



几何代数在地理信息高维空间表达中的应用

闫国年¹ 袁林旺¹ 俞肇元¹ 罗文¹ 周良辰¹ 闫振军¹

¹ 虚拟地理环境教育部重点实验室(南京师范大学),江苏 南京,210023

摘要:以欧氏几何为基础的信息框架对地理信息科学的发展起着重要作用。然而,由于欧氏空间对地理信息系统(geographic information system, GIS)中地理对象和现象的表达依赖于坐标系以及对象具体坐标,使得基于欧氏空间的地理对象表达、计算和分析难以形成多维统一的运算规则和运算框架,增加了GIS算法的复杂度,降低了GIS分析效率。几何代数是一种以维度运算为基础的结合代数,在几何代数中,空间被定义为向量集合间的运算,空间维数直接由运算法则确定,可实现高维几何计算和分析的统一。基于几何代数统一的计算与分析框架对现有GIS进行构造,能够更好地对高维对象进行表达与分析,提升对复杂地理对象与动态地理现象的表达、时空多尺度分析以及不同尺度地理模型耦合集成的能力,有助于奠定GIS向实时动态、虚实融合、全视角、全要素、全内容表达的全息地图方向发展的理论基础。

关键词:几何代数;虚拟空间;高维表达

中图分类号:P208

文献标志码:A

早期地理信息系统(geographic information system, GIS)对地理信息的表达范式是“定位+几何+属性”。随着数据处理和分析新方法的出现,语义GIS日渐得到重视,形成了“语义+空间+属性”的模式。近年来,时空数据快速积累使得大数据GIS日渐成型,地理信息的内涵极大丰富,为GIS表达提出了新的挑战。闫国年等^[1]从地理学视角发展了GIS表达的“六域模型”,尝试对地理对象和地理过程的空间定位、几何形态、属性特征、要素相互关系、演化过程和语义描述进行综合性、集成性的表达和描述。地理信息的内涵从以位置和属性为主,发展到包含定位、属性、几何、过程、关系和语义等全要素的时空地理信息。GIS表达维度的增加,使得如何从数学底层理论上建立高维表达理论成为GIS和虚拟地理环境等学科必须面对的重要科学问题。

1 研究脉络与基本思路

GIS中常用的表达空间是欧几里得空间(简称欧氏空间)和拓扑空间,分别用于描述地理对象和现象的空间位置、几何形态和拓扑关系。20世纪30年代后,数学中的各种空间在其基础结构上逐渐统一,人们对各种数学空间有了较完善的

认识;随着对物理空间认识的深入以及数学的发展,数学上的空间观念在代数、几何和拓扑等领域得到推广。如解析几何的产生建立了几何对象和代数结构之间的关联,通过建立几何对象(点、线等)并与数组结成对应关系,可以方便地对各类几何对象进行精确的定量描述。通过拓展几何对象代数表达的维度,可将坐标三维数组推广到坐标 n 维数组(向量),其所对应的空间即为 n 维线性空间或向量空间。向量空间扩展了欧几里得空间,但抽去了欧几里得空间中的距离概念,多用于多维度的特征表达与运算。代数和几何的深入融合把空间推广成仿射空间和射影空间,从而把无穷远点和无穷远线包括在内。数组、相空间、状态空间等使各种空间成为物理学乃至其他科学处理运动的直观模型。19世纪20年代起,非欧几何的出现突破了欧几里得空间是唯一数学空间的传统观念,并在地图投影与制图等领域得到了较好的应用。但基于非欧几何进行地理信息高维集成表达的研究仍不多见。

几何代数是一种以维度运算为基础的结合代数,在几何代数中空间可以定义为向量集合间的运算,空间维数直接由运算法则确定。几何代数实现了高维几何计算和分析的统一,使其可能

收稿日期:2020-03-16

项目资助:国家杰出青年基金(41625004);国家自然科学基金委员会应急管理项目(41842047)。

第一作者:闫国年,博士,教授,主要从事地理信息科学研究。gnlu@njnu.edu.cn

成为连接代数和几何、数学和物理、抽象空间和实体空间的统一描述性语言。同时,几何代数从数学层面直接支撑并行计算、多维度统一计算、高效数据压缩与传输和快速展示,为 GIS 发展新方向提供了基础。几何代数是支撑多维统一对象表达和空间分析的数学工具,为不同类型、不同维度的对象表达和空间分析建立统一有机联系的运算框架与分析工具。近年来,笔者团队在基于几何代数的地理信息高维空间表达方面进行了系统研究,形成了几何/代数融合、表达/计算融合、连续/离散一体化的几何代数时空数据集集成建模与分析的理论与方法体系,研发了基于几何代数的时空统一分析软件 CAUSTA^[2]。

2 基于几何代数的地理信息高维空间表达

2.1 几何代数基础空间

几何代数空间中常见的数学空间有欧氏空间、共形空间、齐次空间、时空代数空间和通用的几何代数空间等,不同空间基于一定规则可以相互转化。其中欧氏空间是最符合人们对客观世界认知的空间,与地理空间一致,也是大部分 GIS 数据模型所基于的数据空间,但由于其运算的坐标相关性和多维不统一性,使得基于欧氏空间的 GIS 数据模型结构复杂、并行计算困难。共形空间通过引入基准原点和无穷远点赋予其闵氏内积结构,不仅使得五维向量空间的分级结构完全对应于几何体的分级结构,而且使得任何两仿射点的内积具有几何意义。共形空间不仅保留了齐次空间中外积的 Grassmann 分级结构,更使得内积具备了表征距离、角度等基本度量的明确几何意义^[3-4]。共形空间能够克服欧氏空间的缺点,能够进行多维高维地理对象的表达计算和分析。

2.2 基于几何代数的几何空间表达

基于几何代数的几何建模主要利用几何代数中的 blade 和多重向量结构,利用外积表达维度构造,内积表达距离测度。通过代数结构维度和几何维度一致的 Grassmann 结构实现不同代数结构的整合。基于几何代数的几何表达在不同维数空间中具有统一且清晰的几何含义这一事实,消除了向量之间应用欧几里德空间中叉积的限制,并能同时支撑几何构造和多维度测度的统一描述。如 Yuan 等^[5]基于共形空间的全局表达优势构建了三维空间数据模型,实现了不同维度、不同类型地理对象的统一表达与运算。俞肇

元等^[6]针对现有多维时空数据建模时空分离所导致的时空表达不一致、不统一的问题,将基于几何代数的几何表达拓展至时空域,运用几何代数理论和统一时空观,对时间、空间与属性进行一体化的表达与建模。

基于几何代数的几何表达兼顾了几何表达和代数表达的优势。俞肇元等^[7-9]利用几何代数的 blade 结构表示几何图形,通过几何代数的 meet、inner 和 outer 工具实现几何图形的拓扑操作,从几何意义上实现对地理三维物体之间的拓扑关系的表示和计算。Luo 等^[10]针对几何建模不同维度上难以进行统一建模的问题,提出了多维统一的几何基元描述,并构建了多维统一的多重向量树(multivector tree, MVTre)数据结构。Yuan 等^[11]利用几何代数内积表达,构建了大规模点云数据特征保持的几何建模与压缩方法,实现了特征保持的几何建模。Zhang 等^[12]基于共形几何代数构建了三维地籍模型,实现了地籍数据多维统一表达以及几何与拓扑的统一表达。

2.3 基于几何代数的关系空间表达

几何代数以维度运算为基础,是完备的布尔代数。因此其适用于拓扑关系表达。利用几何代数的 Metric 矩阵和几何积表达可以同步构造几何关系、拓扑关系、方位关系的集成表达。利用几何代数计算规则和拓展算子实现对地理网络数据的动态更新,引入时空约束算子对网络数据加以约束表达,从而实现多重关系的融合与集成表达。

在拓扑关系表达方面,Yuan 等^[13]最早提出多维统一的拓扑关系层次计算框架,通过 Grassmann 结构和外积等算子实现了多维拓扑关系的统一计算,拓展了三维空间中拓扑关系的类型。Yu 等^[7]针对传统拓扑关系表达和计算中几何要素缺失的问题,提出了几何-拓扑融合的拓扑关系表达模型。Zhang 等^[14]将上述空间拓扑关系研究拓展至时空域,实现了基于几何代数的时空拓扑的形式化描述和建模。Zhang 等^[12]研究了共形空间中地籍对象的几何与拓扑关系表达,推导了共形空间中点、线、面之间相离、相交、包含等拓扑关系判断规则,为多维拓扑关系表达与分析提供一个统一框架。

在网络关系表达方面,几何代数可用于随机网络的表达。Yuan 等^[15]基于几何代数提出了对网络要素的基本表达,完成对网络节点和边的拓扑表达以及路径遍历的延拓扩展,并构造了基本

地理网络的最短路径求解算法。俞肇元等^[16]在代数空间视角下利用几何代数 blade 结构以及内外积等基本运算,实现对网络节点与路径关系的几何代数编码,为统一的网络表达与空间约束提供了一致的结构和计算规则,最终实现代数化空间下的地理网络分析算法。Li等^[17]提出了基于几何代数的多约束统一表示和集成策略,定义了数值约束、节点约束和结构约束。相对于大多数现有的 MCOP(multi-constrained optimal path)和 DMCOF(dynamic multi-constrained optimal path)算法,几何代数方法在处理大范围多约束条件时计算效率明显提高,且可通过计算规则和拓展算子实现对地理网络数据的动态更新,完成地理网络多时态、多约束的统一计算与分析。

2.4 基于几何代数的属性与语义空间表达

在语义方面,从几何代数对语义信息的表达能力来看,Patyk-Lonska等^[18-19]基于语义信息的分布式表达思想,论述了基于几何代数的离散语义和连续语义信息的分布式表达模型。对于具有离散属性的原子对象,其语义信息表达为几何代数空间中的二值向量;对于具有连续属性的原子对象,则可表达为高维欧氏空间中的真值向量。而在完整的表达框架中,两类对象都可表达为相同结构的多重向量,并具有相似的层次结构,这也证明了基于几何代数的语义模型具有连续/离散统一的表达与计算能力。从表达方式来看,基于几何代数的语义信息编码是一种更自然的表达方式,使人们能对编码所具备的认知结构进行几何解释。同时,基于几何代数独特的计算规则,可以便捷地对特定的语义信息的组合进行编码。依托多重向量结构这一表达方式,以及其多维计算统一的特性,可以实现对复杂语义的高效编码与解码^[20]。

2.5 基于几何代数的运动与演化过程表达

Yuan等^[21]引入Lorenz变换实现了观测相关、度量不变的时空场结构表达,基于双曲复空间提出了四维时空场的时空立方体组织与分层自适应索引描述方法,为地理时空过程的连续/离散统一表达、几何/代数融合表达与计算奠定了基础^[22]。基于几何代数多维统一特性,罗文等^[23]探讨了多维向量场的多重向量表达与基本运算,给出了向量场微分的模板卷积计算方法,利用几何积对内外积的统一表达,建立散度和旋度的统一计算方法并进行算法实现,该方法不仅再现了向量场散度和旋度参数的几何关联性及

其微分特性,更实现了多维统一与坐标无关的计算,为向量场数据分析提供新的思路与方法基础。徐晨等^[24]利用几何代数在高维场数据表达与分析的优势,建立多光谱图像的几何代数微分理论,利用真实的多光谱图像数据构建基于几何代数的边缘检测算法,为多光谱图像处理提供重要的解决思路。

3 基于几何代数的场景表达与集成计算

3.1 基于几何代数的场景表达

Perwass^[25]研究了基于多重向量的复杂地理对象层次构建方法。Sommer^[26]建立了基于几何代数的视频空间场景化集成表达模型和系列视频分析方法。Kleppe等^[27]利用几何代数优化算法实现了基于点云的高精度二次曲线的生成和控制。几何代数还可用于张量场和向量场数据的组织和管理、连续栅格图形与矢量等值线的几何代数融合集成、曲面构建与动态演化模式等方面。上述研究在单一类型数据的场景建模上显现了明显的特色和优势,但多难以直接应用于GIS场景表达。笔者团队利用几何代数空间数据表达在数学结构上的一致性,实现了矢量/时空场/网络数据的多重向量构造模式与表达方法,形成了存贮结构、表达结构与计算结构统一的多维GIS场景数据模型^[5, 10, 28],设计了表达-组织-存储-检索-计算结构一致的MVTtree数据结构,实现了复杂地理场景的结构化层级组织与存储^[5, 10-11]。利用几何代数的形式化表达特性,Yu等^[8]构建了面向应急疏散场景的多源数据汇聚的地理场景生成式动态建模方法,突破了GIS在处理诸如应急模拟等高动态、高复杂度问题的瓶颈。Yu等^[9, 29]研究了传感器网络场景-关系融合的实时动态建模方法,发展了基于生成-滤波-模板匹配范式的传感器行为轨迹耦合分析模型,解决了不完备信息条件下运动目标行为轨迹生成、计算和分析的难题。Hu等^[30]提出了多层/多时相模式数据的几何代数汇聚式建模方法,实现了南极海地冰系统的耦合集成建模。Pang等^[31]利用几何代数实现了室内外一体化的建模,利用手机实现了场景中行为轨迹的跟踪建模。Hu等^[32]利用可扩展标记语言对复杂场景建模进行了形式化、规范化的表达。

3.2 基于几何代数的地理分析与计算

Hestenes等^[33]最早将几何代数与微分几何

联系起来。随后几何代数被引入射影几何、仿射几何、共形几何中进行几何体、几何关系和几何变换的描述,从而进行不变(即不依赖于坐标表示)几何分析与计算^[34]。Yu 等^[35]及宗真等^[36]利用几何代数运算与布尔逻辑运算间的对应关系,实现了不同维度空间中度量、几何、拓扑关系的自适应计算。基于几何代数算子,Yuan 等^[22]提出了多维统一的空间计算框架(GA-based multi-dimensional unified computation, GA-MUC),Yu 等^[37]对 GA-MUC 进行了动态化和并行化改造,发展了基于几何代数的多维实体对象的 BRNO-ST 索引对象-拓扑-约束集成的地理网络存储结构,并利用预编译技术实现了几何代数算子计算流程的自动优化和异构计算平台代码的自动生成,实现了三角网求交、变化检测及数字高程模型坡向提取等算法的并行化重构。冯琳耀、俞肇元等实现了不同类型约束下地理网络约束搜索和最优路径的统一计算^[10, 28, 38-39]。Luo 等^[40]对基于几何代数的空间计算进行了形式化总结,提出了基于几何代数的算子化、模板化的异构/并行计算体系。几何代数还可以用于三维对象的位移与运动建模。基于几何代数的计算和分析体系具有计算结构的一致性与自适应性特点,为利用代数方法进行空间计算流程优化提供了理论与方法基础。

4 结 语

欧氏空间的坐标依赖性使得 GIS 从低维向高维扩展较为困难,并可能导致空间语义的多义性、空间模拟与推理的复杂性等问题。寻求同时支撑多维统一对象表达和空间分析的数学工具,为不同类型、不同维度的对象表达和空间分析建立统一的运算框架与分析工具,是促进 GIS 发展的有效途径。几何代数克服了传统欧氏空间的不足。基于几何代数构建的多维统一和面向多维复杂地理对象及演化过程的表达、建模、分析和应用为一体的新型 GIS 框架,已在场景数据描述和多维度统一计算等方面显示了显著优势。从几何代数出发,在高维空间中进行 GIS 理论、方法和应用的探索创新是促进 GIS 发展的可行途径。

参 考 文 献

[1] Lü Guonian, Yuan Linwang, Yu Zhaoyuan. Surveying and Mapping Geographical Information from

the Perspective of Geography[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 42(10):351-358(闫国年, 袁林旺, 俞肇元. 地理学视角下测绘地理信息再透视[J]. *测绘学报*, 2017, 42(10):351-358)

[2] Yuan L, Yu Z, Chen S, et al. CAUSTA: Clifford Algebra-Based Unified Spatio-Temporal Analysis[J]. *Transactions in GIS*, 2010, 14(s1):59-83

[3] Li Hongbo. Conformal Geometric Algebra and Algebraic Manipulations of Geometric Invariants [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2006, 18(7):902-911(李洪波. 共形几何代数与几何不变量的代数运算[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2006, 18(7):902-911)

[4] Li Hongbo. Conformal Geometric Algebra for Motion and Shape Description[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2006, 18(7):895-901(李洪波. 共形几何代数与运动和形状的刻画[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2006, 18(7):895-901)

[5] Yuan L, Yu Z, Luo W, et al. Geometric Algebra for Multidimension-Unified Geographical Information System[J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2013, 23(2):497-518

[6] Yu Zhaoyuan, Yuan Linwang, Luo Wen, et al. Design and Implementation of GIS Temporal Spatial Analysis System Based on Clifford Algebra[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(12):1397-1401(俞肇元, 袁林旺, 罗文, 等. GIS 时空分析系统的 Clifford 代数设计与实现[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2011, 36(12):1397-1401)

[7] Yu Z, Luo W, Yuan L, et al. Geometric Algebra Model for Geometry-Oriented Topological Relation Computation [J]. *Transactions in GIS*, 2016, 20(2):259-279

[8] Yu Z, Wang J, Luo W, et al. A Dynamic Evacuation Simulation Framework Based on Geometric Algebra [J]. *Computers Environment & Urban Systems*, 2016, 59:208-219

[9] Yu Z, Yuan L, Luo W, et al. Spatio-Temporal Constrained Human Trajectory Generation from the PIR Motion Detector Sensor Network Data: A Geometric Algebra Approach [J]. *Sensors*, 2016, 16(43):1-21

[10] Luo W, Hu Y, Yu Z, et al. A Hierarchical Representation and Computation Scheme of Arbitrary-Dimensional Geometrical Primitives Based on CGA [J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2017, 27(3):1977-1995

[11] Yuan S, Zhu S, Li D S, et al. Feature Preserving

- Multiresolution Subdivision and Simplification of Point Clouds: A Conformal Geometric Algebra Approach[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, doi:10.1002/mma.4616
- [12] Zhang J, Yin P, Li G, et al. 3D Cadastral Data Model Based on Conformal Geometry Algebra[J]. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2016, doi:10.3390/ijgi5020020
- [13] Yuan L, Yu Z, Luo W, et al. A 3D GIS Spatial Data Model Based on Conformal Geometric Algebra[J]. *Science China Earth Sciences*, 2011, 54(1):101-112
- [14] Zhang F, Jiang X, Zhang X, et al. Unified Spatial Intersection Algorithms Based on Conformal Geometric Algebra[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016(4):1-10
- [15] Yuan L, Yu Z, Luo W, et al. Clifford Algebra Method for Network Expression, Computation, and Algorithm Construction[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, 37(10):1428-1435
- [16] Yu Zhaoyuan, Hu Yong, Zhu Xiaolin, et al. A Unified Geometric Algebra Algorithm for Solving Multi-type Constrained Optimal Path[J]. *Geography and Geo-Information Science*, 2014, 30(2):10-15(俞肇元, 胡勇, 朱晓林, 等. 基于几何代数的多类型约束路网最优路径分析算法[J]. *地理与地理信息科学*, 2014, 30(2): 10-15)
- [17] Li D S, Yu Z, Luo W, et al. Optimal Route Searching with Multiple Dynamical Constraints—A Geometric Algebra Approach[J]. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2018, 7(5):172
- [18] Patyk-Lonska A. Experiments on Preserving Pieces of Information in a Given Order in Holographic Reduced Representations and the Continuous Geometric Algebra Model[J]. *Informatica*, 2011, 35(4):419-427
- [19] Patyk-Lonska A. Distributed Representations Based on Geometric Algebra: The Continuous Model[J]. *Informatica*, 2001, 35(4):407-417
- [20] Patyk-Lonska A. Geometric Algebra Model of Distributed Representations [M]//Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science, Godalming. London:Springer-Verlag, 2010
- [21] Yuan L, Yu Z, Chen S, et al. CAUSTA: Clifford Algebra-Based Unified Spatio-Temporal Analysis[J]. *Transactions in GIS*, 2010, 14(s1):59-83
- [22] Yuan L, Lü G, Luo W, et al. Geometric Algebra Method for Multidimensionally-Unified GIS Computation[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2012, 57(7):802-811
- [23] Luo Wen, Yuan Linwang, Yu Zhaoyuan, et al. Geometric Algebra-Based Unified Characteristics Parameters Computation Method of Multi-dimensional Vector Field[J]. *Systems Engineering—Theory and Practice*, 2013, 33(9):2390-2396(罗文, 袁林旺, 俞肇元, 等. 多维向量场特征参数的几何代数统一计算方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(9): 2390-2396)
- [24] Xu Chen, Cao Wenming, Liu Hui. Multispectral Image and Geometric Algebra[M]. Beijing: Science Press, 2014(徐晨, 曹文明, 刘辉. 多光谱图像与几何代数[M]. 北京:科学出版社, 2014)
- [25] Perwass C. Geometric Algebra with Applications in Engineering[M]. Berlin:Springer-Verlag, 2009
- [26] Sommer G. Geometric Computing with Clifford Algebras: Theoretical Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics[M]. Berlin:Springer-Verlag, 2001
- [27] Kleppe A L, Egeland O. A Curvature-Based Descriptor for Point Cloud Alignment Using Conformal Geometric Algebra[J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2018, 28(2):50
- [28] Yuan L, Yu Z, Luo W, et al. Multidimensional-unified Topological Relations Computation: A Hierarchical Geometric Algebra-Based Approach[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2014, 28(12):2435-2455
- [29] Yu Z, Luo W, Yi L, et al. Clifford Algebra-Based Structure Filtering Analysis for Geophysical Vector Fields[J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2013, 20(4):563-570
- [30] Hu Y, Luo W, Yu Z, et al. Geometric Algebra-Based Modeling and Analysis for Multi-layer, Multi-temporal Geographic Data[J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2016, 26(1):151-168
- [31] Pang Y, Zhang C, Zhou L, et al. Extracting Indoor Space Information in Complex Building Environments[J]. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2018, 7(8):321
- [32] Hu D, Ma S, Guo F, et al. Describing Data Formats of Geographical Models[J]. *Environmental Earth Sciences*, 2015, 74(10):7101-7115
- [33] Hestenes D, Sobczyk G, Marsh J S. Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics[J]. *American Journal of Physics*, 1985, 53(5):510-511
- [34] Mullineux G. Clifford Algebra of Three Dimensional Geometry[J]. *Robotica*, 2002, 20(6):687-697
- [35] Yu Z, Luo W, Yuan L, et al. Change Detection for 3D Vector Data: A CGA-Based Delaunay-TIN Intersection Approach[J]. *International Journal of*

- Geographical Information Science*, 2015, 29(12): 2 328-2 347
- [36] Zong Zhen, Yuan Linwang, Luo Wen, et al. Triangulation Intersection Algorithm Base on Conformal Feometric Algebra [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 43(2): 200-207(宗真, 袁林旺, 罗文, 等. 三角网求交的共形几何代数算法[J]. 测绘学报, 2012, 43(2): 200-207)
- [37] Yu Z, Li D, Zhu S, et al. Multisource Multisink Optimal Evacuation Routing with Dynamic Network Changes: A Geometric Algebra Approach [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, 41(11SI): 4 179-4 194
- [38] Feng Linyao, Yuan Linwang, Luo Wen, et al. Geometric Algebra-Based Algorithm for Solving Nodes Constrained Shortest Path [J]. *Electronica Sinica*, 2014, 42(5): 846-851(冯琳耀, 袁林旺, 罗文, 等. 节点约束型最短路径的几何代数算法[J]. 电子学报, 2014, 42(5): 846-851)
- [39] Staples G S. Graph-Theoretic Approach to Stochastic Integrals with Clifford Algebras [J]. *Journal of Theoretical Probability*, 2007, 20(2): 257-274
- [40] Luo W, Yu Z, Yuan L, et al. Template-Based GIS Computation: A Geometric Algebra Approach [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2017, 31(10): 2 045-2 067

Role of Geometric Algebra in High Dimensional Space Representation of Geographic Information

LÜ Guonian¹ YUAN Linwang¹ YU Zhaoyuan¹ LUO Wen¹
ZHOU Liangchen¹ YAN Zhenjun¹

¹ Key Laboratory of VGE, Ministry of Education, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China

Abstract: Geographic information space is a high-dimensional space combining virtual and real. Geographic information system (GIS) based on European geometry plays an important role in the development of geographic information science. However, because the expression of GIS geographic objects and phenomena in European-style space depends on object coordinates and the adopted coordinate system, it is difficult for the expression, calculation and analysis of geographic objects to form a multi-dimensional unified operation rule and framework, which increases the algorithm's complexity and reduces the efficiency of algorithm analysis. Geometric algebra is a kind of combination algebra based on dimensional operation. Space can be defined as the operation between vector sets. The dimension of space is directly determined by the algorithm, which realizes the unification of high-dimensional geometric calculation and analysis. Based on the unified calculation and analysis framework of geometric algebra, GIS can better express and analyze high-dimensional objects, and then improve the ability of expressing complex geographical objects and dynamic geographical phenomena, analyzing spatiotemporal multi-scale objects and integration of different scale geographical models. This lays the theoretical foundation for the development of GIS towards holographic maps with real-time dynamics, virtual-real fusion, full perspective, full elements and full content expression.

Key words: geometric algebra; virtual space; high-dimensional representation

First author: LÜ Guonian, PhD, professor, majors in geographic information science. E-mail: gnlu@njnu.edu.cn

Foundation support: The National Science Fund for Distinguished Young Scholars(41625004); the NSFC Emergence Management Project (41842047).

引文格式: LÜ Guonian, YUAN Linwang, YU Zhaoyuan, et al. Role of Geometric Algebra in High Dimensional Space Representation of Geographic Information[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(9): 1328-1333. DOI: 10.13203/j.whugis20200080(闫国年, 袁林旺, 俞肇元, 等. 几何代数在地理信息高维空间表达中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2020, 45(9): 1328-1333. DOI: 10.13203/j.whugis20200080)