Lösungsvorschlag zur Hauptklausur in

Stochastik und Statistik

Sommersemester 2018

long.xingyu@campus.lmu.de

Letzte Änderung: 16. Juli 2019

Alle Angaben ohne Gewähr

Aufgabe 1

(a)

$f_{X,Y}(x,y)$	$y=1$	$y=2$	$f_X(x)$
$x=-1$	$0.35-\theta$	θ	0.35
$x=0$	$\theta-0.05$	$0.35-\theta$	0.3
$x=1$	0.2	0.15	0.35
$f_Y(y)$	0.5	0.5	1

(b)
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_x x\cdot f_X(x)\\ &= (-1)\cdot 0.35 + 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.35\\ &= 0\\ \mathbb{E}(Y) &= \sum_y y\cdot f_Y(y)\\ &= 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.5\\ &= 1.5\\ \mathbb{E}(X\cdot Y) &= \sum_x\sum_y x\cdot y\cdot f_{X,Y}(x,y)\\ &= (-1)\cdot 1\cdot(0.35-\theta) + (-1)\cdot 2\cdot\theta + 0\cdot 1\cdot(\theta-0.05) + 0\cdot 2\cdot(0.35-\theta) + 1\cdot 1\cdot 0.2 + 1\cdot 2\cdot 0.15\\ &= 0.15-\theta\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \implies \rho(X,Y)=0:$
$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\\ &= (0.15-\theta) - 0\cdot 1.5\\ \Leftrightarrow \theta &= 0.15\end{aligned}$$

(d) Nicht unabhängig, denn z.B. $f_{X,Y}(1,1) = 0.2 \neq 0.175 = 0.35\cdot 0.5 = f_X(1)\cdot f_Y(1)$.

Aufgabe 2

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 cx(1-x)\mathrm{d}x = c\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}c \overset{!}{=} 1 \implies c=6$

Außerdem gilt für $x\in[0,1]$ stets $6x(1-x)\geq 0$.

(b) $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 6(1-x) \mathrm{d}x = \left(6x - 3x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 3$

(c) X ist eine stetige Zufallsvariable $\implies \forall x \in \mathbb{R} : P(X = x) = 0$.

(d) $Y = \frac{1}{2}X^2 \;\Rightarrow\; g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\; g^{-1}(y) = \sqrt{2y} \\
&\Rightarrow\; \left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2y}}\right| \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{2y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &\overset{\text{(Transf. Dichte)}}{=} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| \\
&= 6\sqrt{2y} \cdot (1 - \sqrt{2y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2y}} \\
&= 6 - 6\sqrt{2y}
\end{aligned}
$$

Y kann nur Werte zwischen $\min_x g(x) = 0$ und $\max_x g(x) = \frac{1}{2}$ annehmen:

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 6 - 6\sqrt{2y} & , \; y \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & , \; y \notin \left[0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}
$$

Aufgabe 3

(a) X folgt Binomialverteilung mit $n = 200$ und $\pi = 0.15$. Kurz: $X \sim \mathcal{B}(200, 0.15)$. Skriptwissen:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= n \cdot \pi \;= 200 \cdot 0.15 = 30 \\
\mathrm{Var}(X) &= n \cdot \pi \cdot (1 - \pi) \;= 200 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 25.5
\end{aligned}
$$

(**Zentraler Grenzwertsatz**) Für sehr großes n lässt sich die Verteilung von X durch eine Standardnormalverteilung mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und Varianz $\mathrm{Var}(X)$ approximieren:

$$
\begin{aligned}
&\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \sim \mathcal{N}(0,1) \\
\Rightarrow \tilde{X} = &\frac{X - 30}{\sqrt{25.5}} : \tilde{X} \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}
$$

(b) Wir verwenden $\tilde{X}$ aus Teilaufgabe (a):

$$
\begin{aligned}
P(20 \le X \le 30) &= P(X \le 30) - P(X < 20) \\
&= P\left(\frac{X - 30}{\sqrt{25.5}} \le \frac{30 - 30}{\sqrt{25.5}}\right) - P\left(\frac{X - 30}{\sqrt{25.5}} < \frac{20 - 30}{\sqrt{25.5}}\right) \\
&\approx P\left(\tilde{X} \le 0\right) - P\left(\tilde{X} < -1.98\right) \\
&= \Phi(0) - \Phi(-1.98) \\
&= 0.5 - (1 - \Phi(1.98)) \\
&\approx 0.5 - (1 - 0.976) \\
&= 0.476
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(a) Likelihoodfunktion: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\theta \exp\left(-\theta\,|x_i|\right) = \frac{\theta^n}{2^n} \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)$

$$\text{Loglikelihoodfunktion: } l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left(\frac{\theta^n}{2^n}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)\right)$$

$$= n\ln\theta - n\ln 2 - \theta\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\text{Erste Ableitung} \overset{!}{=} 0 : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} l(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}|x_i| \overset{!}{=} 0 \implies \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

$$\text{Zweite Ableitung} < 0 : \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} l(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \text{ gilt stets wegen } n > 0$$

$$\implies \text{ML-Schätzer: } \hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

(b)
$$\text{Zweite Ableitung: } l''(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} l(\theta) \,\Bigg|\, \theta = \hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} \,\Bigg|\, \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

$$= -\frac{(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2}{n}$$

$$\implies \text{Standardfehler: } \mathrm{SE}(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}) = \sqrt{\left[-l''(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}})\right]^{-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

(c)
$$(1-a) = 95\% \implies a = 5\% \implies d = (1 - \frac{5\%}{2})\text{-Quantil der Standardnormalverteilung}$$

$$= 0.975\text{-Quantil der Standardnormalverteilung}$$

$$\approx 1.96$$

$$\text{Approximatives 95\%-Konfidenzintervall} = \left[\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} - d\cdot\mathrm{SE}(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}),\ \hat{\theta}_{\mathrm{ML}} + d\cdot\mathrm{SE}(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}})\right]$$

$$\approx \left[\frac{n - 1.96\cdot\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|},\ \frac{n + 1.96\cdot\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\right]$$

(d)
$$\text{Approximatives 95\%-Konfidenzintervall} \approx \left[\frac{n - 1.96\cdot\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|},\ \frac{n + 1.96\cdot\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\right] \,\Bigg|\, n = 100, \sum_{i=1}^{100}|x_i| = 70$$

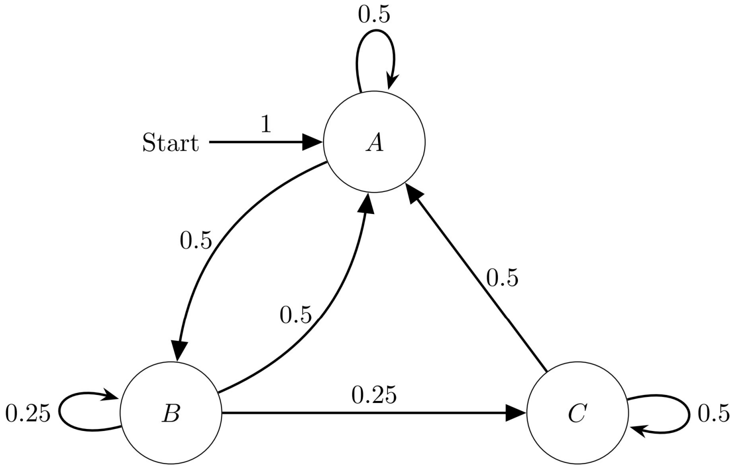
$$\approx [1.149,\ 1.709]$$

Aufgabe 5

(a) $A := (\circ, \bullet, \bullet)$, $B := (\bullet, \circ, \bullet)$, $C := (\bullet, \bullet, \circ)$

$$\text{Übergangsmatrix} := \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & (1-a)/2 & (1-a)/2 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)



(c) (i) $P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.375 & 0.125 \\ 0.5 & 0.3125 & 0.1875 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \end{array}$

$P(X_2 = A | X_0 = A) = (P^2)_{AA} = 0.5$

(ii) $P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.375 & 0.125 \\ 0.5 & 0.3125 & 0.1875 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.34375 & 0.15625 \\ 0.5 & 0.328125 & 0.171875 \\ 0.5 & 0.3125 & 0.1875 \end{pmatrix} \end{array}$

$P(X_0 = A, X_3 = A) = P(X_0 = A) \cdot P(X_3 = A | X_0 = A) = 1 \cdot (P^3)_{AA} = 0.5$

(d) $\pi \cdot P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right) = \pi$

$\implies \pi$ ist eine stationäre Verteilung.