Punktladung in Kugelkoordinaten ist

$$\int_{\mathbb{R}^3} q\frac{1}{r_0^2\sin\theta_0}\delta\left(r - r_0\right)\delta\left(\varphi - \varphi_0\right)\delta\left(\theta - \theta_0\right)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = q\frac{1}{r_0^2\sin\theta_0}r_0^2\sin\theta_0 \tag{2.63}$$

$$= q. \tag{2.64}$$

2.5 Feldverhalten an Grenzflächen

2.5.1 Gauss'sche Fläche

Man betrachtet ein GAUSS'sches Kästchen mit der Höhe von Δx auf einer Grenzfläche mit Normale $\vec{n}$ eines elektrischen Feldes. Die Normalen $\mathrm{d}\vec{f}$ des Kästchens sind orthogonal zu der Grenzfläche. Es existiert ein Feld außerhalb der Fläche $\vec{E}_a$ und innerhalb der Fläche $\vec{E}_i$. Auf der Grenzfläche befindet sich die Flächenladungsdichte σ. Hier wird der Satz von GAUSS verwendet

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = \int_{S(\Delta V)} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} \to \lim_{\Delta x\to 0}\Delta F\vec{n}\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right). \tag{2.65}$$

Wird Δx gegen 0, dann bleibt nur noch die Fläche $\Delta F\vec{n}\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right)$ übrig.

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Delta V}\rho\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Delta F. \tag{2.66}$$

Insgesamt ist also

$$E_a^n - E_i^n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2.67}$$

Die Normalkomponente an der Grenzfläche ist unstetig, macht also einen Sprung, wenn $\sigma \neq 0$.

2.5.2 Stokes'sche Fläche

Man betrachtet jetzt eine STOKES'sche Fläche auf der selben Grenzfläche. Die Höhe der Fläche ist Δx. Die Breite der Fläche ist Δl_i und Δl_a. Die Normale $\Delta\vec{F} = \vec{t}\Delta F$ der Fläche liegt in der Grenzfläche. Es gilt $\Delta\vec{l}_a = \Delta l\left(\vec{t}\times\vec{n}\right) = -\Delta\vec{l}_i$. Der STOKES'sche Satz besagt

$$0 = \int_{\Delta F} \operatorname{rot}\vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_{\partial\Delta F} \vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{r} \to \lim_{\Delta x\to 0} \Delta l\left(\vec{t}\times\vec{n}\right)\left(\vec{E}_a - \vec{E}_i\right) = 0. \tag{2.68}$$

Daraus folgt, dass die Tangentialkomponenten des $\vec{E}$–Feldes stetig durch die Grenzflächen gehen. Eine Oberflächenladungsdichte spielt für das $\vec{E}$–Feld keine Rolle.

2.6 Elektrostatische Feldenergie

Die Krafteinwirkung auf eine Punktladung ist $\vec{F}\left(\vec{r}\right) = q\vec{E}\left(\vec{r}\right)$. Verschiebt man diese Punktladung von A nach B muss eine Arbeit verrichtet werden

$$W_{AB} = -\int_B^A \vec{F}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{r} = q\left(\varphi\left(A\right) - \varphi\left(B\right)\right). \tag{2.69}$$

$W_{AB} > 0$, wenn Arbeit am System verrichtet wird. Die Energie einer Ladungsverteilung wird als die Arbeit bezeichnet, um die Ladungen aus dem Unendlichen zusammenzuziehen.

2.6.1 Energie von N Punktladungen

Punktladungen q_j befinden sich an den Punkten $\vec{r}_j$. Da mit jeder weiteren „zusammengezogenen" Ladung das Feld verändert wird, wird nur die $i-1$te Ladung betrachtet. Die Arbeit für diese Ladung ist die Summe aus allen Ladung bis zur $i-1$ten Ladung

$$\varphi\left(\vec{r}_i\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \qquad W_i = q_i\varphi\left(\vec{r}_i\right). \tag{2.70}$$

Die Summation über alle Ladungen $i = 1, \ldots, N$ ist

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \tag{2.71}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j=1;i\neq j}^{N}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}. \tag{2.72}$$

Dieser Ausdruck kann für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ρ verallgemeinert werden

$$W_c = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.73}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r}) \qquad \Big| -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.74}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r \left(\Delta\varphi(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) \tag{2.75}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r \overbrace{\left(-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)}^{\vec{E}}\left(-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right) \tag{2.76}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\oint \mathrm{d}\vec{f}\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2. \tag{2.77}$$

Für Ladungen im Unendlichen wird das erste Integral gleich null, da $\varphi(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$ und $\varphi\vec{\nabla}\varphi \propto \frac{1}{r^3}$. Das Flächenintegral im Unendlichen ist damit

$$\lim_{r\to\infty}\oint_{\mathcal{K}_r} \mathrm{d}\vec{f}\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) \propto \lim_{r\to\infty}\int \mathrm{d}\Omega \frac{1}{r^3} r^2 = 0. \tag{2.78}$$

Für die Energiedichte bleibt dann

$$w_c = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2 \geq 0 \,\text{positiv–semidefinit}\,. \tag{2.79}$$

Das Problem bei der kontinuierlichen Ladungsdichte ist, dass sie die Selbstenergie der Ladung enthält.

2.6.2 Beispiel: 2 Punktladungen

Das elektrische Feld für zwei Punktladungen ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right). \tag{2.80}$$

Die Energiedichte berechnet sich dann zu

$$w_{2\,\text{pt.}} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^4}\right) + \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right). \tag{2.81}$$

Sie jetzt eine unendlich große unendlich verdünnte Ladungswolke. Diese Ladungswolke kann man als homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung q darstellen. Für die Arbeit, um alle Ladungen auf den Punkt in der Mitte zusammenzuziehen, gilt

$$W_{\text{Kugel}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{1}{R}. \tag{2.82}$$

Um eine Punktladung darzustellen wird $R \to 0$. Dabei wird aber die Arbeit unendlich. Physikalisch ist dies aber kein Problem, da die Selbstenergie selbst keinen Effekt hat. Nur die Energiedifferenz bzw. der wechselwirkungsanteil ist von Relevanz.

2.7 Multipolentwicklung

Die Annahme ist eine räumlich begrenzte (Radius R) Ladungsverteilung ρ und keine Randbedingungen im Endlichen. Von Interesse ist hier der Effekt im Unendlichen, also die **Fernzone**. Das allgemeine Potential ist $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Man sucht das Potential für $r \gg R$. Dafür wird eine TAYLOR–Entwicklung um $\frac{r'}{r} \ll 1$ angesetzt.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \mathrm{e}^{-\vec{r}'\cdot\vec{\nabla}}\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\vec{r}}{r^3} + \frac{3\left(\vec{r}\,\vec{r}'\right)^2 - r^2 r'^2}{r^5} + \dots. \tag{2.83}$$

Damit ist das Potential dann

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\int \mathrm{d}^3r'\vec{r}'\rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\frac{3\left(\vec{r}\,\vec{r}'\right)^2 - r^2r'^2}{r^5}\rho(\vec{r}') + \dots. \tag{2.84}$$

Wenn die Terme ab inklusive $\frac{1}{r^3}$ wegfallen (da sie so klein sind), vereinfacht sich das Potential zu $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$. Die Momente der Ladungsverteilungen sind dann

$$\text{Monopol}: \vec{p}_M = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}') \propto \frac{1}{r} \tag{2.85}$$

$$\text{Dipol}: \vec{p}_D = \int \mathrm{d}^3r'\vec{r}'\rho(\vec{r}') \propto \frac{1}{r^2} \tag{2.86}$$

$$\text{Quadrupol}: \vec{p}_Q = \int \mathrm{d}^3r'\left(3r_i'r_j' - \delta_{ij}r'^2\right)\rho(\vec{r}') \propto \frac{1}{r^3}. \tag{2.87}$$

Wenn $Q \neq 0$, dann ist der Monopolterm dominant in der Fernzone. Wenn $Q = 0$, dann ist der Dipolmoment dominant. Für zwei entgegengerichtete gleichgroße Ladungen ist das Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$. Der Dipol in einem Punkt ist $\vec{p}(\vec{r}) = \lim_{d\to 0, q\to\infty} q\vec{d}$, sodass $\vec{p}$ endlich wird. Das Potential des Dipols lässt sich dann mit dem Dipolmoment schreiben: $\varphi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_D\vec{r}}{r^3}$.

Wenn $Q = 0$ und $\vec{p} = 0$, dann dominiert der Quadropolmoment. Das Potential ist $\varphi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{r_ir_j}{r^5}$. Ein Quadrupol kann durch zwei antiparallele Dipole realisiert werden.

2.8 Randwertproblem in der E–Statik

Falls es keine Randbedingungen gibt, ist die Lösung der POISSON–Gleichung das POISSON–Integral

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \varphi(\vec{r}). \tag{2.88}$$

Oft ist aber $\rho(\vec{r})$ in einem Raumgebiet V und φ, oder $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi = -E^{(n)}$ auf $S(V)$ gegeben.

3 Green'sche Funktion

Vorlesung 6 (26.10.) fehlt

4 Kugelflächenfunktion

Der LAPLACE–Operator Δ kann als eine Funktion verstanden werden, die

$$\Delta : f \mapsto \Delta f\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{3} \partial_{r_i}^2 f\left(\vec{r}\right). \tag{4.1}$$

Es ist also möglich, dass Δ Eigenwerte besitzt, für die $\Delta f\left(\vec{r}\right) = \lambda f\left(\vec{r}\right)$.

Man sucht nun nach Eigenfunktionen auf einer Kugeloberlfäche. Es gilt bereits

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r f\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} f, \tag{4.2}$$

mit dem Winkelanteil

$$\Delta_{\theta,\varphi} f = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta f\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\theta^2 f. \tag{4.3}$$

Die Eigenfunktionen von $\Delta_{\theta,\varphi}$ sind die **Kugelflächenfunktionen**

$$y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m\left(\cos\theta\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \tag{4.4}$$

mit $l = 0, 1, 2, \ldots$ und $m = -l, -l+1, -l+2, \ldots, l-2, l-1, l$. Beispiele sind

$$y_{00}\left(\theta,\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad y_{11}\left(\theta,\varphi\right) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad y_{10}\left(\theta,\varphi\right) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta. \tag{4.5}$$

Die Funktion P_l^m sind die zugeordneten LEGENDRE–Polynome. Sie sind Lösungen der verallgemeinerten LEGENDRE–Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l^m}{\mathrm{d}z}\right) + \left(l\left(l+1\right) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P_l^m\left(z\right) = 0 \qquad z = \cos\theta. \tag{4.6}$$

Wendet man den LAPLACE–Operator auf die Kugelflächenfunktion an erhält man die Eigenfunktionen auf der Kugeloberfläche (ohne Radialteil)

$$\Delta_{\theta,\varphi} y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) = -l\left(l+1\right) y_{lm}\left(\theta,\varphi\right). \tag{4.7}$$

Diese Funktion ist orthogonal. Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta y_{l'm'}^*\left(\theta,\varphi\right) y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{4.8}$$

Zudem ist sie vollständig, also

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right) y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) = \underbrace{\delta\left(\cos\theta' - \cos\theta\right)}_{\delta(z'-z)}\delta\left(\varphi-\varphi'\right). \tag{4.9}$$

4.1 Entwicklung von Funktionen

Eine Funktion kann entwickelt werden, indem

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(r)\, y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{4.10}$$

mit $R_{lm}(r)$ dem Radialanteil,

$$R_{lm}(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta f(r,\theta,\varphi)\, y_{lm}^*(\theta,\varphi). \tag{4.11}$$

4.2 Lösung der Laplace–Gleichung

Der Ansatz für die Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ist

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l,m} R_{lm}(r)\, y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{4.12}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\varphi &= \sum_{l,m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r^2 \frac{\mathrm{d}R_{lm}}{\mathrm{d}r} + \frac{R_{lm}}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right] y_{lm}(\theta,\varphi) && (4.13)\\ &= \sum_{l,m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_{lm}(r)}{\mathrm{d}r} - \frac{R_{lm}(r)\, l(l+1)}{r^2}\right)\right] y_{lm}. && (4.14)\end{aligned}$$

Der Term

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0 \tag{4.15}$$

ist der **Radialanteil**. Mit dem Ansatz $R(r) = \frac{1}{r}u(r)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u(r) &= 0 && (4.16)\\ Ar^{l+1} + Br^{-l} &= u(r) && (4.17)\\ Ar^{l} + Br^{-(l+1)} &= R(r). && (4.18)\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Laplace–Gleichung ist dann

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l,m}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right) y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{4.19}$$

mit A_{lm} und B_{lm} aus den Randbedingungen.

4.3 Beispiel: Ladung einer Hohlkugel

Sie eine Kugel mit Radius R und Ladungsverteilung $\sigma(\theta, \varphi)$ auf der Hülle. Im Inneren und im Äußeren ist die Ladung ρ_i und ρ_a gleich null. Das Potential lässt sich dann mit der allgemeinen Lösung für die Kugelflächenfunktion lösen

$$\phi_i(\vec{r}) = \sum_{l,m} \left(A^i_{lm} r^l + B^i_{lm} r^{-(l+1)}\right) y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{4.20}$$

$$\phi_a(\vec{r}) = \sum_{l,m} \left(A^a_{lm} r^l + B^a_{lm} r^{-(l+1)}\right) y_{lm}(\theta, \varphi) . \tag{4.21}$$

Die Randbedingungen sind,

i) $\phi_a(\vec{r}) = 0$ für $r \to \infty$. $\Rightarrow A^a_{lm} = 0 \, \forall l, m$.

ii) Bei $r = 0$ soll ϕ_i eine reguläre Funktion sein (sie soll nicht divergieren).$\Rightarrow B^i_{lm} = 0 \, \forall l, m$.

Damit ist die Lösung vorerst

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{lm} A^i_{lm} r^l y_{lm}(\theta, \varphi) & , r \leq R \\ \sum_{l,m} B^a_{lm} r^{-(l+1)} y_{lm}(\theta, \varphi) & , r > R \end{cases} . \tag{4.22}$$

iii) $\phi_i(R, \theta, \varphi) = \phi_a(R, \theta, \varphi) \, \forall \theta, \varphi$. Es muss dann $\forall l, m$ gelten, dass $A^i_{lm} R^l = B^a_{lm} R^{-(l+1)}$. Damit ist $B^a_{lm} = A^i_{lm} R^{2l+1}$.

iv) $\sigma(\theta, \varphi)$ existerit auf $S(K_R)$. Damit ist das $\vec{E}$–Feld nicht stetig, also $\partial_r \phi_i - \partial_r \varphi_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Entwickelt man $\sigma(\theta, \varphi)$ in y_{lm} folgt, $\sigma(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} \sigma_{lm} y_{lm}(\theta, \varphi)$. Daraus folgt $A^i_{lm} = \dfrac{\sigma_{lm}}{2(l+1)\varepsilon_0} \dfrac{1}{R^{l-1}}$.

5 Dielektrika

5.1 Makroskopische Feldgrößen

Im Wesentlichen werden für makroskopische Feldgrößen mikroskopische Felder $f(\vec{r})$ geglättet, also $\langle f(\vec{r})\rangle = \frac{1}{v(\vec{r})}\int_{v(\vec{r})} f(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3r'$. $\langle f(\vec{r})\rangle$ ist ein kontinuierliches Feld. Man macht die Annahme, dass $\langle \operatorname{grad} f(\vec{r})\rangle = \operatorname{grad}\langle f(\vec{r})\rangle$. Analog betrachtet man das $\vec{E}$–Feld als $\vec{E}(\vec{r}) = \left\langle \vec{E}_{\text{mikroskop.}}(\vec{r})\right\rangle$. Damit sind die Maxwell–Gleichungen

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\langle\rho_m\rangle}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0. \tag{5.1}$$

Weiterhin ist $\left\langle \vec{E}_m\right\rangle = -\langle \operatorname{grad}\varphi_m\rangle = -\operatorname{grad}\langle\varphi_m\rangle$.

Sei ein j–tes Teilchen an Punkt $\vec{R}_j$, insgesamt neutral geladen mit **Überschussladungen** am Rand. Man betrachtet sein Potential am Punkt $\vec{r}$. Die Gesamtladung ist $q_j = \sum_n^{(j)} q_n^{(j)}$, mit der Ladungsdichte $\rho_j(\vec{r}) = \sum_n^{(j)} q_n^{(j)}\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)$. j ist hierbei das Teilchen mit n Ladungsträgern.

Wenn ein $\vec{E}$–Feld anliegt, werden Ladungen aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt, wodurch Multipole induziert werden. Das Dipolmoment ist also $\vec{p}_j = \int \mathrm{d}^3r\rho_j(\vec{r})\left(\vec{r}-\vec{R}_j\right)$. Man nimmt an, dass $|\vec{r}-\vec{R}_j| \gg$ als die Abstände im Raum des Teilchens j sind. Für die Multipolentwicklung befindet man sich also in der Fernzone. Das Potential des j–ten Teilchens mit Dipolmoment ist dann

$$\varphi_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{R}_j|} + \frac{\vec{p}_j\left(\vec{r}-\vec{R}_j\right)}{|\vec{r}-\vec{R}_j|^3}\right]. \tag{5.2}$$

Für N Teilchen kann eine **effektive Ladungsdichte** bzw. **effektive Dipoldichte** verwendet werden,

$$\rho_e(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} q_j\delta\left(\vec{r}-\vec{R}_j\right) \qquad \vec{\Pi}_e(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N}\vec{p}_j\delta\left(\vec{r}-\vec{R}_j\right). \tag{5.3}$$

Damit lässt sich das **effektive Potential** schreiben,

$$\varphi_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\left[\frac{\rho_e(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \vec{\Pi}_e(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]. \tag{5.4}$$

Die Mittelung für makroskopische Ladungsdichte ist $\rho(\vec{r}) = \langle\rho_e(\vec{r})\rangle$. Sie stellt die **Überschussladungen** dar, da alle anderen Ladung im Mittel neutral sind.

Aus der Dipoldichte lässt sich die **makroskopische Polarisation** herleiten

$$\vec{P}(\vec{r}) = \left\langle\vec{\Pi}_e(\vec{r})\right\rangle = \frac{1}{v(\vec{r})}\sum_{j\in v(\vec{r})}\vec{p}_j. \tag{5.5}$$

Damit lässt sich das gemittelte Potential schreiben als

$$\varphi(\vec{r}) = \langle \varphi_m(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \operatorname{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right], \tag{5.6}$$

bzw. das elektrische Feld

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho(\vec{r}) - \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}) \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho_P), \tag{5.7}$$

mit $\rho_P = \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})$, der Polarisationsladungsdichte.

Man definiert die **dielektrische Verschiebung** und erhält die MAXWELL–Gleichungen in einem Medium

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \tag{5.8}$$

Daraus folgt, dass die Quellen von $\vec{D}$ Überschussladungen sind. Das elektrische Feld hängt von der Materie ab.

Das Polarisationfeld induziert eine Oberflächenladung $\sigma_P = \vec{P}\vec{n}$.

Es gibt verschiedene Arten von Dielektrika, z.B. eigentliche Dielektrika, Paraelektrika oder Ferroelektrika.

Typen von Polarisation

Man unterscheidet zwei Typen von Polarisation, $\vec{P} = \vec{P}\left(\vec{E}\right)$ und $\vec{P}(0) = 0$.

$$\vec{P}\left(\vec{E}\right)_i = \sum_k \gamma_{ik} E_k - \sum_{k,l} \beta_{ikl} E_k E_l + \dots . \tag{5.9}$$

Man vereinfacht diesen Ausdruck zu $P_i = \gamma E_i$. Es handelt sich um ein isotropes Meidum, mit $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$. Die dielektrische Verschiebung ist dann

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (\chi_e + 1) \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}. \tag{5.10}$$

5.2 Randwertprobleme

Von Interesse sind die Bedingungen an Grenzflächen verschiedener Dielektrika, mit ε_r^1 und ε_r^2. Mit Hilfe des GAUSS–schen Satzes folgt dann für die Normalkomponente

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right) = \sigma, \tag{5.11}$$

bzw. für die Tangentialkomponente

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \vec{n} = 0. \tag{5.12}$$

Daraus folgt, dass

$$D_1^n = D_2^n \qquad E_1^n = \frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_r^1} E_2^n \qquad E_1^t = E_2^t \qquad D_1^t = \frac{\varepsilon_r^1}{\varepsilon_r^2} D_2^t. \tag{5.13}$$

5.3 Beispiel: Grenzfläche

Seien zwei Dielektrika mit ε_1 und ε_2. Auf der z–Achse sei eine Punktladung q in Medium ε_1 im Abstand d zu Medium ε_2. Auf der Grenzfläche ist $\sigma = 0$. Es gilt

$$\varepsilon_1 \operatorname{div} \vec{E} = \rho\,(z > 0) = q\delta\left(\vec{r} - d\,\vec{e}_z\right). \tag{5.14}$$

Für das andere Medium gilt

$$\varepsilon_2 \operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad z < 0, \tag{5.15}$$

mit $\varepsilon_i \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D}$. $\forall z$ gilt $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$.

Die Randbedingungen sind

$$\lim_{z\to 0} D_z^1\,(-z) = \lim_{z\to 0} D_z^1\,(z)\,. \tag{5.16}$$

Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{z\to 0} \varepsilon_2 E_z^2\,(-z) = \lim_{z\to 0} \varepsilon_1 E_z^1\,(z)\,. \tag{5.17}$$

Zudem ist

$$\lim_{z\to 0} E_{x,y}^2\,(-z) = \lim_{z\to 0} E_{x,y}^1\,(z)\,. \tag{5.18}$$

Der Ansatz ist, dass die Ladung q eine Spiegelladung bzw. Bildladung q' bei $-d$ hat. Weiter hat die Ladung q' eine Bildladung q'' im Medium 1, welche die Randbedingungen an der Grenzfläche simulieren.

Die Potentiale sind

$$z > 0 : \varphi^1\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^1}\left[\frac{q}{|\vec{r} - d\,\vec{e}_z|} + \frac{q'}{|\vec{r} + d\,\vec{e}_z|}\right] \tag{5.19}$$

$$z < 0 : \varphi^2\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\left[\frac{q''}{|\vec{r} - d\,\vec{e}_z|}\right]. \tag{5.20}$$

6 Magnetostatik

In der Elektrostatik sind die Quellen der Felder nur ruhende Ladungen. In der Magnetostatik sind die Quellen der Felder allerdings stationäre Ströme. Der große Unterschied zur Elektrostatik ist, dass keine freien magnetischen Ladungsträger bzw. magnetische Monopole existieren. Die Grundeinheit in der Magnetostatik ist das Dipolmoment $\vec{m}$. Der Nachweis des Feldes erfolgt über das Drehmoment M eines Magnetfeldes auf einen Dipol

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}, \tag{6.1}$$

mit $\vec{B}$ der **magnetischen Induktion**.

Es gibt verschiedene Arten von elektrischen Strom.

i) Die Bewegung geladener Körper.

ii) Eine Potentialdifferenz zwischen Leiterenden.

Bei der Potentialdifferenz existiert eine Kraftwirkung auf die Ladungsträger. Sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$. Die zeitlich konstante und homogene Teilchendichte ist $n = \frac{N}{V}$. Die Ladung ist q. Die Querschnittsfläche des Leiters ist F. Durch den Leiterquerschnitt fließt in einem Zeitraum von $\mathrm{d}t$ die Ladung

$$\mathrm{d}Q = Fv\,\mathrm{d}tnq \qquad I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Fvnq \qquad [I] = \mathrm{A} = \mathrm{C\,s^{-1}}. \tag{6.2}$$

I ist die **Stromstärke**. $\vec{j}\,(t, \vec{r})$ ist die **Stromdichte**; sie ist die senkrecht zum Querschnitt transportierte Ladung

$$\vec{j} = \frac{I}{F} = nq\vec{v} \qquad I = \int_{\mathcal{F}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{f} = \int_{\mathcal{F}} \vec{j} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}f. \tag{6.3}$$

Sei ein Volumen $\mathcal{V}$ in dem sich Ladungen Q bewegen. Der Fluss durch den Rand $\partial\mathcal{V}$ muss also gleich der Abnahme der Ladung im Volumen sein

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{f} = -\frac{\mathrm{d}Q\,(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.4}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho\,(t, \vec{r})\;\mathrm{d}^3r \tag{6.5}$$

$$= -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\rho\,(t, \vec{r})}{\partial t}\,\mathrm{d}^3r \tag{6.6}$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j}\;\mathrm{d}^3r. \tag{6.7}$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial\rho\,(t, \vec{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}\,(t, \vec{r}) = 0. \tag{6.8}$$

Betrachtet man den stationären Fall, also zeitunabhängig, ist $\frac{\partial \rho(t,\vec{r})}{\partial t} = 0$. Deshalb ist

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \tag{6.9}$$

Die Stromdichte ist also auch quellenfrei. Das bedeutet, dass Ladungen nicht spontan verschwinden oder auftauchen.

6.1 Beispiel: Draht mit verschiedenen Querschnittsflächen; Kirchhoff'sche Knotenregel

Sei ein Draht mit Querschnittsflächen F_1 und F_2 auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j}\, \mathrm{d}^3 r &= \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} && (6.10)\\ &= I_1 - I_2. && (6.11) \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Strom im ganzen Leiter gleich ist, also $I_1 = I_2$.

Seien vier Leiter mit Strömen I_1, I_2, I_3 und I_4, wobei I_1 und I_2 das Volumen $\mathcal{V}$ verlassen und I_3 und I_4 in das Volumen eintreten. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j}\,(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r &= \oint_{\partial V} \vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} && (6.12)\\ &= -I_1 - I_2 + I_3 + I_4. && (6.13) \end{aligned}$$

Die KIRCHHOFF'sche Knotenregel besagt also, dass Summe von Zufluss und Abfluss immer null ist.

6.2 Elektrische Leitfähigkeit und Leistung

Die Stromdichte ist proportional zu dem elektrischen Feld mit der Proportionalitätskonstante der **elektrischen Leitfähigkeit**

$$\vec{j}\,(\vec{r}) = \sigma\,(\vec{r})\,\vec{E}\,(\vec{r})\,. \tag{6.14}$$

Das Inverse der elektrischen Leitfähgikeit ist der **spezifischer Widerstand**.

Man betrachte einen **Stromfaden**; ein linienförmiger Strom enlang eines Weges $\mathcal{C}$. Tangentail an der Kurve ist $\mathrm{d}\vec{r}$. Dieser setzt sich zusammen aus dem Tangentialvektor $\vec{t}$ und dem Wegelement $\mathrm{d}s$. Die Stromdichte in einem Volumen ist dann

$$\vec{j}\,\mathrm{d}^3 r = j \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}f = I\,\mathrm{d}r. \tag{6.15}$$

Die **elektrische Leistung** ist

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = q\vec{E}\,(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} \qquad P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\,(\vec{r})\,\vec{v} \qquad [P] = \mathrm{V\,A} = \mathrm{W}. \tag{6.16}$$

Die **Leistungsdichte** ist

$$\mathrm{d}P = \left(\rho\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r\right)\vec{E}\left(\vec{r}\right)\vec{v}\left(\vec{r}\right) = \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}^3r. \tag{6.17}$$

Damit kann die Gesamtleistung auch geschrieben werden als

$$P = \int \vec{E}\left(\vec{r}\right)\vec{j}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}^3r = I\int \vec{E}\left(\vec{r}\right)\,\mathrm{d}\vec{r} \qquad = IU. \tag{6.18}$$

6.3 Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der Magnetostatik kommen aus dem Ampère'schen Gesetz. Es beschreibt die Wechselwirkung von zwei Stromfäden.

Der Vektor $\vec{r}_1$ zeigt vom Ursprung zum Linienelement $\mathrm{d}\vec{r}_1$ der ersten Leiterschleife (analog $\vec{r}_2$). Der Verbindungsvektor zwischen den Linienelementen ist $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Die Kraft auf die Leiterschleifen ist

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}_1}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \times \left(\mathrm{d}\vec{r}_2 \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\right)}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}. \tag{6.19}$$

μ_0 ist die **magnetische Feldkonstante** $4\pi \cdot 10^{-7}\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$. Es gilt zudem $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$, mit c der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Mit $\mathrm{d}\vec{r}_1 \times \left(\mathrm{d}\vec{r}_2 \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\right) = \mathrm{d}\vec{r}_2\left(\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\right) - \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)\left(\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2\right)$ folgt

$$\oint_{\mathcal{C}_1}\mathrm{d}\vec{r}_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} = -\oint_{\mathcal{C}_1}\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{grad}\,\frac{1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} \tag{6.20}$$

$$= \int_{\partial\mathcal{C}_1}\mathrm{rot\ grad}\,\frac{1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}\,\mathrm{d}\vec{f} \tag{6.21}$$

$$= 0. \tag{6.22}$$

Die Kraft lässt sich also schreiben als

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}_1}\oint_{\mathcal{C}_2}\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} = -\vec{F}_{21}. \tag{6.23}$$

Da beide Leiter unendlich lang sind, würde auch eine unendlich große Kraft auf jedes Leiterstück wirken. Man betrachtet also nur die Kraft eines Stücks des Leiters

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\,\mathrm{d}z_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}. \tag{6.24}$$

In Zylinderkoordinaten ist $\vec{r}_1 = r_1 \vec{e}_r + z_1 \vec{e}_z$ (analog $\vec{r}_2$), also

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \,\mathrm{d}z_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z_2 \frac{-a\vec{e}_x - (z_2 - z_1)\,\vec{e}_z}{\left[a^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}} \tag{6.25}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \,\mathrm{d}z_1 a \vec{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z_2 \frac{1}{\left[a^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}} \tag{6.26}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \,\mathrm{d}z_1. \tag{6.27}$$

Die Kraft pro Längeneinheit ist dann

$$\vec{f}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \vec{e}_x. \tag{6.28}$$

6.4 Biot–Savart–Gesetz

Das Biot–Savart–Gesetz gilt für einen idealisierten dünnen Leiter. Es besagt, dass das Feld eines Leiters

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \tag{6.29}$$

ist. Das Gesetz geht aus der Kraftwirkung zwischen zwei Leitern hervor.

Die Verallgemeinerung für Stromdichten ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}|^3}. \tag{6.30}$$

Die Kraft auf eine Stromverteilung ist

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \,\mathrm{d}^3 r. \tag{6.31}$$

Sei eine Punktladung mit $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ und einer Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}_0)$ in $\vec{r}_0$. Die Stromdichte ist dann $\vec{j}(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\,\vec{v}(\vec{r}_0)$. Die Kraft ist also

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}^3 r q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\,\vec{v}(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{6.32}$$

$$= q\vec{v}(\vec{r}_0) \times \vec{B}(\vec{r}_0). \tag{6.33}$$

Dies ist der magnetische Anteil der Lorentz–Kraft. Damit kann das Drehmoment geschrieben werden als

$$\vec{M} = \int \mathrm{d}^3 r \vec{r} \times \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right). \tag{6.34}$$

6.4.1 Beispiel: Feld eines geraden Leiters

Sei ein sehr dünner gerader Leiter mit Stromstärke I entlang der z–Achse, also $\vec{r}' = z' \vec{e}_z$. Das Feld ist nach BIOT–SAVART

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{6.35}$$

Hier ist $\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}z' \vec{e}_z$ und $\vec{r} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$. Daraus folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \vec{e}_z \frac{\vec{e}_z \times (r\,\vec{e}_r + (z - z')\,\vec{e}_z)}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \tag{6.36}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} r\,\vec{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{1}{\left[r^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \tag{6.37}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\left(\frac{z'}{r}\right) \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z-z'}{r}\right)^2\right]^{3/2}}}_{=2} \tag{6.38}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi. \tag{6.39}$$

6.5 Maxwell–Gleichungen der Magnetostatik

Es gilt

$$\mathrm{rot}_{\vec{r}} \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{rot}_{\vec{r}}\, j(\vec{r}') - j(\vec{r}') \times \mathrm{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{6.40}$$

$$= j(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{6.41}$$

Damit ist das magnetische Feld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \mathrm{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \qquad \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{B}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{f} = 0. \tag{6.42}$$

Die Rotation des magnetischen Feldes ist

$$\mathrm{rot} \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}')\, \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathrm{grad} \left[\int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \mathrm{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \tag{6.43}$$

Es gilt $\vec{j}\, \mathrm{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{j}\, \mathrm{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Das Integral $\int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \mathrm{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ d wird gleich null, da durch partielle Integration der erste Term im unendlichen wegfällt und der Term $\mathrm{grad} \vec{j}(\vec{r}')$ wird auch null da nur stationäre Ströme betrachtet werden.

Daraus folgen die MAXWELL–Gleichungen

$$\mathrm{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \qquad \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{B}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 \int_{\mathcal{F}} \vec{j}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{f} = \mu_0 I. \tag{6.44}$$

Das Vektorpotential des magnetischen Feldes ist

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}). \tag{6.45}$$

$\vec{A}$ ist nicht eindeutig in Bezug auf $\vec{B}$ insofern, als dass das Potential nicht aus dem magnetischen Feld hergeleitet werden kann. $\vec{B}$ ist dann invariant unter **Eichtransformation**. Man kann also die Transformation $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\chi$ durchgeführt werden, da $\mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\vec{A}$; die Rotation eines Gradienten ist immer gleich null.

6.6 Coulomb–Eichung

Die COULOMB–Eichung besagt, dass das Potential derart modifiziert werden kann, sodass

$$\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0. \tag{6.46}$$

Damit ist die Rotation des magnetischen Feldes

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) \tag{6.47}$$

$$= \mathrm{grad}\left(\underbrace{\mathrm{div}\vec{A}}_{=0}\right) - \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\vec{A}\right) \tag{6.48}$$

$$= -\Delta\vec{A} \tag{6.49}$$

$$= \mu_0 \vec{j}. \tag{6.50}$$

Daraus folgen dann drei POISSON–Gleichungen

$$\Delta A_i = -\mu_0 \vec{j}_i. \tag{6.51}$$

6.7 Magnetisches Moment

Sei ein Raumgebiet $\mathcal{V}$ mit Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}'$. Man betrachte einen Vektor $\vec{r}$ dessen Betrag viel größer ist als die Ausdehnung der Stromdichte.

Aus der Multipolentwicklung folgt für den Abstandsvektor

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \ldots. \tag{6.52}$$

Damit ist das Potential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \ldots. \tag{6.53}$$

Das es im Magnetismus keine Monopole gibt, muss der $\frac{1}{r}$–Term des Potentials gleich null werden, sodass nur noch der Dipolterm stehen bleibt. Dazu kann folgende Identität verwendet werden

$$\int \mathrm{d}^3r \left[f(\vec{r})\, \vec{j}(\vec{r})\, \mathrm{grad} g(\vec{r}) + g(\vec{r})\, \vec{j}(\vec{r})\, \mathrm{grad} f(\vec{r}) \right] = 0. \tag{6.54}$$

Die Divergenz über die Stromdichte fällt hier weg. Zudem ist $f(\vec{r}) = 1$ und $g(\vec{r}) = r_k$.[1]. Sei nun $f(\vec{r}) = r_i$ und $g(\vec{r}) = r_k$, dann lässt sich das Potential schreiben als

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \underbrace{\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3r' \left(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right)}_{\vec{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{6.55}$$

mit $\vec{m}$ dem magnetischen Dipolmoment. Analog zum elektrischen Dipolmoment $\varphi_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}$. Damit ist das magnetische Feld

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left(3\vec{r}\,(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m} \right). \tag{6.56}$$

6.8 Kraftwirkung einer Stromverteilung

Wirke nun eine Kraft und ein Drehmoment einer externen Stromverteilung $\vec{\tilde{j}}$ auf eine Stromverteilung $\vec{j}$

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}^3r \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \tag{6.57}$$

$$\vec{M} = \int \mathrm{d}^3r \left(\vec{r} \times \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \right). \tag{6.58}$$

Ändert sich das Magnetfeld nur schwach über V, dann kann das Feld auch geschrieben werden als

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}(0) + \ldots. \tag{6.59}$$

Da $\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = 0$ ist die Kraft

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}^3r \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}(0) \right) \tag{6.60}$$

$$= \left(\vec{m} \times \vec{\nabla} \right) \times \vec{B}(0) \tag{6.61}$$

$$= \vec{m} \left(\mathrm{div}\vec{B}(0) \right) + \mathrm{grad} \left(\vec{m} \cdot \vec{B}(0) \right). \tag{6.62}$$

Da $\mathrm{div}\vec{B}(0) = 0$ ist, gilt für die Kraft

$$\vec{F}_D = \mathrm{grad} \left(\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) \Big|_{\vec{r}=0} = -\mathrm{grad} \left(-\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) \Big|_{\vec{r}=0} \tag{6.63}$$

$$V(\vec{r}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}). \tag{6.64}$$

[1] Die Rechnung ist in dem Skript zur Vorlesung.

V ist minimal für $\vec{m}||\vec{B}(\vec{r})$. Das Drehmoment in der Dipolnäherung ist dann

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}(0). \tag{6.65}$$

6.8.1 Beispiel: Dipolmoment ebene Stromschleife

Sie eine Stromschleife in der x, y–Ebene. Das Dipomoment ist

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \tag{6.66}$$
$$= \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \, \vec{r} \times \vec{I} \tag{6.67}$$
$$= IA\vec{n}, \tag{6.68}$$

mit A der Fläche der Stromschleife. Dieses Integral lässt sich nur so lösen, da die Stromschleife immer den selben Einheitsvektor hat, weil sie in einer Ebene liegt.

6.8.2 Beispiel: Drehmoment N Punktladungen

Seien Punktladungen q mit Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ an Punkten $\vec{r}_i$. Die Stromdichte ist dann

$$\vec{j}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{6.69}$$
$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \tag{6.70}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \tag{6.71}$$

Multipliziert man mit $\frac{M}{M}$, mit M der Masse der Teilchen, gilt

$$\vec{m} = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i, \tag{6.72}$$

mit $\vec{l}_i$ dem Drehimpuls.

6.9 Gleichungen in Materie

Da sich in Materie zu viele Teilchen befinden, um sie alle einzeln zu betrachten, werden gemittelte Größen verwendet. Das mikroskopische magnetische Feld wird dann über ein kleines Volumen gemittelt und als neues Feld betrachtet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left\langle \vec{B}_m(\vec{r}) \right\rangle. \tag{6.73}$$

Die Linearität der Divergenz ist genau wie in der Elektrostatik erhalten

$$\mathrm{div}\vec{B} = \left\langle \mathrm{div}\vec{B} \right\rangle = 0. \tag{6.74}$$

Damit ist $\vec{B}$ ein Rotationsfeld, also gilt weiterhin

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}. \tag{6.75}$$

6.9.1 Maxwell–Gleichungen

Es gelten weiterhin die inhomogenen Maxwell–Gleichungen

$$\mathrm{rot}\vec{B}_m = \mu_0 \vec{j}_m \tag{6.76}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \left\langle \vec{j}_m \right\rangle. \tag{6.77}$$

Es kommen nun verschiedene Beiträge zu $\left\langle \vec{j}_m \right\rangle$.

i) Freie, ungebundene Ladungsträger $\vec{j}_f = \langle \rho_f \vec{v} \rangle$.

ii) Strom aus Verschiebung gebundener Ladungsträger $\vec{j}_g = \left\langle \vec{j}_p \right\rangle + \left\langle \vec{j}_{\mathrm{mag}} \right\rangle$.

1) $\vec{j}_p$ ist der Strom aus der Polarisationsladung. Die Polarisationsladungsdichte ist $\rho_p(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r})$. Zu dieser Ladungsdichte existiert eine Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}_p = 0 = \mathrm{div}\left(-\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \mathrm{div}\vec{j}_p$. Da der Strom stationär ist, ist $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$. Der Strom der Polarisationsladung fällt also weg.

2) Ohne externes Feld ist die Richtung der Dipole der Elektronen eines Atoms statistisch verteilt. Wirkt allerdings ein Feld, richten sich die Dipole aus und es kommt zu einem Drehmoment. Druch dieses gemeinsame Ausrichten der Dipole kommt es zu einem magnetischen Zusatzfeld $\vec{B}_{\mathrm{mag}}$ mit einer Stromdichte von $\vec{j}_{\mathrm{mag}}$. Dies wird auch Magnetisierung genannt.

   Da der Strom stationär ist, gilt $\mathrm{div}\vec{j}_{\mathrm{mag}} = 0$, und das Dipolmoment $\vec{m}_i = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\,(\vec{r} - \vec{r}_i) \times \vec{j}^{(i)}_{\mathrm{mag}}(\vec{r})$. Damit ist $\left\langle \vec{j}_{\mathrm{mag}}(\vec{r}) \right\rangle = \mathrm{rot}\vec{M}$, mit $\vec{M}$ der Magnetisierung. Die Magnetisierung ist auch das mittlere magnetische Moment, also die Mittelung über alle Dipolmomente.

Mit diesen Zusammenhängen kann man die makroskopischen inhomogenen Maxwell–Gleichungen darstellen als

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_f + \mathrm{rot}\vec{M}\right). \tag{6.78}$$

Man führt nun das Hilfsfeld $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ ein. $\vec{H}$ ist hier das eigentliche magnetische Feld. Damit ist dann

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}_f. \tag{6.79}$$

6.9.2 Materialgleichungen

Da in der Maxwell–Gleichung die Magnetisierung auftritt, muss diese in Abhängigkeit des magnetischen Feldes geschrieben werden. Hier werden nur lineare und isotrope Materialien betrachtet. Die Magnetisierung ist dann

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \tag{6.80}$$

mit χ_m der **Suszeptibilität**. Schreibt man für das magnetische Induktionsfeld

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \vec{H} := \mu_0 \mu_r \vec{H}, \tag{6.81}$$

mit $\mu_r = 1 + \chi_m$ der **relativen Permeabilität**. Es gibt verschiedene Arten von Magnetisierung

i) **Diamagnetismus**: Es existieren keine permanente Dipole. Das Feld entsteht nur über Induktion. Zudem ist $\chi_m < 0$, mit $|\chi_m| \approx 10^{-5}$. Ein Beispiel sind Supraleiter, mit $\chi_m = -1$.

ii) **Paramagnetismus**: Es existieren beireits permanente Dipole. Durch ein Magnetfeld werden diese Dipole ausgerichtet. Zudem hängt $\chi_m = \chi_m(T)$ von der Temperatur ab. Für hohe Temperaturen ist $\chi_m \propto \frac{1}{T}$.

iii) **Kollektiver** Magnetismus: Es existieren permanente Dipole. Die Suszeptibilität ist abhängig von der Temperatur und dem magnetischen Feld, $\chi_m = \chi_m(T, H)$. Unter einer kritischen Temperatur kommt es zu einer spontanen Selbstausrichtung. Beispiele sind Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus (gleiche Ausrichtung bzw. entgegengesetze Ausrichtung).

6.9.3 Verhalten an Grenzflächen

Normalkomponente

Man betrachtet die Normalkomponente des magnetischen Feldes für die Grenzfläche zweier Materialien μ_r^1 und μ_0^2. Der Normalenvektor zeigt in Richtung von μ_0^2 und der Magnetfeldlinien. Das Volumen des Kästchens setzt sich zusammen aus der Fläche mal die Höhe $\Delta V = \Delta F \Delta x$. Nach den Maxwell–Gleichungen und dem Satz von Gauss

$$0 = \int_{\Delta V} \mathrm{div} \vec{B} \, \mathrm{d}^3 r = \oint_{\partial \Delta V} \vec{B} \, \mathrm{d} \vec{f} \tag{6.82}$$

$$\overset{\Delta x \to 0}{=} \Delta F \cdot \vec{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1 \right). \tag{6.83}$$

Es gilt also

$$B_1^{(n)} = B_2^{(n)}. \tag{6.84}$$

Für das magnetische Feld gilt dies allerdings nicht, da $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$. Also

$$H_2^{(n)} = \frac{\mu_r^1}{\mu_r^2} H_1^{(n)}. \tag{6.85}$$

Tangentialkomponente

Die Tangentialkomponente lässt sich mit einem Flächenstück $\Delta F = \Delta l \Delta x$ (Δx liegt in beiden Materialien) an der selben Stelle wie das Kästchen zeigen. Der Tangentialvektor zur Grenzfläche ist $\vec{t}$. Das Linienelement in Medium 2 ist $\Delta \vec{l}_2 = \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \Delta l = -\Delta \vec{l}_1$.

Nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\Delta F} \mathrm{rot}\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_{\Delta F} \vec{j}_f\,\mathrm{d}\vec{f} \tag{6.86}$$

$$\overset{\Delta x \to 0}{=} \left(\vec{j}_F \cdot \vec{t}\right) \Delta l \tag{6.87}$$

$$= \oint_{\partial \Delta F} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{6.88}$$

$$\overset{\Delta x \to 0}{=} \Delta l \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right), \tag{6.89}$$

mit $\vec{j}_F$ dem Flächenstrom nur in der Oberfläche. Daraus folgt

$$\vec{j}_F \cdot \vec{t} = \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right). \tag{6.90}$$

6.9.4 Randwertprobleme

Sei $\mu_r = \mathrm{const.}$ im ganzen Raumbereich eines isotropen linearen Mediums. Damit gilt für die magnetische Induktion $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ und $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{j}$. Verwendet man die Coulomb–Eichung für das Potential, ist die Poisson–Gleichung

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \mu_r \vec{j}. \tag{6.91}$$

Sei das Potential $V = \cup_{i=1}^n V_i$ und $\mu_r^{(i)}$ in V_i. Man muss für jedes Potential V_i die Poisson–Gleichung lösen und die Lösungen mit den Randbedingungen zusammensetzen.

Sei $j \equiv 0$ in V mit Randbedingungen auf ∂V. Dann kann man schreiben, dass

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} \equiv 0 \Rightarrow \vec{H} = -\mathrm{grad}\varphi_m, \tag{6.92}$$

mit φ_m dem magnetischen Potential. Die andere Maxwell–Gleichung lässt sich schreiben zu

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\left(\mu_0 \mu_r\right) \vec{H} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi_m = 0. \tag{6.93}$$

φ_m erfüllt dann die Laplace–Gleichung (allerdings noch nicht die Randbedingungen).

Sei nun die Magnetisierung $M\left(\vec{r}\right) \neq 0$, $\vec{j} \equiv 0$ in V. Damit sind die Maxwell–Gleichungen

$$\mathrm{rot}\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\mathrm{div}\varphi_m \tag{6.94}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 = \mu_0 \mathrm{div}\left(\vec{H} + \vec{M}\right). \tag{6.95}$$

Daraus folgt

$$\Delta \varphi_m = \mathrm{div}\vec{M} = -\rho_m, \tag{6.96}$$

mit ρ_m der effektiven magnetischen Ladungsdichte. Hier ist nicht gemeint, dass magnetische Monopole existieren; ρ_m ist nur eine Bezeichnung.

Man nimmt nun an, dass es im endlichen keine weiteren Randbedingungen gibt. Über das POISSON–Integral folgt dann

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\mathrm{div}\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}_{\vec{r}}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{6.97}$$

Weiter wird angenommen, dass $\vec{M} \neq 0$ in einem räumlich begrentzten Gebiet. Entwickelt man für die Fernzone ist $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \ldots$, also

$$\varphi_m(\vec{r}) \approx -\frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{div}_{\vec{r}}\frac{1}{\vec{r}}\right)\underbrace{\int \mathrm{d}^3r' M(\vec{r}')}_{=\vec{m}}; \tag{6.98}$$

damit

$$\varphi_m(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3}, \tag{6.99}$$

das Dipolpotential. Das Dipolfeld ist dann

$$\vec{H}_D = \frac{1}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}. \tag{6.100}$$

Mit Randbedingungen ist das Potential

$$\varphi_m(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3r' \frac{\mathrm{div}\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{6.101}$$

Der Term $\sigma_M = \vec{n}'\vec{M}(\vec{r}')$ ist die effektive magnetische Flächenladung.

6.9.5 Beispiel: Kugel

Sei eine Kugel mit Radius a und einer Magnetisierung $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$ in z–Richtung. Es gelten

$$\mathrm{div}\vec{M} = 0 \qquad \vec{n} = \vec{e}_r \qquad \sigma_M = \vec{M}\vec{e}_r = M_0\vec{e}_z\vec{e}_r = M_0\cos\theta. \tag{6.102}$$

Seien Randbedingungen von NEUMANN–Typ, also

$$\varphi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}f\frac{M_0\cos\theta'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{6.103}$$

$$= \frac{a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\theta')\frac{M_0\cos\theta'}{[r^2+a^2-2ra\cos\theta']^{1/2}} \tag{6.104}$$

$$= \frac{a^2}{2}M_0\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\frac{x}{[r^2+a^2-2rax]^{1/2}}. \tag{6.105}$$

Diese Integral kann mit partieller Integration mit $u = x$ und $v' = \frac{1}{\sqrt{}}$ gelöst werden. Die Lösungen sind

i) $r > a$: $\varphi_m\left(\vec{r}\right) = \frac{M_0 a^3}{3}\frac{1}{r^2} = \frac{a^3}{3}\frac{\vec{M}\vec{r}}{r^3}$, mit $\vec{m} = \vec{M}\frac{4\pi a^3}{3}$.

ii) $r < a$: $\varphi_m\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{3}\vec{M}\vec{r} \Rightarrow \vec{H}_{\text{innen}} = -\frac{1}{3}\vec{M}$

7 Elektrodynamik

Ziel dieses Kapitels ist die Verallgemeinerung der MAXWELL–Gleichungen. Bisher galt immer

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \tag{7.1}$$
$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}\,. \tag{7.2}$$

Man definiert die **elektromotorische Kraft** (eine Arbeit)

$$EMK = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}, \tag{7.3}$$

und den **magnetischen Fluss**

$$\Phi = \int_{F(\mathcal{C})} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{f}. \tag{7.4}$$

Das FARADAY'sche Induktionsgesetz besagt

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \propto EMK \tag{7.5}$$
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{F(\mathcal{C})} \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{f}. \tag{7.6}$$

Dieses Gesetz gilt für jede Fläche $F(\mathcal{C})$ mit Randkurve $\mathcal{C}$.

Um den Vorfaktor k herauszufinden vergleicht man die selbe Leiterschleife in zwei Bezugssystemen.

Mitbewegtes Bezugsystem

Bewege sich die Leiterschleife nun mit $\vec{v}$ = const.. Die Beiträge zur totalen zeitlichen Änderung von $\vec{B}$ sind

i) die explizite Zeitabhängigkeit $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{r})$ und

ii) die Positionsänderung der Leiterschleife

Ein kleiner Zeitschritt von $t \to t + \delta t$ ändert das Magnetfeld um $\delta\vec{B}$. Damit ist die totale Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \left(v \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}. \tag{7.7}$$

Mit der Intentität

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{B} \times \vec{v}\right) = \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} - \underbrace{\left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v}}_{=0} + \vec{B}\underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)}_{=0} - \vec{v}\underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right)}_{=0}, \tag{7.8}$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} \times \vec{v}\right). \tag{7.9}$$

Dieser Ausdruck ist hilfreich, da mit dem Satz von STOKES gilt

$$\int_{F(\mathcal{C})} \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} \times \vec{v}\right) \mathrm{d}\vec{f} = \oint_{\mathcal{C}} \left(\vec{B} \times \vec{v}\right) \mathrm{d}\vec{r} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \mathrm{d}\vec{r}). \tag{7.10}$$

Die totale Zeitableitung des magnetischen Flusses ist dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{F(\mathcal{C})} \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{f} = \int_{F(\rfloor)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{f} + \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \mathrm{d}\vec{r}). \tag{7.11}$$

Das FARADAY'sche Induktionsgesetz ist also

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(\vec{E} - k\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right) \mathrm{d}\vec{r} = -k \int_{F(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{f}. \tag{7.12}$$

Schleife ruht im Laborsystem

Das elektrische Feld ändert sich zu $\vec{E} = \vec{E}' + k\vec{v} \times \vec{B}$. Die Voraussetzung ist, dass das FARADAY'sche Induktionsgesetz in allen relativ zueinander mit $\vec{v} = \text{const.}$ bewegten Bezugsystemen gilt. Es gilt also

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}'\, \mathrm{d}\vec{r} = -k \int_{F(\mathcal{C})} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{f}. \tag{7.13}$$

Da der Leiter in Ruhe ist wirkt auf eine Punktladung q die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$. Im Laborsystem ist dann die Ladungsdichte $\vec{j} = q\vec{v}\,\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)$.

Da das System GALILEI–Invariant ist, gilt $\vec{F} = \vec{F}'$ und $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}$. Daraus folgt, dass k in SI–Einheiten gleich 1 ist. Das Induktionsgesetz ist somit

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{F(\mathcal{C})} \mathrm{rot}\vec{E}\, \mathrm{d}\vec{f} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{F(\mathcal{C})} \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{f}. \tag{7.14}$$

Damit ist die MAXWELL–Gleichung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im selben Bezugssystem

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{7.15}$$

Maxwell'sche Ergänzung

Eine der MAXWELL–Gleichungen ist

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}, \tag{7.16}$$

mit $\left\langle \vec{j}_p \right\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Da gilt, dass $\text{div}\vec{j} = \text{div}\left(\text{rot}\vec{H}\right) = 0$, aber $\text{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ aus der Kontinuitätsgleichung, muss $\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_0$. Das bedeutet, dass

$$\text{div}\vec{j}_0 = \text{div}\left(\text{rot}\vec{H}\right) - \text{div}\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{D}. \tag{7.17}$$

Die MAXWELL'sche Ergänzung ist also eine Ergänzung zum AMPÈRE'schen Gesetz mit

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{7.18}$$

Der Term $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ist der **Verschiebungsstrom**.

Insgesamt sind dann die homogenen MAXWELL–Gleichungen

$$\text{div}\vec{B} = 0 \qquad \text{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \tag{7.19}$$

und die inhomogenen Gleichungen

$$\text{div}\vec{D} = \rho \qquad \text{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}; \tag{7.20}$$

und die Materiegleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \approx \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{7.21}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) \approx \mu_0 \mu_r \vec{H}. \tag{7.22}$$

Betrachtet man nun die Potentiale gilt

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \Rightarrow \text{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{7.23}$$

Das bedeutet, dass

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi. \tag{7.24}$$

7.1 Eichtransformation

Weiterhin ist $\vec{B}$ invariant unter Eichtransformation, also $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \text{div}\chi$. Allerdings ändert sich dann das $\vec{E}$–Feld, wenn φ unverändert bleibt. Das bedeutet, dass das $\vec{E}$–Feld vor und nach der Eichtransformation identisch ist

$$\text{grad}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \stackrel{!}{=} \text{grad}\varphi' + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \text{grad}\varphi' + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{div}\frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{7.25}$$

Daraus folgt, dass die Eichtransformationen

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{7.26}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{div}\chi \tag{7.27}$$

sein müssen. Damit sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant unter Eichtransformation.

Vorlesung 23.11. fehlt.

8 Maxwell'scher Spannungstensor

Herleitung MAXWELL*'scher Spannungstensor fehlt (28.11.)*

8.1 Beispiel: Plattenkondensator

Sei ein Plattenkondensator mit Ladung Q und $-Q$ bzw. $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ und $-\sigma = -\frac{\Delta Q}{\Delta A}$. Diese Ladungen bauen ein elektrisches Feld mit $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{e}_z$ auf. Die Kraft pro Fläche ist dann

$$\frac{F}{\Delta A} = \frac{\Delta Q\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon}\right)}{\Delta A} \tag{8.1}$$

$$= -\sigma\frac{\sigma}{2\varepsilon} \tag{8.2}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{e}_z\right)^2 \tag{8.3}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\vec{E}^2. \tag{8.4}$$

Das magnetische Induktionsfeld ist $\vec{B} = 0$ und $\vec{E} = -E\vec{e}_z$. Damit ist der Spannungstensor

$$T_{zz} = \varepsilon E_z^2 - \frac{1}{2}\delta_{zz}\varepsilon E^2 = \frac{\varepsilon}{2}E^2. \tag{8.5}$$

Sei nun ein Volumen $S(V)$ um die positiv geladene Kondensatorplatte mit Normalenvektor $\vec{n} = -\vec{e}_z$. Dann ist die Kraft pro Fläche

$$T_{iknk} = T_{zz}n_z = \frac{\varepsilon}{2}E^2(-1) = -\frac{\varepsilon}{2}E^2. \tag{8.6}$$

9 Homogene Wellengleichung

Man betrachte die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einem ungeladenen Isolator mit $\rho_f = 0$, $\vec{j}_f = 0$ und $\sigma = 0$. Das Medium sei linear und homogen, also $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$. Die Maxwell–Gleichungen in diesem Fall sind

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{9.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{9.2}$$

Um die Gleichungen zu entkoppeln wendet man die Rotation auf die Rotation von $\vec{E}$ an

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right) = \mathrm{grad}\underbrace{\left(\mathrm{div}\vec{E}\right)}_{=0} - \Delta\vec{E} \qquad \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{B}\right) = \mathrm{grad}\underbrace{\left(\mathrm{div}\vec{B}\right)}_{=0} - \Delta\vec{B} \tag{9.3}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\vec{B}\right) \qquad = \mathrm{rot}\left(\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{9.4}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \qquad = \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right). \tag{9.5}$$

Damit erhält man zwei entkoppelte Gleichungen

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \qquad \left(\Delta - \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0. \tag{9.6}$$

Es sei

$$u := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} =: \frac{c}{n}, \tag{9.7}$$

mit u der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** und n dem **Brechungsindex**. Damit kann die Wellengleichung vereinfacht werden zu

$$\underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\Box}\vec{E} = 0 \qquad \underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\Box}\vec{B} = 0. \tag{9.8}$$

Damit

$$\Box\vec{E} = \sum_{k=1}^{3}\left(\Box E_k\left(t,\vec{r}\right)\right)\vec{e}_k = 0 \qquad \Box\vec{B} = \sum_{k=1}^{3}\left(\Box B_k\left(t,\vec{r}\right)\right)\vec{e}_k = 0. \tag{9.9}$$

Man kann dann die homogene Wellengleichung schreiben als

$$\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi\left(t,\vec{r}\right) = 0 \qquad \Psi\left(t,\vec{r}\right) = f_-\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right) + f_+\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right), \tag{9.10}$$

mit der Phase $\varphi_\pm = \vec{k}\vec{r} \pm \omega t$.

Wendet man $\Box$ auf Ψ an gibt das

$$0 = \Box\Psi\left(t, \vec{r}\right) = \left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{u^2}\right)\Psi''\left(t, \vec{r}\right) \tag{9.11}$$

$$= \left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{u^2}\right)\left[f''_-\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right) + f''_+\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right]. \tag{9.12}$$

$\Psi\left(t, \vec{r}\right)$ ist also eine Lösung, wenn

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{u^2} \Leftrightarrow \omega = u|\vec{k}|. \tag{9.13}$$

9.1 Geometrische Interpretation

Für die geometrische Interpretation der Wellengleichung betrachtet man die Flächen auf denen $f_- = \text{const.}$. Diese Flächen sind genau die Flächen mit gleicher Phase, also $\varphi_-\left(t, \vec{r}\right) = \vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const.}$. Man betrachtet nun eine Momentaufnahme bei $t = t_0$. Für Flächen gleicher Phase muss gelten, dass $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$. $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$ beschreibt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ die orthogonal zu $\vec{k}$ ist. Diese Ebenen bezeichnet man als **Wellenfront** mit $\varphi_-\left(t_0, \vec{r}\right) = \varphi_-^{(0)} = \text{const.}$.

Die Überlegung ist nun, wie sich diese Wellenfront bewegt. Man definiert $r_{||} = \frac{\vec{k}\vec{r}}{|\vec{k}|}, k = |\vec{k}|$. Es gilt also

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = kr_{||} - \omega t \equiv \varphi_-^{(0)} = \text{const.} \tag{9.14}$$

$$\Leftrightarrow \qquad r_{||} = \frac{\varphi_-^{(0)} + \omega t}{k} \tag{9.15}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}r_{||}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = u. \tag{9.16}$$

$r_{||}$ ändert sich mit der Phasengeschwindigkeit u; die Wellenfront bewegt also mit u in Richtung von $\vec{k}$.

Analog für f_+ bewegt sich die Wellenfront in Richtung von $-\vec{k}$.

10 Delta–Distribution

$$\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)=0\,\forall\vec{r}\neq\vec{r}_0. \tag{10.1}$$

$$\int_V \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\,\mathrm{d}^3r=\begin{cases}1 & ,\vec{r}_0\in V\\ 0 & ,\vec{r}_0\notin V\end{cases} \tag{10.2}$$

$$\int_V f\left(\vec{r}\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\,\mathrm{d}^3r=\begin{cases}f\left(\vec{r}_0\right) & ,\vec{r}_0\in V\\ 0 & ,\vec{r}_0\notin V\end{cases} \tag{10.3}$$

11 Flächenintegrale

Sei die Fläche $\mathcal{F} := \{\vec{r}\,(u,v)\,|\,(u,v) \in D\}$. Der Normalenvektor zur Fläche ist $\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}\vec{a} \times \mathrm{d}\vec{b}$, mit

$$\mathrm{d}\vec{a} = \vec{r}\,(u, v + \mathrm{d}v) - \vec{r}\,(u,v) \approx \partial_v \vec{r}\,(u,v)\ \mathrm{d}v \tag{11.1}$$

$$\mathrm{d}\vec{b} = \vec{r}\,(u + \mathrm{d}u, v) - \vec{r}\,(u,v) \approx \partial_u \vec{r}\,(u,v)\ \mathrm{d}u \tag{11.2}$$

$$\mathrm{d}\vec{f} = \partial_v \vec{r}\,(u,v) \times \partial_u \vec{r}\,(u,v)\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{11.3}$$

Die Vektoren $\partial_v \vec{r}$ und $\partial_u \vec{r}$ spannen die Tangentialebene in $\vec{r}\,(u,v)$ auf.

Der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{a}\,(\vec{r})$ durch eine Fläche S, bzw. eine geschlossene Fläche $S\,(V)$ mit $\mathrm{d}\vec{f}$ als Flächennormale ist gegeben durch

$$\varphi_S\,(\vec{a}) = \int_S \vec{a}\,(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{f} = \int_S \vec{a}\,(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,(\vec{r})\ \mathrm{d}f \tag{11.4}$$

$$\varphi_{S(v)}\,(\vec{a}) = \oint_{S(V)} \vec{a}\,(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{f} = \oint_{S(V)} \vec{a}\,(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,(\vec{r})\ \mathrm{d}f. \tag{11.5}$$

11.1 Beispiel: Kugeloberfläche

Sei eine Kugel mit dem Radius R, dann sind die Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{11.6}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = R\vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi. \tag{11.7}$$

Das Flächenelement ist dann

$$\mathrm{d}\vec{f} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R^2\sin\theta\,\vec{e}_r \tag{11.8}$$