“同心协力”策略问题的研究

摘要

“同心鼓”是一项团队协作能力拓展项目，其中蕴含着丰富的数理知识。本文通过建立多目标规划数学模型，运用变步长遍历搜索算法，对“同心鼓”最佳协作策略问题进行了深入研究。

针对问题一，我们对最佳协作策略进行了机理分析，将单位分钟内颠球次数最多作为第一目标函数，每个队员颠球时所需的力量最小作为第二目标函数，并且将球与鼓运动至碰撞点的时间之差定义为**时机**，同时在基于一定的假设条件下，选取排球被颠起的高度不低于40cm 和队员之间的最小距离不得小于 60cm 作为两个约束条件，建立了多目标规划数学模型。通过使用变步长遍历搜索算法，当**球的运动周期大于鼓的运动周期**时，得出了最佳协作策略，即在队员人数为 8 个的条件下，每个人只需施加与水平面呈 70.73° 的力，力的大小为 5.022N，且发力时机为 0.000342s，颠球次数为 **109 次/分钟**，颠球高度为 **40cm**。

针对问题二，考虑到现实情形中鼓面可能出现倾斜的现象，我们基于刚体定轴转动定律，运用微积分近似替代的思想，将鼓面发生倾斜时的角度、力作用的时长和拉力等参数联系起来，建立起鼓面模型，通过循环算法，逐步迭代求解出倾斜角和力作用的时长、作用力相互之间的关系，最后求解出题目所要求的鼓面倾角，序号 1 至 9 分别为：**0.710°、1.184°、0.215°、3.709°、3.709°、0.838°、3.709°、1.678°、0.623°。**

针对问题三，考虑到问题一的策略是在理想状态下才能实现的，结合问题二中的影响因素，我们将问题一的策略作出调整。基于问题一的模型增加鼓面倾斜角这一约束条件，则拉力的作用方向也要受到约束。基于问题二的数据，改变单一变量，得出了鼓面倾斜角随拉力倾斜角的增大而增大的结论。最后用变步长搜索算法求得两组策略，并进行分类讨论：第一种策略是拉力为 81.4N，拉力与水平面夹角为 3.34°，颠球 109 次/分钟，相对省力，但不稳定；第二种拉力为 88.6N，拉力与水平面夹角为 3.07°，颠球 109 次/分钟，相对稳定，但费力。

针对问题四，我们首先对排球进行了受力分析，得知排球做斜抛运动，求得排球在碰撞前到达鼓面所花费的时间为 0.6998s。其次通过几何关系求得碰撞时鼓面与水平面成 0.5 度角。之后结合问题二的模型，再次采用微分逼近求值的方法，设置拉力与拉力倾斜角的搜索范围，通过计算机仿真模拟，求得鼓面与水平面的夹角与时间的关系，进而求出当夹角为0.5 度时鼓面到达该位置所花的时间。我们根据仿真结果，选取发力时机为 0.694s、拉力为1.12N 的条件，进而得出 10 名队员中甲队员施加 4.275N、乙队员施加 3.901N、其余队员施加 3.528N 的力的结论。经分析可知在现实情形中这种调整策略的实施效果不佳，操作不易控制。

关键字： 最佳协作策略；多目标规划；变步长遍历搜索算法；微元法

一 问题的重述

“同心协力”（又称“同心鼓”）是一项团队协作能力拓展项目。该项目的道具是一面牛皮双面鼓，鼓身中间固定多根绳子，绳子在鼓身上的固定点沿圆周呈均匀分布，每根绳子长度相同。团队成员每人牵拉一根绳子，使鼓面保持水平。项目开始时，球从鼓面中心上方竖直落下，队员同心协力将球颠起，使其有节奏地在鼓面上跳动。颠球过程中，队员只能抓握绳子的末端，不能接触鼓或绳子的其他位置。

项目所用排球的质量为 270g。鼓面直径为 40cm，鼓身高度为 22cm，鼓的质量为 3.6kg。队员人数不少于 8 人，队员之间的最小距离不得小于 60cm。项目开始时，球从鼓面中心上方 40cm 处竖直落下，球被颠起的高度应离开鼓面 40cm 以上，如果低于 40cm，则项目停止。项目的目标是使得连续颠球的次数尽可能多。

运用数学建模的相关知识，解决以下问题：

1. 在理想状态下，每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度，试讨论这种情况下团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。
2. 在现实生活中，由于队员发力的时机和力度难以做到精确控制，存在一定误差，因此鼓面会出现倾斜现象。试建立模型描述队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系。设队员人数为 8，绳长尾 1.7m，鼓面初始时刻是水平静止的，初始位置较绳子水平时下降 11cm，队员们的不同发力时机和力度如表 1 所示，求 0.1s 时鼓面的倾斜角度。
3. 在现实生活中，根据问题 2 的模型，你们在问题 1 中给出的策略是否需要调整？如果需要，如何调整？
4. 当鼓面发生倾斜时，球跳动方向不再竖直，此时需要队员们调整拉绳策略。假设人数为 10，绳长为 2m，球的反弹高度为 60cm，相对于竖直方向产生 1 度的倾斜角度，且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为 1:2.为了将球调整为竖直状态弹跳，请给出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度，并分析在现实情形中这种调整策略的实施效果。

二 问题的分析

2.1 问题一的分析

问题一要求我们在理想状态下，提供团队在“同心鼓”项目中的最佳协作策略，难点在于当队员人数一定且队员间的距离不得小于 60cm 的情况下，如何提供最佳协作策略。根据题目和我们的分析，我们认为最佳协作策略应当做到以下两点：一是连续颠球的次数尽可能多；二是每个人只需施加最小的力来达到项目的目标。

2.2 问题二的分析

问题二要求我们考虑现实条件下“同心鼓”项目中鼓面出现倾斜的情况。因为鼓面中出现角度、时间、施加力等参数，且鼓面倾斜的过程可以类别为圆柱体绕其中心轴进行转动的过程，所以我们首先采用刚体定轴转动定律，将问题中的参数联系起来，求得角加速度与时间的函数关系式。接着采用积分的思想，求得角速度与发力时间的函数关系式。最后采用微元法，将角速度和时间不断进行切割，再将其累加起来，求得倾斜角。

2.3 问题三的分析

基于问题二建立的模型，我们可以得知鼓面的倾斜角会随拉力的倾斜角的增大而增大，而且基于问题二的结果可知，现实中鼓面倾角将不会超过 10°，因此我们调整拉力的倾斜角在 10 度以内，在绳长仍然为 1.75m 的前提下，队员将向后移动。又根据问题二的模型，调整拉力在 80~90N 的范围内，利用循环遍历搜索算法，计算出在特定条件下排球下降的时间，从而得出最佳协作策略。

2.4 问题四的分析

问题四要求我们修正球的上升轨迹，通过已知球上升时的倾角，可求得下降至水平时与竖直方向的夹角。因为鼓面使小球竖直上升，所以再通过边角关系可求得碰撞时鼓的倾斜角度。为了满足该倾斜角度，需要调整人的拉力与拉力角度。因此根据模型一设置出拉力与角度的范围。在此范围内取值，运用问题二模型，计算该拉力与角度下，鼓的倾斜角变化。记录下当倾斜角变化至满足题意的倾斜角时的参数。算出所有满足的参数，每组参数构成一种方案。针对不同的要求，选择不同的方案。

三 符号说明

符号	说明
m_1	排球的质量
m_2	同心鼓的质量
F	某一个队员的拉力
θ	队员的拉力与水平方向所成的倾斜角
v_1	排球第一次下降时的速度
v_2	同心鼓第一次上升时的速度
$v_1^{'}$	排球碰撞后上升时的速度
$v_2^{'}$	同心鼓碰撞后下降时的速度
b	队员之间的距离
h	排球被颠起的高度
t	排球下降时所需的时间

四 模型假设

4.1 假设排球在运动过程中所受的空气阻力忽略不计。
4.2 假设绳子的质量是忽略不计的。
4.3 假设所有的碰撞均为弹性碰撞，不考虑能量损失。
4.4 假设同心鼓每次颠完球后都会返回到出发点。

五 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

首先我们对绳子和同心鼓分别进行了受力分析和运动分析，找到题目所提到的各个参数的递推关系；其次，我们根据题意，设立了约束条件，建立了多目标规划模型；再次我们根据题目所给的假设条件和我们设定的理想条件，通过变步长遍历搜索算法，求得在实现目标时每个人所施加的力以及在该策略下的颠球高度，从而得出最佳协作策略。

5.1.1 受力分析

本文假设绳子的质量忽略不计，当排球下降时，空气阻力忽略不计，且排球与鼓面的碰撞为弹性碰撞，即排球在碰撞时无动能损失。因此，本文在平面内分别对排球和同心鼓分别进行受力分析。为了方便阐述，我们只分析一个人对绳子的拉力，之后在求解过程中再相应地计算总拉力。如图所示，为了让同心鼓在排球下落的同时能够与其发生碰撞，同心鼓受到人的拉力，同时也受自身的重力作用。而此时排球在下落过程中做理想状态下的自由落体运动。

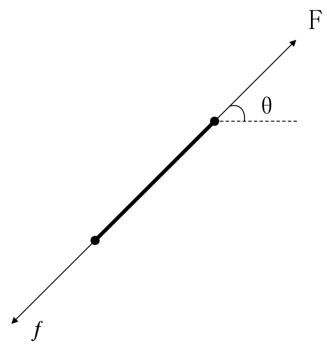

图 1 绳子受力分析图

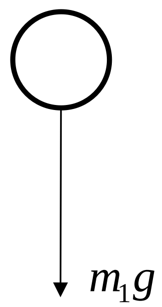

图 2 排球受力分析图

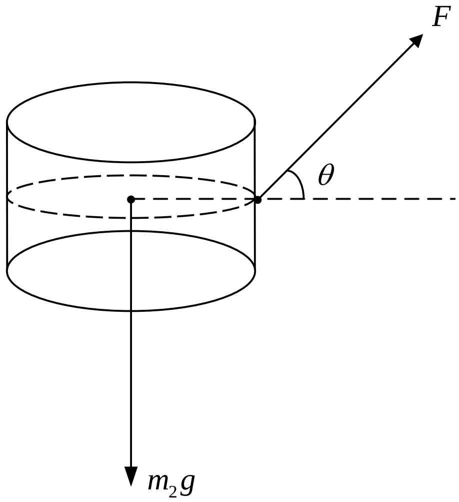

图 3 同心鼓受力分析图

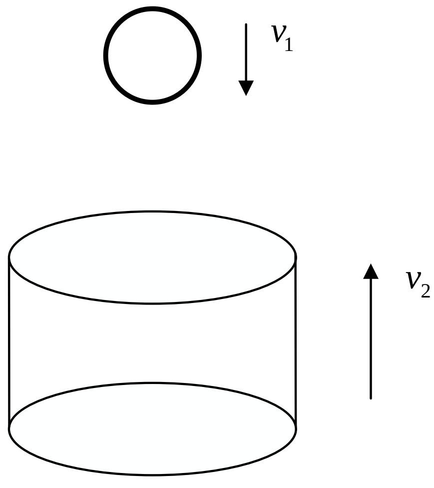

图 4 同心鼓和排球的运动分析图

其中排球的质量为m_1，同心鼓的质量为m_2，人的拉力为F，拉力的方向沿绳子收缩

的方向，拉力的方向与水平方向所成的倾斜角为θ，绳子受到同心鼓的反作用力为f。

5.1.2 最佳协作策略模型

为了方便我们之后进行推导和阐述，我们将连续颠球的次数尽可能多转化为球每次下落到鼓面的时间尽可能短，设排球下落一次所需时间为t_1 ,即我们的目标函数为：

$$\min t_1 \tag{1}$$

对于队员人数的设置，我们认为可以不优先考虑，只要人数不少于 8 人即可。我们的目标是在给定人数的前提下，每个人施用最小的力，达到所需的目标，其表达式如下：

$$\min F \tag{2}$$

针对队员之间的最小距离，题目要求不小于 60cm，如果将其增大的话，每个人所施加的力也会增大，这与我们的目标是相悖的。所以此时我们可以假设在理想情况下，队员的站位是不发生变化的，因此我们设定约束条件一为：

$$b = 0.6m \tag{3}$$

根据题目，排球被颠起的高度 h 应离开鼓面 40cm 以上，若低于 40cm，则项目停止。因此我们可以设定约束条件二为：

$$h \geq 0.4m \tag{4}$$

综上所述，可以得到团队的多目标规划模型[2]：

$$\begin{cases} \min t_1 \\ \min F \\ \mathrm{b} = 0.6m \\ h \geq 0.4m \end{cases} \tag{5}$$

5.1.3 运动分析

根据牛顿第二定律可知，同心鼓在向上提升的过程中做加速度为a的匀加速直线运动。其在竖直方向上的运动规律为：

$$F\sin\theta - m_2 g = m_2 a \tag{6}$$

$$s_2 = \frac{1}{2}at_2^2 \tag{7}$$

$$v_2 = at_2 \tag{8}$$

排球在碰撞前做自由落体运动，其表达式为：

$$s_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \tag{9}$$

$$v_1 = gt_1 \tag{10}$$

排球从鼓面上方 40cm 处落下，其表达式为：

$$s_1 + s_2 = 0.4 \tag{11}$$

球与鼓运动至碰撞点的时间之差定义为时机，其表达式为：

$$OPP = t_1 - t_2 \tag{12}$$

设排球下降的速度为v_1，同心鼓上升的速度为v_2，碰撞后两个物体的速度分别$v_1^{'}$、$v_2^{'}$，物理学中动量守恒定律为：

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^{'} + m_2 v_2^{'} \tag{13}$$

能量守恒定律为：

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^{'2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{'2} \tag{14}$$

两者发生的碰撞为弹性碰撞，则碰撞后速度为：

$$v_1^{'} = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{15}$$

$$v_2^{'} = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{16}$$

由（11）式可知，若$v_1^{'} < v_1$，则排球返回时所达到的高度将小于 40cm,与（5）式相矛盾。又因为要达到连续颠球的次数尽可能多的目标，则需要使$v_1^{'}$尽可能小，从而使排球返回的时间尽可能小，因此我们可得

$$v_1 = v_1^{'} \tag{17}$$

联立（9）（10）（12）可得

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \tag{18}$$

$$v_2 = -v_2^{'} \tag{19}$$

排球碰撞后做运动方向向上的匀减速直线运动，其表达式为：

$$s_1^{'} = v_1^{'} t_1^{'} - \frac{1}{2} g t_1^{'2} \tag{20}$$

同心鼓碰撞后做运动方向向下的匀加速直线运动，其表达式为：

$$s_2^{'} = v_2^{'} t_2^{'} + \frac{1}{2} g t_2^{'} \tag{21}$$

为了让鼓有充足的时间进行第二次碰撞，必须满足以下条件：

$$T_{准备} = t_1' - t_2' \tag{22}$$

$$T_{准备} > 0 \tag{23}$$

如图所示，红点表示 8 名队员的站位，r 表示队员到鼓面中心的距离，r_1 表示绳子的长度，r_2 表示鼓面的半径，φ 表示两根绳子之间的夹角

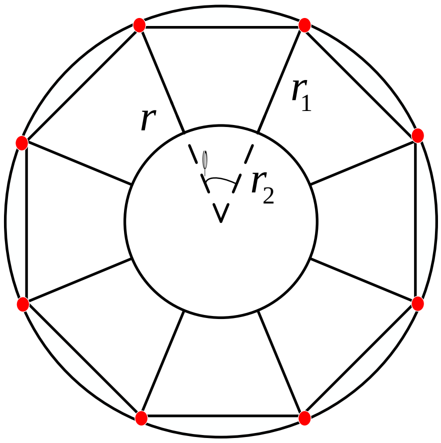

图 5 队员位置分配图

由于 $r_2 = 0.2m$，通过余弦定理可知，$r_{\min} \approx 79$，则 $r_1 \geq 59$。考虑到人体的平均身高在 1.7m 左右，我们设置绳长最高不超过 2m，因此 $r_1 \in [0.6, 2.0]$。

5.1.4 基于变步长遍历搜索算法[1]进行求解与分析

为了求得每个人所需施加的最小力，我们采用了变步长遍历搜索算法。我们设置了力的区间为[1,100]，设置步长为 1，在[1,100]范围内，经 python[3]枚举遍历，确定了 F 的最小值在 5 左右。

为达到 0.001 的精度，进一步缩小 F 的步长为 0.001，在[5,5.1]的范围内，再次经 python 枚举遍历，确定 F 的精确值为 5.022N，鼓的运动时间为 0.275534s，排球的运动时间为 0.275569s，将上述数据代入（22）和（23）式，经检验，满足条件。

在这一条件下，得到了最佳协作策略，即在绳长为 1.769m，队员人数为 8 的条件下，每个人只需施加 5.022N，使得团队 1 分钟内连续颠球 109 次。

表 1 最佳协作策略

队员人数	8	发力时机	0.000342s
绳子长度	1.769m	发力方向	与水平方向成 70.73°
每分钟颠球次数	109	每个人所需最小力	5.022N

5.2 问题二模型的建立与求解

针对问题二，我们开始考虑队员们发力时机和力度无法做到精确控制、存在一定误差的情况，此时鼓面会出现倾斜。我们将鼓面倾斜的过程类比成一个圆柱体绕其中心轴转动的过

程，由此可以采用刚体定轴转动定律，引入转动惯量，建立起描述鼓面倾斜角度与队员发力时机、用力大小和某一特定时刻的关系的模型。

5.2.1 同心鼓的转动惯量[4]的推导

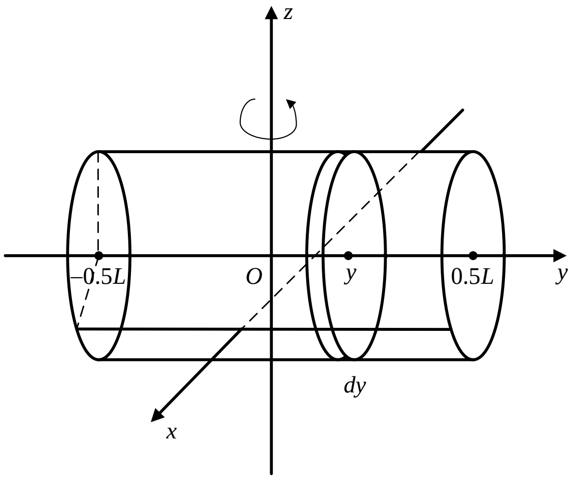

图 6 z-y 平面上的分析

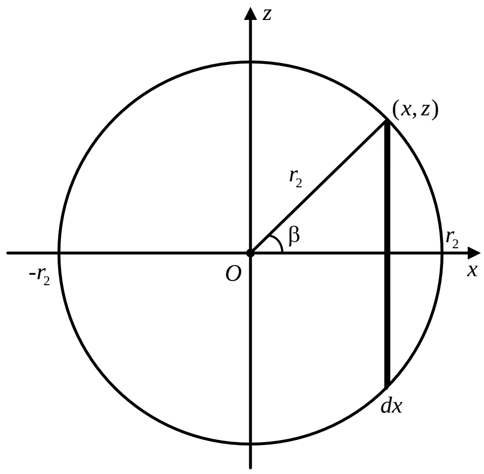

图 7 z-x 平面上的分析

首先进行转动惯量的推导。在同心鼓上取一厚度为 dy 的微圆柱体，再在微圆柱体上切一宽度为 dx 的微细长方体，如上图，该微细长方体的一端的坐标为 (x,z) ，设该点与圆心的连线同 x 轴的夹角为 β ，同心鼓的半径为 r_2 ，则有

$$x = r_2 \cos\beta, y = r_2 \sin\beta \tag{24}$$

同心鼓的密度为:

$$\rho = \frac{m_2}{\pi r_2^2 L} \tag{25}$$

细微长方体的体积为:

$$dV = 2zdxdy \tag{26}$$

质量为:

$$dm = \rho dV = 2\rho zdxdy \tag{27}$$

到转轴 Z 的距离为:

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{28}$$

则细长方体的转动惯量为：

$$dJ_0 = R_1^2 dm = (x^2 + y^2)\rho dV = 2\rho z(x^2 + y^2)dxdy \tag{29}$$

则整个细微圆柱体的转动惯量为

$$dJ = J_0 = \int dJ_0 = \int_{-r_2}^{r_2} 2\rho z(x^2 + y^2)dxdy \tag{30}$$

将 $x = r_2 \cos\beta, z = r_2 \sin\beta$ 代入上式，解得

$$dJ = \int_{-r_2}^{r_2} 2\rho r_2 \sin\beta(r_2{}^2 \cos^2\beta + y^2)dxdy \tag{31}$$

积分后得到整个圆柱体的转动惯量为

$$J = \int dJ = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\rho\pi r_2^2 y^2 + \frac{\rho\pi r_2^4}{4})dy = \frac{m_2 r_2^2}{4} + \frac{m_2 L^2}{12} \tag{32}$$

5.2.2 基于刚体定轴转动定律[4]的鼓面模型的推导

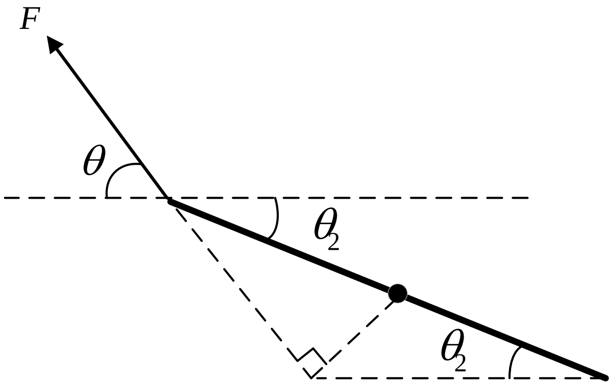

图 8 同心鼓倾斜时的受力分析图

如图 8 所示，我们忽略鼓身高度，分析同心鼓上平面的受力情况，且我们将平面等效为一根线段，从而分析同心鼓在发生倾斜时自身的受力情况。

假设鼓面上的倾斜角为θ_2，发生转动时的角速度为ω，角加速度为α，发力时机为t。图上线段的中心点表示鼓面中心，拉力 F 对鼓面中心始终存在力矩。刚体定轴转动定律是合外力矩对刚体的瞬时作用规律，其表达式为：

$$Fr_2 \sin(\theta\text{-}\theta_2) = J\alpha \tag{33}$$

则可得角加速度与发力时间的函数关系式：

$$\alpha = \frac{0.2F\sin(\theta - \theta_2)}{\frac{m_2 r_2^2}{4} + \frac{m_2 L^2}{12}} \tag{34}$$

针对问题二所给条件，（25）式中的合外力 F 在不同情况下应当从不同角度去考虑。

表 2 只有一个人用力不同的情况

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80

如表 2 所示，在 t=0 的条件下，有一位队员发力大小为 90N，而其他队员发力大小均为 80N，我们可以将 90N 分解成 80N 和 10N，使得该情况等效成有一个 10N 的力作用在鼓面上，从而导致鼓面的倾斜。此时的合外力 F 即为 10N。

表 3 有两个人同时用力不同的情况

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80

如表 3 所示，在 t=0 的条件下，有两位队员发力大小为 90N，其余队员发力大小均为 80N，我们同样可以将此情况等效成在相邻两点上，有两个 10N 的力分别作用在鼓面上，从而导致鼓面的倾斜。此时由于合外力的情况比较复杂，我们将两个力分别沿水平方向和竖直方向进行分解。

在水平方向上，可以将两个水平力平移到鼓面中心点处，由于两个力与水平方向所成的倾斜角是相同的，因此两个水平力是相等的。根据绳子的长度为 1.7m，初始位置较绳子水平时下降 11cm，故由余弦定理可知 $\theta = 3.709°$。根据等腰三角形定理，我们可以求得水平方向的合外力为 $F_{x合} = 2F\cos 3.709° \sin 67.5°$。

在竖直方向上，由于两个竖直力对鼓存在翻转力矩，而根据力的平移定理，作用在刚体上某点的力可以等效地平移到刚体上任一点，但必须在该力与该平移点所决定的平面内附加一力偶此力偶之矩等于原作用力对平移点之矩。因此两个竖直力可以同时平移到连接线的中点处，此时因力的平移产生的两个力偶将会相互抵消。竖直方向上的合外力作用于该点处，大小即为两个竖直力之和，用式子表示为 $F_{y合} = 2F\sin 3.709°$

综上所述，通过力的合成定理便可以得出合外力的大小和方向。

推算出 F 之后，我们在 t=0 的情况下可以得到 $\theta_2 = 0$，代入（25）式可得角加速度 α。

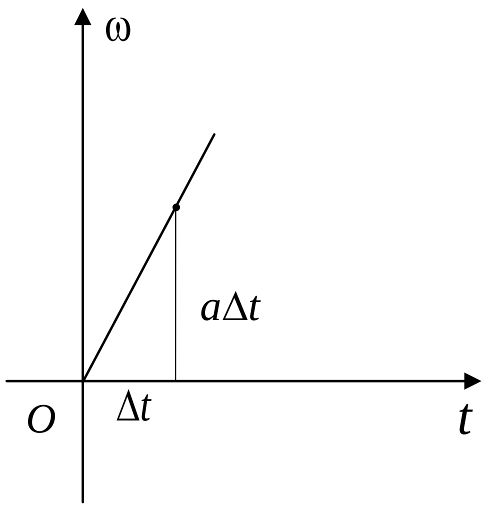

图 7 $\omega - t$ 图象

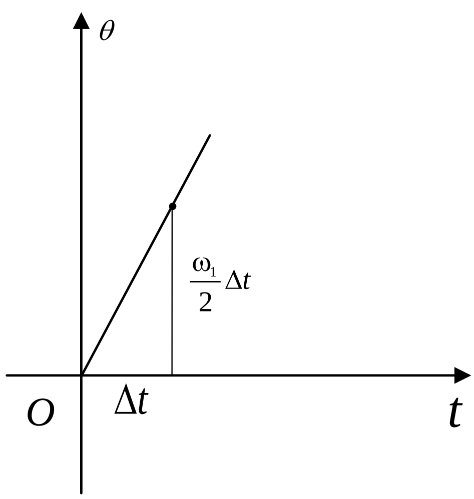

图 8 $\theta - t$ 图象

根据质点运动学中的理论可知，若质点作圆周运动时，其角加速度的值为一常量，这种运动称为匀变速圆周运动。以下是角速度和角加速度的表达式：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt} \tag{35}$$

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{36}$$

根据以上公式，当 t=0 时，$\theta=\theta_0$，$\omega=\omega_0$，则由（26）式和（27）式可得质点在做匀变速圆周运动时的运动方程为：

$$\omega=\omega_0+\alpha t \tag{37}$$

由于同心鼓在运动的过程中角加速度是不断变化的，因此（28）式只能在使用微元法的时候才能运用。

根据微分近似求解的思想，我们可以通过以下式子求得夹角：

$$\theta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_{i-1}+\omega_i}{2}\Delta t \tag{38}$$

由于角加速度α表示$\omega-t$图象的斜率，因此可以得到在$t=0^+$的情况时的$\omega-t$图象，图象为过原点的直线。利用极限思想，取Δt，得到对应的$\omega_1=a\Delta t$。又因为角速度ω表示$\theta-t$图象的斜率，因此又可以得到在$t=0^+$的情况时的$\theta-t$图象。利用极限思想，取Δt，得到对应的$\theta_1=\frac{\omega_1}{2}\Delta t$。这样的一个循环流程，便得到了取一小段$\Delta t$时相应的角速度、角加速度和夹角。

5.2.3 基于微元法和循环搜索算法进行求解与分析

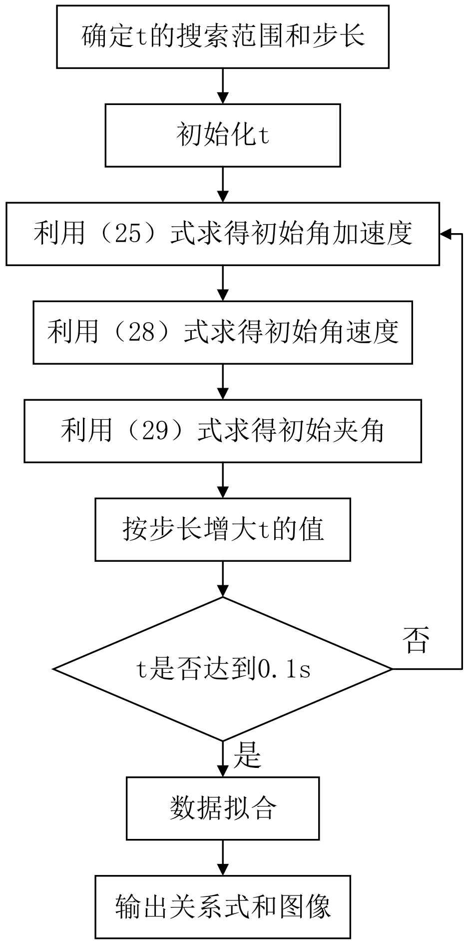

图 9 求解算法流程图

基于题目所给的发力时机和用力大小的取值，我们得到了相应的鼓面倾角，结果如下表。

表 4 不同组别的鼓面倾角情况

序号	鼓面倾角（度）	序号	鼓面倾角（度）
1	0.710	6	0.838
2	1.184	7	3.709
3	0.215	8	1.678
4	3.709	9	0.623
5	3.709		

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 最佳协作策略模型的进一步优化

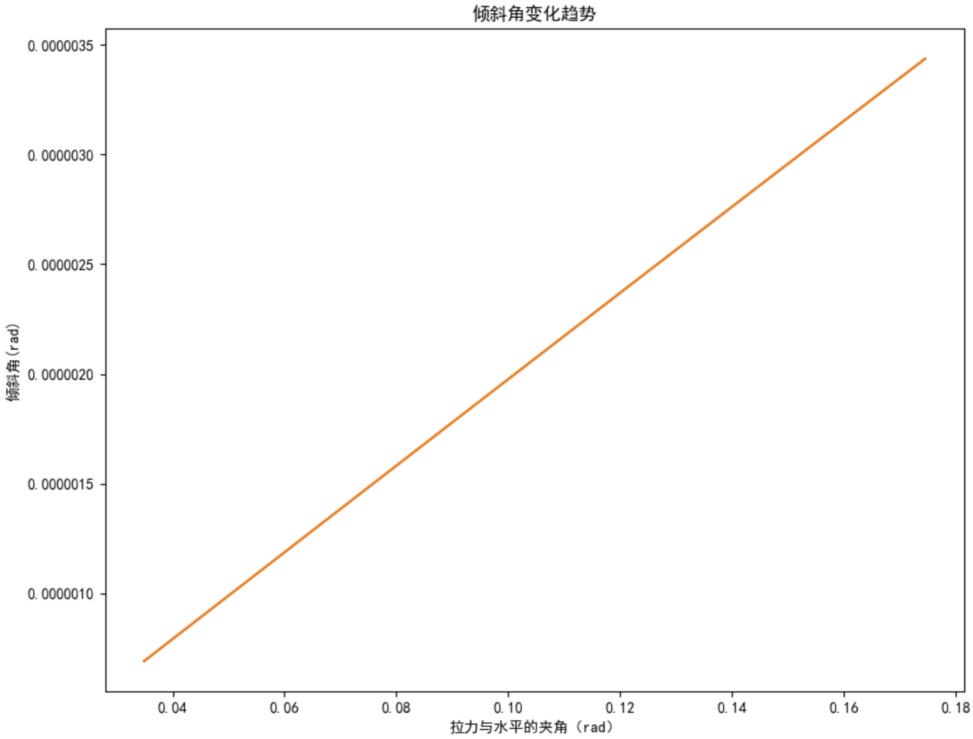

图 10 鼓面倾斜角与拉力倾斜角的变化关系图

利用问题二的数据，我们令每一种情况的用力大小和发力时机不变，取一定范围的拉力倾斜角，不断遍历计算出鼓面倾斜角，从而得到图 8 所示的变化关系图。由图 8 可知，鼓面倾斜角将随拉力倾斜角的增大而增大。

结合实际情况，拉力的倾斜角不可能趋近于无穷小。因此我们应当设置拉力的倾斜角，方便后期代入算法进行求解，由此可设定约束条件一为：

$$\theta \in \left[0,10^{\circ}\right] \tag{39}$$

针对队员之间的最小距离，题目要求不小于 60cm，我们假设绳长仍然为 1.75m，此时人将向后退，因此我们设定约束条件二为：

$$b > 0.6m \tag{40}$$

根据问题二的模型，我们估计人所施加的拉力在一定范围内，即设定约束条件三为：

$$F \in \left[80N, 90N\right] \tag{41}$$

根据题目，排球被颠起的高度应离开鼓面 40cm 以上，若低于 40cm，则项目停止。因此我们可以设定约束条件三为：

$$h \geq 0.4m \tag{42}$$

对于队员人数的设置，我们认为可以不优先考虑，只要人数不少于 8 人即可。我们的目

标是在给定人数的前提下，考虑鼓面会发生倾斜的情况，因此首要目标是控制鼓面倾角尽可能小，则我们的目标函数二为：

$$\min \theta_2 \tag{43}$$

我们将连续颠球的次数尽可能多这一目标转化为排球每次下落到鼓面的时间尽可能短，设排球下落一次所需时间为t_1 ,则我们的目标函数二为：

$$\min t_1 \tag{44}$$

其次我们还需让队员每次施加的力尽可能小，则我们的目标函数三为:

$$\min F \tag{45}$$

综上所述，可以得到团队的最佳协作策略模型：

$$\begin{cases} \min t_1 \\ \min \theta_2 \\ \min F \\ \mathrm{b}>0.6m \\ h \geq 0.4m \\ \theta \in [0,10°] \\ F \in [80N, 90N] \end{cases} \tag{46}$$

5.3.2 优化模型后进行求解与分析

为了求得每个人所需施加的最小力，我们仍然采用了变步长遍历搜索算法，从而得出调整后最佳协作策略，即在绳长为 1.7579m，队员人数为 8 的条件下，每个人只需施加 81.4N，团队 1 分钟内能够连续颠球 109 次。

表 5 优化模型后的最佳协作策略一

队员人数	8	发力时机	0.0014s
绳子长度	1.769m	发力方向	与水平方向成 3.34°
每分钟颠球次数	109	每个人所需最小力	81.4N

表 6 优化模型后的最佳协作策略二

队员人数	8	发力时机	0.0035s
绳子长度	1.769m	发力方向	与水平方向成 3.07°
每分钟颠球次数	109	每个人所需最小力	88.6N

若考虑省力，则可以采用策略一；若考虑鼓面的平稳性，则可以采用策略二

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 球反弹时的运动分析

由题意可知，鼓面发生倾斜且与排球发生碰撞后，球将会进行与竖直方向夹角成 1 度的斜抛运动，最高点距离水平鼓面 0.6m。

由牛顿第二定律可知排球做斜抛运动时所花的总时间为：

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{47}$$

代入数据可得排球做斜抛运动所花时间为 0.6998s。

由第一问可知碰撞后同心鼓恢复水平的时间极小，可忽略不计。因此可以理想地认为，在排球斜抛降落的 0.6998s 内，同心鼓从水平调整至某一状态，与排球进行碰撞后，可使排球调整为竖直状态进行弹跳。

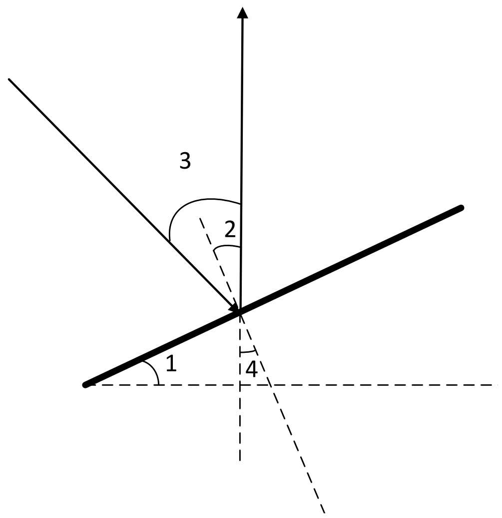

图 11 排球在鼓面上的弹跳情况

如图 9 所示，$\angle 3 = 1°$，法线平分角度，由几何关系可知，$\angle 1 = 0.5°$。为了得到鼓面在排球碰撞前到达指定位置的时间，我们基于问题二的模型，设置不同的拉力和拉力倾斜角，取一定的步长，仿真模拟出夹角与时间的关系。紧接着采用微分逼近的思想，求得在夹角为 0.5 度时的时间即队员的发力时机。

5.4.2 分析调整策略的实施效果

根据我们的仿真结果，我们以力度最小为主要目标，由此得到一系列的控制条件：

表 7 采用的控制条件

拉力	角度	临界角	转动完成时间
1.12	9.82	0.5	0.694

球的倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为 1：2，拉力分配比为 2:1。考虑到队员们需要在开始时对同心鼓施加力使其受力平衡，同心鼓的质量为 3.6kg，重力加速度为 9.8m/s²，经计算可知，所有队员的发力时机和力度如下表

表 8 队员们的发力情况

序号	发力力度（N）	发力时机（s）
1	4.275	0.694
2	3.901	
其余队员	3.528	

根据现实情形，上述调整策略的实施效果是不可观的，队员之间所施加的力度变化量不会太大，且发力时机不易掌握，对于队员来说要求太高。并且由于拉力角度不小，容易造成鼓面更加倾斜，这对于队员们来说操作上有一定难度。

六 模型的检验与灵敏度分析

在本文建立的多目标规划模型中，为了分析检验作用力和水平面的夹角θ和作用力 F 的大小对模型的影响程度，也就是进一步的分析模型的灵敏度。从而得到模型的稳定性和广泛性。

灵敏度的分析采用第三问的第一种解，既为θ=3.34°，F=81.4N，颠球为 109/分钟，现在采用控制单一变量的方法进行测量。分别对θ、F 的值增加 25%后代入模型内进行运算，比较单位分钟内的颠球次数，具体数据如下表：

表 9 灵敏度分析

	改变前	改变后	改变量
力方向与水平面的夹角θ（°）	3.34	4.175	25%
颠球次数/分钟	109	106	2.75%
作用力 F(N)	81.4	101.75	25%
颠球次数/分钟	109	106	2.75%

由上表可知，当θ、F 改变 25%的量后，结果改变的量也相同，说明这两个变量对模型的影响效果使一样的，既它们对模型具有相同的权重。其次，当θ、F 改变 25%后，颠球次数仅仅改变了 2.75%，由此可得我们的模型灵敏度不高，具有很好的稳定性和可靠性。

七 模型的评价

7.1 模型的优点

- 第一问通过多目标规划模型对排球下落的时间和每个队员所需施加的拉力进行了详细分析，从而得到了在理想条件下决策者认为的理想的协作策略。
- 第二问基于刚体定轴转动定律, 利用了积分近似求解的思想, 在时间上进行了精确切割, 通过变步长循环搜索算法，从而得出在某一时刻下鼓面的倾角，具有一定的创新性。
- 第三问考虑到实际生活中鼓面可能发生倾斜的状况, 对第一问所建立的模型进行了优化

7.2 模型的缺点

在实际生活中，由于空气阻力和弹性形变，会导致排球在运动和与鼓发生碰撞的过程中产生能量损失，由于时间的限制以及模型的复杂程度，本文对以上情况尚未进行考虑。

八 参考文献

[1] 司守奎，孙玺菁，数学建模算法与应用[M].北京：国防工业出版社，2017.
[2] 姜启源，谢金星，叶俊，数学模型[M].5 版.北京：高等教育出版社，2018.
[3] 张亮，吕家明，Python 数据处理[M].北京：人民邮电出版社，2017.
[4] 范仰才，胡义华，大学物理学（上）[M].上海：复旦大学出版社，2016

九 附录

附录一：

程序编号	T1-1	文件名称	球回到初值原点.py
说明	模拟两物体弹性碰撞并输出结果		

```
import numpy as np
import csv
import scipy.optimize
def write_csv_demo(values):
    headers = ['拉力', '绳长', '鼓上升', '球下降', '角度', '鼓的时间', '球的时间','鼓的准备时间
']
    with open('shujv2222.csv', 'w', encoding='utf-8', newline='') as fp:
        writer = csv.DictWriter(fp, headers)
        # 写入表头数据的时候，需要调用 writeheader 方法
        writer.writeheader()
        writer.writerows(values)  # 传入的是 [ {},{} ] 的数据类型
f_la = np.linspace(5, 5.1, 10)
long_shengzi = np.linspace(1.7,1.8, 40)
m_qiu = 0.27
m_gu = 3.6
g = 9.8
S_ALL = 0.4
# 假设当球与鼓碰撞按原速度返回时候，颠球的频率最大设出以下方程
# 又动量守恒与能量守恒得，当末速度满足一定比例关系时时能使小球原路返回
# 当有 8 个人时，按照 60com 水平间隔站立时
N = 8
r = 0.3 / np.sin(np.pi / 8) - 0.2  # 到鼓的边缘的距离
all_data = []
for f_l in f_la:
    print('此时的拉力为-------------------------------------------', f_l)
    for long_c in long_shengzi:
        data = {}
        print('绳子的长度', long_c)
        c_x = r / long_c
        s_x = (1 - c_x ** 2) ** 0.5

        S1 = 0.4 / ((N * f_l * s_x - m_gu * g) * (m_gu / m_qiu / m_qiu / g) + 1)
        S2 = 0.4 - S1
        print('鼓上升', S1)
        print('球下降', S2)

        a = (N * f_l * s_x - m_gu * g) / m_gu
        t_gu = (2 * S1 / a) ** 0.5
```

```
        t_qiu = (2 * S2 / g) ** 0.5

        jiaodu = np.arcsin(s_x)

        V_qiu = a*t_gu
        kk =scipy.optimize.fsolve(lambda x: 0.5*g*x**2+V_qiu*x-S1, 0)
        print('此时的弧度为', jiaodu)
        print('此时的角度为', np.degrees(jiaodu))
        print('鼓的时间', t_gu)
        print('球的时间', t_qiu)

        print('--------------------------')
        data['拉力'] = f_l
        data['绳长'] = long_c
        data['鼓上升'] = S1
        data['球下降'] = S2
        data['角度'] = np.degrees(jiaodu)
        data['鼓的时间'] = t_gu
        data['球的时间'] = t_qiu
        data['鼓的准备时间'] = kk
        all_data.append(data)
write_csv_demo(all_data)
```

附录二：

程序编号	T2-1	文件名称	差分近似.py
说明	由力的关系，进行时间与倾斜近似拟合并作图		

```
import numpy  as np
jiaodu = np.arcsin(0.11/1.7)
c = 10*0.2/0.05052
a0 = c*np.sin(jiaodu)
t = np.linspace(0,0.1,100001)
dt = t[1]-t[0]
a = []
a.append(a0)
w =[0,]
jiao = [0,]
for i in range(0,100001):

    if i ==0:
        continue
    else:
        w_temp = w[i-1]+ dt*a[i-1]
```

```
            w.append(w_temp)
            jiao_temp = jiao[i-1]+ 0.5*(w[i]+w[i-1])*dt
            jiao.append(jiao_temp)
            a_temp = c*np.sin(jiaodu-jiao_temp)
            a.append(a_temp)
print('0.1 秒时弧度为',jiao[-1])
print('0.1 秒时角度为',np.degrees(jiao[-1]))
import matplotlib.pyplot as plt#约定俗成的写法 plt
plt.plot(t,a,color='r',label="a")
plt.plot(t,w,color='b',label="w")
plt.plot(t,jiao,color='g',label="θ")
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei']
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False
plt.xlabel("时间(s)")
plt.ylabel("加速度角速度倾斜角数值")
plt.title("变量变化趋势")
# generate a legend box
plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc=0,
          ncol=3, mode="expand", borderaxespad=0.)
plt.show()
# generate a legend box
plt.xlabel("时间(s)")
plt.ylabel("加速度(a/s^2)")
plt.title("加速度变化趋势")
plt.plot(t,a,color='r',label="a")
plt.legend()
plt.show()
# generate a legend box
plt.xlabel("时间(s)")
plt.ylabel("角速度(rad/s)")
plt.title("角速度变化趋势")
plt.plot(t,w,color='b',label="w")
plt.legend()
plt.show()
# generate a legend box
plt.xlabel("时间(s)")
plt.ylabel("倾斜角(rad)")
plt.title("倾斜角变化趋势")
plt.plot(t,jiao,color='g',label="θ")
plt.legend()
plt.show()
plt.xlabel("倾斜角(rad)")
plt.ylabel("加速度(rad/s^2)")
plt.title("加速度与倾斜角的关系")
```

```
plt.plot(jiao,a,color='c',)
plt.show()
```