MOS— Mechanischer Oszillator

P1 — Praktikum

17. Februar 2023

Ziele

Untersucht werden ungedämpfte und gedämpfte freie Schwingungen und erzwungene Schwingungen von mechanischen harmonischen Oszillatoren.

Teilversuche

1. **Bestimmung der Erdbeschleunigung mit Hilfe eines Fadenpendels**
   Aus Messung von Schwingungsdauer und Fadenlänge lässt sich die Erdbeschleunigung bestimmen.
2. **Ungedämpfte freie Schwingungen**
   Bestimmung der Federkonstanten durch computergestützte Messung der Schwingungsdauer eines Federpendels mit verschiedenen Schwingmassen.
3. **Gedämpfte freie Schwingungen**
   Bestimmung des logarithmischen Dekrements und Schwingungsdauer eines durch eine elektromagnetische Wirbelstrombremse gedämpften Schraubenfederpendels.
4. **Erzwungene Schwingungen**
   Bestimmung der Eigenfrequenz und der Dämpfung eines getriebenen Oszillators durch Messung von Schwingungsdauer, Amplitude und Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz.

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grundlagen

1.1 Grundbegriffe zur Schwingung

Unter einer Schwingung versteht man allgemein einen sich periodisch wiederholenden Vorgang. Die einfachste Art der Schwingung ist die sogenannte *harmonische Schwingung*, deren zeitlicher, sinusförmiger Verlauf in Abb. 1 dargestellt ist.

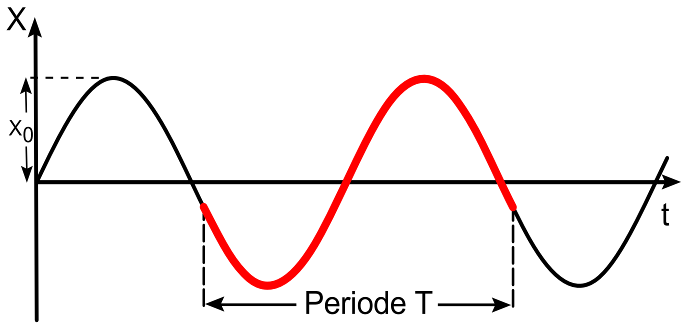

Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf einer harmonischen Schwingung.

Die schwingende physikalische Größe x ist gegen die Zeit t aufgetragen, und man erkennt die *Amplitude* x_0 (maximale Auslenkung) und die *Periode* T (Schwingungsdauer), die während eines vollen Schwingungsvorgangs vergeht. Letztere wird stets gemessen zwischen gleichen Schwingungszuständen, d. h. der Schwingkörper muss sich wieder in dieselbe Richtung fortbewegen und gleichzeitig wieder am selben Ort sein (bei ungedämpfter Schwingung, s. u.).

Die Periode T ist unabhängig von der Amplitude und eng mit der *Frequenz* f (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) verknüpft:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{mit} \quad [f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}\,. \tag{1}$$

Zur mathematischen Beschreibung einer Schwingung verwendet man die sogenannte *Kreisfrequenz* ω (griech. „Omega“). Sie ist bei einer gleichförmigen Kreisbewegung identisch mit der Winkelgeschwindigkeit, wenn man den Winkel im dimensionslosen Bogenmaß[1] angibt:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{2}$$

Damit gibt die Sinusfunktion

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \tag{3}$$

zum Zeitpunkt t die Stärke der Auslenkung einer physikalischen Größe $x(t)$ aus der Ruhelage an.

[1] Das Bogenmaß ist das von einem Winkel aufgespannte Kreisbogenstück im Verhältnis zum Kreisradius. Im Bogenmaß entsprechen 2π also 360° oder allgemein: $\alpha = \alpha[°] \cdot 2\pi/360$.

Durch Abbildung 1 und Gl. (3) wird suggeriert, dass die Amplitude ihren ursprünglichen Wert immer unverändert beibehält. Bei jedem realen Schwingungsvorgang treten jedoch unvermeidliche Energieverluste auf – z. B. durch Reibung. Eine solche Abnahme der Gesamtenergie im schwingenden System ist mit einem Abklingen der Amplitude verbunden. Man bezeichnet eine solche Schwingung als *gedämpft*.

1.2 Die ungedämpfte freie Schwingung

Die ungedämpfte freie Schwingung wird im Versuch für ein Fadenpendel und für ein Federpendel untersucht.

Bewegung des Fadenpendel

Ein Fadenpendel ist das in Abbildung 2 dargestellte schwingungsfähige System: an einem Faden der Länge l hängt eine Masse m.

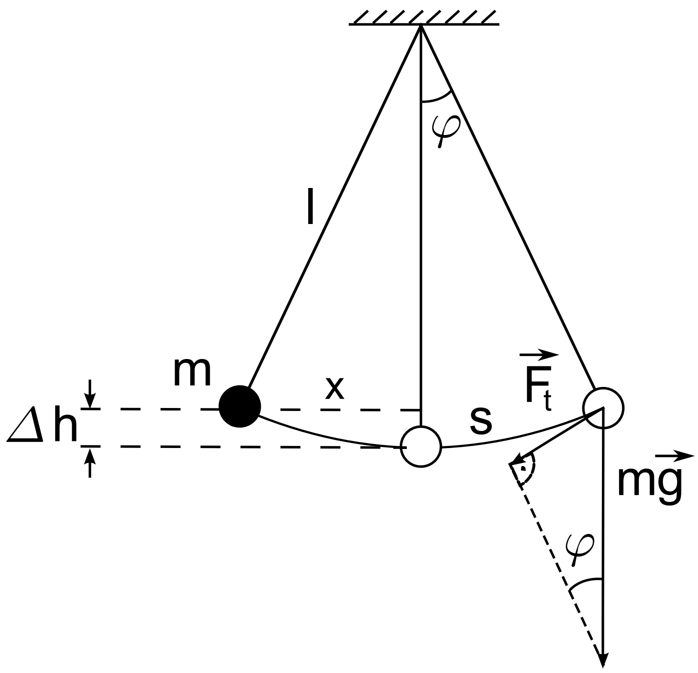

Abbildung 2: Fadenpendel mit Masse m und Fadenlänge l. Die Ruhelage des Pendels liegt bei $\varphi = 0$.

Die Schwingungsbewegung des Pendels wird durch den zeitlichen Verlauf des Winkels φ (griech. „Phi“) beschrieben. Um eine mathematische Formel für $\varphi(t)$ zu finden, betrachtet man die wirkenden Kräfte, wobei jegliche Art von Dämpfung unberücksichtigt bleibt.

Abbildung 2 zeigt die ausgelenkte Masse unter dem Einfluss der Schwerkraft $F_g = mg$. Diese bewirkt eine rücktreibende Kraft F_t, nämlich die Schwerkraftkomponente, die tangential am Kreisbogenstück s liegt:

$$F_t = -mg \cdot \sin\varphi \; . \tag{4}$$

Das Minuszeichen besagt, dass F_t der Auslenkung φ entgegengesetzt ist. Da sich φ während der Schwingung mit der Zeit ändert, ändert sich gleichzeitig auch F_t.

Interpretiert man die Kraft im Sinne des zweiten Newton'schen Gesetzes als „Masse mal Beschleunigung" und beachtet, dass die Beschleunigung a die zweite Ableitung des Weges s nach der Zeit ist[2], so folgt

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{s} = -mg \cdot \sin\varphi \; .$$

Gibt man den Winkel φ im Bogenmaß an, so ist

$$s = l \cdot \varphi \; .$$

Außerdem kann man für kleine Winkel die Näherung

$$\sin\varphi \approx \varphi \; .$$

verwenden.

Man kann also für entsprechend kleine Ausschläge des Fadenpendels (näherungsweise) schreiben:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -mg \cdot \varphi \; . \tag{5}$$

Zur Lösung dieser Gleichung liefert Gl. (3) einen Ansatz, nämlich

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t) \tag{6}$$

mit der Winkelamplitude φ_0. Die erste und zweite Ableitung davon sind

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega \cdot \varphi_0 \cos(\omega t) \; , \\ \ddot{\varphi}(t) &= -\omega^2 \cdot \varphi_0 \sin(\omega t) \; . \end{aligned} \tag{7}$$

Einsetzen der Gleichungen (6) und (7) in (5) ergibt

$$\begin{aligned} -ml \cdot \omega^2 \cdot \varphi_0 \sin(\omega t) &= -mg \cdot \varphi_0 \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \qquad l\omega^2 = g \quad &\Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{g/l} \; . \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Rechnung zeigt, dass das Fadenpendel tatsächlich eine harmonische Schwingung ausführt, wobei sich die Kreisfrequenz aus der Fadenlänge und der Erdbeschleunigung g ergibt. Schließlich folgt mit Gl. (2) für die Schwingungsdauer des Fadenpendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

Diese Beziehung ist in mehrfacher Hinsicht interessant:

[2] Als Schreibweise für die erste Ableitung einer Funktion f, die von x abhängt, hat sich $f'(x)$ eingebürgert – für die zweite Ableitung entsprechend $f''(x)$. Für eine zeitabhängige Funktion $y(t)$ schreibt man jedoch $\dot{y}(t)$ bzw. $\ddot{y}(t)$. Die Bedeutung ist allerdings völlig analog.

1. Die Schwingungsdauer des Fadenpendels ist offenbar unabhängig von der Winkelamplitude φ_0 – sie taucht explizit in Gl. (9) nicht mehr auf. Grundvoraussetzung ist hierbei jedoch, dass nur kleine Winkel auftreten.

2. Die Schwingungsdauer ist offenbar auch von der Masse des Schwingkörpers unabhängig. Allerdings nimmt sie mit der Fadenlänge zu.

3. Man kann mit Hilfe von Gl. (9) die Erdbeschleunigung bestimmen:

   $$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l \ . \tag{10}$$

   Dies ist recht genau möglich, weil sich T als Mittelwert bei einer größeren Zahl von Schwingungen sehr genau experimentell bestimmen lässt.

Bewegung des Federpendels

In Abbildung 3 ist das schwingungsfähige System mit dem Federpendel schematisch dargestellt. Das untere Ende der senkrecht ausgerichteten Feder ist fixiert. Ein von ihrem oberen Ende ausgehender Faden wird durch eine reibungsarm drehbare Scheibe nach unten umgelenkt. Am unteren Fadenende können Schwingmassen angehängt werden.

Bewegung des Federpendels

Wird der Schwingkörper aus seiner Gleichgewichtslage um die Strecke s ausgelenkt, so erfährt er durch die verformte Feder eine rücktreibende Kraft F_r, welche nach dem Hookeschen Gesetz proportional zu s ist:

$$F_\mathrm{r} = -ks$$

Der Faktor k heißt die Rückstellkonstante der Feder (oder auch Federkonstante).

Außer F_r greift am Schwingkörper noch die Schwerkraft $F_\mathrm{g} = m_\mathrm{K} g$ an. Die Summe beider Kräfte bewirkt eine Translationsbeschleunigung $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ des Schwingkörpers und eine Rotationsbeschleunigung $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$ der Scheibe. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ergibt das folgende Differentialgleichung:

$$m_\mathrm{K} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{J_\mathrm{S}}{r} \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -ks + m_\mathrm{K} g$$

m_K = Masse des Schwingkörpers, J_S = Trägheitsmoment und r = Radius der Scheibe

Mit $\varphi = s/r$ und $J_\mathrm{S} = (1/2) m_\mathrm{D} r^2$ (m_D = effektive Masse der Scheibe) lassen sich aus ihr die Größen φ und J_S eliminieren:

$$\left(m_\mathrm{K} + \frac{m_\mathrm{D}}{2}\right) \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -ks + m_\mathrm{K} g$$

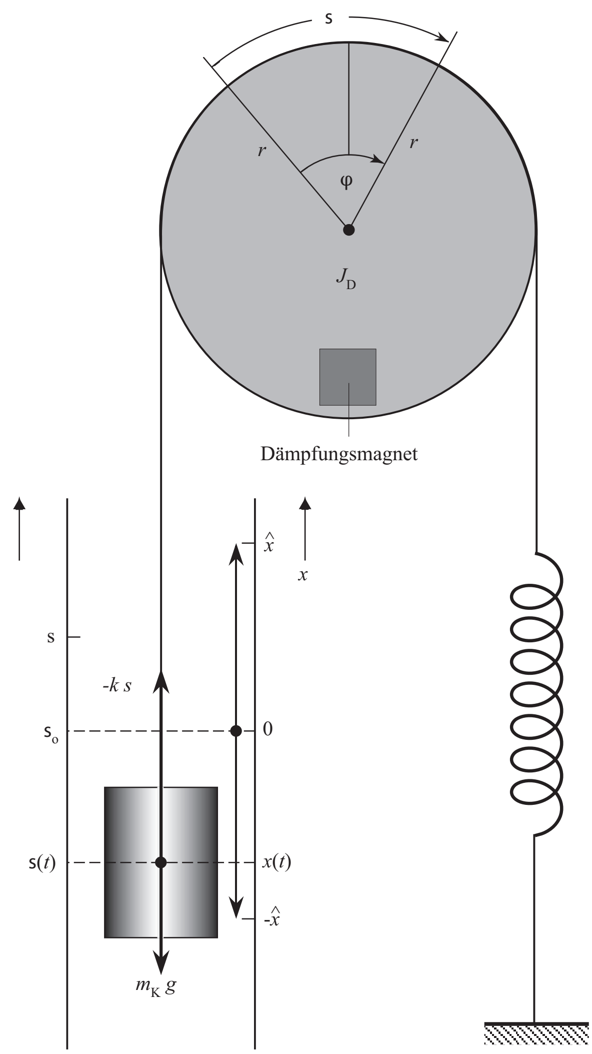

Abbildung 3: Federpendel für freie Schwingungen

Diese inhomogene Differentialgleichung kann durch Einführung der neuen Variablen $x = s - m_K g/k$ in eine homogene umgewandelt werden (Die Differentiation von $x = s - m_K g/k$ ergibt wegen der Konstanz von $m_K g/k$ dasselbe wie die von s):

$$\left(m_K + \frac{m_D}{2}\right) \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{11}$$

In den neuen Variablen ist die Bewegungsgleichung unabhängig von g und die Lösung wird nicht durch die Schwerkraft beeinflusst. Die Lösung $x(t)$ spielt sich in einem Koordinatensystem ab, das durch die Schwerkraft um die statische Auslenkung $s_0 - m_K g/k$ verschoben wurde.

Lösung der Bewegungsgleichung

Wird in (11) die Gesamtmasse $m_\mathrm{K} + (1/2)m_\mathrm{D}$ mit m bezeichnet, so ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{12}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung (12) ist jede Funktion $x(t)$, die durch zweimaliges Differenzieren bis auf einen konstanten Faktor reproduziert wird. Diese Eigenschaft besitzt z. B. die Exponentialfunktion, deren sämtliche Ableitungen mit ihr selbst identisch sind. Das führt zu dem Lösungsansatz

$$x(t) = a\exp(\lambda t), \tag{13}$$

in dem die Konstante a dieselbe Dimension wie x haben muss und die Konstante λ die Dimension einer reziproken Zeit. Einsetzen in (12) ergibt die algebraische Gleichung

$$m\lambda^2 = -k \tag{14}$$

für λ. Ihre beiden Lösungen sind:

$$\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm\mathrm{i}\omega_0$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

Die Bedeutung der so definierten neuen Konstanten ω_0 wird später erklärt (siehe (20)). Die allgemeine Lösung von (12) ist die Linearkombination

$$x(t) = a_1\exp(\mathrm{i}\omega_0 t) + a_2\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{16}$$

mit beliebigen komplexen Konstanten a_1 und a_2, denn die Funktionen $\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$ und $\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)$ sind voneinander linear unabhängig und bilden somit eine Basis für den zweidimensionalen Vektorraum der Lösungen $x(t)$ (Sie können selbst beweisen, dass $x(t) = 0$ nur für $a_1 = a_2 = 0$ erfüllt sein kann).

Die dem physikalischen Problem angemessene Lösungsfunktion $x(t)$ wird durch zwei Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt. Im Versuch sei die Schwingmasse zur Zeit $t = 0$ um die Strecke $\hat{x}$ ausgelenkt (Abbildung 3) und beginne ihre Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 0$:

$$x(0) = \hat{x} \tag{17}$$

$$v(0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \tag{18}$$

Einsetzen in (16) liefert zwei Gleichungen für die Konstanten a_1 und a_2:

$$x(0) = a_1 + a_2 = \hat{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = a_1 \mathrm{i}\omega_0 + a_2(-\mathrm{i}\omega_0) = 0$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist:

$$a_1 = a_2 = \frac{\hat{x}}{2}$$

Damit ist wegen

$$\frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}\omega_0 t) + \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)] = \cos\omega_0 t$$

die durch die Anfangsbedingungen festgelegte spezielle Lösung:

$$x(t) = \hat{x}\cos\omega_0 t \tag{19}$$

Das ist eine harmonische Schwingung, die in Abbildung 4 dargestellt wird:

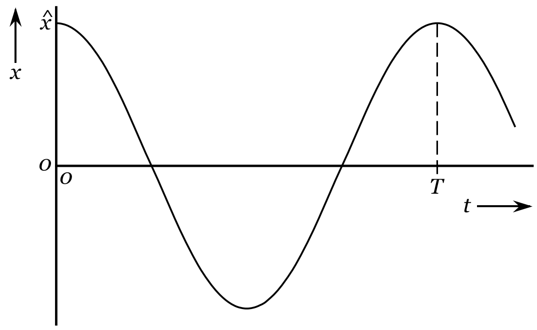

Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf einer harmonischen Schwingung

Der Faktor $\hat{x}$ in (19) ist gleich dem Maximalwert von $x(t)$, er heißt daher die Amplitude der Schwingung. Sie ist durch die Auslenkung zu Beginn festgelegt.

Die Zeit T_0 für eine volle Schwingung, in der das System in seinen Ausgangszustand zurückgekehrt ist, heißt die Schwingungsdauer. Da die einfache Periode der Cosinusfunktion den Wert 2π hat, folgt für T_0 die Beziehung:

$$\omega_0 T_0 = 2\pi$$

Andererseits ist der Kehrwert $1/T_0$ der Schwingungsdauer gleich der Frequenz f_0, d. h. der Zahl der Schwingungen pro Zeit. Damit lässt sich die bisher nur aus Dimensionsgründen eingeführte Konstante ω_0 folgendermaßen ausdrücken:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \tag{20}$$

Wegen des Faktors 2π heißt sie die Kreisfrequenz der Schwingung.

Experimentelle Bestimmung der Rückstellkonstante

Im Versuch wird die Schwingungsdauer T_0 des Federpendels gemessen. T_0 hängt nach (15) und (20) mit der Rückstellkonstante k der Feder durch

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{k} m \tag{21}$$

zusammen. Bei Variation der Masse m müsste also Auftragen von T_0^2 gegen m eine Gerade mit der Steigung $a_1 = 4\pi^2/k$ ergeben, womit sich k aus a_1 berechnet. Experimentell wird allerdings nicht m sondern m_K variiert. Außerdem ergibt sich noch eine Schwierigkeit daraus, dass auch die Feder entgegen der bisherigen Annahme massebehaftet ist und so infolge ihrer eigenen Schwingung mit zur Masse m beiträgt, weswegen m nicht einfach gleich der Summe $m_\mathrm{k} + (1/2)m_\mathrm{D}$ gesetzt werden kann.

Der Ausdruck für m in (21) kann um einen zusätzlichen Masseterm, der die Federmasse m_f beinhaltet, erweitert werden. Da die Feder allerdings an einem Ende befestigt ist, vollzieht die Feder nicht in all ihren Massenelementen die gleiche Amplitude wie die angehängten Massen m_K. Die Federmasse wird deshalb nur teilweise in (21) eingehen. Mit dieser Überlegung erhält man:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{k} \left(f m_\mathrm{f} + m_\mathrm{K} + \frac{1}{2} m_\mathrm{D} \right) \tag{22}$$

m_f = Masse der Feder, f = Zahlenfaktor zwischen 0 und 1, m_K = Masse des Schwingkörpers, m_D = effektive Masse der Fadenumlenkscheibe

Die Auftragung von T_0^2 gegen m_K liefert eine Gerade mit der Steigung $a_1 = 4\pi^2/k$. Mit der Nullstelle der Gerade kann der Term $f m_\mathrm{f} + 1/2 \cdot m_\mathrm{D}$ experimentell bestimmt werden.

1.3 Die gedämpfte freie Schwingung

Eine Schwingung wird dadurch gedämpft, dass an dem schwingenden Körper eine zusätzliche Kraft angreift, die seiner Bewegung stets entgegengerichtet ist. Zur Erzeugung einer solchen bremsenden Kraft dreht sich die zum Umlenken des Fadens verwendete Aluminiumscheibe zwischen den Polen eines Elektromagneten (Abbildung 3). Dadurch werden in ihr Wirbelströme induziert, auf die das Magnetfeld eine Kraft ausübt. Aus dem Zusammenwirken von Induktionsgesetz, Ohmschem Gesetz und dem Gesetz von Lorentz für die Kraft eines Magnetfeldes auf elektrische Ströme (siehe Versuch „Magnetisches Feld“) ergibt sich, dass der Betrag dieser Kraft proportional zur Geschwindigkeit v des Schwingkörpers ist. Gemäß der Lenzschen Regel wirkt die Kraft der Ursache entgegen und bremst die Scheibe.

Die Bewegungsgleichung

Im x–Koordinatensystem nach Abbildung 3 wirkt bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung auf den Schwingkörper die Gesamtkraft

$$F = -kx - \rho v = -kx - \rho \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

mit dem konstanten Reibungskoeffizienten ρ. Aus dem 2. Newtonschen Axiom folgt die Differentialgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{23}$$

Auch hier ist eine Lösung mit dem Ansatz

$$x(t)=a\exp(\lambda t)$$

(vgl. (13)) möglich. Er führt diesmal zu folgender Gleichung für λ (vgl. (14)):

$$m\lambda^2+\rho\lambda+k=0$$

mit den zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

wobei ω_0 die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ist (15), und die Dämpfungskonstante β durch folgende Beziehung definiert wird:

$$\beta=\frac{\rho}{2m} \tag{24}$$

Lösungen der Bewegungsgleichung

Die Art der Bewegung hängt entscheidend vom Vorzeichen der Größe $\beta^2-\omega_0^2$ ab.

Fall a) $\beta<\omega_0$ (schwache Dämpfung): Man kann eine reelle Größe ω_d durch

$$\omega_\mathrm{d}=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \tag{25}$$

einführen und erhält:

$$\lambda_{1,2}=-\beta\pm\mathrm{i}\omega_\mathrm{d}$$

Damit erhält man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (23) in der Form

$$x(t)=\exp(-\beta t)[a_1\exp(\mathrm{i}\omega_\mathrm{d}t)+a_2\exp(-\mathrm{i}\omega_\mathrm{d}t)] \tag{26}$$

Mit den Anfangsbedingungen aus (17) und (18) erhält man:

$$\begin{aligned}x(t)&=\hat{x}_0\exp(-\beta t)\left[\cos\omega_\mathrm{d}t+\frac{\beta}{\omega_\mathrm{d}}\sin\omega_\mathrm{d}t\right]\\&=\hat{x}_0\frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}\exp(-\beta t)\cos(\omega_\mathrm{d}t-\varphi)\end{aligned} \tag{27}$$

wobei die Phasenverschiebung φ durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$\tan\varphi=\frac{\beta}{\omega_\mathrm{d}} \tag{28}$$

(27) beschreibt eine gedämpfte Schwingung, wie sie in Abbildung 5a dargestellt wird. Es ist eine Schwingung, bei der die Größe der Amplitude mit der Zeit exponentiell abnimmt. Ihre durch $T_\mathrm{d}=2\pi/\omega_\mathrm{d}$ gegebene Schwingungsdauer ist nach (25) etwas größer als die Schwingungsdauer $T_0=2\pi/\omega_0$ der ungedämpften Schwingung desselben Systems.

Fall b) $\beta > \omega_0$ (starke Dämpfung): Man definiert:

$$\eta = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

und erhält:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \eta$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (23) ist dann:

$$x(t) = \exp(-\beta t)[a_1 \exp(\eta t) + a_2 \exp(-\eta t)] \tag{29}$$

Lässt man den Schwingkörper nach der Auslenkung um den Betrag $\hat{x}_0$ zur Zeit $t = 0$ mit $v = 0$ los, so wird durch diese Anfangsbedingungen (29) zu

$$x(t) = \hat{x}_0 \exp(-\beta t) \left[\cosh \eta t + \frac{\beta}{\eta} \sinh \eta t\right] \tag{30}$$

spezifiziert, wie man durch Einsetzen nachprüfen kann. (30) beschreibt ein aperiodisches Kriechen zurück in die Gleichgewichtslage, wie es in Abbildung 5b dargestellt ist.

Fall c) Im Grenzfall $\beta = \omega_0$ (kritische Dämpfung) kann die den obigen Anfangsbedingungen entsprechende Lösung aus (30) durch den Grenzübergang $\eta \to 0$ gefunden werden. Es ergibt sich

$$x(t) = \hat{x}_0 \exp(-\omega_0 t)(1 + \omega_0 t)$$

Diesen so genannten aperiodischen Grenzfall zeigt Abbildung 5c.

Experimentelle Auswertung einer gedämpften Schwingung

Im Teilversuch zur Untersuchung eines gedämpften Oszillators wird die Dämpfung so gewählt, dass $\beta < \omega_0$. Nach Auslenkung des Schwingkörpers um die Strecke $\hat{x}_0$ und Loslassen werden nacheinander die Amplituden $\hat{x}_\mathrm{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und die Schwingungsdauer T beobachtet. Aus ihnen sollen die charakteristischen Größen β und ω_0 bestimmt werden.

Aus (27) erkennt man, dass Nulldurchgänge der Auslenkung bei gleicher Schwingungsrichtung um eine Schwingungdauer von $T_\mathrm{d} = 2\pi/\omega_\mathrm{d}$ voneinander getrennt sind. Dass dies auch für aufeinanderfolgende Maxima bzw. Minima gilt, ist nicht selbstverständlich, kann aber anhand von (27) bewiesen werden. Dazu müssen nur die Extrema der Funktion $x(t)$ durch Nullsetzen von $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ gefunden werden. Aus dieser Rechnung folgt auch, dass die Minima von den benachbarten Maxima zeitlich um $T_\mathrm{d}/2$ entfernt sind und umgekehrt. Die Schwingungsdauer T_d kann also gemessen werden, indem die Zeit zwischen aufeinanderfolgenden Nulldurchgängen oder Auslenkmaxima oder Auslenkminima gemessen wird.

Die Lösung (27) von (23) wurde durch die Nebenbedingung (28) so gewählt, dass sie zur Zeit $t = 0$ ein Maximum besitzt. Der Term $\cos(\omega_\mathrm{d} t - \varphi)$ nimmt für $t = 0$ den Wert $\cos\varphi$ an. Der Term $\cos(\omega t - \varphi)$ nimmt auch für alle weiteren Maxima den Wert $\cos\varphi$ an. In allen Minima hat er den Wert $-\cos\varphi$. Von einem Maximum zum unmittelbar danach folgenden Minimum

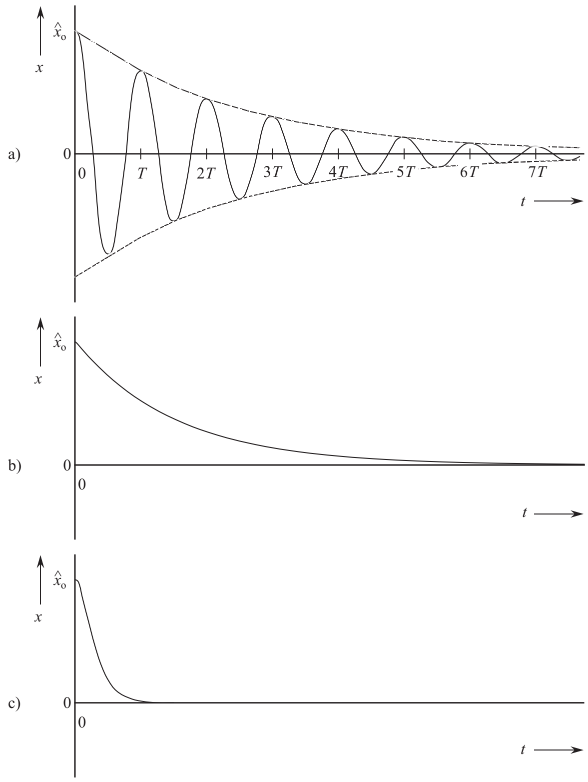

Abbildung 5: Bewegung eines harmonischen Oszillators mit verschieden starker Dämpfung. a) schwache Dämpfung: $\beta < \omega_0$ b) starke Dämpfung: $\beta > \omega_0$ c) aperiodischer Grenzfall: $\beta = \omega_0$

nimmt also der Betrag $|x(t)|$ jeweils um $\exp(\beta T_\mathrm{d}/2)$ ab. Nummeriert man die Maxima mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ durch, so gilt:

$$\hat{x}_\mathrm{n} = \hat{x}_0 \exp\left(-2\pi \frac{\beta}{\omega_\mathrm{d}} n\right) = \hat{x}_0 \exp\left(-\beta T_\mathrm{d} n\right) \tag{31}$$

n = Nummer des n–ten Maximums, $\hat{x}_\mathrm{n}$ = Betrag der n–ten Amplitude.

Der Exponent in (31) soll ein Maß für die Stärke der Dämpfung sein, die Dämpfungskonstante β ist darin aber mit der Schwingungsdauer T_d gekoppelt. Daher führt man als experimentell direkt zugängliches Dämpfungsmaß das logarithmische Dekrement Λ ein:

$$\Lambda = 2\pi \frac{\beta}{\omega_\mathrm{d}} = \beta T_\mathrm{d} \tag{32}$$

Damit wird aus (31):

$$\hat{x}_\mathrm{n} = \hat{x}_0 \exp(-\Lambda n) \tag{33}$$

Die Steigung der sich durch logarithmisches Auftragen von $\hat{x}_\mathrm{n}$ gegen n ergebenden Geraden hat nach (33) den Wert $-\Lambda$.

Eine weitere Messgröße ist die Schwingungsdauer $T_\mathrm{d} = 2\pi/\omega_\mathrm{d}$. Für sie erhält man aus den Definitionen von ω_d (25) und Λ (32) folgende Beziehung:

$$T_\mathrm{d} = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2} \tag{34}$$

Aus (34) folgt, dass T_d für kleine Dämpfungen nur wenig von T_0 abweicht.

1.4 Die erzwungene Schwingung

Bisher wurden nur Schwingungen betrachtet, die durch einmaliges Auslenken und Loslassen des Schwingkörpers zustandekamen. Es kann aber auch eine zeitlich periodische Kraft von außen auf das schwingungsfähige System einwirken.

Experimentelle Anordnung

Die zu diesem Zweck im Versuch verwendete Anordnung ist in Abbildung 6 schematisch dargestellt. Der am unteren Ende der Feder befestigte Faden wird jetzt von einem gleichförmig rotierenden Exzenter auf und ab bewegt.

Die Lage des vom Exzenter angetriebenen Federendes werde durch die Koordinate x_A angegeben. Ihr Nullpunkt sei so festgelegt, dass die Bewegung symmetrisch zu ihm erfolgt. Die Auslenkung der Schwingmasse wird mit x bezeichnet. Es sei $x = 0$, wenn das untere Federende die Lage $x_\mathrm{A} = 0$ hat und der Schwingkörper in Ruhe ist. In diesem Zustand besitzt die Feder eine bestimmte Länge, die während der Bewegung um $x - x_\mathrm{A}$ geändert ist. Die Feder übt also auf den Schwingkörper die beschleunigende Kraft $k(x - x_\mathrm{A})$ aus. Die Verschiebung x_A des unteren Federendes durch den Exzenter kann daher auch als Einwirkung einer äußeren Kraft $F_\mathrm{A} = kx_\mathrm{A}$ interpretiert werden.

Bewegungsgleichung

Wenn der Abstand des Exzenters von der ersten Fadenumlenkrolle genügend groß gegenüber dem Exzenterradius ist, ändert sich x_A näherungsweise sinusförmig mit der Zeit, d. h. das untere Federende führt eine harmonische Schwingung aus:

$$x_\mathrm{A}(t) = \hat{x}_\mathrm{A} \cos \omega_\mathrm{A} t$$

Es ist hier von Vorteil, die reelle Funktion $x_\mathrm{A}(t)$ durch eine imaginäre Funktion $y_\mathrm{A}(t) = \mathrm{i}x_\mathrm{A} \sin \omega_\mathrm{A} t$ zu der komplexen Funktion

$$x_\mathrm{A}(t) + y_\mathrm{A}(t) = \hat{x}_\mathrm{A} \cos \omega_\mathrm{A} t + \mathrm{i}\hat{x}_\mathrm{A} \sin \omega_\mathrm{A} t = \hat{x}_\mathrm{A} \exp(\mathrm{i}\omega_\mathrm{A} t)$$

zu ergänzen. Da die Bewegungsgleichung linear ist, wird am Ende der Rechnung der Realteil der Lösungsfunktion das gewünschte Ergebnis darstellen.

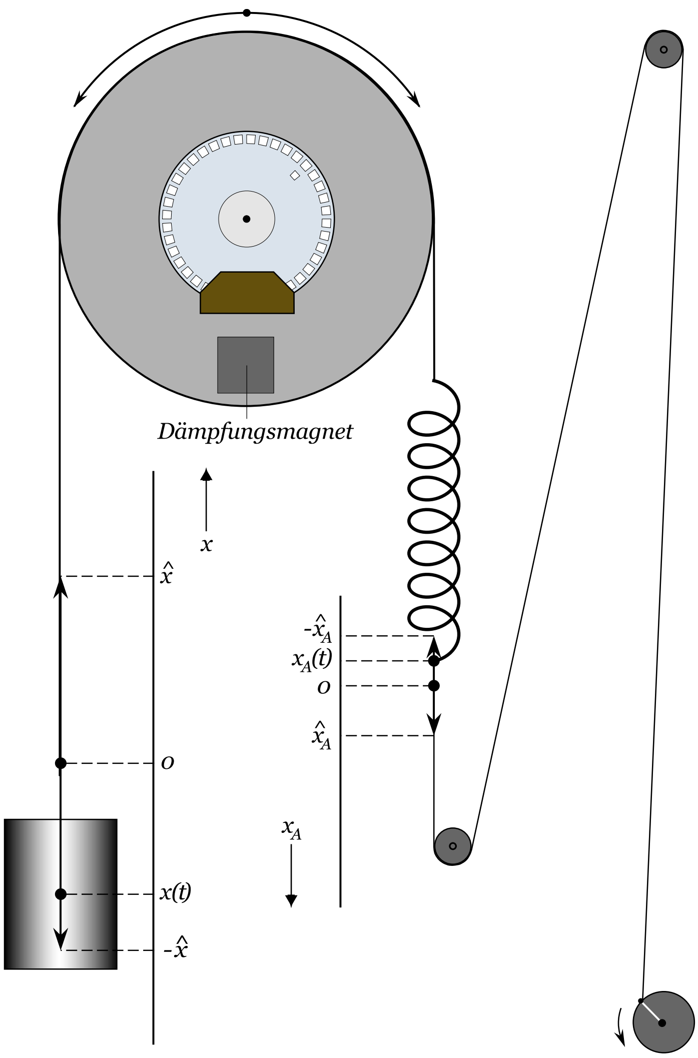

Abbildung 6: Durch Exzenter angetriebenes Federpendel mit Dämpfungsmagnet

Die Differentialgleichung für die vorliegende Bewegung erhält man in bekannter Weise, indem man die Summe aller Kräfte dem Produkt aus Masse und Beschleunigung gleichsetzt:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=k\hat{x}_\mathrm{A}\exp(\mathrm{i}\omega_\mathrm{A}t)$$

Mit den Abkürzungen von (15) und (24) lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=\omega_0^2\hat{x}_\mathrm{A}\exp(\mathrm{i}\omega_\mathrm{A}t) \tag{35}$$

Lösung der Bewegungsgleichung

Man sieht, dass sich (35) von (23) für die freie Schwingung nur durch die rechte Seite unterscheidet, die hier nicht konstant ist. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen

Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist gleich der Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung.[3]

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist die durch (26) und Abbildung 5 dargestellte gedämpfte freie Schwingung. Im Experiment wird meistens so lange gewartet, bis dieser „Einschwingvorgang" genügend stark abgeklungen ist. Es stellt sich eine ungedämpfte Schwingung ein, deren Kreisfrequenz ω gleich der Kreisfrequenz ω_{A} der anregenden Schwingung ist (daher der Name „erzwungene" Schwingung) und die eine Phasenverschiebung gegenüber derselben besitzt. Sie wird durch folgende Funktion dargestellt:

$$x(t) = x \exp[\mathrm{i}(\omega t - \varphi)]$$

Durch Einsetzen folgt, dass dies tatsächlich die gesuchte Lösungsfunktion von (35) ist.

Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phasenverschiebung

Dieses Einsetzen liefert analog zu dem bei der freien Schwingung eine algebraische Gleichung zwischen der Amplitude $\hat{x}$, der Phasenverschiebung φ und der Kreisfrequenz ω:

$$\hat{x}\left(-\omega^2 + 2\mathrm{i}\beta\omega + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 \hat{x}_{\mathrm{A}} \exp(\mathrm{i}\varphi) \tag{36}$$

Der Weg zur Auflösung von (36) nach den Größen $\hat{x}$ und φ ist einfacher, wenn die geometrische Bedeutung von (36) im Zeigerdiagramm grafisch dargestellt wird:

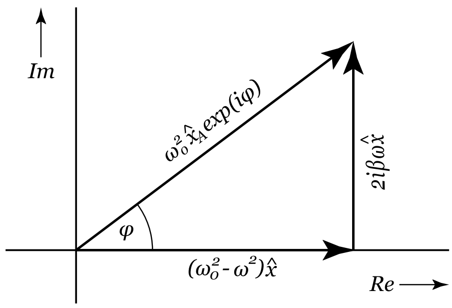

Abbildung 7: Darstellung von (36) durch geometrische Addition von komplexen Zeigern

Aus Abbildung 7 folgt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\hat{x}^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \hat{x}^2 4\beta^2\omega^2 = \omega_0^4 \hat{x}_{\mathrm{A}}^2 \tag{37}$$

Auflösung nach der Amplitude $\hat{x}$ ergibt:

$$\hat{x} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2}}\,\hat{x}_{\mathrm{A}} \tag{38}$$

[3]Subtrahiert man von der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung eine spezielle Lösung derselben und setzt das Ergebnis in ihre linke Seite ein, so ergibt sich null, d. h. die Differenz erfüllt die homogene Gleichung.

Für die Phasenverschiebung φ folgt unmittelbar aus Abbildung 7:

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{39}$$

Aus (38) und (39) liest man die wichtige Tatsache ab, dass Amplitude und Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung von der Anregungsfrequenz abhängen. Die entsprechenden Funktionen sind in Abbildung 8 und Abbildung 9 dargestellt.

Bemerkenswert ist das Maximum in der Kurve für die Amplitude $\hat{x}$, das in der Nähe der Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften freien Oszillators auftritt. Diese Erscheinung wird mit Resonanz bezeichnet.

Diskussion der Resonanzkurven für die Amplitude

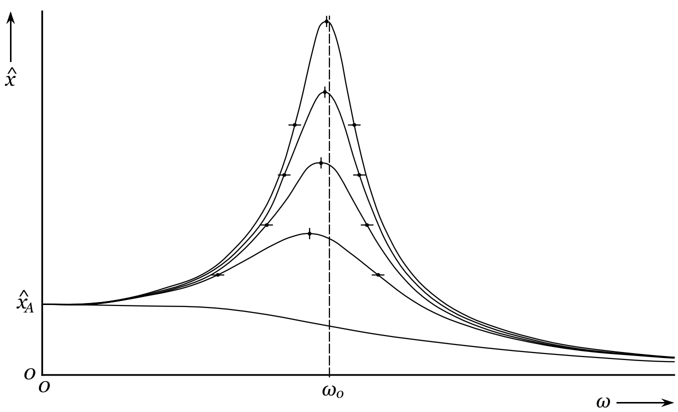

Abbildung 8: Amplitude einer erzwungenen Schwingung als Funktion der Kreisfrequenz für verschiedene Dämpfungen

Die Lage des Maximums der Kurve für die Amplitude $\hat{x}$ ergibt sich durch Differentiation von (37) nach ω und Nullsetzen der Ableitung:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \tag{40}$$

Die Resonanzkreisfrequenz ω_{res} wandert mit wachsender Dämpfung β nach links (siehe Abbildung 8), bis es bei einer Dämpfung von $\beta = \omega_0/\sqrt{2}$ die Ordinate erreicht.

Anmerkung: Aus (40) und (25) folgt die Relation: $\omega_{\text{res}} < \omega_{\text{d}} < \omega_0$ bzw. $f_{\text{res}} < f_{\text{d}} < f_0$, sprich, die Resonanzfrequenz f_{res} ist kleiner als die Eigenfrequenz f_{d} der gedämpften Schwingung und diese ist kleiner als die Eigenfrequenz f_0 der ungedämpften Schwingung.

Einsetzen von ω_{res} gemäß (40) in (38) ergibt für die Höhe des Resonanzmaximums:

$$\hat{x}_{\text{res}} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,\hat{x}_{\text{A}} \tag{41}$$

Daraus folgt, dass es mit wachsender Dämpfung immer niedriger wird.

Von der Dämpfung hängt auch die „Breite“ des Maximums ab, die sich durch den Abstand $\Delta\omega_\mathrm{h}$ der beiden Kreisfrequenzen, in denen die in der Schwingung gespeicherte Energie $1/2k\hat{x}^2$ vom Maximalwert auf dessen Hälfte abgenommen hat, definieren lässt. Dieser Abstand heißt dementsprechend die Halbwertsbreite. Sie ergibt sich aus (38) und (41), indem $\hat{x}^2 = \hat{x}^2_\mathrm{res}/2$ gesetzt wird:

$$\Delta\omega_\mathrm{h} = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2) + 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} - \sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2) - 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Für den Fall kleiner Dämpfung ($\beta \ll \omega_0/\sqrt{2}$) kann durch Entwickeln der Wurzeln in Potenzreihen eine einfache Näherung für $\Delta\omega_\mathrm{h}$ gewonnen werden:

$$\Delta\omega_\mathrm{h} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\left(\sqrt{1 + 2\beta\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0^2 - 2\beta^2}} - \sqrt{1 - 2\beta\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0^2 - 2\beta^2}}\right)$$

$$\approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\left(1 + \beta\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0^2 - 2\beta^2} - 1 + \beta\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\omega_0^2 - 2\beta^2}\right) = 2\beta\sqrt{\frac{\omega_0^2 - \beta^2}{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \approx 2\beta$$

$$\Delta\omega_\mathrm{h} \approx 2\beta$$

Diskussion der Kurven für die Phasenverschiebung

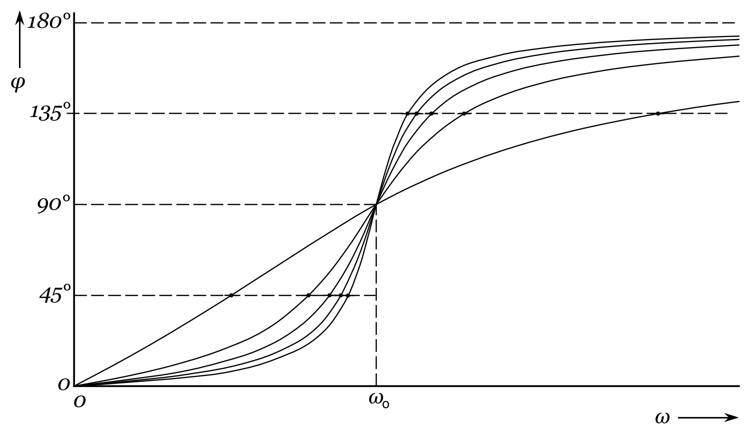

Abbildung 9: Phasenverschiebung einer erzwungenen Schwingung gegenüber der anregenden Schwingung als Funktion der Kreisfrequenz

In den Kurven für die Phasenverschiebung φ (Abbildung 9) liegt der Funktionswert $\varphi = 90°$ unabhängig von β stets bei der Eigenkreisfrequenz ω_0, wie unmittelbar aus (39) folgt. Die Kurven werden mit wachsender Dämpfung in der Umgebung von ω_0 zunehmend flacher. Als Maß für die Flachheit eignet sich der Abstand $\Delta\omega_\varphi$ der beiden Kreisfrequenzen, denen die Phasenverschiebungen $\varphi = 45°$ bzw. 135° zugeordnet sind. Der Tangens hat für beide den Wert 1, und aus (39) folgt:

$$\Delta\omega_\varphi = 2\beta$$

2 Technische Grundlagen

2.1 Versuchsanordnung mit dem Fadenpendel

Das Fadenpendel besteht aus einer Stahlkugel, die an einem dünnen Faden aufgehängt ist (Abbildung 10). Sie wird seitlich ausgelenkt und dann losgelassen. Die Messung der Schwingungsdauer erfolgt mit einer Stoppuhr. Außerdem muss die Fadenlänge bekannt sein.

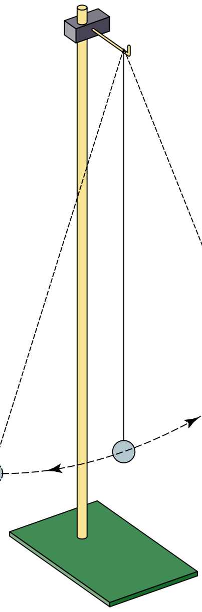

Abbildung 10: Fadenpendel. Die Amplitude der Schwingung muss klein gewählt werden (im Bild der besseren Darstellung wegen viel zu groß gezeichnet), da nur dann die Schwingungsdauer von ihr unabhängig ist.

2.2 Versuchsanordnung mit dem Federpendel

Die Teilversuche mit dem Federpendel sind computerbasiert. Der Versuchsaufbau besteht aus einem mechanischen Oszillator in Form eines Federpendels mit variabler Masse. Feder und Masse sind über eine Umlenkrolle mit einem Faden verbunden. Zusätzlich ist die Feder mit einem Exzenter verbunden, der durch einen drehzahlgesteuerten Motor in Bewegung versetzt werden kann.

Schwingungsapparatur mit Federpendel und Messwerterfassungselektronik

Die Schwingungsapparatur ist in Abbildung 11 dargestellt. Der von der Exzenterscheibe ausgehende Antriebsfaden zieht über zwei Umlenkrollen am unteren Ende der senkrecht hängenden

Schraubenfeder. An deren oberen Ende ist ein weiterer Faden befestigt, der über eine reibungsarm drehbar gelagerte Aluminiumscheibe zum Schwingkörper führt. Ein Elektromagnet erzeugt Wirbelströme in der Scheibe, welche ihre Bewegung geschwindigkeitsproportional dämpfen.

Die Fadenumlenkscheibe ist mit einem optischen Encoder verbunden. Dieser erzeugt durch eine Lichtschranke in festen Winkelabständen elektrische Impulse. Eine nachfolgende elektrische Schaltung bestimmt daraus Auslenkung und Schwingungsdauer der Schwingmassen. Die Exzenterscheibe zum Anregen der Schwingungen ist ebenfalls mit einem optischen Encoder verbunden. Damit wird die Auslenkung und Schwingungsdauer des Erregers bestimmt. Die digitalisierten Messwerte werden direkt am Display der Schwingungsapparatur angezeigt. Darüber hinaus kann die Schwingungsapparatur mit einem PC verbunden werden, auf dem eine entsprechende Software die Messwerte verarbeitet.

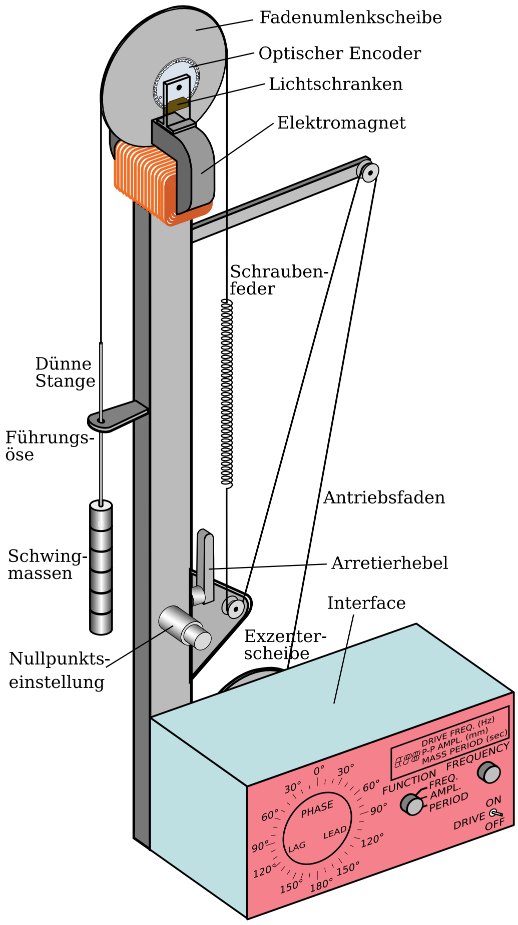

Abbildung 11: Die Schwingungapparatur

2.3 Aufbau und Wirkungsweise eines optischen Encoders

Messprinzip für Verschiebungen

Wenn die Fadenumlenkscheibe mit dem Radius r sich um den Winkel φ dreht, wird der Faden um die Strecke $s = r\varphi$ verschoben. Die Verschiebung s kann also durch Messung des Drehwinkels φ bestimmt werden (siehe Abbildung 12).

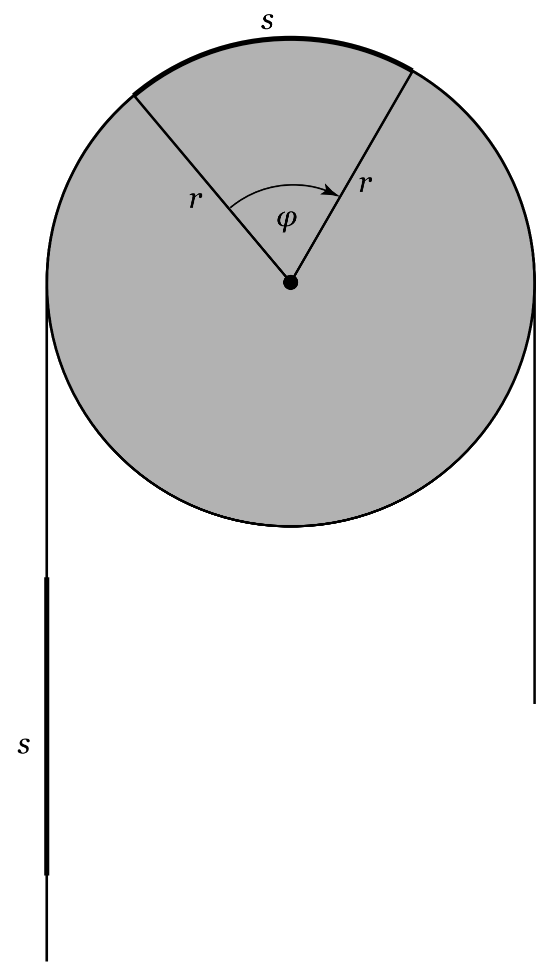

Abbildung 12: Zusammenhang zwischen Fadenverschiebung und Drehwinkel der Scheibe

Optischer Encoder

Die Messung des Drehwinkels geschieht mit Hilfe von optischen Encodern. Diese bestehen aus einer Encoderscheibe und zwei unabhängigen Lichtschranken. Die Encoderscheibe ist ein dünnes Plättchen aus transparentem Kunststoff, auf das eine lichtundurchlässige Aluminiumschicht aufgedampft wurde. In diese sind lichtdurchlässige Fenster eingeätzt. Sie haben die

Form von radial ausgerichteten Spalten. Am Rand der Scheibe wechseln sich Spalten und Stege mit gleichbleibenden Abständen ab. Der Rand der Encoderscheibe läuft durch eine der beiden Lichtschranken und erzeugt dadurch elektrische Impulse. Die Anzahl dieser elektrischen Impulse ist proportional zum Drehwinkel und somit ein Maß für diesen. Weiter innen befindet sich auf der Encoderscheibe ein einzelnes Fenster, das durch die zweite Lichtschranke läuft und pro Schwingung zwei elektrische Impulse erzeugt. Mit dem Signal dieser zweiten Lichtschranke kann somit die Schwingungsdauer bestimmt werden (siehe Abbildung 13).

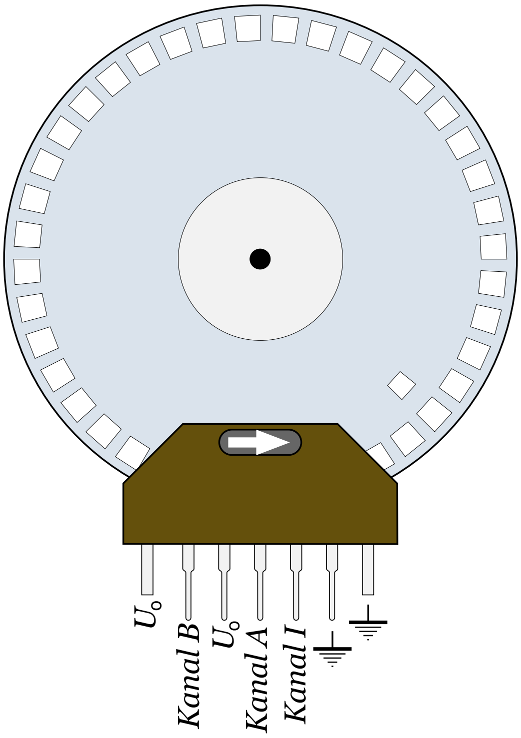

Abbildung 13: Optischer Encoder

3 Smartphoneexperiment zur Durchführung zu Hause

Für den freiwilligen Vorversuch benötigen Sie ein Smartphone mit der App „phyphox“. Wir empfehlen für ein besseres Verständnis diesen Versuch vorab zu Hause durchzuführen.

Achten Sie dabei aber bitte auf folgende Punkte:

- **Gefährden Sie nicht Ihr Smartphone!** Führen Sie das Experiment nur durch, wenn Sie sicher sind, dass Ihre Smartphone nicht aus der Apparatur fliegen, unkontrolliert anstoßen oder sonstwie beschädigt werden kann.
- Rufen Sie mit einem Browser folgende Webadresse auf:

  `http://phyphox.org/exmod/view.php?id=bpkblwgg`

  Die Webseite enthält neben der Anleitung des Smartphoneexperiments ein Formular, über welches Sie anonym Ihre Messergebnisse an uns übermitteln können. Wir bitten von dieser Möglichkeit Gebrauch zu machen.

Sie dürfen gerne die von Ihnen gebastelten Fadenpendel zum Praktikum mitbringen, um mit Ihrem Betreuer über Ihre zuhause gemachten Experimentiererfahrungen zu diskutieren.

4 Versuchsdurchführung

4.1 Teilversuch 1: Schwingungsdauer eines Fadenpendels

- Messen Sie die Länge des Fadens bis zum Mittelpunkt (Schwerpunkt) der Kugel. Sie können außer dem Bandmaß zusätzlich eine Schieblehre benutzen.
- Lassen Sie das Pendel frei schwingen. Wählen Sie dabei die Anfangsamplitude so klein, dass in genügend guter Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ gilt.[4]
- Überlegen Sie sich und dokumentieren Sie vor Ort, bei welcher Pendelposition Sie versuchen, die Stoppuhr zu Starten bzw. zu Stoppen. Sie sollten jeweils erst die Stoppuhr betätigen, wenn Sie das Pendel an der entsprechenden Position sehen. Welche Unsicherheit erwarten Sie für die Zeitmessung?
- Messen Sie die Zeit für 20 volle (!) Schwingungen mit der Stoppuhr. Es ist ungünstig, direkt vom Moment des Loslassens ab zu messen. Wiederholen Sie die Messung weitere vier bis fünf Mal.
- Diskutieren Sie vor Ort anhand der Streuung Ihrer Messwerte (noch ohne detaillierte Berechnung), ob diese in etwa der von Ihnen erwarteten Unsicherheit der Messung entspricht. Falls nein, dokumentieren Sie auch Ihre Überlegungen, welche Annahmen möglicherweise nicht passend waren oder woher die Abweichung kommen könnte.
- Zur Simulation der Verhältnisse auf anderen Himmelskörpern steht ein variables g-Pendel zur Verfügung, bei welchem Sie die Pendelebene gegen die Vertikale neigen können. Dadurch wird eine Pendelschwingung auf der Erde simuliert, wie es beispielsweise auf dem Mond in vertikaler Orientierung schwingen würde. Da bei dem variablen g-Pendel die Masse des Pendelstabes klein gegen die Pendelmasse ($m = 300\,\mathrm{g}$) ist, kann es in guter Näherung ebenfalls als mathematisches Pendel (ideales Fadenpendel) betrachtet werden. In der Auswertung möchten Sie folgende Frage beantworten: Wie ändert sich die Schwingungsfrequenz eines Pendels, wenn es statt auf der Erde auf dem Mond schwingen würde? Führen Sie hierzu für die möglichen Kombinationen aus zwei verschiedenen Pendellängen (Position der Pendelmasse) und Pendelneigungen jeweils Messungen durch und dokumentieren Sie die für die Auswertung notwendigen Werte.

[4] Dazu das Bogenmaß beachten! Für $\alpha = 15°$ gilt das mit nur 3 % Abweichung!

Die folgenden drei Teilversuche sind computerbasiert und lassen sich in kurzer Zeit durchführen. Das Verständnis von Schwingungen ist aber Voraussetzung für viele physikalische Phänomene. Die Erfahrungen aus diesem Versuch sind daher für das weitere Studium als äußerst wertvoll anzusehen. Lassen Sie sich deshalb Zeit, um die Effekte zu verstehen. Wenn Sie wollen können Sie mit dem Aufbau ein wenig herumspielen.

Vorbemerkungen zur DAQ-Software

Die DAQ-Software[5] wurde in LabVIEW programmiert. Ihr Betreuer kann Ihnen bei Interesse Näheres zu dieser grafischen Programmiersprache zeigen. Melden Sie sich nun am Computer an. Ihr Betreuer teilt Ihnen Login und Passwort mit. Das Programm finden Sie als Icon mit dem Namen *Mechosc* auf dem Desktop und kann durch Doppelklick gestartet werden. Nach dem Start des Programms erscheint ein Menü, in dem Sie drei Unterprogramme wählen können (siehe auch Abbildung 14):

- Free Undamped Oscillation (Freie ungedämpfte Schwingung)
- Free Damped Oscillation (Freie gedämpfte Schwingung)
- Driven Oscillation (Erzwungene Schwingung)

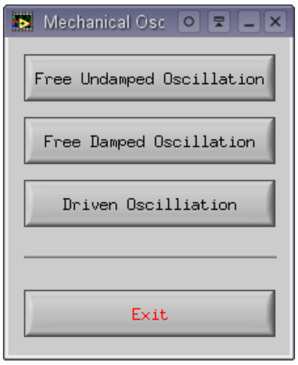

Abbildung 14: Startmenü

4.2 Teilversuch 2: Ungedämpfte freie Schwingungen

Vorbereitung der Schwingungsapparatur

- Richten Sie die Schwingungsapparatur mit Hilfe der Bodenschrauben so aus, dass die Stange berührungslos durch die Mitte der Führungsöse läuft.
- Ziehen Sie alle sechs Zylinder von der dünnen Stange ab und bestimmen Sie die in der Durchführung schwingenden Zylindermassen, sodass die Unsicherheit am kleinsten ist. Die Unsicherheit ist auf der Waage angegeben.

[5] DAQ steht für data aquistion = Datennahme

- Schieben Sie zwei Zylinder zurück auf die Stange.
- Verschieben Sie die untere Umlenkrolle durch Drehen am Grobtrieb so, dass der Befestigungsdraht auf dem Rand der Fadenumlenkscheibe nach oben zeigt. Damit liegt der Nullpunkt des Schwingkörpers ungefähr an der richtigen Stelle.

Machen Sie sich nun mit dem im Folgenden beschriebenen Unterprogramm zur freien ungedämpften Schwingung vertraut.

Unterprogramm „Free Undamped Oscillation“

Programmaufbau

Das Fenster des Unterprogramms zur freien Schwingung teilt sich in drei Bereiche (siehe auch Abbildung 15):

- Echtzeitanzeige: sie zeigt unmittelbar den Schwingungsverlauf an.
- Messwerttabelle: in ihr werden die durch Messung ermittelten Werte durch das Programm automatisch eingetragen. In die linke Spalte erfolgt eine Nummerierung der Schwingungsperioden, in der rechten Spalte wird die Dauer der entsprechenden Periode eingetragen. Am unteren Rand der Tabelle werden nach der Messung die mittlere Schwingungsdauer und deren Standardabweichung angezeigt.

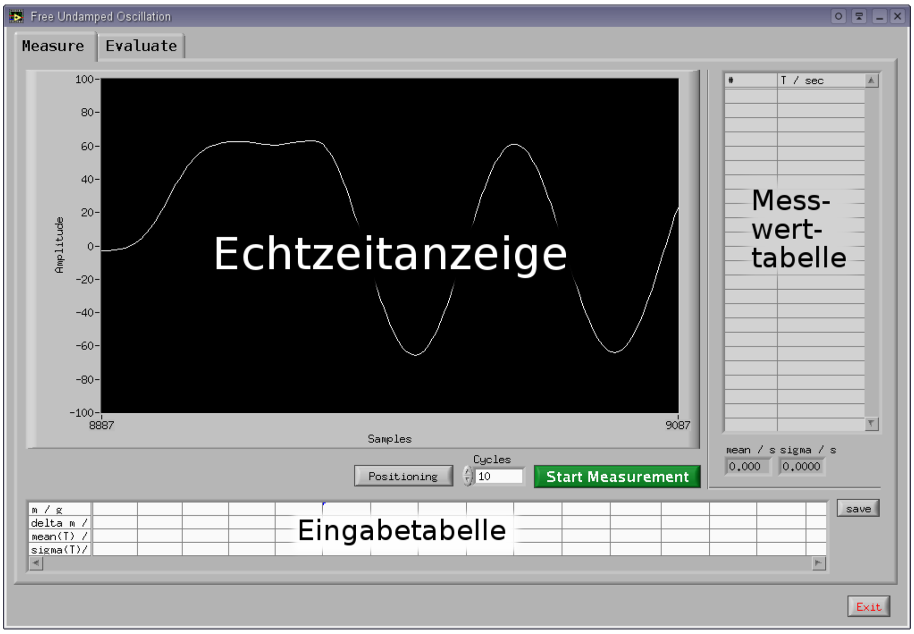

Abbildung 15: Aufbau des Datennahmefensters des Unterprogramms „Free Undamped Oscillation“

- Eingabetabelle: sie dient dem Eintragen der zu einer Messung gehörenden Werte
  - Masse
  - Messfehler der Waage
  - mittlere Schwingungsdauer
  - Standardabweichung der Schwingungsdauer

  Das Eintragen erfolgt nicht automatisch, da zuvor die ermittelten Werte auf Plausibilität zu prüfen sind.

  Hinweis: Verwenden Sie bei der Eingabe ein **Dezimalkomma** statt des Dezimalpunkts!

Ablauf einer Messung

Um die freien ungedämpften Schwingungen zu untersuchen, werden mehrere Messungen mit unterschiedlichen Schwingmassen vorgenommen. Für jede Masse werden folgende drei Schritte durchgeführt:

1. Masse anbringen und positionieren

   Nachdem an der Apparatur eine Masse angebracht wurde, ist die Schwingmasse in die Nulllage zu positionieren. Zur Unterstützung dient das Positionierungsfenster, das durch Klick auf 

aufgerufen wird.

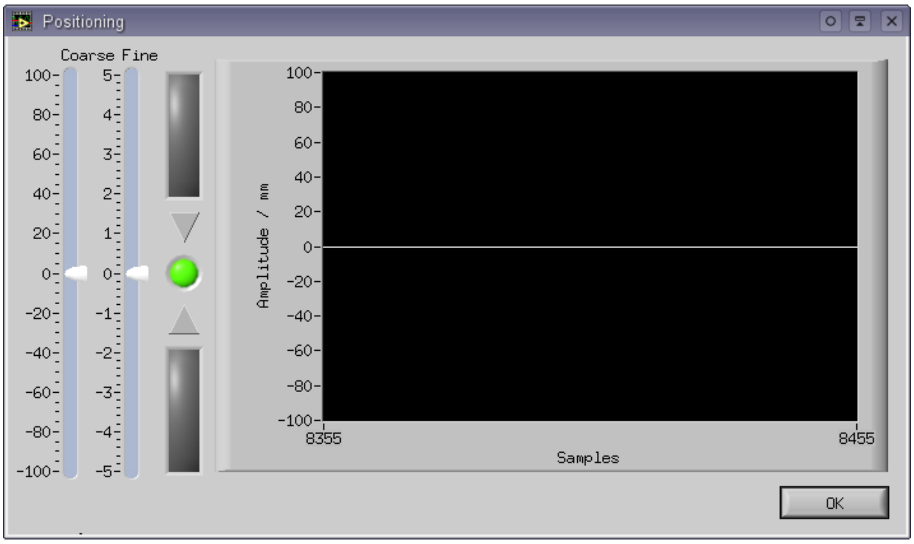

Abbildung 16: Positionierungsfenster: die Nullpunktseinstellung ist in Ordnung

Im Positionierungsfenster werden sowohl die aktuelle Position in einer groben und feinen Auflösung als auch der Bewegungsverlauf in einer Echtzeitanzeige dargestellt. Besonderes Augenmerk kommt den Indikatoren zu, die die Korrekturrichtung andeuten. Leuchtet der obere Indikator rot, so ist die Masse am Versuchsaufbau abzusenken, leuchtet der untere Indikator rot, ist die Masse anzuheben. Ist die Masse innerhalb des Nullbereichs leuchtet der Nullindikator grün (siehe Abbildung 16).

Tipp: Unter Umständen tun Sie sich leichter, wenn Sie während der Nullpunktseinstellung den Dämpfungsstrom einschalten. Der Dämpfungsstrom darf die auf dem Elektromagnet angegebene Stromstärke nicht übersteigen.

2. Datennahme starten

   Zuerst stellt man die gewünschte Anzahl der zu messenden Schwingungsperioden mit  ein. Nun versetzt man die Masse in Schwingung, indem man die Umlenkrolle auslenkt und loslässt.

   Nachdem sich eine saubere Schwingung eingestellt hat, startet man die Messung mit . In der Messwerttabelle werden nun die erfassten Werte nacheinander eingetragen.

   Die Messung kann jederzeit durch Klick auf  abgebrochen werden.

   Nachdem die Messung beendet wurde, werden Mittelwert und Standardabweichung der erfassten Periodendauern berechnet und angezeigt (siehe Abbildung 17).

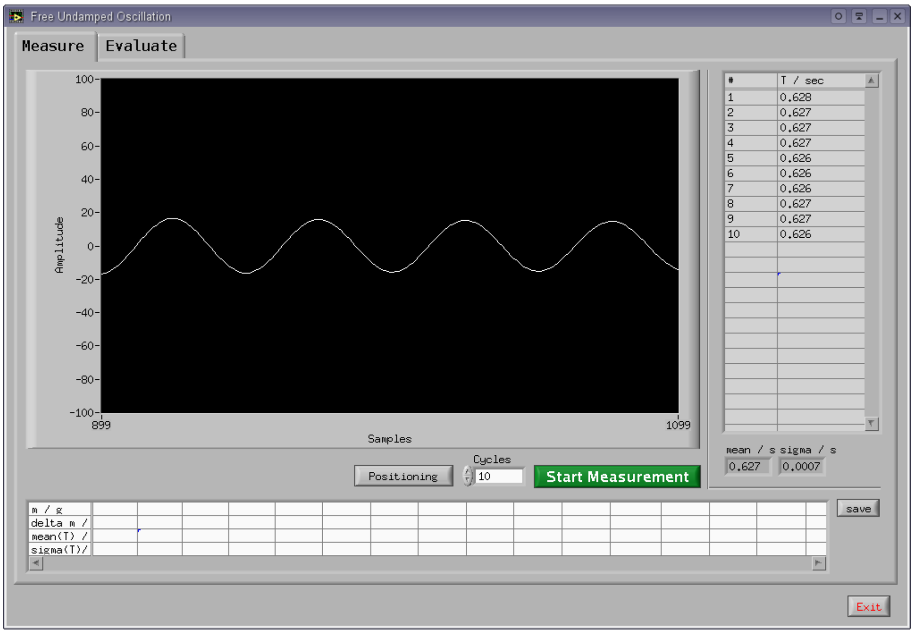

Abbildung 17: Datennahmefenster nach einer Messung

3. Messwerte in die Eingabetabelle übertragen

   Mittelwerte und Standardabweichung sind auf Plausibilität zu prüfen und in die Eingabetabelle einzutragen (siehe Abbildung 18). Gegebenenfalls ist die Messung zu wiederholen.

   Auf diese Art können die mittleren Periodendauern für verschiedene Massen gemessen und die ermittelten Werte in die Tabelle eingetragen werden. Die dort eingetragenen Werte werden bei einer neuen Messung nicht gelöscht.

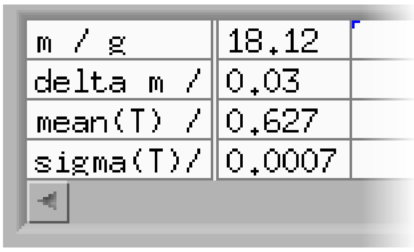

Abbildung 18: Eintragen von Mittelwert und Standardabweichung in die Eingabetabelle

Evaluierung der Schwingungsdauern

Durch Wahl des Evaluierungsfensters werden die tabellierten Werte im m-T_0^2-Diagramm dargestellt (siehe Abbildung 19).

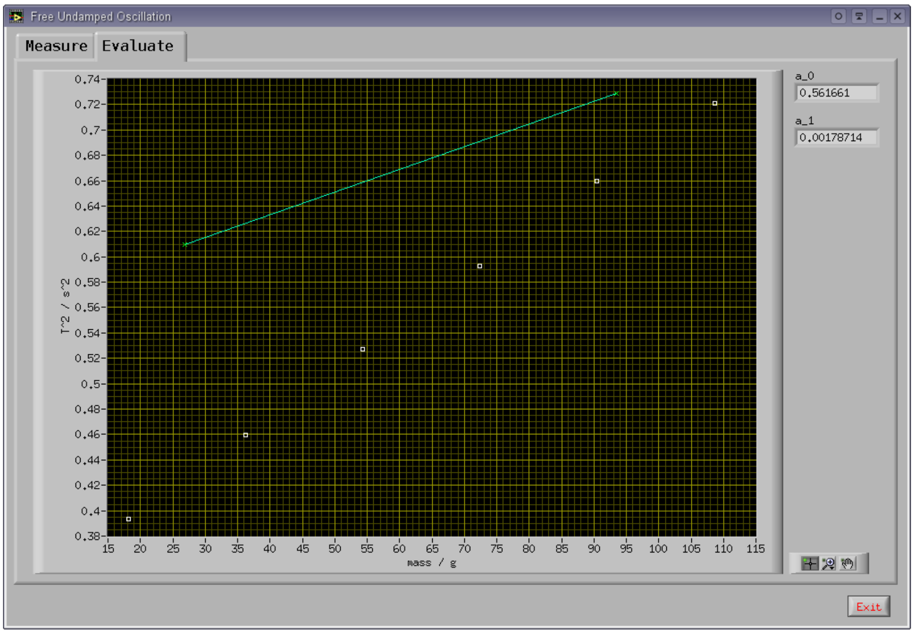

Abbildung 19: Evaluierungsfenster

Sollten nicht alle Werte sichtbar sein, können Sie über das Zoom-Menü den angezeigten Ausschnitt anpassen (siehe Abbildung 20). Das Zoom-Menü erhalten Sie durch Klick auf das Lupensymbol rechts unten neben dem Koordinatensystem.

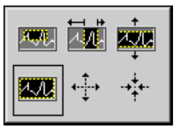

Abbildung 20: Zoom-Menü

Im Evaluierungsfenster befindet sich eine Gerade an deren sichtbaren Enden sich „Anfasser“ befinden, mit denen die Gerade (möglichst optimal) über die Messwerte gelegt werden kann. Rechts oben neben dem Koordinatensystem werden die Werte für den Ordinatenabschnitt und die Steigung der Geraden angezeigt:

- a_0: Ordinatenabschnitt a_0
- a_1: Steigung a_1

Messungen

- Bestimmen Sie für fünf Schwingmassen die zugehörigen mittleren Schwingungsdauern, indem Sie auf der dünnen Stange der Reihe nach 2, 3, 4, 5 und 6 Zylinder befestigen. Notieren Sie die gemessenen mittleren Schwingungsdauern.
- Legen Sie im Evaluierungsfenster der DAQ-Software eine möglichst optimale Ausgleichsgerade in das m-T_0^2-Diagramm.
- Notieren Sie die Steigung und den Ordinatenabschnitt der Ausgleichsgeraden.
  (Die Auswertung erfolgt später ohne Unsicherheit der Steigung und des Ordinatenabschnittes. Bei Interesse können Sie durch Variation der Ausgleichsgeraden abweichende Werte für Steigung und Ordinatenabschnitt notieren.)

4.3 Teilversuch 3: Gedämpfte freie Schwingung

Vorbereitung der Schwingungsapparatur

- Überprüfen Sie, ob die Stange noch berührungslos durch die Mitte der Führungsöse läuft.
- Schalten Sie das Netzgerät für den Dämpfungsmagneten ein. Stellen Sie den Dämpfungsstrom zunächst auf die Hälfte des am Elektromagneten angegebenen Wertes ein.
- Schieben Sie alle sechs Zylinder auf die Stange.
- Führen Sie die Nullpunktseinstellung wie bei der freien ungedämpften Schwingung durch.

Machen Sie sich nun mit dem im Folgenden beschriebenen Unterprogramm zur freien gedämpften Schwingung vertraut.

Unterprogramm „Free Damped Oscillation“

Programmaufbau

Das Fenster zur Messung der freien gedämpften Schwingung enthält folgende Elemente (siehe auch Abbildung 21):

- Echtzeitvorschau
- Messwerttabelle
- die bereits bekannten Schaltflächen zum
  - Starten der Positionierung
  - Einstellen der zu messenden Schwingungszahl
  - Starten/Beenden der Messung
- „Live Update“-Schalter zum Starten/Stoppen der Echtzeitvorschau

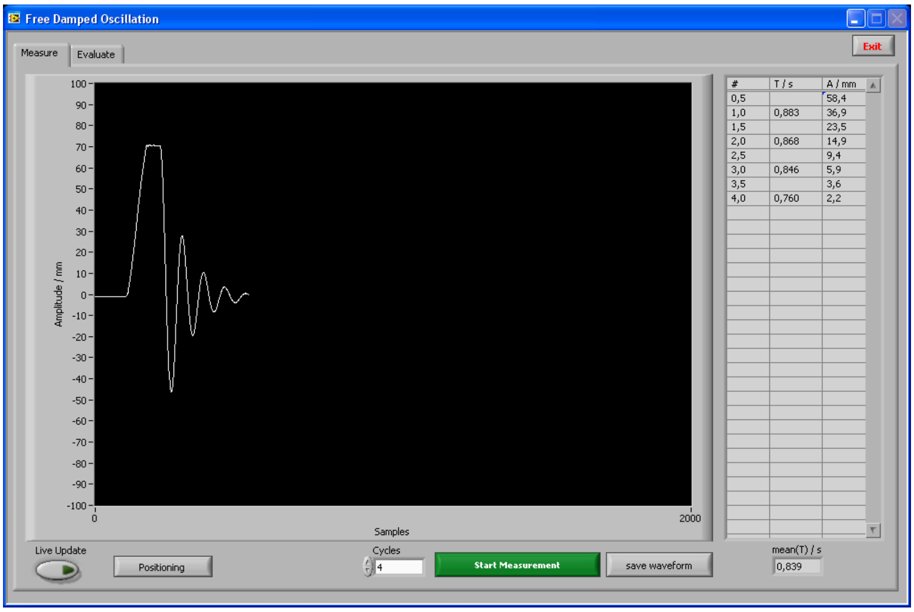

Abbildung 21: Messfenster: Freie gedämpfte Schwingung

Ablauf einer Messung

1. Schwingungszahl einstellen. Bei großer Dämpfung werden nur wenige Schwingungen durchlaufen.
2. Starten der Messung mit Start Measurement und danach die Umlenkrolle auslenken und loslassen.

3. Die Messung in der Echtzeitvorschau verfolgen. Sollte die Schwingung bereits vor der eingestellten Schwingungszahl abgeklungen sein, so ist die Messung mit Finish Measurement abzuschließen

Ist die eingestellte Schwingungszahl erreicht, wird die Echtzeitvorschau automatisch gestoppt, sodass der Schwingungsverlauf nachvollzogen werden kann.

Evaluierung der Amplitude

Zur Evaluierung werden die Messwerte wieder in einem kartesischen Koordinatensystem aufgetragen. Die Achsen sind:

- Abszisse: Nummer der Schwingung
- Ordinate: Logarithmus der Amplitude

Die Evaluierung der Messwerte erfolgt analog zu der freien ungedämpften Schwingung, d. h. es wird eine Gerade angezeigt, die mit Hilfe von zwei „Anfassern" über die Messpunkte gelegt wird.

Messung

- Erzeugen Sie zur qualitativen Anschauung eine Kurve des Amplitudenverlaufs mit vielen Schwingungen für den halben Dämpfungsstrom.
- Stellen Sie den Dämpfungsstrom nun auf den am Elektromagneten angegebenen Wert ein. Dieser wird für einen Vergleich der Ergebnisse in Teilversuch 4 benötigt.
- Führen Sie eine Messung für den vollen Dämpfungsstrom durch.
- Notieren Sie Amplitude und Schwingungsdauer der beobachtbaren Maxima und Minima für den vollen Dämpfungsstrom in zeitlicher Reihenfolge.
- Legen Sie im Evaluierungsfenster der DAQ-Software eine möglichst optimale Ausgleichsgerade in das Diagramm. Überlegen Sie zunächst welche Messpunkte Sie einbeziehen und welche Sie ignorieren sollten.
- Notieren Sie Steigung und Ordinatenabschnitt der Ausgleichsgeraden.

4.4 Teilversuch 4: Erzwungene Schwingungen

Vorbereitung der Schwingungsapparatur

- Überprüfen Sie, ob die Stange noch berührungslos durch die Mitte der Führungsöse läuft.
- Lassen Sie den in Teilversuch 3 eingestellten Dämpfungstrom und die Schwingmasse unverändert, damit ein Vergleich der Messwerte möglich ist.
- Schalten Sie den Erreger ein, indem Sie den Kippschalter an der Schwingungsapparatur auf LOC stellen.[6]
- Sie können nun an der Schwingungsapparatur über den Drehknopf mit der Bezeichnung „Frequency“ die Erregerfrequenz variieren. Probieren Sie es aus!

Vorbemerkung

Es ist unbedingt darauf zu achten, dass die Dämpfung eingeschaltet ist. Sonst kann es während des Versuchs bei Anregungsfrequenzen nahe der Resonanzfrequenz zur Resonanzkatastrophe kommen. Dies äußert sich darin, dass die Schnur aus der Führungsrolle springt und neu eingefädelt werden muss. Nachdem die Resonanzfrequenz am Ende des Versuchs ermittelt und alle Messungen durchgeführt wurden, kann dies ausprobiert werden. Viel Spaß!

Machen Sie sich nun mit dem im Folgenden beschriebenen Unterprogramm zur erzwungenen Schwingung vertraut.

Unterprogramm „Driven Oscillation“

Programmaufbau

Das Fenster zur Datennahme ist ähnlich dem der Messung der freien ungedämpften Schwingung aufgebaut (siehe Abbildung 22). Die Funktionsweise der Messwerttabelle und der Eingabetabelle ist analog. Es werden nun folgende Größen gemessen:

- Die Frequenz des Erregers
- Die Periodendauer des Oszillators
- Die Amplitude des Oszillators
- Die Phasenverschiebung zwischen Oszillator und Erreger

Die aktuelle Frequenz des Erregers wird in der DAQ-Software unterhalb des Schiebereglers für die (nicht verwendete) Motorsteuerung angezeigt.

[6] Mit der Schalterstellung REM wird der Erregermotor der Schwingungsapparatur durch die DAQ-Software steuerbar. Von diesem Modus sollten Sie aber keinen Gebrauch machen!

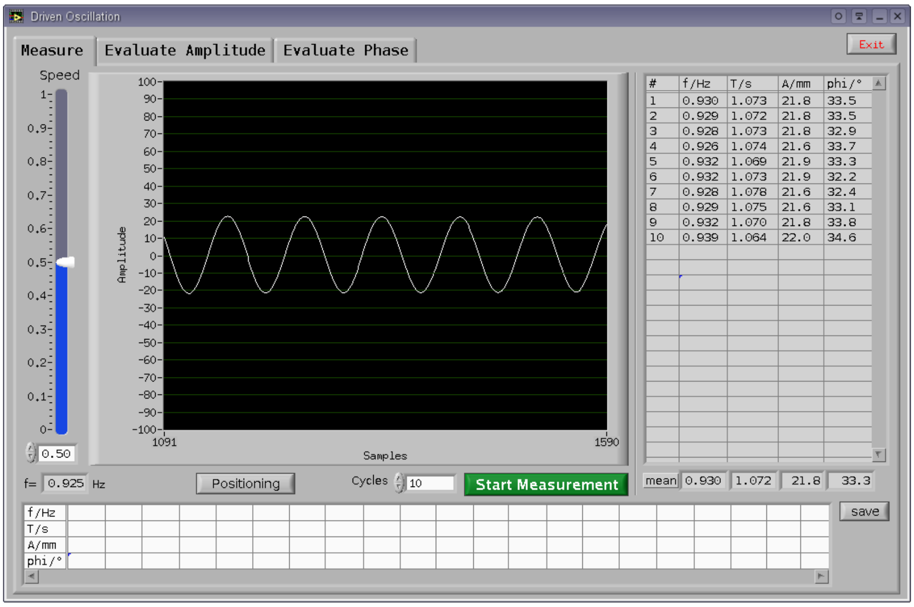

Abbildung 22: Messfenster zur erzwungenen Schwingung

Ablauf einer Messung

1. Einstellen der Nullposition: Da der Oszillator permanent zu Schwingungen angeregt wird, muss eine dynamische Nullpunktseinstellung erfolgen.

   Stellen Sie hierzu die Erregerfrequenz auf ca. 1 Hz. Nach einer kurzen Einschwingzeit ergibt sich eine Sinuskurve. Variieren Sie nun die Nullpunktseinstellung so, dass die oberen und unteren Scheitelpunkte der Schwingung den gleichen Abstand zur Nulllinie haben.

2. Stellen Sie die Erregerfrequenz nun so ein, dass sich der Motor in der gewünschten Erregerfrequenz gleichmäßig dreht (z.B. 0,5 Hz).

3. Die gewünschte Zahl der zu messenden Schwingungen einstellen (z. B. fünf Schwingungen).

4. Nun in bekannter Art die Messung starten. Ein Abbruch ist jederzeit möglich.

5. Die ermittelten Werte auf Plausibilität prüfen und in die Eingabetabelle übertragen.

Messung

- Messen Sie die Amplitude des Erregers.

- Messen Sie für etwa 15 geeignete Erregerfrequenzen: Amplitude, Phasenverschiebung und Schwingungsdauer des Oszillators. Ihre Messungen sollten die kleinstmögliche und die größtmögliche einstellbare Erregerfrequenz enthalten.

- Notieren Sie für alle gewählten Erregerfrequenzen die erhaltenen Mittelwerte für: die Frequenz des Erregers, die Schwingungsdauer des Oszillators, die Amplitude des Oszillators und die Phasenverschiebung zwischen Oszillator und Erreger.
- Legen Sie im Evaluierungsfenster der Amplitudenmessung eine Kurve in das f-A-Diagramm (siehe Evaluierung der Amplitudenmessung).
- Notieren Sie die durch die Anpassung der Kurve an den gemessenen Amplitudenverlauf erhaltenen Werte für $\hat{x}_A$, f_0 und β.
- Legen Sie im Evaluierungsfenster der Phasenmessung eine Kurve in das f-φ-Diagramm (siehe Evaluierung der Phasenmessung).
- Notieren Sie die durch Anpassung des Phasenverlaufs erhaltenen Werte für f_0 und β.
- Finden Sie die Resonanzfrequenz. Messen Sie an der Stelle der Resonanzfrequenz: Amplitude und Phasenverschiebung zwischen Oszillator und Erreger.

Evaluierung der Amplitudenmessung

Die Evaluierung der Messwerte der angeregten Schwingung unterscheidet sich von der Evaluierung der vorhergehenden Versuche, da in diesem Fall nichtlineare Funktionen (möglichst optimal) an die Messwerte gelegt werden sollen. Im Fenster „Evaluate Amplitude“ befindet sich ein kartesisches Koordinatensystem, in dem die Anregungsfrequenz gegen die Amplitude der Schwingung aufgetragen ist, siehe Abbildung 23. Zudem wird der Graph der theoretisch ermittelten Beziehung zwischen Anregungsfrequenz und Amplitude (38) eingezeichnet. Am Anfang „klebt“ dieser an der Nulllinie. Durch „Hochziehen“ der Regler am rechten Rand sollte man ihn daher in eine gute „Startposition“ bringen. Durch Verändern der Werte der eben genannten Regler, ist die Kurve an die Messwerte anzupassen. Folgende Regler stehen zur Verfügung:

- A_0: Amplitude der Anregungsschwingung $\hat{x}_A$
- f_0: Eigenfrequenz f_0
- beta: Dämpfungskonstante β

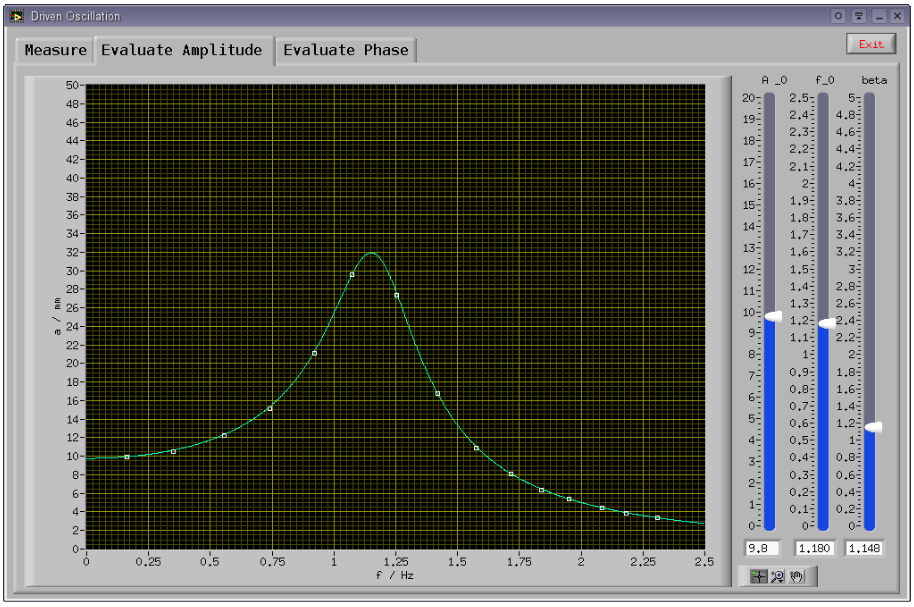

Abbildung 23: Evaluierung des Amplitudenverlaufs

Evaluierung der Phasenmessung

Im Fenster „Evaluate Phase" wird die Anregungsfrequenz gegen die Phasenverschiebung von Anregungsschwingung und angeregter Schwingung dargestellt, siehe Abbildung 24. Zudem wird der Graph der theoretisch ermittelten Beziehung zwischen Anregungsfrequenz und Phasenverschiebung ((39)) darübergezeichnet. Um ein mögliches mechanisches Verrutschen der Nullpunktseinstellung am experimentellen Aufbau zu kompensieren, können alle Messwerte um einen konstanten Phasenoffset c verschoben werden. Wieder ist durch Verändern der Regler die Kurve an die Messwerte anzupassen. Ab einer gewissen Mindestzahl an Messwerten kann man durch Drücken des Knopfes „show best curve" eine vom Computer (im Sinne des kleinsten quadratischen Fehlers) angepasste Kurve zum Vergleich heranziehen. Da wie bei allen numerischen Kurvenanpassungen keine sichere Konvergenz gewährleistet werden kann, ist es sehr zu empfehlen, vor dem Drücken dieses Knopfes eine manuelle Anpassung vorzunehmen.

Folgende Regler stehen zur Verfügung:

- f_0: Eigenfrequenz f_0
- beta: Dämpfungskonstante β
- c: Phasenoffset c

Fahren Sie den Rechner nach Ihrer letzten Messung bitte ordnungsgemäß herunter.

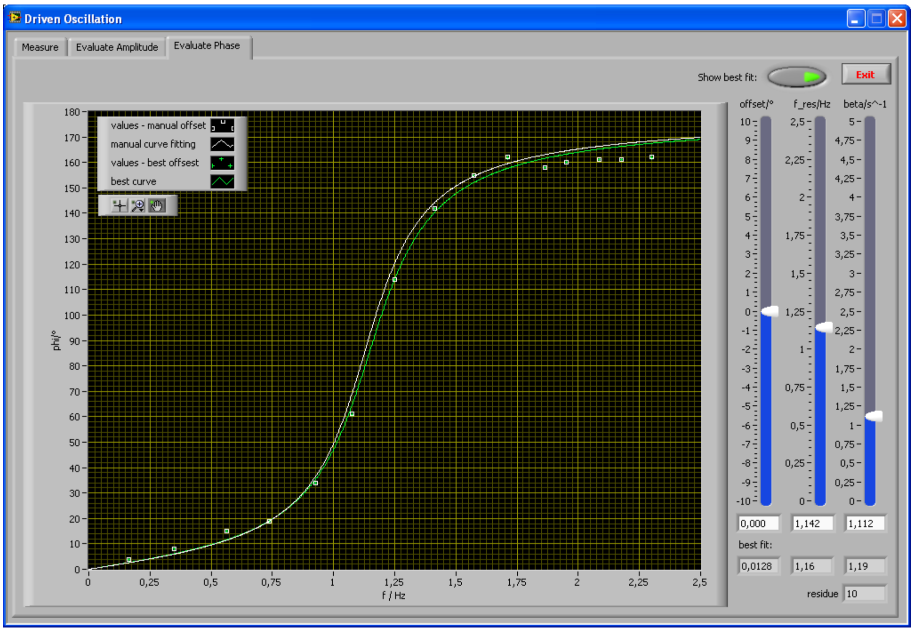

Abbildung 24: Evaluierung des Phasenverlaufs

5 Versuchsauswertung

5.1 Teilversuch 1: Schwingungsdauer eines Fadenpendels

- Berechnen Sie den Mittelwert der Schwingungsdauer $\bar{T}$.
- Leiten Sie selbst den Zusammenhang zwischen der Erdbeschleunigung g und der Schwingungsdauer T her (Herleitung und Lösung der Differentialgleichung).
- Ermitteln Sie aus $\bar{T}$ die Erdbeschleunigung g für den Standort des Experiments und bestimmen Sie die Unsicherheit von g (Gaußsche Näherungsformeln).
- Vergleichen Sie Ihren Wert für g mit dem Literaturwert $g = 9{,}8073\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ für München.
- Bestimmen Sie für Ihre Messungen (ohne Unsicherheitsberechnung) jeweils die Beschleunigung g aus den Messwerten des variablen g-Pendels. Wie hängt die Beschleunigung vom Neigungswinkel ab? Wie hängt die Beschleunigung von der Pendellänge ab?
- Wie ändert sich die Schwingungsfrequenz eines Pendels, wenn es statt auf der Erde auf dem Mond schwingen würde?

5.2 Teilversuch 2: Ungedämpfte freie Schwingung

- Die DAQ-Software hat Ihnen für jede Schwingmasse die mittlere Schwingungsdauer $\bar{T}_0$ inkl. Unsicherheit geliefert. Berechnen Sie daraus jeweils die Frequenz der freien ungedämpften Schwingung f_0.
- Bestimmen Sie mit (22) aus der Steigung Ihrer im Versuch angepassten Gerade die Federkonstante k der Schraubenfeder (ohne Unsicherheitsberechnung).
- Geben Sie für die im Versuch angepasste Gerade mit dem erhaltenen Ordinatenabschnitt a_0 die Nullstelle der Gerade an (ohne Unsicherheitsberechnung).
- Geben Sie eine physikalische Interpretation für den Wert der Nullstelle an.

5.3 Teilversuch 3: Gedämpfte freie Schwingung

- Die DAQ-Software hat Ihnen die mittlere Schwingungsdauer $\bar{T}$ geliefert. Berechnen Sie damit die Frequenz der gedämpften Schwingung.
- Vergleichen Sie die Frequenz der gedämpften Schwingung mit der entsprechenden Frequenz f_0 der ungedämpften Schwingung.
- Bestimmen Sie mithilfe der im Versuch angepassten Gerade das logarithmische Dekrement Λ.
- Berechnen Sie mit (32) aus Λ und der mittleren Schwingungsdauer $\bar{T}$ die Dämpfungskonstante β.

- Berechnen Sie mit (34) aus Λ und der Schwingungsdauer $\bar{T}_0$ des ungedämpften Oszillators die Schwingungsdauer des gedämpften Oszillators und vergleichen Sie den Wert mit dem experimentellen Wert.

5.4 Teilversuch 4: Erzwungene Schwingung

- Berechnen Sie aus den mittleren Schwingungsdauern die Frequenzen der erzwungenen Schwingungen und vergleichen Sie diese mit den Frequenzen des Erregers.
- Vergleichen Sie die im Experiment gefundene Resonanzfrequenz f_{res} mit der Frequenz f_0 der freien ungedämpften Schwingung und der Frequenz der freien gedämpften Schwingung.
- Berechnen Sie mit (40) aus der Kreisfrequenz ω_0 der freien ungedämpften Schwingung und der Dämpfungskonstanten β der gedämpften freien Schwingung die Resonanzkreisfrequenz ω_{res}.
- Vergleichen Sie die Werte für β aus der gedämpften freien Schwingung, der Evaluierung des Amplitudenverlaufs und der Evaluierung des Phasenverlaufs.
- Berechnen Sie mit (39) die Phasenverschiebung zwischen Oszillator und Erreger für die drei Fälle: $\omega = 0$, $\omega \to \omega_0$ und $\omega \to \infty$ und vergleichen Sie diese Werte mit den experimentell gefundenen Werten.