

## AFINNÉ TRANSFORMÁCIE

**Definícia 0.1.** Zobrazenie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa nazýva *afinné*, ak

- zachováva kolinearitu (t.j. priamka sa zobrazí buď na priamku alebo na jeden bod),
- zachováva deliaci pomer (t.j. ak pre kolineárne body  $A, B, C$  platí  $C - A = \lambda(B - A)$  pre nejaké  $\lambda \in \mathbb{R}$ , potom aj  $f(C) - f(A) = \lambda(f(B) - f(A))$ ).

Afinné zobrazenie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sa nazýva *transformáciou priestoru*  $\mathbb{R}^n$ , ak je invertibilné.

**Tvrdenie 0.2.** Zobrazenie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_m)$  je *afinné*, ak existujú také konštanty  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ , že pre všetky body platí

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + c_{10} \\ x'_2 &= c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n + c_{20} \\ &\dots \\ x'_m &= c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n + c_{m0}. \end{aligned}$$

Pre  $m = n$  je takéto zobrazenie transformáciou, ak determinant  $|c_{ij}|_{i,j=1}^n \neq 0$ .

### 1. TRANSFORMÁCIE V $\mathbb{R}^2$

Podľa predchádzajúceho sa každá afinná transformácia dá popísať rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{10} \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{20}, \end{aligned} \quad \text{kde} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Reálne čísla  $c_{ij}$  jednoznačne popisujú túto afinnú transformáciu.

*Posunutie* o vektor  $(t_x, t_y)$  je afinná transformácia, možno ju popísať lineárnymi rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y. \end{aligned}$$

*Škálovanie* (v smere súradnicových osí) je popísané rovnicami

$$\begin{aligned} x' &= s_x x \\ y' &= s_y y, \quad \text{pričom } s_x, s_y \neq 0. \end{aligned}$$

Ide o škálovanie so stredom  $(0, 0)$ .

**Príklad 1.1.** Ak by sme chceli popísať transformáciu škálovania so stredom  $(a, b)$ , ktorý nie je počiatkom súradnicovej sústavy, je možné túto transformáciu získať zložením troch známych:

- (1)  $T_{(-a, -b)}$  – posunutie o vektor  $(-a, -b)$ , ktorým stred škálovania posunieme do začiatku súradníc,
- (2)  $S_{s_x, s_y}$  – škálovanie s požadovanými škálovacími faktormi  $s_x, s_y$ ,
- (3)  $T_{(a, b)}$  – posunutie naspäť.

Výsledkom je teda transformácia  $T_{(a, b)} \circ S_{s_x, s_y} \circ T_{(-a, -b)}$ . Jej rovnice sa dajú získať postupným dosadzovaním transformovaných súradníc do jednotlivých rovníc, ale pre potreby implementácie je vhodné prepísať rovnice týchto zobrazení pomocou matíc.

Užitočným sa ukazuje používanie rozšírených súradníc. Bod so súradnicami  $(a, b)$  resp. vektor so súradnicami  $(u, v)$  budeme reprezentovať  $3 \times 1$  maticou

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom posunutie o vektor  $(t_x, t_y)$  sa sa zapíše

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

škálovanie zas vyzerá nasledovne

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Každá z týchto transformácií je teda jednoznačne popísaná svojou maticou s rozmermi  $3 \times 3$ . Ak v predchádzajúcom príklade označíme maticu posunutia o  $(-a, -b)$  ako  $M_1$ , maticu škálovania ako  $M_2$  a maticu posunutia o  $(a, b)$  ako  $M_3$ , máme nasledovný zápis:

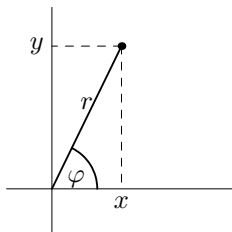
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= T_{(a,b)} \circ S_{s_x, s_y} \circ T_{(-a, -b)} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right) = T_{(a,b)} (S_{s_x, s_y} (T_{(-a, -b)} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right))) = \\ &= T_{(a,b)} (S_{s_x, s_y} (M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix})) = T_{(a,b)} (M_2 M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}) = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže výsledná transformácia škálovania so stredom  $(a, b)$  je tiež popísaná  $3 \times 3$  maticou, a síce maticou  $M_3 M_2 M_1$ . Vidíme, že skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matic.

Ďalšou dôležitou afinnou transformáciou roviny je *otočenie* okolo bodu  $(0, 0)$ . Pre odvodenie rovníc si pripomenieme polárne súradnice bodu. Každý bod  $X$  v  $\mathbb{R}^2$  je reprezentovaný dvoma číslami  $r$  a  $\varphi$ , kde  $r \geq 0$  vyjadruje vzdialenosť bodu od začiatku súradníc  $O$  a  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  je orientovaný uhol, ktorý zvierá polpriamka  $\vec{OX}$  s kladným smerom  $x$ -osi. Medzi kartézskymi a polárnymi súradnicami máme vzťah

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Po otočení o uhol  $\alpha$  budú polárne súradnice transformovaného bodu  $r, \varphi + \alpha$ . Teda pre kartézske



OBR. 1. Kartézske a polárne súradnice bodu

súradnice máme

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\varphi + \alpha) = r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= r \sin(\varphi + \alpha) = r \cos \varphi \sin \alpha + r \sin \varphi \cos \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

Takže dostávame nasledovný maticový zápis otočenia okolo  $(0, 0)$  o uhol  $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spomedzi špeciálnych afinných transformácií si ešte spomeňme zrkadlenie a skosenie. *Zrkadlenie* je len alternatívne meno pre osovú súmernosť: zrkadlenie podľa osi  $x$  je popísané maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a podobne zrkadlenie podľa osi  $y$  maticou

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pri každom zrkadlení je potrebné si uvedomiť, že ide o transformáciu, ktorá mení orientáciu roviny.

Keď hovoríme o *orientácii roviny*, máme na mysli orientáciu objektov v rovine a tiež orientáciu súradnicovej sústavy. Hovoríme, že sústava súradníc je *kladne orientovaná*, ak kladná  $y$ -poloos je otočením kladnej  $x$ -poloosi o pravý uhol proti smeru pohybu hodinových ručičiek, v opačnom prípade je súradnicová sústava orientovaná *záporne*. Ak pripúšťame, že súradnicové osi na seba nemusia byť kolmé, je súradnicová sústava kladne orientovaná, ak je kladná  $y$ -poloos otočením  $x$ -ovej o uhol v intervale  $(0, \pi)$  proti smeru hodinových ručičiek.

Orientáciu ďalej spájame aj s mnohouholníkmi. Vravíme napríklad, že trojuholník  $ABC$  je kladne orientovaný, ak jeho vrcholy sú vymenované proti smeru hodinových ručičiek. Podobne orientujeme ostatné mnohouholníky bez samopriesekov.

Taktiež hrá orientácia rolu pri meraní a určovaní uhlov. Napríklad pri otáčaní o daný uhol otáčame vždy v smere sústavy súradníc, čiže pri kladnej orientácii je to proti smeru hodinových ručičiek.

Tým, že nejaká transformácia mení orientáciu, máme na mysli, že obrazom kladne orientovanej sústavy súradníc je záporne orientovaná súradnicová sústava a naopak. Po prevedení transformácie zvyčajne zavádzame novú súradnicovú sústavu, ktorá má pôvodnú (spravidla kladnú) orientáciu. Nové súradnice bodu  $(x', y')$  sú súradnice vzhľadom na túto novú sústavu. Avšak treba mať na pamäti, že orientácia objektov v rovine (napr. trojuholníkov) sa zmenila.

Nakoniec *skosenie* v smere  $x$  je transformácia, ktorá zachováva  $y$ -súradnicu bodu, a  $x$ -súradnica sa modifikuje lineárne v závislosti od vzdialenosti od  $x$ -osi. Zodpovedajúca matica je

$$\begin{pmatrix} 1 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobne máme skosenie v smere osi  $y$  popísané maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vo všeobecnosti, každá afinná transformácia roviny sa dá zapísať pomocou  $3 \times 3$  matice, ktorá má 6 stupňov voľnosti:

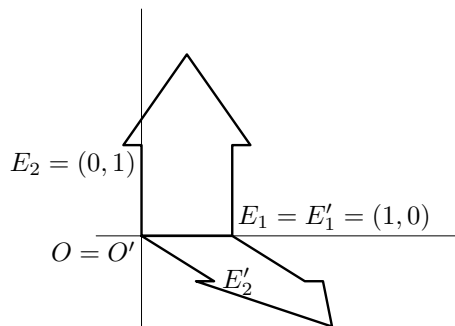
$$(1) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{10} \\ c_{21} & c_{22} & c_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Táto matica je regulárna, keďže jej ľavá horná  $2 \times 2$  podmatica je regulárna. Opačná transformácia je potom popísaná maticou inverznou k  $3 \times 3$  matici v rovnici (1).

**Tvrdenie 1.2.** *Afinná transformácia  $\mathbb{R}^2$  je určená obrazmi troch nekolineárnych bodov.*

Teda ak chceme nájsť maticu nešpecifickej afinnej transformácie (čiže nejde o jednoduchú kombináciu posunutí, rotácií a podobne), môžeme postupovať aj tak, že si zvolíme tri nekolineárne body a popíšeme ich obrazy. Potom je už možné dopočítať všetky potrebné konštanty  $c_{ij}$ .

**Príklad 1.3.** Nájdime rovnice afinnej transformácie, ktorá domček na obrázku zobrazí na jeho tieň.



OBR. 2. Afinná transformácia

*Riešenie.* Body  $O$  a  $E_1$  necháva transformácia pevné, bod  $E_2$  sa zobrazí na  $E_2'$  so súradnicami  $(0.8, -0.5)$ . Bod  $O$  a jeho obraz nám dávajú lineárne podmienky na konštanty  $c_{ij}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{10} \\ c_{21} & c_{22} & c_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a teda dostávame  $c_{10} = c_{20} = 0$ . Podobne si do (1) dosadíme súradnice bodu  $E_1$  a jeho obrazu  $E_1'$  a zistíme, že  $c_{11} = 1$  a  $c_{21} = 0$ . Napokon zo súradníc bodu  $E_2$  a jeho obrazu  $E_2'$  máme, že  $c_{12} = 0.8$  a  $c_{22} = -0.5$ . Výsledná matica hľadaného zobrazenia je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Dôležitou podmaticou matice v (1) je ľavá horná  $2 \times 2$  podmatica

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Z definície už máme, že  $\det A \neq 0$ . Pre túto maticu ďalej platí

**Tvrdenie 1.4.** *Afinná transformácia (1) mení orientáciu roviny práve vtedy, keď  $\det A < 0$ .*

**Tvrdenie 1.5.** *Afinná transformácia (1) je euklidovská (zachováva vzdialenosti) práve vtedy, keď  $AA^T = I_2$ .*

## 2. TRANSFORMÁCIE V $\mathbb{R}^3$

Podobne ako v rovine máme afinnú transformáciu  $\mathbb{R}^3$  popísanú lineárnymi rovnicami

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{10} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{20} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Tvrdenie 2.1.** *Afinná transformácia  $\mathbb{R}^3$  je úplne určená obrazmi štyroch nekoplanárnych bodov.*

Keď si znovu  $3 \times 3$  podmaticu  $(c_{ij})_{i,j=1}^3$  označíme ako  $A$ , môžeme popísať podobné vlastnosti ako pri transformáciách roviny:

**Tvrdenie 2.2.** *Afinná transformácia (2) je euklidovská (zachováva vzdialenosti) práve vtedy, keď  $AA^T = I_3$ .*

**Tvrdenie 2.3.** *Afinná transformácia (2) mení orientáciu priestoru práve vtedy, keď  $\det A < 0$ .*

Pre nás kladne orientovaný priestor (kladne orientovaná súradnicová sústava) je určený pravidlom pravej ruky: prsty (okrem palca) naznačujú smer otočenia od  $x$ -osi k  $y$ -osi a palec potom ukazuje smer osi  $z$ . Hovoríme tiež o pravotočivej orientácii. V opačnom prípade hovoríme o ľavotočivej alebo zápornej orientácii.

*Posunutie* a *škálovanie* v priestore je popísané analogickým spôsobom ako v rovine a nemalo by spôsobovať žiadne ťažkosti. Základné *zrkadlenia* máme v priestore tri, vždy podľa jednej zo súradnicových rovín a tiež by nemalo byť problematické napísať maticu žiadneho z nich.

Afinných transformácií *skosenia* máme v priestore 6 základných druhov. Pri každom si určíme, ktorá zo súradnicových rovín bude pevná vzhľadom na transformáciu, a tiež v smere ktorej osi sa bude skosenie prevádzať. Napríklad, skosenie v smere  $y$ -osi s pevnou  $yz$ -rovinou je popísané maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pod *otáčaním* v priestore sa myslí otáčanie okolo zvolenej osi. Navyše os rotácie chápeme ako orientovanú priamku. Vtedy v pravotočivej súradnicovej sústave určíme smer otáčania zase podľa pravidla pravej ruky: nech palec ukazuje orientáciu osi rotácie, potom ostatné prsty naznačujú smer rotácie. Špeciálne v prípade rotácií okolo súradnicových osí si toto pravidlo môžeme interpretovať nasledovne: pri rotácii okolo  $z$ -osi sa otáča v smere od  $x$ -osi ku  $y$ , pri rotácii okolo  $x$ -osi sa otáča v smere od  $y$ -osi ku  $z$  a napokon pri rotácii okolo  $y$ -osi sa otáča v smere od  $z$ -osi ku  $x$ .

Uvedme si teraz rovnice otáčania okolo osi  $z$  o uhol  $\alpha$ . Ak sa obmedzíme iba na  $xy$ -rovinu prípadne ktorúkoľvek inú rovinu s ňou rovnobežnú, ide vlastne o otáčanie v rovine okolo počiatku  $(0,0)$ . Teda máme rovnice

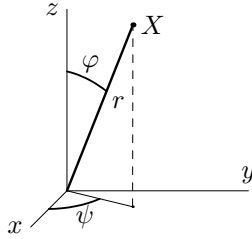
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otáčanie okolo zvyšných dvoch osí osí dostaneme cyklickou zámenou súradníc  $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$ . Napríklad matica rotácie okolo osi  $x$  je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skúsme teraz nájsť maticu rotácie okolo ľubovoľnej osi, ktorá nech zatiaľ prechádza začiatkom súradníc. Podobne ako pri transformáciách roviny sa pokúsime previesť úlohu na známy prípad. Skúsime najprv aplikovať na scénu známe otočenia tak, aby os rotácie splynula s niektorou z osí.

Keďže podľa predpokladu os rotácie prechádza bodom  $(0,0,0)$ , je os jednoznačne určená ďalším svojím bodom  $X = (x, y, z)$ . Nech tento bod (presnejšie polohový vektor tohoto bodu) určuje aj orientáciu osi. Nájdeme si najprv sférické súradnice  $r, \varphi, \psi$  bodu  $X$ . Máme vzťah medzi



OBR. 3. Sféricke súradnice bodu

sférickými a kartézskymi súradnicami:

$$x' = r \sin \varphi \cos \psi$$

$$y' = r \sin \varphi \sin \psi$$

$$z' = r \cos \varphi.$$

Potom otáčanie okolo osi  $OX$  o uhol  $\alpha$  môžeme zložiť napríklad z nasledovných transformácií:

- (1) otočenie o uhol  $-\psi$  okolo osi  $z$  (os rotácie sa dostane do roviny  $xy$ ),
- (2) otočenie o uhol  $-\varphi$  okolo osi  $y$  (os rotácie splynie s osou  $z$ ),
- (3) otočenie o uhol  $\alpha$  okolo osi  $z$ ,
- (4) otočenie o uhol  $\varphi$  okolo osi  $y$ ,
- (5) otočenie o uhol  $\psi$  okolo osi  $z$ ,

Nakoniec, nech osou rotácie je ľubovoľná orientovaná priamka. Túto úlohu zase zredukujeme na postupnosť už známych transformácií tak, že posunieme os rotácie, aby prechádzala počiatkom súradníc. Nech  $P$  je bod ležiaci na osi otáčania. Potrebné transformácie sú

- (1) posunutie o  $O - P$ ,
- (2) otočenie o uhol  $\alpha$  okolo osi, ktorá prechádza bodom  $O = (0, 0, 0)$ ,
- (3) posunutie o  $P - O$ .

KAGDM FMFI UK BRATISLAVA

*E-mail address:* jana.pilnikova@fmph.uniba.sk