机场出租车选择策略与排队等候策略的分析

摘 要

在机场，出租车是主要的交通工具之一，出租车与乘客之间的动态平衡关系可以更好地推进机场的运作。在保证车辆和乘客安全的情况下，为了给出租车司机提出选择策略及提高总的乘车效率，我们队伍研究并解决了以下问题。

针对问题一，我们认为司机的选择基于单位时间收益最大化。我们把市区与机场视为两个质点，计算得到空载费用和空载时间。对出租车可能做出的两种选择，我们通过对市区及机场周围的人口稠密程度估算乘客去各个目的地的概率，进而求得乘客目的地的期望值，两种选择的首单乘客期望目的地距离分别为 d_A、d_B 。同时注意到（A）选项需要着重考虑时间成本，而其取决于一同等待的前车数目和候车乘客人数, 我们分类讨论了这两个因素在两种选择下的时间成本。最后建立了基于两种选择的单位收益计算模型，司机可根据实时观测到的前车数量和候车乘客人数，计算模型中计算它们各自的预估单位收益，实时比较大小关系，从而作出决策。

针对问题二，我们收集了广州市白云国际机场及广州市出租车收费标准等的相关数据，对问题一中的模型进行求解，求得司机从机场出发对应的两个选项的目的地距离和价格期望值：（A）、（B）选项的目的地距离期望值分别为 $35.2382km$、$21.2249km$，之后的首单收益期望值分别为 115.5031 元、68.9227 元。为了更好地给出司机的选择方案，我们提供了计算出租车等待时间的预估方法，并通过对出租车在蓄车池的时间成本进行计算得到，当司机在蓄车池需等待的时间 $< 76.8699min$ 时，选择（A）更优，反之选择（B）更优。同时我们验证了它们的合理性，并得知整个选择方案主要依赖于候车人数、前方车数和时间段的选择，且前方车辆数的分界点与时间段的选择以及候车人数存在着一定的相关性，也会受到节假日等间接影响。

针对问题三，为了使乘车效率尽可能高，我们队伍采用排队论方法建立数学模型。在实际中，我们认为蓄车池中的车辆可自行疏散，而乘车区内的乘客不行。因此，我们主要考虑了乘客排队乘车的情况，并采用等待型的 $M/M/S/\infty$ 模型对其进行分析。由于机场有两条并行车道，故上车点数目 S 的状态集考虑为 $S = \{2, 4, ...\}$。当 $S = 2$ 时，上车点的服务强度 > 1，即队伍会随着时间推移延长。故我们拟定 $S = 4$ 进行计算，得到乘客的平均等待队长为 76.8，平均等待时间为 $19.44min$。在人流量极大的机场，我们认为该计算结果是合理的。同时，为保证车辆和乘客安全，需要管理部门介入管理。各个上车点的车辆应同时发车，驶离当前位置之后后续车辆才能补上，并对乘客加以引导，防止个别队伍过长或过短。较之前只有一个上车点的情况，增加上车点的设置使乘车效率提高了 50.47%。

针对问题四，我们基于收益均衡修改了问题一的模型，认为机场至少有一条快速排队通道。通过建立的“理想城市”模型计算乘客目的地的期望值，从而得到允许短途司机每小时获得“优先权”的最大次数为 4。我们设定特定情景检验方案合理性，借由建立的时间成本及单位时间收益计算模型求解得到单位时间收益最大差异仅为 4.62%，故认为该模型能均衡司机收益。

最后，我们对模型的优缺点进行了分析。

关键字： 方案选择；期望；排队论模型；广州白云国际机场；出租车；理想城市模型

一、 问题重述

在机场，出租车是最主要的交通工具之一，人们可选择乘坐出租车到达机场，同样的，大多数下飞机后的乘客需要乘坐出租车到达市区或所在目的地。因此，机场拥有送客（出发）与接客（到达）两个通道。送客到机场的出租车司机会面临两个与自身收益相关的选项：

(A) 前往到达区排队等待载客返回市区。出租车需要到指定的“蓄车池”依“先来后到”的顺序排队等候。而某时间段抵达的航班数量和“蓄车池”里已有的车辆数是司机可观测的确定信息。

(B) 直接放空返回市区拉客。

对于 (A) 选项，机场出租车管理人员会“分批定量”放行出租车进入“乘车区”，同时安排一定数量的乘客上车，因此，司机需要付出一定的时间成本；对于 (B) 选项，司机会付出空载费用和可能损失潜在的载客收益。通常司机的决策与其个人的经验判断有关，在实际中，还会有很多关联关系各异、影响效果不尽相同的因素影响司机的决策。

结合实际情况，我们团队将建立数学模型研究以下问题：

(1) 综合考虑机场乘客数量的变化规律和出租车司机的收益来分析研究与出租车司机决策相关因素的影响机理，建立出租车司机选择决策模型，并给出司机的选择策略。

(2) 收集国内某一机场及其所在城市出租车的相关数据，给出该机场出租车司机的选择方案，并分析模型的合理性和对相关因素的依赖性。

(3) 对于机场“乘车区”的两条并行车道，在保证车辆和乘客安全的情况下，分析管理部门应如何设置“上车点”合理安排出租车和乘客，使得乘车效率最高。

(4) 管理部门拟对短途且多次往返载客的出租车给予一定的“优先权”，使得出租车的收益尽量均衡，试给出一个可行的“优先”安排方案。

二、 模型假设

- 假设每辆出租车载客过程中停放的时间相同；
- 在 (1)(2) 问的解答过程中假设同一时刻只有一辆出租车处于上车的状态；
- 假设旅客从航站楼步行至出租车等候区的时间与时间差足够短；
- 忽略路网和起步停车对结果产生的影响，即假设出租车在道路上行驶的平均速度为定值，且沿机场与目的地之间的连线行驶至目的地；
- 出租车行驶的过程中不会发生塞车的情况；

- 出租车在回到“市区”后能够马上接到乘客;

三、符号说明

符号	含义
cn	在载客区等候的出租车数 (辆)
p	站台乘客数，其中 p_0 表示刚刚到达站台时的人数
u	打表单价 (元/公里)
d	期望目的地距离
v	车速
ic	期望收益 & 单位时间收益
OC	每公里的燃油价格消耗
T_L	每辆出租车在站台停放载客所用的时间
T_0	表示出租车在候车区等待的时间成本
po	某个城市的人口总数. 其中 po_i 表示第 i 个地区的人口总数
P_k	平稳分布概率. 其中 P_0 表示所有上车点都空闲的概率
L_q	平均等待队长（处于等待的出租车数目）
L_s	平均队长（平均出租车数目）
W_s	平均逗留时长（乘客从到达上车点到离开乘车点的时间）
W_q	平均等待时间（乘客等待到可以上车的时间）
μ^{-1}	服务时间（乘客完成上车动作以及司机发动车子的时间）
ρ	上车点服务强度

四、问题分析

4.1 问题一分析

我们认为出租车司机的选择基于收益最大化，因此，我们分别考虑两个方案的可预估收益。

方案 A 选项需要考虑时间成本，我们认为时间成本取决于两个因素，分别为一同等待的前车数目和等待乘车的乘客人数。司机选择该选项的前提需是：根据目前的情况判断自己到时候必然是有客可接的。我们以乘客目的地的期望值计算出租车司机的期望收益，以时间成本计算司机的送客期望用时，综合考虑得到出租车司机的单位时间收益。

方案 B 选项的收入期望则需考虑空载费用、空载时间以及司机返回市区后的载客时间。

比较两种选择的单位时间收益，我们将会给出司机选择建议。

相关的示意图如图 1 所示。

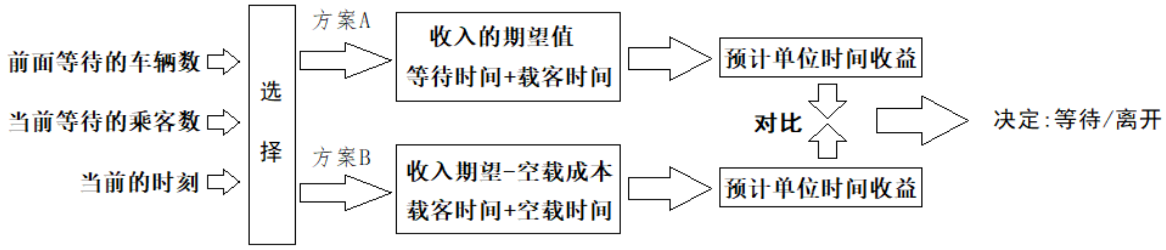


图 1 两种方案的考虑情况与收益的大致示意图

4.2 问题二分析

我们收集了广州市白云国际机场及广州市出租车数目、收费价格等的相关数据，给出司机的选择方案。到机场的出租车较大概率为搭载乘客到机场搭乘航班，故我们认为在蓄车池等待的车辆数目与机场适时要起飞的航班数成正比，以此来模拟司机实际观测得到的在蓄车池等待的车辆数目。同理，我们认为在乘车区等候的乘客数目与降落航班数成正比关系，以降落航班数来模拟司机实际观测及由经验预测的乘客数目。结合收集的相关数据，我们建立出租车司机选择方案模型，分析模型的合理性和对蓄车池前车数目、乘客数目等因素的依赖性。

4.3 问题三分析

机场乘客候车区会出现出租车排队载客和乘客排队乘车两种情况，我们队伍采用排队论方法建立数学模型分析应如何设立上车点可以使乘车效率尽可能高。

对于出租车排队载客，我们认为司机通过可观测到的前车数目和航班信息可以判断是否需要花费更多的时间成本才能接到客，即实际中，蓄车池中的车辆可自行疏散，而乘客不行，故对上车点的设置我们更多考虑的是乘客排队乘车。

对于乘客排队乘车，我们将采用等待型模型 $M/M/S/\infty$。乘客到达乘车区的时间受降落航班的时间分布影响，同时，还需考虑乘客到达上车点所花费的时间。由于机场日人流量较大，在某些时间段内降落航班较多，因此，我们认为排队乘车的乘客可以无上限。

4.4 问题四分析

为考虑出租车收益均衡问题，我们将对问题一中的模型进行修改。对于短途司机，我们认为机场至少应设置两条车道，至少有一条车道为短途司机的快速安排通道。通过市区及机场周围的人口密集程度可以计算乘客可能到达的各个目的地的期望值，以此来计算出租车司机的单位时间收益，并对出租车不同往返情况下的单位时间收益进行对比，探究是否达到收益均衡的效果。结合此模型，我们还可计算出位于快速安排通道和普通车道的出租车的排队时间。

五、 模型的建立与问题一的求解

根据上文的问题分析，我们得知司机在机场将面临着方案 A 与方案 B 的选择。下面我们将对这两种方案进行分析。

方案 A

对于时间成本，我们假设出租车司机在机场等待的时间成本为 T_0，我们会综合一同等待的前车数目和等待乘车的乘客数目给出。乘客上车时间及司机启动车辆并离开上车点的时间总和我们记为 T_L，前车数目记为 cn，等待乘车的乘客数目为 p_0，在不违反交通法规的前提下，一辆出租车可乘坐的人数记为 K。

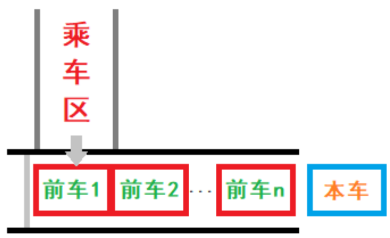


图 2　候车示意图

当前车载客总数 + 本车载客数 $\leqslant$ 等待乘车的乘客数目，即 $K \cdot cn + K \leqslant p_0$ 时，我们认为司机必然是有客可接的（即运力充足或紧缺），此时出租车司机需要的时间成本为：

$$T_0 = (cn+1) \cdot T_L \tag{1}$$

当前车载客总数 + 本车载客数 $\geqslant$ 等待乘车的乘客数目，即 $K \cdot cn + K \geqslant p_0$ 时，表明等待的过程中可能会存在有出租车因为接不到客而不得不停下来等候的情况（即可能存在运力盈余）。由于某时间段抵达的航班数量为司机可观测到的确定信息，司机可以根据航班情况对因为无人候车产生的额外的等待时间进行预判。

考虑到飞机到达的时刻是离散值，因此我们可以设旅客补充向量为 PA，它是一个足够长的向量，且 PA_i 表示在第 i 分钟后会有 PA_i 个旅客从机场进入出租车候车区等候出租车。此处的算法用自然语言描述如下：

1: 假定车子在车队的时刻为 t，此时车队中有 $n = cn + 1$ 辆车 (不考虑后方车辆)，等候区有 $p = p_0$ 名乘客；

2: 如果车队里没有车时，算法结束；如果车队有车，跳转至步骤 3；

3: 如果等候区有客人，最前方的车辆取下尽可能多的乘客，将时间线推迟 T_L，并更新等候区乘客的人数；如果没有客人，时间线推至下一个 PA 时刻，直到站台里有人为止；

4: 重复步骤 2、3，直到算法结束。

估算这个等待的时间的算法用 $matlab$ 代码表示见附录 A 。

通过附录 A 的代码计算出来得到的 wt 值就是我们所需要的时间成本。为了表达方便，我们在下文中将上述对应关系用映射 f 表示，即

$$T_0 = f(cn, K, p_0, PA, T_L) \tag{2}$$

因此公式 (1) 是公式 (2) 所表示的一种特殊情况。因此 T_0 的计算方法可以写成公式 (2) 的形式。当站台上因为没有乘客而产生的额外等待时间为 0 时，T_0 亦可以用公式 (1) 表示，也就是

$$T_0 \geqslant (cn + 1) \cdot T_L \tag{3}$$

当 $K \cdot cn + K \geqslant p_0$ 时，等号必然成立。

乘客要去往的目的地是一个无法提前预知的变量，但是，我们可以根据人口密度，推测乘客去每一个地方的概率。一般来说，人口越多的地方，可能会有更多的人乘车前往，因此我们可以近似使用人口分布的数据近似估算出乘客前往各个地点的概率，并推算出这一趟出行的里程数的概率分布和数学期望值。

在数据量足够的理想情况下，我们可以绘制出所在城市的人口热力图并给出相应的解析式。对于第 i 个位置，假设机场的经纬度为 (lat_A, lon_A)，第 i 个位置的点的经纬度为 (lat_i, lon_i)，以北和东为正方向，它们的坐标可以表示为

$$\begin{cases} x_i = distance(lat_i, lat_A) \\ y_i = distance(lon_i, lon_A) \end{cases} \tag{4}$$

其中 $distance(A, B)$ 表示从经线 (纬线) A 到 B 的垂线的位移。

假设点 (x_i, y_i) 的人口数为 u_i，且 $u = \varphi(x, y)$，城市范围为区域 D，则前往第 i 个点处的概率 P_i 为

$$P_i = \varphi(x_i, y_i)(\iint\limits_D \varphi(x, y) dxdy)^{-1} \tag{5}$$

则期望值 d_E 的计算方法如下。

$$\begin{aligned} d_E &= \iint\limits_D P\sqrt{x^2 + y^2} dxdy \\ &= \iint\limits_D \varphi(x, y)(\iint\limits_D \varphi(x, y) dxdy)^{-1} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy \end{aligned} \tag{6}$$

当行驶的趟数足够多时，所有从机场出发的订单的路程的平均值就会稳定在 d_E 附近。因此我们就可以使用这个期望值 d_E 代替原本不确定的距离来预测每一单的收入。

在实际操作中，由于数据是以有限个离散的值进行表示的，因此我们需要将上式改为按照求离散值的求值方法求解期望值。假设共有 n 组离散的点数据，对于第 i 个位置，我们同样可以采用公式 (4) 表示出每个点的坐标。

假设点 (x_i, y_i) 的人口数为 u_i，且 $u = \varphi(x, y)$，城市范围为区域 D，则前往第 i 个点处的概率 P_i' 为

$$P_i' = \frac{\varphi(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i)} \tag{7}$$

则期望值 d_E' 的计算方法如下。

$$\begin{aligned} d_E' &= \sum_{i=1}^n P_i' \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i)} \sqrt{x_i^2 + y_i^2)} \end{aligned} \tag{8}$$

设出租车打表计费价格为 $g(d)$ 元（在这里 $g(d)$ 表示根据里程数 d 计算得到的价格的映射），价格的期望值 $M = E(g(d))$，我们也可以用上述方法求出价格的期望值。

对于某一个城市而言，我们可以借助各区中心的距离和各区人口比例，来计算乘客目的地距离的数学期望。设该城市总人口为 po，各区人口数为 $po_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，机场距各区中心距离为 $d_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$\begin{aligned} d_A &= \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i)} \sqrt{x_i^2 + y_i^2)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{po_i}{po} d_i \end{aligned} \tag{9}$$

设出租车打表计费价格为 $g(d)$ 元（在这里 $g(d)$ 表示根据里程数 d 计算得到的价格的映射），价格的期望值为 $M_A = E(g(d_A))$，机场距离乘客目的地的期望值为 d_A 公里，

出租车司机平均行驶速度为 v 千米/时，出租车每公里消耗的燃油所需的价格为 OC，方案 A 出租车司机的单位时间收益为 ic_1，则

$$ic_1 = \frac{M_A - OC \cdot d_A}{\frac{d_A}{v} + T_0} \tag{10}$$

方案 B

假设司机想要空载到达的地方与机场的距离为 d_0，价格的期望值为 $M_A = E(g(d_A))$，司机在那里接客后的目的地距离的期望值为 d_B，则出租车司机单位时间收益 ic_2 可以表示为

$$ic_2 = \frac{M_B - (d_B + d_0) \cdot OC}{\frac{1}{v}(d_B + d_0)} \tag{11}$$

当 $ic_1 > ic_2$ 时，我们可以认为司机选择方案 A 会有更高的收益；当 $ic_1 < ic_2$ 时，我们可以认为司机选择方案 B 会有更高的收益，问题一求解完毕。

六、 模型的求解与问题二的解答

我们以广州市白云国际机场中的某一辆准备空载返回广州市城市原点的出租车为例，对这辆出租车而言，除了前方等候车辆、乘客与即将降落的航班信息之外，其余信息均为已知的量。

6.1 价格信息的获取

在模型的建立过程中，我们使用了映射 g 表示某一趟里程为 d 的行程的收入，在这里我们要根据广州出租车收费标准确定映射 g。

最新的收费标准截取相关的文字如下：

> 广州市巡游车运价实行同城同价，具体标准 [1] 为：
>
> - 起步价：首 3 公里 12 元;
> - 续租价：超过 3 公里部分，每公里 2.6 元;
> - 候时费：巡游车营运时速低于 10 公里，每小时 44 元;
> - 返空费实行阶梯附加，15 至 25 公里按照续租价加收 20%，25 公里以上按续租价加收 50%;
> - 夜间服务费 (23：00-次日 5：00)，按续租价加收 30%。

假设续租价对应的映射为 g_c，在非夜间服务时间，我们可以得到如下的映射：

$$g_c(d)=\begin{cases}0 & ,0<d\leqslant 3\\ 2.6(d-3) & ,3<d\leqslant 15\\ 2.6(15-3)+2.6(1+20\%)(d-15) & ,15<d\leqslant 25\\ 2.6(15-3)+2.6(1+20\%)(25-15)+2.6(1+50\%)(d-25) & ,d>25\end{cases} \tag{12}$$

则

$$g(d)=g_c(d)+12 \tag{13}$$

相关的 $matlab$ 代码参见附录 B 。

如果是夜间服务，则 $g(d)=(1+30\%)g_c(d)+12$。

6.2 自变量、常量与自变量关系的确定

根据公式 (10)(11)

$$\begin{cases}ic_1=\dfrac{M_A-OC\cdot d_A}{\frac{d_A}{v}+T_0}\\ ic_2=\dfrac{M_B-(d_B+d_0)\cdot OC}{\frac{1}{v}(d_B+d_0)}\end{cases}$$

对于同一个城市与同一辆出租车而言，M_A、M_B、OC、d_A、d_B、d_0 以及 v 均可视为定值，唯一发生变化的只有受 cn,K,p_0,PA,T_L 影响的 T_0。我们假设每辆车上坐的人数相等，那么 K,T_L 均可视为常量，cn,p_0,PA 视为变量。

当 $ic_1>ic_2$，即 $ic_1-ic_2>0$ 时，我们建议司机选择方案 A。代入公式 (10)(11) 并将常量移到不等号右侧后，我们得到

$$T_0<\frac{(M_A-OC\cdot d_A)(d_B+d_0)}{v(M_B-(d_B+d_0)\cdot OC)}-\frac{d_A}{v} \tag{14}$$

令常数 $C=\frac{(M_A-OC\cdot d_A)(d_B+d_0)}{v(M_B-(d_B+d_0)\cdot OC)}-\frac{d_A}{v}$，上式则可以转化为 $T_0<C$。也就是说，我们只需要判断 T_0 的大小关系即可选择应该继续在站台等待还是离开站台返回市区接客。

6.3 期望值的求解、常量 C 的确定与方案的给出

为了分析广州市的具体情况和计算的方便，我们需要确定 C 中的每个常量的取值，因此我们需要按照一般的情况进行取值。根据模型的定义，我们的取值方式有两种：求解定值、求解期望值和直接取值。

根据公式 (9)，对于需要求解期望值的变量 M_A、M_B、d_A 和 d_B，我们需要获取广州多处地点的人口数以计算出租车出行的里程的期望值。根据 2018 年广州人口规模及分布情况 [2] 的数据（见附录 C），我们借助公式 (9) 求得从机场出发的期望值 d_A 与从城市原点出发的期望值 d_B 如下：

$$\begin{cases} d_A = 35.2382km \\ d_B = 21.2249km \end{cases} \tag{15}$$

利用公式 (13)，求得价格的期望值 M_A 与 M_B 求得结果如下：

$$\begin{cases} M_A = 115.5031\text{元} \\ M_B = 68.9227\text{元} \end{cases} \tag{16}$$

对于可以直接确定的常量 d_0，我们直接计算机场到“市区”（天河区）的点之间需要走过的路程即可。计算结果为 $d_0 = 29.6268km$。

对于需要直接取值的变量 v、K、T_L 和 OC，我们采用上网获取资料或者实地测试的方法得到一组极为靠近一般情况的测试值。借助于百度搜索引擎和实地测试、考察等途径得到的一些零碎信息 [1]，我们给出如下定义：

$$\begin{cases} v = 70km/h; \\ T_L = 1min; \\ OC = 0.6\text{元}; \end{cases} \tag{17}$$

因此

$$\begin{aligned} C &= \frac{(M_A - OC \cdot d_A)(d_B + d_0)}{v(M_B - (d_B + d_0) \cdot OC)} - \frac{d_A}{v} \\ &= 1.2812h \end{aligned} \tag{18}$$

也就是说，当 $T_0 < 1.2812$ h，即 $T_0 < 76.8699$ min 时，我们认为选择方案 A 会更好。当 $T_0 > 1.2812$ h，即 $T_0 > 76.8699$ min 时，我们认为选择方案 B 会更好。综合公式 (2)，我们给出结论

$$\begin{cases} \text{当} f(cn, 2\text{人}, p_0, PA, 1min) < 76.8699min\text{时，我们认为方案 A 相对较优；} \\ \text{当} f(cn, 2\text{人}, p_0, PA, 1min) > 76.8699min\text{时，我们认为方案 B 相对较优；} \end{cases}$$

这就是我们针对某一辆准备返回天河区的某辆在白云机场的出租车所给出来的选择方案。

[1]每种信息参考的链接有：`https://zhidao.baidu.com/question/1732091656422883907.html`，`https://zhidao.baidu.com/question/1432150323617556979.html`。T_L 为实地测试得出的估计值。

对于节假日或者早高峰晚高峰等特殊的时段，它们与平常的时段的差别几乎都体现在 PA 的不同上。我们只需要将 PA 根据实际情况确定每个 t 分钟后的 PA_t 值，即可大致准确地预测其情况，不需要专门对节假日等特殊情况进行专门地分析。

6.4 自变量的界定与相关因素的依赖性分析与合理性分析

经过上面的整理，我们知道，我们需要考虑的自变量有 3 个：cn、p_0 及 PA，且 cn，p_0 均可在自然数[2]中取值。

对于 PA，我们整理了航班的到达信息 [3] 列成表格见附录 D 所示。查找资料计算得到白云机场在 2018 年 8 月到 2019 年 8 月间的平均日出港人数为 101006 人次 [4]，通过广州交通运输月报 [5] 的一个统计数据，其中大概有 9.39% 的旅客会选择搭乘出租车离开机场，即大概每天有 9485 个乘客会前往乘坐出租车。根据附录 D 中的表格我们可以知道，每天有 293 个航班到达机场，因此每辆航班中选择坐出租车的人数的平均值为 $9485 \div 293 \approx 33$ 人。

我们可以按照这种方法构造 PA 向量：对于 t 时刻，我们令 PA_0 等于 t 时刻的航班数 $\times\, 33$，PA_1 的长度等于 $t+1$ 时刻的航班数 $\times\, 33$，以此类推，如果到达表格末尾则返回开头循环，PA 可以取到足够长。

对于 cn，根据公式 (3) 我们可以知道，当 $(cn+1)\cdot T_L > 76.8699$ 即 $cn > 75.8699$ 时，$T_0 < 76.8699$ 必然不成立，因此当 $cn > 75.8699$ 时，方案 A 必然不如方案 B 有优势，因此在这种情况下必然建议选取方案 B，故我们不再对 $(75, +\infty)$ 的 cn 值进行考虑。因此我们取 $cn \in \{cn|0 \leqslant cn \leqslant 75, cn \in R\}$。

对于 p_0，在前文中我们也提到，当前车载客总数 + 本车载客数 $\leqslant$ 等待乘车的乘客数目，即 $K\cdot cn + K \leqslant p_0$ 时，我们认为司机必然是有客可接的（即运力充足或紧缺），即当 $p_0 \geqslant K\cdot cn_{max} + K$ 时，方案 A 与 B 的选择必然仅与 cn 有关，故暂不纳入考虑范围，即 $p_0 \geqslant 152$。因此我们取 $p_0 \in \{p_0|0 \leqslant p_0 \leqslant 152, p_0 \in R\}$

综上，我们可以构造一个 T_0 的三维数组 [3] T'，[4] 其中第一维表示 cn，第二维表示 t 时刻对应的 p_0，第三维表示 PA，则它是一个 $76 \times 153 \times 1440$ 的三维数组。我们对变量之间进行关系分析时，将在这个范围内对他们进行简要分析。

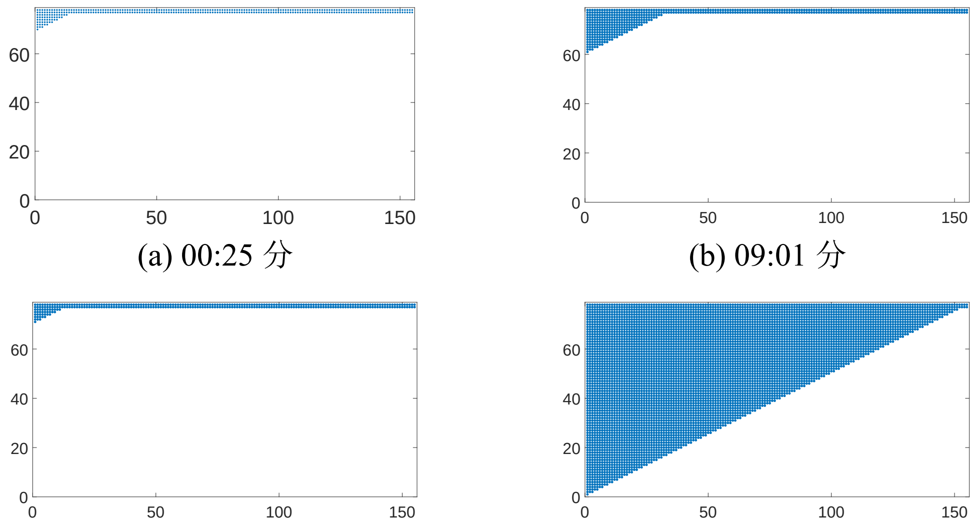
固定 PA，我们将 cn 和 p_0 中不满足方案 A 的点画在图上进行观察。我们节选了部分观察结果如图 3 所示。为了方便对比，我们在上文所确定的范围外的情况，图中的散点坐标范围为 $0 \leqslant cn \leqslant 77$，$0 \leqslant cn \leqslant 154$。

---

[2]本文中“自然数”包含 0。

[3]这里的“三维数组”在数学中指代矩阵升维后的**张量 (Tensor)**。考虑到此处仅对张量进行逻辑运算，更偏向于计算机学科的逻辑运算，因此此处为便于理解以及描述方便使用计算机学科所用的名词将其称呼为“三维数组”。

[4]T' 为与 T 有联系的新的变量，并不表示转置。本文中可能出现的转置符号用 ^{T} 在上标标注。



(a) 00:25 分　(b) 09:01 分

(c) 20:31 分　(d) 04:52 分

图 3　PA 固定时 p_0-cn 图 (部分)

从图 (a)(b)(c) 中我们可以发现，在散点区和非散点区之间有一条斜率几乎相同的“边界斜线”，也就是交界处的 p_0 与 cn 的比值是几乎相同的。在这条“边界斜线”的上方的所有情况都是建议出租车司机选择方案 B 的，而且在不同的时间，这条“边界斜线”的截距不一样。图 (d) 的截距几乎与原点重合，那个时候并没有航班，因此我们猜想这条“边界斜线”的截距是否是一个与接下来补充的乘客的数量，也就是接下来降落的航班的数量存在联系。比较了部分数据后我们发现，截距的大小与进入候车区时接下来一段时间的乘客的补充人数呈正相关的关系。当没有乘客补充（即图 (d) 没有航班）时，截距几乎与原点重合。

因此，我们可以得到 p_0、cn 与 PA 间的两点联系即依赖性：

- 对于同一个地区同一辆车而言，当方案 A 与方案 B 差别不大的时候，无论在什么时候，p_0 与 cn 在坐标纸上几乎都在一条斜率相同的线上；
- 在 p_0 相同的情况下，接下来的航班越少，方案 A 对 cn 的要求也就越高。

这个在现实中也是很合理的解释。如果接下来的航班变少了，那么进入站台等候出租车的旅客也就会越少，方案 B 就相比于方案 A 更加地优越，反之亦然。而航班上下来的人数的多少，与接下来是旺季、淡季、节假日等有着很大的关系，这些因素均可直接或间接体现在 cn、p_0 和 PA 的影响之下。在旺季和节假日，航班的频次变多，下来的人变多，PA 被安排得更为紧凑，p_0 同时也会变大，cn 的要求也就会相应降低，额外的等待时间也就大为降低。反之亦然。

6.5 判断标准的直观阐述

从司机的角度，司机更需要的是一个相对直观的判断标准，因此我们在这里将根据模型给出一个直观的判断标准。

对于白云机场的出租车司机，如果他们认为要在机场载客等待的时间超过 76.8699 分钟，或者说前面有超过 75 辆车在等候时，就应该要考虑更换出行方案。司机可以从接下来的航班信息、淡旺季、节假日等因素考虑，估计接下来的客流量会以多快的速度补充，补充的速度越快，前面等待的车子多的时候就可以考虑继续坚持选择方案 A。在旺季、节假日、高峰期间的客流量会以很快的速度补充，因此可以适当考虑一下在机场等候。

七、 问题三的求解

7.1 $M/M/S/\infty$ 模型建立

我们队伍结合实际考虑，下了飞机需乘出租车离开机场的乘客是因为无法通过其他更便捷实惠的方式离开机场。相比，出租车司机可以结合实际情况做出判断，当位于前面的车辆无客可接时，自身会花费更多的时间成本，因此，在这种情况下，我们认为司机会选择返回市区接客。即实际中，蓄车池里出租车可自行疏散，但乘客不行。故对上车点的设置我们更多考虑乘客排队等车的情况，且在这种情况下，我们认为出租车司机会通过实际乘客人数以及前面的车辆数进行判断选择，形成乘客与出租车一个动态平衡的供求关系，所以蓄车池里的出租车是足够接送所有乘客的。

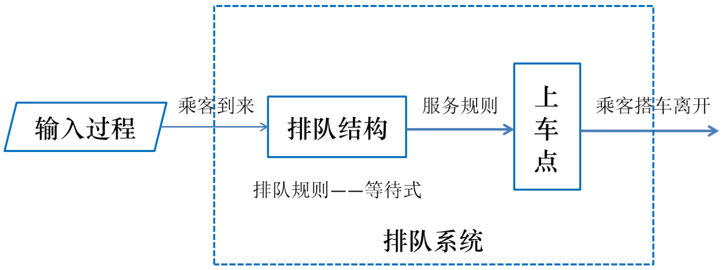


图 4　排队系统图

针对乘客排队乘车这一情况，我们队伍采用等待型 $M/M/S/\infty$ 排队论模型 [6] 求解。$M/M/S$ 表示乘客输入流为 $Poisson$ 流，乘客等待时间服从负指数分布，乘车区有 S 个上车点，并且，由于机场人流量较大、同一时间段降落的航班数目较多，因此，我们认为乘客搭乘出租车这一系统是乘客数目为无穷大的等待制排队系统，即需要从机场到达其他目的地的乘客源源不断地到达乘车区进行搭乘出租车。

首先，等待制模型中规定乘客的到达规律服从参数为 λ 的泊松分布，即在 $[0,t]$ 时间内到达的乘客数 $X(t)$ 服从如下分布：

$$P(X(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \tag{19}$$

因此，乘车区在单位时间内到达乘客平均数为 λ，那么 $[0,t]$ 时间内到达的乘客数目为 λt。其次，乘客上车时间服从负指数分布，而在各个上车点在单位时间内搭载出租车的乘客平均数为 μ，那么乘客上车时间的分布为 $h(t)=\mu e^{-\mu t}(t>0)$ ，所以乘客上车的平均时间为 μ^{-1}。

根据机场实际情况来看，机场人流量较为密集，搭乘出租车的人数数不胜数，故此系统的可能状态集为 $E=\{0,1,2,...\}$。

由以上可知上车点的服务强度 $\rho=\frac{\lambda}{S\mu}$，并列出 K 氏代数方程求出相应的平稳分布如下：

$$P_k=\begin{cases}\frac{(S\rho)^k}{k!}P_0, & 0\leqslant k\leqslant S\\ \frac{S^S\rho^k}{S!}P_0, & k\geqslant S\end{cases}$$

由正则性条件 $\sum\limits_{i=1}^{N}P_i=1$，可得上车点空闲概率：

$$P_0=(\sum_{k=0}^{S-1}\frac{(S\rho)^k}{k!}+\frac{(S\rho)^S}{S!}\frac{1}{1-\rho})^{-1}$$

处于等待的乘客的平均等待队长：

$$L_q=\sum_{j=0}^{\infty}jP_{s+j}=\frac{\rho(S\rho)^s}{S!}P_0\sum_{j=1}^{\infty}j\rho^{j-1}=\frac{\rho(S\rho)^s}{S!(1-\rho)^2}P_0$$

平均乘客数目，即平均队长：$L_s=S\rho+\frac{(S\rho)^s\rho}{S!(1-\rho)^2}P_0$

乘客从开始等待到搭乘出租车的时间，即平均等待时间：$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$

通过以上整理可得 $Little$ 公式：

$$L_s=\lambda W_s, L_q=\lambda W_q$$

其中 W_s 为平均逗留时间，即乘客上车到驶离机场的时间。

由于该机场乘车区有两条并行车道，故我们认为上车点的数目至少为 2，为了使两条车道的乘车率大致相等，我们设定两条车道各自包含的上车点数目相等，故 S 的状态集为 $S=\{2,4,...\}$。

7.2 以白云机场为例求解上车点数目

针对不同的机场，其对应的单位时间内到达的乘客平均数及上车点服务时间可以以实际情况代入计算。比较设置不同的上车点数目得出的乘客平均等待时间，结合机

表 1　排队论参量的取值

单位时间 (min) 到达乘客批次: λ	3.95
乘客以泊松输入流进入的单个时间区间 (min) 上限：t	10
乘客上车到司机发动车子驶离机场时间 (min): μ^{-1}	1

场管理部门意见，当机场管理部门认为得出的乘客平均等待时间是可接受的、在管理部门可安排操作范围内的，则可进行上车点数目设置方案的实施。

我们以白云机场为例，查找资料计算得到白云机场在 2018 年 8 月到 2019 年 8 月间的平均日出港人数为 101006 人次，通过广州交通运输月报的一个统计数据，其中大概有 9.39% 的旅客会选择搭乘出租车离开机场，即大概每天有 9485 个乘客会前往上车点搭车。我们再将这些乘客到达的时间进行划分，其中白云机场夜间有 4 个小时几乎没有航班降落，故这里取一天 20 个小时进行计算，且在此期间降落的航班与航班之间的时间间隔大致为 10 分钟。则以 10 分钟为一个等待搭乘出租车、寻求服务的时间区间。这里每十分钟到达上车点的乘客有 79 个，即平均每分钟到达上车点的乘客大致有 8 人（更精确的值是 7.904 人），但实际上不止一名乘客对应一辆出租车，还可能有拼车等团体坐车行为，因此我们考虑每一辆出租车会平均接送 2 名乘客，则单位时间内到达上车点的乘客有 3.95 批（统计意义上的数值，考虑实际并不都是两个坐一辆车），但实际计算过程按统计数值进行计算。我们通过实际操作发现从乘客上车到出租车司机发动车辆驶离上车点的所有动作，大约可以在 1 分钟内完成。

当上车点数目为 2 时，机车乘车区的服务强度 >1，按这种趋势下去只会使队伍长度越来越长，滞留的乘客越来越多，故我们考虑分别设置 2 个上车点在该车道的左右两侧，即共 4 个上车点。在这种情况下，通过对乘客排队时间以及排队队伍长度的预计、考察是否需要增加上车点。

乘客排队乘车的排队论问题当中的各个参量取值如表 1 所示。

根据 S 的取值，我们可以计算出 $S = 4$ 时对应的各相关数据的值：

处于等待的乘客的平均等待队长：$L_q = 76.8$

乘客从开始等待到搭乘出租车的时间，即平均等待时间：$W_q = 19.44$

由结果可知，当设置四个上车点时，乘客的平均等待队长约为 77，等候时间约为 19 分钟。我们队伍认为，在人流量极为密集的机场，计算得出的等待时间是合理的，故可设置 4 个上车点。

示意图如下：

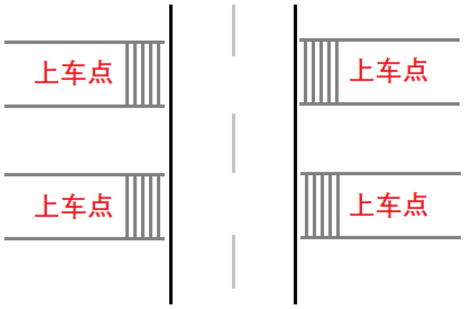


图 5　上车点设置示意图

7.3 方案实施建议及乘车效率分析

为了保障出租车和乘客的安全，我们认为管理部门可介入进行管理。各个上车点的出租车应同时发车，驶离当前位置之后后续车辆才能补上，避免后续车辆提前变道补上的现象出现。同时，对乘客加以引导，使得各个上车点的排队人数大致相等，防止出现个别上车点乘客拥堵、个别上车点乘客稀疏的现象。

总的乘车效率我们将结合只有一个上车点的情况进行表达，当上车点数目为 1 时，乘客和出租车必然存在供不应求的关系，即会出现乘客排队过长的情况，结合乘客逗留时间，我们记上车点数目为 1 时的乘车效率为 0。我们以 10 分钟为一个单位时间，在单位时间内进入乘车区的乘客数目约为 80 人，当上车点数目为 1 时，第一名乘客对应的逗留时间 $W_s1 = 1$ 分钟，第二名乘客对应的逗留时间 $W_s2 = 2$ 分钟，以此类推，故 80 名乘客的逗留时间总和应为：

$$\sum_{i-1}^{80} W_{si} = 3240\text{min}$$

乘客平均逗留时间为：$\frac{\sum_{i-1}^{80} W_{si}}{80} = 40.5\text{min}$

当上车点数目为 4 时，乘客平均逗留时间 $W_s = W_q + \mu^{-1} = 20.44\text{min}$

故总的乘车效率提升了 $\frac{20.44}{40.5} \times 100\% = 50.47\%$。可见，增加上车点的数目可以使乘客排队时间快速缩短，且乘客等待时间在可接受范围内，因此，我们认为上车点的设置是合理的。

八、 模型的改进与问题四的求解分析

8.1 短途车优先方案实施的前提

我们队伍认为对短途载客再次往返的出租车实行优先安排方案的前提是机场滞留一定数量的乘客需多的出租车补充，默认出租车司机回来时还有一定数量的等待乘车的乘客。如果乘客人数不够多不应该执行该优先安排方案，不然会让原本还在等待没

接到乘客出租车在新的一轮接客排队中跟接过乘客但是短途往返的出租车的竞争中处于劣势，可能出现短途车可以一直优先接客但原先在排队队伍里等待的出租车一直接不到客人。无法实现使在蓄车池等待的出租车的收益尽量均衡的初衷。

以上是对优先方案的实行时间的建议，即在有较多乘客等待乘车时才执行，保证蓄车池里的出租车都有接客机会。同时需在实际中设立通道区分有优先权的出租车与无优先权的出租车，可以考虑将不是短途往返的出租车在蓄车池里按一定秩序排队等待接客，短途往返的出租车返回机场后可以进入优先排队通道与同样是短途往返回来的其他出租车按回来的时间先后顺序排队等候载客。即机场至少应该设立两条载客通道，一条或者多条提供给原本在蓄车池等待的非短途往返的出租车载客运行使用；一条给短途往返载客的出租车使用。实现在实物空间上的对有优先权的出租车与无优先权的出租车的区分。实际可能有往返的车辆不是短途接客回来的，但是司机做出回来的选择是基于仅有自己能对自己期望收益负责的担当，相对于短途往返的出租车，这些车辆无法在一定时间内多次往返，我们认为其对短途往返的出租车的收益影响不大。

但不应该无限量地允许短途出租车往返，以免出现某一出租车一段时间内凭优先权多次接送的乘客目的地都是短途, 花在接客路上的时间成本较大多数出租车的少, 且出租车有起步价，行驶里程数越少相当于该出租车的每公里里程收费越高，收益越可观，致最后收益较大多数出租车司机的高。

8.2 优先方案的建立与模型的补充

我们对所有在机场载客，无论是往返几次还是长途载客驶离不归的出租车考察它们在从机场接走乘客的跑车记录的单位时间收益。其中一直短途往返的出租车从概率学上来说占少数，出于可以考察所有出租车的单位时间收益的考虑，我们对一直短途往返机场接客的出租车只考察其 1 个小时内的接客的跑车记录单位时间收益。将乘客目的地与机场的距离不超过 10 公里的视为短途（这里计算过程中视 10 公里为乘客目的地为短途的里程数）。而对于在机场接到长途乘客的出租车，仅考察该次长途送客记录及其之前的送客记录（若有）。

而考量出租车单位时间收益除了需考虑其每次送客里程数还需考虑出租车的时间成本以及油耗成本。其中时间成本需考虑的有出租车初始在机场接客排队时间 t_0、若为短途往返车辆还需考虑在快速通道的排队时间 t1 还有送客过程中的行驶耗时 t_3。其中 t_3 我们有假定司机每单的送客里程数可计算得出，而 t_0、t_1 的计算由我们接下来建立的“理想城市”数学模型给出。

8.2.1 与机场距离为 r 的概率的求解方法

直接使用已有的离散点求解概率，可能会因为机场周围只有少数点而导致概率值的偶然性的出现，因此我们需要将整个城市的人口离散点的数据拓展成一个理想的热力图后再求解出租车到达机场周围半径为 R 内的点的概率值。

首先我们定义一个“理想城市”的概念，并做出如下假设：

- 理想城市存在一个中心，距离这个中心距离相等的点有着相同的人口数（密度）；
- 距离中心 R 公里内的所有点属于这个城市的范围；
- 出租车只在这个“理想城市”的范围载客，不跨城运输；
- 不考虑邻城的影响。

定义这个“理想城市”后，我们将会完成如下几步工作：

(1) 计算这个“城市”的中心　“中心”的计算方法类似于物理中不等重平面的重心的计算方法，而在这里是由足够多组非重复坐标且人口数已知的离散的点确定的。设第 i 个点的经纬度为 (lat_i, lon_i)，对应的人口数为 pop_i，中心坐标为 G，总共有 N 组点，则

$$G = \sum_{i=1}^{N}(lat_i, lon_i)\frac{pop_i}{\sum_{j=1}^{N} pop_j} \tag{20}$$

在理想状况下，$N \to \infty$。

(2) “城市”每个点的人口数的拟合　以距离 G 的距离为自变量，pop 为因变量，对这些点进行回归分析，并令这个对应关系为 $\omega(r)$，则

$$pop\text{'} = \omega(r), 0 \leqslant r \leqslant R \tag{21}$$

则这个理想城市中的所有点的人口数都可以用 $\omega(r)$ 表示。

(3) 计算机场周围距离在 r 内人数并计算居住概率　假设机场距离 G 的距离为 r_0，构建以 G 为原点，从 G 到机场的向量为极轴正方向的极坐标系，则机场所在点坐标为 $(r_0, 0)$，则到机场距离在 r 内的点的总人数我们可以用积分求解得到。圆心在 $(r_0, 0)$ 半径为 a 的圆的极坐标方程为

$$r^2 - 2rr_0cos(\theta - \psi) + r_0^2 = a^2$$

当 θ 恒定时，根据一元二次方程的求根公式，我们可以求得

$$\begin{cases} r = r_a \pm r_b \\ r_a = r\cos(\theta - \psi) \\ r_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{[2r_0\cos(\theta-\psi)]^2 - 4(r_0^2 - a^2)} \end{cases}$$

当存在经过圆的 θ 时，

$$\theta_+ = \arcsin\frac{a}{r_0}$$
$$\theta_- = -\arcsin\frac{a}{r_0}$$

因此与机场距离为 r 的地点的人口总数 po_r 可以表示为

$$po_r = \int_{\theta_-}^{\theta_+} d\theta \int_{r_a-r_b}^{r_a+r_b} \omega(r)dr$$

“理想城市”人口总数 po 可以表示为

$$po = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \omega(r)dr$$

因此任选一个人，他在机场附近距离为 r 处的概率 p_r'（即他前往这附近的概率）可以表示为

$$p_r' = \frac{po_r}{po} \quad = \frac{\int_{\theta_-}^{\theta_+} d\theta \int_{r_a-r_b}^{r_a+r_b} \omega(r)dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \omega(r)dr} \tag{22}$$

8.2.2 根据概率求解可能的优先车道与通常车道的 T_0 比值

根据上一小节的内容我们可以求得机场的出租车前往与机场距离为 r 处的概率，那么我们就可以近似地认为，如果说前往机场距离 r 之内的地方为短途出租车，那么在一般情况下，优先车道等候的车辆数与总车辆数的比值为 p_r'，也就是对应的 T_0 的比值为 $p_r' : 1 - p_r'$，当经过了一定的时间，短途出行的出租车的频率稳定在概率的附近时，我们可以认为 $t_1 : t_0 = p_r' : 1 - p_r'$ 成立。

在某一个满足上述条件的时刻，假如站台上有 N' 辆车，那么 $t_0 + t_1 = T_L N'$。因此借助 t_0□t_1 与 N' 即可尽可能地估算出两条车道所花的时间。

8.3 改进后模型的求解与检验

实际若短途送客里程大于等于 10 公里，一个小时最多只能往返 3 次（第 3 次只计送客时间，不计返程时间）。故实际可考虑一个小时给予短途往返的出租车进入优先排队通道的次数上限大约为 3、4 次。我们还需考察这样设立优先排队方案是否合理，分

析出租车跑车情况大概有以下几种：三次均为短途接客（考察范围为 1 小时）、一次短途往返后长途驶离机场不归、两次短途往返后长途驶离机场不归、初始接客即为长途。由在问题一建立的单位时间收益计算模型可以对应的计算出以上情况的对应单位时间收益。如果以上几种情况的出租车单位时间收益大致均衡，即证优先方案可行。

以白云机场为例分析，短途车接客主要送至白云机场所在区，花都区。其与机场的距离由两者的经纬度确定为 $8.68km$，考虑出租车司机如果接连的送客目的地均为花都区，一个小时内最多往返次数由：$(8.68 \times 2 \div 70)^{-1}$ 计算并向下取整得到为 4 次，故我们建议一个小时内同一短途车能进入优先排队通道的次数为 4 次，实际上并不是司机返回就立马能排上接客，所以 4 次对短途送客的出租车司机可视为一个较合理的值。

以机场共有 40 辆出租车等待载客的情况进行分析，则由我们建立的时间成本计算模型求解出来，车辆初始需在蓄车池等待 37.73min、在快速通道排队的时间为 2.27 min。短途以 10 公里代入作近似计算，长途以问题一中求解出来的机场送客目的地距离期望值 d_A（35.23 km）代入计算。

则考察的白云机场出租车接客情况大致有以下几种情况：

出租车跑车情况概览	用时 (min)	油耗成本 (元)	接客收益 (元)	单位时间收益（min/ 元）
三次均为短途接客	85.13	30	90.6	0.7119
一次短途往返后长途驶离机场不归	156.14	33.138	145.7	0.7209
两次短途往返后长途驶离机场不归	175.56	45.14	175.9	0.7448
初始接客即为长途	126.73	21.14	115.5	0.7446

可以看到在设定情景的优先安排方案下，短途往返的出租车的单位时间收益虽然还是较其他跑车情况的出租车低，不过单位时间收益最大的差异仅为 4.62%，我们可以认为该优先安排方案若实施能较好地均衡机场出租车的收益。

即我们队伍认为对短途往返机场接客的出租车可以通过设立优先排队通道让其与同样是往返回来接客的出租车按先后顺序排队等待载客，该通道与蓄车池其他出租车的排队通道具相同的优先程度等待载客。但因为往返机场接客的出租车相对于其他通道的车毕竟是少数，从而达到优先的排队效果。但不是往返的出租车可以无限次享有优先权，为一个小时四次。且该优先安排策略应在有一定数量的乘客等待乘车的情况下执行，保证尽量多的出租车可以有收益，而不是短途往返的凭优先权多次揽客，造成出租车收益的差距拉大。

九、 总结与分析

9.1 总结

出租车是机场主要的交通工具之一，为了给出租车司机提供选择方案和提高机场乘车效率，我们研究并解决了以下问题：

问题一：司机的选择基于单位时间收益最大化，我们通过对市区及机场周围的人口稠密情况估算乘客去各个目的地的概率，从而计算得到了基于两种选择的乘客期望目的地距离分别为 d_A，d_B。建立了单位时间收益计算模型，司机可根据蓄车池前车数目和候车的乘客人数实时比较两个选择的收益大小关系，从而做出选择。

问题二：以白云机场为例，求得了司机从机场出发对应的（A）、（B）选项的目的地距离期望值分别为 $35.2382km$、$21.2249km$，之后的首单收益期望值分别为 115.5031 元、68.9227 元。提供了计算出租车等待时间的预估方法，当司机在蓄车池中等待的时间 < 76.8699 min 时，由两种选择的单位时间收益大小关系，可知选择（A）更优，反之选择（B）更优。

问题三：采用排队论方法建立数学模型，给出建议设立的上车点数目为 4，在这种情况下，乘客的平均等待队长为 76.8，平均等待时间为 19.44 min。同时，给出了方案实施建议，该方案使乘车效率提高了 50.47%。

问题四：我们利用已有的城市的数据，建立“理想城市”模型对整个城市的人口分布进行了估计并求解其期望值。通过对乘客目的地期望值的计算分析，我们得到允许短途司机获得“优先权”的最大次数为 4。在设定情景的优先安排方案下，我们得到用于短途司机的快速安排通道的排队时间仅为 2.27min，且各出租车的单位时间收益最大的差异仅为 4.62%，故我们认为达到了收益均衡的效果。

9.2 优缺点分析

优点

- 较好地将可能出现的不可控因素以期望的形式确定了下来
- 量化了出租车司机眼中的“输入”和“输出”信息，简化了建模和运用模型的过程
- “理想城市”的模型为离散值转换为连续值提供了方法的参考

缺点

- 数据量相对匮乏，对模型的检验尚有一定的局限
- 按照直线距离计算到达地点的概率和期望会产生实际路程与直线距离之间的误差
- 检验模型的过程中将一些次要因素定为常量，这会产生一定的误差
- “理想城市”的模型仅适用于“理想城市”，与实际城市的人口分布存在一定的区别

参考文献

[1] 引用至 http://jt.gz.bendibao.com/news/2018510/240581.shtml

[2] 数据来源：广州市统计局 (http://tjj.gz.gov.cn)

[3] 数据来源：广州白云国际机场官网

[4] 数据来源：http://stock.jrj.com.cn/share,600004,gggg_3.shtml

[5] 数据来源：广州交通运输月报〔2019〕第 7 期 (http://zwgk.gz.gov.cn/GZ16/8.2/201908/81512b998ff249058c9843ba265ee4f8.shtml)

[6] 徐啊俊, 陈志荣. 基于 M/M/S 的高校餐厅配餐模型研究与应用 [J]. 信息技术,2019,43(08):29-32+36.

附录 A 计算等待时间的对应关系 f 的算法代码

```matlab
%% 计算所需要的等待时间
function [wt]=waitTime(cn,K,p_0,PA,T_L)
    wt = 0;                                     % 从 t = 0 时刻开始
    n = cn + 1;                                 % 把自己加入车队中
    p = p_0;                                    % p 为 t 时刻的乘客数
    p_add = 33;                                 % 单位乘客数

    while n > 0                                 % 如果还有车
        if(p > 0)                               % 如果站台有客
            n = n - 1;                          % 车子载客
            p = p - K;                          % 带走乘客
            if p < 0
                p = 0;                          % 小于 0 则置为 0
            end

            if wt==fix(wt)                      % 取下界（不包含下界）
                tl = wt + 1;
            else
                tl = ceil(wt);
            end
            tu = floor(wt + T_L);               % 取上界
            if tl<=tu
                p = p + sum(PA(tl:tu)) * p_add; % 站台补充乘客
            end

            wt = wt + T_L;                      % 时间线推至 T_L 时间过后
        else
            if wt==fix(wt)
                wt = wt + 1;
            else
                wt = ceil(wt);    % 把时间线往前推（等待乘客）
            end
            while PA(wt) == 0
                wt = wt + 1;      % 如果还是没有乘客继续往前推时间线
            end
```

```
        p = p + PA(wt)*p_add; % 站台补充新的乘客
      end
    end
end
```

附录 B 计算出租车价格映射 g 的 $matlab$ 代码

```
%% 出租车价格计算
function [p]=priceCalc(s)
    % 走公里的收益s
    % 出租车收费标准来源: http://jt.gz.bendibao.com/news/2018510/240581.shtml

    [X,Y] = size(s);
    p = zeros(X,Y);
    for i = 1:X
        for j = 1:Y
            if(s(i,j)<=3)
                p(i,j) = 12;
            else
                if(s(i,j)<=15)
                    p(i,j) = 12 + 2.6 * (s(i,j)-3);
                else
                    if(s(i,j)<=25)
                        p(i,j) = 12 + 2.6 * (15-3) + 2.6 * 1.2 * (s(i,j)-15);
                    else
                        p(i,j) = 12 + 2.6 * (15-3) + 2.6 * 1.2 * (25-15) + 2.6 *
                            1.5 * (s(i,j)-25);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```

附录 C 广州一些地区人口数及其经纬度信息

地区	纬度	经度	常住人口 (万人)
荔湾区	23.128594	113.238879	97
越秀区	23.131377	113.261503	117.89
海珠区	23.086615	113.311916	169.36
天河区	23.127191	113.355747	174.66
白云区	23.160687	113.267833	271.43
黄埔区	23.10901	113.45378	111.41
番禺区	22.93893	113.37863	177.7
花都区	23.40674	113.214859	109.26
南沙区	22.774673	113.603432	75.17
从化区	23.551168	113.581253	64.71
增城区	23.292059	113.832621	121.85
白云机场	23.38786	113.2973	0.8177192

广州市经纬度（城市原点）为 (113.23333, 23.16667)。白云机场的数据为 2018.8-2019.8 日均进港乘客数，数据来源:`http://210.72.4.58/portal/queryInfo/statisticsYearbook/index`

附录 D 航班到达时刻信息表 (2019 年 9 月 12 日)

第 i 行 j 列的值 k 表示在 i 时 j 分有 k 架航班到达广州白云国际机场。

	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
0	0	2	2	2	1	0	3	2	2	2	3	0
1	1	2	3	1	2	3	2	1	4	1	0	0
2	2	2	2	2	2	1	2	1	0	0	1	0
3	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
8	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
9	0	0	0	2	1	1	1	2	2	2	0	3
10	1	2	2	1	1	0	1	2	1	2	3	3
11	0	2	0	1	0	1	2	2	2	1	2	2
12	1	1	1	2	0	2	0	0	0	0	1	3
13	2	1	1	1	2	0	2	0	0	2	2	0
14	2	2	1	3	1	0	1	0	1	0	2	2
15	0	1	3	2	0	1	3	1	1	3	1	1
16	1	1	0	0	0	2	1	0	2	1	3	1
17	0	0	1	1	0	1	1	1	2	0	2	2
18	1	0	2	2	1	2	0	2	3	1	1	2
19	0	2	1	2	0	1	1	1	1	1	2	1
20	1	2	0	1	1	2	0	1	1	1	1	3
21	0	3	1	0	3	2	1	0	2	2	2	2
22	3	3	1	1	2	1	1	1	1	1	0	2
23	1	1	1	0	2	2	3	1	1	1	2	0