

# BEU – Beugung

Fortgeschrittenenpraktikum I - Kurs FP-I-O

10. Februar 2025

## Ziele

In diesem Versuch sollen verschiedene Beugungsphänomene mittels eines Lasers qualitativ und quantitativ untersucht werden.

## Teilversuche

### 1. Fraunhofer-Beugung am variablen Einfachspalt

Qualitative Beobachtung der Beugung von Licht an einem Spalt mit variabler Breite.

### 2. Übergang von Fraunhofer- zu Fresnel-Beugung

Untersuchung der Charakteristika von Fraunhofer- und Fresnel-Beugung und des Übergangsbereichs zwischen diesen.

### 3. Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt

Komplettes Vermessen des Beugungsbilds eines Spalts und Bestimmen der Spaltbreite durch einen Fit mit MATLAB.

### 4. Babinetsches Theorem

Messung der Intensität hinter einem lichtundurchlässigen Streifen und Vergleich mit Teilversuch 3. Beobachtung der Beugungsmuster an Punkt- und Lochblende.

### 5. Fraunhofer-Beugung an Doppelspalt und Mehrfachspalt

Qualitative Untersuchung der Beugung am Doppel- und Mehrfachspalt mit verschiedenen Geometrien.

### 6. Fresnel-Beugung an der Kante

Quantitative Messung der Intensitätsverteilung hinter einer Kante.

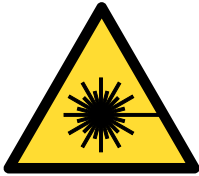
## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalischer Hintergrund</b>	<b>3</b>
1.1	Stichworte zur Vorbereitung . . . . .	3
1.2	Motivation . . . . .	4
1.3	Allgemeine Beugungstheorie . . . . .	4
1.4	Die Grenzfälle Fresnel- und Fraunhofer-Beugung . . . . .	5
1.5	Fresnel-Zonen und Fresnel-Beugung . . . . .	6
1.6	Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt . . . . .	10
1.7	Babinetsches Theorem . . . . .	12
1.8	Fraunhofer-Beugung an Doppel- und Mehrfachspalt . . . . .	13
1.9	Fresnel-Beugung an der Kante . . . . .	15
<b>2</b>	<b>CCD-Kamera und VideoCom-Software</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>19</b>
3.1	Fraunhofer-Beugung am variablen Einfachspalt . . . . .	20
3.2	Übergang von Fraunhofer- zu Fresnel-Beugung . . . . .	21
3.3	Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt . . . . .	22
3.4	Babinetsches Theorem . . . . .	23
3.5	Fraunhofer-Beugung an Doppelspalt und Mehrfachspalt . . . . .	24
3.6	Fresnel-Beugung an der Kante . . . . .	24

## Literatur

- [Behll] BEHRENDTS, R: *Handbook: Laser Physics I*. PHYWE Systeme GmbH und Co. KG, D-37070 Göttingen,
- [BENS04] BERGMANN, L. ; EICHLER, H.J. ; NIEDRIG, H. ; SCHAEFER, C.: *Lehrbuch der Experimentalphysik; Bd. 3: Optik: Wellen- und Teilchenoptik*. de Gruyter, 2004 (Bergmann). – ISBN 9783110170818
- [Dem08] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, 2008 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 9783540682103
- [Hec05] HECHT, E.: *Optik*. Oldenbourg, 2005. – ISBN 9783486273595

### Sicherheitshinweise



- Vor Versuchsbeginn müssen Sie die Laserbelehrung zur Kenntnis genommen haben!
- Bei Verwendung von Lasern oberhalb von Klasse 2 muss jede Person im Raum eine Justierbrille tragen! Trotz Justierbrille ist darauf zu achten, nicht in den Laserstrahl hineinzusehen.
- Die Justierbrillen sind auch für Brillenträger geeignet, es empfiehlt sich jedoch, falls möglich, Kontaktlinsen zu verwenden.
- Niemals absichtlich in den Strahl blicken. Die Augen bewusst schließen und den Kopf abwenden, wenn der Laserstrahl ins Auge trifft.
- Zur Überprüfung der Position des Laserstrahls ist es ratsam, ein Stück Papier in den Strahl zu halten.
- Uhren sowie Schmuck müssen abgelegt werden, um Reflexionen zu vermeiden.
- Berührungen des Laserstrahls mit der Haut sind zu vermeiden. Tragen Sie daher bitte Baumwollhandschuhe!

## 1 Physikalischer Hintergrund

### 1.1 Stichworte zur Vorbereitung

- Feldstärke, Amplitude und Intensität
- Huygenssches Prinzip
- Fresnel-Huygenssches Prinzip
- Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral
- Fresnel-Beugung
- Fraunhofer-Beugung
- Babinetsches Theorem
- Fourier-Transformation
- Aufgaben im Text!

### Aufgabe

Zum besseren Verständnis vor Versuchsbeginn zu Hause vorzubereiten: Erstellen Sie auf Millimeterpapier oder mit einem geeigneten Computerprogramm ein Diagramm der Funktion  $f(x) = \left( \frac{\sin(x-5)}{(x-5)} \right)^2$  für  $x \in [0; 10]$ . Überlegen Sie sich anhand Ihres Diagramms, wie sich im Versuch die Fitparameter  $a, b, c$  und  $d$  der Funktion  $I(x) = a \cdot \left( \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda r}(x-d))}{\frac{\pi b}{\lambda r}(x-d)} \right)^2 + c$  auswirken bzw. wie Sie aus Ihren Messdaten gute Startwerte für den Fit ablesen können.

### 1.2 Motivation

Mit Beugung wird der Effekt bezeichnet, dass in einem geeigneten experimentellen Aufbau die Ausbreitungsrichtung von z.B. Licht von der durch die geometrische Optik vorhergesagten Richtung abweicht. Die Ausbreitung folgt hier den Gesetzen der Wellenmechanik, Beugungsexperimente zeigen also deutlich den Wellencharakter des Lichts.

Im Bezug zur aktuellen Forschung ist es erwähnenswert, dass sich Beugungsexperimente zur Strukturaufklärung – besonders von kristallinen Strukturen mittels Röntgenbeugung – eignen und so in vielen verschiedenen Forschungsbereichen zum Verständnis von Aufbau und Eigenschaften von Festkörpern beitragen. Des Weiteren spielt die Beugung bei optischen Instrumenten eine sehr wichtige Rolle, da sie hier das Abbildungsvermögen beschränkt.

### 1.3 Allgemeine Beugungstheorie

Das Phänomen Beugung lässt sich mit der Fresnel-Kirchhoffschen Beugungstheorie beschreiben. Hierfür bedienen wir uns des Fresnel-Huygensschen Prinzips, das eine Erweiterung des Huygensschen Prinzips darstellt. Es besagt, dass das Lichtfeld am Beobachtungsort aus der Superposition aller sekundären Elementarwellen unter Berücksichtigung ihrer Amplitude und Phase entsteht – eben in diesem wichtigen Detail liegt der Unterschied zum einfacheren Huygensschen Prinzip.

Der Unterschied in der von der Lichtquelle bis zum Beobachtungspunkt zurückgelegten Distanz (Gangunterschied) ist dabei von entscheidender Bedeutung für die resultierende Intensität. Als sekundäre Elementarwellen werden alle Elementarwellen bezeichnet, die in der Blendenebene emittiert werden.

Das Beugungsbild auf einem Schirm kann für eine beliebig geformte Blendenöffnung exakt mithilfe des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals berechnet werden. Bei diesem werden die Beiträge der sekundären Elementarwellen aufsummiert und man erhält durch Interferenz aller Beiträge die Amplitude bzw. Intensität am Beobachtungspunkt. Für eine in einer Raumrichtung unendlich ausgedehnte Blende (z.B. unendlich langer Spalt) vereinfacht sich dieses Integral über eine Fläche zu einem eindimensionalen Integral.

### 1.4 Die Grenzfälle Fresnel- und Fraunhofer-Beugung

Ausgehend von der allgemeinen Beugungstheorie kann man nun verschiedene Grenzfälle betrachten. So erhält man näherungsweise deutlich einfachere Beugungsbilder, die sich auch qualitativ verstehen und untersuchen lassen. Die hier als Fraunhofer-Beugung und Fresnel-Beugung bezeichneten Grenzfälle beziehen sich strenggenommen auf die so bezeichneten Beugungsbilder.

Im Fall der Fraunhofer-Beugung werden die primären (Quelle) und sekundären (Blende) Elementarwellen als ebene Wellen genähert. Damit dies erfüllt ist, müssen die Abstände zwischen Quelle und Blende sowie zwischen Blende und Schirm groß sein.

In der Praxis kann man die Bedingung der Fraunhoferschen Beugung einer „großen Entfernung“ auch durch eine Abbildung mit Linsen erreichen. Die Interferenz von parallelen Strahlen erhält man dadurch, dass man den Schirm in die Brennebene einer Sammellinse stellt. Die Bedingung einer einfallenden ebenen Welle kann erfüllt werden, indem eine möglichst punktförmige Lichtquelle in den Brennpunkt einer Sammellinse gestellt wird.

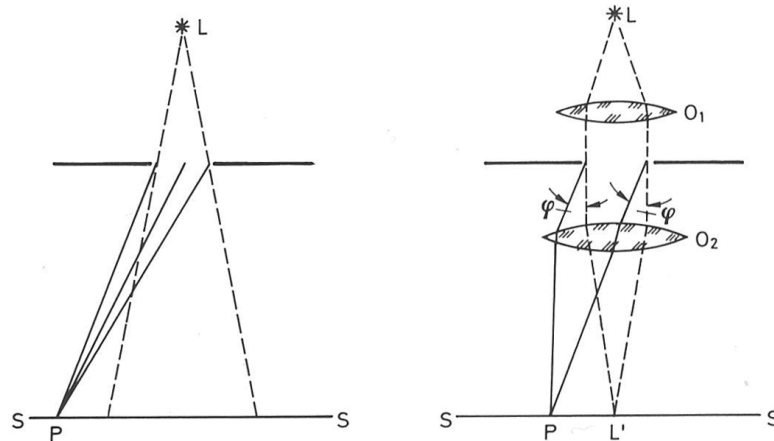
Wenn die Elementarwellen nicht als ebene Wellen genähert werden können, so kann Fresnel-Beugung vorliegen. Dann wird der Gangunterschied zusätzlich durch die Kugelform der Elementarwellen verändert. Dies führt dazu, dass man andere als die Fraunhoferschen Intensitätsverteilungen beobachtet. Damit Fresnel-Beugung auftritt, muss der Abstand zwischen Blende und Quelle/Schirm im Gegensatz zur Fraunhofer-Beugung klein genug sein. Fresnel-Beugung ist für Elementarwellen mit der Wellenlänge  $\lambda$  dann beobachtbar, wenn für ein Beugungsobjekt der Größe  $b$  gilt, dass mehr als eine Fresnelzone an der Beugung beteiligt ist:

$$R < b^2/\lambda$$

wobei für  $R$  hier der kleinere der beiden Abstände zwischen Quelle und Blende bzw. zwischen Blende und dem Beobachtungsort zu wählen ist. Dass hier die geringere Distanz eingesetzt werden muss lässt gut erkennen, dass sowohl divergente Beleuchtung als auch eine geringe Entfernung des Beobachtungsschirms auf Grund der entstehenden Gangunterschiede zu Fresnelschen Beugungsbildern führen können.

Abbildung 1 verdeutlicht nochmals den Umstand, dass bei der Fresnel-Beugung Strahlen mit verschiedenen Beugungswinkeln beitragen, während bei der Fraunhofer-Beugung näherungsweise nur Lichtstrahlen mit identischen Beugungswinkeln interferieren.

Trifft keine dieser Näherungen zu, so kann man im Übergangsbereich näherungsweise eine Überlagerung von den beiden Beugungsbildern beobachten. Die resultierenden Beugungsbilder für Fresnel-Beugung, Fraunhofer-Beugung und ein Beugungsbild im Übergangsbereich zwischen den beiden sind in Abbildung 2 für Beugung am Spalt zu sehen.



**Abbildung 1:** Fresnel- (links) und Fraunhofer-Beugung (rechts) an einer Öffnung [BENS04]

### 1.5 Fresnel-Zonen und Fresnel-Beugung

Ein gutes Hilfsmittel, um den qualitativen Verlauf der Intensität des Fresnelschen Beugungsbildes zu verstehen, sind die Fresnel-Zonen. Zur Konstruktion der Fresnel-Zonen betrachten wir Abbildung 3. Um die Lichtquelle  $S$  ist eine ausgehende Kugelwelle eingezeichnet. Die Quellen der Sekundärwellen auf dieser Wellenfront emittieren in Phase mit der Primärwelle.

Nun legen wir zusätzlich konzentrische Kugeln mit den Radien  $r_0 + \lambda/2$ ,  $r_0 + \lambda$ ,  $r_0 + \frac{3}{2}\lambda$ , usw. um den Beobachtungspunkt  $P$ . Diese schneiden mit der Kugel der Primärwelle und begrenzen ringförmige Flächen auf deren Oberfläche. Das Besondere an diesen Zonen ist nun, dass sich auf Grund ihrer Konstruktion für jede Sekundärwelle aus einer Zone in der benachbarten Zone eine Sekundärwelle mit einem Phasenunterschied von  $\lambda/2$  findet. Diese interferieren dann jeweils destruktiv.

Das Feld  $E_P$  im Punkt  $P$  wird sich dann aus den Beiträgen aller Sekundärwellen der  $m$  Fresnel-Zonen zusammensetzen

$$E_{\text{gesamt}} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_m$$

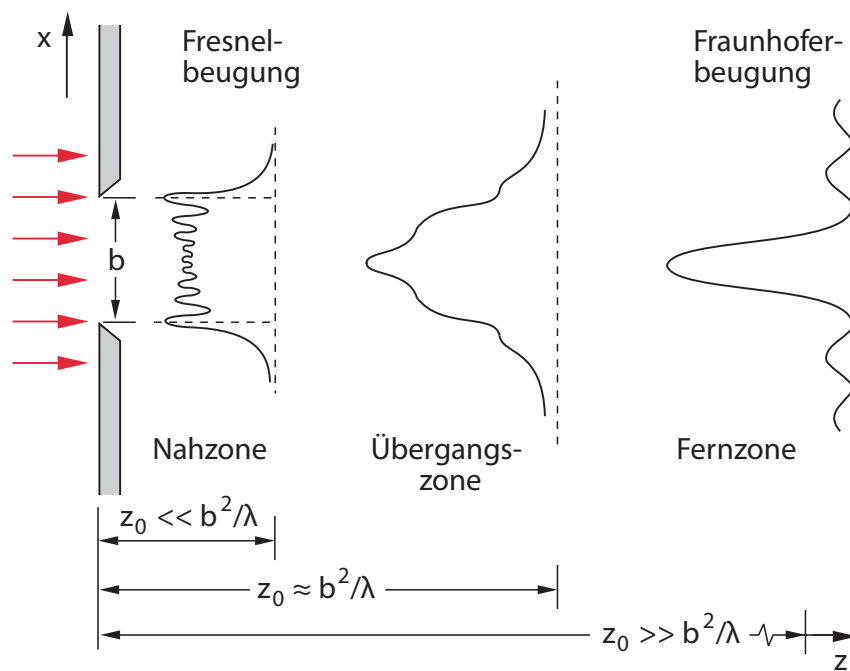
Durch Berücksichtigung der Phasenverschiebungen wird dies zu

$$E_{\text{gesamt}} = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \dots \pm |E_m|$$

Es lässt sich zeigen, dass ungefähr  $|E_n| = |E_{n-1}|$  gilt. Dies bedeutet, dass die Beiträge aus aufeinander folgenden Zonen sich in etwa gegenseitig aufheben.

Betrachten wir nun zunächst das Zentrum der Intensitätsverteilung. Für eine gerade Anzahl an Fresnel-Zonen folgt dort

$$E_{\text{gesamt}} = (E_1 - E_2) + (E_3 - E_4) + \dots = 0$$



**Abbildung 2:** Näherungsbereiche und der Übergangsbereich [Dem08]

und für eine ungerade Anzahl

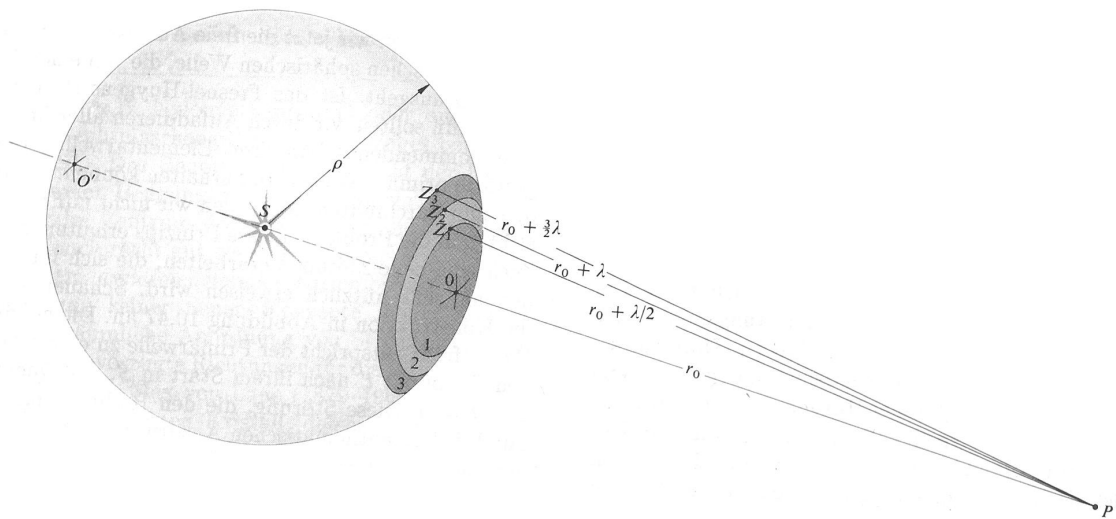
$$E_{\text{gesamt}} = E_1 - (E_2 - E_3) - (E_4 - E_5) - \dots = E_1$$

Offensichtlich entscheidet also die Anzahl der in der Blendenöffnung „sichtbaren“ Fresnel-Zonen über die Intensität. Dieses oszillierende Verhalten der Intensität im Zentrum kann im Experiment beim Variieren der Spaltbreite gut beobachtet werden.

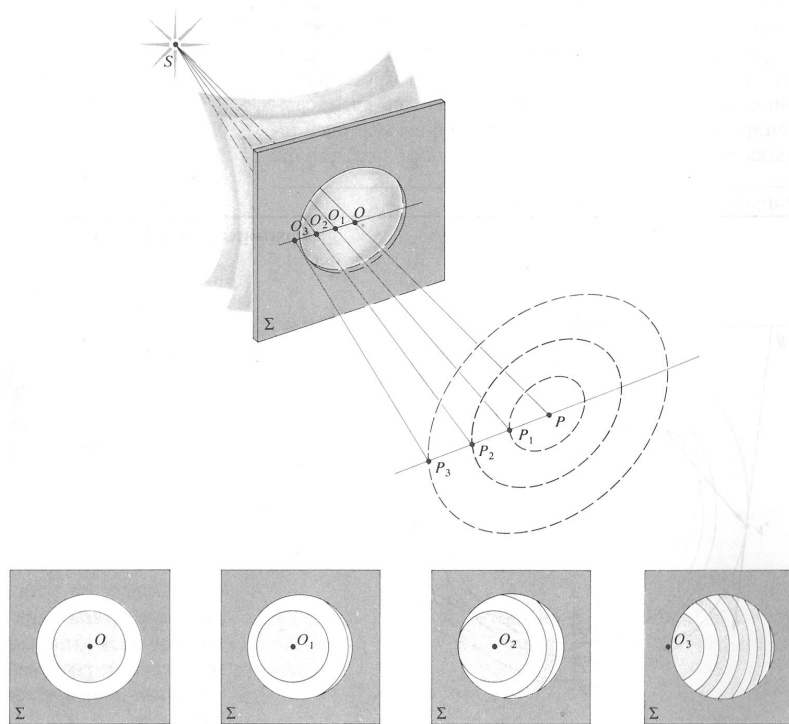
Abbildung 4 illustriert, wie man sich analog dazu die Entstehung des restlichen Beugungsbildes außerhalb des Zentrums vorstellen kann. Die erste Grafik ganz links zeigt exemplarisch zwei vom Zentrum aus komplett sichtbare Fresnel-Zonen – in diesem Fall erhält man also ein Intensitätsminimum.

Bewegt man den Beobachtungspunkt vom Zentrum weg zu Punkt  $P_1$  müssen die Fresnel-Zonen für diesen Punkt neu konstruiert werden. Dies führt zu einer Verschiebung der Fresnel-Zonen, dabei verschwindet ein Teil der zweiten Zone, dafür wird ein Bereich der dritten Zone sichtbar - die Intensität steigt. Verschiebt man den Beobachtungspunkt weiterhin vom Zentrum weg nach außen ( $P_2$  und  $P_3$ ), so ergibt sich ein Wechselspiel zwischen erscheinenden und verschwindenden Zonen und dementsprechend findet man eine räumlich oszillierende Intensität auf dem Beobachtungsschirm. Abbildung 5 zeigt einen aus der Theorie berechneten Intensitätsverlauf.

## 1 Physikalischer Hintergrund



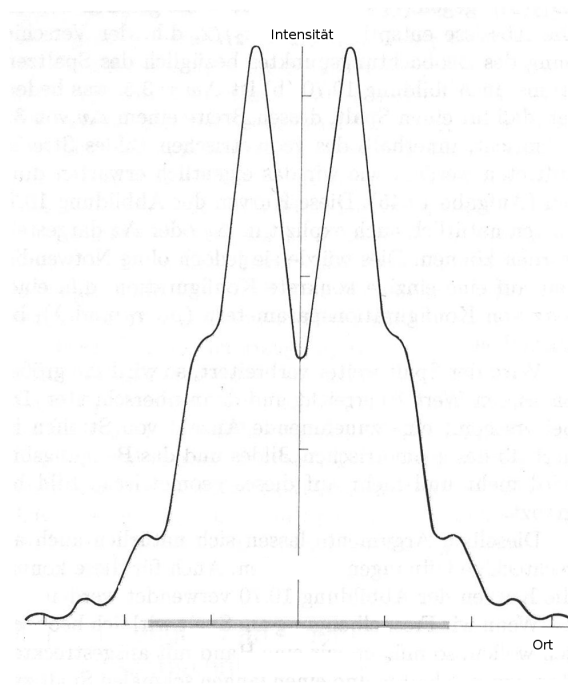
**Abbildung 3:** Konstruktion der Fresnel-Zonen [Hecht, Eugen: Optik. 2, Addison-Wesley 1992]



**Abbildung 4:** Lochblende mit eingezeichneten Fresnel-Zonen [Hec05]



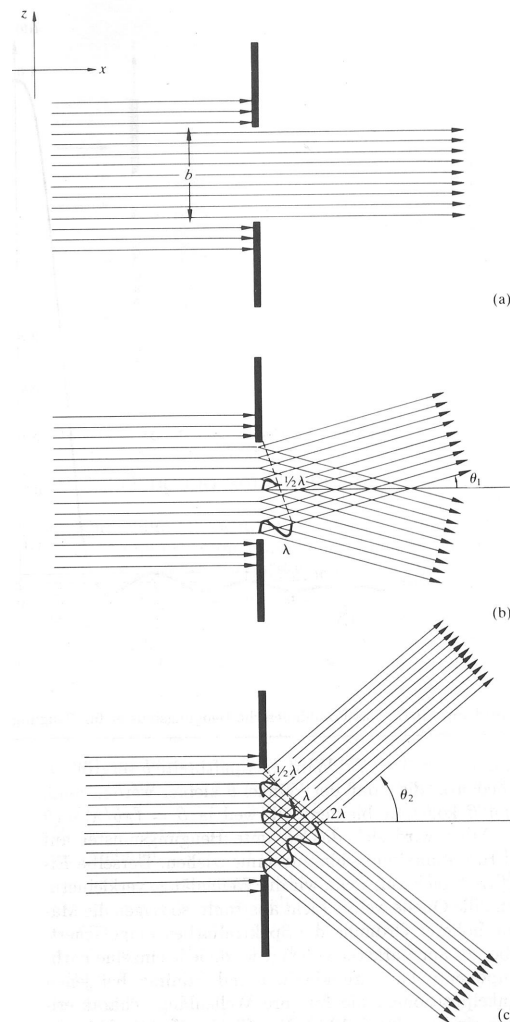
## 1 Physikalischer Hintergrund



**Abbildung 5:** Intensitätsverlauf, wenn die Lochblende genau die ersten zwei Fresnel-Zonen enthält [Hec05]

## 1.6 Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt

Die Berechnung der Intensitätsverläufe bei Fraunhofer-Beugung ist in der Regel deutlich einfacher als bei Fresnel-Beugung. So kann die Lage der Intensitätsminima im Fraunhoferschen Beugungsbild durch eine einfache geometrische Betrachtung bestimmt werden. Abbildung 6 zeigt diese exemplarisch für die ersten beiden Minima.



**Abbildung 6:** richtungsabhängiger Gangunterschied bei Fraunhofer-Beugung [Hec05]

Abbildung 6 kann man entnehmen, dass man Intensitätsminima erhält, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen z. B.  $\lambda$  oder  $2\lambda$  beträgt, da dann für eine Hälfte der emittierten Elementarwellen in der Beugungsöffnung in der anderen Hälfte Elementarwellen mit einer Phasendifferenz von  $\lambda/2$  emittiert werden.

Allgemein treten Nullstellen auf, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge beträgt. In Abhängigkeit vom Beugungswinkel  $\theta$  gilt für die

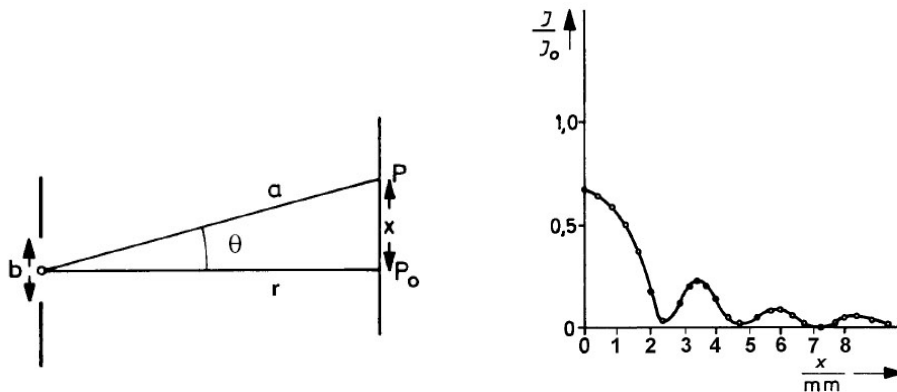
Intensitätsminima deshalb:

$$b \sin \theta = m \lambda$$

mit  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Behandelt man das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral in der Fraunhoferschen Näherung, so erhält man für die Intensität im Punkt  $P$  auf einem Schirm parallel zum Spalt (mit den Bezeichnungen aus Abbildung 7) folgende Gleichung:

$$I(\theta) = c \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} \right)^2 \quad (1)$$

$c$  ist eine Konstante, die vom Versuchsaufbau abhängt.



**Abbildung 7:** links: Bezeichnungen für die Beugung am Spalt, rechts: Intensitätsverteilung [Behll]

Die Lage der Intensitätsmaxima kann aus der Funktion  $I(\theta)$  mit Hilfe der Differenzialrechnung bestimmt werden. Man erhält daraus folgende Bedingung für die Maxima:

$$\tan\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right) = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$

Das erste Maximum tritt auf für  $\theta = 0$ . Die folgenden Maxima treten auf, wenn das Argument des Tangens diese ungefähren Werte annimmt:  $1,43\pi; 2,46\pi; 3,47\pi; 4,48\pi; \dots$

Intensitätsminima treten auf, wenn

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta = n\pi; \quad n = 1, 2, \dots$$

Näherungsweise (für  $a \gg x$ , siehe Abbildung 7) sind die Minima äquidistant (warum?):

$$x_n = n \cdot \frac{r \lambda}{b} \quad (2)$$

Für die Fraunhofer-Beugung gilt auch, dass die Fourier-Transformation der Blendenfunktion (Transmission) die Amplitudenfunktion in der Beobachtungsebene ergibt. Ist die Blendenfunktion, also die Lage der lichtdurchlässigen Bereiche der Blende, bekannt, kann mittels Fourier-Transformation die Amplituden- und Intensitätsverteilung berechnet werden. So ist zum Beispiel die Sinc-Funktion die Fourier-Transformierte des unendlich langen Spalts. Diese Feststellung hat zur Entwicklung der sogenannten Fourier-Optik geführt, die die Lichtausbreitung auf Basis von Fourier-Transformationen untersucht.

### 1.7 Babinetsches Theorem

Das Babinetsche Theorem besagt, dass komplementäre Beugungsobjekte (weitgehend) identische Beugungsbilder erzeugen. Beugungsobjekte sind komplementär zueinander, wenn die Summe ihrer Öffnungen die gesamte Ebene ergibt.

Dies liegt daran, dass die elektrische Feldstärke des Lichts (z.B. in der Schirmebene) hinter einer Blende mit der Öffnung  $\sigma$  gegeben ist durch:

$$E_P(\sigma) = \sum_{i=1}^N E_P(\sigma_i)$$

wobei die Öffnung  $\sigma$  sich aus den Teilöffnungen  $\sigma_i$  zusammensetzt. Die Summe der elektrischen Feldstärken, die die Teilöffnungen transmittieren, ergibt also wieder die Feldstärke der gesamten Öffnung.

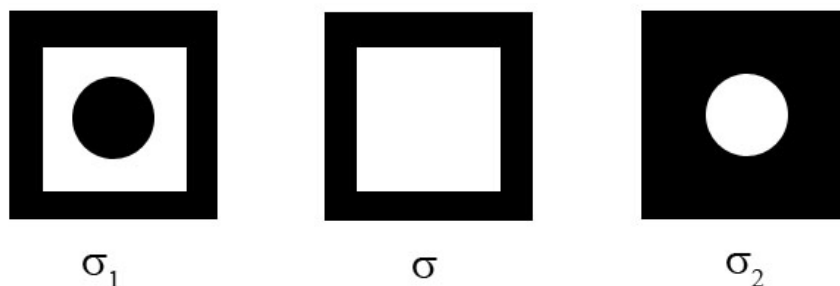
Teilt man die Öffnung  $\sigma$  in zwei Teilflächen auf (vergleiche Abbildung 8), dann gilt:

$$E_P(\sigma) = E_P(\sigma_1) + E_P(\sigma_2) \quad \Rightarrow \quad E_P(\sigma_1) = E_P(\sigma) - E_P(\sigma_2)$$

Wenn die Öffnung  $\sigma$  die gesamte Ebene ist, so ist  $I_P(\sigma)$  die Intensität, welche die Lichtquelle ohne Beugungsobjekt auf dem Schirm erzeugen würde (geometrisch-optisches Bild der Lichtquelle). Die Öffnungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ergeben dann zusammen die gesamte Ebene. Ist diese Intensität räumlich auf der Schirmfläche begrenzt (z.B. Spot bei Beleuchtung des Beugungsobjekts mit einem Laser), so gilt in dem Schirmbereich, in dem  $I_P(\sigma) = 0$  (und damit auch  $E_P(\sigma) = 0$ ) ist:

$$\begin{aligned} E_P(\sigma_1) &= -E_P(\sigma_2) \\ I_P(\sigma_1) &= I_P(\sigma_2) \end{aligned}$$

Ersetzt man also eine Blende (z. B. Spalt der Breite  $b$ ) durch eine komplementäre Blende (z. B. Streifen der Breite  $b$ ), so erhält man außerhalb des geometrisch-optischen Bildes der Lichtquelle identische Beugungserscheinungen. Dies gilt für beliebig geformte Blendenöffnungen.



**Abbildung 8:** Beispiel zum Babinetschen Theorem

## 1.8 Fraunhofer-Beugung an Doppel- und Mehrfachspalt

Die Beugungserscheinung hinter einem Mehrfachspalt kann durch Überlagerung der Beugungserscheinungen der einzelnen Spalte gefunden werden. Ein Mehrfachspalt besteht aus  $N$  in regelmäßigen Abständen nebeneinanderliegenden gleichen Öffnungen, so daß  $N$  interferierende parallele Strahlenbündel vorhanden sind. Der Gangunterschied der Randstrahlen eines Spaltes der Breite  $b$  ist

$$d_1 = b \cdot \sin \phi$$

Dies ergibt eine Phasendifferenz von

$$\delta_1 = \frac{2\pi \cdot d_1}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot b \cdot \sin \phi}{\lambda}$$

Die Strahlen zweier Spalte besitzen den Gangunterschied von

$$d_2 = s \cdot \sin \phi$$

mit  $s$  als Spaltabstand (Mehrfachspaltkonstante). Daraus ergibt sich eine Phasendifferenz von

$$\delta_2 = \frac{2\pi d_2}{\lambda} = \frac{2\pi s \sin \phi}{\lambda}$$

Bei  $N$  Strahlenbündeln, die zum Beobachtungspunkt D unter dem Beugungswinkel  $\phi$  abgelenkt werden, ergibt sich mit der Amplitude  $E_\phi$  eines gebeugten Strahlenbündels folgende Intensität:

$$I(\phi) = E(\phi)^2 \frac{\sin^2(N\delta_2/2)}{\sin^2(\delta_2/2)} \quad (3)$$

$E(\phi)^2$  ist aber die Intensität des Strahls, der von einem einzelnen Spalt in Richtung  $\phi$  abgelenkt wird:

$$E(\phi)^2 = \left( \frac{\sin(\delta_1/2)}{\delta_1/2} \right)^2 \quad (4)$$

Die Beugungsintensität des gesamten Mehrfachspaltes erhält man durch Kombination von (3) und (4):

$$I(\phi) = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \phi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \phi} \frac{\sin\left(\frac{N\pi s}{\lambda} \sin \phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi s}{\lambda} \sin \phi\right)} \right)^2 \quad (5)$$

Der erste Teil des Produkts aus (5) ist also die Intensitätsverteilung des Einzelspaltes, der zweite Teil das Resultat des Zusammenwirkens von  $N$  Spalten. Dadurch wird ersichtlich, daß die Minima des einzelnen Spaltes auch bei dem Mehrfachspalt erhalten bleiben, denn wenn der erste Faktor Null wird, so wird das Produkt ebenfalls Null. Nach Fraunhofer werden die Maxima und Minima einer Öffnung als Interferenzen I. Klasse bezeichnet, während Maxima und Minima, die durch Zusammenwirken mehrerer Öffnungen entstehen, Interferenzen II. Klasse genannt werden.

### Doppelspalt ( $N = 2$ ):

Für die Beugung am Doppelspalt ergibt sich folgende Intensitätsverteilung:

$$I(\phi) = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \phi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \phi} \frac{\sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda} \sin \phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi s}{\lambda} \sin \phi\right)} \right)^2$$

(a) Minima der 1. Klasse (Nullstellen des Zählers des ersten Faktors)

$$\sin \phi_k = \frac{k\lambda}{b} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Für  $k = 0$  ergibt sich das Zentralmaximum 1. Klasse.

(b) Minima II. Klasse (Nullstellen des Zählers des zweiten Faktors und **nicht** gleichzeitig Nullstelle des Nenners!):

$$\sin \phi_k = \frac{2k+1}{2s} \lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

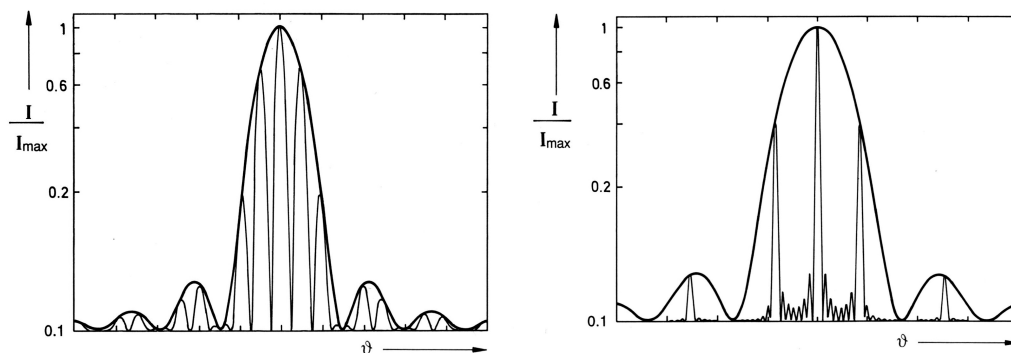
(c) Die gemeinsamen Nullstellen des Zählers und des Nenners des 2. Faktors sind die Maxima II. Klasse (Hauptmaxima):

$$\sin \phi_k = k \frac{\lambda}{s} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

### Mehrfachspalt ( $N > 2$ ):

Die Hauptmaxima (Maxima II. Klasse) treten mit zunehmender Anzahl an Spalten  $N$  immer stärker hervor, da die Intensitäten dieser Maxima proportional zu  $N^2$  sind.

Die Einhüllende der Beugungsfigur ist identisch mit der Beugungsfigur eines Einzelspaltes der Breite  $b$ . Zwischen den hervortretenden Hauptmaxima befinden sich jeweils  $(N - 2)$  Nebenmaxima (siehe Abbildung 9).



**Abbildung 9:** Intensitätsverteilung am Doppel- und Achtfachspalt (mit Einhüllender)

Um mit dem Verhalten von (5) vertraut zu werden, kann man mit dem Applet auf <http://www.zum.de/Faecher/Materialien/gebhardt/schaubild/beispiel/spalt.htm> alle Parameter:  $\lambda, b, s, N, \phi$  getrennt variieren und das Ergebnis sofort sehen.

## 1.9 Fresnel-Beugung an der Kante

Fällt Licht auf eine geradlinige Kante (parallel zur y-Achse), so wird es gebeugt. Für die Intensitätsverteilung gibt es im Vergleich zur Beugung am Spalt (siehe (1)) keine analytisch geschlossene Lösung. Die recht komplizierte Herleitung für das Intensitätsprofil hinter einer Kante aus den Fresnel-Integralen findet man z.B. in „Klassische Feldtheorie“ von Landau/Lifschitz. Betrachten Sie Abbildung 10 links. Die x-y-Ebene wird durch die Lichtquelle Q und den Rand der Kante gelegt. Die x-z-Ebene steht senkrecht darauf und enthält die Beobachtungspunkte P und die Quelle. Liegt der Ursprung auf dem Rand der Kante, so ist die Intensitätsverteilung der Beugungsfigur hinter der beugenden Kante gegeben durch:

$$I = \frac{I_0}{2} \left( \left( U(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( V(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

$U$  und  $V$  sind die Fresnel-Integrale. Sie sind folgendermaßen definiert:

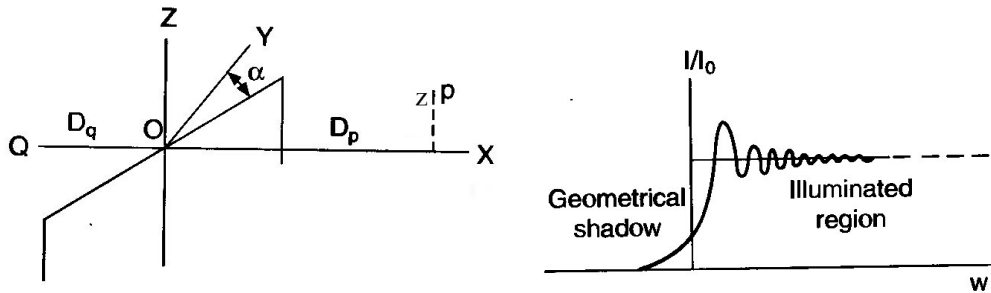
$$U(w^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos(\eta^2) d\eta$$

$$V(w^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin(\eta^2) d\eta$$

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 10 gilt:

$$w = \frac{z}{b} \quad \text{mit} \quad b := \sqrt{\frac{\lambda D_p (D_q + D_p)}{\pi D_q}}$$

wobei  $D_q$  der Abstand zwischen Quelle Q und Kante und  $D_p$  der Abstand zwischen Kante und Detektorebene ist.  $I_0$  ist die Intensität in den Punkten, die hinreichend weit vom Schatten entfernt sind.



**Abbildung 10:** links: Bezeichnungen zur Beugung an der Kante, rechts: Intensitätsverteilung [Behl]

Die Intensität fällt in der Schattenseite monoton ab. Auf der Lichtseite zeigt die Intensität Maxima und Minima, die für große  $z$  immer enger um  $I_0$  oszillieren.

$$I(z) = I_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\sin(w^2 - \pi/4)}{w} \right), \quad w > 1 \quad (6)$$

## 1 Physikalischer Hintergrund

$$I(z) = \frac{I_0}{4\pi w^2}, \quad w < 0 \wedge |w| \gg 0 \quad \text{mit } w = \frac{z}{b} = z \sqrt{\frac{\pi D_q}{\lambda D_p (D_q + D_p)}}$$

Die Höhe und Positionen der Extrema können mit Hilfe obiger Formel (6) und Tabelle 1 überprüft werden:

Ort Extr.	Vorfaktor	$I/I_0(z_{\max/\min})$
$z_{\max_1} =$	$1,4578 \cdot b$	1,37
$z_{\min_1} =$	$2,3250 \cdot b$	0,76
$z_{\max_2} =$	$2,9294 \cdot b$	1,19
$z_{\min_2} =$	$3,4261 \cdot b$	0,84
$z_{\max_3} =$	$3,8586 \cdot b$	1,15
$z_{\min_3} =$	$4,2469 \cdot b$	0,87

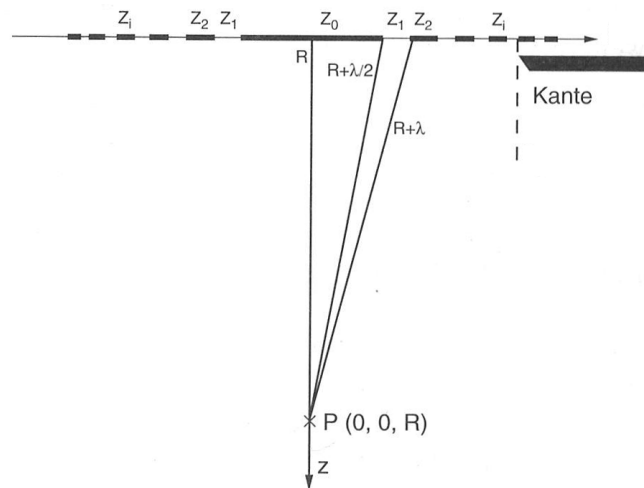
**Tabelle 1:** Positionen der Extrema

Die Werte aus der Tabelle wurden numerisch aus

$$\frac{dI(z)}{dz} = 0$$

bestimmt. Die Positionen der Extrema hängen also nur noch von den Parametern  $\lambda$ ,  $D_p$  und  $D_q$  ab.

Anschaulich lässt sich die Fresnel-Beugung an einer Halbebene wieder qualitativ mit Hilfe der Fresnel-Zonen nachvollziehen. Durch die Halbebene werden Fresnel-Zonen ausgeblendet, die somit nicht mehr zur Intensitätsverteilung in der Beobachtungsebene beitragen können. Die anschließende Superposition der Wellen aus den verbleibenden Fresnel-Zonen führt im Schatten der Halbebene zu einer kontinuierlichen Abnahme der Intensität und im nicht abgedeckten Bereich zu Intensitäten, die um  $I_0$  oszillieren (siehe Abbildung 10 und Abbildung 11).



**Abbildung 11:** Fresnel-Zonen bei Beugung an einer Kante

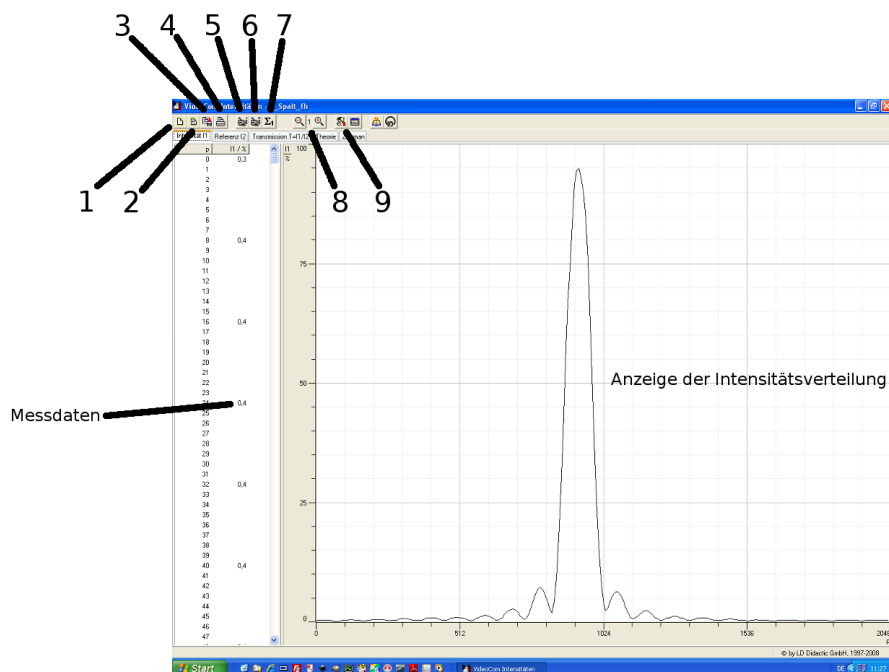


## 2 CCD-Kamera und VideoCom-Software

Auf dem PC kann mit dem Programm *VideoCom-Intensitäten* die Intensitätsverteilung aufgenommen werden. Über die Reiter wird die Darstellung der Messdaten gewählt:

- Intensität  $I_1$ : Normalmodus zur Aufnahme von Intensitäten
- Referenz: Aufnahme einer Referenzverteilung
- Transmission: Trägt  $I/I_0$  auf

Die restliche Steuerung des Programms erfolgt über die Symbole am oberen Bildrand, siehe Abbildung 12.



**Abbildung 12:** Screenshot der Software *VideoCom-Intensitäten*

Die Bedeutung der Symbole (von links nach rechts):

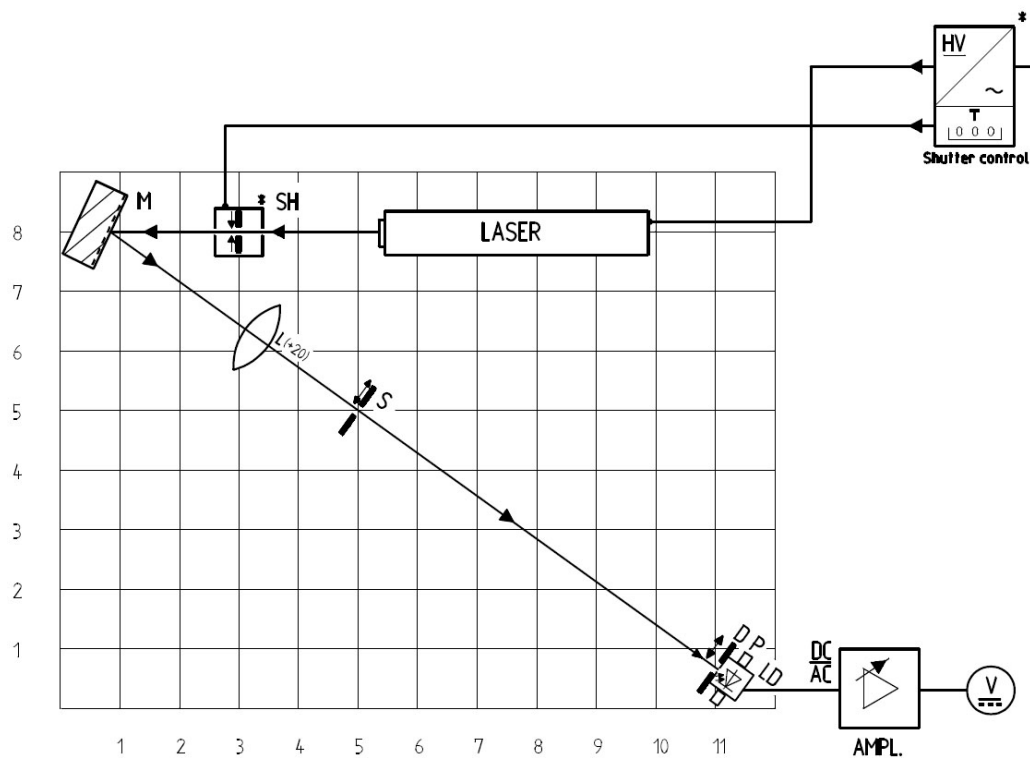
1. Löschen der aufgenommenen Intensitäten
2. Laden von gespeicherten Messungen
3. Speichern der aktuellen Messung – inklusive der Referenzmessung
4. Drucken
5. Aufnahme mit 256 Pixeln
6. Aufnahme mit 2048 Pixeln

7. Durch Drücken auf das Summensymbol werden die Messwerte zeitlich gemittelt, so dass sich leichte Schwankungen herausmitteln. Es empfiehlt sich dies beim Vermessen der Intensitätsverteilung zu aktivieren.
8. Verändert die Sensitivität der CCD-Kamera
9. Öffnet das Dialogfenster mit den Einstellungen - falls keine Verbindung mit der CCD-Kamera hergestellt werden kann, muss hier die korrekte serielle Schnittstelle gewählt werden - dies ist erfahrungsgemäß COM 1.

### 3 Durchführung

#### Material

Grundplatte mit Gummifüßen	08700.00	1
HeNe-Laser ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ )	081 80.93	1
Beobachtungsschirm	---	1
VideoCom CCD Kamera	---	1
Oberflächenspiegel 30 x 30 mm	08711.01	1
Magnetfuß	08710.00	6
Blendenhalter	08724.00	1
Blende mit Beugungsobjekten	08577.02	1
Blende mit vier Doppelspalten	08523.00	1
Blende mit vier Mehrfachspalten	08526.00	1
Graufilter (verschiedene optische Dichten)	---	6
Blende mit variabler Spaltbreite	---	1
Linse	---	1
Maßband	---	1



**Abbildung 13:** Aufbau: Beugung an Spalt und Kante [Behll]

#### Hinweise zum Aufbau

- Die Aufbauhöhe (Strahlenganghöhe) sollte auf der Höhe des Austritts des Lasers liegen. Diese liegt in der Regel bei 130 mm.
- Das Beugungsobjekt (z.B. Spalt) muss normalerweise näher an der Linse, als an der CCD-Kamera platziert werden, um aussagekräftige Beugungsbilder zu erhalten. Ein Abstandsverhältnis von etwa 1:3 hat sich bewährt.

*Optionale Fragen:* Warum ist das zulässig? Warum ist es notwendig?

- Wenn ein asymmetrisches Beugungsbild auftritt, liegt das möglicherweise an einer schief im Strahlengang stehenden Linse. Durch vorsichtiges Drehen der Linse kann man dann ein symmetrisches Bild erhalten.
- Bei Verwendung der CCD-Kamera muss eine passende Anzahl Graufilter in den Laserstrahl eingebracht werden, um eine Intensität im Messbereich der CCD-Kamera zu erhalten. Die Graufilter können zum Laserstrahl leicht verkippt werden, um eine etwas niedrigere Intensität zu erhalten.
- Betrachten Sie bitte einmal die CCD-Kamera im Licht und überlegen Sie sich, wo der Strahl diese treffen soll. Dies ist bei Versuchen ohne Linse essentiell für gute Ergebnisse.
- Bei einer guten Justierung und maximaler auf die CCD-Kamera treffende Laserleistung werden mindestens Graufilter mit einer Abschwächung von 1,6 Größenordnungen benötigt. Andernfalls sollte neu justiert werden. Kontrollfragen: Kamera getroffen? Strahlhöhe? Linse zentral getroffen?
- Betrachten Sie Ihr Bild im Zweifel jeweils zunächst auf einem vor der CCD-Kamera in den Strahlengang eingebrachten Schirm (ggf. etwas seitlich gedreht). Dann wissen Sie, was Sie auf der CCD-Kameraaufnahme erwarten können.
- Die CCD-Kamera hat einen schnellen, ungenauen Modus (256 Pixel) und einen langsamen, genauen Modus (2048 Pixel). Für das Justieren des Aufbaus kann der Modus mit 256 Pixeln verwendet werden, messen sollte man mit 2048 Pixeln.

*Optionale Frage:* Warum ist die Messung bei 2048 Pixeln besser, obwohl sie viel schlechter aussieht bzw. verrauschter ist? Vergleichen Sie beide Modi bei Teilversuch 3.6.

- *Optionale Frage:* Wie kann man am Beugungsbild erkennen, ob ein Beugungsobjekt senkrecht im Laserstrahl steht? Verkippen Sie dazu den Spalt zum Laserlicht.

#### 3.1 Fraunhofer-Beugung am variablen Einfachspalt

In diesem Teilversuch wird die Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt qualitativ untersucht.

- Der Versuchsaufbau erfolgt gemäß Abbildung 13. Anstatt der CCD-Kamera wird in diesem Teilversuch jedoch der Schirm zum Beobachten der Beugungsbilder benutzt.
- Der Laserstrahl wird, nachdem er von dem Spiegel  $M$  reflektiert wurde, durch die Linse  $L$  ( $f = 20\text{ mm}$ ) aufgeweitet.

### 3 Durchführung

- Zur Beugung am variablen Spalt wird der von der Linse aufgeweitete Laserstrahl symmetrisch auf die vertikalen, geschlossenen Spaltschneiden gerichtet.
- Variieren Sie die Spaltbreite und beobachten Sie dabei das Intensitätsprofil.

#### Auswertung (zu Hause)

- Erklären Sie Ihre Beobachtungen anhand von Gleichung (2).

### 3.2 Übergang von Fraunhofer- zu Fresnel-Beugung

Im diesem Teilversuch wird der Übergang zwischen Fraunhofer-Beugung und Fresnel-Beugung untersucht.

- Ersetzen Sie den Beobachtungsschirm durch die CCD-Kamera.
- Öffnen Sie den Spalt und vergrößern Sie die Spaltbreite bis Sie den Übergang zwischen Fraunhofer- und Fresnel-Beugung beobachten können.  
Nehmen Sie mindestens 3 aussagekräftige Intensitätsverteilungen für den Übergang auf.
- Beobachten Sie anschließend die Änderungen der Intensitätsverteilung im Fall Fresnel-scher Beugung. Nehmen Sie mindestens 3 aussagekräftige Intensitätsverteilungen zur Erklärung dieses Verhaltens auf.

#### Auswertung (zu Hause)

- Wie lässt sich am Intensitätsverlauf die Anzahl der beteiligten Fresnel-Zonen bestimmen?
- Nehmen Sie parallele Beleuchtung des Spalts an und leiten Sie aus geometrischen Überlegungen die folgende Formel für den Radius  $R_m$  der m-ten Fresnelschen Zone ab:

$$R_m = \sqrt{m \cdot R \cdot \lambda}$$

*Optional:* Berücksichtigen Sie endliche Abstände vom Spalt zur Quelle und vom Spalt zum Schirm.

- Welche Spaltbreite ergibt sich somit beim Aufspalten des Zentralmaximums des Fraunhoferschen Beugungsbildes in zwei Maxima, die durch ein Minimum getrennt sind? Berechnen Sie diesen Wert. Ist er realistisch?

#### 3.3 Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt

In diesem Teilversuch wird die Spaltbreite  $b$  durch einen Fit an die Messwerte bestimmt.

- Das Laserlicht wird auf den Spalt der festen Breite 0,2 mm (auf dem Glasplättchen mit den Beugungsobjekten) justiert.
- Der Spalt sollte senkrecht vom Laserstrahl getroffen werden, sonst sieht man später in der Auswertung einen effektiv kleineren Spalt. Der Laserstrahl trifft senkrecht auf, wenn der Strahl auf sich selbst (Punkt am Spiegel) reflektiert wird.
- Nehmen Sie nun ein möglichst symmetrisches Fraunhofer-Beugungsbild mit ausgeprägten Nebenmaxima auf. Mit welcher Auflösung sollte man das Bild aufnehmen, um später einen möglichst genauen Fit zu ermöglichen?
- Zur Auswertung muss der Abstand  $r$  zwischen CCD-Kamera und Spalt gemessen werden. Der Abstand von der Gehäuserückseite der CCD-Kamera zum Sensor beträgt  $(18 \pm 2)$  mm.

#### Auswertung (vor Ort)

- Bestimmen Sie die Spaltbreite durch einen Fit von (1) an die Messwerte. Benutzen Sie dafür die Curve Fitting Toolbox in MATLAB.

#### Fitten in MATLAB mit der Curve Fitting Toolbox

- Speichern Sie mit VideoCom ihre Messwerte ab.
- Starten Sie MATLAB und wechseln Sie im Bereich *Current Folder* in den Ordner mit den Messwerten.
- Importieren Sie Ihre Daten, indem Sie auf *Import Data* klicken. Kontrollieren Sie nach dem Import, ob genau 2048 Datenpunkte importiert wurden.
- Der CCD-Zeilensensor besitzt 2048 Pixel mit einer Gesamtbreite von 28 mm. Damit ergibt sich ein Abstand zwischen zwei Messpunkten von  $dx = 28/2048$  mm. Generieren Sie mit den MATLAB-Befehlen  $dx = 0.028/2048$ ;  $x=[dx/2:dx:0.028]$  den Vektor  $x$  mit 2048 Einträgen, um den Intensitäten ihre entsprechende Position in Meter auf dem CCD zuzuweisen.
- Rufen Sie mit dem Befehl `cftool` die Curve Fitting Toolbox auf. Die Fitparameter können Sie über *Fit Options* einstellen.
- Hier sind einige Tipps zum Fitten der Messdaten:
  - Als Wertepaare werden die Vektoren  $x$  und  $y$  eingegeben.

### 3 Durchführung

- Fitten Sie an die Formel ( $\lambda = 632,8\text{nm}$ ):

$$I(x) = a \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda r}(x-d)\right)}{\frac{\pi b}{\lambda r}(x-d)} \right)^2 + c$$

- Die Startwerte für den Fit müssen schon ungefähr den tatsächlichen Werten entsprechen, damit der Fit konvergiert. Schätzen Sie hierfür die entsprechenden Werte ab.
- Sollte der Fit nicht konvergieren, empfiehlt es sich die Anfangsbedingungen zu variieren oder mittels *Exclude* einen Teil der Messwerte vom Fit auszuschließen. Die Randbereiche oder das Zentralmaximum können ohne einen großen Verlust in der Genauigkeit ausgeschlossen werden.
- Bei Problemen kann die Suche per englischem Stichwort in den sehr empfehlenswerten Hilfeseiten nützlich sein. Weitere Infos, Tutorials und Beispiele findet man auf [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).

#### Auswertung (zu Hause)

- Diskutieren Sie üblich mögliche Ursachen für Messunsicherheiten bei der Bestimmung der Spaltbreite.

### 3.4 Babinetsches Theorem

In diesem Teilversuch soll das Babinetsche Theorem qualitativ bestätigt werden.

- Entfernen Sie die Linse.
- Statt das gesamte Beugungsbild aufzunehmen, kann hier auch nur einer der Bereiche neben dem Hauptmaximum aufgenommen werden. (Warum?) So wird eine höhere Genauigkeit erzielt und der Effekt ist besser sichtbar.
- Wechseln Sie bei unverändertem Versuchsaufbau in den Reiter *Referenz* und nehmen Sie das Beugungsbild des Spalts als Referenzverteilung auf.
- Verschieben Sie nun das Glasplättchen (vorsichtig), so dass der Laserstrahl symmetrisch den Streifen beleuchtet. Der Abstand vom Diahalter zur CCD-Kamera muss dabei gleich bleiben.
- Vermessen Sie nun im Reiter *Intensität*  $I_1$  die Intensitätsverteilung des Strichs, und vergleichen Sie diese mit der Referenzmessung.
- Verwenden Sie zur qualitativen Veranschaulichung des Babinetschen Theorems auch das ebenfalls auf der Blende mit Beugungsobjekten vorhandene Loch und die dazu komplementäre, gleichgroße Scheibe. Verdrehen Sie dazu den Spiegel und betrachten Sie das Beugungsmuster in einiger Entfernung auf der Wand.

#### Auswertung (zu Hause)

- Vergleichen Sie die Positionen bzw. Abstände der Minima/Maxima bei Beugung am Streifen und Spalt.
- Erklären Sie Ihre qualitativen Beobachtungen bei Beleuchtung der Punkt- und Lochblende.

#### 3.5 Fraunhofer-Beugung an Doppelspalt und Mehrfachspalt

Hinter den Mehrfachspalten entsteht ein Beugungsmuster, dessen Intensitätsverteilung für verschiedene Anzahlen an Spalten, Spaltbreiten und Mehrfachspaltkonstanten beobachtet wird (genauere Angaben auf der Mehrfachblende):

- Untersuchen Sie die Beugungsmuster der einzelnen Mehrfach- und Doppelspalte (qualitativ).
- Beobachten Sie dazu ohne Linse die Beugungsbilder in einiger Entfernung (Wand).

#### Auswertung (zu Hause)

- Erklären Sie Ihre qualitativen Beobachtungen an Doppel- und Mehrfachspalten mit Hilfe von (5).

#### 3.6 Fresnel-Beugung an der Kante

Im letzten Teilversuch wird eine quantitative Betrachtung der Fresnel-Beugung an einer Kante durchgeführt.

- Bauen Sie die Linse wieder ein.
- Messen Sie zunächst ohne Kante das (in etwa) gaußförmige Intensitätsprofil  $I_0$  als Referenz.
- Wechseln Sie nun zum Reiter *Intensität*  $I_1$  und vermessen Sie das Beugungsbild bei eingebrachter Kante, die den halben Laserstrahl verdeckt. Eine geeignete Kante ist beispielsweise der Maßstab für die Strahlenganghöhe (etwas schräg, unter  $45^\circ$  in den Strahl gebracht).
- Wechseln Sie in den Reiter *Transmission*, um Ihre Messung zu interpretieren.

#### Auswertung (zu Hause)

- Vergleichen Sie die Messung mit dem theoretisch erwarteten Verhalten.