Final Tutorial

Department of Mathematics
Southern University of Science and Technology

样本空间

事件

- 若 $A\bigcap B=\phi$, 则称A, B互不相容(互斥).
- 若 $A\bigcup B=\Omega$, 则称A, B互为逆事件或称为对立事件.
- 交换律 $A\bigcap B=B\bigcap A$, $A\bigcup B=B\bigcup A$.
- 结合律 $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$.
- 分配律 $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.
- De Morgan law

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B},\ \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} B_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{B}_k,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n} B_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{B}_k$$

概率测度(Probability Measure)

概率的公理化定义

设$\mathscr{A}$为样本空间ω上的事件域, $\forall A \in \mathscr{A}$, 若存在实数$P(A)$与之对应，且满足

- 非负性：$P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性(σ可加性)：对两两不相容的事件列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

则称$P(A)$为事件A的概率,称$\{\omega, \mathscr{A}, P\}$为概率空间。

概率测度(Probability Measure)

概率的基本性质

- $P(\emptyset) = 0$;
- 有限可加性：若$A_1, A_2, ..., A_n$是两两不相容的事件,则
$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k);$$
- 若$A \subset B$,则$P(A) \leq P(A)$;
- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- 加法定律：对任何事件A, B有
$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)。$$

概率计算

古典概型

设随机试验的样本空间$\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$只含有有限个样本点,并且每个样本点的出现是等可能的,
$P(w_i) = \frac{1}{n}$,则称该实验为等可能概型(古典概型)。
设事件A含k个样本点,则$P(A) = \frac{k}{n}$。

几何概型

对于随机试验：向平面有界区域Ω投掷一个点,考虑点落在可测量面积的平面区域A的事件概率：
$P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)}$。该试验为几何概型。

条件概率（Conditional Probability）

条件概率

设事件A,B是两个事件,且$P(B)>0$,记$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$称为在事件$B$发生的条件下事件$A$发生的条件概率。

基本性质

- 非负性：$P(A|B)>0$;
- 规范性：$P(\Omega|B)=1$;
- 可列可加性：对两两不相容的事件列$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|B)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B).$$

分划

设Ω为样本空间,若事件$B_1, B_2, ..., B_n$满足:

- $B_1, B_2, ..., B_n$两两不相容,
- $B_1 \bigcup B_2 \bigcup ... \bigcup B_n = \Omega$

则称$\{B_1, B_2, ..., B_n\}$为样本空间的一个分划。

条件概率(Conditional Probability)

全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Bayes公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立性

事件独立

设A,B是两个事件,若$P(A)=P(A)P(B)$则称事件A,B相互独立。(独立与不相容无关)
若事件A,B独立,则$A,\overline{B}$独立, $\overline{A},B$独立, $\overline{A},\overline{B}$独立。

n个事件独立

若n个事件$A_1,A_2,...,A_n(n\geq 2)$满足

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$$
$$1\leq i_1<...<i_k\leq n,k=2,...,n.$$

则称事件$A_1,A_2,...,A_n$相互独立。

离散型随机变量

离散型随机变量

- 随机变量X只取有限或可列个值；
- 概率密度函数(PMF)：$P(X_k = x_k) = p(x_k)$
- 累积分布函数(CDF): $F(x) = P(X \le x)$.

概率密度函数基本性质

- $p(x_k) \ge 0$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = 1$.

离散型随机变量

分布函数基本性质

- $F(x)$是单调不减函数；
- $0 \leq F(x) \leq 1$ 且
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$
- $F(x)$右连续函数
$$F(x+0) = \lim_{t \to x^+} F(t) = F(x).$$

连续随机变量

连续随机变量

设随机变量X的分布函数能够表示为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty.$$

其中$f(t) \geq 0$,则称X为连续型r.v,非负可积函数$f(t)$称为概率密度函数(pdf)。

连续型随机变量

密度函数的性质

- $f(t) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$;
- $\forall x_1 < x_2$有
  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$
- 在$f(x)$的连续点处有$f(x) = F'(x)$

p-分位数

设$X \sim f(x)$,若$\forall 0 < p < 1$,存在常数x_p满足

$$P\{X \leq x_p\} = \int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx = p \text{ i.e. } F(x_p) = p$$

随机变量函数

随机变量函数

设随机变量X的密度函数为$f(x)$,又$y=g(x)$是严格单调函数,其反函数$h(y)=g^{-1}(y)$连续可导,则$Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f(h(y)) & h(y)make \quad sense\\ 0 & else\end{cases}$$

随机变量函数

随机变量函数

设随机变量X的密度函数为$f(x)$,又函数$g(x)$在互不相交的区间$(a_1, b_1), (a_2, b_2), ...$上逐段严格单调,且其反函数$h_1(y), h_2(y), ...$均连续可导,则$Y = g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1} |h_i'(y)| f(h_i(y)) & h_1(y), h_2(y), ... make \quad sense \\ 0 & else \end{cases}$$

二维离散随机变量

二维离散随机变量

设随机变量(X, Y)的所有可能取值为$(x_i, y_j), i, j \in N^+$。取值概率为$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p(x_i, y_j) = p_{ij}, (i, j = 1, 2, \ldots)$称上式为二维离散型随机变量$(X, Y)$的频率函数或联合频率函数。

频率函数基本性质

- $p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots);$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

二维离散型随机变量的边际频率函数

设(X,Y)的频率函数为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p(x_i,y_j)=p_{ij},(i,j=1,2,\ldots)$

- 随机变量X的频率函数为：

$$P\{X=x_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},\ (i=1,2,\ldots)$$

- 随机变量X的频率函数为：

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j},\ (j=1,2,\ldots)$$

二维连续随机变量

设随机变量(X,Y)的联合分布函数(joint CDF)为$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$,若存在非负可积函数$f(x,y)\ge 0$,使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv \qquad (\forall (x,y)\in R^2)$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量,$f(x,y)$称为概率密度函数。

二维连续随机变量

密度函数基本性质

- $f(x,y) \geq 0 \quad (\forall (x,y) \in R^2)$;
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = 1$;
- $\forall D \in R^2$

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy$$

- 在$f(x,y)$的连续点处，有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

二维连续随机变量

二维连续型随机变量的边际分布密度

设(X,Y)的分布函数和密度函数分别为$F(x,y),f(x,y)$.

- 随机变量X的分布函数为：

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,y)dydu$$

密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

- 随机变量Y的分布函数为：

$$F_Y(x)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,v)dxdv$$

密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

独立随机变量

独立随机变量

设$(X, Y) \sim F(x,y)$,$X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$
若$\forall x, y \in (-\infty, \infty)$有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$
$$\text{i.e.}\ \ F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量X, Y相互独立。

独立随机变量

二维离散型r.v的独立性

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots$$

二维连续型r.v的独立性

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \text{ a.e.}$$

条件分布

二维离散型r.v的条件分布

设(X,Y)的频率函数为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$,
$(i,j=1,2,...)$ 对于固定的j,若$P\{Y=y_j\}=p_j>0$,则称

$$P_{X|Y}(x_i|y_j)=P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_j},\ (i=1,2,...)$$

为在$Y=y_j$的条件下,r.v X的条件频率函数。
类似的,可以定义Y的条件频率函数。

条件分布

条件频率函数的性质

- $P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0, \ (i = 1, 2, \ldots);$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i | Y = y_j\} = 1.$

条件分布

二维连续型r.v的条件分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,若对于固定的y,(X,Y)关于y的边际密度$f_Y(y)>0$,则称

$$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_{X|Y}(x|y),\ (-\infty<x<\infty)$$

为在$Y=y$的条件下,X的条件密度。称

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y)du$$

为在$Y=y$的条件下,X的条件分布。类似的,可以定义Y的条件密度。

条件分布

条件密度的性质

- $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(u|y)du = 1.$

独立性与条件密度

$$
\begin{aligned}
X, Y\text{相互独立} \Leftrightarrow & \ f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \ (\text{a.e.}) \\
\Leftrightarrow & \ f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \ (\text{a.e.}) \\
& \ f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y) \ (\text{a.e.})
\end{aligned}
$$

联合分布随机变量函数

连续型$Z=X+Y$的分布

设$(X,Y)\sim f(x,y)$,则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$$

若X,Y相互独立,则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

称为卷积公式。

联合分布随机变量函数

离散型$Z=X+Y$的分布

设X,Y相互独立,其频率函数分别为

$$P(X=i)=p_i,\ i=1,2,\ldots$$
$$P(Y=j)=q_j,\ j=1,2,\ldots$$

令$Z=X+Y$,则

$$\begin{aligned}P\{Z=k\}&=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=k-i)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=k-i)P(Y=i)\end{aligned}$$

联合分布随机变量函数

随机变量其他函数

设二维随机变量$(X,Y)\sim f_{X,Y}(x,y)$,如果函数
$U=h_1(x,y),V=h_2(x,y)$可微,并且具有逆函数
$X=h_1^{-1}(u,v),Y=h_2^{-1}(u,v)$,则$(U,V)$的联合密度函数是

$$g_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(h_1^{-1}(u,v),h_2^{-1}(u,v))\left|det(J(x,y\to u,v))\right|$$

极值和顺序统计量

极值$man(X, Y), min(X, Y)$的分布

- 设$X_i \sim F_{X_i}(x), i = 1, 2, ..., n$,且$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立，则

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(x)...F_{X_n}(z)$$
$$F_{min}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(z)).$$

- $X_1, X_2, ..., X_n$独立同分布于$F(x)$时有

$$F_{max}(z) = F^n(z),\ f_{max}(z) = nf(z)[F(z)]^{n-1}$$
$$F_{min}(z) = 1 - (1 - F(z))^n,$$
$$f_{min}(z) = nf(z)[1 - F(z)]^{n-1}.$$

极值和顺序统计量

顺序统计量X_k的分布

设$X_i \sim f(x), i = 1, 2, ..., n$,是独立同分布的连续型r.v. 将$X_1, ..., X_n$由小到大排列为$X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$,则$X_{(k)}$的密度函数为

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) F^{k-1}(x) [1 - F(x)]^{n-k}$$

随机变量的期望

离散型随机变量的期望

设随机变量X的频率函数为$P(X=x_k)=p_k$,若级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<+\infty$,则称

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_kP(X=x_k)$$

为随机变量X的期望(均值)。

随机变量的期望

连续型随机变量的期望

设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$,
若$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<+\infty$,则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

为随机变量X的期望(均值)。

Remark

若$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=+\infty$,则称$E(X)$不存在。

随机变量的期望

马尔科夫不等式

设随机变量X满足$P\{X \geq 0\} = 1$,且$E(X)$存在,则

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(X)}{t}.$$

随机变量的期望

随机变量函数的期望

设$y=g(x)$为普通函数,则

- 设X为离散型r.v,其频率函数为

$$P(X=x_k)=p_k,\qquad k=1,2,\ldots$$

若$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k<+\infty$,则

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$$

- 设X为连续型r.v,其概率密度函数为$f(x)$,
若$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty$,则
$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$$

随机变量的期望

随机变量函数的期望

设$z = g(x,y)$为二元函数,则

- 设X, Y的联合频率函数为
$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\ldots$$
若$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij} < +\infty$,则
$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$
- 设X, Y的联合密度为$f(x,y)$,
若$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy < \infty$,则
$$E(Z) = E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

随机变量的期望

期望的基本性质

- 设$a \le X \le b$(a.e),则$a \le E(X) \le b$
- 设c为常数,则$E(cX) = cE(X)$
- 设X, Y为r.v,则有$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- 设X, Y相互独立,则有$E(XY) = E(X)E(Y)$
- 设$X = c$(a.e),则$E(X) = c$
- 设$a_1, a_2, ..., a_n$为常数,$X_1, X_2, ..., X_n$为r.v,则 $E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- 设$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立,则有$E(X_1 X_2 ... X_n) = E(X_1)E(X_2)...E(X_n)$

方差和标准差

方差

对r.v X,若$Var(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$存在,则称$D(X)$为X的方差,$\sqrt{D(X)}$称为标准差。

- $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$
- 设$X=c(\text{a.e})$,则$D(X)=0$
- 设c为常数,则$D(cX)=c^2E(X)$
- 设X,Y为r.v,则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
  特别的,X,Y相互独立时,有
  $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$
- $D(X)=0 \Leftrightarrow X=c(\text{a.e})$

方差和标准差

切比雪夫不等式

设$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$都存在,则$\forall\epsilon>0$,有

$$P\{|X-\mu|\geq\epsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

协方差和相关系数

协方差

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

- X,Y相互独立,有$Cov(X,Y)=0$
- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
- $D(X)=E(X-E(X))^2=Cov(X,X)$
- $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- 对于任意a,b, 有$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
- $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
- $Cov(a+\sum_{i=1}^{n}b_iX_i,c+\sum_{j=1}^{m}d_jY_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_id_jCov(X_i,Y_j)$

协方差和相关系数

相关系数

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

- $|\rho_{XY}| \le 1$
- $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow Y = a + bX(a.e)$
- $\rho_{XY} = 1$时,X,Y正相关, $\rho_{XY} = -1$时,X,Y负相关
- $\rho_{XY} = 0$时,称X,Y不相关

独立与不相关的关系

X,Y相互独立 $\Rightarrow$ X,Y互不相关;
特别的,设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$,则 X,Y相互独立
$\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow$ X,Y互不相关

条件期望

条件期望

给定$X=x$的情况下,Y的条件期望定义为

- $E(Y|X=x)=\sum\limits_{y} y p_{Y|X}(y|x)$ (离散情形)
- $E(Y|X=x)=\int y f_{Y|X}(y|x)dy$ (连续情形)

函数$h(Y)$的条件期望

- $E(h(Y)|X=x)=\sum\limits_{y} h(y) p_{Y|X}(y|x)$ (离散情形)
- $E(h(Y)|X=x)=\int h(y) f_{Y|X}(y|x)dy$ (连续情形)

条件期望

条件期望

- $E(Y) = E[E(Y|X)]$
- $D(Y) = D[E(Y|X)] + E[D(Y|X)]$

大数定理

依概率收敛

设$\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$是一列随机变量,若$\forall\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|\geq\epsilon\}=0$$

则称$\{\xi_n\}$依概率收敛于ξ,记为$\xi_n\xrightarrow{P}\xi$

伯努利大数定律

设n_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数,
且$P(A)=p$. 则$\forall\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|\geq\epsilon\}=0$$

大数定理

切比雪夫大数定律

设$\{X_n\}$为相互独立的随机变量列,且具有相同的期望和方差,记 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\ldots$ 则$\forall\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu|\geq\epsilon\}=0$$

辛钦大数定律

设$\{X_n\}$是独立同分布随机变量列, $E(X_i)=\mu$存在,
则$\{X_n\}$服从大数定律,即$\forall\epsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu|<\epsilon\}=1 \text{ or } \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu|\geq\epsilon\}=0$$

中心极限定理

独立同分布的中心极限定理

设$\{X_n\}$是独立同分布随机变量列,其期望和方差分别为$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, i = 1,2,\ldots$ 则$\{X_n\}$服从中心极限定律，即标准化r.v

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right\}}{D(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数满足标准正态分布。

中心极限定理

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设$\{\eta_n\}$为服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布列,则对任意x有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \phi(x)$$

数理统计的基本概念与抽样分布

统计量

设$X_1, X_2, ..., X_n$为来自总体$X \sim F(x)$的样本, $g(x_1, ..., x_n)$为n元函数,若r.v $g(X_1, X_2, ..., X_n)$不含任何未知参数,则称$g(X_1, X_2, ..., X_n)$为统计量。

样本均值和样本方差的数字特征

设总体X的均值和方差$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$都存在,$X_1, X_2, ..., X_n$为来自总体$X$的样本,则

$$E(\overline{X}) = \mu, D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \sigma^2$$

χ^2—分布

设$X_1, X_2, ..., X_n$为来自总体$X \sim N(0,1)$的样本,令
$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ 称χ^2服从自由度为n的χ^2—分布,记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.
χ^2—分布的密度函数

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

抽样分布

χ^2—分布

- χ^2—分布的可加性设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n)$, $\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$, 且χ_1^2, χ_2^2相互独立,则$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- $\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

抽样分布

t—分布

设$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X, Y相互独立，令$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 称t服从自由度为n的t—分布，记为$t \sim t(n)$。t—分布的密度函数

$$f(y) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

F—分布

设$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$，且$U, V$相互独立，令 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 称F服从自由度为(n_1, n_2)的F—分布，记为$F \sim F(n_1, n_2)$，特别的$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.

抽样分布

抽样分布定理

设$X_1,X_2,...,X_n$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，则

- $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　　$\overline{X},S^2$相互独立
- $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
- $Y_1,Y_2,...Y_m$是总体$Y\sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$的样本,且与$X$独立，则 $\frac{S^2/\sigma^2}{S_y^2/\sigma_y^2}\sim F(n-1,m-1)$
- $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$，$S_w^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$.

点估计

矩估计

- 求总体矩$E(X^k)$;
- 样本矩$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$代替总体矩;
- 求出矩估计量

矩估计

- 求对数似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)$;
- 列出对数似然方程组$\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial \theta_i}=0$;
- 求对数似然函数的最大值点。

点估量的评价

无偏性

- 若估计量$\widehat{\theta}=\widehat{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$的数学期望存在，且$\forall\theta\in\Theta$有
$$E_\theta(\widehat{\theta})=\theta$$
则称$\widehat{\theta}$为θ的无偏估计,否则称为有偏估计。
- 称
$$b_n(\widehat{\theta})=E_\theta(\widehat{\theta})-\theta$$
为估计量$\widehat{\theta}$的偏差
若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n(\widehat{\theta})=0$,则称$\widehat{\theta}$为$\theta$的渐近无偏估计。

点估量的评价

有效性

设$X_1, X_2, ..., X_n$是总体$X \sim F(x, \theta); \theta \in \Theta$的样本,

$$\widehat{\theta}_1 = \widehat{\theta}_1(X_1, X_2, ..., X_n), \widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_2(X_1, X_2, ..., X_n)$$

都是θ的无偏估计,若$\forall \theta \in \Theta$有

$$D(\widehat{\theta}_1) \leq D(\widehat{\theta}_2)$$

则称$\widehat{\theta}_1$比$\widehat{\theta}_2$有效。

点估量的评价

相合估计

设$\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$是未知参数$\theta$的点估计，
若$\forall \theta \in \Theta$满足:$\forall \epsilon > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\widehat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon\} = 0$$

则称$\widehat{\theta}_n$是θ的相合估计。

区间估计

区间估计

设总体$X\sim F(x;\theta)(\theta\in\Theta)$,$\forall 0<\alpha<1$,若存在两个统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n),\ \overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)$$

使得$\forall\theta\in\Theta$有

$$P(\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta})\ge 1-\alpha$$

则称随机取件$(\underline{\theta},\overline{\theta})$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。$\underline{\theta},\overline{\theta}$分别为置信下限和置信上限。

区间估计

$\forall 0<\alpha<1$,若存在统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$满足$\forall\theta\in\Theta$有

$$P\{\underline{\theta}<\theta\}=1-\alpha$$

则称$(0,\infty)$为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间,称$\underline{\theta}$为单侧置信下限。
若存在统计量$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$满足$\forall\theta\in\Theta$有
$P\{\theta<\overline{\theta}\}=\underline{1}-\alpha$
则称$(-\infty,\overline{\theta})$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间,称$\overline{\theta}$为单侧置信上限。

假设检验

决策的两类错误

- I类错误 H_0为真,但拒绝H_0(弃真)
- II类错误 H_0不真,但接受H_0(取伪)

检验的原则

- 对H_0采取保护的态度
- 控制I类风险(构造拒绝域)
- 概率反证法(提出原假设H_0)

正态总体参数的假设检验

单个正态总体参数的假设检验使用的检验统计量

- 检验均值(方差已知) $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- 检验均值(方差未知) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
- 检验方差(均值已知) $\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0})^2 \sim \chi^2(n)$
- 检验方差(均值未知) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

Thanks

Edited by Shuang LI