

高压油管的压力控制模型

摘要

本文主要研究高压油管的压力控制，根据周期内油管的初末状态相同等约束条件，建立了基于微分方程和非线性规划为目标的压力稳定性模型，借助模型离散化然后用遍历来进行求数值解。

在问题一中，其第一小问要求通过调整高压油泵阀每次的开启时间，以此来使得油管内的压力稳定在 100MPa 左右。对此，我们对周期和开阀时间进行遍历，以周期内的油管压力平均变化幅度最小为目标，根据一个周期内初末状态油管内燃油的质量与压力应保持不变的原则，充分考虑高压油泵，喷油嘴在不同时间对油管内压力的影响，建立了基于微分方程约束条件的动态单目标规划模型，然后对求解过程进行简化。通过对数据离散化处理，求得油管内压力在 100MPa 时，高压油泵单向阀的工作周期为 100ms，在一个周期内的开阀时间为 $[0, 2.9\text{ms}]$ ，高压油管内的压力的变化区间为 $[94.7781, 100.1187]$ MPa。同理，当油管压力在 150MPa 时，我们分别对周期为 2s、5s、10s 的开阀时间内进行计算，其结果分别为 102ms、255ms、510ms。

在问题二中，我们先对附件 1, 2 的数据进行拟合处理，得出极角与极径、针阀运动距离与时间的关系，然后对高压油泵的结构和极角等进行分析，得柱塞内燃油的高度与角速度，时间的关系。同样得对针阀结构进行几何分析，得出喷油嘴燃油喷出速率与时间的关系，最后再以油管内的燃油压力和质量在周期初末状态不变的原则，以油管的压力的平均变化幅度为目标，同样建立了基于微分的动态规划模型，最终通过启发式算法解出角速度为 69.8rad/s, 即 11.1 圈/s，此时周期为 90.0170ms。

在问题三中，由于减压阀的作用是用于减压，故而建立油泵压力、油管压力与减压阀开阀时间长久和开阀时机的关系，将两个喷油嘴设置成从不同时间开始工作，将这两因素加入问题二的模型中，以此对模型进行改进，在供油方案保持不变的情况下，即凸轮角速度为 69.8rad/s 下，得出减压阀的控制方案，为在一个工作周期内的开启时间为 $[35.36, 45.00]\text{ms}$ 。加入减压阀之后高压油管的压力波动指标从 3.223 提高到 0.6975。

关键词：单目标规划 高压油管 压力控制 微分方程

一、问题的提出和重述

1.1 问题的提出

燃油进入和喷出高压油管是许多燃油发动机工作的基础,燃油进入和喷出的间歇性工作过程会导致高压油管内压力的变化,使得所喷出的燃油量出现偏差,从而影响发动机的工作效率。因此研究高压油管压力的精确控制对于提高燃油发动机的工作效率和降低能耗具有重要意义。

1.2 问题的重述

图 1 给出了某高压燃油系统的工作原理,燃油经过高压油泵从 A 处进入高压油管,再由喷口 B 喷出。



图 1 高压油管示意图

问题 1: 有某型号高压油管,已知高压油泵供油的参数和喷油器的工作规律与喷油速率,入口 A 处提供的压力恒为 160 MPa,高压油管内的初始压力为 100 MPa。需要求高压油泵单向阀每次开启的时长,才能尽可能使高压油管内压力稳定在 100 MPa 左右;如果要将高压油管内的压力从 100 MPa 增加到 150 MPa,且分别经过约 2 s、5 s 和 10 s 的调整过程后稳定在 150 MPa,单向阀开启的时长应如何调整。

问题2: 在图1的高压油管的基础上将恒压的高压油泵换成由凸轮驱动柱塞上下运动的高压油泵供油,当柱塞腔内压力大于高压油管内压力时,单向阀开启。喷油器喷嘴的结构如附录中图4 喷油器喷嘴放大后的示意图,同时给出柱塞腔与喷油器的尺寸参数,以及喷油器一个喷油周期的针阀升程与时间的关系,其它条件利用问题1中给出参数,要求确定凸轮的角速度,使得高压管内的压力尽量稳定在 100MPa。

问题3: 在问题2的基础上,再增加一个喷油嘴,每个喷嘴喷油规律相同,喷油和供油策略应如何调整。为了更加有效地控制高压油管的压力,在高压油管一端安装一个单向减压阀,单向减压阀出口为直径为1.4mm的圆,打开后高压油管内的燃油可以在压力下回流到外部低压油路中,从而使得高压油管内燃油的压力减小。请给出高压油泵和减压阀的控制方案。

二、问题的分析

2.1 问题一的分析

在问题一中,其要求高压油管内的压力保持在 100MPa 左右,我们以高压油管的压力稳定性作为主要目标。分析高压油管的工作原理,我们可以知道压力与密度有关系。同时在工作过程中高压油管的体积保持不变,故而随着压力的变化,高压油管内燃油密度也相应变化,故而油管内燃油的质量也发生变化。即质量和

压力变化有关。在体积不变的情况下，高压油管里面油的质量的变化主要与油泵的供油和喷油嘴的出油的质量有关，故而在假设油泵的开阀时间和周期后计算出周期内的高压油泵的供油和出油质量。最后以一个周期的初末状态油管的压力和燃油的质量相同等为约束条件，并以周期内的平均压力变化幅度尽可能小为主要目标，建立单目标的非线性的动态规划模型，最后解出最优解下的周期和开阀时间。

在将高压油管的初始压力从 100MPa 变到 150MPa 后，在以 2s、5s 和 10s 作为工作周期的过程中，由于只是对模型求解的参数变化，故而直接对其进行求解即可。

2.2 问题 2 的分析

问题二要求确定凸轮的角速度，而凸轮的角速度会通过影响高压油泵的压力来影响油管内的压力变化，同样的，喷油嘴上针阀的运动会影响其喷出的燃油的速率，进而影响油管内的压力变化。故而，我们通过对油泵和凸轮，针阀和喷油嘴进行几何分析，建立凸轮角速度与油泵内燃油高度，喷油嘴内的有效可流通面积与时间的关系。

接下来分析油泵内压力值与时间的关系，以及喷油嘴燃油的流通速率与时间，油管内密度的关系。最后以压力平均变化幅度最小为目标来建立基于微分方程组条件约束的单目标目标规划模型，求出最佳周期，回代后求出最佳角速度。

2.3 问题 3 的分析

在问题2的基础上，凸轮的工作规律与喷油器的工作规律不变，增加了一个喷油器与减压阀，而减压阀的作用是用于减压，故而对油管内压力影响主要体现在其开阀时间长久和开阀的时机，基于此建立联系。而对于喷油嘴来说，我们假设两个喷油嘴的工作周期不完全重合，初始工作时刻相隔一个常数，将其影响加入问题二的模型中，以此对模型进行改进，建立出新的目标规划模型，求解后得出新的控制方案。

三、模型的假设

1. 凸轮角速度恒定，跟活塞保持直接接触
2. 装置密闭效果好，不会发生泄露；
3. 燃油喷出到压力为 0.6MPa 的气缸中；
4. 装置温度保持不变；
5. 高压油泵开阀的控制时间的精度能达到 0.1ms.

四、符号及符号说明

| 符号 | 符号说明 |
|------|-----------------|
| E | 弹性模量 |
| V | 体积 |
| Q | 单位时间内流过小孔的燃油量 |
| T | 周期 |
| P | 压力 |
| I(T) | 一个工作周期内的稳定性尺度积分 |
| K(t) | t 时刻减压阀的燃油流通速率 |

| | |
|--------|--------------|
| ρ | 密度 |
| $m(t)$ | t 时刻下部件的质量 |
| $r(t)$ | t 时刻下凸轮的极径 |

注：未列出的符号及重复的符号以出现处为准

五、模型的建立

5.1 问题 1 模型建立与求解

5.1.1 模型建立

由一个周期的初末高压油管的压力和管内燃油里面质量保持不变，故而以此建立桥梁，寻找一周期内喷油嘴的出油质量和高压油泵的进油量，建立方程。

接下来是对喷油器喷出油量与时间的关系，由于喷油器的出油质量与出油的体积和管内密度有关，而出油的体积与出油速率和时间有关，其求解过程如下：

记高压供油泵与喷油器的一个协同工作周期时长为 T ，单位为 (ms)。

记 $Q_{1出}(t)$ 为喷油器 t 时刻的喷油速率，单位为 (mm^3/ms)，则有

$$Q_{1出}(t) = \begin{cases} Q'_{出}(t) & 0 < t \leq 2.4 \\ 0 & 2.4 < t \leq 100 \\ Q_{1出}(t-100) & 100 < t \end{cases} \quad (1-1)$$

其中 $Q'_{出}(t)$ 为下图中喷油器的喷油速率

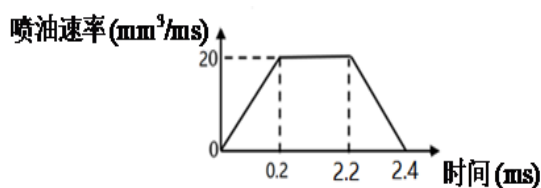


图 2 喷油速率示意图

$$Q'_{出}(t) = \begin{cases} 100t & 0 < t \leq 0.2 \\ 20 & 0.2 < t \leq 2.2 \\ 20-100t & 2.2 < t \leq 2.4 \end{cases}$$

参考微积分中微元法的思想，设 $[t, t+\Delta t]$ 时间段内，喷油器所喷出的燃油的质量 Δm ，单位为 (mg)。则 Δm 可用下式近似代替：

$$\Delta m = Q_{1出}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{管}(t) \quad (1-2)$$

其中 $\rho_{1管}(t)$ 表示工作周期内 t 时刻高压油管内的燃油密度。

因此，在整个工作周期内喷油器所喷出燃油的质量可以利用上式积分计算，同时考虑到高压油管压力对喷油器每次喷油质量的影响是随着时间变化的，因此得到喷油器在协同工作周期内 t 时刻的累计喷油质量计算公式：

$$m_{1\text{出}}(t) = \int_0^t Q_{1\text{出}}(x) \cdot \rho_{1\text{管}}(x) dx \quad (1-3)$$

其中 $m_{1\text{出}}(t)$ 为开始到 t 时刻总的喷油质量，且 $t \in [0, T]$ ， $x \in [0, t]$ 。

接下来建立燃油压力与燃油密度之间的联系：

由题目所给资料，燃油的压力变化量与密度变化量成正比，比例系数为 E/ρ ，

其中 ρ 为燃油的密度， E 为弹性模量，其与压力的关系见附件 3。并且当压力 P 为 100 MPa 时，燃油的密度为 0.850 mg/mm^3 。因此有：

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho}$$

其中 ΔP 、 $\Delta \rho$ 分别为燃油的压力变化量和密度变化量，考虑到燃油的压力和密度变化可以通过高压供油泵来进行精确控制，因此在实际的工作环境中燃油的压力与密度的取值可以近似认为是连续的，因此在 $\Delta P \rightarrow 0$ 、 $\Delta \rho \rightarrow 0$ 时，有：

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{E}{\rho} \text{ 变形后有, } \frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{E}, \text{ 则可记为 } \rho'(P) = \frac{\rho}{E} \quad (1-4)$$

利用附件 3 中的数据，做出了弹性模量与压力的关系图，并用 MATLAB 进行拟合结果如下

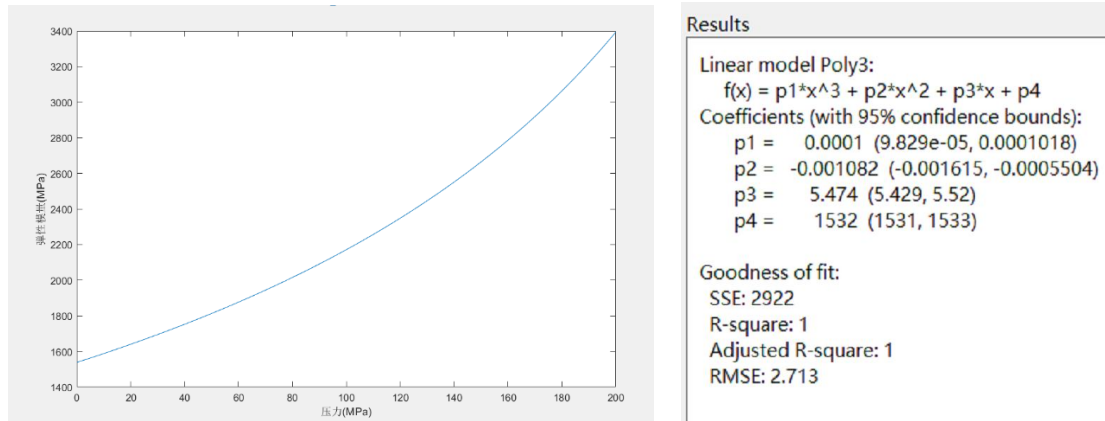


图 1-1 弹性模量与压力的关系拟合图

$$E(P) = 0.0001 \cdot P^3 - 0.001082 \cdot P^2 + 5.474 \cdot P + 1532 \quad (1-5)$$

其中拟合优度为 1，说明拟合效果非常好，所有的原始点数据都落在曲线上。因此可以建立典型的具有初值的常微分方程：

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{E(P)} \\ \rho(P_0) = 0.850 \\ P_0 = 100 \end{cases} \quad (1-6)$$

在本题中，压力 P 的取值范围为 $[0, 200]$ 。

接下来计算一个协同工作周期内， t 时刻的高压泵累计供油质量。由题目提供的资料，进出高压油管的流量为 $Q = CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$ ，其中 Q 为单位时间流过小孔的燃油量 (mm^3/ms)， $C = 0.85$ 为流量系数， A 为小孔的面积 (mm^2)， ΔP 为小孔两边的压力差 (MPa)， ρ 为高压侧燃油的密度 (mg/mm^3)。

因此有高压供油泵的供油速率为：

$$Q_{1\lambda}(t) = \begin{cases} C \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho_{160}}} & 0 < t \leq t_{\perp} \\ 0 & t_{\perp} \leq t \end{cases} \quad (1-7)$$

其中 t_{\perp} 为一个协同工作周期内单向阀的开启时长，一个周期内单向阀只开启一次进行供油，在系统的持续工作过程中，记单向阀的开启时刻为一个周期的起始时刻，则有 t_{\perp} 实际上就是在一个协同工作周期内单向阀每次的开启时长。

在本问中，高压泵供油压力恒为 160 MPa，而高压油管的压力稳定在 100 MPa，因此可以用 $\Delta P = 60 \text{ MPa}$ 近似代替，同时供油入口小孔直径为 1.4 mm，利用圆的面积公式可以得到： $A = 1.5394 \text{ mm}^2$ 。 $\rho(P_{160})$ 可通过解上述 (6) 式的常微分方程数值解法得到，我们利用 matlab 计算，最终得到： $\rho(P_{160}) = 0.8711 \text{ mg}/\text{mm}^3$ 。

在得到供油入口的恒定供油速率后，继续计算 t 时刻的高压泵累计供油质量，与 t 时刻喷油器的累计质量计算过程类似，可以得到：

$$m_{1\lambda}(t) = \int_0^t Q_{1\lambda}(x) \cdot \rho_{1\lambda}(x) dx \quad (1-8)$$

其中 $m_{1\lambda}(t)$ 为 t 时刻的累计喷油质量，且 $t \in [0, T]$ ， $x \in [0, t]$ 。

因此可以算出喷油器出油质量与时间的关系以及油泵进油质量随时间的关系。在一个完整的协同工作周期内， $m_{1\text{出}}(T)$ 与 $m_{1\lambda}(T)$ 分别表示整个周期内的喷油总量与供油总量，两者相等。在上面的公式中，高压油管内的密度是未知变量，为了优化求解过程，使得求解过程仅需考虑单变量，我们对高压油管内燃油的压

力与密度变化关系进行研究。

记 $m_{1\text{满}}$ 为压力 100 MPa 时高压油管内的总燃油质量。则在一个周期内 t 时刻高压油管内的燃油密度为：

$$\rho_{1\text{管}}(t) = \frac{m_{1\text{入}}(t) - m_{1\text{出}}(t) + m_{1\text{满}}}{V_{\text{管}}} \quad (1-9)$$

一个周期内 t 时刻高压油管内的燃油压力与密度关系为：

$$\frac{dP_{1\text{管}}(t)}{d\rho_{1\text{管}}(t)} = \frac{E(P_{1\text{管}}(t))}{\rho_{1\text{管}}(t)} \quad (1-10)$$

在管内压力所考虑的各因素都建立方程后，为了描述高压管内在周期的压力的稳定性，我们将其具化为平均压力变化幅度。对此，我们引入一个工作周期内的稳定性尺度积分：

$$I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T (P_{1\text{管}}(t) - P_{100})^2 dt \quad (1-11)$$

$I(T)$ 为周期 T 的高压油管压力稳定性， $P_{1\text{管}}(t)$ 为 t 时刻高压油管的压力， P_{100} 为

100MPa，我们从高压油管稳定性优化的角度考虑，希望能够得到一个周期 T^* ，

使得高压油管稳定性较好，利用上文中得到的公式结果 (1-1) ~ (1-11)，我们建立了单目标优化模型：

$$\begin{aligned} \min I(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T (P_{1\text{管}}(t) - P_{100})^2 dt \\ \text{s.t.} \quad &\left\{ \begin{array}{l} m_{1\text{出}}(t) = \int_0^t Q_{1\text{出}}(x) \cdot \rho_{1\text{管}}(x) dx \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{E(P)} \\ \rho(P_0) = 0.850 \\ P_0 = 100 \end{array} \right. \\ m_{1\text{入}}(t) = \int_0^t Q_{1\text{入}}(x) \cdot \rho_{1\text{泵}}(x) dx \\ \rho_{1\text{管}}(t) = \frac{m_{1\text{入}}(t) - m_{1\text{出}}(t) + m_{1\text{满}}}{V_{\text{管}}} \\ \frac{dP_{1\text{管}}(t)}{d\rho_{1\text{管}}(t)} = \frac{E(P_{1\text{管}}(t))}{\rho_{1\text{管}}(t)} \\ m_{1\text{入}}(T) = m_{1\text{出}}(T) \\ 0 < T, t \in [0, T], x \in [0, t] \\ 0 < t_{\perp} < T \\ 10 \leq T - t_{\perp} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1-12)$$

在实际情况中，为了使得高压油泵与喷油器的协同工作的周期可持续，对于

优化模型所得到的解 T 还需要匹配喷油器的工作规律,即 T 要取 100ms 的整数倍,即:

$$T = \begin{cases} T & T \bmod 100 = 0 \\ \lfloor T \rfloor + 100 & T \bmod 100 \neq 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

其中 $\lfloor T \rfloor$ 表示向下取整, \bmod 表示取余数。

5.1.2 模型求解

在问题 1 所建立的单目标规划模型 (1-12), 微分方程之间的关系与约束条件较为复杂, 求最优解的代价十分巨大, 因此本文希望利用微分方程的数值解法结合优化算法求得近似最优解。

对于具有初值的常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{E(P)} \\ \rho(P_0) = 0.850 \\ P_0 = 100 \end{cases}$$

我们采用龙格库塔法[3]计算方程的数值解, 并对数值解进行曲线拟合, 其中有两种拟合结果的拟合优度超过 99.9%, 分别如下:

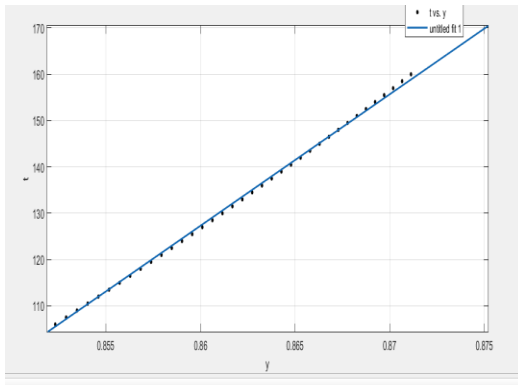


图 1-3 线性拟合结果图像

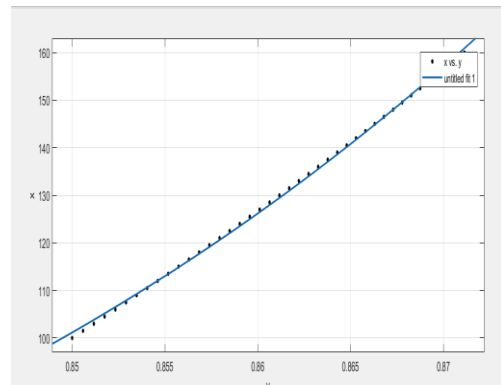


图 1-4 非线性拟合结果图像

线性拟合结果: $P = 2837\rho - 2312$, 拟合优度为 0.9991, 和方差为 11.6。

非线性拟合结果: $P = 2183\rho^{18.9}$, 拟合优度为 0.9992, 和方差为 10.1。

又因为 P 恒大于 0, 而线性有时求出的压强会出现负数, 与现实不符, 故而在求解过程中, 我们将在大部分情况下采取非线性拟合的方程。

在对不易求得解析解的微分方程进行数值求解之后, 我们发现如果以连续变量求解积分方程不仅难以找到解, 而且在我们尝试求解的过程中还会出现病态现象, 故我们对模型方程进行离散化处理之后再行求解。

离散化求解过程的思想如下:

将连续区间内的积分拆解为一个较小的值的累加, 最后对模型进行循环计

算，以此得出最优解。其代码见附录，流程如下：

积分离散化的求解过程

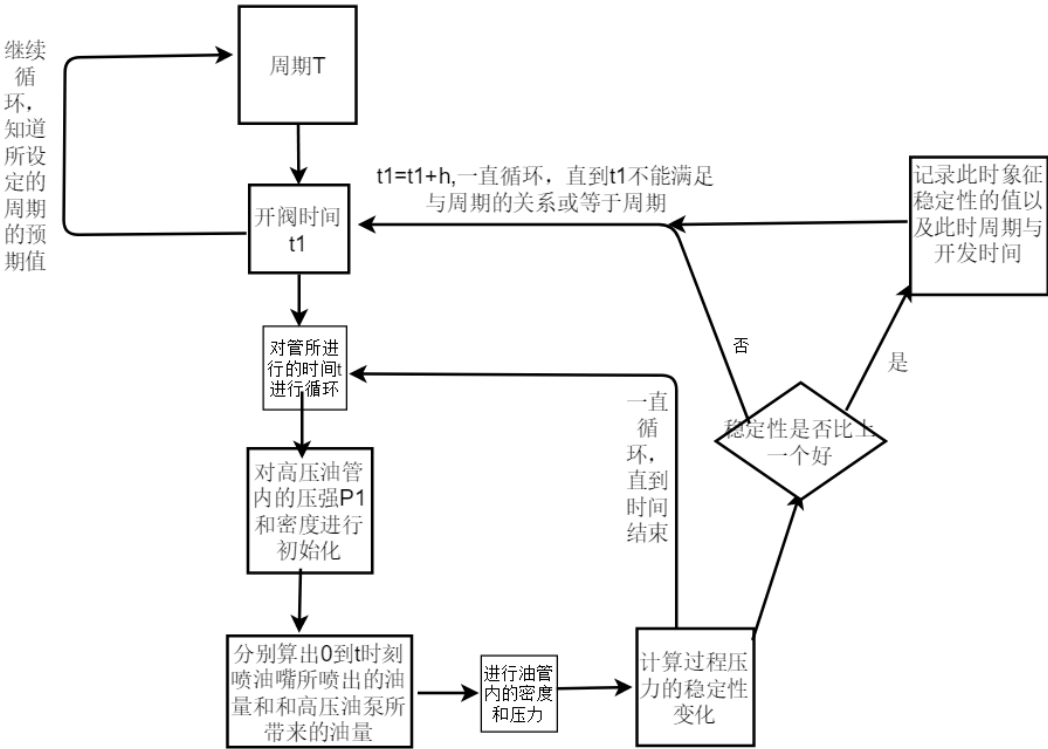


图 1-5 算法流程图

在求解过程中，周期是循环的，即当每一周期进行循环的时候，高压油管里面的压力，喷油嘴的状态应该保持周期始末相同，所以对于高压油泵来说，其一个周期应该是喷油嘴周期的整数倍，故而从 100ms 继续循环，最终解得，周期是 100 ms, 而开阀的时长为 2.9ms，由于时间较为短暂，故而我们选择一次开阀即可。

接下来对在一个周期中什么时间段内开启单向阀进行判断。由题目我们可以知道，在 0 到 2.4ms 的过程中，喷油嘴一直在工作，此时高压油管内压力在减小，故而只有此时让高压油泵开始工作时才能使得目标函数即压力的变化之和达到最小，即一开始进行开阀最为稳定。其解为：

| | |
|--------------------------------|---------------------|
| 高压油管初始压力 (MPa) | 100 |
| 高压油管初始密度 (mg/mm ³) | 0.850 |
| 高压油泵的工作周期 (ms) | 100 |
| 在工作周期内开阀的时间 (ms) | 2.9 |
| 开阀所在周期的时间区域 (ms) | [0, 2.9] |
| 工作时间内的开阀次数 | 1 |
| 周期内高压油管的压力变化区间 (MPa) | [94.7781, 100.1187] |

表 1-1 问题 1 第一小问结果

类似地，我们将算法的初始压力值改为 150MPa,通过前面密度与压力的关系可以算出此时 $\rho = 0.86803 \text{ mg} / \text{mm}^3$ ，此时用模型求出其在 2 秒、5 秒、10 秒的总开阀时间，然后对开阀的次数进行讨论。

由于在 $T=2\text{s}$ 是周期比较长的，其稳定性可能与开阀时间与开阀的次数有关，而在压强为 150MPa， $\rho=0.86803$ 的情况下，在极限周期 100ms 内，计算得出其开阀时间为 5.1ms 才能时压力变化保持在 150Mpa，而当在 101ms 时，如果此时没开阀的话，其压力的变化之和必然比开阀大，故而此时应再次开阀，而由于我们采用了 100ms 作为 2, 5, 10s 的内周期，故而其压力变化区间是一样的。故而，其解为

| 高压油管 初始压力 (MPa) | 高压油管初始密 度 (mg/mm ³) | 高压油泵 的工作周 期 (s) | 在工作周 期内总开 阀的时间 (ms) | 周期内高压油管的压力变 化区间 (MPa) |
|-----------------------|---------------------------------------|-----------------------|------------------------------|--------------------------|
| 150 | 0.8680 | 2 | 102 | [133.7955, 150.0579] |
| 150 | 0.8680 | 5 | 255 | [133.7955, 150.0579] |
| 150 | 0.8680 | 10 | t=510 | [133.7955, 150.0579] |

表 1-2 问题 1 第二小问结果

5.2 问题 2 的模型建立与求解

在问题二中，其要求确定凸轮的角速度，而凸轮的角速度会通过影响高压油泵的压力来影响油管内的压力变化，同样的，喷油嘴上针阀的运动会影响其喷出的燃油的速率，进而影响油管内的压力变化。故而，我们需要知道凸轮角速度与油泵内燃油高度，喷油嘴内的有效可流通面积与时间的关系。然后，再进而求出油泵内压力值与时间的关系，以及喷油嘴的流通速率与时间，油管密度的关系。最后以压力平均变化幅度最小为目标来建立基于微分的目标规划方程，最后求出最佳周期，回代后求出最佳角速度。

接下来对凸轮角速度与油泵内燃油高度之间进行研究。

对凸轮的初始状态进行定义：记柱塞运动到下止点为起始时刻 $t=0$ ，对应的凸轮极角为 π ，不妨假设凸轮以顺时针方向转动，且喷油器的喷油周期也从 $t=0$ 时刻开始。

从附件 1：凸轮边缘曲线中我们可以知道凸轮的极角与极径的对应关系，通过作图与拟合发现：

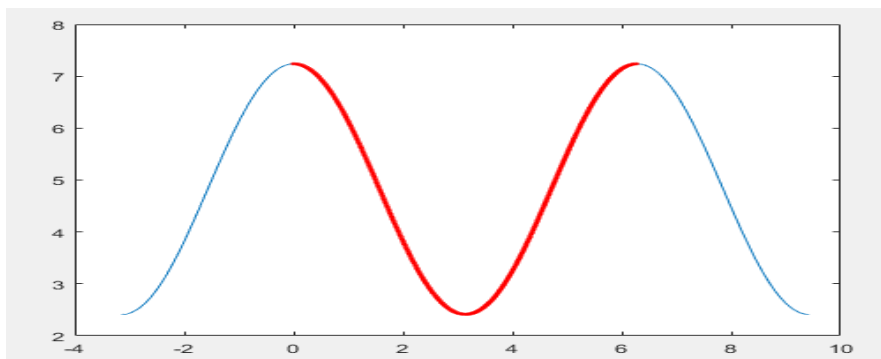


图 1-6 凸轮边缘曲线拟合图

附件 1 中极角与极径的数据全部落在函数 $r(\theta) = 2.4310 \cdot \cos(\theta) + 4.8240$ 上，其中 θ 为凸轮的极角， $r(\theta)$ 为凸轮的极径。因为凸轮的转动过程是连续的，因此我们使用 $r(\theta)$ 来描述极角与极径之间的关系。

设凸轮的转动角速度为 ω ，在凸轮转动过程中引入时间 t ，以第一次柱塞运动到下止点为起始时刻 $t=0$ ，则有任意时刻下凸轮的极径与时间的关系：

$$r(t) = 2.4130 \cdot \cos(\omega t + \pi) + 4.8240 \quad (2-1)$$

则柱塞腔上端与柱塞的距离与凸轮的转动情况有关，即与时间有关，故而记柱塞腔上端与柱塞的距离为 $h(t)$ ，即可以表示成时间 t 的函数。其具体过程如下图， $r(0)$ 表示在下位点时凸轮的极径， $r(T)$ 表示在上位点时凸轮的极径， h_0 可以由残余容积和底面积所求出，具体值为 $h_0 = 1.019082\text{mm}$ 则有：

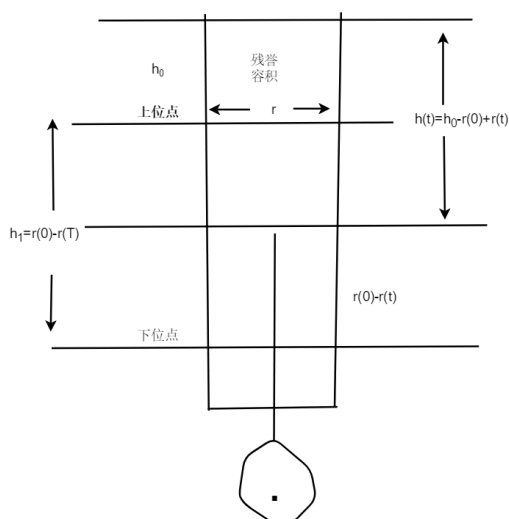


图 1-7 凸轮与柱塞的几何关系图

$$h(t) = h_0 - r(t) + r_0$$

代入 $r(t)$ 后，整理得到

$$h(t) = 3.43006828 - 2.4130 \cdot \cos(\omega t + \pi) \quad (2-2)$$

在知道凸轮角速度，时间与油泵内燃油高度的联系后，我们将探究高压油泵中压力与时间的关系，以此来向模型一一般，算出其对高压油管的影响程度随着时间的变化，而在求压力与时间的关系时，我们知道凸轮的周期运动会通过影响油泵内的高度来影响油泵的量，进而影响其密度，最后在来影响其压力，而在凸轮上升的过程中，当油泵内压力大于油管时，其将出油给油管，故而油泵里面的油量会减少，故而需要建立油泵供油与时间的联系，步步逆推，最后得出油泵压力与时间的关系，其推导过程如下：

记高压油泵供油速率为 $Q_{2\lambda}(t)$ ，类似与问题 1 中供油速率的推导过程，但是需要注意此问中高压油泵与高压油管之间压力差的时变特征，考虑如上因素得到：

$$Q_{2\lambda}(t) = \begin{cases} C \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2(P_{2\text{泵}}(t) - P_{2\text{管}}(t))}{\rho_{2\text{泵}}(t)}}, & \Delta P > 0 \\ 0, & \Delta P \leq 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

其中 $P_{2\text{泵}}(t)$ 表示 t 时刻高压油泵的压力， $P_{2\text{管}}(t)$ 表示 t 时刻高压油管内的压力， ΔP 表示 t 时刻的 $P_{2\text{泵}}(t) - P_{2\text{管}}(t)$ 之差。

接下来利用微元法，分析单位无限小时间段 ($\Delta t \rightarrow 0$) 内高压油泵压力的变化特征，建立高压油泵压力与时间的关系。

记 s 为柱塞腔的横截面积，在 $[t, t + \Delta t]$ 时间内考虑高压油泵的压力变化量为：

$$\Delta P_{2\text{泵}} = P_{2\text{泵}}(t + \Delta t) - P_{2\text{泵}}(t) \quad (2-4)$$

由问题 1 的求解过程中，我们得到压力变化量与密度变化量成正比关系，且由关系式

$$P = k \cdot \rho + c \quad (2-5)$$

k 为比例系数 E/ρ ， $k = 2837$ ， c 为常数， $c = -2312$ 因此有：

$$\Delta P_{2\text{泵}} = k \Delta \rho = k(\rho_{2\text{泵}}(t + \Delta t) - \rho_{2\text{泵}}(t)) \quad (2-6)$$

其中 $\rho_{2\text{泵}}(t)$ 表示 t 时刻高压油泵内的燃油密度。

t 时刻高压油泵内的燃油质量为：

$$\Delta m_1 = \rho_{2\text{泵}}(t) \cdot s \cdot h(t) \quad (2-7)$$

在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内高压油泵的供油质量近似为：

$$\Delta m_2 = Q_{2\lambda}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{泵}}(t) \quad (2-8)$$

在 $t+\Delta t$ 时刻，柱塞腔内的体积为：

$$V_{\text{泵}}(t+\Delta t) = s \cdot h(t+\Delta t) = s \cdot (h(t) + \Delta h) \quad (2-9)$$

其中 $V_{\text{泵}}(t)$ 表示 t 时刻高压油泵柱塞腔的体积， $\Delta h = h(t+\Delta t) - h(t)$ 。

则有：

$$\rho_{2\text{泵}}(t+\Delta t) = \frac{\Delta m_1 - \Delta m_2}{V_{\text{泵}}(t+\Delta t)} = \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot s \cdot h(t) - Q_{2\lambda}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{泵}}(t)}{s \cdot (h(t) + \Delta h)} \quad (2-10)$$

又因为

$$\Delta \rho = \rho_{2\text{泵}}(t+\Delta t) - \rho_{2\text{泵}}(t)$$

所以有：

$$\Delta \rho = \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot s \cdot h(t) - Q_{2\lambda}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{泵}}(t)}{s \cdot (h(t) + \Delta h)} - \rho_{2\text{泵}}(t) \quad (2-11)$$

联立以上公式有：

$$\Delta P_{2\text{泵}} = k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot h(t) - Q_{2\lambda}(t) \cdot \Delta t - s \cdot (h(t) + \Delta h))}{s \cdot (h(t) + \Delta h)}$$

整理后有：

$$\begin{aligned} \Delta P_{2\text{泵}} &= -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot \Delta h + Q_{2\lambda}(t) \cdot \Delta t)}{s \cdot (h(t) + \Delta h)} \\ &= -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot \Delta t \cdot \left(s \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} + Q_{2\lambda}(t) \right)}{s \cdot (h(t) + \Delta h)} \end{aligned} \quad (2-11')$$

$\Delta t \rightarrow 0$ ，且 $\Delta t \neq 0$ ，因此

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_{2\text{泵}}(t+\Delta t) - P_{2\text{泵}}(t)}{\Delta t} = -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot \left(s \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} + Q_{2\lambda}(t) \right)}{s \cdot (h(t) + \Delta h)}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $\Delta h \rightarrow 0$ ，对等式两边取极限，因此有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP_{2\text{泵}}}{dt} = P_{2\text{泵}}'(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot \left(s \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} + Q_{2\lambda}(t) \right)}{s \cdot (h(t) + \Delta h)} = -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot h'(t) + Q_{2\lambda}(t))}{s \cdot h(t)}$$

因此有

$$\frac{dP_{2\text{泵}}}{dt} = -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot h'(t) + Q_{2\lambda}(t))}{s \cdot h(t)} \quad (2-12)$$

高压油泵压力与时间的关系建立完成,接下来建立高压油管内压力与时间的关系。

5.2.2 高压油管内压力变化与时间关系建立

对于高压油管内的压力变化,其主要与高压油泵的进油量和喷油嘴的出油量有关,而高压油泵的进油量与时间和油泵的压强有关,喷油嘴的出油量与其速率和油管的密度有关,接下来对其关系一一求解,最终得出高压油管压力与时间的联系。

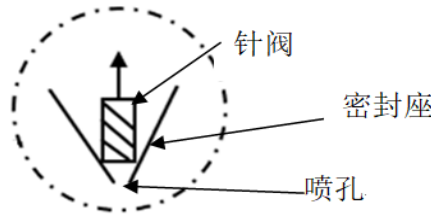
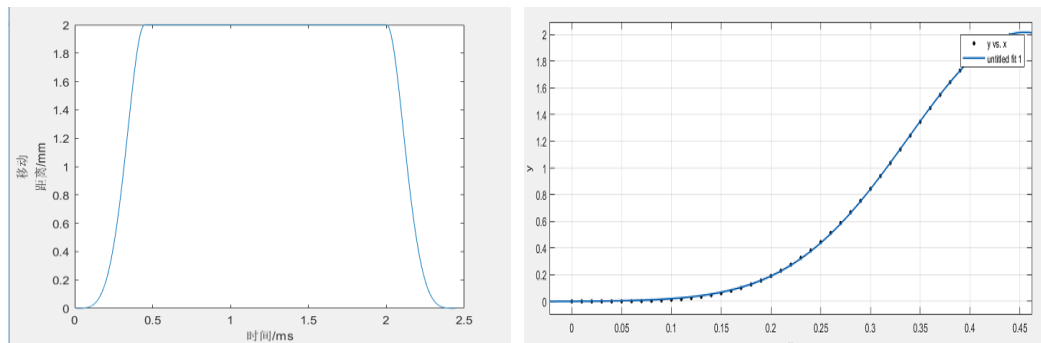


图4 喷油器喷嘴放大后的示意图

喷油器喷油嘴结构示意图如图4所示,喷孔的面积是固定的,也即是喷油时高压油管内燃油能通过的最大面积。在喷油工作中,初始时针阀的升程为 0mm,可流通面积也为 0mm²,当针阀随着时间运动,燃油的可流通面积会变化。需要注意的是,当针阀上升使得可流通面积大于喷孔的面积时,喷油嘴的真实可流通面积应为喷孔的面积,附件2中给出了一个喷油周期内针阀的运动曲线。将附件2中数据绘制出来,图示如下:



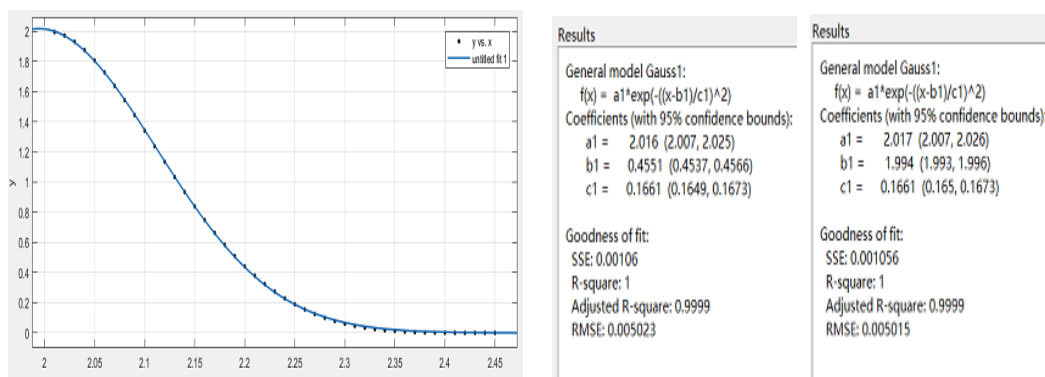


图 2-1 针阀运动曲线拟合图示

运动曲线图像中呈现出了明显的分段特征,我们希望能够得到一个在连续时间上取值的函数关系式来表示针阀的运动规律,因此我们利用 MATLAB 进行分段非线性拟合,在三个分段区间内拟合优度都为 1,拟合效果十分好,下面为拟合结果:

$$x(t) = \begin{cases} 2.016 \cdot e^{-\frac{(t-0.4551)^2}{0.1661}} & t < 0.45 \\ 2 & 0.45 \leq t \leq 2 \\ 2.017 \cdot e^{-\frac{(t-1.994)^2}{0.1661}} & 2 < t \leq 2.45 \\ 0 & 2.45 < t \leq 100 \\ x(t-100) & 100 < t \end{cases} \quad (2-13)$$

其中, $x(t)$ 表示 t 时刻针阀的升程。

记 l_0 为针阀升程为 0 时针阀下缘与半角为 9° 的圆锥密封座的虚顶点之间的距离,

$$l_0 = \frac{1.25}{\tan 9^\circ} = 7.8922 \text{ mm}$$

在 t 时刻时,我们可以直到喷油嘴的可流通面积取决于在对外的最小面积,而在针阀升降的过程中,可以看到喷油嘴的可流通面积的最小值主要在喷口出的面积以及针阀底部所对应的非密封面积。

故而 t 时刻喷油嘴的可流通面积为:

$$A_2(t) = \min \left\{ \left(\pi (x(t) + l_0)^2 - \pi \times 1.25^2 \right), \pi \times 0.7^2 \right\} \quad (2-14)$$

其中 $A_2(t)$ 为 t 时刻喷油嘴的可流通面积,则 t 时刻喷油嘴的喷油速率为:

$$Q_{2\text{出}}(t) = C \cdot A_2(t) \cdot \sqrt{\frac{2(P_{2\text{管}}(t) - P_{\text{外}})}{\rho_{2\text{管}}(t)}} \quad (2-15)$$

其中, $Q_{2\text{出}}(t)$ 为 t 时刻喷油嘴的喷油速率, $P_{2\text{管}}(t)$ 为 t 时刻高压油管内的压

力, $P_{\text{外}}$ 为高压油管外内燃机中的压力,通过查询资料得到,一般情况下

$$P_{\text{外}}=0.6\text{MPa},$$

$\rho_{2\text{管}}(t)$ 为 t 时刻高压油管内的密度。

接下来利用微元法，分析单位无限小时间段 ($\Delta t \rightarrow 0$) 内高压油管内压力的变化特征，建立高压油管压力与时间的关系。

在 $[t, t+\Delta t]$ 时间段内，高压油管内的压力变化主要与高压油泵的供油量和喷油器的喷油量有关，以这一时间段内的质量变化作为桥梁建立压力变化的关系式。

记 $V_{\text{管}}$ 为高压油管的体积，高压油管压力变化推导与高压油泵的压力变化推导过程类似，有 $[t, t+\Delta t]$ 时间内高压油管的压力变化量为：

$$\Delta P_{2\text{管}} = P_{2\text{管}}(t+\Delta t) - P_{2\text{管}}(t) = k(\rho_{2\text{管}}(t+\Delta t) - \rho_{2\text{管}}(t)) \quad (2-16)$$

$\rho_{2\text{管}}(t)$ 为 t 时刻高压油管内的密度

在 $[t, t+\Delta t]$ 内，高压油管内的体积恒定不变的，因此高压油管内的密度变化量与 Δt 时间内高压油管内燃油质量的变化量密切相关。

$$\Delta P_{2\text{管}} = P_{2\text{管}}(t+\Delta t) - P_{2\text{管}}(t) = k \frac{\Delta m}{V_{\text{管}}} \quad (2-16')$$

其中， Δm 表示在这段时间内高压油管内燃油的质量变化量。

在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内高压油泵给高压油管的供油质量近似为：

$$\Delta m_2 = Q_{2\text{入}}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{泵}}(t)$$

在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内喷油器的喷油质量近似表示为：

$$\Delta m_3 = Q_{2\text{出}}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{管}}(t) \quad (2-17)$$

因此有：

$$\Delta P_{2\text{管}} = P_{2\text{管}}(t+\Delta t) - P_{2\text{管}}(t) = k \frac{\Delta m_2 - \Delta m_3}{V_{\text{管}}}$$

整理后有：

$$\Delta P_{2\text{管}} = P_{2\text{管}}(t+\Delta t) - P_{2\text{管}}(t) = k \frac{Q_{2\text{入}}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{泵}}(t) - Q_{2\text{出}}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{2\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ ，且 $\Delta t \neq 0$ ，因此有：

$$\frac{\Delta P_{2\text{管}}}{\Delta t} = \frac{P_{2\text{管}}(t+\Delta t) - P_{2\text{管}}(t)}{\Delta t} = k \frac{Q_{2\text{入}}(t) \cdot \rho_{2\text{泵}}(t) - Q_{2\text{出}}(t) \cdot \rho_{2\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}}$$

对等式两边同时取极限，有：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP_{2\text{管}}}{dt} = P_{2\text{管}}'(t)$$

因此有：

$$\frac{dP_{2\text{管}}}{dt} = k \frac{Q_{2\text{入}}(t) \cdot \rho_{2\text{泵}}(t) - Q_{2\text{出}}(t) \cdot \rho_{2\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}} \quad (2-18)$$

高压油管内任意时刻 t 的压力与时间的关系可由上式给出。

5.2.3 稳定性优化

问题 2 要求确定凸轮的角速度，使得高压油管内的压力尽量稳定在 100MPa。在 5.2.1 与 5.2.2 的工作中，我们已经建立了具有初值的微分方程模型来描述任意时刻 t 下高压油泵与高压油管内的压力变化方程，高压油泵与高压油管的压力与密度是相互影响的，因此我们可以从初值条件出发求得任意时刻 t 处高压油管的压力与高压油泵的压力。但是在实际问题中，需要尽量使得高压油管内的压力稳定在 100MPa。我们沿用了问题 1 中的稳定性尺度积分，通过建立优化模型求解最优的凸轮转动角速度 ω 。

求角速度 ω ，实际上等价于求凸轮转动一圈的时间周期 T ，因此所建立的但目标优化模型如下：

$$\min I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T (P_{2\text{管}}(t) - P_{100})^2 dt$$

$$\begin{aligned}
& h(t) = 3.43006828 - 2.4130 \cdot \cos(\omega t + \pi) \\
& Q_{2\lambda}(t) = \begin{cases} C \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2(P_{2\text{泵}}(t) - P_{2\text{管}}(t))}{\rho_{2\text{泵}}(t)}}, & \Delta P > 0 \\ 0, & \Delta P \leq 0 \end{cases} \\
& P = k \cdot \rho + c \\
& \frac{dP_{2\text{泵}}}{dt} = -k \frac{\rho_{2\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot h'(t) + Q_{2\lambda}(t))}{s \cdot h(t)} \\
& P_{2\text{泵}}(0) = 0.5 \\
& x(t) \\
& s.t. \left\{ \begin{aligned} A_2(t) &= \min \left\{ \left(\pi \left((x(t) + l_0) \cdot \tan 9^\circ \right)^2 - \pi \times 1.25^2 \right), \pi \times 0.7^2 \right\} \\ Q_{2\text{出}}(t) &= C \cdot A_2(t) \cdot \sqrt{\frac{2(P_{2\text{管}}(t) - P_{\text{外}})}{\rho_{2\text{管}}(t)}} \\ \frac{dP_{2\text{管}}}{dt} &= k \frac{Q_{2\lambda}(t) \cdot \rho_{2\text{泵}}(t) - Q_{2\text{出}}(t) \cdot \rho_{2\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}} \\ P_{2\text{管}}(0) &= 100 \\ 0 \leq t, 0 \leq T, t &\in [0, T] \\ k &= 2837, c = -2312 \end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{2-19}$$

5.2.4 模型求解

对于模型 (2-19)，目标等价于求得一个供油与喷油系统的周期，使得周期内高压油管稳定性最优。要想求得模型 (2-19) 的最优解是比较困难的，而且在求解微分方程组控制条件时，更高的精度会使得本模型的求解算法的时间复杂度无法承受，因此我们设计了适合本问的自适应的分步算法，思想如下：

①先确认角速度的一个初始解区间，记区间长度为 d ，初始解区间的范围可以尽量大，最优的情况是覆盖角速度的所有合理取值范围。

②以步长 h 对 d 进行离散化处理，分别令角速度在每个小区间端点处取值并计算出每个端点处的目标函数值。找出取得最小目标函数值得角速度，记为 w ，并以 w 作为中点，以原区间长度 d 的一半作为新的解区间长度 d' 构造新的解区间。

③判断 d' 是否小于所设定的精度常数，若结果为真则退出循环，输出角速度与目标函数值。若结果为假则回到第②步继续循环，直到退出循环。

基于以上思想，我们用 MATLAB 编程求解，求解代码见附录，具体结果如下：

近似最优的角速度 $\omega = 0.0698 \text{ rad/ms}$ ，单位为 rad/ms ，一个工作周期为 90.0170 ms ，即凸轮的转速为每秒 11.1 圈。以 $\omega = 0.0698$ 代入模型 (2-19)，利用 MATLAB 进行数值模拟第一个工作周期与多个工作周期内高压油泵与高压油管的压力与时间的示意图：

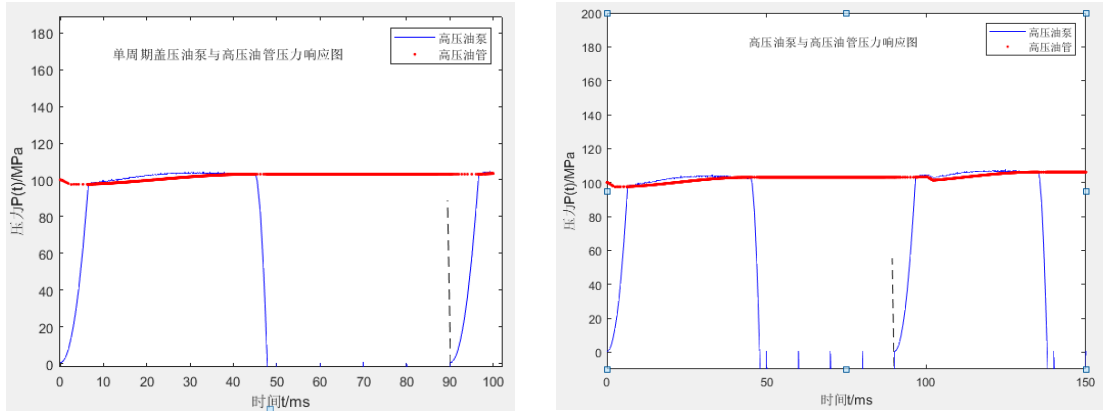


图 2-2 数值模拟单个与多个周期内油泵与油管的压力响应

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 模型建立

对于问题三来说，其相对于问题二多了一个喷油嘴和减压阀，对于两个喷油嘴来说，我们并不知道其是同时启动还是分开启动，故而我们假设第一个喷油嘴启动时间为初始值，另一个在经过一段未知时间（可能 0）后开始运行。而对于减压阀来说，其减压的主要是通过喷出燃油进行减压，故而其影响油管方式与喷油嘴一样，可以用计算喷油嘴减压的方法来计算减压阀工作对油管内的压力变化的影响，将喷油嘴和减压阀两个因素加入到模型二中，得出新的模型三，最后求解出较优的控制方案。其求解过程如下：

初始条件：记柱塞运动到下止点为起始时刻 $t=0$ ，对应的凸轮极角为 π ，不妨假设凸轮以顺时针方向转动。

由于未知两个喷油嘴工作策略，但是已知两个喷油嘴的工作周期是固定的，因此只需要让一个喷油嘴从 $t=0$ 时刻开始工作，设另一个喷油嘴的工作周期从 $t=0+t_0$ 时刻开始，即可以通过设定 t_0 控制两个喷油嘴的喷油策略。

记工作周期内任意 t 时刻，高压油管两个喷油嘴喷油速率之和可以表示为：

$$Q_{3\text{出}}(t) = C \cdot A_2(t) \cdot \sqrt{\frac{2(P_{3\text{管}}(t) - P_{\text{外}})}{\rho_{3\text{管}}(t)}} + C \cdot A_2(t+t_0) \cdot \sqrt{\frac{2(P_{3\text{管}}(t) - P_{\text{外}})}{\rho_{3\text{管}}(t)}} \quad (3-1)$$

其中 $P_{3\text{管}}(t)$ 、 $\rho_{3\text{管}}(t)$ 分别表示 t 时刻高压油管内的压力与密度。其它符号意义与问题 2 相同。

在研究减压阀的过程中，我们将减压阀对系统的作用近似抽象成喷油嘴，只是减压阀的工作规律与喷油嘴不相同，因此从减压阀的开关对高压油管内压力的影响出发有：

$$K(t) = \begin{cases} C \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2(P_{3\text{管}}(t) - 0.5)}{\rho_{3\text{管}}(t)}} & , 100 < P_{3\text{管}}(t) \\ 0 & , P_{3\text{管}}(t) \leq 100 \end{cases} \quad (3-2)$$

其中, $K(t)$ 为 t 时刻减压阀的燃油流通速率。

在 $[t, t + \Delta t]$ 时间段内, 高压油管内的压力变化主要与高压油泵的供油量、喷油器的喷油量和减压阀的减压量有关, 以这一时间段内的质量变化作为桥梁建立压力变化的关系式。

类同于问题 2 中高压油管压力与时间关系的推导过程, 如 (2-16'), 有:

$$\Delta P_{3\text{管}} = k \frac{Q_{3\lambda}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{3\text{泵}}(t) - Q_{3\text{出}}(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{3\text{管}}(t) - K(t) \cdot \Delta t \cdot \rho_{3\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}}$$

其中 $Q_{3\lambda}(t)$ 表示 t 时刻高压油泵的供油量, 且 $Q_{3\lambda}(t) = Q_{2\lambda}(t)$, $\rho_{3\text{泵}}(t)$ 表示 t 时刻高压油泵的燃油密度。

类同于问题 2 中整理与取极限过程, 最后得到:

$$\frac{dP_{3\text{管}}}{dt} = k \frac{Q_{3\lambda}(t) \cdot \rho_{3\text{泵}}(t) - Q_{3\text{出}}(t) \cdot \rho_{3\text{管}}(t) - K(t) \cdot \rho_{3\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}} \quad (3-3)$$

在 $[t, t + \Delta t]$ 时间段内, 高压油泵内压力的变化量与问题 2 构成相同, 分别与凸轮转动造成的柱塞压缩和高压油泵对高压油管的供油量有关。只需要相应地改变 (2-12) 中的符号即可得到本问中高压油泵内压力与时间的关系, 即:

$$\frac{dP_{3\text{泵}}}{dt} = -k \frac{\rho_{3\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot h'(t) + Q_{3\lambda}(t))}{s \cdot h(t)} \quad (3-4)$$

最后, 以高压油管内压力稳定性作为目标, 建立优化模型:

$$\min I \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_{3\text{管}}(t) - P_{100})^2 dt$$

$$\begin{aligned}
& h(t) = 3.43006828 - 2.4130 \cdot \cos(\omega t + \pi) \\
& Q_{3\lambda}(t) = \begin{cases} C \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2(P_{2\text{泵}}(t) - P_{2\text{管}}(t))}{\rho_{2\text{泵}}(t)}}, & \Delta P > 0 \\ 0, & \Delta P \leq 0 \end{cases} \\
& A_2(t) = \min\left\{\left(\pi((x(t) + l_0) \cdot \tan 9^\circ)^2 - \pi \times 1.25^2\right), \pi \times 0.7^2\right\} \\
& Q_{3\text{出}}(t) = C \cdot A_2(t) \cdot \sqrt{\frac{2(P_{3\text{管}}(t) - P_{\text{外}})}{\rho_{3\text{管}}(t)}} + C \cdot A_2(t + t_0) \cdot \sqrt{\frac{2(P_{3\text{管}}(t) - P_{\text{外}})}{\rho_{3\text{管}}(t)}} \\
& K(t) = \begin{cases} C \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2(P_{3\text{管}}(t) - 0.5)}{\rho_{3\text{管}}(t)}}, & 100 < P_{3\text{管}}(t) \\ 0, & P_{3\text{管}}(t) \leq 100 \end{cases} \\
& \frac{dP_{3\text{管}}}{dt} = k \frac{Q_{3\lambda}(t) \cdot \rho_{3\text{泵}}(t) - Q_{3\text{出}}(t) \cdot \rho_{3\text{管}}(t) - K(t) \cdot \rho_{3\text{管}}(t)}{V_{\text{管}}} \\
& \frac{dP_{3\text{泵}}}{dt} = -k \frac{\rho_{3\text{泵}}(t) \cdot (s \cdot h'(t) + Q_{3\lambda}(t))}{s \cdot h(t)} \\
& P_{3\text{管}}(0) = 100, P_{3\text{泵}}(t) = 0.5 \\
& \omega > 0, t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]
\end{aligned} \tag{3-5}$$

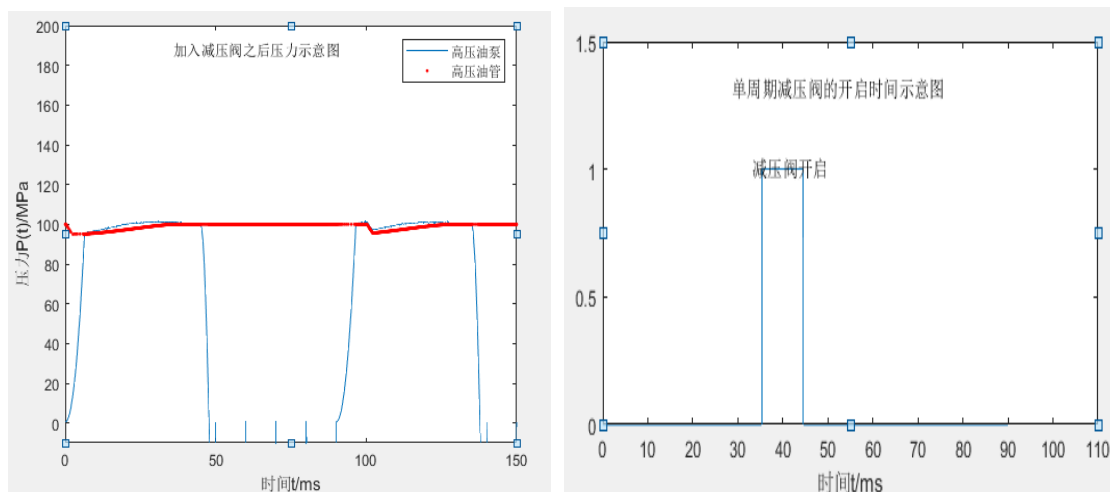
5.3.2 模型求解

在问题 2 中，我们得到了近似最优的角速度 $\omega = 0.0698 \text{ rad/ms}$ ，在这个角速度下的供油策略已经能够很大程度上保证高压油管的压力稳定性，因此在加入减压阀的求解过程中，我们依然保持问题 2 的供油策略，并假设两个喷油嘴的工作周期是同步的，即 $t_0 = 0$ ，代入模型 (3-5) 求解得到加入减压阀后的高压油泵与高压油管内压力随时间的变化关系与在一个工作周期内减压阀的控制方案。

结果为：加入减压阀之后，在供油周期内高压油管的稳定性得到显著的提升，平均稳定性尺度 μ 从 3.223 提升到 0.6915。

$$\mu = \frac{1}{T} \int_0^T |P_{3\text{管}}(t) - 100| dt \tag{3-6}$$

在一个工作周期中 $t \in [0, 90.0170]$ 中，减压阀开启时间为 $t_{\text{减}} \in [35.36, 45.00]$ ，一个工作周期内减压阀开启的时长为 9.64 ms ，具体时间曲线见下图。



六、 模型的评价

6.1 模型的优点

(1) 在问题一中，我们建立了以压力稳定性为目标的目标规划模型，其充分考虑了各方面的因素，而且通过微分进行列式，使得其变化是动态的，模型较为完善。

(2) 在问题二中，我们考虑了角速度与油泵的压力关系，以及对喷油嘴的流出的燃油速度进行了细致的分析，然后同样的以此建立了单目标规划模型，考虑较为全面。

(3) 在求解的过程中，我们对模型进行了简化，将其积分离散化，并逐渐减小步长，使便于求解且结果较为精确。

6.2 模型的缺点

在求解的过程中，由于将其积分进行离散化处理，理论上还是与真实值有所差距的，而且在离散化后，随之步长的减少，其程序运行时间将变得很漫长，求解有所缺陷。

七、 参考文献

- [1] 姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社，2011.
- [2] 卓金武，李必文，魏永生，秦健. MATLAB 在数学建模中的应用，北京：北京航空航天大学出版社，2014.9
- [3] 刘卫国，MATLAB 程序设计与应用（第三版）北京：高等教育出版社，2017.8

八、 附录

代码：

%问题一代码

```
clear;clc;close all
Q2=0;m2=0;%流出油的量
Q3=0;m3=0;%流入的油的量
```

```

p1=100;%油管的初始压强
V=500*pi*5*5;%高压油管的体积
m4=0.850*V;%高压油管初始时油管内油的质量
midu=0.85;%高压油管内油的密度
mubiao=0;%所要求的积分的稳定性
a=0;b=0;%标记符
global m
m=0.1 ;
global n
n=0.1;
min=inf;
m21=0;
m31=0;
p11=0;
for t1=2.4:m:5
    for T=100:m:120 %设周期
        %设一周其内值开阀一次，一次持续 t 秒
        k=0;
        mubiao=0;

        m2=0;
        m3=0;
        t3=0;
        p1=100;
        t4=0;
        t2=0;
        midu=0.85;
        if T-t1>=10
            t3=0;
            t4=0;
            t2=0;
            for t5=0:n:T
                t2=t2+n;
                t3=t3+n;
                t4=t4+n;

                while(t2>100)%对流出的油的求解
                    t2=t2-100;
                end
                if t2>=0 && t2<=0.2
                    Q2=100*t2;
                end
                if t2>0.2 && t2<=2.2
                    Q2=20;

```

```

end
if t2>2.2 && t2<=2.4
    Q2=-100*t2+240;
end
if t2>2.4 && t2<=100
    Q2=0;
end
T=T;
t1=t1;
t2=t2;
m2=Q2*midu+m2; %注意 p1 相当于 p(t),是动态变化的
% disp(midu)
Q3=0;%避免上一步的结果所带来的影响
if t3>0 && t3<=t1%对流入的油进行计算
%
Q3=0.85*pi*0.7*0.7*sqrt(2*abs(160-p1)/0.8706);
Q3=1.983*sqrt(abs(160-p1));
end
if t3>t1
    Q3=0;
end
m3=Q3*0.8711+m3;
midu=(m3-m2+m4)/V;
p1=2837*midu-2312;%变化的高压油管内的压强
k=k+1;
mubiao=abs(p1-100)+mubiao;
end
if abs((m3-m2)/m3)<0.05 || abs((m3-m2)/m2)<0.05
    m21=m2;
    m31=m3;
    if k~=0
        mubiao=mubiao/k;
    end
    if mubiao<min
        min=mubiao;
        a=T;
        b=t1;
        p11=p1;
    end
end
end
end
end
end

```



```

%龙格——库塔法
function yp=funt1(t,y)
yp=y/(0.0001*t^3-0.001082*t^2+5.474*t+1532);
%不同文件
t0=100;
tf=160;
y0=0.850;

%针对函数进行拟合
[t,y]=ode45(@funt,[t0,tf],y0);
%针对开阀时间为 2.9ms 对其高压油管压力变化过程中其最大值和最小值得求解
clear;clc;close all
Q2=0;m2=0;%流出油的量
Q3=0;m3=0;%流入的油的质量
p1=100;%油管的初始压强
V=500*pi*5*5;%高压油管的体积
m4=0.850*V;%高压油管初始时油管内油的质量
midu=0.85;%高压油管内油的密度
mubiao=0;%所要求的积分的稳定性
a=0;b=0;%标记符
global m
m=0.1 ;
global n
n=0.1;
min=inf;
m21=0;
m31=0;
p11=0;
T=100;
t1=2.9%一直周期和开阀时间
x=zeros(1000,1);
min1=inf;
max1=0;
%设周期
    k=0;
    mubiao=0;

    m2=0;
    m3=0;
    t3=0;
    p1=100;
    t4=0;
    t2=0;
    midu=0.85;

```

```

if T-t1>=10
    t3=0;
    t4=0;
    t2=0;
    for t5=0:n:T
        t2=t2+n;
        t3=t3+n;
        t4=t4+n;

        while(t2>100)%对流出的油的求解
            t2=t2-100;
        end
        if t2>=0 && t2<=0.2
            Q2=100*t2;
        end
        if t2>0.2 && t2<=2.2
            Q2=20;
        end
        if t2>2.2 && t2<=2.4
            Q2=-100*t2+240;
        end
        if t2>2.4 && t2<=100
            Q2=0;
        end
        T=T;
        t1=t1;
        t2=t2;
        m2=Q2*midu+m2; %注意 p1 相当于 p(t),是动态变化的
        Q3=0;%避免上一次的计算所带来的影响
        if t3>0 && t3<=t1%对流入的油进行计算
            Q3=1.983*sqrt(abs(160-p1));
        end
        if t3>t1
            Q3=0;
        end
        m3=Q3*0.8711+m3;
        midu=(m3-m2+m4)/V;
        p1=2181*midu^(18.9);
        if p1<min1
            min1=p1;
        end
        if p1>max1
            max1=p1;
        end
    end
end

```

```

        %变化的高压油管内的压强
        k=k+1;
        mubiao=abs(p1-100)+mubiao;
    end
    if abs((m3-m2)/m3)<0.05 || abs((m3-m2)/m2)<0.05
        m21=m2;
        m31=m3;
        if k~=0
            mubiao=mubiao/k;
        end
    if mubiao<min
        min=mubiao;
        a=T;
        b=t1;
        p11=p1;
    end
    end
end
disp('最小值')
min1=min1
disp('最大值')
max1=max1

```

%2, 5, 10s 时的求解

```

clear;clc;close all
Q2=0;m2=0;%流出油的量
Q3=0;m3=0;%流入的油的量
p1=100;%油管的初始压强
V=500*pi*5*5;%高压油管的体积
m4=0.86803*V;%高压油管初始时油管内油的质量
midu=0.86803;%高压油管内油的密度
mubiao=0;%所要求的积分的稳定性
a=0;b=0;%标记符
global m
m=0.1;
global n
n=0.1;
min=inf;
m21=0;
m31=0;
p11=0;
T=100;

```

```

t1=2.9%一直周期和开阀时间
x=zeros(1000,1);
min1=inf;
max1=0;
%设周期%
    k=0;
    mubiao=0;

    m2=0;
    m3=0;
    t3=0;
    p1=150;
    t4=0;
    t2=0;
    midu=0.85;
    if T-t1>=10
        t3=0;
        t4=0;
        t2=0;
        for t5=0:n:T
            t2=t2+n;
            t3=t3+n;
            t4=t4+n;

            while(t2>100)%对流出的油的求解
                t2=t2-100;
            end
            if t2>=0 && t2<=0.2
                Q2=100*t2;
            end
            if t2>0.2 && t2<=2.2
                Q2=20;
            end
            if t2>2.2 && t2<=2.4
                Q2=-100*t2+240;
            end
            if t2>2.4 && t2<=100
                Q2=0;
            end
            T=T;
            t1=t1;
            t2=t2;
            m2=Q2*midu+m2; %注意 p1 相当于 p(t),是动态变化的
            %
            disp(midu)

```

```

        Q3=0;%避免上一次的计算结果所带来的影响
        if t3>0 && t3<=t1%对流入的油进行计算
            Q3=2.0253*sqrt(abs(160-p1));
        end
        if t3>t1
            Q3=0;
        end
        m3=Q3*0.8711+m3;
    midu=(m3-m2+m4)/V;
        p1=2181*midu^(18.9);
        if p1<min1
            min1=p1;
        end
        if p1>max1
            max1=p1;
        end
        %变化的高压油管内的压强
        k=k+1;
        mubiao=abs(p1-150)+mubiao;
end

    if abs((m3-m2)/m3)<0.05 || abs((m3-m2)/m2)<0.05
        m21=m2;
        m31=m3;
        if k~=0
            mubiao=mubiao/k;
        end
        if mubiao<min
            min=mubiao;
            a=T;
            b=t1;
            p11=p1;
        end
    end
end
disp('最小值')
min1=min1
disp('最大值')
max1=max1

```

%问题 2 和 3 代码

%ht.m

```
function y=ht(w,t)
y=3.4336-2.413*cos(w*t+pi);
```

```
%htt.m
function y=htt(w,t)
y=2.413*w*sin(w*t+pi);
```

```
%panduan0.m
function y=panduan0(x1,x2)
if x1>x2
    y=1;
else
    y=0;
end
```

```
%eq2.m
function dy=eq2(t,y)
%说明微分变量是二维的, 令 y(1)=x, y(2)=y
C=0.85; %流量系数
A=1.5394; %供油口面积 mm2
s=19.6350; %柱塞腔截面积 mm2
V=39270; %管的体积 mm3
P0=100;
Pw=0.6; %管外压力
k=2837;
dy=zeros(3,1);
dy(1)=-k*(exp(log((y(1)/2183))/18.9))*htt(y(3),t)/ht(y(3),t)-C*A*k*sqrt(2*(y(1)-y(2))*(exp(log((y(1)/2183))/18.9)))*panduan0(y(1),y(2))/(s*ht(y(3),t));
dy(2)=C*A*k*sqrt(2*(y(1)-y(2))*(exp(log((y(1)/2183))/18.9)))*panduan0(y(1),y(2))/V-C*A*2t(t)*k*sqrt(2*(y(2)-0.6)*(exp(log((y(2)/2183))/18.9)))/V;
dy(3)=0;
```

```
%question2.m
clear,clc;
C=0.85; %流量系数
A=1.5394; %供油口面积 mm2
s=19.6350; %柱塞腔截面积 mm2
V=39270; %管的体积 mm3
P0=100;
Pw=0.6; %管外压力
```

```

c=-2312;
k0=2837;
w=pi/10000;
tt=[];
yy=[];
t1=0;
k=10; %时间增量
y0=[0.5,100,w];
w0=0; %记录最优角速度
min_obj=inf; %记录最优目标值
cur_obj=inf; %记录当前目标值
T=ones(200,2);
for i=1:1:200 %上限为 100*100ms, 可修改 , 可修改参数影响算法速度, 会牺牲
精度
    w=2*pi/(10*i); %以 100ms 作为周期增量, 循环求解
    T(i,1)=w;
    %clear tt;
    %tt=[];
    for t1=0:k:(pi/w) %每个 w 所对应的周期,
        [t,y]=ode113(@eq2,[t1,t1+k],[y0(1),y0(2),w]);
        tt=[tt;t,y];
        y0=[tt(end,2:3),w];
    end
    cur_obj=mean(abs(tt(:,3)-100));
    T(i,2)=cur_obj;
    if cur_obj<=min_obj
        w0=w;
        min_obj=cur_obj;
    end
end
end

```

```

%eq3.m
function dy=(t,y)
%说明微分变量是二维的, 令 y(1)=x, y(2)=y
C=0.85; %流量系数
A=1.5394; %供油口面积 mm2
s=19.6350; %柱塞腔截面积 mm2
V=39270; %管的体积 mm3
P0=100;
Pw=0.6; %管外压力
% c=-2312;

```

```

k=2837;
t0=0;
% w=pi/12000;
dy=zeros(3,1);

%未加入减压阀
%
dy(1)=-k*(exp(log((y(1)/2183))/18.9))*ht(y(3),t)/ht(y(3),t)-C*A*k*sqrt(2*(y(1)-y(2))*(exp(log((y(1)/2183))/18.9)))*panduan0(y(1),y(2))/(s*ht(y(3),t));
%
dy(2)=C*A*k*sqrt(2*(y(1)-y(2))*(exp(log((y(1)/2183))/18.9)))*panduan0(y(1),y(2))/V-C*(A2t(t)+A2t(t+t0))*k*sqrt(2*(y(2)-0.6)*(exp(log((y(2)/2183))/18.9)))/V;
% dy(3)=0;

%加入减压阀
dy(1)=-k*(exp(log((y(1)/2183))/18.9))*ht(y(3),t)/ht(y(3),t)-C*A*k*sqrt(2*(y(1)-y(2))*(exp(log((y(1)/2183))/18.9)))*panduan0(y(1),y(2))/(s*ht(y(3),t));
dy(2)=C*A*k*sqrt(2*(y(1)-y(2))*(exp(log((y(1)/2183))/18.9)))*panduan0(y(1),y(2))/V-C*(A2t(t)+A2t(t+t0))*k*sqrt(2*(y(2)-0.6)*(exp(log((y(2)/2183))/18.9)))/V-C*A*k*sqrt((y(2)-0.5)*exp(log((y(2)/2183))/18.9))*panduan0(y(2),100)/V;
dy(3)=0;

%question3.m
clear,
clc;
C=0.85; %流量系数
A=1.5394; %供油口面积 mm2
s=19.6350; %柱塞腔截面积 mm2
V=39270; %管的体积 mm3
P0=100;
Pw=0.6; %管外压力
c=-2312;
k0=2837;
k=10;
w0=0.0698; %问题2已知周期
y0=[0.5,100,w0];
tt=[];
for t1=0:k:(6*pi/w0) %每个w所对应的周期,
[t,y]=ode113(@eq3,[t1,t1+k],[y0(1),y0(2),w0]);
tt=[tt;t,y];
y0=[tt(end,2:3),w0];
if y0(1)<0.5
y0(1)=0.5;

```



```

        end
    end
    plot(tt(:,1),tt(:,2));
    hold on
    plot(tt(:,1),tt(:,3),'r. ');
    xlabel('时间 t/ms');
    ylabel('压力 P(t)/MPa');
    legend('高压油泵','高压油管');
    axis([0,150 ,-10,200]);

%画图
% function []=photo(w0)
    w0=0.0698;
    t1=0;
    tt=[];
    k=10; %时间增量
    y0=[0.5,100,w0];
    for t1=0:k:(2*pi/w0) %每个 w 所对应的周期,
        [t,y]=ode113(@eq2,[t1,t1+k],[y0(1),y0(2),w0]);
        tt=[tt;t,y];
        y0=[tt(end,2:3),w0];
        if y0(1)<0.5
            y0(1)=0.5;
        end
    end
    end
    plot(tt(:,1),tt(:,2),'b');
    hold on
    plot(tt(:,1),tt(:,3),'r. ');
    axis([0,150 ,-10,200]);
    xlabel('时间 t/ms');
    ylabel('压力 P(t)/MPa');
    legend('高压油泵','高压油管');

```