

Linear Algebra



Instructor: Jing YAO

6

Positive Definite Matrices (正定矩阵)

6.2

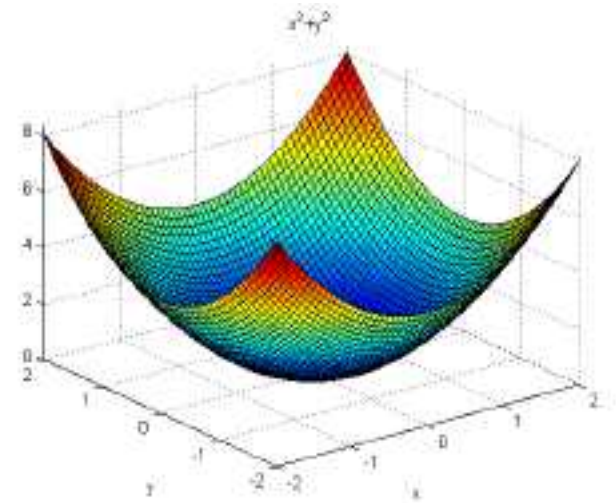
-补充内容

POSITIVE DEFINITENESS (正定性)

Diagonalization by Congruence
Transformation

Tests for Negative Definiteness

Applications of Definiteness



I. Diagonalization by Congruence Transformation

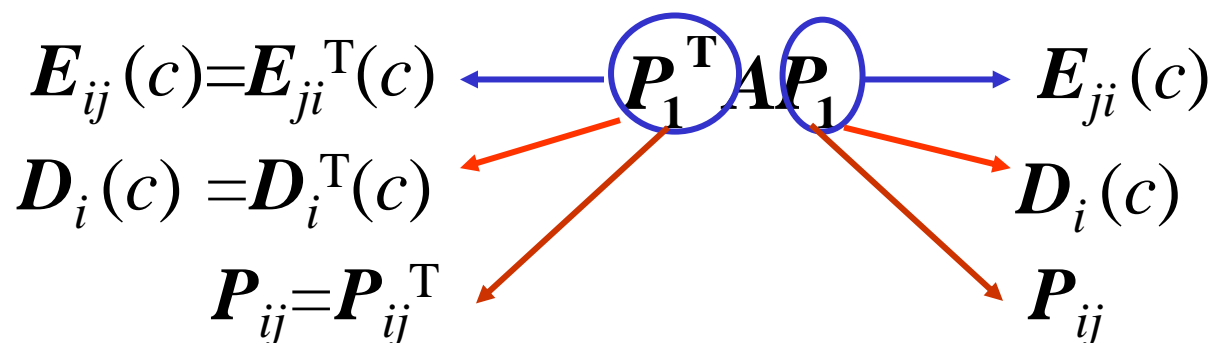
[合同变换法(初等变换法)化二次型为标准形]

任何可逆矩阵可表示为一系列初等矩阵的乘积.

思路： 任意一个 n 阶实对称矩阵 A , 都可以通过一系列相同类型的初等行、列变换化成对角矩阵.

$$C^T A C = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

设 $C = P_1 P_2 \dots P_k$,



定理 对任意一个 n 阶实对称矩阵 A , 都存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

析 设 A 是 n 阶实对称矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(1) 如果 $a_{11} \neq 0$, 由于 $a_{1j} = a_{j1}$ ($j=1, 2, \dots, n$), 因此对 A 做相同类型的行、列倍加变换, 可将第 1 行与第 1 列的其他元素全化为零, 得

$$C^T A C = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix}$$

其中 A_1 仍为 $n-1$ 阶实对称矩阵.

(2) 如果 $a_{11}=0$, 但存在 $a_{ii} \neq 0$, 先将第1列与第*i*列对换, 第1行与第*i*行对换, 就把 a_{ii} 换到第1行第1列的位置, 化为(1).

(3) 如果 $a_{ii}=0 (i=1,2,\dots,n)$, $\exists a_{ij} \neq 0$, 可将第*j*列加到第*i*列, 将第*j*行加到第*i*行, 第*i*行第*i*列的元素化为 $2a_{ij} \neq 0$, 就化为(2).

用数学归纳法可以证明: 对任一个*n*阶实对称矩阵*A*, 都存在初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_k , 使得

$$P_k^T \cdots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_k = C^T A C = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

其中 $C = P_1 P_2 \cdots P_k = I P_1 P_2 \cdots P_k$

即对*A*做的列变换同样施加于单位矩阵*I*, 即得变换矩阵*C*.

The Principal Axes Theorem in n dimensions

Recall Example 5 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$

Converting this quadratic form into a standard form is just the same as:

(See Section 5.5 Example 2) Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Find an orthogonal matrix \mathbf{Q} such that $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$ is a diagonal matrix.

$$\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3] = \begin{bmatrix} -2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 & 1/3 \\ \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{bmatrix}.$$

So

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

例1 用初等变换法将Example 5的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

化为标准形, 并求所做的坐标变换 $x = Cy$ 的变换矩阵 C .

解 将二次型的矩阵 A 与单位矩阵 I 上下排列, 对 A 做相同类型的初等行、列变换使之化为对角阵, 同样的初等列变换, 将 I 化为 C .

(以下 c_i , r_i 分别表示 第 i 列, 第 i 行)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & & & \\ 2 & 5 & -4 & & & \\ -2 & -4 & 5 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} c_2 + (-1)c_1 \\ c_3 + c_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & & & \\ 2 & 3 & -2 & & & \\ -2 & -2 & 3 & & & \\ \hline 1 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} r_2 + (-1)r_1 \\ r_3 + r_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 3 & -2 & & & \\ 0 & -2 & 3 & & & \\ \hline 1 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right]$$

no operation

$$\begin{array}{l} c_3 + \frac{2}{3}c_2 \\ r_3 + \frac{2}{3}r_2 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 3 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & & & \\ \hline 1 & -1 & \frac{1}{3} & & & \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

上面的变换可用分块矩阵表示,

$$\text{即 } \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \text{diag}(2, 3, \frac{5}{3})$$

做坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{则 } \mathbf{y}^T \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{y} = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

注: 用正交变换法得到的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$.
标准形并不唯一! 但标准形的正负号个数是不变量.

例2 用配方法把三元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

化为标准形, 并求所用的坐标变换 $\mathbf{x}=\mathbf{C}\mathbf{y}$ 及变换矩阵 \mathbf{C} .

解 先按 x_1^2 及含有 x_1 的混合项配成完全平方, 即

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3) \\ &= \underline{2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2]} - 2(x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + \underline{3x_2^2} + 3x_3^2 \underline{-4x_2x_3} \end{aligned}$$

在上式中, 再对 $3x_2^2 - 4x_2x_3$ 配成完全平方

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

变换矩阵 C 的特点?

主对角元为1的
上三角矩阵

代入上式, 得二次型的标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

从

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{中解出} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

就是坐标变换 $x=Cy$, 式中的
矩阵就是变换矩阵 C .

与初等变换方法得到的 C 相同

对一般的 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的配方法:

- 若 x_1^2 项的系数不为0, 就按上例配方.
- 如果 x_1^2 项的系数为0, 而 x_2^2 项的系数不为0, 就从 x_2 开始配方.
- 如果所有平方项的系数都为0, 二次型中只含混合项, 就按下例的方法化为标准形
—— “无中生有” : 人为构造使之出现平方项

例3 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

为标准形, 并求所做的坐标变换.

解 因为没有二次项, 先利用平方差公式
做如下变换:

“无中生有”

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

记作

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{y}$$

变换矩阵 \mathbf{C}_1 的特点?

\mathbf{C}_1 为分块对角矩阵

将(1)式代入二次型, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 \quad (2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3$$

再用例2的配方法得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2(y_2 + y_3)^2 + 2y_3^2$$

$$\text{令 } \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{解出} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

记为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{z}$$

主对角元为1的
上三角矩阵 (3)

得二次型的标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2$

即

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{z}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

坐标变换为

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{y} = \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_2 \mathbf{z}) = (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2) \mathbf{z}$$

变换矩阵

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

任何 n 元二次型都可用配方法化为标准形.

相应的变换矩阵是主对角元为 1 的上三角矩阵和例3中的对角块矩阵 \mathbf{C}_1 , 或者是这两类矩阵的乘积.

II. Tests for Negative Definiteness

定理 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则下列命题

等价:

- (1) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 是负定二次型 (或 A 是负定矩阵);
- (2) A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都小于零;
- (3) A 的 n 个主元 d_1, d_2, \dots, d_n 都小于零(无行交换);
- (4) A 的奇数阶顺序主子式都小于零, 偶数阶顺序

主子式都大于零;

- (5) 存在可逆矩阵 R , 使得 $A = -R^T R$.

III. Some Applications of Definiteness

二次型理论的应用:

二次曲面分类

求多元函数极值

证明不等式

.....

该方法证明不等式的基本思路:
首先构造二次型, 然后利用二次型半正定性的定义或等价条件, 判断二次型(矩阵)为半正定, 从而得到不等式.

例4 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 试证 $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

证 要证明的不等式可写成 $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$,

所以只需证矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 半正定.

由于A的一阶、二阶主子式分别为

$$1 > 0, \quad |A| = 0,$$

所以 A 半正定,

从而二次型

$$f(a, b) = (a, b) A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 - 2ab$$

半正定, 得证.

例5 (Cauchy不等式) 设 $a_i, b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为任意实数, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$



证 记

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n (a_i x_1 + b_i x_2)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x_1^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x_1 x_2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) x_2^2$$

因为对于任意 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1, x_2) \geq 0$,

故关于 x_1, x_2 的二次型 $f(x_1, x_2)$ 是半正定的.

因此, 该二次型矩阵的行列式大于或等于0, 即

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} \geq 0$$

故得

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Key words:

Tests for Positive Definiteness;
Semidefinite Matrices;
The Principal Axes Theorem;
The Law of Inertia

Homework

See Blackboard

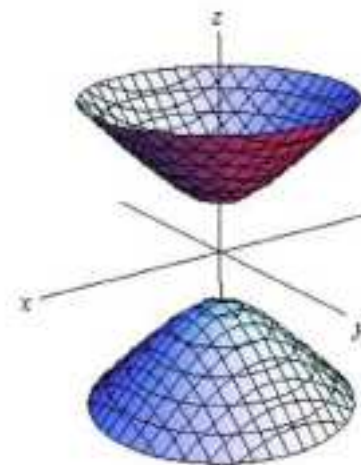
补充作业（必做）：见后续



补充作业

1. (1) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 (A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

1. (2) 设 A 为三阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图所示, 则 A 的正特征值的个数为().



补充作业

2. 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\xi^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 \mathbf{P} .

3. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 \mathbf{Q} 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I) 求矩阵 \mathbf{A} . (II) 证明 $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ 为正定矩阵, 其中 \mathbf{I} 为三阶单位矩阵.

补充作业

4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1 - a)x_1^2 + (1 - a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1 + a)x_1x_2$ 的秩为2.

(I) 求 a 的值.

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

5. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a - 1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(I) 求二次型 f 的矩阵所有的特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.