Probability and Statistics
Tutorial 2

Siyi Wang

Southern University of Science and Technology

11951002@mail.sustech.edu.cn

September 21, 2020

Outline

Review

1. Definition of Probability Measure P in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
    - $P(A) \geq 0$, for any $A \in \mathcal{F}$.
    - $P(\Omega) = 1$.
    - $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, where $A_i \cap A_j = \emptyset$, for any $i \neq j$. (Countable Additivity)
2. Properties of Probability Measure P
    - $P(A) \in [0, 1]$, for any $A \in \mathcal{F}$.
    - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, for any $A \in \mathcal{F}$. $(P(\emptyset) = 0)$
    - $P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$, where $A_i \cap A_j = \emptyset$, for any $i \neq j$. (Finite Additivity)
    - If $A \subset B$, then $P(A) \leq P(B)$.
    - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Review

2. Properties of Probability Measure P
   - $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$. (Proof Method: (1) Induction (2) Indicator Function and Expectation.)
   - $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.
   - $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$.
3. Counting Methods
   - $\Omega = \{\omega_1, .., \omega_N\}$ and $P(\omega_i) = 1/N$, for $i = 1, 2, .., N$. Then, we have $P(A) = \frac{\text{number of outcomes that A contains}}{\text{number of all outcomes}}$, for $A \subset \Omega$.
   - Addition Principle. $N = m_1 + ... + m_s$.
   - Multiplication Principle. $N = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_p$.

Homework

P20, 4

4. 证明：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Homework

Solution

Method 1. By the Supplement Exercises last time, let $B_1 = A_1$ *and* $B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ *for* $k = 2, .., n$.

Then, we have $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, *where* $B_i \cap B_j = \emptyset$, *for* $i \neq j$.

Also, $P(B_k) \leq P(A_k)$, *for* $k = 2, .., n$.

Hence, $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Method 2. Since $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, *then we have*

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) \leq ... \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Homework

P20, 7

7. 证明邦费罗尼（Bonferroni）不等式：

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

Homework

Solution

Since $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *and* $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$, *then* $P(A) + P(B) \geq P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Homework

P21, 28

28. 扑克游戏中，5 个玩家从 52 张纸牌中每人分得 5 张. 共有多少种分法?

Homework

Solution

$\binom{52}{5,5,5,5,5,27}$. (*or* $C_{52}^5 C_{47}^5 C_{42}^5 C_{37}^5 C_{32}^5$, *or* $\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}\binom{27}{5}$, *or* $\frac{52!}{5!5!5!5!5!27!}$)

Homework

P21, 29

29. 扑克玩家分到 3 个黑桃和 2 个红心. 他扔掉其中 2 个红心后再抽 2 张扑克. 他再抽到 2 个黑桃的概率是多少?

Homework

Solution

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{47}{2}} = \frac{10*9}{47*46}.$$

Exercise 1

1. 设A,B,C是三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求$A,B,C$至少有一个发生的概率。

Supplement Exercises

Solution

Since $ABC \subset AB$ *and* $P(AB) = 0$, *then* $P(ABC) = 0$.

Hence, $P(A \cup B \cup C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Supplement Exercises

Exercise 2

2. 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$。

Supplement Exercises

Solution

We have $P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1-p) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
Then, $P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB) = (1-p) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(AB) = 1 - p$.

Supplement Exercises

Exercise 3

1. 从 n 双尺码不同的鞋子中任取 $2r$ $(2r<n)$ 只，求下列事件的概率：

   1) 所取 $2r$ 只鞋子中没有两只成对；

   2) 所取 $2r$ 只鞋子中只有两只成对；

   3) 所取 $2r$ 只鞋子恰好配成 r 对。

Solution

(1) $\frac{C_n^{2r}2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$.

(2)$\frac{C_n^{2r-1}C_{2r-1}^{1}2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$ *or* $\frac{C_n^{1}C_{n-1}^{2r-2}2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$.

(3)$\frac{C_n^{r}}{C_{2n}^{2r}}$.

Exercise 4

2. (匹配问题) 将 4 把能打开 4 间不同房门的钥匙随机发给 4 个人,试求至少有一人能打开门的概率.

Solution

*Method 1. Number of the outcomes that no one choose the right key=3*3=9. Then,* $P = 1 - \frac{9}{24} = \frac{5}{8}$.
Method 2. Let A_i *be the event that i-th key is given to the right people. Then, we have* $P(A_i) = \frac{A_3^3}{A_4^4} = \frac{1}{4}$, $P(A_iA_j) = \frac{A_2^2}{A_4^4} = \frac{1}{12}$,
$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24}$ *and* $P(A_iA_jA_kA_l) = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24}$.
Then, we have $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - P(A_1A_2A_3A_4) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8}$.
Method 3. Consider the k keys case. Let M_k*=number of the outcomes that no one choose the right key. We have* $M_1 = 0$ *and* $M_2 = 1$*. Also,* $M_k = (k-1)M_{k-1} + (k-1)M_{k-2}$*. Hence,* $M_3 = 2$ *and* $M_4 = 9$*. Hence,* $P = 1 - \frac{9}{24} = \frac{5}{8}$.

Supplement Exercises

Exercise 4'

How about n keys rather than 4 keys?

Supplement Exercises

Solution

Method 1. Let A_i be the event that i-th key is given to the right people. Then, we have $P(A_i) = \frac{A_{n-1}^{n-1}}{A_n^n} = \frac{1}{n}$, $P(A_iA_j) = \frac{A_{n-2}^{n-2}}{A_n^n} = \frac{1}{n(n-1)}$, ..., $P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1)...(n-k+1)}$, ... *and* $P(A_iA_jA_kA_l) = \frac{1}{n!}$.
Then, we have
$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + ... + (-1)^{n-1}P(A_1...A_n) = \frac{C_n^1}{n} - \frac{C_n^2}{n(n-1)} + \frac{C_n^3}{n(n-1)(n-2)} + ... + (-1)^{n-1}\frac{C_n^n}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

Remark. When $n \to \infty$, then $P(A_1 \cup ... \cup A_n) \to 1 - \frac{1}{e}$.

Supplement Exercises

Solution

Method 2. Consider the k keys case. Let M_k=*number of the outcomes that no one choose the right key. We have* $M_1 = 0$ *and* $M_2 = 1$. *Also,*
$M_k = (k-1)M_{k-1} + (k-1)M_{k-2}$.
Let $F_k = \frac{M_k}{k!}$ *Then, we have* $F_k = \frac{k-1}{k}F_{k-1} + \frac{1}{k}F_{k-2}$.
Henceforth, $F_k - F_{k-1} = -\frac{1}{k}(F_{k-1} - F_{k-2})$.
Then, $F_k - F_{k-1} = (-1)^{k-2}\frac{1}{k(k-1)...3}(F_2 - F_1) = (-1)^k\frac{1}{k!}$.
Then, $F_k = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^k\frac{1}{k!}$.
Hence, $P(\text{no key matches}) = F_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}$.
Therefore,
$P(\text{at least one key matches}) = 1 - F_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

Supplement Exercises

Exercise 5

6

对任意事件 A, B, C 证明:

- $P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A)$;
- $P(AB)+P(AC)+P(BC)\ge P(A)+P(B)+P(C)-1$

Supplement Exercises

Solution

Answer:

(1) $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$

$P((A\cap B)\cup(A\cap C))=P((A\cap B))+P((A\cap C))-P(ABC)$

$P(A)\ge P(A\cap(B\cup C))$, $P(BC)\ge P(ABC)$

$P(A)+P(BC)\ge P(A\cap(B\cup C))+P(ABC)$

结合上面所有式子可得。

(2) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

再结合所有概率在 [0, 1] 之间可得。

Exercise 6

15. 设 A,B 是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，问：

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取得最小值，最小值是多少？

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 因为 $P(AB) \leqslant P(A)=0.6$, $P(AB) \leqslant P(B)=0.8$, 所以当 $P(AB)=P(A)$ 时, $P(AB)$ 的最大值是 0.6.

(2) 因为 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B) \geqslant P(A)+P(B)-1=0.4$, 所以有 $P(AB) \geqslant 0.4$. 而当 $P(A\cup B)=1$ 时, 有 $P(AB)$ 达到最小值 0.4.

Supplement Exercises

Exercise 7

23. 证明：$|P(AB)-P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Supplement Exercises

Solution

证　不妨设 $P(A) \geqslant P(B)$，则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leqslant P(B) - P(B)P(B) = P(B)[1 - P(B)] \leqslant \frac{1}{4}.$$

另一方面，还有

$$\begin{aligned} P(A)P(B) - P(AB) &= P(A)[P(AB) + P(\bar{A}B)] - P(AB) \\ &= P(A)P(\bar{A}B) + P(AB)[P(A) - 1] \\ &\leqslant P(A)P(\bar{A}B) \leqslant P(A)P(\bar{A}) = P(A)[1 - P(A)] \leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

综合上述两方面，可得

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercise 8

17. 把 n 个"0"与 n 个"1"随机地排列，求没有两个"1"连在一起的概率.

Solution

解 考虑 n 个"1"的放法：$2n$ 个位置上"1"占有 n 个位置，所以共有 $\binom{2n}{n}$ 种放法，这是分母。而"没有两个 1 连在一起"，相当于在 n 个"0"之间及两头（共 $n+1$ 个位置）去放"1"，这共有 $\binom{n+1}{n}$ 种放法，于是所求概率为

$$p_n = \frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n+1}{\binom{2n}{n}}.$$

具体可算得 $p_1 = 0.2$，$p_4 = 0.023\,8$，$p_7 = 0.002\,33$。随着 n 的增加，此种事件发生的概率愈来愈小，最后趋于零。

Exercise 9

13. 把 10 本书任意地放在书架上,求其中指定的四本书放在一起的概率.

Supplement Exercises

Solution

解 10本书任意地放在书架上所有可能的放法数为10!,这是分母. 若把指定的四本书看作一本"厚"书,则与其他的6本书一起随意放,有7!种可能放法,这是第一步. 第二步再考虑将这指定的四本书作全排列,共有4!种可能放法. 故总共有7!×4!种可能放法,这是分子. 于是所求概率为

$$\frac{7!\,4!}{10!}=\frac{1}{30}.$$

Supplement Exercises

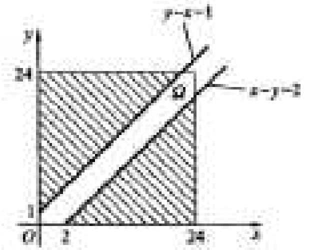
Exercise 10

24. 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时，乙船的停泊时间是两小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少？

Supplement Exercises

Solution

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\frac{1}{2}(23^2 + 22^2)}{24^2} = 0.879.$$



Supplement Exercises

Exercise 11

22. 将 n 个完全相同的球(这时也称球是不可辨的)随机地放入 N 个盒子中,试求:

(1) 某个指定的盒子中恰好有 k 个球的概率;

(2) 恰好有 m 个空盒的概率;

(3) 某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率.

Solution

解 先求样本点总数. 我们用 $N+1$ 根火柴棒排成一行, 火柴棒之间的 N 个间隔恰好形成 N 个盒子, 并依次称它们为第 1 个盒子, 第 2 个盒子, …, 第 N 个盒子, n 个球用"0" 表示, 考虑到两端必须是火柴棒方能形成 N 个盒子, 所以 n 个 (不可辨) 球放入 N 个 (可辨) 盒子中, 就相当于把 $N-1$ 根火柴棒 ($N+1$ 根火柴棒中去掉两端的两根) 和 n 个 "0" 随机地排成一行. 譬如 $N=4, n=3$ 时, "1001011" 表示第 1 个盒子中有 2 个球, 第 2 个盒子中有 1 个球, 第 3, 4 个盒子中无球. 这样一来, n 个球放入 N 个盒子所有的样本点总数相当于: 从 $N-1+n$ 个位置任选 n 个位置放"0", 其他位置放火柴棒. 故样本点总数为 $\binom{N+n-1}{n}$.

(1) 记 A 为事件"指定的某个盒子中恰有 k 个球", 不失一般性, 可认为第 1 个盒子中有 k 个球, 则余下 $n-k$ 个球放入另外 $N-1$ 个盒子中. 类似于样本点总数的计算, 此种样本点共有 $\binom{N-1+n-k-1}{n-k}$, 考虑到球不可辨故

Supplement Exercises

Solution

$$P(A)=\frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}},\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

(2) 记 B_m 为事件"恰有 m 个空盒". 它的发生可分两步描述：

第一步，从 N 个盒子任取 m 个盒子，共有 $\binom{N}{m}$ 种取法.

第二步，将 n 个球放入余下的 $N-m$ 个盒中，且这 $N-m$ 个盒子中都要有球. 这当然要求 $n\geqslant N-m$（或 $m\geqslant N-n$），否则第二步发生的概率为零. 为了使第二步能发生，我们设想先把 n 个球排成一行，随机抽取球与球之间的 $n-1$ 个间隔中的 $N-m-1$ 个间隔放火柴棒即可，这有 $\binom{n-1}{N-m-1}$ 种可能.

综合上述两步，所求概率为

Supplement Exercises

Solution

$$P(B_m)=\frac{\binom{N}{m}\binom{n-1}{N-m-1}}{\binom{N+n-1}{n}},\qquad N-n\leqslant m\leqslant N-1.$$

(3) 若事件 C 表示"指定的 m 个盒子中恰有 j 个球",这意味着另外 $N-m$ 个盒子中放 $n-j$ 个球. 由类似于样本点总数的计算知,j 个球放入 m 个盒子中共有 $\binom{m+j-1}{m-1}$ 种放法,而另外 $n-j$ 个球放入余下的 $N-m$ 个盒子中有 $\binom{N-m+n-j-1}{n-j}$ 种放法. 于是所求概率为

$$P(C)=\frac{\binom{m+j-1}{m-1}\binom{N-m+n-j-1}{n-j}}{\binom{N+n-1}{n}},\qquad 1\leqslant m\leqslant N,\quad 0\leqslant j\leqslant n.$$

Supplement Exercises

Exercise 12

9

从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取出下一个，如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合。

Solution

Answer:

$$|\circ\circ|\quad|\circ|\cdots||$$

我们可以把 n 个元素看作是 n 个盒子，第一个盒子放第一个元素，第二个盒子放第二个元素，依次推理下去，盒子里不放球相当于没有抽到对应的元素。如果把 "o" 和"|" 看作一个位置，相当于从总位置 $(n+r-1)$ 个选出 r 个位置给小 o，即 $\binom{n+r-1}{r}$

Supplement Exercises

Exercise 13

31.（巴拿赫问题）某数学家有两盒火柴，每盒都有 n 根. 每次使用时，他任取一盒并从中抽出一根. 问他发现一盒空而另一盒还有 $r(0 \leqslant r \leqslant n)$ 根的概率是多少？

Supplement Exercises

Solution

解 由对称性知，只要计算事件 E = "发现 A 盒空而 B 盒还有 r 根" 的概率即可，所求概率是此概率的 2 倍.

先计算样本空间中的样本点个数. 因为每次都是等可能地取 A 盒或 B 盒，共取了 $2n-r+1$ 次，故样本空间中共有 2^{2n-r+1} 个样本点.

事件 E 发生可分两段考察，前 $2n-r$ 次中 A 盒恰好取到 n 次，且次序不论，最后一次（第 $2n-r+1$ 次）必定取到 A 盒，这样才能发现 A 盒已空，此种样本点共有 $\binom{2n-r}{n}$ 个，因此 $P(E)=\binom{2n-r}{n}\Big/2^{2n-r+1}$. 所求概率为 $p=2P(E)=\binom{2n-r}{n}\Big/2^{2n-r}$.

Supplement Exercises

Exercise 14

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$

25. 甲掷硬币 $n+1$ 次，乙掷 n 次. 求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率.

Supplement Exercises

Solution

解 记

X_1 = 甲掷出的正面数，　　X_0 = 甲掷出的反面数 $= n+1-X_1$，

Y_1 = 乙掷出的正面数，　　Y_0 = 乙掷出的反面数 $= n-Y_1$。

又记

$$E=\{X_1>Y_1\},\qquad F=\{X_0>Y_0\}.$$

由于正反面的地位是对称的，因此 $P(E)=P(F)$. 又因为

$$F=\{X_0>Y_0\}=\{n+1-X_1>n-Y_1\}$$
$$=\{X_1-1<Y_1\}=\{X_1\le Y_1\}=\overline{E},$$

所以由 $P(E)=P(F)=P(\overline{E})$，得 $P(E)=0.5$.

Further Reading

1. Benferroni Inequality and Inclusion-Exclusion Identity

For sets $A_1, A_2, \ldots, A_n$, we create a new set of nested intersections as follows. Let

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P_2 = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

$$P_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$\vdots$$

$$P_n = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Further Reading

Then the *inclusion-exclusion identity* says that

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \cdots \pm P_n.$$

Moreover, the P_i are ordered in that $P_i \geq P_j$ if $i \leq j$, and we have the sequence of upper and lower bounds

$$\begin{aligned} P_1 \geq P(\cup_{i=1}^n A_i) &\geq P_1 - P_2 \\ P_1 - P_2 + P_3 \geq P(\cup_{i=1}^n A_i) &\geq P_1 - P_2 + P_3 - P_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

See Exercises 1.42 and 1.43 for details.

These bounds become increasingly tighter as the number of terms increases, and they provide a refinement of the original Bonferroni bounds. Applications of these bounds include approximating probabilities of runs (Karlin and Ost 1988) and multiple comparisons procedures (Naiman and Wynn 1992).

Further Reading

- We illustrate the proof that the P_i are increasing by showing that $P_2 \ge P_3$. The other arguments are similar. Write

$$
\begin{aligned}
P_2 = \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i\cap A_j) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i\cap A_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) + P(A_i\cap A_j\cap(\cup_k A_k)^c)\right]
\end{aligned}
$$

Now to get to P_3 we drop terms from this last expression. That is

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) + P(A_i\cap A_j\cap(\cup_k A_k)^c)\right] \\
&\ge \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)\right] \\
&\ge \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) = \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) = P_3
\end{aligned}
$$

The sequence of bounds is improving because the bounds $P_1, P_1-P_2+P_3, P_1-P_2+P_3-P_4+P_5, \ldots$, are getting smaller since $P_i \ge P_j$ if $i \le j$ and therefore the terms $-P_{2k}+P_{2k+1} \le 0$. The lower bounds $P_1-P_2, P_1-P_2+P_3-P_4, P_1-P_2+P_3-P_4+P_5-P_6, \ldots$, are getting bigger since $P_i \ge P_j$ if $i \le j$ and therefore the terms $P_{2k+1}-P_{2k} \ge 0$.

Thank you!