Notizen | math341

Jonas Wortmann

November 10, 2023

Contents

1 Komplexe Zahlen

Die **komplexen Zahlen** sind alle Terme der Form $x + y\mathrm{i}; x, y \in \mathbb{R}$. i ist die **imaginäre Einheit**, mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} := \{x + y\mathrm{i} : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Die komplexen Zahlen können auch als eine Ebene aufgefasst werden, $x + y\mathrm{i} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Die Gleichheit ist definiert als, $x + y\mathrm{i} = a + b\mathrm{i} \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.
Folgende Operationen sind definiert

- $(x + y\mathrm{i}) + (a + b\mathrm{i}) := (x + a) + (y + b)\,\mathrm{i}$
- $(x + y\mathrm{i}) \cdot (a + b\mathrm{i}) := xa + xb\mathrm{i} + ya\mathrm{i} + yb\mathrm{i}^2 = (xa - yb) + (xb + ya)\,\mathrm{i}$.

Sei $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Dann ist die **komplex konjugierte** Zahl $\overline{z} := x - y\mathrm{i}$. Praktisch ist dann, $z \cdot \overline{z} = (x + y\mathrm{i}) \cdot (x - y\mathrm{i}) = x^2 + y^2$. Zudem ist die **Norm** einer komplexen Zahl $||z|| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl $z = x + y\mathrm{i} \neq 0 + 0\mathrm{i}$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{||z||^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\,(x - y\mathrm{i})$.
Folgende Rechenregeln sind gültig

- Kommutativität: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativität: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Distributivität: $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- Kehrwertregel: $\frac{1}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$
- Konjugation: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper, der $\mathbb{R}$ enthält.

1.1 Komplexe Zahlen als Matrizen

$$[(x + y\mathrm{i})\,(a + b\mathrm{i})]_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Eine komplexe Zahl kann also als Matrix dargestellt werden

$$[x + y\mathrm{i}]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Es gilt dann

$$[z_1 \cdot z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \cdot [z_2]_{\mathbb{R}^2} \tag{1.3}$$
$$[z_1 + z_2]_{\mathbb{R}^2} = [z_1]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} + [z_2]_{\mathbb{R}^2} \tag{1.4}$$
$$\left[\frac{1}{z}\right]_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = [z]^{-1}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\,. \tag{1.5}$$

Also $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{C} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Jede Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ ist das Produkt einer Drehung $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ und einer Streckung $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

Für jede komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, gibt es eindeutige $r > 0, \theta \in [0, 2\pi) : z = r(\cos\theta + \sin\theta\mathrm{i})$.

Hier ist $r = \sqrt{x^2 + y^2} = ||z||$ und $\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & ; x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 < y \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & ; x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & ; x = 0 > y \\ 2\pi + \arctan\frac{y}{x} & ; y < 0 < x \end{cases}$

1.2 Polarkoordinaten

Die komplexen Zahlen können in **Polarkoordinaten** dargestellt werden

$$\mathbb{C} \ni z = re^{\mathrm{i}\theta} \qquad e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \sin\theta\mathrm{i}, \tag{1.6}$$

mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Die Eindeutigkeit von r lässt sich zeigen durch

$$||z|| = \sqrt{x^2 + y^2} = ||re^{\mathrm{i}\theta}|| = ||r|| \underbrace{||e^{\mathrm{i}\theta}||}_{=1} = r. \tag{1.7}$$

Die Eindeutigkeit von θ lässt sich zeigen durch

$$e^{\mathrm{i}\theta_1} = e^{\mathrm{i}\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Die Multiplikation ist definiert durch

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}; \tag{1.9}$$

und der Kehrwert

$$\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{\mathrm{i}(-\theta)}. \tag{1.10}$$

1.2.1 Potenzen

Wird eine komplexe Zahl potenziert, gilt

$$k \in \mathbb{Z} : z^k = r^k e^{(\mathrm{i}\theta)^k} = r^k e^{\mathrm{i}(k\theta)}. \tag{1.11}$$

1.2.2 Beispiel

$$(1+\mathrm{i})^{100}. \tag{1.12}$$

In Polarkoordinaten ist $1+\mathrm{i}$,

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \qquad \theta=\arg(1+\mathrm{i})=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4} \qquad 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}. \tag{1.13}$$

Die Potenz ist dann

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{100} &= \sqrt{2}^{100}e^{\mathrm{i}\left(100\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= 2^{50}e^{\mathrm{i}25\pi}\\ &= 2^{50}e^{\mathrm{i}\pi}\\ &= -2^{50}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

1.3 Wurzeln

Löse die Gleichung $z^k=\alpha\in\mathbb{C}, k\in\mathbb{N}$, mit $z=re^{\mathrm{i}\theta}$ und $\alpha=se^{\mathrm{i}\beta}$. Der erste Teil der Lösung ist

$$r^k=s=||\alpha||\Leftrightarrow r=\sqrt[k]{||\alpha||}\geq 0. \tag{1.15}$$

Es muss also gelten

$$e^{\mathrm{i}k\theta}=e^{\mathrm{i}\beta}\Leftrightarrow k\theta-\beta\in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.16}$$

Diese Gleichung hat k Lösungen

$$\theta_1=\frac{\beta}{k},\theta_2=\frac{\beta}{k}+\frac{1}{k}2\pi,\theta_3=\frac{\beta}{k}+\frac{2}{k}2\pi,\dots,\theta_k=\frac{\beta}{k}+\frac{k-1}{k}2\pi. \tag{1.17}$$

1.3.1 Beispiel

Löse die Gleichung $z^4=r^4e^{\mathrm{i}4\theta}=1$. $1=1e^{\mathrm{i}0}$, also ist $s=1$ und $\beta=0$.

$$r=\sqrt[4]{1}=1 \qquad \begin{aligned}\theta_1&=\frac{0}{4}=0\\ \theta_2&=\frac{0}{4}+\frac{1}{4}2\pi=\frac{\pi}{2}\\ \theta_3&=\frac{0}{4}+\frac{2}{4}2\pi=\pi\\ \theta_4&=\frac{0}{4}+\frac{3}{4}2\pi=\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Also $z=e^{\mathrm{i}0},e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},e^{\mathrm{i}\pi},e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

1.3.2 Wurzelfunktion

Die k–te Wurzelfunktion ist definiert als

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{re^{\mathrm{i}\theta}} = \sqrt[k]{r}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{k}}, \tag{1.18}$$

für $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann ist $\sqrt[k]{z}$ eine Lösung der Gleichung $\alpha^k = z$.

Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht stetig, da

$$\sqrt{1} = \sqrt{1e^{\mathrm{i}0}} = \sqrt{1}e^{\mathrm{i}\frac{0}{2}} = 1 \tag{1.19}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{e^{\mathrm{i}(2\pi - \varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\mathrm{i}\pi - \frac{\varepsilon}{2}} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1. \tag{1.20}$$

1.4 Quadratische Gleichungen

Löse die Gleichung $z^2 + pz + q = 0; p, q \in \mathbb{C}$. Mit quadratischer Ergänzung

$$z^2 + pz + q = z^2 + pz + \frac{1}{4}p^2 + q - \frac{1}{4}p^2 \tag{1.21}$$

$$= \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right). \tag{1.22}$$

Daraus folgt

$$\left(z + \frac{p_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q \tag{1.23}$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \tag{1.24}$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.25}$$

Diese Gleichung ist die komplexe Wurzel, sie hat also immer mindestens zwei Lösung.

1.5 Fundamentalsatz der Algebra

Der **fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes k–Polynom

$$P(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \alpha_k \neq 0 \tag{1.26}$$

insgesamt k Nullstellen hat, also

$$\exists z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C} \Rightarrow P(z) = \alpha_k \prod_{j=1}^{k} (z - z_j). \tag{1.27}$$

2 Komplexe Funktionen

Eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |z_k - z| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Sei $f : U \to \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}$. Für ein $z \in U$

$$\lim_{h\to z} f(h) = \alpha \in \mathbb{C}\,\text{existiert}\,, \tag{2.2}$$

falls $\forall$ Folgen $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq U$ mit $h_k \neq z, \lim_{k\to\infty} h = z$, gilt, dass $\lim_{k\to\infty} f(h_k) = \alpha$.

2.1 Stetigkeit

Sei $f : U \to \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}$. f heißt stetig in $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\lim_{h\to z} f(h) = f(z)\,. \tag{2.3}$$

2.2 Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. f heißt **komplex differenzierbar** in $z \in U$, falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z)\ \text{existiert}\,. \tag{2.4}$$

Sei $f(z) = \alpha_j z^j$ ein Polynom von Grad $k \in \mathbb{N}$, mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \neq 0$. Dann ist

$$f'(z) = j\alpha_j z^{j-1}. \tag{2.5}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $Df \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m\times n}$, falls

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}\in\mathbb{R}^n} \frac{f\left(\vec{x} + \vec{h}\right) - f(\vec{x}) - Df_{(x)}\vec{h}}{||\vec{h}||} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m\,\text{existiert}\,. \tag{2.6}$$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. Dann gilt, dass $f'(z)$ in $z = x + \mathrm{i}y$ existiert, genau dann wenn

$$Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ \text{existiert und}\,Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [f'(z)]_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\,. \tag{2.7}$$

Falls $f'(z) = a + \mathrm{i}b$, dann ist $Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. F ist genau dann differenzierbar, wenn $\partial_1 F_1 = \partial_2 F_2$ und $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$.

2.2.1 Holomorph

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph** auf U wenn $f'(z) \in \mathbb{C} \, \forall z \in U$ existiert und in jedem Punkt auf U stetig komplex differenzierbar ist.

2.3 Differentiationsregeln

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ in z komplex differenzierbar, dann ist f in z stetig.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

i) $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z), \alpha \in \mathbb{C}$

ii) $(f_1 + f_2)'(z) = f_1'(z) + f_2'(z)$

iii) $(f_1 f_2)'(z) = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$

iv) $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z) = \frac{f_1'(z) f_2(z) - f_1(z) f_2'(z)}{f_2^2(z)}, f_2(z) \neq 0$

Sei $f : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $g : V \to \mathbb{C}$

v) $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z)$

3 Reihen

Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \tag{3.1}$$

konvergiert, falls die Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} z_k \tag{3.2}$$

in $\mathbb{C}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergieren. Die Reihe konvergiert absolut, falls

$$\sum_{k=0}^{n} |z_k| \tag{3.3}$$

konvergiert. Die Reihe **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert.

Jede Cauchy–Folge konvergiert in $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ ist also **metrisch vollständig**.

3.1 Potenzreihen

Sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Man definiert die **Potenzreihe** mit Koeffizienten α_k als

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k. \tag{3.4}$$

Man definiert

$$R := \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|\alpha_k|}} \qquad R := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right| \in [0, +\infty], \tag{3.5}$$

mit $0^{-1} := +\infty$ und $\infty^{-1} := 0$. Dann

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |z|^k$ konvergiert absolut für $|z| < R$.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ divergiert für $|z| > R$.

Sei $f(z)$ eine Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Man definiert $g(Z) := \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1}$, dann hat g den Konvergenzradius R und $f'(z) = g(z)$, falls $|z| < R$.

f ist auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ unendlich oft differenzierbar und

$$f^{(n)} := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \alpha_k z^{k-n} \tag{3.6}$$

mit Konvergenzradius R. Die Stammfunktion ist dann

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} z^{k+1} + c \qquad c \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

3.1.1 Produkt von Potenzreihen

Seien zwei Potenzreihen $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ und $g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j$. Das Produkt ist

$$f(z)\,g(z) = (\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots)(\beta_0 + \beta_1 z + \ldots) \tag{3.8}$$
$$= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\,z + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\,z^2 + \ldots. \tag{3.9}$$

Die Konvergenzradien der Porenzreihen seien R und $R' \in [0,\infty]$. Man definiert $h(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_{n-k}\right) z^n$. Dann hat h einen Konvergenzradius von mindesten $R'' \geq \min(R, R')$ und $f(z)\,g(z) = h(z)$ für $|z| < \min(R, R')$.

3.1.2 Verschiebung

Sei die Potenzreihe $f(z) := \sum \alpha_k z^k$. Die um z_0 verschobene Potenzreihe ist $g(h) = f(z_0 + h)\,, |z_0| < R$. Sei $|z_0| < R$ und

$$g(h) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} h^n, \tag{3.10}$$

dann ist der Konvergenzradius mindestens $R' \geq R - |z_0|$ und $g(h) = f(z_0 + h)$, falls $|z_0| + |h| < R$.

3.1.3 Vertauschnug

Falls $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |c_{kn}| < \infty$, dann dürfen die Summen vertauscht werden

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{kn}. \tag{3.11}$$

3.2 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion hat eine Reihendarstellung

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \tag{3.12}$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion

$$\exp'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{k!} z^{k-1} \tag{3.13}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} \tag{3.14}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \tag{3.15}$$
$$= \exp(z)\,. \tag{3.16}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2). \tag{3.17}$$

Sei $y \in \mathbb{R}$, dann ist

$$|\exp(y\mathrm{i})| = 1. \tag{3.18}$$

Wird y verändert, dreht sich also die Exponentialfunktion um den Einheitskreis. Wird der Realteil (x) verändert, ändert sich der Betrag der Funktion.

Die Exponentialfunktion lässt sich auch durch andere Funktionen darstellen

$$\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z) \tag{3.19}$$

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z). \tag{3.20}$$

Diese Relation lässt sich durch die Reihendarstellung von sin und cos zeigen.

Die Exponentialfunktion wird niemals 0 und ist surjektiv auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, aber nicht injektiv.

3.3 Logarithmus

Auf dem Streifen $\mathbb{R} + [0, 2\pi)\mathrm{i} \subseteq \mathbb{C}$ ist $\exp : \mathbb{R} + [0, 2\pi)\mathrm{i} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ bijektiv. Die Umkehrfunktion nennt man den **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**.

$$\mathrm{Ln} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} + [0, 2\pi)\mathrm{i} \tag{3.21}$$

$$\mathrm{Ln}(z') := \ln(|z'|) + \arg(z')\,\mathrm{i}. \tag{3.22}$$

$\mathrm{Ln} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} + [0, 2\pi)\mathrm{i}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus[0, \infty)$ mit $\mathrm{Ln}' = \frac{1}{z}$.

3.4 Umkehrfunktionen

Es sind

$$\text{Polarkoordinaten} : F(r, \theta) = r\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}} \tag{3.23}$$

$$\text{inv. Polarkoordinaten} : F^{-1}(z) = (|z|, \arg(z)) \tag{3.24}$$

$$\text{Exponentialfunktion} : \exp(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{y\mathrm{i}} \tag{3.25}$$

$$\text{Hauptzweig des Logarithmus} : \mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + \arg(z)\,\mathrm{i}. \tag{3.26}$$

4 Kurvenintegrale

Eine **Kurve** ist eine Abbildung

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \tag{4.1}$$

mit $a \leq b \in \mathbb{R}$ und γ stetig. Dann ist

$$\dot{\gamma}(t) = (\mathcal{R}\gamma)'(t) + (\mathcal{I}\gamma)' \mathrm{i} \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

die Geschwindigkeit.

Man definiert dann das **Kurvenintegral** von f entlang γ als

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, \mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Beachte, in dem Integrand ist ein komplexes Produkt.

4.1 Steigende Reparametrisierung

Eine **steigende Reparametrisierung** ist eine Parametrisierung bei der eine Kurve mit einer Funktion φ verkettet wird, dessen Geschwindigkeit größer als die der Kurve ist. Dabei muss weiterhin 0 auf 0 und 1 auf 1 abgebildet werden. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z. \tag{4.4}$$

4.2 Einfache Kurve

Eine Kurve γ heißt **einfach**, falls γ auf $[a, b)$ und $(a, b]$ injektiv ist.

4.3 Geschlossene Kurve

Eine Kurve γ heißt **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

4.4 Spur einer Kurve, Jordan'scher Kurvensatz

Die **Spur** einer Kurve ist ihr Bild. Der JORDAN'sche Kurvensatz: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, a < b$ eine einfach geschlossene Kurve. Dann ist $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Spur}\gamma = \mathrm{Int}\gamma \mathbin{\mathring{\cup}} \mathrm{Ext}\gamma$; $\mathrm{Int}\gamma, \mathrm{Ext}\gamma \subseteq \mathbb{C}$ sind offene, nicht leere, wegzusammenhängende Mengen mit Rand $\mathrm{Spur}\gamma$ und Int ist beschränkt.

4.5 Cauchy'scher Integralsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine einfache geschlossene Kurve mit $\mathrm{Int}\gamma \subseteq U$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4.5}$$