Mathe 2, 1. Klausur

Dr. Illia Karabash

September 20, 2023

Aufgabe 1: 30 Punkte
Seien

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \,\text{und}\, y \leq 4 \right\} \tag{0.1}$$

und

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{r_n}(p_n) \text{ wobei}\, p_n = (n, 0, 0) \text{ und}\, r_n = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}. \tag{0.2}$$

Zur Erinnerung: $K_r(a) = \{b \in \mathbb{R}^3 : |a - b| < r\}$.

(a) Zeichnen Sie den Schnitt $\{(x, y, z) \in A : z = 0\}$ von A mit der xy–Ebene. Ist die Menge A wegzuasmmenhängend?

(b) Ist A abgeschlossen? Ist A kompakt?

(c) Berechnen Sie das 3–dimensionale Jordan–Maß von A.

(d) Ist B offen? Ist B ein Gebiet? Ist B quadrierbar?

(e) Berechnen Sie das 3–dimensionale Lebesgue–Maß von B.

Aufgabe 2: 15 Punkte
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$M_\alpha := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq \alpha, 0 \leq x_2 \leq x_1 \right\}. \tag{0.3}$$

Berechnen Sie das 2–dimensionale Riemann–Integral

$$\int_{M_\alpha} \left(x_1^2 x_2 + x_1^2 \cos(x_1 x_2) \right) \, \mathrm{d}v_2(x) \tag{0.4}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei v_2 das 2–dimensionale Jordan–Maß ist.

Aufgabe 3: 25 Punkte

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, sei

$$U_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^\alpha\right\}. \qquad (0.5)$$

(a) Zeichnen Sie U_α für $\alpha = -1, \alpha = 0$ und $\alpha = 2$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist U_α ein einfach zusammenhängendes Gebiet?

(c) Bestimmen Sie die Menge M aller $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass man den Rand ∂U_α als Spur eines geschlossenen Jordan–Wegs γ_α, der zusätzlich ein stückweise C^1–Weg ist, darstelllen kann. Konstruieren Sie die entsprechenden Wege $\gamma_\alpha \, \forall \alpha \in M$.

(d) Berechnen Sie das 2–dimensionale Lebesgue–Integral $I_\alpha = \int_{U_\alpha} x^2 \, \mathrm{d}\mu_2 (x,y) \; \forall \alpha < 0$, wobei μ_2 das 2–dimensionale Lebensgue–Maß ist.

Aufgabe 4: 20 Punkte

Betrachten wir eine 3×3–Matrix $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \\ x & y \end{pmatrix}$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ zwei Parameter sind. Definieren wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = ||A_{x,y}||. \qquad (0.6)$$

Dabei betrachten wir $A_{x,y} : u \mapsto A_{x,y}(u)$ als einen linearen Operator vom normierten Raum $\mathbb{R}^2$ in den normierten Raum $\mathbb{R}^3$. Die Operatornorm ist definiert als

$$||A_{x,y}|| = \sup_{u \in \mathbb{R}^2, |u|=1} |A_{x,y}(u)|. \qquad (0.7)$$

(a) Untersuchen Sie die Stetigkeit von f auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Untersuchen Sie die partielle Differenzierbarkeit von f auf $\mathbb{R}^2$. Gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

(c) Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Funktion f auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5: 10 Punkte

Seien $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$ und $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bestimmen Sie das Flächenintegral $\int_{\mathcal{M}} f \, \mathrm{d}\mathcal{A}$ bezüglich des skalaren Flächenelements $\mathrm{d}\mathcal{A}$.