STV— Statistische Verteilungen

P1 — Praktikum

25. Februar 2023

Ziele

In diesem Versuch sollen Sie einen Einblick in physikalisch relevante Teile der Statistik bekommen. Es werden hierfür grundlegende Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Gleichverteilung, Binomialverteilung, Poissonverteilung und Normalverteilung) und deren Zusammenhang vorgestellt. Des Weiteren lernen Sie mit den Begriffen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung zu arbeiten. Die Anwendungsgebiete in der Physik sind unter anderem die Thermodynamik und die natürliche Radioaktivität. Diese ist ein Hauptbestandteil der Versuche, die Sie bearbeiten werden. Zur Visualisierung der gewonnenen Messwerte wird das Programm MATLAB verwendet. Das Skript zu MATLAB ist im Internet zum Download bereitgestellt.

Teilversuche

1. **Generierung einer Binomialverteilung mit dem Galton-Brett**
   Das Galton-Brett liefert einen experimentellen Zugang zur Binomialverteilung. Mit einer kleinen, mittleren und großen Statistik werden Sie eine Binomialverteilung generieren. Zum Auswerten der mittleren und großen Statistik verwenden Sie MATLAB.
2. **Aufnahme einer Poissonverteilung mit natürlicher Radioaktivität**
   Mit dem Szintillationsdetektor lässt sich die natürlich auftretende γ-Strahlung innerhalb eines gewissen Energieintervalls registrieren. Die dabei auftretenden Ereignisse dienen zum Studium des radioaktiven Zerfalls, was schließlich zur Poissonverteilung führt. Mit MATLAB veranschaulichen Sie für ein bestimmtes Energieintervall diese Verteilung und schätzen anschließend den dazugehörigen Erwartungswert.
3. **Zentraler Grenzwertsatz** In diesem Teilversuch untersuchen Sie die Auswirkung einer Änderung von Parametern der Einzelmessungen auf die erhaltenen Verteilungen und disktuieren Ihre Ergebnisse mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[BL98] BLOBEL, V. ; LOHRMANN, E.: *Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse.* 1. Auflage. Teubner, 1998 (Teubner-Studienbücher : Physik). – ISBN 9783519032434

1 Mathematische Grundlagen: Statistik

In der Anleitung zum Auswerten von Messergebnissen (AMW) haben Sie sich bereits mit der statistischen Messunsicherheit und der damit verbundenen statistischen Verteilung von Messwerten beschäftigt. Ferner wurde darauf hingewiesen, dass Messwerte sehr häufig zufällige Größen sind. Darüber hinaus gibt es viele physikalische Prozesse, die nur mit Hilfe von Zufallsgrößen beschrieben werden können (z. B. Aufenthaltsort eines Teilchens im Rahmen der Quantenmechanik). Ein wichtiger Fall für eine Verteilung in der Praxis und auch in diesem Versuch ist die Gauß- oder Normalverteilung. Im Folgenden werden einige Verteilungen, die Gleichverteilung, die Binomialverteilung, die Poissonverteilung und schließlich die Normalverteilung behandelt. Außerdem werden Sie die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes kennenlernen.

1.1 Begriffe: Absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit, Stichprobe und Wahrscheinlichkeit

Die Begriffe der absoluten und relativen Häufigkeit sowie der Wahrscheinlichkeit bilden die Basis zum Verständnis der Stochastik. Die Stochastik wird in der Mathematik aufgeteilt in zwei Bereiche. Der erste Bereich wird Wahrscheinlichkeitsrechnung genannt und beschäftigt sich mit der Berechnung und Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten (dieser Begriff wird im Anschluß näher erläutert) bei einem bekannten Wahrscheinlichkeitsmodell, d.h. die Verteilung der Ereignisse ist bekannt. Der zweite Bereich und in der Experimentalphysik weitaus häufigere Fall ist die Statistik. Man beobachtet Messdaten und auf Grund dieser Beobachtungen ist ein Rückschluß auf die Verteilung möglich.

Unter der *absoluten Häufigkeit* versteht man die Anzahl der Ereignisse mit einem bestimmten Merkmal. Zur Verdeutlichung soll als Beispiel der Münzwurf herangezogen werden. Man wirft eine Münze zehn mal und notiert sich die Anzahl der Würfe, bei denen „Kopf“ geworfen wurde. Die Anzahl dieses Ereignisses (die Anzahl der „Kopf“-Würfe) entspricht der absoluten Häufigkeit. Addiert man die Anzahl von „Kopf“ und „Zahl“, so erhält man wieder zehn, also die Anzahl der Würfe. In diesem Zusammenhang nennt man die Anzahl der Würfe *Größe der Stichprobe*. Dividert man die absolute Häufigkeit der „Kopf“-Würfe durch die Größe der Stichprobe, ergibt sich die *relative Häufigkeit*. Diese wird in Lehrbüchern auch oft bedingte Häufigkeit genannt und besitzt einen Wert zwischen 0 und 1, wobei dieser in der Praxis meist in Prozent angegeben wird.

Die *Wahrscheinlichkeit* für ein Messergebnis gibt an, mit welcher relativen Häufigkeit ein bestimmtes Ereignis bei einer unendlich großen Stichprobe zu erwarten ist. Wichtig hierbei ist, dass eine experimentell gemessene relative Häufigkeit lediglich eine Annäherung für eine solche Wahrscheinlichkeit darstellt, da die Größe der Stichprobe endlich ist.

1.2 Diskrete Gleichverteilung

Eines der bekanntesten Beispiele der Gleichverteilung ist ein (sechsseitiger) Laplace-Würfel. Es handelt sich hierbei um einen Würfel mit sechs Flächen (Spielwürfel), welcher die Eigenschaft besitzt, dass bei einem einmaligen Wurf jede Augenzahl gleich wahrscheinlich ist. Die Abbildung 1 zeigt eine graphische Darstellung der Gleichverteilung. In dieser Darstellung ist zu erkennen, dass es keine Ereignisse mit Nachkommastellen gibt. Die Gleichverteilung eines Laplace-Würfels ist nur für bestimmte Ereignisse (Augenzahlen) definiert. Eine solche Eigenschaft wird *diskret* genannt.

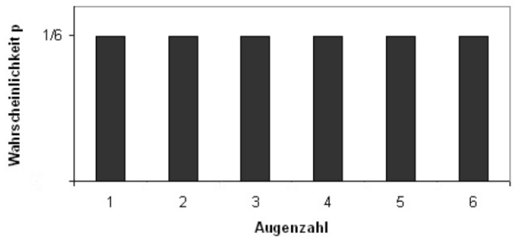

Abbildung 1: Diskrete Gleichverteilung am Beipiel des Laplace-Würfels

Anmerkung: Eine diskrete Gleichverteilung wird oft auch mit einem Balkendiagramm dargestellt.

Die Wahrscheinlichkeit für die diskrete Gleichverteilung berechnet sich durch:

$$p = \frac{\text{günstige Ereignisse}}{\text{mögliche Ereignisse}} \tag{1}$$

Aus (1) ergibt sich somit bei einem Wurf eines Laplace-Würfels eine Wahrscheinlichkeit $p = 1/6$ für jede mögliche Augenzahl.

Was passiert beim Würfeln mehrerer Laplace-Würfel? (für Interessierte)

Werden zwei Laplace-Würfel geworfen und deren Augenzahl addiert, so ist der niedrigst mögliche Wert 2 und der höchste 12. Bei vier Laplace-Würfeln erhält man demnach als niedrigsten Wert 4, also viermal in Folge die Augenzahl 1, und der höchst mögliche Wert beträgt 24. Die Abbildung 2 veranschaulicht dieses Zufallsexperiment. Die „mittleren“ Augensummen kommen auf Grund der mehreren Kombinationsmöglichkeiten häufiger vor als die „Randaugensummen“. Die Augensumme mehrerer Würfel wird durch die Binomialverteilung beschrieben. Diese Verteilung wird in einem separaten Abschnitt besprochen.

1.3 Kontinuierliche Gleichverteilung

Neben der diskreten Gleichverteilung gibt es auch die kontinuierliche. Als Beispiel einer kontinuierlichen Gleichverteilung betrachte man ein Rad, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit dreht. Es werden demnach die Winkel im Intervall von 0° bis 360° kontinuierlich durchlaufen. Nach beliebiger Zeit wird das Rad dann gestoppt. Es bleibt mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Winkel stehen. Die Abbildung 3 zeigt die Wahrscheinlichkeit p aufgetragen gegen die möglichen Verdrehungswinkel des Rades; es entsteht eine kontinuierliche, d. h. durchgängige Rechteckform.

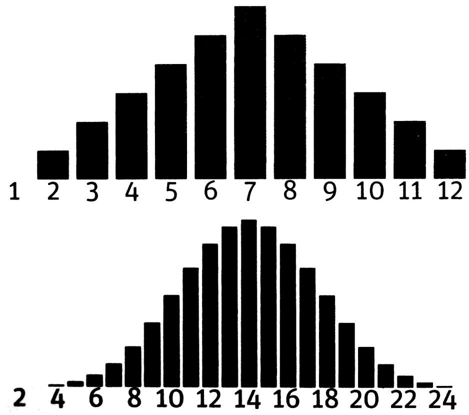

Abbildung 2: Verteilung der Augensumme bei 2-maligem (oben) bzw. 4-maligem (unten) Wurf eines Laplace-Würfels

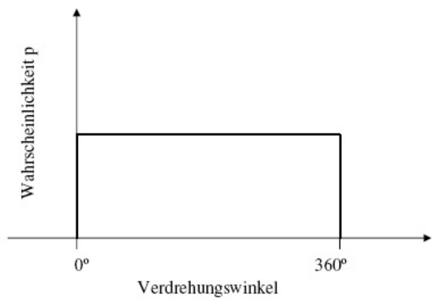

Abbildung 3: Rechteckform einer kontinuierlichen Gleichverteilung

1.4 Normierungsbedingung

Unter der *Normierungsbedingung* versteht man bei diskreten Verteilungen die Summe aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten, die 1 ist. Die Wahrscheinlichkeit p ist unabhängig von der Wahl der Größe der Stichprobe N (vgl. (2)).

$$\sum_{n=0}^{N} p(n) = 1 \tag{2}$$

Im Fall eines Laplace-Würfels ergibt die Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten 1 und entspricht somit der Normierungsbedingung, denn mit 100 %-iger Wahrscheinlichkeit wird bei einem Wurf eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 gewürfelt.

Im kontinuierlichen Fall hingegen entspricht die Normierungsbedingung einem Flächenintegral:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Bezogen auf das Beispiel des rotierenden Rades ist die Fläche des Rechtecks aus Abbildung 3 gleich 1, wobei der Integrationsbereich von 0° bis 360° definiert ist.

1.5 Kennparameter

Wahrscheinlichkeitsverteilungen, u. a. die Gleichverteilung, geben an wie sich Wahrscheinlichkeiten auf mögliche Ereignisse (z. B.: Augenzahlen eines Würfels) verteilen. Zur Charakterisierung der Verteilungen werden folgende Kennparameter definiert.

a) Erwartungswert Der *Erwartungswert* gibt an mit welchem Ergebnis für eine Zufallsvariable zu rechnen ist bzw. welches durchschnittliche Ergebnis zu erwarten ist. Bei der Berechnung des Erwartungswertes muss man den diskreten und kontinuierlichen Fall unterscheiden.

Diskreter Fall:

Im diskreten Fall errechnet sich der Erwartungswert durch die Summe der Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten jedes möglichen Ereignisses des Zufallsexperiments mit den „Werten“ dieser Ereignisse (vgl. (3)).

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(x_i) \tag{3}$$

Kontinuierlicher Fall:

Im kontinuierlichen Fall lässt sich der Erwartungswert mit der Integration der mit x gewichteten Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ bestimmen (1. Moment). Sie werden die Wahrscheinlichkeitsdichten verschiedener Verteilungen und ihre Bedeutung etwas später kennenlernen.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Sowohl für diskrete als auch kontinuierliche Verteilungen ist die Berechnung der Erwartungswerte nicht immer trivial. Deshalb werden in der Anleitung die Formeln des Erwartungswertes der jeweiligen Verteilungen angegeben sein.

b) Varianz und Standardabweichung Die *Varianz* V ist ein Maß dafür, wie stark die beobachteten Werte vom Erwartungswert abweichen. Die *Standardabweichung* σ entspricht der Quadratwurzel der Varianz. Gleichung (4) verdeutlicht den Zusammenhang zwischen der Varianz und dem Erwartungswert E. Die Größe X beschreibt eine allgemeine Zufallsvariable.

$$\begin{aligned} V &= E(X^2) - E(X)^2 \\ \sigma &= \sqrt{V} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

1.6 Binomialverteilung

Sie werden sich bereits im ersten Versuch mit der diskreten *Binomialverteilung* auseinandersetzen. Mit Hilfe eines einfachen mechanischen Systems, dem Galton-Brett, generieren Sie eine solche Verteilung. Eine Kugel wird oben eingeworfen (siehe Abbildung 4) und durchläuft zehn Weggabelungen, also die Entscheidung nach rechts oder nach links zu fallen wird

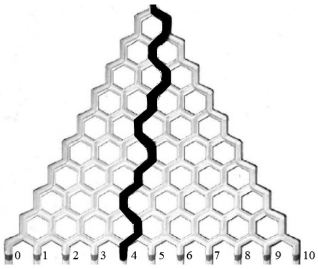

Abbildung 4: 10 Weggabelungen des Galton-Brettes

zehnmal wiederholt. Die Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts zu fallen beträgt dabei $p = 1/2$.

Man betrachte eine Kugel, die nach N Wegscheidungen in einen bestimmten Kanal fällt. Mit (5) lässt sich nun die Wahrscheinlichkeit $w(N,p)$ eines bestimmten Kanals n berechnen:

$$w(N,p) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{5}$$

wobei

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{6}$$

der Binomialkoeffizient (daher der Name der Verteilung) ist. Dieser gibt die Anzahl der möglichen Wege in einen bestimmten Kanal n an.

In Abbildung 4 ist ein bestimmter Weg einer Kugel eingezeichnet. Die Kugel fällt am Ende in den 4. Kanal. Nach (6) ergeben sich allerdings für den Endkanal 210 Möglichkeiten (zur besseren Übersicht ist nur ein Weg in die Abbildung 4 eingezeichnet). Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in Kanal 4 landet, ist somit $w(N,p) = 0.205$ oder 20,5 %. Würde man nun die Wahrscheinlichkeiten für die verbleibenden zehn Kanäle noch berechnen und diese aufsummieren, so ergibt dies 1 (Normierungsbedingung ist erfüllt).

Die technische Umsetzung des Galton-Brettes ist sehr schwierig, da die Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ bei jeder Wegscheidung gewährleistet sein muss. Das im Versuch verwendete Galton-Brett ist aus Plexiglas und es sind regelmäßige Sechsecke eingefräst.

Kennparameter der Binomialverteilung Der Erwartungswert E und die Varianz V der Binomialverteilung lassen sich wie folgt berechnen:

$$E = Np$$
$$V = Np(1-p)$$

Binomialverteilung in der Thermodynamik (für Interessierte)

Ein weiteres Beispiel aus der Physik findet man in der Thermodynamik. Man betrachte einen Behälter mit dem Volumen V, in dem sich N Gasteilchen befinden. Der Behälter wird in zwei Bereiche mit den Volumina V_1 und V_2 unterteilt, wobei gilt: $V = V_1 + V_2$. Im Volumen V_1 befinden sich M Gasteilchen und in V_2 $N-M$ Gasteilchen. Die erste Frage lautet nun wieviele Verteilungsmöglichkeiten der Gasteilchen es in den beiden Volumina V_1 und V_2 gibt? Dies lässt sich mit dem Binomialkoeffizienten beantworten:

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

Die zweite Frage, die nun von Interesse sein soll, ist die Wahrscheinlichkeit $w(N,p)$ bei der sich M Teilchen im Volumen V_1 befinden. Sei dazu die Wahrscheinlichkeit p, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Volumen V_1 mit M Gasteilchen angibt, bekannt. Somit kann $w(N,p)$ nun mit (7) berechnet werden.

$$w(N,p) = \binom{N}{M} p^M (1-p)^{N-M} \tag{7}$$

Es ergibt sich auch in diesem Beipiel aus der Thermodynamik die Binomialverteilung.

1.7 Poissonverteilung

Bisher wurde die Binomialverteilung besprochen, diese ist spiegelsymmetrisch zum Maximum (Erwartungswert). In der Physik besitzen viele Vorgänge eine asymmetrische Verteilung. Ein Beispiel ist das im Versuch durchzuführende Experiment mit der natürlichen Radioaktivität und die dabei zu beobachtende Poissonverteilung. Die *Poissonverteilung* dient vor allem zur Beschreibung seltener Ereignisse.

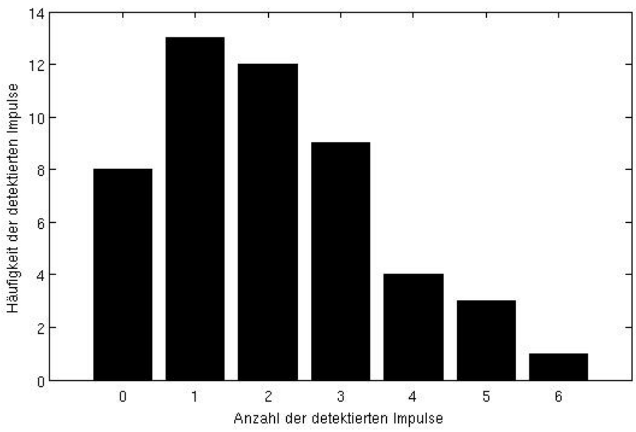

Abbildung 5: asymmetrische Poissonverteilung

Der Erwartungswert λ befindet sich rechts vom Maximum und es liegt keine Symmetrie vor. Diese Asymmetrie wird in Abbildung 5 verdeutlicht.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine bestimmte Zahl n, z. B. Anzahl n der in einer bestimmten Zeit ausgesandten Strahlen, die in einem Detektor nachgewiesen wurden, berechnet sich durch:

$$w_{\mathrm{P}}(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda)$$

wobei λ die Ereignisse, die pro n zu erwarten sind, beschreibt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist bei der Poissonverteilung diskret. Eine kontinuierliche Definition der Poissonverteilung wird mit Hilfe der Gammafunktion, die später für Interessierte erläutert wird, erreicht.

Kennparameter der Poissonverteilung Der Erwartungswert E und die Varianz V der Poissonverteilung lassen sich wie folgt berechnen:

$$E = \lambda$$
$$V = \lambda$$

Gammafunktion (für Interessierte)

Obwohl die Poissonverteilung eigentlich diskret ist, wird sie gerne auf eine kontinuierliche Verteilung verallgemeinert. Diese Kontinuität wird mit Hilfe der Gammafunktion erreicht:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^n \exp(-x)\right]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x = n\Gamma(n) = n!$$

Die Gammafunktion $\Gamma(n+1)$ nimmt somit den Wert $n!$ an. Die Γ–Funktion interpoliert also die Fakultät, d. h. die Funktion nimmt an vorgegebenen Stellen die bekannten Werte an, in diesem Fall die Werte, die mit Hilfe der Poissonverteilung berechnet werden können, und erlaubt die Berechnung von Zwischenwerten.

1.8 Gauß- bzw. Normalverteilung

Die Gaußverteilung ist Ihnen bereits in der AMW begegnet. Sie ist eine kontinuierliche Verteilung und die Bedeutung der *Normalverteilung* in der Physik ist fundamental.

Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Gaußverteilung ist gegeben durch:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8}$$

Der Graph dieser Wahrscheinlichkeitsdichte ist in Abbildung 6 dargestellt. Der Verlauf ist glockenförmig (daher auch oft die Bezeichnung Gaußsche Glockenkurve) und der Parameter μ definiert die Lage des Maximums, σ ist ein Maß für die Breite der Glockenkurve.

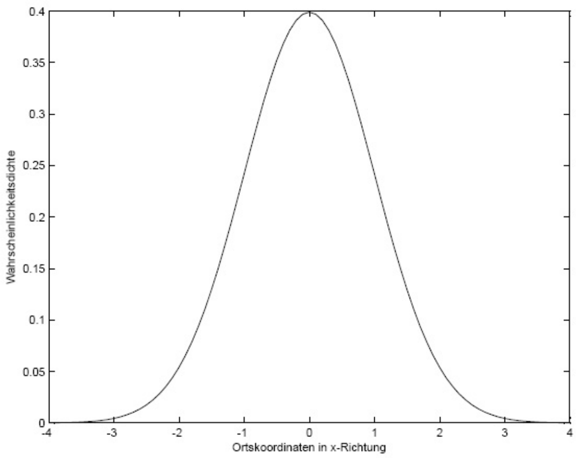

Abbildung 6: Typischer Verlauf einer Normalverteilung–Gaußglocke (hier: μ=0 und σ=1)

Kennparameter der Normalverteilung Der Erwartungswert E und die Varianz V lassen sich für die Normalverteilung wie folgt berechnen:

$$E = \mu$$
$$V = \sigma^2$$

Die Brownsche Bewegung als Beispiel für die Normalverteilung (für Interessierte)

In einem Medium mit einer Temperatur T bewegen sich Teilchen durch Stöße mit ihren Nachbarteilchen. Diese Bewegung wird Brownsche Bewegung genannt. Sie lässt sich mit Hilfe eines sogenannten (zweidimensionalen) Random-Walk Modells quantitativ beschreiben. Zur Vereinfachung wird hier die Bewegung des Teilchens nur in die x-Richtung untersucht. Es legt in einem Zeitintervall Δt die Schrittlänge S zurück, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen entweder nach links oder nach rechts bewegt, gegeben ist (siehe Abbildung 7).

Abbildung 7: 1-dimensionaler Random-Walk mit gleich großen Sprüngen

Die Schrittlänge S des Teilchens nimmt dabei zufällige Werte an. Nach einer Zeit $t = N\Delta t$ ergibt sich der zurückgelegte Gesamtweg S aus der Summe der N Schrittlängen s_i, wobei jede dieser Schrittlängen eine zufällige Größe ist.

$$S = s_1 + s_2 + \cdots + s_N = \sum_{i=1}^{N} s_i$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gesamtweg S ist näherungsweise eine Normalverteilung (siehe zentraler Grenzwertsatz), wobei die Näherung um so besser ist, je größer die Anzahl der Schrittlängen ist.

Zu Beginn befindet sich das Teilchen o. B. d. A. an der Position $x = 0$. Nach einer Zeit $t = N\Delta t$ lässt sich mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit zum Aufenthalt des Teilchens an einem bestimmten Ort x mit Hilfe von (8) berechnen.

Binomialverteilung versus Normalverteilung (für Interessierte)

Die Verwandtschaft zwischen der Normal- und Binomialverteilung kann am Beipiel des Random-Walks nachvollzogen werden. Betrachtet man den Random-Walk mit der Einschränkung, dass nur eine feste Sprungweite des Teilchens zulässig ist, so erhält man eine diskrete Binomialverteilung.

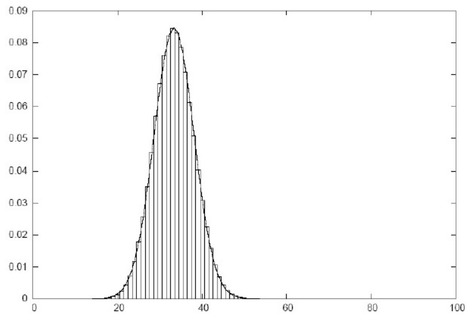

Abbildung 8: Binomialverteilung versus Normalverteilung

Abbildung 8 veranschaulicht die kontinuierliche Normalverteilung und die diskrete Binomialverteilung. Ferner erkennt man, dass sich die Binomialverteilung an die Normalverteilung annähert.

1.9 Der zentrale Grenzwertsatz

Der *zentrale Grenzwertsatz (ZGS)* ist auf Grund seines allgemeinen Charakters und seiner breiten Anwendbarkeit einer der wichtigsten Sätze in der Stochastik. Dieser erklärt die fundamentale Bedeutung der Normalverteilung und lautet wie folgt:

> Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe $w = \sum_{i=1}^{n} x_i$ einer Stichprobe aus n unabhängigen Zufallsvariablen x_i mit einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsdichte mit Mittelwert $\langle x \rangle$ und Varianz σ^2 geht in der Grenze gegen eine Normalverteilungsdichte mit Mittelwert $\langle w \rangle = n\,\langle x \rangle$ und der Varianz $V\langle w \rangle = n\sigma^2$.

Den Beweis des ZGS finden Sie z. B. in [BL98].

1.10 Schätzung

Im ersten Versuchsteil wird mit dem Galton-Brett eine Messreihe aufgenommen. Die Messreihe beinhaltet, wieviele Kugeln in bestimmte Kanäle gefallen sind. Die Anzahl der Kugeln werden Sie im Versuch variieren. Man geht davon aus, dass man die Verteilung nicht kennt. So sollen Sie ein Gefühl dafür bekommen, wie auf Verteilungen in der Praxis geschlossen wird (Hier kennen wir die „Lösung“ – binomialverteilt). Im Allgemeinen ist es notwendig aus den Beobachtungen (Anzahl der Kugeln in einem bestimmten Kanal) auf eine Verteilung (Binomialverteilung) zu schließen[1].

Die Verteilung sei also gedacht unbekannt, der Erwartungswert und die Standardabweichung sollen experimentell bestimmt werden. Man bedient sich hierzu einer Stichprobe mit deren Hilfe der Erwartungswert und die Standardabweichung nur geschätzt werden können. Die Stichprobe besteht aus einer M-maligen Messung einer Größe x.

Der Erwartungswert entspricht in der Schätzung dem Mittelwert, der sich wie folgt definiert:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} x_i$$

Die Standardabweichung wird wie folgt durch die empirische Standardabweichung geschätzt:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} (x_i - \bar{x})^2}$$

Diese beiden Schätzungen sind gut. Der mathematische Beweis, dass diese Schätzungen erwartungstreu und somit gut sind, finden Sie z. B. in [BL98].

Sie haben sich jetzt das mathematische Werkzeug erarbeitet, welches Sie zur Bearbeitung der statistischen Prozesse im Versuch benötigen. Ein im Versuch vorkommender statistischer Prozess ist die natürliche Radioaktivität. Daher sollen Sie sich im Folgenden mit den relevanten physikalischen Zusammenhängen beschäftigen.

[1] In der Statistik wird auf Grund von beobachteten Messdaten auf Verteilungen rückgeschlossen.

2 Physikalische Grundlagen: Natürliche Radioaktivität

Unter natürlicher Radioaktivität versteht man die Umwandlung eines instabilen Kerns unter Aussendung von Strahlung. Solche radioaktive Atomkerne nennt man auch radioaktive Nuklide oder Radionuklide. Die ausgesendete Strahlung wird oft als radioaktive Strahlung bezeichnet, wobei dies nicht ganz richtig ist (Es ist nicht die Strahlung radioaktiv, sondern die Radionuklide sind radioaktiv). Die Umwandlung wird radioaktiver Zerfall genannt. Auch stabile Atomkerne können sich umwandeln. Allerdings muss man ihnen von außen Energie zuführen. Man bezeichnet eine solche Kernumwandlung, bei welcher Energie zugeführt werden muss, als künstliche Radioaktivität.

Natürliche Radioaktivität entsteht durch zwei Gruppen von radioaktiven Nukliden, den primordialen und den kosmogenen. Die wichtigere Gruppe, die primordialen Radionuklide wurden schon zur Zeit der Erdentstehung gebildet und existieren auf Grund ihrer großen *Halbwertszeit*[2], die vergleichbar mit dem Erdalter ist, heute noch. Die kosmogenen Radionuklide sind kosmischen Ursprungs. Sie entstehen ständig neu in der oberen Schicht der Erdatmosphäre durch Beschuss stabiler Elemente mit kosmischer Strahlung. Ihre Halbwertszeit ist wesentlich kleiner als die der primordialen Radionuklide.

Die experimentell relevanten Strahlungsarten bei der natürlichen Radioaktivität sind die α-, β- und γ-Strahlung. Aus diesem Grund werden diese näher erläutert.

2.1 α-Strahlung

Bei schweren Kernen wird vor allem der sogenannte α-Zerfall beobachtet. Abbildung 9 zeigt einen solchen Zerfall. Dabei emittiert der zerfallende Kern einen ganzen Heliumkern und diese Emission von Heliumkernen wird α-Strahlung genannt. Die Reichweite dieser α-Teilchen ist abhängig von deren Energie. Diese beträgt typischerweise einige MeV und die Reichweite beträgt in Luft unter Normaldruck einige cm. Die Austrittsgeschwindigkeit der α-Teilchen aus dem Kern liegt in der Größenordnung von 10^7 m/s.

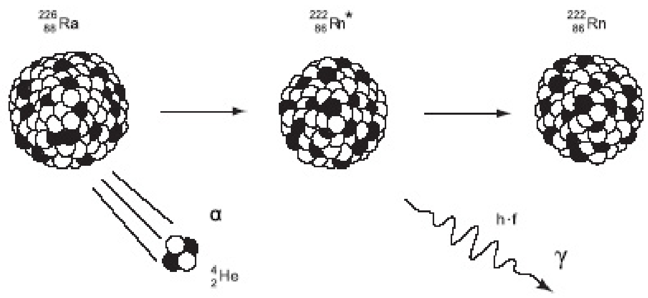

Abbildung 9: α- Zerfall

[2]Als Halbwertszeit bezeichnet man die Zeitspanne, in der die Menge eines bestimmten Radionuklids auf die Hälfte gesunken ist.

In Abbildung 9 wird der α-Zerfall des Erdalkalimetalls Radium zum Edelgas Radon dargestellt. Die α-aktiven Nuklide von Radon (weiterer α-Zerfall zu Polonium) werden ständig mit der Atemluft inhaliert und sind deshalb zu einem erheblichen Anteil an der natürlichen Strahlenexposition des Menschen beteiligt.

2.2 β-Strahlung

Die Kernumwandlung bei der β-Strahlung besteht darin, dass sich ein Neutron aus dem Atomkern unter Aussendung eines Elektrons in ein Proton verwandelt. Das Emittieren von Elektronen bezeichnet man als β-Strahlung (siehe dazu Abbildung 10), den dazugehörigen Umwandlungsprozess als β-Zerfall, wobei das emittierte Elektron negativ geladen ist. Die Reichweite der β-Strahlen ist, genau wie die der α-Strahlen, abhängig von der Energie. In Abbildung 10 wird der β-Zerfall mit dem Element Kalium, bei dem es sich um ein primordiales Radionuklid handelt, dargestellt. Die kinetische Energie der beim Betazerfall von Kalium-40 freiwerdenden Elektronen beträgt ungefähr 1,5 MeV und die Reichweite liegt in Luft bei einigen Metern.

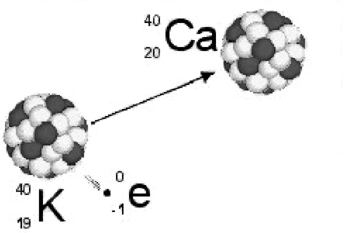

Abbildung 10: β-Zerfall

Die Aktivität von Baustoffen und Nahrungsmitteln (für Interessierte)

Das Element Kalium kommt häufig auch in Wandfarben und Fliesen vor und hat deshalb einen erheblichen Anteil an der natürlichen Radioaktivität. Neben Kalium kommen auch noch die Elemente Radium und Thorium in Baustoffen vor. Es wurde eine Bewertungszahl B entwickelt, die gesetzlich festgelegt kleiner als 1 sein muss. Sie setzt sich wie folgt zusammen:

$$B = \frac{R}{370} + \frac{T}{259} + \frac{K}{4810} \tag{9}$$

In Gleichung (9) beschreiben R, T, K die spezifische Aktivität von Radium, Thorium und Kalium.[3] Unter der *spezifischen Aktivität* A eines Stoffes versteht man den Quotienten aus der Anzahl der Zerfälle und der dazu benötigten Zeit pro Kilogramm des Stoffes. Die Einheit der spezifischen Aktivität A ist Becquerel pro Kilogramm (Bq/kg).

[3] Werte für verschiedene Baustoffe finden sich unter: http://uwa.physik.uni-oldenburg.de/1609.html

Außerdem enthält der menschliche Körper bis zu 150 g Kalium, wobei in der Sekunde 4500 Kaliumatome im Körper zerfallen. Durch die Nahrung nehmen wir täglich Kalium in unseren Körper auf. In pflanzlichen Nahrungsmitteln zwischen 50 Bq/kg (Obst) und 380 Bq/kg (Bohnen und Erbsen) und in tierischen Nahrungsmitteln bis zu 100 Bq/kg, z. B. in Kuhmilch. In Milchpulver und Wurstdauerwaren resultieren auf Grund der technologischen Prozesse höhere Aktivitäten (≥ 180 Bq/kg).

2.3 γ-Strahlung

Bei den in der Natur vorkommenden radioaktiven Substanzen findet man außer α- und β-Strahlen auch solche, die hochenergetische Photonen emittieren, die sogenannte γ-Strahlung. Aus experimentell gewonnenen Beobachtungen konnte schließlich die Entstehung der γ-Strahlung erklärt werden. Sie entsteht, wenn ein Atomkern aus einem energetisch angeregten Zustand (in Abbildung 9 ist der angeregte Zustand des Elementes mit einem Stern gekennzeichnet) in einen tieferen Zustand, den Grundzustand, übergeht.

1986 ereignete sich ein Unfall im Atomkraftwerk Tschernobyl, der auch Auswirkungen auf Bayern hatte. Auf Grund der großen Halbwertszeit von Barium kann noch heute eine Aktivität in Milchpulverproben aus dem Jahr 1986 nachgewiesen werden. Im Versuchsraum sind solche Proben vorhanden. In der Abbildung 11 wird der Zerfall von Cäsium, das wegen dieses Unfalls freigesetzt worden ist, in Barium dargestellt. 2005 wurde bei deutschen Nahrungsmitteln noch eine Aktivität gemessen, die allerdings äußerst gering ist (Bei Milch eine Aktivität von 0,2 Bq/l, bei Fleisch 0,5 Bq/kg). Dennoch trägt dieses Element zur natürlichen Radioaktivität bei.

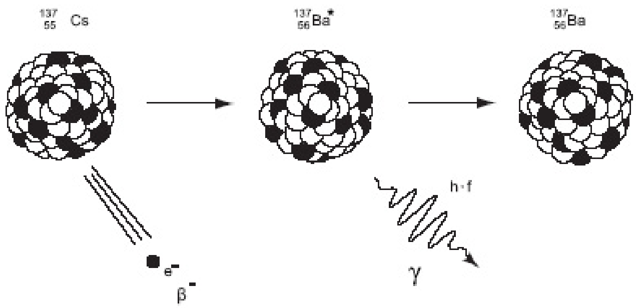

Abbildung 11: Cs-137 zerfällt in Ba-137

Im Versuch wird hauptsächlich mit der γ-Strahlung gearbeitet. Zur Messung dieser Strahlung wird ein Szintillationsdetektor verwendet. Auf die Funktionsweise dieses Detektors wird in den technischen Grundlagen eingegangen.

Zerfallsgesetz (für Interessierte)

Einen weiteren wichtigen statistischen Vorgang im Zusammenhang mit der Radioaktivität beschreibt das Zerfallsgesetz. Auf diesen Aspekt kann aus zeitlichen und juristischen Gründen in den Teilversuchen nicht eingegangen werden. Aber auf Grund der Wichtigkeit soll das Zerfallsgesetz kurz erläutert werden.

Radioaktive Atomkerne können ohne äußere Einwirkung durch Teilchenemission zerfallen. Der zufällige Zerfall eines bestimmten Kerns wird durch den Zerfall anderer Kerne nicht beeinflusst, deshalb ist die Zahl der zerfallenden Kerne pro Zeiteinheit proportional zur Anzahl N der im Präparat enthaltenen instabilen Kerne. Mit dem Proportionalitätsfaktor $1/\tau$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -1/\tau \cdot N(t)$$

Aus dieser Differentialgleichung folgt das Zerfallsgesetz für instabile Kerne:

$$N(t) = N(0)\exp(-t/\tau) \tag{10}$$

wobei $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne ist, die zur Zeit $t = 0$ den Wert $N(0)$ hatte.

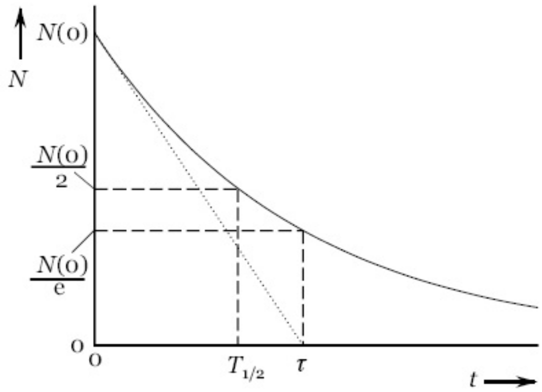

Abbildung 12: Zeitlicher Verlauf des radioaktiven Zerfalls

(10) ist in Abbildung 12 graphisch veranschaulicht. Die Größe τ gibt den Zeitpunkt an, zu dem nur noch $(1/e)$-tel der ursprünglichen Zahl der Kerne vorhanden ist. Sie hat die Bedeutung einer mittleren Lebensdauer. Von einem radioaktiven Präparat, dessen mittlere Lebensdauer sehr viel größer als der Beobachtungszeitraum ist, zerfallen pro Zeiteinheit nahezu konstant viele Atomkerne. Dies entspricht der Definition der Aktivität A:

$$A = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(t)}{\tau}$$

3 Technische Grundlagen

3.1 Galton-Brett

Der Erfinder des Galton-Brettes war der englische Statistiker und Naturwissenschaftler Francis Galton (1822 – 1911), der die Statistik maßgeblich vorangetrieben hat. Im Jahr 1889 stellte er ein mechanisches Zufallsexperiment vor.

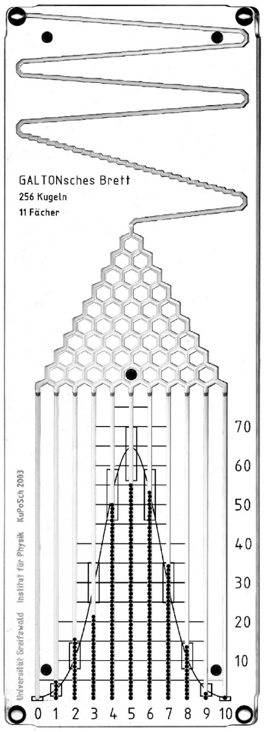

Abbildung 13: Galton-Brett mit 256 Kugeln und 10 Wegscheidungen

Bei diesem Zufallsexperiment handelte es sich um das nach ihm benannte Galton-Brett, ein Nagelbrett, über das Kugeln im Schwerefeld der Erde rollen. Eine einzelne Kugel wird beim Zusammenprall mit den Nägeln oder auch beim Stoß mit anderen Kugeln in die eine oder andere Richtung abgelenkt, so dass es letztlich zufällig ist, in welchem der Fächer gleicher Breite am unteren Brettrand sie zur Ruhe kommt. Die Wahrscheinlichkeit p, dass sich die Kugel an einer Wegscheidung nach rechts „entscheidet" ist bei einem idealen Galton-Brett 1/2. Tatsächlich ist die technische Herstellung eines Galton-Brettes, das sich auch nur annähernd ideal verhält (p = 1/2) äußert schwierig! Insbesondere die einfache Realisierung mit Nägeln ist nahezu unmöglich, da eine Sicherstellung, dass die Kugeln senkrecht auf die Nägel treffen, nicht gewährleistet ist. Im Versuch wird deshalb ein Brett verwendet, das anstatt der Nägel regelmäßige Sechsecke, die in Plexiglas gefräst sind, besitzt. Damit ist der Fall, dass eine Kugel an einer Wegscheidung zum Stehen kommt, unmöglich. In der Regel sammeln sich die meisten Kugeln in den mittleren Fächern, während an den äußeren Fächern eher weniger Kugeln gezählt werden (siehe Abbildung 13). Die Verteilung der Kugeln auf die Fächer ist binomial. Um bei der Versuchsdurchführung ein optimales Ergebnis zu erzielen, müssen

Sie auf die Lage des Brettes achten. Die genaue Bedienung des Galton-Brettes wird in der Versuchsdurchführung erklärt.

3.2 Nachweis radioaktiver Strahlung mit der Diffusions-Nebelkammer

Zur Demonstration natürlicher Radioaktivität ist eine Diffusions-Nebelkammer bereitgestellt. Der schematische Aufbau dieser Diffusions-Nebelkammer ist in Abbildung 14 dargestellt.

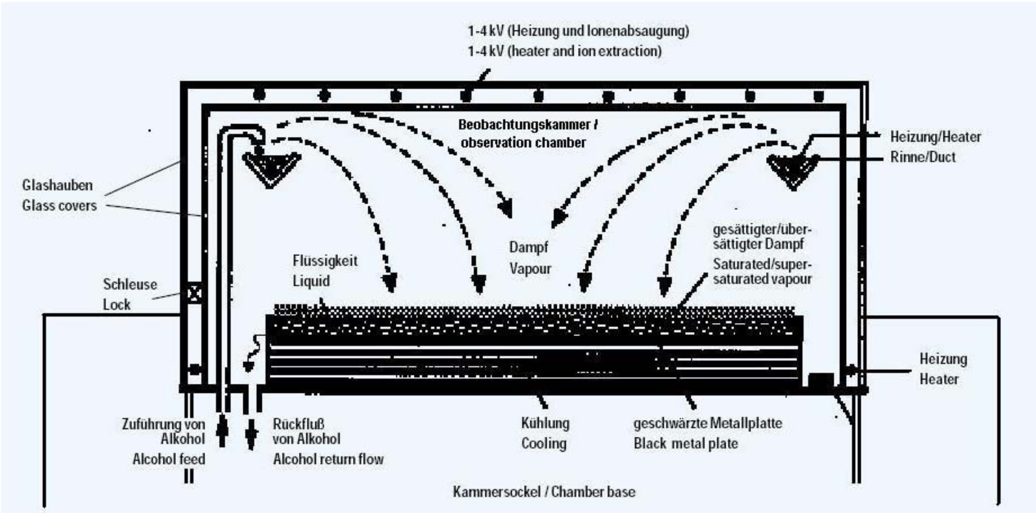

Abbildung 14: Aufbau der Diffusions-Nebelkammer (Phywe)

Aufbau der Diffusions-Nebelkammer Die Diffusions-Nebelkammer besteht aus dem Kammersockel und der Beobachtungskammer. Der Kammersockel enthält das Kälteaggregat, die Stromversorgung, den Alkoholtank, die Alkoholpumpe und die Zeitschaltuhr. Über dem Sockel befindet sich die Beobachtungskammer.

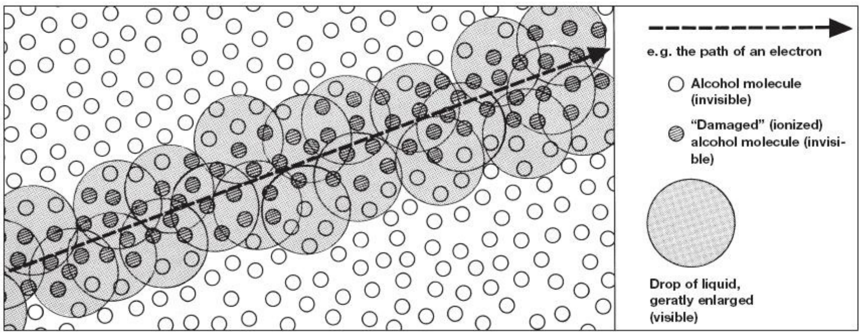

Abbildung 15: Spur eines Elektrons in der Diffusions-Nebelkammer (Phywe)

Prinzip der Diffusions-Nebelkammer Den Boden der Beobachtungskammer bildet eine Metallplatte, die durch das Kälteaggregat gleichmäßig über die gesamte Fläche gekühlt wird ($\vartheta = -30\,°\mathrm{C}$). Zwischen den beiden oberen Glasscheiben befinden sich dünne Heizdrähte, die diesen Bereich der Kammer erwärmen und ein Beschlagen verhindern. Dieses Gitter dient gleichzeitig als Hochspannungsgitter zur Ionen-Absaugung. Im oberen Teil unter der Glashaube befindet sich eine umlaufende, elektrisch beheizte Rinne, in die aus einem Vorratsbehälter tropfenweise Isopropylalkohol gepumpt wird. Der Alkohol verdampft und diffundiert vom oberen, warmen Bereich der Kammer zum kalten Kammerboden. Dort kondensiert der Alkoholdampf und fließt in den Vorratsbehälter zurück. Oberhalb der dünnen, den Boden bedeckenden Flüssigkeitsschicht bildet sich eine Zone aus übersättigtem Alkoholdampf. In diesem Bereich sind geladene Teilchen (z.B. Ionen, Elektronen, Positronen, Alpha-Kerne), die im Innenraum oder bereits außen entstehen, längs ihrer Flugbahn sichtbar. An die geladenen Teilchen setzen sich bevorzugt Isopropylalkoholtröpfchen und ergeben die für den Beobachter sichtbare Nebelspur (siehe Abbildung 15). Von der Länge und der Beschaffenheit der Teilchenspur kann auf das ionisierende Teilchen rückgeschlossen werden.

3.3 γ-Spektroskopie mit dem Szintillationsdetektor

Das Resultat einer γ-spektroskopischen Messung sind Häufungen von Zählereignissen bei bestimmten Energien – das sogenannte γ-Spektrum, das charakteristisch für die zerfallenen Kerne ist. Durch ein γ-Spektrum kann somit z. B. von γ-aktiven Nukliden auf das unbekannte Radionuklid zurückgeschlossen werden.

Bei der γ-Spektroskopie wird die Häufigkeit von γ-Quanten nach Energien E_γ im Zeitintervall aufgezeigt. Der dabei verwendete Detektor besteht vereinfacht aus einem Szintillator, einem Photomultiplier und einem Verstärker.

Messanordnung zum Nachweis von γ-Strahlung Der im Versuch verwendete Aufbau wird in Abbildung 16 dargestellt. Dieser Aufbau setzt sich zusammen aus dem Rechner, dem Monitor und dem Szintillationsdetektor.

Der Szintillationsdetektor liefert für jedes registrierte γ-Quant einen Spannungsimpuls. In den U-t-Kurven (darstellbar am Oszilloskop des Demonstrationsaufbaus) entsprechen die Höhen der Maxima $U_{\max}$ den Energien der γ-Quanten (siehe dazu Abbildung 17). Die verstärkten Impulse werden im USB-Gerät am dort integrierten Vielkanalanalysator verarbeitet. Dieser wandelt die Höhen der Spannungsmaxima in Zahlen um und übermittelt diese an den Rechner. Jede solche Zahl entspricht einer Kanalnummer. Je nach registrierter γ-Energie erhöht der Rechner einen Kanal. Das Ergebnis wird auf dem Monitor als Histogramm dargestellt, d. h. die zu jedem Kanal registrierte Impulszahl wird gegen die Kanalnummer aufgetragen (vgl. Abbildung 20).

Szintillationsdetektor Die Wirkungsweise von Szintillatoren beruht darauf, dass das durchsichtige Material des Detektors durch ionisierende Strahlung (z. B. γ-Strahlung) zum Aussenden von kurzen Lichtblitzen angeregt wird. Beim Auftreten eines Lichtblitzes treffen in der Folge Photonen auf die Kathode des Photomultipliers, werden dort absorbiert und erzeugen dabei Elektronen. Diese primären Elektronen werden durch starke elektrische Felder zu den

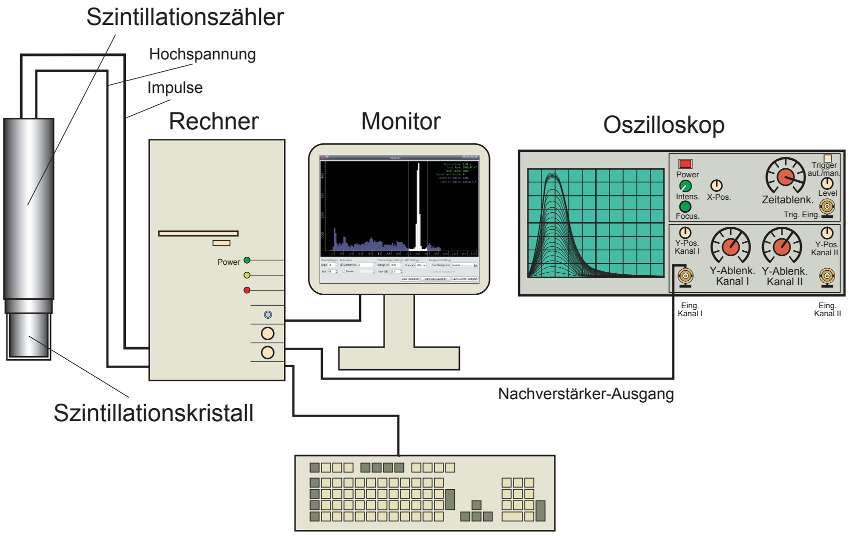

Abbildung 16: Versuchsaufbau des Demonstrationsgerätes zur Registrierung von γ-Quanten. Mittlerweile wird bei den Geräten am Arbeitsplatz die Verbindung zwischen Messrechner und Detektor nur noch über ein USB-Kabel hergestellt. Die Versorgung des Zählers mit Hochspannung (High Voltage) erfolgt nicht mehr über den Rechner, sondern über das USB-Gerät direkt am Zähler. Das Oszilloskop steht nur beim Demonstrationsaufbau zur Verfügung.

Dynoden D_i hin beschleunigt (siehe Abbildung 19), wo sie sekundäre Elektronen herausschlagen. Da deren Zahl größer ist als die der Primärelektronen, wird die Elektronenzahl auf dem Weg zur Anode sukzessive vervielfacht (Elektronenlawine). Die an der Anode des Photomultipliers eingesammelten Elektronen erzeugen einen Spannungsimpuls. Der zeitliche Verlauf dieser Spannung ist in Abbildung 17 dargestellt.

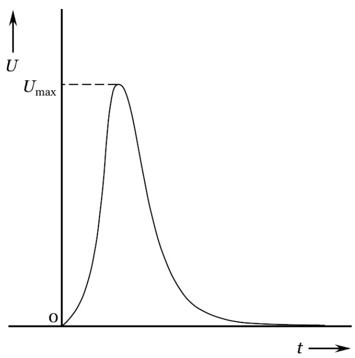

Abbildung 17: Zeitlicher Verlauf der Spannungsimpulse

Die Höhe des Spannungsmaximums kann beim Demonstrationsaufbau mit einem Oszilloskop sichtbar gemacht werden (siehe Abbildung 18). Bei der Registrierung von Zerfallsereignissen ist zu berücksichtigen, dass der Detektor in der Regel nicht alle real auftretenden Zerfälle nachweisen kann.

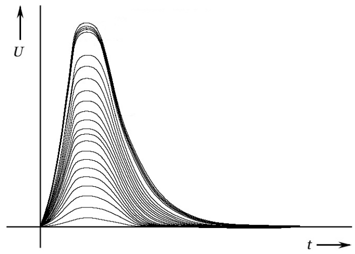

Abbildung 18: Zeitlicher Verlauf der Signale des Szintillationsdetektors

Der Aufbau eines Szintillationsdetektors ist in Abbildung 19 dargestellt.

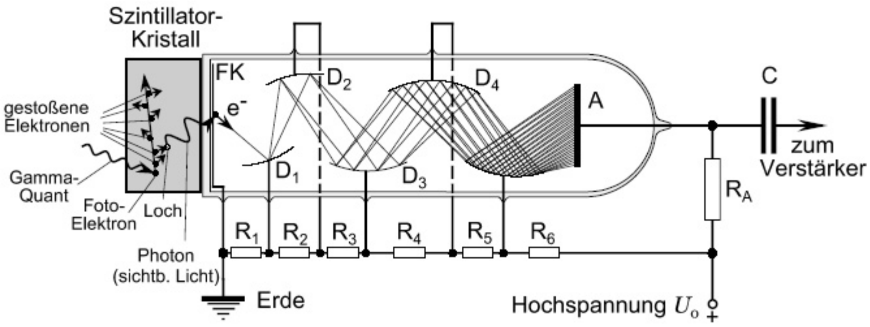

Abbildung 19: Aufbau eines Szinillationsdetektors

Vielkanalanalyse Im Versuch wird nicht nur ein γ-Quant einer Energie registriert, sondern viele γ-Quanten aus verschiedenen Energiebereichen. Der in Frage kommende Spannungsbereich wird in viele schmale, gleichbreite Intervalle aufgeteilt. Im Versuch sind bis zu 2048 Intervalle/Kanäle einstellbar. Ein solcher Analysator besteht aus einem Analog-Digital-Wandler (engl. Analog Digital Converter, ADC), der die Impulshöhen in Zahlen (Kanalnummern) umwandelt, und einem nachgeschalteten Rechner, der die Zählereignisse in Kanäle einsortiert. Ein Kanal entspricht also einem bestimmten Energieintervall. Die Zählereignisse gleicher Impulshöhe werden also vom Vielkanalanalysator automatisch in den gleichen Kanal sortiert.

digiBASE Im derzeit aktuellen modernen Aufbau wird die Aufgabe des Vielkanalanalysators nicht mehr von einer im Rechner eingebauten Komponente (wie im Demonstrationsaufbau) übernommen, sondern von einem USB-Gerät (ORTEC digiBASE), welches direkt mit dem Szintillationsdetektor verbunden ist. Die für den Betrieb des Szintillationsdetektors notwendige Hochspannung wird somit nicht mehr vom Rechner erzeugt, sondern erst im USB-Gerät. Auch Vorverstärker- und Vielkanalelektronik sind bereits im USB-Gerät enthalten. Die Übertragung der Messdaten an den Rechner erfolgt damit vollständig digital.

3.4 Datennahme mit der Software „MAESTRO“

An dieser Stelle wird nun auf die Funktion des Datennahme-Programms „MAESTRO“ eingegangen. Machen Sie sich mit der folgenden Ausführung vertraut, um das Programm während des Versuches optimal nutzen zu können. Nach dem Start des Programms und einer Messung erscheint am Monitor Abbildung 20.

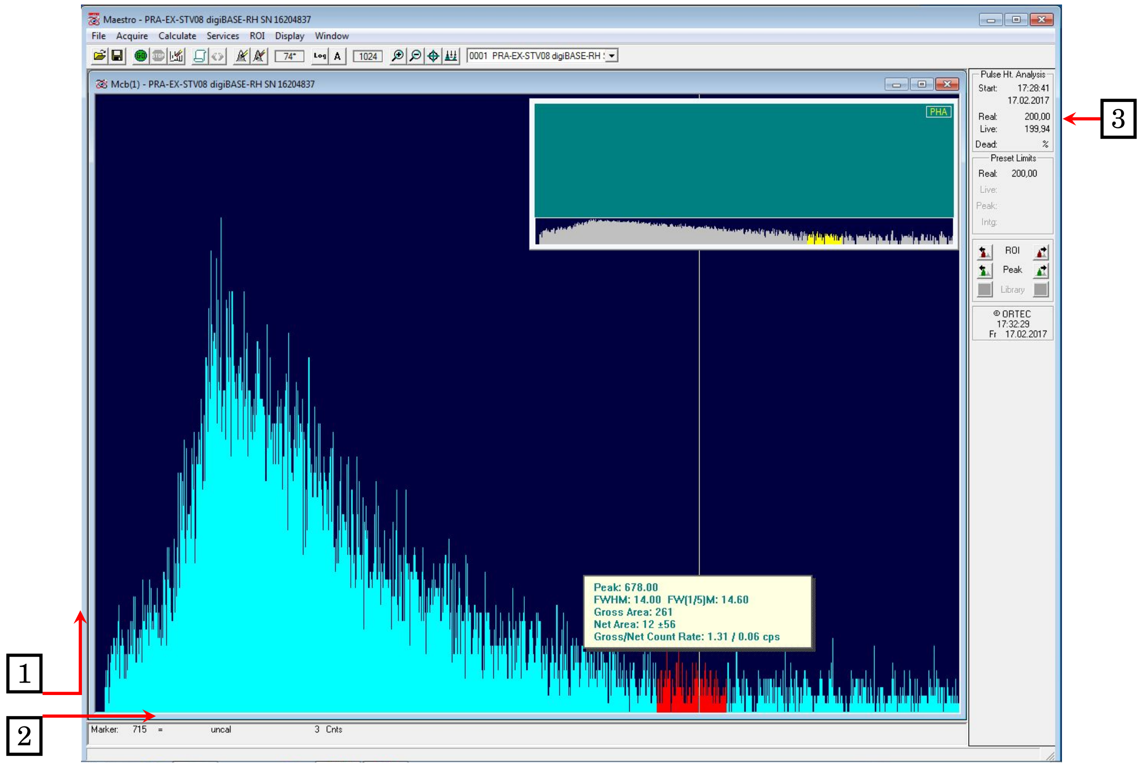

Abbildung 20: Monitorbild von MAESTRO mit Spektrum der Hintergrundstrahlung

Diagramm und Statusinformationen

$\boxed{1}$ **Ordinate:** In diese Richtung wird die Anzahl der Impulse aufgetragen. Die Skalierung erfolgt automatisch, wenn das A in der Iconleiste aktiviert ist, wobei der letzte Kanal ausgenommen ist. Der letzte Kanal stellt so etwas wie den großen „Abfalleimer“ dar, in ihm werden alle Ereignisse einsortiert, deren Energie größer oder gleich der dem letzten Kanal zugehörigen Energie ist und dadurch von der Messelektronik nicht mehr quantifiziert werden können.

$\boxed{2}$ **Abszisse:** Hier sind die Kanäle aufgetragen. In jedem Kanal werden Ereignisse der Energien $[E;E+\Delta E]$ einsortiert. Das Histogramm ist hier fest auf 1024 Kanäle eingestellt.

$\boxed{3}$ **Status:** Einblendung der Statusinformationen zur aktuellen Messung an der rechten Seite des Fensters.

Einstellungen

Über das Menü „Acquire/MCB-Configuration“ erhalten Sie Zugriff auf sämtliche Einstellungen, um diese anzupassen.

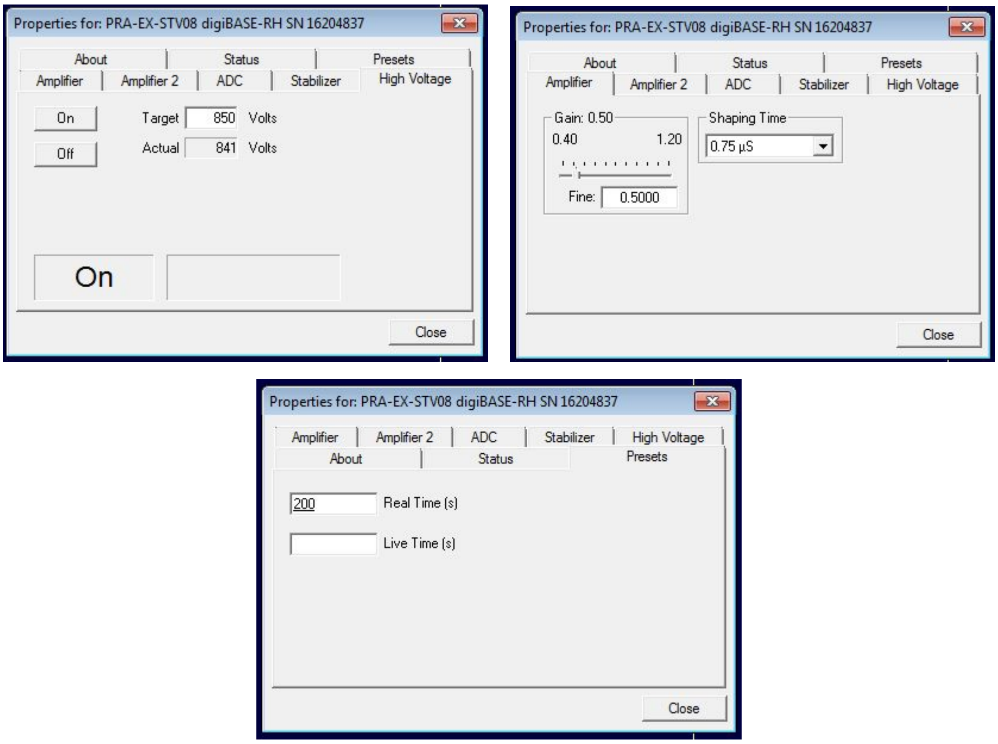

Abbildung 21: Einstellung der Betriebsparameter über das Menü „Acquire/MCB-Configuration“ in MAESTRO (links oben: Voltage, rechts oben: Gain, unten: Real Time/Live Time)

Voltage: Die am Photomultipier angelegte Hochspannung. Sie kann im Einstellungsdialog (siehe Abb. 21) unter dem Tab „High Voltage“ im Bereich 0 V bis 1200 V variiert werden.

Gain: Die Verstärkung der vom Photomultiplier kommenden Spannungsimpulse kann unter dem Tab „Amplifier“ im Bereich von 0,40 bis 1,20 variiert werden. Dies stellt die Feinjustierung der Verstärkung dar. Im USB-Modul ist noch eine Grobjustierung über einen Jumper möglich, welche jedoch im Praktikum nicht verändert wird.

Real Time/Live Time: Die Messdauer kann unter dem Tab „Presets“ eingestellt werden. Ohne Einstellung läuft die Messung so lange, bis sie mit Stop beendet wird. Die Einstellung „Real Time“ stellt die maximale reale Laufzeit ein, bei der Einstellung „Live Time“ ist die totzeitbereinigte Messzeit einstellbar.

ROI: Der in Abbildung 20 rot eingefärbte Teil des Histogramms wird über eine „Region of Interest“ definiert. Diese selektieren Sie, indem Sie unter gleichzeitigem Drücken der linken und rechten Maustaste einen Bereich markieren. Mit Rechtsklick „Sum“ wird in der Statusleiste die Anzahl der Ereignisse im selektierten Intervall angezeigt. Mit

„Mark ROI“ erstellen Sie die ROI. Mit „Peak Info“ werden Informationen zur ROI wie in Abb. 20 dargestellt. Dabei bezeichnet „Gross Area“ die Anzahl der Ereignisse im ausgewählten Energieintervall. Die übrigen dort gezeigten Werte spielen in diesem Praktikumsversuch keine Rolle.

Messen und speichern

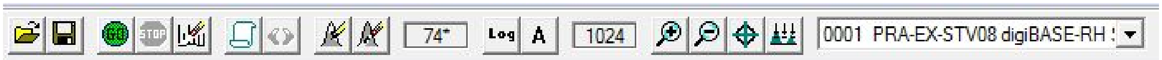

Abbildung 22: Iconleiste des Programms MAESTRO

GO/STOP: „GO“ startet die Datenerfassung bzw. setzt eine unterbrochene Datenerfassung fort. Mit „STOP“ unterbrechen Sie die Messung. Ändert man die Messparameter nicht, so kann die Messung sinnvoll fortgesetzt werden und das Histogramm wird weiter aufgefüllt. Achtung: Werden die Parameter hingegen geändert, sollten Sie unbedingt das Histogramm vor der neuen Messung löschen. Dies erreichen Sie durch einen Klick auf das 5. Icon der Iconleiste , rechts neben „STOP“.

Toggle List Mode: Ein Klick auf das Symbol der Schriftrolle schaltet die Messung in den List-Mode um, bei welchem die Ereignisse nicht nur in ein Histogramm einsortiert werden, sondern jedes Ereignis in eine Liste mit Zeitpunkt und Kanalnummer aufgenommen wird. Ein erneuter Klick schaltet den Messmodus wieder zurück in einen Modus, bei welchem nur das Histogramm gefüllt wird, die Zeitinformation der einzelnen Ereignisse jedoch verworfen wird.

Save as: Für eine weitere Auswertung und Analyse, lässt sich das Histogramm auch abspeichern.

Detektorauswahlfeld: Im Drop-Down-Feld 0001 PRA-EX-STV08 digiBASE-RH wählen Sie nach dem Start des Programms den zu verwendenden Detektor aus.

Automatisierung

Im Versuch möchten wir Messkampagnen aus einer Serie von N Messungen zu je 2 Sekunden durchführen. Da die Software MAESTRO hierzu keine vorgefertigte Lösung bietet, nimmt man die Daten zunächst im List-Mode auf und generiert anschließend über ein Konvertierungsprogramm die Daten der Messkampagne. Die Häufigkeit der Impulse im Intervall ist in der Datei <dateiname>.stat gespeichert. Das Format ist aus Listing 1 ersichtlich.

Listing 1: Dateiformat der .stat-Datei

```
# channels      128
# region begin  25
# region end    95
# passes        100
# imp occurence
  0    8
  1    25
  2    30
  3    24
  4    8
```

4 Eigenregieteilversuch: Generierung einer Binomialverteilung (freiwillig, vorab möglich)

Aus einer unbekannten Menge von gleichartigen Elementen mit unterschiedlicher Farbe aber möglichst gleichartiger Geometrie (Kugeln, Münzen, Schokolinsen, mindestens 50 Stück, Anteil einer Farbe 15 % bis 70 %) werden blind 12 beliebige gleichzeitig entnommen. Der Anteil derjenigen mit einer zuvor festgelegten Farbe (z.B. gelb) darin ist der Messwert für den Anteil der gelben Elemente in der gesamten Menge.

4.1 Durchführung

- Organisieren Sie eine oben genannte Menge von gleichartigen Elementen und dokumentieren Sie im Laborheft Ihre Wahl (inkl. Foto).
- Legen Sie eine Farbe fest, für welche Sie den Anteil über oben genannten Messprozess bestimmen möchten.
- Ziehen Sie gleichzeitig 12 Elemente und bestimmten die Anzahl der Elemente mit der zuvor festgelegten Farbe.
- Führen Sie diese Messung 20 Mal durch (mit Zurücklegen)! Dokumentieren Sie die nacheinander erhaltenen Werte der Anzahl der gezogenen Elemente der zuvor festgelegten Farbe.

4.2 Auswertung

- Zeichnen Sie auf ein Millimeterpapier das Histogramm der erhaltenen kleinen Statistik der erhaltenen Einzelwerte.
- Bestimmen Sie den Mittelwert für den Anteil der Elemente der von Ihnen festgelegten Farbe sowie die Messunsicherheit des beschriebenen Messprozesses (Ziehen von 12 Elementen mit Zurücklegen). Diese wird durch die Standardabweichung beschrieben. Kann dadurch schon auf eine Binomialverteilung geschlossen werden?
- Zeichnen Sie den erwarteten Verlauf, wenn Sie Ihren gemessenen Anteil an Elementen der gewählten Farbe als tatsächlichen Wert annehmen (Binomialverteilung).
- Zeichnen sie zusätzlich das erwartete Ergebnis bei Annahme einer Poissonverteilung ein.

5 Versuchsdurchführung

Bitte beachten Sie, dass Sie mit dem Programm MATLAB arbeiten müssen. Daher sollen Sie sich vor dem Versuch mit dem zum Download bereitgestellten Skript zu diesem Programm auseinandersetzen.

Wichtige MATLAB-Inhalte:

- Vektor definieren
- plot/plotyy-Befehl
- Einlesen von Daten mit dlmread
- Komponentenweises Multiplizieren, Skalarprodukt

Sämtliche Diagramme, die Sie mit MATLAB erstellen, sollen Sie während der Durchführung ausdrucken und anschließend in Ihr Protokollheft einkleben. Sie können diese Diagramme zusätzlich auch als Grafikdatei abspeichern und den Dateinamen in Ihre Protokollheft dokumentieren, um im Falle einer LaTeX-Auswertung diese Grafiken nochmals in Ihrer Auswertung aufzugreifen.

5.1 Teilversuch 1: Generierung einer Binomialverteilung mit dem Galton-Brett

Bedienung der Apparatur

- Lage des Brettes während des Versuches:

  Während sich Kugeln im Labyrinth befinden, verändern Erschütterungen die Statistik, und eine Neigung der Brettunterkante gegen die Horizontale führt zu einem unnötigen systematischen Fehler. Eine feste horizontale Unterlage ist also optimal. Weiterhin zu vermeiden ist eine Rückenlage des Brettes, denn das Rollen der Kugeln auf dem Boden der Fräskanäle führt zu einer Asymmetrie, die vom Weg der Fräse bei der Fertigung herrührt. Folglich sollte das Brett so gehalten werden, dass die Kugeln fallen oder auf der Deckseite des Brettes rollen (Neigung anterior).

- Lage des Brettes beim Ablesen:

  Die horizontalen Linien zum Ablesen sind darauf geeicht, dass das Brett nach hinten geneigt und leicht seitlich gekippt wird, so dass die Kugelmittelpunkte auf einer Geraden liegen.

- Rückführung der Kugeln:

  Bei der Zurückführung der Kugeln unterbrechen Kugelcluster den freien Rücklauf. Zur Abhilfe kann man möglichst viele Kugeln in die drei äußeren Kanäle an einer Seite rollen lassen. Mit dieser asymmetrischen Ausgangslage werden die Cluster am Übergang vom Labyrinth zum Kugelspeicher weniger kompakt bzw. unterdrückt. Die Cluster lassen sich leichter auflösen, wenn das Brett flach gehalten und dabei leicht geschüttelt wird. Ein geübter Experimentator kann die Kugeln in etwa einer Minute zurückführen.

Messung

- **Kleine Stichprobe:** Lassen Sie weniger als 40 Kugeln im Galton-Brett fallen. Notieren Sie in einer geeigneten Tabelle wieviele Kugeln in die jeweiligen Fächer gefallen sind.
- **Mittlere Stichprobe:** Lassen Sie alle Kugeln im Galton-Brett einmal fallen und notieren Sie auch hier ihre Ergebnisse in einer geeigneten Tabelle. Vergewissern Sie sich, dass die Summe der Kugeln 256 ergibt.
- **Große Stichprobe:** Lassen Sie zunächst alle Kugeln einmal fallen und nehmen Sie davon Notiz. Um Zeit zu sparen, notieren Sie Ihre Werte an die Tafel. Wiederholen Sie diesen Vorgang ein zweites Mal. Wenn alle Gruppen Ihre Werte angeschrieben haben, sollte Ihre Stichprobe eine Größe von 2560 haben.

Verwendung von MATLAB

Starten Sie MATLAB.

- Berechnen Sie mit MATLAB den Mittelwert und die Standardabweichung der mittleren und großen Statistik (Hinweis: Skalarprodukt). Protokollieren Sie die in MATLAB verwendeten Formeln und die berechneten Werte für den Mittelwert und die Standardabweichung.
- Plotten Sie nun beide Statistiken in ein und dasselbe Figure-Window (Vergessen Sie die Achsenbeschriftung und den Titel nicht). Hinweis: Skalieren Sie beide y-Achsen, verwenden Sie dazu den Befehl `plotyy`. Zeichnen Sie den berechneten Mittelwert für die große Statistik ein (Hinweis: `stem(x,y)`). Stimmen der Mittelwert und das Maximum überein?

5.2 Teilversuch 2: Aufnahme einer Poisson-Verteilung

Vorbemerkungen

In diesem Teilversuch soll eine Poissonverteilung aufgenommen werden, bei welcher die Anzahl der Impulse pro 2 Sekunden poissonverteilt ist (bezüglich der Anzahl der Messungen).

Da sich nur bei seltenen Ereignissen eine Poissonverteilung ergibt (bzw. nach dem Zentralen Grenzwertsatz bei häufigen Ereignissen diese zu einer Normalverteilung wird), muss erste ein kleines Energieintervall gewählt werden. Richtwert: 2 . . . 4 Impulse pro Messung, wobei eine Messung 2 Sekunden dauern soll.

Da man in MAESTRO nicht einstellen kann, dass das Programm 50 Messungen zu je 2 Sekunden aufnehmen soll, wählt man zunächst eine Messzeit von $50 \cdot 2\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{s}$ und berechnet daraus später die einzelnen Messungen, d.h. wie viele Impulse in jedem Zeitintervall jeweils registriert wurden.

Dies geschieht mit Hilfe eines Perl-Skripts:

- Das Skript nimmt das kleine zuvor abgespeicherte Energieintervall und die Messung über alle Energiekanäle.
- Es zerteilt die 100 s-Messung in 50 je 2 Sekunden dauernde Messungen und zählt in jeder Messung die Anzahl der Impulse, die im gewählten Energieintervall stattfanden.

Einstellen der Apparatur und des Programms MAESTRO

Starten Sie das Programm *MAESTRO for Windows*. Dieses Programm wird vom Hersteller der Vielkanalanalysatorhardware mitgeliefert und auch in der Forschung eingesetzt.

- Clear ROI: Entfernen Sie über das Menü „ROI/Clear All“ alle von der vorherigen Gruppe erzeugten Energieintervalle.
- Bleikammer: Der Szintillationsdetektor kann an der Schnur (nicht mit dem USB-Kabel!) vorsichtig aus der Bleikammer heraus geführt werden. Lassen Sie während des Versuches den Detektor außerhalb der Bleikammer.
- Einstellung der Kanäle: Im Programm MAESTRO sind fest 1024 Kanäle eingestellt.
- HV/Gain: Die Verstärkung sollte so gewählt sein, dass das Spektrum fast den ganzen Bereich bis hin zum letzten Kanal ausfüllt.
- Voltage: Wählen Sie für die am Photomultiplier anliegende Hochspannung eine geeignete Spannung aus, so dass der vorherige Satz erfüllt wird (z.B. ca. 835 V bei neuem Photomultiplier, ca. 1150 V bei altem Photomultiplier). Die nötige Spannung hängt vom jeweiligen Exemplar des Szintillationsdetektors ab.

- Oszilloskop: Es existiert ein Demonstrationsaufbau mit der veralteten Hardware. Zum besseren Verständnis betrachten Sie dort das Oszilloskopbild. Das Oszilloskopbild sollte der Abbildung 18 entsprechen. Ihr Betreuer kann Ihnen bei Interesse die am Oszilloskop nötigen Einstellungen erläutern. Versuchen Sie zu verstehen, welcher Zusammenhang zwischen den Signalen am Oszilloskopbild und dem Spektrum in der zugehörigen Software *Radioact* bzw. *MAESTRO* herrscht.

Durchführung

Speichern Sie die zu diesem Teilversuch gehörigen Dateien so, dass Sie diese wieder finden. Es empfiehlt sich, dazu ein Verzeichnis mit Ihrer Gruppennummer und den Initialen der Gruppenteilnehmer anzulegen.

Wir möchten in diesem Teilversuch Daten für 50 bzw. 100 Messungen zu je 2 Sekunden aufnehmen. Die Software bietet hierzu einen Modus an, bei welchem die einzelnen Ereignisse als Liste mit Zeitpunkt und Kanalnummer jedes einzelnen Ereignisses aufgenommen werden. Mit Hilfe des Analyseprogramms ParseOrtecListData.pl können daraus die Ergebnisse für 50 bzw. 100 Messungen zu je 2 Sekunden berechnet werden.

Auswahl eines geeigneten Energieintervalls

- Lassen Sie den Detektor aus der Bleikammer entnehmen. Sie möchten nun Höhenstrahlung zur Bestimmung einer Poissonstatistik verwenden.
- Entfernen Sie über das Menü „ROI/Clear All“ alle zuvor erzeugten Energieintervalle.
- Überlegen Sie sich, was das Ziel dieses Teilversuchs ist und warum eine Auswertung des gesamten Energiespektrums nicht zweckmäßig ist.
- Wählen Sie eine Messzeit von 20 Sekunden und lassen Sie das Programm einmal durchlaufen. Sie haben nun ein Energiespektrum auf dem Monitor. Was ist auf der Ordinate bzw. auf der Abszisse aufgetragen? Wählen Sie durch Ziehen mit der linken Maustaste ein Intervall an Kanälen aus, das in Summe in diesem Intervall 20-40 Impulse detektiert hat. Sie müssen dazu diesen Bereich markieren: Deaktivieren Sie hierfür ggf. den 'List Mode' und klicken Sie mit der rechten Maustaste in Ihren gewählten Bereich. Wählen Sie im sich öffnenden Kontextmenü „Sum“, wird unten links im Fenster die Anzahl der Impulse im gewählten Intervall angezeigt. Wiederholen Sie die Auswahl des Intervalls und Prüfung der Anzahl der Ereignisse, bis Sie ein Intervall mit einer Impulszahl zwischen 20 und 40 gewählt haben. Um die graphische Darstellung besser zu skalieren können Sie „autoscale“ A aktivieren.
- Markieren Sie dieses Intervall über einen Rechtsklick auf den gewählten Bereich und anschließender Auswahl von „Mark ROI“. Sie haben nun sichergestellt, dass Sie für viele Messungen zu je 2 Sekunden einen Mittelwert zwischen 2 und 4 erhalten würden. Während des gesamten Versuches sollten Sie an den Einstellungen nichts mehr ändern.

- Wählen Sie eine Messzeit von 2 Sekunden und lassen Sie das Programm 10-mal durchlaufen. Überzeugen Sie sich, dass Sie in der Mehrzahl der Messungen in Ihrem Intervall zwei, drei oder vier Ereignisse erhalten.
- Hinweis: Im Folgenden müssen Sie bei Angaben in spitzen Klammern die Angaben jeweils geeignet ersetzen.
- Speichern Sie Ihr Intervall unter dem Namen „<Gruppe>_<Initialen>_TV2.ROI“ (z.B. „X1_ABCD_TV2.ROI“). Der Befehl findet sich über das Menü „ROI/Save File...“.

Durchführen der Messkampagnen mit N Messungen zu je 2 Sekunden

- Stellen Sie in der Software den Messmodus auf „List Mode“.
- Wählen Sie eine Messzeit von 100 Sekunden und speichern Sie die Messung unter „<Gruppe>_<Initialen>_TV2_50Messungen.Lis“.
- Wählen Sie eine Messzeit von 200 Sekunden und speichern Sie die Messung unter „<Gruppe>_<Initialen>_TV2_100Messungen.Lis“.
- Starten Sie über das Windowsmenü eine Konsole, indem Sie das Programm „cmd“ aufrufen.
- dir

  Mit diesem Befehl werden alle Inhalte des aktuellen Verzeichnisses angezeigt.
- cd <Gruppe>_<Initialen>

  Mit diesem Befehl wechseln Sie in das Verzeichnis mit Ihren Messdaten. Durch Drücken der Tabulatortaste können Sie dabei eine Auto-Vervollständigung verwenden.
- Im folgenden Schritt müssen Sie die Listmode-Datei in eine Datei umwandeln, die ein Histogramm mit der Anzahl der Messungen mit bestimmter Ereigniszahl enthält. Hierzu steht das Programm „ParseOrtecListData.pl“ zur Verfügung. Es erwartet Parameter in folgender Reihenfolge:

  perl −S ParseOrtecListData.pl <ROI_filename> <data_filename> <nr_of_passes> <dt_in_sec>

  Dabei bezeichnet <nr_of_passes> die Anzahl der Messungen zu je <dt_in_sec> Sekunden.
- perl −S ParseOrtecListData.pl TV2.ROI TV2_50Messungen.Lis 50 2 >TV2_50Messungen.stat

  Beispielsweise erzeugen Sie mit diesem Befehl die Datei `TV2_50Messungen.stat` für 50 Messungen zu je 2 Sekunden. Das >-Zeichen mit darauf folgendem Dateinamen am Ende der Befehlszeile sorgt dabei dafür, dass die Ausgabe des Programms in eine Datei umgeleitet wird.
- Erzeugen Sie analog die entsprechende Datei für Ihre zweite Messkampagne für 100 Messungen zu je 2 Sekunden.
- Öffnen Sie die beiden erzeugten .stat-Dateien in einem Editor. Was bedeuten die dort angezeigten Werte?

Auswerten der Daten mit MATLAB

Starten Sie MATLAB.

- Lesen Sie die Datei `<dateiname>.stat` (50 Messungen) aus Ihrem Verzeichnis in MATLAB ein. Benutzen Sie dazu den Befehl `dlmread`. Extrahieren Sie die Spalten der Matrix.
- Berechnen Sie mit MATLAB den Mittelwert und die Standardabweichung für 50 Messungen (Hinweis: Skalarprodukt). Protokollieren Sie die in MATLAB verwendeten Formeln und die berechneten Werte für den Mittelwert und die Standardabweichung.
- Lesen Sie die Datei `<dateiname>.stat` (100 Messungen) aus Ihrem Verzeichnis in MATLAB ein. Benutzen Sie dazu den Befehl `dlmread`. Extrahieren Sie die Spalten der Matrix.
- Berechnen Sie mit MATLAB den Mittelwert und die Standardabweichung für 100 Messungen (Hinweis: Skalarprodukt). Nehmen Sie diese Werte in Ihr Protokoll auf.
- Plotten Sie nun beide Messungen in ein und dasselbe Figure-Window (Vergessen Sie die Achsenbeschriftung und den Titel nicht). Hinweis: Skalieren Sie beide y-Achsen, verwenden Sie dazu den Befehl `plotyy`. Zeichnen Sie den berechneten Mittelwert der 100 Messungen ein (Hinweis: `stem(x,y)`). In welche Richtung ist der Mittelwert in Bezug auf das Maximum des Histogramms verschoben?
- Zum Speichern an dieser Stelle und im nachfolgenden Teilversuch wählen Sie unter dem sich nach Wahl von „Save as“ öffnenden Dialogfenster das Dateiformat PDF (Portable Data Format) aus. Wie üblich notieren Sie den Speicherort und den Dateinamen in Ihrem Laborheft. Drucken Sie das PDF aus und fügen Sie den Ausdruck in Ihr Laborheft ein.

5.3 Teilversuch 3: Zentraler Grenzwertsatz

Messung – Variante 1

Führen Sie analog zum vorherigen Versuch durch Einstellen einer geeigneten Messzeit im List Mode eine Messkampagne von 100 Messungen zu je 20 Sekunden durch. Verwenden Sie dabei die gleiche ROI wie bisher. Diese Messung dauert etwa eine halbe Stunde. In der Zeit können Sie sich die Diffusions-Nebelkammer ansehen und protokollieren Sie Ihre Beobachtungen.

Durchführung

- Erzeugen Sie analog wie zuvor die Datei `<dateiname>.stat`.
- Lesen Sie wieder die Datei `<dateiname>.stat` aus Ihrem Verzeichnis in MATLAB ein und speichern Sie wieder die Spalten einzeln ab.
- Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung. Protokollieren Sie diese Werte.
- Lassen Sie sich mit MATLAB die Dichten der Poissonverteilung und der Normalverteilung in ein Diagramm anzeigen. Verwenden Sie dazu den Mittelwert und die Standardabweichung, die Sie anhand Ihrer Messung berechnet haben. Zu Vergleichszwecken stellen Sie im gleichen Fenster auch das für die Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung zugrundeliegende Histogramm dar.

  Hinweis: Verwenden Sie die Befehle `normpdf(x,M,S)` und `poisspdf(x,M)`.

Messung – Variante 2

Wählen Sie ein größeres Intervall an Kanälen. Speichern Sie dazu eine neue ROI-Datei ab (siehe TV 2). In diesem neu gewählten Intervall sollte der letzte Energiekanal nicht enthalten sein, warum? Alle anderen Parameter bleiben unverändert. Nehmen Sie Messdaten für 100 Messungen zu je 2 Sekunden auf und erzeugen Sie die dazugehörige Datei `<dateiname>.stat`.

Durchführung

- Lesen Sie wieder die Datei `<dateiname>.stat` aus Ihrem Verzeichnis in MATLAB ein. Extrahieren Sie die Spalten der Matrix.
- Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung. Protokollieren Sie die beiden Werte.
- Lassen Sie sich mit MATLAB die Dichte der Normalverteilung in einem Diagramm anzeigen. Verwenden Sie dazu den Mittelwert und die Standardabweichung. Zu Vergleichszwecken stellen Sie im gleichen Fenster auch das für die Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung zugrundeliegende Histogramm dar.

  Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `normpdf(x,M,S)`

6 Auswertung

6.1 Teilversuch 1: Generierung einer Binomialverteilung mit dem Galton-Brett

- Annahme: Die Verteilung der Kugeln ist bekannt.

  Eine Kugel wird fallen gelassen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel in den 0. Kanal gelangt und die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in den 5. Kanal gelangt. Begründen Sie anschaulich Ihr Ergebnis.

- Annahme: Die Verteilung ist unbekannt.

  Die Beobachtung soll Rückschlüsse auf die Verteilung geben. Zeichnen Sie auf ein Millimeterpapier das Histogramm der kleinen Statistik. Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung für die kleine Statistik. Kann dadurch schon auf die Binomialverteilung geschlossen werden?

- Diskutieren Sie das Ergebnis, das Sie erhalten haben, als Sie die Histogramme der mittleren und großen Statistik in ein und dasselbe Figure-Window zeichneten.

- Geben Sie in einer Tabelle Mittelwert, Standardabweichung und Fehler des Mittelwerts für die 3 verschiedenen Statistiken (klein, mittel, groß) an. Wie ändern sich Standardabweichung und Fehler des Mittelwerts für die verschiedenen Stichproben?

6.2 Teilversuch 3: Zentraler Grenzwertsatz

Stellen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilversuch 2 und Teilversuch 3 übersichtlich in Form einer geeigneten Tabelle dar. Beziehen Sie Ihre konkreten Ergebnisse in die nachfolgende Diskussion mit ein:

Variante 1:

Im letzten Teil dieses Versuches haben Sie die Dichten verglichen. Sie sind annähernd ident. Nach dem ZGS war dies zu erwarten. Wieso? Beschreiben Sie die Zufallsvariable, die Sie aufsummiert haben.

Hinweis: Sie haben an Ihren Parametern nur die Zeit verändert.

Variante 2:

Im letzten Teil dieses Versuches haben Sie die Dichte der Normalverteilung betrachtet. Es ist eine Gaußglocke entstanden. Nach dem ZGS war dies zu erwarten. Wieso? Beschreiben Sie die Zufallsvariablen, die Sie aufsummiert haben.

Hinweis: Sie haben nur das Intervall vergrößert.