

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Klausur in Stochastik und Statistik

24. Juli 2018

- Überprüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausurangabe besteht aus fünf Aufgaben, dem Anhang mit einer Verteilungstabelle und einem Deckblatt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In den ersten 30 Minuten und in den letzten 15 Minuten ist keine vorzeitige Abgabe möglich.
- Ein Toilettenbesuch ist nicht vorgesehen. In sehr dringenden Ausnahmefällen wenden Sie sich bitte an die Aufsicht.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich die ausgedruckte Formelsammlung ohne Markierungen sowie ein nicht-pro-grammierbarer und nicht-grafikfähiger Taschenrechner zugelassen.
- Bei Unterschleif erfolgt eine Meldung an den zuständigen Prüfungsausschuss. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen, dazu gehört auch das Schreiben mit Blei- und/oder Rotstift sowie das Bereithalten internetfähiger Gerätschaften und jeglicher anderer nicht zugelassener Hilfsmittel.
- Das Abfotografieren und/oder Abschreiben der Klausurangabe bzw. das Mitnehmen der Klausurangabe ist nicht gestattet.
- Verwenden Sie für Ihre Notizen und Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen und **kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer.**
- Die Klausur umfasst insgesamt 50 Punkte. Alle Ausarbeitungen müssen nachvollziehbar sein. Die Ergebnisse müssen klar ersichtlich sein (unterstreichen bzw. Antwortsatz). Es erfolgt eine detaillierte Bepunktung des Lösungsweges. Runden Sie (Zwischen-) Ergebnisse auf die dritte Nachkommastelle.
- Füllen Sie bitte das unten stehende Formular umgehend aus. Halten Sie für die Ausweiskontrolle bitte einen Lichtbildausweis sowie Ihren Studierendenausweis bereit.
- Verlassen Sie den Prüfungsraum erst, nachdem Sie der Aufsicht die Klausur persönlich übergeben haben. **Für den Eingang der kompletten Klausur (Angabe mit unterschriebenem Deckblatt und Ihre Lösungsblätter) bei der Aufsicht sind Sie selbst verantwortlich.**
- Bitte verlassen Sie nach der Klausur den Hörsaal und das Gebäude zügig und leise, damit Sie die Teilnehmenden anderer Klausuren nicht stören.

Ich habe die Anweisungen zur Kenntnis genommen und mein Klausurexemplar auf Vollständigkeit überprüft.

.....
 Name Vorname Matrikelnummer

.....
 Studiengang Prüfungsordnung Unterschrift

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgende Zufallsvariablen X und Y , deren gemeinsame Verteilung, soweit bekannt, in der angegebenen Kontingenztabelle abzulesen ist.

$f_{X,Y}(x,y)$	$y = 1$	$y = 2$	$f_X(x)$
$x = -1$		θ	0.35
$x = 0$			
$x = 1$	0.2	0.15	
$f_Y(y)$		0.5	

- Vervollständigen Sie die Tabelle (inkl. der Randverteilungen). (3 Punkte)
- Berechnen Sie die Erwartungswerte von X , Y und $X \cdot Y$. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie θ so, dass X und Y unkorreliert sind. (3 Punkte)
- Sind X und Y unabhängig? Warum, bzw. warum nicht? (2 Punkte)

Aufgabe 2

Die Länge X eines zufällig auf der Straße gefundenen Blattes eines Baumes in Dezimetern folge einer Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass gelten muss: $c = 6$. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z = \frac{1}{X}$. (2 Punkte)
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Blatt 0.75 (Dezimeter) lang ist? (1 Punkt)
- Die Fläche eines Blattes der Länge X sei $Y = \frac{1}{2}X^2$. Bestimmen Sie die Dichte der Fläche Y eines zufälligen Blattes.
Welche Werte kann die Fläche eines Blattes annehmen, d.h. für welche Werte gilt $f_Y(y) > 0$? (6 Punkte)

Aufgabe 3

Ein Marktforschungsinstitut, das in Foto-Fachgeschäften eine Erhebung machen will, stützt sich bei der zufälligen Auswahl von $n = 200$ Geschäften auf eine erworbene Adressenliste. Von den mehr als 5000 Adressen auf der Liste sind allerdings 15% nicht mehr gültig.

- Wie ist die Anzahl der ungültigen Adressen in der Stichprobe exakt verteilt und wie lässt sie sich anhand des Zentralen Grenzwertsatzes approximieren? Gehen Sie dabei davon aus, dass die Adressen mit Zurücklegen gezogen werden. (4 Punkte)
- Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe zwischen 20 und 30 Adressen ungültig sind. (4 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine unabhängig identisch verteilte Stichprobe, wobei die Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, n$, einer stetigen Dichte

$$f_{X_i}(x_i; \vartheta) = \frac{1}{2} \vartheta \exp(-\vartheta |x_i|) \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{R}, \vartheta \in [1, 2]$$

folgen.

- Bestimmen Sie den ML-Schätzer von ϑ . (5 Punkte)
- Bestimmen Sie den Standardfehler des ML-Schätzers. (3 Punkte)
- Konstruieren Sie ein approximatives 95%-Wald-Konfidenzintervall für ϑ . (1 Punkt)
- Für eine Stichprobe der Größe $n = 100$ ergibt sich $\sum_{i=1}^{100} |x_i| = 70$. Bestimmen Sie das approximative 95%-Wald-Konfidenzintervall für ϑ . (1 Punkt)

Aufgabe 5

Eine weiße und zwei schwarze (nicht unterscheidbare) Kugeln seien zufällig nebeneinander angeordnet. Die Anordnung bzw. der Zustand A ist definiert als

$$A = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Position 1}}}{\circ}, \bullet, \bullet).$$

Bei einem Spiel sei Zustand A der Startzustand. Der Zustand ändere sich in jeder Spielrunde nach folgender Regel: Eine der drei Kugeln wird zufällig ausgewählt. Dabei werde die weiße Kugel mit Wahrscheinlichkeit $a \in (0, 1)$ und jede der beiden schwarzen Kugeln mit Wahrscheinlichkeit $(1 - a)/2$ ausgewählt. Die ausgewählte Kugel wird an Position 1 (ganz links) neu angeordnet. Alle weiteren Kugeln werden entsprechend um eine Stelle nach rechts verschoben, falls sie sich links von der ausgewählten Kugel befinden oder verbleiben auf ihrer Position.

- Beschreiben Sie den obigen Prozess mit Hilfe einer homogenen Markov-Kette, d.h. vervollständigen Sie den Zustandsraum (definieren Sie alle möglichen Zustände) und geben Sie dann die 1-Schritt Übergangsmatrix in Abhängigkeit von a an. (3 Punkte)

Betrachten Sie nun für die folgende Aufgaben die Übergangsmatrix

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Zeichnen Sie einen gerichteten Markov-Graphen mit Übergangswahrscheinlichkeiten. (1 Punkt)
- Sei weiterhin A der Startzustand. Berechnen Sie
 - $P(X_2 = A | X_0 = A)$. (2 Punkte)
 - die Wahrscheinlichkeit für den Zustandsverlauf $X_0 = A, X_3 = A$. (2 Punkte)
- Überprüfen Sie, ob $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ eine stationäre Verteilung ist. (2 Punkte)

Anhang

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.91	0.8186	1.21	0.8869	1.51	0.9345	1.81	0.9649	2.11	0.9826
0.92	0.8212	1.22	0.8888	1.52	0.9357	1.82	0.9656	2.12	0.9830
0.93	0.8238	1.23	0.8907	1.53	0.9370	1.83	0.9664	2.13	0.9834
0.94	0.8264	1.24	0.8925	1.54	0.9382	1.84	0.9671	2.14	0.9838
0.95	0.8289	1.25	0.8944	1.55	0.9394	1.85	0.9678	2.15	0.9842
0.96	0.8315	1.26	0.8962	1.56	0.9406	1.86	0.9686	2.16	0.9846
0.97	0.8340	1.27	0.8980	1.57	0.9418	1.87	0.9693	2.17	0.9850
0.98	0.8365	1.28	0.8997	1.58	0.9429	1.88	0.9699	2.18	0.9854
0.99	0.8389	1.29	0.9015	1.59	0.9441	1.89	0.9706	2.19	0.9857
1.00	0.8413	1.30	0.9032	1.60	0.9452	1.90	0.9713	2.20	0.9861
1.01	0.8438	1.31	0.9049	1.61	0.9463	1.91	0.9719	2.21	0.9864
1.02	0.8461	1.32	0.9066	1.62	0.9474	1.92	0.9726	2.22	0.9868
1.03	0.8485	1.33	0.9082	1.63	0.9484	1.93	0.9732	2.23	0.9871
1.04	0.8508	1.34	0.9099	1.64	0.9495	1.94	0.9738	2.24	0.9875
1.05	0.8531	1.35	0.9115	1.65	0.9505	1.95	0.9744	2.25	0.9878
1.06	0.8554	1.36	0.9131	1.66	0.9515	1.96	0.9750	2.26	0.9881
1.07	0.8577	1.37	0.9147	1.67	0.9525	1.97	0.9756	2.27	0.9884
1.08	0.8599	1.38	0.9162	1.68	0.9535	1.98	0.9761	2.28	0.9887
1.09	0.8621	1.39	0.9177	1.69	0.9545	1.99	0.9767	2.29	0.9890
1.10	0.8643	1.40	0.9192	1.70	0.9554	2.00	0.9772	2.30	0.9893
1.11	0.8665	1.41	0.9207	1.71	0.9564	2.01	0.9778	2.31	0.9896
1.12	0.8686	1.42	0.9222	1.72	0.9573	2.02	0.9783	2.32	0.9898
1.13	0.8708	1.43	0.9236	1.73	0.9582	2.03	0.9788	2.33	0.9901
1.14	0.8729	1.44	0.9251	1.74	0.9591	2.04	0.9793	2.34	0.9904
1.15	0.8749	1.45	0.9265	1.75	0.9599	2.05	0.9798	2.35	0.9906
1.16	0.8770	1.46	0.9279	1.76	0.9608	2.06	0.9803	2.36	0.9909
1.17	0.8790	1.47	0.9292	1.77	0.9616	2.07	0.9808	2.37	0.9911
1.18	0.8810	1.48	0.9306	1.78	0.9625	2.08	0.9812	2.38	0.9913
1.19	0.8830	1.49	0.9319	1.79	0.9633	2.09	0.9817	2.39	0.9916
1.20	0.8849	1.50	0.9332	1.80	0.9641	2.10	0.9821	2.40	0.9918

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.