一、选 择 题（本大题分 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

(1)设 A、B 互不相容，且 P(A)>0，P(B)>0，则必有(　　)

(A) $P(B|A)>0$　　(B) $P(A|B)=P(A)$　　(C) $P(A|B)=0$　　(D) $P(AB)=P(A)P(B)$

(2)将 3 粒黄豆随机地放入 4 个杯子，则杯子中盛黄豆最多为一粒的概率为（　　）

$(A)\frac{3}{32}$　$(B)\frac{3}{8}$　$(C)\frac{1}{16}$　$(D)\frac{1}{8}$

(3) $X\sim N(\mu,4^2),\ Y\sim N(\mu,5^2),\ p_1=P\{X\le\mu-4\},p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则(　　)

(A)对任意实数 $\mu, p_1=p_2$　　（B）对任意实数 $\mu, p_1<p_2$

(C)只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$　（D）对任意实数 μ，都有 $p_1>p_2$

(4)设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x), F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a 成立的是(　　)

（A） $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$　　（B） $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

（C） $F(-a)=F(a)$　　（D） $F(-a)=2F(a)-1$

(5)已知 $X_1,X_2,\cdots,X_{50}$ 为来自总体 $X\sim N(2,4)$ 的样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}X_i$，则

$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{50}(X_i-\overline{X})^2$ 服从分布为(　　)

（A） $N(2,\frac{4}{50})$　　(B) $N(\frac{2}{50},4)$　（C） $\chi^2(50)$　　(D) $\chi^2(49)$

二、填 空 题 (本大题 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

(1) $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.4$,则 $P(A\overline{B})=$ ____________

(2) 设随机变量 X 有密度 $f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 则使 $P(X>a)=P(X<a)$ 的常数 $a=$_______

(3) 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P\{0<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}=$_______

(4)设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $EX=$_____　，$DX=$_____

(5)设总体 $X\sim N(\mu,9)$，已知样本容量为 25，样本均值 $\overline{x}=m$；记 $u_{0.1}=a$，$u_{0.05}=b$；$t_{0.1}(24)=c$，$t_{0.1}(25)=d$；$t_{0.05}(24)=l$，$t_{0.05}(25)=k$，则 μ 的置信度为 0.9 的置信区间为____________________

三、解答题 （共 60 分）

1、(10 分)某工厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,每个车间的产量分别占全厂的 25%,35%,40%,各车间产品的次品率分别为 5%,4%,2%,

求：(1)全厂产品的次品率

(2) 若任取一件产品发现是次品,此次品是甲车间生产的概率是多少？

2、(10 分)设 X 与 Y 两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其它.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求:随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

3、(10 分)设随机变量 X 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布，证明：$Y=1-e^{-2X}$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。

4、(8 分)设某次考试考生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得 $\overline{X}=66.5,$ 样本标准差为 15，问在 $\alpha=0.05$ 时，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?

5、(10 分)在抽样检查某种产品的质量时，如果发现次品多于 10 个，则拒绝接受这批产品。设产品的次品率为 10％，问至少应抽查多少个产品进行检查，才能保证拒绝这批产品的概率达到 0.9？（$\Phi(1.29)=0.9$）

6、(12 分)**设(X，Y) 服从二维正态分布，X~N(1 ，9)，Y~N(0 ，16)，** $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设

$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，**求(1)** EZ , DZ **(2)** ρ_{XZ} **(3)X 与 Z 是否相关?**

标准答案

一、选 择 题（5×4 分）

题号	1	2	3	4	5
答案	C	B	A	B	D

二、填 空 题（5×4 分）

1、<u>0.1</u>　　2、<u>$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$</u>　　3、<u>0.35</u>　　4、<u>$EX=1,\ DX=\frac{1}{2}$</u>

5、$\boldsymbol{(m-\frac{3}{5}b, m+\frac{3}{5}b)}$ 或 $\boldsymbol{(m-\frac{3}{5}u_{0.05}, m+\frac{3}{5}u_{0.05})}$

三、 解答题（60 分）

1、解：A=“生产的产品是次品”，B_1=“产品是甲厂生产的”，B_2=“产品是乙厂生产的”，B_3=“产品是丙厂生产的”，易见 B_1, B_2, B_3 是 Ω 的一个划分

(1) 由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=25\%\times5\%+35\%\times4\%+40\%\times2\%=0.0345.$$

(2) 由 Bayes 公式有：$\boldsymbol{P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{25\%\times5\%}{0.0345}=\frac{25}{69}}$

2、因为 X 与 Y 相互独立，所以 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

当 $z\le0$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=0;$

当 $0<z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z};$

当 $z\ge1$ 时， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}(e-1);$

所以 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0 & z\le0\\ 1-e^{-z} & 0<z<1;\\ e^{-z}(e-1) & z\ge1\end{cases}$

3、$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}=P\left\{X\le-\frac{\ln(1-y)}{2}\right\}$

$$=\begin{cases}0, y<0,\\ \int_{-\infty}^{-\frac{\ln(1-y)}{2}}2e^{-2x}dx=y(0\le y<1),\\ 1, y\ge1.\end{cases}\quad \therefore f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}1, (0<y<1),\\ 0,\text{ 其他。}\end{cases}$$

4、$\boldsymbol{H_0: \mu=\mu_0=70}$

①由于 σ 2 未知，则令 $\boldsymbol{t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)}$

②由 $\boldsymbol{P\left\{|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha}$ ，查表得 t 的临界值 $\boldsymbol{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301,}$

则拒绝域为 $\boldsymbol{I_c=\{t\,|\,|t|\ge2.0301\}}$，由条件计算出 $\boldsymbol{t_0=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}=-1.4}$，

由于$\left|t_0\right| = 1.4 < 2.0301$，所以接受$t_0$，即可以认为考生平均成绩为 70 分。

5、设应抽查 n 件产品，其中次品数为 Y，则 $Y \sim B(n, 0.1)$，

其中 $EY = np = 0.1n,\ DY = np(1-p) = 0.09n$，由二项分布的中心极限定理，得

$$P\{10 \le Y \le n\} = P\left\{\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \le \frac{Y-0.1n}{\sqrt{0.09n}} \le \frac{n-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right\} = \Phi(3\sqrt{n}) - \Phi(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}})$$

$\approx 1-\Phi(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}})$，要使$1-\Phi(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}) \ge 0.9$，即$\Phi(\frac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}}) \ge 0.9$，查表得

$\frac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}} \ge 1.29$，解得$n \ge 147$，即至少要抽查 147 件产品才能保证拒绝这批产品的概率达到 0.9。

6、(1) $EZ = E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}) = \frac{1}{3}EX + \frac{1}{2}EY = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{3}$

$$DZ = D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}) = D(\frac{X}{3}) + D(\frac{Y}{2}) + 2\operatorname{cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}) = \frac{1}{9}\cdot 9 + \frac{1}{4}\cdot 16 + 2\operatorname{cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$

$= 5 + 2\operatorname{cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$，

而$\operatorname{cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}) = \frac{1}{6}\operatorname{cov}\left(X,Y\right) = \frac{1}{6}\rho_{XY}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY} = \frac{1}{6}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4 = -1$

$\therefore DZ = 5 + 2\cdot(-1) = 3$

(2) $\rho_{XZ} = \frac{\operatorname{cov}\left(X,Z\right)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}$，而$\operatorname{cov}\left(X,Z\right) = \operatorname{cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}) = \frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,X) + \frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)$

$= \frac{1}{3}DX + \frac{1}{2}\cdot(-6) = \frac{1}{3}\cdot 9 - 3 = 0$，$\therefore \rho_{XZ} = 0$

(3) $\because \rho_{XZ} = 0$，所以 X 与 Z 不相关。