Probability and Statistics
Tutorial 13

Siyi Wang

Southern University of Science and Technology

11951002@mail.sustech.edu.cn

December 14, 2020

Outline

Review

1. Unbiasedness

(一) 无偏性

设总体 $X \sim F(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$, Θ为参数空间.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体 X 的样本, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为未知参数 θ 的点估计.

定义 若估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的数学期望存在,且 $\forall\, \theta \in \Theta$ 有

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta$$

$E_\theta(\hat{\theta})$表示利用总体分布$F(x;\theta)$计算, 得出的数学期望与参数 θ 有关

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计**. 否则称为**有偏估计**.

称

$$b_n(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta}) - \theta$$

为估计量 $\hat{\theta}$ 的**偏差(偏)**.

若$b_n(\hat{\theta}) \neq 0$,则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**有偏估计**.

若$\lim\limits_{n\to\infty} b_n(\hat{\theta}) = 0$,则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**渐近无偏估计**.

2. Efficiency

定义 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X \sim F(x, \theta); \theta \in \Theta$的样本,

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n),\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots X_n)$$

都是θ的无偏估计. 即$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta \quad (\forall \theta \in \Theta)$. 若$\forall \theta \in \Theta$有

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

3. Consistency

（三） 相合性(一致性)

设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的点估计.

当n增加时，怎样评价$\hat{\theta}$是一个"好"的估计?

分析 当样本容量n增加时，样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$包含未知参数θ的信息也越多，此时估计应越"精确".

由于$\hat{\theta}$是r.v.，怎样描述估计的精确性?

定义 设$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的点估计，若$\forall\ \theta\in\Theta$满足：$\forall\ \varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\ge\varepsilon\}=0$$

则称$\hat{\theta}_n$是θ的**相合估计**.

显然 $\hat{\theta}_n$是θ的相合估计$\Longleftrightarrow$ $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta\quad(n\to\infty)$

3. Consistency

关于相合估计的一般结论

- 由辛钦大数定律知, θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 是相合估计
- θ 的MLE $\hat{\theta}$ 一般也是相合估计
- θ 的相合估计不一定是无偏估计
- 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, 则由切比雪夫不等式有

$$P\{\,|\hat{\theta}-\theta| \geq \varepsilon\,\} \leq \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}$$

故当 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta})=0$ 时 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计(充分条件).

3. Consistency

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$X\sim b(m,p)$ $(0<p<1)$的样本，求未知参数p的MLE $\hat{p}$，试证$\hat{p}$是p的无偏估计与相合估计.

解 似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}C_m^{X_i}p^{X_i}(1-p)^{m-X_i}$$
$$=(\prod_{i=1}^{n}C_m^{X_i})\cdot p^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\cdot(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(m-X_i)}$$
$$=(\prod_{i=1}^{n}C_m^{X_i})\cdot p^{n\bar{X}}\cdot(1-p)^{mn-n\bar{X}}$$

令$\dfrac{\partial \ln L}{\partial p}=\dfrac{n\bar{X}}{p}-\dfrac{mn-n\bar{X}}{1-p}=0$，求得$p$的MLE为$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{m}$

$$\because\ E(\hat{p})=\frac{E(\bar{X})}{m}=\frac{mp}{m}=p$$

$$\hat{p}=\frac{\bar{X}}{m}\xrightarrow{P}\frac{mp}{m}=p\quad(n\to\infty)$$

$\therefore\ \hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{m}$是$p$的无偏估计与相合估计.

4. MSE

1. **均方误差**　设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个估计(无偏的或有偏的),则称

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)^2$$

为 $\hat{\theta}$ 的均方误差. 均方误差较小意味着:$\hat{\theta}$ 不仅方差较小,而且偏差 $(E\hat{\theta} - \theta)$ 也小,所以均方误差是评价点估计的最一般标准.

Review

5. UMVUE

2. 一致最小方差无偏估计　设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计，如果对另外任意一个 θ 的无偏估计 $\tilde{\theta}$，在参数空间 $\Theta=\{\theta\}$ 上都有

$$\mathrm{Var}_{\theta}(\hat{\theta}) \leq \mathrm{Var}_{\theta}(\tilde{\theta}),$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致最小方差无偏估计，简记为 UMVUE.

6. Interval Estimation

区间估计的定义

定义 设总体 $X \sim F(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$, $\forall 0<\alpha<1$, 若存在两个统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),\ \overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\quad(\underline{\theta}<\overline{\theta})$$

使得 $\forall\ \theta \in \Theta$ 有

$$P\{\underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta}\} \ge 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为 θ 的**置信水平**为 $1-\alpha$ 的**置信区间**, $\underline{\theta}$、$\overline{\theta}$ 分别称为**置信下限**和**置信上限**.

双侧置信区间

注

- 置信水平也称为**置信度**, 通常 α 较小, $1-\alpha$ 较大
- 对于连续型总体, 则取 $P\{\underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta}\}=1-\alpha$
- 对于离散型总体, 则取 $P\{\underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta}\}$ 尽可能接近 $1-\alpha$
- 现今的区间估计理论是由原籍波兰的美国统计学家奈曼 (J. Neyman) 于20世纪30年代建立起来的.
- 求区间估计一般方法: 依据**波动理论的枢轴量法**

6. Interval Estimation

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,1)$的样本，试求未知参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

分析 μ 的置信区间 ➡ μ 所在"范围"

由极大似然思想：$\bar{X}$ 看似"最像"μ

由无偏估计理论：$\bar{X}$ 应在 μ 附近"波动"

μ 所在"范围"应是以$\bar{X}$为中心的"随机区间"

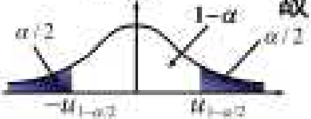
故μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间应满足

$$P\{\bar{X}-c<\mu<\bar{X}+c\}=1-\alpha$$

其中c是待定常数，等价地有

$$P\{|\bar{X}-\mu|<c\}=1-\alpha$$

$$\because\ \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\ \therefore\ P\{\sqrt{n}\,|\bar{X}-\mu|<u_{1-\alpha/2}\}=1-\alpha$$



故μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

Homework

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本．试求 k，使 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

Solution

1. Solution. $X_{i+1} - X_i \sim N(0, 2\sigma^2)$, $i=1, \dots, n-1$

Then, $\mathbb{E}[(X_{i+1} - X_i)^2] = 2\sigma^2$, $i=1, \dots, n-1$.

Hence, if $\sigma^2 = \mathbb{E}[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2] = 2(n-1)\frac{1}{k}\sigma^2$.

then $k = 2n-2$. $\square$

Homework

2. 设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中，分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本，$\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分别是两样本的均值，试证，对于任意 $a, b(a+b=1)$，$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计，并确定常数 a, b 使 $D(Y)$ 达到最小.

Solution

2. Solution. $\mathbb{E}[Y] = (a+b)\mu = \mu$.

$$D(Y) = \left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{b^2}{n_2}\right)\sigma^2 = \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)a^2 - \frac{2}{n_2}a + \frac{1}{n_2}\right]\sigma^2$$

Hence, $$a_{min} = \frac{\frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \frac{n_1}{n_1+n_2}.$$

$$b_{min} = \frac{n_2}{n_1+n_2}. \quad \square$$

3. 设总体X服从参数为θ的指数分布，概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$未知。

（1）证明：$\bar{X}$和$n\cdot\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$都是未知参数$\theta$的无偏估计。

（2）比较这两个估计量的有效性。

Homework

Solution

[illegible]

14. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为独立分布同分布变量，$0<\theta<1$，

$$P(x_i=-1)=\frac{1-\theta}{2}, P(x_i=0)=\frac{1}{2}, P(x_i=1)=\frac{\theta}{2},$$

(1) 求 θ 的 MLE $\hat{\theta}_1$，并问 $\hat{\theta}_1$ 是否是无偏的；

(2) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2$；

Supplement Exercises

Solution

解　(1) x_i 的密度函数可表示为

$$p(x,\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}(x^2-x)}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x^2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}(x^2+x)},$$

因此，相应的对数似然函数为

$$l(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_i)\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)-\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^2)\ln 2+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_i)\ln\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

关于 θ 求导并令其为0，可得，

$$\frac{\mathrm{d}l(\theta;x_1,\cdots,x_n)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_i)\frac{1}{1-\theta}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_i)\frac{1}{\theta}=0.$$

解之有

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

Solution

(2) 因为 $E(x_i) = -1 \times \frac{1-\theta}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{\theta}{2} = \theta - \frac{1}{2}$,所以 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1 = \bar{x} + \frac{1}{2}.$$

Supplement Exercises

6. 设 x_1, x_2, x_3 服从均匀分布 $U(0,\theta)$，试证 $\frac{4}{3}x_{(3)}$ 及 $4x_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量，哪个更有效？

Solution

证　由 $X \sim U(0,\theta)$ 可知 $x_{(1)}, x_{(3)}$ 的密度函数分别为

$$f_1(x) = 3\cdot\left(\frac{\theta - x}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta^3}(\theta - x)^2, 0 < x < \theta,$$

$$f_3(x) = 3\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta^3}x^2, 0 < x < \theta,$$

从而

$$Ex_{(1)} = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x(\theta - x)^2 dx = \frac{\theta}{4}, Ex_{(3)} = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3 dx = \frac{3}{4}\theta,$$

故,由 $E(4x_{(1)}) = \theta, E\left[\frac{4}{3}x_{(3)}\right] = \theta$ 知两者均为 θ 的无偏估计.

又可算得

$$Ex_{(1)}^2 = \frac{1}{10}\theta^2, Ex_{(3)}^2 = \frac{3}{5}\theta^2,$$

从而

$$\mathrm{Var}(4x_{(1)}) = \frac{3}{5}\theta^2, \mathrm{Var}\left(\frac{4}{3}x_{(3)}\right) = \frac{\theta^2}{15}$$

故 $\mathrm{Var}\left(\frac{4}{3}x_{(3)}\right) < \mathrm{Var}(4x_{(1)})$,即 $\frac{4}{3}x_{(3)}$ 更有效.

Supplement Exercises

9. 设有 k 台仪器，已知用第 i 台仪器测量时，测定值总体的标准差为 σ_i $(i=1,2,\cdots,k)$. 用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次，分别得到 $x_1,\cdots,x_k$，设仪器都没有系统误差. 问 $a_1,\cdots,a_k$ 应取何值，方能使 $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ 成为 θ 的无偏估计，且方差达到最小？

Supplement Exercises

Solution

解 若要使 $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{k}a_i x_i$ 为 θ 的无偏估计，即

$$E(\hat{\theta})=E\left(\sum_{i=1}^{k}a_i x_i\right)=a_1\theta+\cdots+a_k\theta=\theta\sum_{i=1}^{k}a_i=\theta,$$

则必须有 $\sum_{i=1}^{k}a_i=1$，此时，

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i x_i\right)=a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_k^2\sigma_k^2.$$

因此，问题转化为在 $\sum_{i=1}^{k}a_i=1$ 的条件下，求 $\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2$ 的极小值.

令 $f(a_1,\cdots,a_k)=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\sigma_i^2-\lambda\left(\sum_{i=1}^{k}a_i-1\right)$，由

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,k \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0,$$

得到

Solution

$$\begin{cases} 2a_i\sigma_i^2 - \lambda = 0, & ① \\ \sum_{i=1}^{k} a_i = 1, & ② \end{cases}$$

从①中可以得到 $a_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$，代入②中，解出 $\lambda = \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2\sigma_i^2}\right)^{-1}$，从而

$$a_i = \frac{1}{\sigma_i^2}\Big/\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sigma_j^2}, \quad i = 1,2,\cdots,k.$$

Supplement Exercises

13. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是取自均匀分布总体 $U(\theta_1,\theta_2)$ 的一个样本，若分别取 $\hat{\theta}_1=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$ 和 $\hat{\theta}_2=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$ 作为 θ_1,θ_2 的估计量，问 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是否为 θ_1,θ_2 的无偏估计量？如果不是，如何修正才能获得 θ_1,θ_2 的无偏估计.

Supplement Exercises

Solution

解 令 $Y=\dfrac{X-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$，则 $Y\sim U(0,1)$，记 $y_{(1)},\cdots,y_{(n)}$ 为样本相应的次序统计量，于是有 $Ey_{(1)}=\dfrac{1}{n+1}$，$Ey_{(n)}=\dfrac{n}{n+1}$，从而

$$E\hat{\theta}_1=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)\frac{1}{n+1}=\frac{\theta_2+n\theta_1}{n+1},$$

$$E\hat{\theta}_2=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)\frac{n}{n+1}=\frac{n\theta_2+\theta_1}{n+1},$$

可见 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 不是 θ_1,θ_2 的无偏估计量. 由

Supplement Exercises

Solution

$$\begin{cases} n\theta_1+\theta_2=(n+1)Ex_{(1)},\\ \theta_1+n\theta_2=(n+1)Ex_{(n)},\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{nEx_{(1)}-Ex_{(n)}}{n-1},\\ \theta_2=\dfrac{nEx_{(n)}-Ex_{(1)}}{n-1},\end{cases}$$

因而 $\hat{\theta}_1=\dfrac{nx_{(1)}-x_{(n)}}{n-1}$, $\hat{\theta}_2=\dfrac{nx_{(n)}-x_{(1)}}{n-1}$ 是 θ_1,θ_2 的无偏估计量.

Supplement Exercises

9. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 独立同分布，$Ex_i = \mu$，$Var(x_i) < +\infty$，证明：$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i$ 是 μ 的相合估计。

Solution

证　由于

$$E(\hat{\mu}) = \frac{2\mu}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{2\mu}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \mu,$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \frac{4\mathrm{Var}(x_1)}{n^2(n+1)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{4\mathrm{Var}(x_1)}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to 0 \ (n \to +\infty).$$

这就证明了 $\hat{\mu} = \dfrac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i x_i$ 是 μ 的相合估计.

Supplement Exercises

7. 总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$，其中 $\theta > 0$ 是未知参数，又 $x_1, \cdots, x_n$ 为取自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值。

(1) 证明 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计和相合估计；

(2) 求 θ 的最大似然估计，它是无偏估计吗？是相合估计吗？

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$，则 $E(X) = \frac{3\theta}{2}$，$\mathrm{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}$，从而

$$E(\bar{x}) = \frac{3\theta}{2}, \mathrm{Var}(\bar{x}) = \frac{\theta^2}{12n}$$

于是，$E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3}E(\bar{x}) = \theta$，这说明 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{x}$ 是参数 θ 的无偏估计. 进一步，

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{4}{9} \times \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{27n} \to 0.$$

这就证明了 $\hat{\theta}$ 也是 θ 的相合估计.

Supplement Exercises

8. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是来自密度函数为 $p(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}, x>\theta$ 的样本。

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_1$，它是否是相合估计？是否是无偏估计？

(2) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2$，它是否是相合估计？是否是无偏估计？

Supplement Exercises

Solution

解　(1) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[e^{-(x_i-\theta)}I_{\{x_i>\theta\}}\right]=\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta\right]I_{\{x_{(1)}>\theta\}}.$$

显然 $L(\theta)$ 在示性函数为 1 的条件下是 θ 的严增函数，因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_1=x_{(1)}$.

又 $x_{(1)}$ 的密度函数为 $f(x)=ne^{-n(x-\theta)},x>\theta$，故

$$E(\hat{\theta}_1)=\int_{\theta}^{+\infty}xne^{-n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}(t+\theta)ne^{-nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}+\theta,$$

故 $\hat{\theta}_1$ 不是 θ 的无偏估计，但是 θ 的渐近无偏估计. 由于 $E(\hat{\theta}_1)\to\theta(n\to+\infty)$ 且

Supplement Exercises

Solution

$$E(\hat{\theta}_1^2) = \int_\theta^{+\infty} x^2 n e^{-n(x-\theta)}\,dx = \int_0^{+\infty} (t^2 + 2\theta t + \theta^2) n e^{-nt}\,dt = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n}\theta + \theta^2,$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 - \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 = \frac{1}{n^2} \to 0,$$

这说明 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的相合估计.

(2) 由于 $E(X) = \int_\theta^{+\infty} x e^{-(x-\theta)}\,dx = \theta + 1$，这给出 $\theta = EX - 1$，所以 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_2 = \bar{x} - 1.$$

又 $E(X^2) = \int_\theta^{+\infty} x^2 e^{-(x-\theta)}\,dx = \theta^2 + 2\theta + 2$，所以 $\operatorname{Var}(X) = 1$，从而有

$$E(\hat{\theta}_2) = E(\bar{x}) - 1 = \theta, \operatorname{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

这说明 $\hat{\theta}_2$ 既是 θ 的无偏估计，也是相合估计.

7.7 Let $X_1, \ldots, X_n$ be iid with one of two pdfs. If $\theta = 0$, then

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

while if $\theta = 1$, then

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{x}) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find the MLE of θ.

Solution

7.7 $L(0|\mathbf{x}) = 1$, $0 < x_i < 1$, and $L(1|\mathbf{x}) = \prod_i 1/(2\sqrt{x_i})$, $0 < x_i < 1$. Thus, the MLE is 0 if $1 \geq \prod_i 1/(2\sqrt{x_i})$, and the MLE is 1 if $1 < \prod_i 1/(2\sqrt{x_i})$.

Supplement Exercises

7.8 One observation, X, is taken from a $n(0, \sigma^2)$ population.

(a) Find an unbiased estimator of σ^2.

(b) Find the MLE of σ.

(c) Discuss how the method of moments estimator of σ might be found.

Supplement Exercises

Solution

7.8 a. $\mathrm{E}X^2 = \operatorname{Var} X + \mu^2 = \sigma^2$. Therefore X^2 is an unbiased estimator of σ^2.

b.

$$
\begin{aligned}
L(\sigma|x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}. \quad \log L(\sigma|x) = \log(2\pi)^{-1/2} - \log\sigma - x^2/(2\sigma^2). \\
\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{x^2}{\sigma^3} \stackrel{\text{set}}{=} 0 \Rightarrow \hat{\sigma} X^2 = \hat{\sigma}^3 \Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{X^2} = |X|. \\
\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} &= \frac{-3x^2\sigma^2}{\sigma^6} + \frac{1}{\sigma^2}, \text{ which is negative at } \hat{\sigma} = |x|.
\end{aligned}
$$

Thus, $\hat{\sigma} = |x|$ is a local maximum. Because it is the only place where the first derivative is zero, it is also a global maximum.

c. Because $\mathrm{E}X = 0$ is known, just equate $\mathrm{E}X^2 = \sigma^2 = \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{1} X_i^2 = X^2 \Rightarrow \hat{\sigma} = |X|$.

Supplement Exercises

7.13 Let $X_1, \ldots, X_n$ be a sample from a population with double exponential pdf

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Find the MLE of θ. (*Hint:* Consider the case of even n separate from that of odd n, and find the MLE in terms of the order statistics. A complete treatment of this problem is given in Norton 1984.)

Supplement Exercises

Solution

7.13 $L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_i \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|x_i-\theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_i |x_i-\theta|}$, so the MLE minimizes $\sum_i |x_i - \theta| = \sum_i |x_{(i)} - \theta|$, where $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ are the order statistics. For $x_{(j)} \le \theta \le x_{(j+1)}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{(i)} - \theta| = \sum_{i=1}^{j} (\theta - x_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^{n} (x_{(i)} - \theta) = (2j - n)\theta - \sum_{i=1}^{j} x_{(i)} + \sum_{i=j+1}^{n} x_{(i)}.$$

Solution

This is a linear function of θ that decreases for $j < n/2$ and increases for $j > n/2$. If n is even, $2j - n = 0$ if $j = n/2$. So the likelihood is constant between $x_{(n/2)}$ and $x_{((n/2)+1)}$, and any value in this interval is the MLE. Usually the midpoint of this interval is taken as the MLE. If n is odd, the likelihood is minimized at $\hat{\theta} = x_{((n+1)/2)}$.

Supplement Exercises

1. 某厂生产的化纤强度服从正态分布，长期以来其标准差稳定在 $\sigma=0.85$，现抽取了一个容量为 $n=25$ 的样本，测定其强度，算得样本均值为 $\bar{x}=2.25$，试求这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 这是方差已知时正态均值的区间估计问题. 由题设条件 $1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$, 查表知 $u_{0.975}=1.96$, 于是这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]=[2.25-1.96\times 0.85/\sqrt{25},2.25+1.96\times 0.85/\sqrt{25}]=[2.25-0.3332,2.25+0.3332],$$

即这批化纤平均强度的置信水平为 0.95 的置信区间为[1.9168,2.5832].

Supplement Exercises

2. 总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，问样本容量 n 取多大时才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度不大于 k.

Solution

解 由已知条件得 μ 的 0.95 置信区间为

$$[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}],$$

其区间长度为 $2u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$，若使 $2u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\leqslant k$，只需

$$n\geqslant(2/k)^2\sigma^2u_{1-\alpha/2}^2.$$

由于 $u_{1-\alpha/2}=1.96$，故 $n\geqslant(2/k)^2\sigma^2 1.96^2=\left(\frac{3.92\sigma}{k}\right)^2$，即样本容量 n 至少取 $\left(\frac{3.92\sigma}{k}\right)^2$ 时，才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度不大于 k.

Supplement Exercises

4. 用一个仪表测量某一物理量 9 次，得样本均值 $\bar{x}=56.32$，样本标准差 $s=0.22$.

(1) 测量标准差 σ 大小反映了测量仪表的精度，试求 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间；

(2) 求该物理量真值的置信水平为 0.99 的置信区间.

Solution

解 (1) 此处 $(n-1)s^2 = 8 \times 0.22^2 = 0.387\,2$，查表知 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.179\,7$，$\chi^2_{0.025}(8) = 17.534\,5$，$\sigma^2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right] = \left[\frac{0.387\,2}{17.534\,5}, \frac{0.387\,2}{2.179\,7}\right] = [0.022\,1, 0.177\,6]$$

从而 σ 的置信水平为0.95 的置信区间[0.148 7, 0.421 5]。

Supplement Exercises

Solution

(2) 当 σ 未知时，μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}\right].$$

查表得 $t_{1-0.005}(8) = 3.3554$，因而 μ 的置信水平为 0.99 的置信区间为

$$\begin{aligned}&[56.32 - 3.3554 \times 0.22/\sqrt{9}, 56.32 + 3.3554 \times 0.22/\sqrt{9}]\\ &= [56.0739, 56.5661].\end{aligned}$$

Supplement Exercises

6. 在一批货物中随机抽取 80 件，发现有 11 件不合格品，试求这批货物的不合格品率的置信水平为 0.90 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解　此处 $n=80$ 较大，可用正态分布求其近似置信区间。不合格品率的 $1-\alpha$ 近似置信区间为

$$\left[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}},\bar{x}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right].$$

此处 $\bar{x}=\frac{11}{80}=0.1375$，$u_{0.95}=1.645$，因而不合格品率的置信水平为 0.90 的

Supplement Exercises

Solution

置信区间为

$$\left[0.1375 - 1.645\sqrt{\frac{0.1375 \times 0.8625}{80}}, 0.1375 + 1.645\sqrt{\frac{0.1375 \times 0.8625}{80}}\right]$$

$= [0.0742, 0.2008]$.

Supplement Exercises

9. 设从总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中分别抽取容量为 $n_1 = 10, n_2 = 15$ 的独立样本，可计算得 $\bar{x} = 82, s_x^2 = 56.5, \bar{y} = 76, s_y^2 = 52.4$.

(1) 若已知 $\sigma_1^2 = 64, \sigma_2^2 = 49$，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(2) 若已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(3) 若对 σ_1^2, σ_2^2 一无所知，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间；

(4) 求 σ_1^2 / σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 (1) 在 σ_1^2,σ_2^2 都已知时，$\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}-\bar{y}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

经计算 $\bar{x}-\bar{y}=6$，查表得 $u_{0.975}=1.96$，因而 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[6-1.96\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{49}{15}},\ 6+1.96\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{49}{15}}\right]=[-0.093\,9,12.093\,9].$$

(2) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

Solution

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}s_w t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\bar{x}-\bar{y}+\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}s_w t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right].$$

这里 $s_w^2=\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}=\frac{9\times 56.5+14\times 52.4}{23}=54.004\ 3$，而 $t_{0.975}(23)=2.068\ 7$，因而 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[82-76-2.068\ 7\sqrt{54.004\ 3}\sqrt{\frac{10+15}{10\times 15}},82-76+2.068\ 7\sqrt{54.004\ 3}\sqrt{\frac{10+15}{10\times 15}}\right]=[-0.206\ 3,12.206\ 3].$$

Supplement Exercises

Solution

(3) 当 σ_1^2,σ_2^2 未知时，由于两个样本量不是很大，故可采用一般场合下的近似置信区间，即 $\mu_1-\mu_2$ 的 $1-\alpha$ 的近似置信区间为

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-s_0 t_{1-\alpha/2}(l),\ \bar{x}-\bar{y}+s_0 t_{1-\alpha/2}(l)\right],$$

这里

$$s_0^2=\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}=\frac{56.5}{10}+\frac{52.4}{15}=9.143\,3,$$

$$l=\frac{s_0^4}{\dfrac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)}+\dfrac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}=\frac{9.143\,3^2}{\dfrac{56.5^2}{900}+\dfrac{52.4^2}{3\,150}}=18.919\,9\doteq 19$$

又查表得 $t_{0.975}(19)=2.093\,0$，因而 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为95% 的近似置信区间为

$$\left[82-76-2.093\,0\sqrt{9.143\,3},\ 82-76+2.093\,0\sqrt{9.143\,3}\right]$$
$$=[-0.328\,8,\ 12.328\,8].$$

Supplement Exercises

Solution

(4) σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为95% 的置信区间为

$$\left[\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right].$$

查表得 $F_{0.975}(9,14)=3.21$, $F_{0.025}(9,14)=\dfrac{1}{F_{0.975}(14,9)}=\dfrac{1}{3.80}$, 因而 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为95% 的置信区间为

$$\left[\frac{56.5}{52.4}\cdot\frac{1}{3.21},\frac{56.5}{52.4}\cdot 3.80\right]=[0.3359,4.0973].$$

Supplement Exercises

10. 假设人体身高服从正态分布，今抽测甲、乙两地区 18 岁 ～ 25 岁女青年身高得数据如下：甲地区抽取 10 名，样本均值 1.64 m，样本标准差 0.2 m；乙地区抽取 10 名，样本均值 1.62 m，样本标准差 0.4 m. 求：

(1) 两正态总体方差比的置信水平为 95% 的置信区间；

(2) 两正态总体均值差的置信水平为 95% 的置信区间.

Supplement Exercises

Solution

解 设 $x_1,\cdots,x_{10}$ 为甲地区抽取的女青年身高，$y_1,\cdots,y_{10}$ 为乙地区抽取的女青年身高，由题设条件，$\bar{x}=1.64, s_x=0.2, \bar{y}=1.62, s_y=0.4$.

(1) $\dfrac{\sigma_{甲}^2}{\sigma_{乙}^2}$ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)},\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right].$$

此处 $\alpha=0.05$, $m=n=10$, 查表得 $F_{0.975}(9,9)=4.03$, $F_{0.025}=\dfrac{1}{F_{0.975}(9,9)}=\dfrac{1}{4.03}$. 由此，$\dfrac{\sigma_{甲}^2}{\sigma_{乙}^2}$ 的置信水平为95% 的置信区间为

$$\left[\frac{0.2^2}{0.4^2}\cdot\frac{1}{4.03},\frac{0.2^2}{0.4^2}\cdot 4.03\right]=[0.0620,1.0075].$$

Solution

(2) 由(1), $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为95%的置信区间包含1,因此有一定理由假定两个正态总体的方差相等,此时,

$$s_w^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}=\frac{9\times 0.2^2+9\times 0.4^2}{10+10-2}=\frac{1.8}{18}=0.1,$$

查表得 $t_{0.975}(18)=2.100\,9$,故两正态总体均值差的置信水平为95%的置信区间为

$$\left[1.64-1.62-2.100\,9\sqrt{0.1}\sqrt{\frac{10+10}{10\times 10}},\ 1.64-1.62+2.100\,9\sqrt{0.1}\sqrt{\frac{10+10}{10\times 10}}\right]$$

$=[-0.277\,1, 0.317\,1]$.

Supplement Exercises

Solution

还有另一种解法就是不对方差相等作假定，而采用近似方法求均值差的置信区间，由于

$$s_0^2 = \frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n} = \frac{0.04}{10} + \frac{0.16}{10} = 0.02, \quad l = \frac{0.02^2}{\frac{0.04^2}{900} + \frac{0.16^2}{900}} = 13,$$

查表知 $t_{0.975}(13) = 2.1604$，从而两正态总体均值差的置信水平为95%的近似置信区间为

$$[1.64 - 1.62 - 2.1604\sqrt{0.02}, 1.64 - 1.62 + 2.1604\sqrt{0.02}]$$
$$= [-0.2855, 0.3255].$$

这二个置信区间相差不算太小，所以在应用中条件"方差相等"是否成立是要加以考证的.

Supplement Exercises

20. 随机选取 9 发炮弹，测得炮弹的炮口速度的样本标准差 $s=11$ m/s，若炮弹的炮口速度服从正态分布，求其标准差 σ 的 0.95 置信上限。

Solution

解　在正态分布下，对样本方差 s^2 有 $\frac{8s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$，从而有 $P\left(\frac{8s^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_\alpha(8)\right) = 1-\alpha$，等价地，$P\left(\sigma \leq \sqrt{\frac{8s^2}{\chi^2_\alpha(8)}}\right) = 1-\alpha$，故标准差 σ 的 $1-\alpha$ 置信上限为

$$\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{8s^2}{\chi^2_\alpha(8)}}.$$

现 $\alpha = 0.05$，查表知 $\chi^2_{0.05}(8) = 2.7326$，故标准差 σ 的 0.95 置信上限为

$$\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{8 \times 11^2}{2.7326}} = 18.82.$$

Thank you!