INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

ÍNDICE

CAPITULO 4:

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

CAPITULO 5:

INTRODUCCIÓN

En el mundo real, las organizaciones de diferentes naturalezas tienen problemas de decisión en el uso de sus recursos escasos. Como por ejemplo: Un empresario dedicado al servicio de mantenimiento y reparación de computadoras tiene cinco técnicos que atienden pedidos de diversas empresas en Lima y provincias, está interesado en determinar el lugar más apropiado para su sede central. Recursos escasos: tiempo no productivo, pasajes, etc. Otro ejemplo: Un empresario propietario de 5 automóviles dedicados al servicio de taxi en la ciudad de Lima está interesado en determinar el grifo que debe abastecer a sus vehículos. En este caso, los recursos escasos son: las llantas, el tiempo dedicado para abastecerse de gasolina, el mismo combustible, etc.

El proceso para alcanzar este objetivo consiste más en formular el problema que en construir y resolver modelos matemáticos. En forma específica, los problemas de decisión a menudo incluyen importantes factores que muchas veces no se pueden incluir en el modelo matemático. El factor principal es el hombre y su comportamiento. El modelo puede ser muy bueno, pero si la influencia de las personas es muy fuerte, la solución óptima del modelo es impracticable.

La Investigación Operativa es una ciencia y un arte. IO es una ciencia porque ofrece técnicas y algoritmos matemáticos para resolver problemas de decisión. IO es un arte debido a que el éxito que se alcanza en todas las etapas de la solución de un problema de decisión, depende de la habilidad y creatividad de las personas responsables de la toma de decisiones.

FORMULACION DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

CAPÍTULO 1

El modelo es la representación abstracta de la realidad, se construyen modelos con la finalidad de poder resolver problemas del mundo real.
Todo problema de programación lineal está compuesto de una función objetivo que se va optimizar, (maximizar o minimizar) y las restricciones que describen los requerimientos y las limitaciones de los recursos.

Todo programa lineal parte de los siguientes supuestos:

1. ***Linealidad***, se exige que las restricciones y función objetivo sean lineales.
2. ***Independencia entre actividades***, se pretende garantizar que el problema permanezca en forma lineal.
3. ***Divisibilidad***, los valores de las variables es de carácter continuo.
4. ***Determinístico***, todos los términos en el modelo lineal se suponen conocidos.

Sea el siguiente problema:

Minimizar $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots\dots\dots + c_nX_n$

Sujeto a:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \geq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \geq b_2$$
$$a_{n1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n \geq b_n$$
$$X_1, X_2, \dots. X_n \geq 0$$

La función objetivo es $c_1X_1 + c_2X_2 + \dots\dots\dots + c_nX_n$; $c_1, c_2, \dots\dots\dots, c_n$ son los coeficientes y $X_1, X_2, \dots\dots\dots, X_n$ son las variables de decisión que deben determinarse.
Las desigualdades son las restricciones. Los coeficientes a_{ij} para (i = 1, 2,...., m) y

(j = 1, 2,..., n) se denominan coeficientes tecnológicos.

El vector columna del lado derecho representa los requerimientos mínimos que deben satisfacer.

Las restricciones $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n \geq 0$ son las condiciones de no negatividad de cada variable.

El método simplex está diseñado para resolver programas lineales donde las variables de decisión son no negativas.
A continuación se presenta una serie de problemas con sus respectivos programas lineales, el objetivo que se persigue es mostrar la mayor cantidad posible de mecanismos necesarios para formular cualquier problema lineal.

1.1 EJEMPLOS

CASO: PRODUCCIÓN

1. Una compañía elabora dos productos P_1 y P_2 cada uno requiere de componentes c_1 y c_2 la disponibilidad de componentes y precio venta se muestra en el siguiente cuadro.

Producto	**Componentes**		**Precio Venta (S/. / Unidad)**
	c_1	c_2	
P_1	1	2	4
P_2	3	1	3
Dispone (Unid.)	15000	10000	

Se pide presentar el modelo que optimiza el ingreso por ventas.

Solución:

X_i = Unidades del producto i a producir (i = 1, 2)

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 3X_2 \leq 15{,}000$$
$$2X_1 + X_2 \leq 10{,}000$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

2. Si cada unidad de P_1, problema 1 genera 3 unidades de un subproducto P_3 y además se tiene que el mercado demanda como máximo 500 unidades de P_3 al precio de S/. 2.00 por unidad y un costo ocasionado por la destrucción de cada unidad excedente de S/. 0.50
Se pide formular el programa lineal.

Solución:

X_{3j} = Unidades del producto 3 que tiene el destino j; (j = Venta, Destrucción)

X_3 = Unidades producidas de P_3

X_{31} = Unidades producidas de P_3 que se venden.

X_{32} = Unidades producidas de P_3 que se destruyen.

$$Max\ z = 4X_1 + 3X_2 + 2X_{31} - 0.5X_{32}$$

Sujeto a:

$$X_1 + 3X_2 \leq 15{,}000$$
$$2X_1 + X_2 \leq 10{,}000$$
$$X_3 = 3X_{31}$$
$$X_{31} \leq 500$$
$$X_{31} + X_{32} = X_3$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_{31}, X_{32} \geq 0$$

3. Si los costos de los componentes del problema 1 son como sigue:

Componente c_1				Componente c_2			
Rg.	De	a	S/. / Unid	Rg.	De	a	S/. / Unid
1	1	5,000	0.3	1	1	8,000	0.2
2	5,001	12,000	0.4	2	8,001	10,000	0.4
3	12,001	15,000	0.5				

Se pide formular el programa lineal.

Solución:

Adicionalmente a las variables del problema 1 se tiene las siguientes:

$X_{c_1 j}$ = Unidades del componentes c_1 del rango j (j = 1, 2, 3)

$X_{c_2 j}$ = Unidades del componentes c_2 del rango j (j = 1, 2)

$$Max\ z = 4X_1 + 3X_2 - (0.3X_{c_1 1} + 0.4X_{c_1 2} + 0.5X_{c_1 3} + 0.2X_{c_2 1} + 0.4X_{c_2 2})$$

Sujeto a:

$$X_1 + 3X_2 \leq 15{,}000$$
$$2X_1 + X_2 \leq 10{,}000$$
$$X_{c_1 1} + X_{c_1 2} + X_{c_1 3} = X_1 + 3X_2$$
$$X_{c_2 1} + X_{c_2 2} = 2X_1 + X_2$$
$$X_{c_1 1} \leq 5{,}000$$
$$X_{c_1 2} \leq 7{,}000$$
$$X_{c_1 3} \leq 3{,}000$$
$$X_{c_2 1} \leq 8{,}000$$
$$X_{c_2 2} \leq 2{,}000$$
$$X_1, X_2, X_{c_1 1}, \ldots\ldots, X_{c_2 2} \geq 0$$

CASO: METAS DE TRABAJO

4. Se quiere obtener la máxima cantidad del producto P_3 que se logra del ensamble de una unidad de P_1 y una unidad de P_2, las que se elaboran a partir de los componentes c_1 y c_2 según la siguiente información.

Producto	**Componentes**	
	c_1	c_2
P_1	1	2
P_2	3	1
Disponibilidad (Unid.)	15000	10000

Solución:

X_i = Unidades del producto i (i = 1, 2, 3)

Max z = X_3

Sujeto a:

$$X_1 + 3X_2 \leq 15{,}000$$
$$2X_1 + X_2 \leq 10{,}000$$
$$X_1 \geq X_3$$
$$X_2 \geq X_3$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3 \geq 0$$

5. La capacidad de producción de ALFA de 700 unidades mensuales. Los costos unitarios de producción y el compromiso mensual de venta a BETA son como sigue:

Mes	**Costo de Producción**	**Venta (Unidades)**
1	100	300
2	150	350
3	200	400

Se pide formular el programa lineal.
Solución:

X_i = Producción en el mes i (i=1, 2, 3)

Min z = 100 X_1 + 150 X_2 + 200 X_3

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1050$$
$$X_1 \geq 300$$
$$X_1 + X_2 \geq 650$$
$$X_1 \leq 700$$
$$X_2 \leq 700$$
$$X_3 \leq 700$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

CASO: TIPO DE PROGRESIONES

6. Preparar el modelo lineal para el problema anterior considerando además que se desea conocer en cada mes el inventario de producto terminado.

Solución:

X_i = Cantidad de producción en el mes i (i = 1, 2, 3)
Y_i = Excedente en el mes i (i = 1, 2, 3)

INVENTARIO INICIAL + PRODUCCIÓN - VENTA = INVENTARIO FINAL

MES 1

$$X_1 - 300 = Y_1$$
$$X_1 \leq 700$$

MES 2

$$Y_1 + X_2 - 350 = Y_2$$
$$X_2 \leq 700$$

MES 3

$$Y_2 + X_3 - 400 = 0$$
$$X_3 \leq 700$$

El programa tiene como objetivo minimizar el costo total de producción

$$Min\ z = 100 X_1 + 150 X_2 + 200 X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 - Y_1 - 300 = 0$$
$$X_1 \leq 700$$
$$Y_1 + X_2 - Y_2 - 350 = 0$$
$$X_2 \leq 700$$
$$Y_2 + X_3 - 400 = 0$$
$$X_3 \leq 700$$
$$X_1,\ X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

7. La capacidad de producción de GAMMA es de 800 unidades mensuales. Los costos unitarios de producción y el compromiso mensual de venta a BETA son como sigue:

Mes	Costo de Producción	Venta (Unidades)
1	300	300
2	200	350
3	100	400
Venta Total		1050

GAMMA tiene un costo de almacenamiento de S/. 10.00 por unidad mensual.

Si GAMMA no cumple con la venta mensual a BETA tendrá que pagar una multa de S/. 30.00 por unidad mensual faltante.
GAMMA está obligada a cumplir con la entrega de las 1.050 unidades al final del tercer mes.

Solución:

X_i = Producción en el mes i (i = 1, 2, 3)

Y_i = Excedente o déficit en el mes i (i = 1, 2, 3)

W_i = Costo mensual de almacenamiento o multa en el mes i (i =1, 2, 3)

PRODUCCIÓN MENSUAL

INV. INICIAL + PRODUCCIÓN - VENTA = INV. FINAL (DÉFICIT)

- MES 1

$$X_1 - 300 = Y_1$$
$$X_1 \leq 800$$

- MES 2

$$Y_1 + X_2 - 350 = Y_2$$
$$X_2 \leq 800$$

- MES 3

$$Y_2 + X_3 - 400 = 0$$
$$X_3 \leq 800$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1{,}050$$

COSTOS DE ALMACENAMIENTO O MULTA

- MES 1

Si: $Y_1 > 0$:

$$10Y_1 \leq W_1$$
$$-30Y_1 \leq W_1$$

Si: Y_1 < 0:

$$-30Y_1 \leq W_1$$
$$10Y_1 \leq W_1$$

Para los dos casos se cumple lo siguiente:

$$10Y_1 \leq W_1$$
$$-30Y_1 \leq W_1$$

- MES 2

$$10Y_2 \leq W_2$$
$$-30Y_2 \leq W_2$$

Considerando que las variables de decisión deben ser no negativas se va a efectuar un cambio en las variables $Y_1 = Y_{11} - Y_{12}$ que son irrestrictas en signo y luego se presenta la Formulación completa.

$$Min\ z = 100\,X_1 + 150\,X_2 + 200\,X_3 + W_1 + W_2$$

Sujeto a:

$$X_1 - (Y_{11} - Y_{12}) = 300$$
$$X_1 \leq 800$$

$$Y_{11} - Y_{12} + X_2 - (Y_{11} - Y_{12}) = 350$$
$$X_2 \leq 800$$

$$Y_{21} - Y_{22} + X_3 = 400$$
$$X_3 \leq 800$$

$$10\,(Y_{11} - Y_{12}) - W_1 \leq 0$$
$$-30\,(Y_{11} - Y_{12}) - W_1 \leq 0$$
$$10\,(Y_{21} - Y_{22}) - W_1 \leq 0$$

$$-30\,(Y_{21} - Y_{22}) - W_2 \leq 0$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ Y_{11},\ Y_{12},\ Y_{21},\ Y_{22},\ W_1,\ W_2 \geq 0$$

*** OTRA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA**

Y_{ij} = Inventario final en el mes i (i = 1, 2, 3) que se encuentra en j (j = Excedente, Faltante)

- MES 1

$$X_1 - 300 = Y_{1e} - Y_{1f}$$
$$X_1 \leq 800$$

- MES 2

$$Y_{1e} - Y_{1f} + X_2 - 350 = Y_{2e} - Y_{2f}$$
$$X_2 \leq 800$$

- MES 3

$$Y_{2e} - Y_{2f} + X_3 - 400 = 0$$
$$X_3 \leq 800$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1{,}050$$

$$Min\ z = 100\,X_1 + 150\,X_2 + 200\,X_3 + 10\,(Y_{1e} + Y_{2e}) + 30\,(Y_{1f} + Y_{2f})$$

CASO: TRANSPORTE

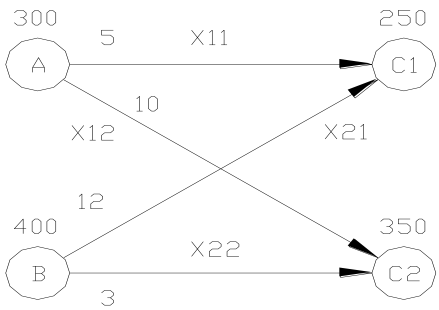
8. Las capacidades de producción del producto P de las fábricas A y B, los costos por unidad transportada a los centros de consumo c_1 y c_2 y las demandas de estos son como sigue:

Fabrica	Costo de Transporte		Producción (Unidades)
	c_1	c_2	
A	5	10	300
B	12	3	400
Demanda (Unid)	250	350	

Se pide preparar el modelo para minimizar el costo total de transporte.

Solución

X_{ij} =Unidades transportadas de la fábrica i (i=1,2) al centro de consumo j (j = 1,2)



$$Min \quad z = 5X_{11} + 10X_{12} + 12X_{21} + 3X_{22}$$

Sujeto a:

PRODUCCIÓN

$$X_{11} + X_{12} \leq 300$$
$$X_{21} + X_{22} \leq 400$$

DEMANDA

$$X_{11} + X_{21} \geq 250$$
$$X_{12} + X_{22} \geq 350$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} \geq 0$$

Si se cambia $\geq$ por $\leq$ en la restricción de la demanda, entonces cuando se resuelva el problema el valor de la función objetiva es igual a cero; porque no se transporta nada y eso no es lo queremos.

CASO: PROCESOS DE MEZCLA

9. Un Kg de P es el resultado de mezclar A, B y C cuyas características son las siguientes:

Producto	Elemento 1 (%)	Elemento 2 (%)	Precio (S/. / Kg)
A	20	40	70
B	30	15	40
C	10	30	60

Obtenga la mezcla óptima si se desea que un kg. P tenga al menos 25% y 30% de los elementos 1 y 2 respectivamente

Solución

$X_i =$ Cantidad del producto i (i = A, B, C) a utilizar en un Kg de P.

$$\text{Min } z = 70X_A + 40X_B + 60X_C$$

$$sujeto\ a:$$
$$0.2X_A + 0.3X_B + 0.1X_C \geq 0.25 \times 1Kg$$
$$0.4X_A + 0.15X_B + 0.3X_C \geq 0.30 \times 1Kg$$
$$X_A + X_B + X_C = 1Kg$$
$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

CASO: TIPO DE HORARIOS

10. El requerimiento de personal de seguridad de una empresa, así como los horarios de entrada y salida son:

Requerimiento de Personal		**Cedulas de Servicio**		
Tiempo	**Núm. Mínimo de personal**	**Turno**	**Horas Entrada**	**Salida**
00 – 04	5	1	0	8
04 – 08	9	2	4	12
08 – 12	12	3	8	16
12– 16	10	4	12	20
16 – 20	6	5	16	0
20 – 00	10	6	20	

Se desea determinar el número total de personas para esa labor.

Solución

$X_i =$ Número de personas que trabajan durante el turno i (i = 1,2....6)

Intervalo de Tiempo						
Turno	00 – 04	04 – 08	08 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 00
1	X_1	X_1				
2		X_2	X_2			
3			X_3	X_3		
4				X_4	X_4	
5					X_5	X_5
6	X_6					X_6
Requerimiento	5	9	12	10	6	10

$$\text{Min } z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

$$\begin{aligned}
&\textit{sujeto a}: \\
&X_1 + X_6 \geq 5 \\
&X_1 + X_2 \geq 9 \\
&X_2 + X_3 \geq 12 \\
&X_3 + X_4 \geq 10 \\
&X_4 + X_6 \geq 6 \\
&X_5 + X_6 \geq 10 \\
&X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0
\end{aligned}$$

1.2 PROBLEMAS RESUELTOS

CASO: PRODUCCIÓN

1. La cervecería B produce cerveza COMÚN y la de tipo ALE. La cerveza se vende a $5.0 el barril y el de ALE a $2.0. La producción de un barril de cerveza COMÚN requiere de 5 libras de cebada y dos libras de lúpulo. La producción de un barril tipo ALE requiere 2 libras de cebada y 1 libra de lúpulo. Se dispone de 60 libras de cebada y de 25 libras de lúpulo. Maximizar las utilidades de la cervecería B.

Tipo	Venta por Barril	Composición	
		Cebada	Lúpulo
Común	5	5	2
Ale	2	2	1

Solución

$X_i =$ Unidades producidas i (i = 1, 2)

Max $z = 5X_1 + 2X_2$

$sa:$

$5X_1 + 2X_2 \leq 60$

$2X_1 + X_2 \leq 25$

$X_1, X_2 \geq 0$

2. Chemco produce dos productos químicos: A y B. Se producen mediante dos procesos manufactureros. El proceso 1 requiere 2 horas de trabajo y 1 lb de materia prima para producir 2 oz de A y 1 oz. De B. El proceso 2 requiere 3 horas de trabajo y 2 lb. De materia prima para producir 3 oz de A y 2 oz, de B. Se dispone de 60 horas de trabajo y de 40 lb. De materia prima. La demanda de A es limitada, pero se puede vender solamente 20 oz. De B. Se vende A, a 16 dólares/oz y B a 14 dólares/oz. Se tiene que desechar todo B no vendido a costo de 2 dólares/oz.
Formule un P.L. para maximizar los ingresos de Chemco menos los costos de desecho.

Proceso	**Horas de Trabajo**	**Materia Prima (lb.)**	**Producto (oz.)**	
			A	**B**
Proceso 1	2	1	2	3
Proceso 2	3	2	3	2
Dispone	60	40		

Solución

$X_i =$ Número de procesos de tipo i (i =1,2)

$Y_j =$ Cantidad producida de j (j = A, B)

$Y_{Bk} =$ Cantidad del proceso B con k (k = V, D)

Max $z = 16Y_A + 14Y_{BV} - 2Y_{BD}$

Sujeto a:

Horas de trabajo= $2X_1 + 3X_2 \leq 60$

Materia prima = $X_1 + 2X_2 \leq 40$

Producto A = $2X_1 + 3X_2 \leq Y_A$

Producto B = $X_1 + 2X_2 \leq Y_B$

$$Y_{BV} \leq 20$$
$$Y_{BV} + Y_{BD} \leq Y_B$$

3. Un fabricante de equipos de filtración de aire produce dos modelos. En la fig. se dan los datos relativos a precios de venta y costos, la firma ya tiene contratados 500 del producto 1 y desearía calcular el punto de equilibrio para ambos modelos. Formule el programa lineal que minimice los costos.

Producto	Precio de Venta (Por Unidad)	Costo Variable	Costo Fijo
1	450	240	150,000
2	700	360	240,000

Solución

$X_i =$ Unidades del producto i (i = 1,2)

Para encontrar el punto de equilibrio se parte:

Ganancia Total = PV - Costo Total

$$450X_1 + 700X_2 = 240X_1 + 360X_2 + 150000 + 240000$$

Que se reduce a:

$$210X_1 + 340X_2 = 390000$$

La Formulación completa del programa es:

Min $z = 240X_1 + 360X_2 + 150000 + 240000$

$sujeto\ a:$

$$210X_1 + 340X_2 = 390000$$
$$X_1 \geq 500$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

4. Un fabricante de acero produce 4 tamaños de vigas en I: pequeñas, medianas, larga y extra larga. Estas vigas se pueden producir en cualquiera de tres tipos de máquinas: A, B y C. A continuación se indican las longitudes (en pies) de las vigas I que pueden producir las máquinas por hora.

Viga	**Máquina**		
	A	**B**	**C**
Pequeña	300	600	800
Mediana	250	400	700
Larga	200	350	600
Extra Larga	100	200	300

Supongamos que cada máquina se puede usar hasta 50 horas por semana y que los costos de operación por hora de estas máquinas son $ 30, $ 50 y $ 80 respectivamente. Supóngase además, que semanalmente se requiere 10 000, 8 000, 6 000 y 6 000 pies de los distintos tamaños de las vigas I.
Formular el problema de programación de máquinas como un programa lineal.

Solución

X_{ij} = Cantidad de horas para producir la viga i (i = pequeña, mediana, larga y extra larga) en la máquina j (j = A, B, C).

Las horas de producción de las máquinas para cada tipo de viga son:

Máquina A = $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 50$

Máquina B = $X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 50$

Máquina C = $X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 50$

La producción semanal por tipo de viga es:

Pequeña = $300X_{11} + 600X_{12} + 800X_{13} \geq 10000$

Mediana = $250X_{21} + 400X_{22} + 700X_{23} \geq 8000$

Larga = $200X_{31} + 350X_{32} + 600X_{33} \geq 6000$

Extra larga = $100\,X_{41} + 200\,X_{42} + 300\,X_{43} \geq 6000$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{41}, X_{42}, X_{43} \geq 0$$

Como se trata de costos de producción la función objetivo es:

$$Min\,Z = 30(X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}) + 50(X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}) + 80(X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43})$$

5. Un fabricante tiene cuatro artículos A, B, C y D que deben ser producidos en un mes. Cada artículo puede ser manejado en cualquiera de tres talleres. El tiempo requerido para cada artículo en cada taller, el costo por hora en cada uno de ellos y el número de horas disponibles se dan en la figura. También es permisible repartir cada artículo entre los talleres en cualquier proporción. Por ejemplo se puede hacer ¼ de artículo A en 8 horas del taller y 1/3 del artículo C en 19 horas del taller 3.
El fabricante desea saber cuántas horas de cada artículo deben manejarse en cada taller para minimizar el costo de terminar los cuatro artículos.

DATOS DE LOS TALLES DE PRODUCCIÓN

	Artículos				**Costo por Hora ($)**	**Taller (tiempo disponible, Hr.)**
Taller	**A**	**B**	**C**	**D**		
1	32	151	72	118	89	160
2	39	147	61	126	81	160
3	46	155	57	121	84	160

Solución

X_{ij} = Articulo producido en el taller i (i = 1, 2, 3) y del tipo de artículo j (j=A, B, C, D)

$$MinZ = 89(X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} + X_{1D}) + 81(X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} + X_{2D}) + 84(X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} + X_{3D})$$

Sujeto a:

$$32X_{1A} + 151X_{1B} + 72X_{1C} + 118X_{1D} \leq 160$$
$$39X_{2A} + 147X_{2B} + 61X_{2C} + 126X_{2D} \leq 160$$
$$16X_{3A} + 155X_{3B} + 57X_{3C} + 121X_{3D} \leq 160$$
$$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} = 1$$
$$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} = 1$$
$$X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} = 1$$
$$X_{1D} + X_{2D} + X_{3D} = 1$$
$$X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}, X_{1B}, X_{2B}, X_{3B}, X_{1C}, X_{2C}, X_{3C}, X_{1D}, X_{2D}, X_{3D} \geq 0$$

6. Se usa un torno para reducir de 14 pulg. a 12 pulg. El diámetro de una barra de acero cuya longitud es de 36 pulg. Se deben determinar la velocidad X_1 (en revoluciones por minuto), el avance de profundidad X_2 (en pulgadas por minuto). La duración del corte está dada por $36/X_2X_3$. La compresión y la tensión lateral ejercida sobre la herramienta cortante están dadas por: $30X_1 + 4000X_2$; $40X_1 + 6000X_2 + 6000X_3$ libras por pulgadas cuadrada, respectivamente. La temperatura (en grados Fahrenheit) en la punta de la herramienta cortante es $200 + 0.5X_1 + 150(X_2 + X_3)$. Los máximos permitidos de tensión de compresión, tensión de compresión, tensión lateral y temperatura son 150,000 libras por pulgada cuadrada, 100,000 libras por pulgada cuadrada y 800°F. Se desea determinar la velocidad (que debe permanecer en el rango 600 a 800 r.p.m.), el avance en profundidad, y el avance en longitud tal que la duración del corte sea mínima. Para poder usar un modelo lineal se hace la siguiente aproximación puesto que $36/X_2X_3$ se minimiza si, y sólo sí X_2 y X_3 se maximiza, se decidió reemplazar el objetivo por la maximización del mínimo de X_2 y X_3. Formular el problema como un modelo lineal.

Solución

X_1 = Velocidad en r.p.m.
X_2 = Avance en profundidad (pulg./min.)
X_3 = Avance longitudinal (pulg/min)
X_4 = Min. (X2, X3)

Max z = X_4

Sujeto a:

$$40X_1 + 6000X_2 + 6000X_3 \leq 100,000$$
$$0.5X_1 + 150X_2 + 150X_3 \leq 600$$
$$30X_1 + 4000X_2 \leq 150,000$$
$$X_1 \leq 800$$
$$X_1 \geq 600$$
$$X_2 \geq X_4$$
$$X_3 \geq X_4$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

7. Un producto es ensamblado con 3 partes que pueden fabricarse en 2 máquinas A y B. Ninguna de las máquinas puede procesar partes diferentes al mismo tiempo, a continuación se resume el número de partes que puede procesar cada máquina por hora.

Parte	Máquina A	Máquina B
Parte 1	12	06
Parte 2	15	12
Parte 3	–	25

La administración busca una programación diaria de máquinas, de tal forma que el número de productos ensamblados sea máximo. Actualmente la compañía tiene tres máquinas del tipo A y cinco máquinas del tipo B.

Solución

Xij = Número de horas por día para fabricar la parte i (i = 1, 2, 3) en la máquina j (j = 1, 2).
X = Cantidad por día del producto ensamblado.

Considerando que el número de horas laborales por día es de 8 horas se tiene:

Max z = X

Cálculo del número de productos ensamblados:

$$12X_{11} + 6X_{12} \geq X$$

$$15X_{21} + 12X_{22} \geq X$$
$$25X_{32} \geq X$$

Horas disponibles:

$$X_{11} + X_{21} \leq 24$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 40$$
$$X_{11}, X_{12},...., X_{32} \geq 0$$

8. Steelco produce dos tipos de acero en tres acerías diferentes. Durante un mes dado cada acería dispone de 200 horas de alto horno. El tiempo y el costo de producción de una tonelada de acero, difieren de una fábrica a otra, debido a las diferencias en los hornos de cada fábrica. En la tabla se muestra el tiempo y el costo de producción para cada fábrica. Cada mes, Steelco tiene que producir 500 toneladas de acero1 y 600 toneladas de acero 2.
Formule la P.L. para minimizar los costos para producir el acero deseado.

Acería	**Acero 1**		**Acero 2**	
	Costo ($)	**Tiempo (min)**	**Costo ($)**	**Tiempo (min)**
Acería 1	10	20	11	22
Acería 2	12	24	9	18
Acería 3	14	28	10	30

Solución

Xi j = Cantidad de acero tipo j (j = 1, 2) producido en la acería i (i = 1, 2, 3)

Min $Z = 10X_{11} + 12X_{21} + 14X_{31} + 11X_{12} + 9X_{22} + 10X_{32}$
Sujeto a:

$$20X_{11} + 22X_{12} \leq 12000$$
$$24X_{21} + 18X_{22} \leq 12000$$
$$28X_{31} + 30X_{32} \leq 12000$$
$$X_{11}+ X_{21} + X_{31} \geq 500$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 600$$

9. Sunco Oil tiene refinerías en Los Ángeles y en Chicago. La refinería de Los Ángeles puede refinar hasta 2 millones de barriles por año; La refinería en Chicago puede refinar hasta 3 millones de barriles de petróleo por año. Una vez refinado, se envía el petróleo a dos puntos de distribución: Houston y Nueva York. Sunco estima que cada punto de distribución puede vender hasta 5 millones de barriles de petróleo refinado al año. Debido a diferencias en los costos de envío y de refinación, la ganancia obtenida (en dólares) por millón de barriles de petróleo enviado, depende del lugar de refinación y del punto de distribución (véase la tabla). Sunco considera aumentar la capacidad de cada refinería. Cada aumento en la capacidad anual de refinación de un millón de barriles cuesta 120000 dólares para la refinería de Los Ángeles y 150000 para la refinería de Chicago. Utilice la programación Lineal para determinar cómo Sunco puede maximizar sus ganancias, menos los costos de la ampliación, en un periodo de diez años.

UTILIDAD POR MILLÓN DE BARRILES ($)

	A Houston	**A Nueva York**
De los Ángeles	20000	15000
De Chicago	18000	17000

Solución

Xij = Cantidad de barriles anuales provenientes de i con destino j
Yij = Cantidad de barriles (x millón) provenientes de la ampliación en i con destino j.

$$\text{Max } z = 20000X_{11} + 15000X_{12} + 18000X_{21} + 17000X_{22} - 120000\,(Y_{11} + Y_{12}) - 150000\,(Y_{21} + Y_{22})$$

Sujeto a:

$$X_{11} + X_{21} + Y_{11} + Y_{21} \leq 5$$
$$X_{12} + X_{22} + Y_{12} + Y_{22} \leq 5$$
$$X_{11} + X_{12} \leq 2$$
$$X_{21} + X_{22} \leq 3$$

10. Para realizar una encuesta por teléfono, un grupo de investigación de mercado necesita comunicar por lo menos a 150 esposas, 120 maridos, 100 varones adultos solteros y 110 mujeres adultas solteras. Cuestan 2 dólares realizar una llamada telefónica durante el día, y 5 dólares durante la noche (debido a mayores costos laborales). Estos resultados se muestran la tabla sgte. Se pueden realizar a lo más la mitad de estas llamadas en la noche, por disponer de un número limitado de empleados. Formule un PL que minimice los costos para completar la encuesta.

Persona que Contesto	**% de llamadas diurnas**	**% de llamadas nocturnas**
Esposa	30	30
Marido	10	30
Soltero	10	15
Soltera	10	20
Nadie	40	05

Solución

Xi = Cantidad de llamadas realizadas en el día o en la noche i (i = 1, 2)

Min z = $2X_1 + 5X_2$

Sujeto a:

$$0.30X_1 + 0.30X_2 \geq 150$$

$$0.10X_1 + 0.30X_2 \geq 120$$

$$0.10X_1 + 0.15X_2 \geq 100$$

$$0.10X_1 + 0.20X_2 \geq 110$$

$$0.4X_1 + 0.05X_2 \geq 0$$

$$2X_2 \leq X_1$$

11. CSL es una cadena de tiendas de servicio para computadoras. El número de horas de reparación especializada que requiere CSL durante los próximos cinco meses, se dan a continuación:

Mes 1 (enero) = 6000 horas

Mes 2 (febrero) = 7000 horas

Mes 3 (marzo) = 8000 horas

Mes 4 (abril) = 9500 horas

Mes 5 (mayo) = 11000 horas

Al principio de enero, 50 técnicos especializados trabajan para CSL. Cada técnico especializado puede trabajar hasta 160 horas al mes. Para satisfacer futuras demandas hay que capacitar a nuevos técnicos. La capacitación de un nuevo técnico dura dos meses. Cada aprendiz requiere de 50 horas del tiempo de un técnico especializado el primer mes y 10 horas del tiempo de un técnico experimentado durante el segundo mes de entrenamiento. A cada técnico experimentado se le pagan mensualmente 2000 dólares (aunque no trabaje las 160 horas). Durante el mes de entrenamiento, se paga al aprendiz 1000 dólares al mes. Al final de cada mes, 5% de los técnicos experimentados de CSL, cambian de trabajo, para irse con Plum Computers. Formule un PL cuya solución permitirá a CSL minimizar los costos de trabajo que se presentan al cumplir con los requerimientos de servicio durante los próximos meses.

Solución

X_i = Número de técnicos capacitados en el mes i (i = 1, 2, 3, 4, 5)
Y_i = Número de técnicos especializados al inicio del mes i (i = 1, 2, 3, 4, 5)

$$\text{Min } z = 2000X_1 + 2000X_2 + 2000X_3 + 2000X_4 + 2000X_5 + 2000Y_1 + 2000Y_2 + 2000Y_3 + 2000Y_4 + 2000Y_5$$

Sujeto a:

$$Y_1 = 50$$

$$160Y_1 - 50X_1 \geq 6000$$

$$160Y_2 - 50X_2 - 10X_1 \geq 7000$$

$$160Y_3 - 50X_3 - 10X_2 \geq 8000$$

$$160Y_4 - 50X_4 - 10X_3 \geq 9500$$

$$60Y_5 - 50X_5 - 10X_4 \geq 11000$$

$$Y_2 - 0.95Y_1 = 0$$

$$Y_3 - 0.95Y_2 - X_1 = 0$$

$$Y_4 - 0.95Y_3 - X_2 = 0$$

$$Y_5 - 0.95Y_3 - X_3 = 0$$

12. Fumco fabrica mesas y sillas. Hay que fabricar cada mesa y cada silla completamente de roble o de pino. Se dispone de un total de 150 pies de tabla (p.t) de roble y de 210 p.t. de pino. Una mesa requiere 17 p.t. de roble, o bien 30 p.t. de pino, una silla necesita 5 p.t. de roble, o bien, 13 p.t. de pino. Se puede vender cada mesa a 40 dólares, y cada silla a 15 dólares. Formule un PL que se puede usar para maximizar los ingresos.

Solución

	Roble (p.t.)	**Pino (p.t.)**	**Precio de Venta (US$)**
Mesas	17	30	40
Sillas	05	13	15
Disponibilidad	150	210	

Xij = Cantidad de i (i = M, S) fabricadas con madera de j (j = R, P)

$$\text{Max } Z = 40\,(X_{MR} + X_{MP}) + 15\,(X_{SR} + X_{SP})$$

Sujeto a:

$$17\,X_{MR} + 5\,X_{SR} \leq 150$$

$$30\,X_{MP} + 13\,X_{SP} \leq 210$$

$$X_{MR}, X_{SR}, X_{MP}, X_{SP} \geq 0$$

13. La corporación Brady produce armarios. Necesita semanalmente 90000 pie3 de madera procesada. Puede conseguir madera procesada de dos maneras. Primero, puede comprar madera de un proveedor externo, y después secarla en su propio horno. Segundo, puede cortar troncos en sus propios terrenos, y convertirlos en madera en su propio aserradero y, finalmente, secar la madera en su propio horno. Brady puede comprar madera clase 1 o clase 2. La madera clase 1 cuesta 3 dólares/pie3 y produce 0.7 pie3 de madera útil luego de secarla. La madera clase 2 cuesta 7 dólares/pie3 y produce 0.9 pie3 de madera útil ya seca. Le cuestan 3 dólares a la compañía cortar un tronco. Después de cortarlo y secarlo, un tronco produce 0.8 pie3 de madera. Brady incurre en un costo de 4 dólares/pie3 de madera seca. Cuesta 2.50 dólares/pie3 procesar troncos en el aserradero.

El aserradero puede procesar semanalmente hasta 35000 pie3 de madera. Se puede comprar cada semana hasta 40000 pie3 de madera de clase 1, y hasta 60000 pie3 de madera de clase 2. Semanalmente, se disponen de 40 horas para secar madera.

El tiempo necesario para secar 1 pie3 de madera de clase 1, madera de clase 2, o troncos, es el siguiente: clase1, 2 segundos; clase 2, 0.8 segundos; tronco, 1.3 segundos.

Formule un PL para ayudar a Brady a minimizar los costos semanales para satisfacer las demandas de madera procesada.

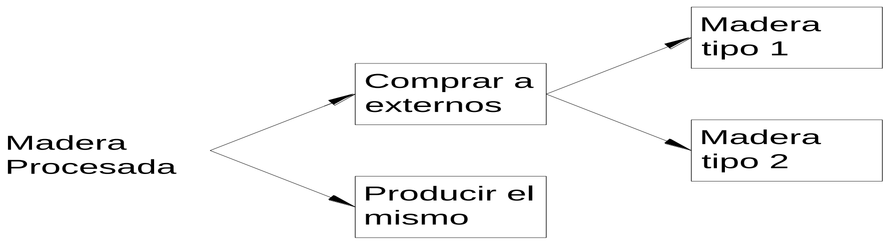
Solución

Necesidad semanal = 90000 pie3 madera procesada

Costo de secar madera = 4 dólar / pie^3

Costo de procesar tronco en aserradero = 2.5 dólar / pie^3

Limite proceso del aserradero (semana) = 35000 pie^3



Se pueden comprar a la semana:

40000 pie^3 $\rightarrow$ madera tipo 1
60000 pie^3 $\rightarrow$ madera tipo 2

Se disponen de 40 horas para secar madera

Tiempos de secado	Tipo de madera
2 seg. 0.8 seg. 1.3 seg.	Tipo1 Tipo2 Tronco

Solución

X_1 = madera tipo 1 → costo (3 + 4 dólares/pie^3) = 07 dólar/pie^3

X_2 = madera tipo 2 → costo (7 + 4 dólares/pie^3) = 11 dólar/pie^3

X_3 = tronco → costo (3 + 4 dólares/pie^3) = 9.5 dólar/pie^3

Min $Z = 7X_1 + 11X_2 + 9.5X_3$

Sujeto a:

$$0.7X_1 + 0.9X_2 + 0.8X_3 \geq 90000$$

$$X_3 \leq 35000$$

$$X_1 \leq 40000$$

$$X_2 \leq 60000$$

$$2X_1 + 0.8X_2 + 1.3X_3 \leq 40\ (3600)$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Donde:

X_1: madera tipo 1 → costo (3 + 4 dólares/pie^3) = 7 dólar/pie^3
X_2: madera tipo 2 → costo (7 + 4 dólares/pie^3) = 11 dólar/pie^3
X_3: tronco → costo (3 + 4 dólares/pie^3) = 9.5 dólar/pie^3

14. La Chandler Enterprises produce dos productos que compiten en el mercado: A y B. La compañía quiere vender estos productos a dos grupos de clientes: 1 y 2. El valor que da cada cliente a una unidad de A y B se muestra en la tabla siguiente. Cada cliente comprará cualquiera de los dos productos A ó B, pero no ambos.
Un cliente está dispuesto a comprar el producto A si cree que:

Valor del Producto A -Precio del Producto A $\geq$ Valor del Producto B-Precio del Producto B

Valor del Producto A-Precio del Producto A $\geq$ 0

Un cliente está dispuesto a comprar el producto B si cree que:

Valor del Producto B-Precio del Producto B $\geq$ Valor del Producto A-Precio del Producto A
Valor del Producto B-Precio del Producto B $\geq$ 0

El grupo 1 consta de 1000 personas, y el grupo B de 1500 personas. Chandler quiere fijar el precio de cada producto para asegurar que las personas del grupo 1 compren el producto A y las personas del grupo 2 compren el grupo B. Forme un PL que ayude a Chandler a maximizar los ingresos.

	Grupo 1 de Clientes	**Grupo 2 de Clientes**
Valor de A para(dólares)	10	12
Valor de B para(dólares)	8	15

Solución

Sea Xi el precio del Producto i (i =1, 2)

Max $Z = 1000X_1 + 1500X_2$
Sujeto a:

$$X_1 - X_2 \leq 2$$

$$X_1 \leq 10$$

$$X_1 - X_2 \geq -3$$

$$X_2 \leq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

15. Una compañía produce un ensamblado que consiste de un bastidor, una barra y un cojinete. La compañía fabrica las barras y los bastidores pero tiene que comprar los cojinetes a otro fabricante. Cada barra debe procesarse en una máquina de forja, un torno y un esmeril.
Estas operaciones requieren de 0.5 horas, 0.2 horas y 0.3 horas por barra respectivamente, cada bastidor requiere de 0.8 horas de trabajo de forja, 01 horas de taladro, 0.3 horas en la fresadora y 0.5 horas en el esmeril. La compañía tiene cinco tornos, diez esmeriles, veinte máquinas de forja, tres taladros y seis fresadoras, supóngase que cada máquina opera un máximo de 2,400 horas por año. Formular como un programa lineal el problema de encontrar el número Max. de componentes ensamblados que se pueden producir.

Solución

X_1 = Número de barras
X_2 = Número de bastidores
X_3 = Número de componentes ensamblados

Producto	**Forja**	**Torno**	**Esmeril**	**Taladro**	**Fresadora**
Barra	0.5	0.2	0.3	---	---
Bastidor	0.8	--	0.5	0.1	0.3
Horas Disponibles	48,000	12,000	24,000	7,200	14,400

Max. $Z = X_3$

Sujeto a:

$$0.5X_1 + 0.8X_2 \leq 48{,}000$$
$$0.2X_1 \leq 12{,}000$$
$$0.3X_1 + 0.5X_2 \leq 24{,}000$$
$$0.1X_2 \leq 7{,}200$$
$$0.3X_2 \leq 14{,}400$$
$$X_1 \geq X3$$
$$X_2 \geq X3$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

16. Con rubíes y zafiros zales Jewelers producen dos tipos de anillos. Un anillo tipo 1 requiere 2 rubíes, 3 zafiros, y 1 h de trabajo de un joyero. Un anillo tipo 2 requiere 3 rubíes, 2 zafiros, y 2 h de trabajo de un joyero. Cada anillo tipo 1 se vende a 400 dólares, y cada anillo tipo 2, a 500 dólares. Se pueden vender todos los anillos producidos por zales. Actualmente zales dispone de 100 rubíes, 120 zafiros y 70 horas de trabajo de un joyero. Se puede comprar más rubíes a un costo de 100 dólares el rubí. La demanda del mercado requiere una producción de por lo menos 20 anillos tipo 1, y por lo menos 25 anillos tipo 2. Para maximizar la ganancia, zales tendrá que resolver el PL siguiente:

X_1 = anillos tipo 1 producidos
X_2 = anillos tipo 2 producidos
R = número de rubíes comprados

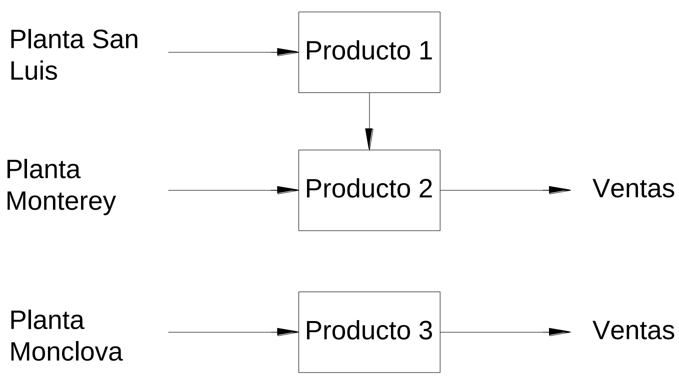
Solución

Max $Z = 400X_1 + 500X_2 - 100R$

Sujeto a:

$$2X_1 + 3X_2 - R \leq 100$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 120$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 70$$
$$X_1 \geq 20$$
$$X_2 \geq 25$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

17. Suponga que la planta en San Luis fabrica al producto 1, que sirve como componente (insumo) para la fabricación de un producto final 2, en Monterrey y otro producto final 3 en Monclova. Así mismo el producto 3 requiere como insumo adicional el producto 2. La siguiente figura muestra el flujo de fabricación.



La capacidad mensual de producción de cada año es:

Fabrica	Capacidad de Producción (miles de unidades)
San Luis	200
Monterrey	120
Monclova	100

La cantidad de unidades requeridas para fabricar una unidad de cada producto y la venta nacional mensual es:

Producto	Insumo	
	Producto 1	Producto 2
-	-	-
2	4	-
3	2	1
Producto	**Venta Nacional por mes**	
	Mínima	**Máxima**
1	10000	30000
2	25000	50000
3	40000	60000

Además por disposición gubernamental se debe exportar el 10% de la venta nacional mensual.
Los costos unitarios de producción son de $ 3, $ 5 y de $ 10, respectivamente para los productos 1, 2 y 3 los cuales se venden en el mercado nacional a $ 6, $ 10 y $15; en el extranjero un 20% más caro, respectivamente. Formule el Modelo Lineal que determina la producción mensual de cada producto, que satisfaga a la vez todas las condiciones descritas antes y que optimice los ingresos por ventas.

Solución

Xi = Unidades producidas del producto y (y = 1, 2, 3)
Yij = Unidades vendidas del producto y en el mercado j (j=nacional, extranjero) (i = 1, 2, 3) (j=1: Nacional, 2: Extranjero, 3: Insumos)

Función Objetivo:

$$\text{Max. } Z = 6Y_{11}+10Y_{21}+15Y_{31}+7.2Y_{12} +12Y_{22}+18Y_{32}-3X_1-5X_2-10X_3$$

Restricciones de:

PRODUCCIÓN

$$X_1 \leq 200{,}000$$
$$X_2 \leq 120{,}000$$
$$X_3 \leq 100{,}000$$

VENTA DE PRODUCTO 1

La venta es el resultado de la diferencia entre la producción y el requerimiento de unidades que participan como insumo para la producción de otros productos.

$$X_1 = Y_{11} + Y_{12}$$
$$Y_{11} \geq 10{,}000$$
$$Y_{11} \leq 30{,}000$$
$$Y_{12} = 0.10 * Y_{11}$$
$$Y_{11} = 4X_2 + X_3 + Y_{12}$$

VENTA DEL PRODUCTO 2

$$X_2 = Y_{21} + Y_{22}$$
$$Y_{21} \geq 25{,}000$$
$$Y_{21} \leq 50{,}000$$
$$Y_{22} = 0.10 * Y_{21}$$
$$Y_{21} = X_3 + Y_{21}$$

VENTA DEL PRODUCTO 3

$$X_3 = Y_{31} + Y_{32}$$
$$Y_{31} \geq 40{,}000$$
$$Y_{31} \leq 60{,}000$$
$$Y_{32} = 0.10\, Y_{31}$$
$$X_1, \ldots\ldots, Y_{32} \geq 0$$

CASO: MODELOS DE PROCESOS DE MEZCLAS

1. Un alimento para perros se hace mezclando dos productos de soya. En la figura se dan los datos para los dos productos. Los perros deben recibir al menos cinco onzas de proteínas y 2 onzas de grasa diariamente, ¿Cuál será la mezcla de costo mínimo de los dos productos?

Producto de soya	Costo por Onza	Proteína (%)	Grasa (%)
1	0.05	40	15
2	0.02	15	18

Solución

X_1 = Cantidad de onzas del producto de soya tipo 1.
X_2 = Cantidad de onzas del producto de soya tipo 2.

Min $Z = 0.05X_1 + 0.02X_2$

Sujeto a:

$$0.40X_1 + 0.15X_2 \geq 5$$
$$0.15X_1 + 0.18X_2 \geq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

2. Un fabricante de plásticos planea obtener un nuevo producto mezclando 4 compuestos químicos. Estos compuestos consisten principalmente de 3 elementos químicos A, B y C. A continuación se muestra la composición y el costo por unidad de estos compuestos.

Compuesto Químico	1	2	3	4

Porcentaje de A	30	20	40	20
Porcentaje de B	20	60	30	40
Porcentaje de C	40	15	25	30
Porcentaje de D	20	30	20	15

El nuevo producto consiste del 20% del elemento A, al menos 30% del elemento B y al menos 20% del elemento C. Debido a los efectos laterales de los compuestos 1 y 2, estos no deben de exceder del 30% y 40% del contenido del nuevo producto.
Formular como programa lineal el problema de encontrar la forma menos costosa de obtener un nuevo producto.

Solución

Xi = Cantidad del compuesto químico i (i = 1, 2, 3, 4)
$\text{Min } Z = 20X_1 + 30X_2 + 20X_3 + 15X_4$

Un kilogramo del nuevo producto tiene las siguientes características:

$$0.3X_1 + 0.20X_2 + 0.40X_3 + 0.2X_4 = 0.2$$
$$0.2X_1 + 0.60X_2 + 0.30X_3 + 0.4X_4 \geq 0.3$$
$$0.4X_1 + 0.15X_2 + 0.25X_3 + 0.3X_4 \geq 0.2$$
$$X_1 \leq 0.3$$
$$X_2 \leq 0.4$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

3. Una compañía produce dos salsas para carne, la aromática Diablo y la suave Barón Rojo. Estas salsas se obtienen mezclando dos ingredientes A y B. Se permite cierto nivel de flexibilidad en la fórmula de estos productos. De hecho las restricciones son:
La Barón debe contener un máximo del 75% del ingrediente A;
La Diablo debe contener por lo menos 25% de A y por lo menos 50% de B.
Se pueden vender más de 40 cuartos de A y 30 cuartos de B. La compañía puede vender la salsa que produzca al precio por cuarto de $ 3.35 La Diablo y $ 2.85 la Barón Rojo.

A y B cuestan $ 1.60 y $ 2.95 por cuarto respectivamente se desea maximizar

el ingreso neto por venta de las salsas.
Formule el problema como programa lineal.

Solución

X_1 = Producción en cuartos de salsa Diablo
X_{11} = Cantidad de ingredientes A para la salsa Diablo
X_{12} = Cantidad de ingredientes B para la salsa Diablo
X_2 = Producción en cuartos de salsa Barón Rojo
X_{21} = Cantidad de ingredientes A para la salsa Barón Rojo
X_{22} = Cantidad de ingredientes B para la salsa Barón Rojo
La función objetivo es:

$$\text{Max. } Z = 3.35X_1 + 2.85X_2 - 1.60\,[X_{11} + X_{21}] - 2.95\,[X_{12} + X_{22}]$$

Las restricciones (1) y (2) son:

$$X_2 \leq 0.75X_{21}$$
$$X_1 \geq 0.25X_{11}$$
$$X_1 \geq 0.50X_{12}$$

Otras restricciones:

$$X_{11} + X_{21} \geq 40$$
$$X_{12} + X_{22} \geq 30$$
$$X_{11} + X_{12} = X_1$$
$$X_{21} + X_{22} = X_2$$
$$X_1, X_{11}........, X_{22} \geq 0$$

4. La Universidad de Chicago está planeando poner fertilizantes al pasto en el área de patios a la entrada de la primavera. El pasto necesita nitrógeno, fósforo y potasa al menos en las cantidades dadas en la fig. Están disponibles tres clases de fertilizantes comerciales; en la fig. 2 se da el análisis y los precios de ellos. Formule un modelo de programación lineal para determinar cuánto de cada fertilizante deben comprar para satisfacer los requerimientos a un costo mínimo

Requerimientos de Pasto

Mineral	**Peso mínimo (lb)**
Nitrógeno	10
Fósforo	7

Potasio	5

Características de los fertilizantes

Fertilizantes	Contenido de Nitrógeno (lb.)	Contenido de Fosforo (lb.)	Contenido de Potasio (lb.)	Precio ($/lb.)
I	25	10	5	10
II	10	5	10	8
III	5	10	5	7

Solución

Xi= Cantidad de fertilizantes i (i = 1, 2, 3) dado en fracción de unidad.

Min Z = $10X_1 + 8X_2 + 7X_3$

Sujeto a:

$$25X_1 + 10X_2 + 5X_3 \geq 10$$
$$10X_1 + 5X_2 + 10X_3 \geq 7$$
$$5X_1 + 10X_2 + 5X_3 \geq 5$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

5. Un vinatero desea mezclar vinos de 5 años diferentes i= (1,.., 5) para hacer tres tipos de vinos mezclados. La oferta disponible (en galones) de vino del año i es Si, i = 1,2,....,5. La mezcla 1 se considera especial, por lo que no se producirán más de 100 galones. En la figura se dan las restricciones de cada una de las mezclas. Se pide formular un programa lineal.

Datos Para La Mezcla De Vinos

Mezcla	Restricción	Beneficio (P/Galón)
1	Por lo menos el 60% debe provenir de los años 1 y 2 y no más del 10% de los años 4 y 5.	C1
2	Al menos el 50% debe provenir de los años 1,2 y 3	C2

3	No más del 50% del año 3	C3

Solución

Xj = Cantidad de galones de vino de la mezcla j (j = 1, 2, 3)
Xij= Cantidad de galones de vino del año i y de la mezcla j (i = 1.....5)

Max. $Z = C1\, X_1 + C2\, X_2 + C3\, X_3$

Sujeto a:

Restricciones debidas a las mezclas (ver figura)

$$X_{11} + X_{21} \geq 0.6X_1$$
$$X_{41} + X_{51} \leq 0.1X_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 0.5X_2$$
$$X_{33} \leq 0.5X_3$$

Restricciones debido a la oferta disponible y los componentes de las mezclas:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq S_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq S_2$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq S_3$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} \leq S_4$$
$$X_{51} + X_{52} + X_{53} \leq S_5$$
$$X_1 \leq 100$$

Finalmente las restricciones debido a las componentes de las mezclas:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = X_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = X_2$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = X_3$$
$$X_{11}, X_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

6. Un fraccionador de whisky importa el licor en tres distintas graduaciones A, B, y C. Mediante la mezcla de estos de acuerdo a sus fórmulas, se obtiene los whiskys de calidades comercializables ESCOCÉS, KILT y TARTAN. Las citadas fórmulas especifican las siguientes relaciones entre los elementos a mezclar.

MARCA	**ESPECIFICACIONES**	**PRECIO DE VENTA**
ESCOCÉS	No menos del 60% de A No más del 20% de C	680
KILT	No más del 60% de C No menos del 15% de A.	570
TARTAN	No más del 50% de C	450

Se conocen asimismo, las disponibilidades y precios de los licores A, B, y C.

TIPO	**LITROS DISPONIBLES**	**PRECIO DE COSTO $/LITRO**
A	2000	700
B	2500	500
C	1200	400

Se desea definir la composición de cada marca maximizar el beneficio.

Solución

Xi = Cantidad de litros de whisky de calidad ESCOCÉS, KILT, TARTAN, (i=1, 2, 3)

Xij= Cantidad de litros del licor j (j = A, B, C) que intervienen en preparar whisky.

$$\text{Max } z = 680X_1 + 570X_2 + 450X_3 - 700(X_{11} + X_{21} + X_{31}) - 500(X_{12} + X_{22} + X_{32}) - 400(X_{13} + X_{23} + X_{33})$$

ESCOCÉS

$$X_{11} \geq 0.60_{X1}$$
$$X_{13} \leq 0.20_{X1}$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{13} = {}_{X1}$$

KILT

$$X_{23} \leq 0.60_{X2}$$
$$X_{51} \geq 0.15_{X2}$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = X_2$$

TARTAN

$$X_{33} \leq 0.5X_3$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = X_3$$

Disponibilidad de los licores A, B, C.

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 2,000$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 2,500$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \leq 1,200$$
$$X_1, X_{11}, \ldots, X_{33} \geq 0$$

7. Una compañía petrolera produce dos tipos de gasolina que vende a 18 y 21 centavos de dólar por galón. La refinería puede comprar cuatro diferentes crudos con los siguientes análisis y costos:

Crudo	A	B	C	D
1	0.80	0.10	0.10	0.14
2	0.30	0.30	0.40	0.10
3	0.70	0.10	0.20	0.15
4	0.40	0.50	0.10	0.12

La gasolina cuyo precio de venta es 21 centavos de dólar por galón debe tener cuando menos 60% de A y no más de 35% de B. La de 18 centavos de dólar

por galón no debe tener más de 30% de C. En el proceso de mezclado se pierde, por evaporación 2% de A y 1% de B y C.
Demuéstrese como se determinan las cantidades relativas de crudo que se deben utilizar.

Solución

X_{ij} = Cantidad de crudo i (i = 1, 2, 3) que intervienen en la gasolina j (j = 1, 2)

La función objetivo es:

$$\text{Min. } Z = 0.14(X_{11} + X_{12}) + 0.10(X_{21} + X_{22}) + 0.15(X_{31} + X_{32}) + 0.12(X_{41}+X_{42})$$

Para determinar las cantidades de crudo a utilizar se parte de la producción de un galón de gasolina de cada tipo.
Como en el proceso de mezclado se pierde por evaporación parte de los elementos A, B, C; se registra a continuación los porcentajes que quedan de cada elemento y la suma total de estos componentes.

Crudo	A	B	C	D
1	0.784	0.099	0.099	0.982
2	0.294	0.297	0.396	0.987
3	0.686	0.099	0.198	0.983
4	0.392	0.495	0.099	0.986

Por ejemplo: el crudo 1 antes del proceso tiene el 80& del elemento A, en el proceso de mezclado pierde el 2% de A por evaporación, entonces queda sólo: 0.80 x 0.98 = 0.784% de A.

Finalmente sumando los porcentajes da como resultado 0.982.

$$0.982X_{11} + 0.987X_{21} + 0.983X_{31} + 0.986X_{4}1 = 1$$

$$0.982X_{12} + 0.987X_{22} + 0.983X_{32} + 0.986X_{42} = 1$$

Características de la gasolina tipo 2:

$$0.784X_{12} + 0.294X_{22} + 0.686X_{32} + 0.392X_{42} \geq 0.60\,(0.982X_{12} + 0.987X_{22} + 0.983X_{32} + 0.986X_{42})$$

$$0.099X_{12} + 0.297X_{22} + 0.099X_{32} + 0.495X_{42} \leq 0.35\,(0.982X_{12} + 0.987X_{22} + 0.983X_{32} + 0.986X_{42})$$

Características de la gasolina tipo 1:

$$0.099X_{11} + 0.396X_{21} + 0.198X_{31} + 0.099X_{41} \leq 0.30\,(0.982X_{11} + 0.987X_{21} + 0.983X_{31} + 0.986X_{41})$$

8. Una fábrica de vidrio produce dos tipos de vidrio para uso industrial que se hacen a base de Borosilicato de Plomo y, la mayor parte de las veces, a base de sustitutos. La empresa tiene almacenado Sílice, Plomo, Bórax y pedecería de vidrio, y dispone de dos mezcladoras y dos hornos para preparar sus productos, cada tipo de vidrio se procesa en cualquiera de las mezcladoras y en cualquier horno. Todo el vidrio plano se lamina en la misma máquina de modo que no es necesario considerar esta operación. Los productos y los factores de producción están relacionados como se muestra en las siguientes tablas:

Materia	**Composición (Tn)**		**Abastecimiento (Ton)**	**Costo (Ton)**
	Vidrio 1	Vidrio 2		
Bórax (A)	0.1	0.2	25000	100
Plomo (B)	0.1	0.2	35000	300
Silice (C)	0.8	0.5	50000	60
Pedecería (D)	0.0	0.1	15000	30

Máquina	**Composición (Tn)**		**Capacidad (Hor)**	**Costo Variable (Ton)**
	Vidrio 1	**Vidrio 2**		
Mezcladora L	0.4	0.2	2000	30
Mezcladora M	0.1	0.2	1000	50
Horno X	0.2	0.4	2000	40
Horno Y	0.5	0.2	1800	30

Los tipos de vidrio no se pueden sustituir uno con otro, por lo que es necesario producir cuando menos 100 toneladas de cada tipo para pedidos especiales. Si el precio de venta del vidrio 1 es de $ 200 la tonelada y el vidrio 2 es de $ 300 la tonelada. Formule el problema como un modelo de programación lineal para programar la producción de los tipos de vidrios.

Solución

Xi = Toneladas del vidrio tipo i (i = 1, 2)

Xij= Toneladas de vidrio tipo y que procesa la mezcladora L o M (j = L, M)

Xijk = Toneladas del vidrio tipo y que luego de procesar en la mezcladora j pasa a continuación al horno K (K = X, Y).

Restricciones de la Materia Prima:

$$
\begin{aligned}
0.1X_1 + 0.2X_2 &\leq 25{,}000 \\
0.1X_1 + 0.2X_2 &\leq 35{,}000 \\
0.8X_1 + 0.5X_2 &\leq 50{,}000 \\
0.1X_2 &\leq 15{,}000
\end{aligned}
$$

Del gráfico se desprenderá las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_{1L} + X_{1M} \\
X_{1L} &= X_{1LX} + X_{1LY} \\
X_{1M} &= X_{1MX} + X_{1MY} \\
X_2 &= X_{2L} + X_{2M} \\
X_{2L} &= X_{2LX} + X_{2LY} \\
X_{2X} &= X_{2MX} + X_{2MY}
\end{aligned}
$$

Restricciones del proceso de las mezcladoras:

$$
\begin{aligned}
0.4X_{1L} + 0.2X_{2L} &\leq 2{,}000 \\
0.1X_{1M} + 0.2X_{2M} &\leq 1{,}000
\end{aligned}
$$

Restricciones del proceso de los hornos:

$$0.2[X_{1LX} + X_{1MX}] + 0.4\,[X_{2LX} + X_{2MX}] \leq 2{,}000$$

$$0.5[X_{1LY} + X_{1MY}] + 0.2\,[X_{2LY} + X_{2MY}] \leq 1{,}800$$

Condiciones de Producción:

$$X_1 \geq 100$$
$$X_2 \geq 100$$
$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{2LM}, X_{2MY} \geq 0$$

La producción óptima se logro con la siguiente función objetivo:

$$\text{Max } Z = 200\,X_1 + 300\,X_2 - 100[0.1\,X_1 + 0.2\,X_2] - 300[0.1\,X_1 + 0.2\,X_2] - 60[0.8\,X_1 + 0.5\,X_2] - 30[0.1\,X_2] - 30[0.4\,X_{1L} + 0.2\,X_{2L}] - 50[0.1\,X_{1M} + 0.2\,X_{2M}] - 40[0.2(X_{1LX} + X_{1MX}) + 0.4(X_{2XL} + X_{2MX})] - 30[0.5(X_{1LY} + X_{1MY}) + 0.2\,(X_{2LY} + X_{2MY})]$$

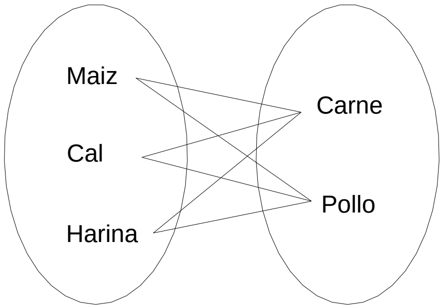
9. Un molino agrícola produce alimento para ganado y alimento para pollos. Estos productos se componen de 3 ingredientes principales, a saber: maíz, cal y harina de pescado. Los ingredientes contienen dos tipos principales de nutrientes por libra de cada ingrediente.

NUTRIENTES	**INGREDIENTES**		
Proteínas de calcio	**Maíz**	**Cal**	**Harina**
	25	15	25
	15	30	20

El contenido de proteína en el alimento para ganado debe estar en el intervalo [18 - 22] por libra, el contenido de calcio en el mismo alimento debe ser mayor o igual que 20 por libra. De igual manera, en el alimento para pollos el contenido de proteínas y el contenido de calcio deben estar en los intervalos [20 - 23] y [20 - 25], respectivamente. Supóngase que se dispone de 3000, 2500 y 100 libras de maíz, cal y harina de pescado es, respectivamente. El precio por libras de maíz, de cal y la harina de pescado es, respectivamente de \$0.10, \$0.10 y \$0.80. El ganado requiere de 4000 lb. de alimento, mientras que los pollos requieren 2000 lb.
Formúlese el problema de mezclado con el objeto de minimizar el costo.

Solución

El problema es visualizado en la figura siguiente, de donde a xij, como la cantidad de libras del ingrediente i, (i = 1, 2, 3), asignadas al alimento j, (j = 1, 2).



Se tiene las siguientes restricciones:

Disponibilidad de ingredientes

$$X_{11} + X_{12} = 3000$$
$$X_{21} + X_{22} = 2500$$
$$X_{31} + X_{32} = 100$$

Requerimientos de alimentos:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 4000$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 2000$$

Contenido de Nutrientes:

$$18 \leq \frac{25X_{11} + 15X_{21} + 25X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq 22$$

$$20 \leq \frac{15X_{11} + 30X_{21} + 20X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq 23$$

$$20 \leq \frac{25X_{11} + 15X_{21} + 25X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}}$$

$$20 \leq \frac{15X_{11} + 30X_{21} + 20X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq 25$$

La función objetiva es expresada como:

$$\text{Min } Z = 0.10X_{11} + 0.10X_{12} + 0.10X_{21} + 0.10X_{22} + 0.8X_{31} + 0.8X_{32}$$

El programa lineal puede quedar como:

$$\text{Min } Z = 0.10X_{11} + 0.10X_{12} + 0.10X_{21} + 0.10X_{22} + 0.8X_{31} + 0.8X_{32}$$

Sujeto a:

$$X_{11} + X_{12} = 3000$$
$$X_{21} + X_{22} = 2500$$
$$X_{31} + X_{32} = 100$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 4000$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 2000$$
$$3X_{11} - 7X_{21} + 3X_{31} \leq 0$$
$$7X_{11} - 3X_{21} + 7X_{31} \geq 0$$
$$-5X_{11} + 10X_{21} \geq 0$$
$$2X_{12} - 8X_{22} + 2X_{32} \leq 0$$
$$5X_{12} - 5X_{22} + 5X_{32} \geq 0$$
$$-10X_{12} + 5X_{22} - 5X_{32} \leq 0$$
$$-5X_{12} + 10X_{22} \leq 0$$
$$X_{ij} \geq 0$$

Como la suma de disponibilidad es menor que la suma de requerimientos (es decir, no se puede cumplir con la producción deseada), se ha forzado las restricciones de disponibilidad a ser de igualdad (en vez de menor igual) y las de requerimiento a menor o igual (en vez de mayor igual).

10. Todo el acero producido por Steelco tiene que cumplir con las siguientes especificaciones:

- 3.2% a 3.5% de carbono,
- 1.8 a 2.5% de Silicio,
- 0.9 a 1.2% de níquel,

Resistencia a la tracción de por lo menos 45 000 lb/pulg2.

Steelco produce acero mezclando dos aleaciones. El costo y las propiedades de cada aleación se dan en la Tabla mostrada. Supóngase que se puede determinar la resistencia a la tracción de una mezcla promediando las resistencias de las aleaciones que se mezclan. Por ejemplo, una mezcla de una tonelada que se compone de 40% de la aleación 1 y de 60% de la aleación 2, tiene una resistencia a la tracción de 0.4(42 0000) + 0.6(50 000). Utilice la programación lineal para determinar cómo minimizar los costos de producción de una tonelada de acero.

	Aleación 1	**Aleación 2**
Costo por tonelada ($)	190	200
Porcentaje de Silicio	2 %	2.5 %
Porcentaje de Níquel	1 %	1.5 %
Porcentaje de Carbono	3 %	4 %
Resistencia a la Tracción(lb/pulg^2)	42000	50000

Solución

X_i = cantidad de aleación i, (i = 1,2)

Componentes	**Tipo de Aleación**		**Especificación**
	Aleación 1	**Aleación 2**	**%**
Silicio	2	2.5	1.8 – 2.5
Níquel	1	1.5	0.9 – 1.2
Carbono	3	4	3.2 – 3.5
Costo ($) / Ton	190	200	

Min Z = $190X_1 + 200X_2$

Sujeto a:

$$0.02\,X_1 + 0.025\,X_2 \leq 0.025$$
$$0.02\,X_1 + 0.025\,X_2 \geq 0.018$$
$$0.01\,X_1 + 0.015\,X_2 \leq 0.012$$
$$X_1 + X_2 = 1$$
$$0.01\,X_1 + 0.015\,X_2 \geq 0.009$$
$$0.03\,X_1 + 0.04\,X_2 \leq 0.035$$
$$0.03\,X_1 + 0.04\,X_2 \geq 0.032$$
$$[X_1/(X_1 + X_2)]\,(42000) + [X_2/(X_1 + X_2)]\,(50000) \geq 450000 \quad (*)$$

Simplificando (*)

$$3000\,X_1 - 5000\,X_2 = 0$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

11. Feedco produce dos tipos de alimentos para ganado. Ambos productos están hechos completamente de trigo y de alfalfa. El alimento 1 debe contener por lo menos 80% de trigo, y el alimento 2 por lo menos 60% de alfalfa. El alimento 1 se vende a 1.50 U$ / lb, y el alimento 2 a 1.30 U$ / lb. Feedco puede comprar hasta 1000 lb de trigo a 0.50 U$ / lb y hasta 80 lb de alfalfa, a 0.40 U$ / lb. La demanda de ambos tipos de alimento no tiene límite. Formule un P.L. para maximizar las ganancias de Feedco.

Solución

Insumos	Alimento 1	Alimento 2	Compra max (lb)	Precio ($ / lb)
Trigo	>= 80%	>= 40%	1000	0.50
Alfalfa	<= 20%	<= 60%	800	0.40
Precio ($ / lb)	1.50	1.30		

Xij = Cantidad de insumo i (i = 1,2) contenido en el alimento j (j = 1,2)

X_1 = Alimento 1 = $X_{11} + X_{21}$

X_2 = Alimento 2 = $X_{12} + X_{22}$

$$X_{11} \geq 0.8\,(X_{11} + X_{21}) \quad \longrightarrow \quad 0.2X_{11} \geq 0.8\,X_{21}$$

$$X_{22} \geq 0.6\ (X_{12} + X_{22}) \longrightarrow 0.4X_{22} \geq 0.6\ X_{12}$$

$$\text{Max } Z = 1.5(X_{11} + X_{21}) + 1.30(X_{12} + X_{22}) - 0.5(X_{11} + X_{12}) - 0.4(X_{21} + X_{22})$$

Sujeto a:

$$X_{11} + X_{12} \leq 1000$$

$$X_{21} + X_{22} \leq 800$$

$$0.2X_{11} - 0.8X_{21} \geq 0$$

$$0.4X_{22} - 0.6X_{12} \geq 0$$

12. Feedco decidió otorgar a su cliente (supóngase que hay solamente un cliente) un descuento, dependiente de la cantidad comprada. Si el cliente compra más de 300 lb del producto 1, se le venderá cada libra que rebase las primeras 300 lb, a solo 1,25 dólares. Similarmente, si el cliente compra más de 300 lb del producto 2, se le venderá cada libra que rebase las primeras 300 lb, a sólo 1,00 dólar. Modifique el PL del problema 11 para tomar en cuenta los descuentos por la cantidad comprada. (Sugerencia: defina variables para el alimento vendido a cada precio).

Solución

Si la compra es mayor de 300 lb	Precio de venta ($ / lb)
Alimento 1	1.25
Alimento 2	1.00

Xij: Cantidad de j (j =T, A) en el alimento i (i = 1, 2)

Yi: Cantidad producida de alimento i (i = 1, 2)

Yij: Cantidad vendida de alimento i (i = 1, 2) con precio j (j = 1, 2)

T: Cantidad comprada de Trigo

A: Cantidad comprada de Alfalfa

$$\text{Max } Z = 1.5\ Y_{11} + 1.25\ Y_{12} + 1.30\ Y_{21} + Y_{22} - 0.5\ T - 0.4\ A$$

Sujeto a:

$$X_{1T} + X_{1A} = Y_1$$
$$X_{2T} + X_{2A} = Y_2$$

$X_{1T} \geq 0.8\ Y_1$
$X_{2A} \geq 0.6\ Y_2$
$T \leq 1000$
$A \leq 800$
$X_{1T} + X_{2T} = T$
$X_{1A} + X_{2A} = A$
$Y_{11} + Y_{12} = Y_1$
$Y_{21} + Y_{22} = Y_2$
$Y_{11} \leq 300$
$Y_{21} \leq 300$
$X_{1T}, X_{1A}, \ldots\ldots, Y_{11}, Y_{22} \geq 0$

13. Feedco decidió otorgar a su cliente (supóngase que hay solo un cliente) un descuento, dependiente de la cantidad comprada. Si el cliente compra más de 300 lb del producto 1, se le venderá cada libra que rebase las primeras 300 lb, a solo 1.25 dólares. Similarmente, si el cliente compra más de 300 lb del producto 2, se le venderá cada libra que rebase las primeras 300 lb, a solo 1.00 dólar. Modifique el PL del problema 11 para tomar en cuenta los descuentos por la cantidad comprada. (Sugerencia: defina variables para el alimento vendido a cada precio.

Solución (Verificar con el Problema anterior)

Sean: i: alimento1, alimento2 j: trigo, alfalfa

Xij =libras del alimento i(i=1,2) que contiene el componente j (j = 1, 2)
Xi =libras de alimento 1 producidos
Xj =libras de alimento 2 producidos
Y11 = libras de alimento 1 menor a 300 libras
Y12 = libras de alimento 1 mayor a 300 libras
Y21 = libras de alimento 2 menor a 300 libras
Y22 = libras de alimento 2 mayor a 300 libras

$$\text{Max } Z = 1.5Y_{11} + 1.25Y_{12} + 1.3Y_{22} - 0.5X_{11} - 0.5X_{21} - 0.4X_{12} - 0.4X_{22}$$

Sujeto a:

$X_1 - X_{11} - X_{12} = 0$
$X_2 - X_{21} - X_{22} = 0$
$X_1 - Y_{11} - Y_{12} = 0$
$X_2 - Y_{21} - Y_{22} = 0$

$$Y_{11} \leq 300$$
$$Y_{21} \leq 300$$
$$Y_{12} \geq 300$$
$$Y_{22} \geq 300$$
$$X_{11} - 0.8X_1 \geq 0$$
$$X_{22} - 0.6X2 \geq 0$$
$$X_{11} + X_{21} \leq 1000$$
$$X_{12} + X_{22} \leq 800$$

14. Un fabricante de gasolina para aviación vende dos clases de combustibles: A y B. El combustible A tiene 25% de gasolina de grado 1, 25% de gasolina de grado 2 y 50% de grado 3. El combustible B tiene 50% de gasolina de grado 2 y 50% de grado 3.. Hay 500 gln/hr. De grado 1 y 200 gln./hr de los grados 2 y3, disponible para su producción. Los costos son de 30 ctvs. ($0.30) por gln de grado 1, $0.60 por gln de grado 2 y $0.50 por gln. de grado 3. La clase A puede venderse a $0.75 por gln., mientras que la clase B alcanza $0.90/gln. ¿Qué cantidad puede producirse de cada combustible?

Solución

La información se resume en el siguiente cuadro:

Gasolina	Combustible		Costo ($ / gl.)	Disponibilidad (gl. / hr.)
	A	B		
Grado 1	0.25	-	0.30	500
Grado 2	0.25	0.50	0.60	200
Grado 3	0.50	0.50	0.50	200
Precio ($ / gl)	0.75	0.90		

Sea:

X_1 =La cantidad de galones a producirse del combustible A
X_2 =La cantidad de galones a producirse del combustible B

La cantidad de gasolina de cada grado a usarse será:

Para el grado 1: $0.25X_1$

Para el grado 2: $0.25X_1 + 0.50X_2$

Para el grado 3: $0.50X_1 + 0.50X_2$

Siendo el Costo Total:

$$0.3\ (0.25X_1) + (0.6)(0.25X_1 + 0.5X_2) + (0.5)(0.5)(X_1 + X_2)$$

Y su expresión simplificada:

$$0475X_1 + 0.55X_2$$

Por otro lado, el Ingreso por concepto de las ventas será:

$$0.75X_1 + 0.90X_2$$

Luego, la función Objetivo será la suma de las contribuciones (utilidad) de cada producto.

$$\text{Max } Z = 0.275X_1 + 0.35X_2$$

Las restricciones corresponden a la limitación que se tiene en el uso de cada grado de gasolina con respecto a la cantidad disponible, es decir:

$$\begin{aligned} 0.25X_1 &\leq 500 \\ 0.25X_1 + 0.50X_2 &\leq 200 \\ 0.50X_1 + 0.50X_2 &\leq 200 \\ X_1, \ldots\ldots, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

CASO: MODELOS DE TIEMPOS

1. Una cafetería trabaja las 24 horas del día y requiere de contratar una cierta cantidad de mozos para los servicios. Cada mozo trabaja 8 horas consecutivas. Se desea determinar el menor número de mozos que debe contratarse para satisfacer los siguientes requisitos.

Turno de horas al día		Número mínimo de mozos
1	02 – 10	04
2	06 – 14	08
3	10 – 18	10
4	14 – 22	07
5	18 – 02	12
6	22 – 06	04

Solución

X_1 = Número de mozos contratados en el turno i, (i= 1,..,6)

Términos	2	6	10	14	18	22
1						
2		X_1				
3			X_2			
4				X_3		
5					X_4	
6	X_6					X_5

Min $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

Sujeto a:

Restricciones de personal de mozos en el turno

$$X_1 + X_6 \geq 4$$
$$X_1 + X_2 \geq 8$$
$$X_2 + X_3 \geq 10$$
$$X_3 + X_4 \geq 7$$
$$X_4 + X_5 \geq 12$$
$$X_5 + X_6 \geq 4$$

Restricciones de signo:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

2. Una aerolínea desea asignar dos tipos de aviones a tres rutas. Cada avión puede hacer a lo más dos vueltas diarias. Además, se dispone de tres aviones del tipo A y 4 del tipo B. La capacidad de los aviones del tipo A es de 140 pasajeros y la de los aviones del tipo B es de 100 pasajeros.
El número esperado de pasajeros por día en las tres rutas es de 300, 700 y 220 respectivamente.
A continuación se resumen los costos de operación por viaje en las diferentes rutas:

Tipo de avión	Costo de operaciones de una ruta dada		
	1	2	3
A	3000	2500	2000
B	2400	2000	1800

Se pide formular el problema como un programa lineal a fin de minimizar los costos de operación.

Solución

X_{Ai} = Cantidad de vuelos por día en la ruta i (i = 1, 2, 3) de los aviones tipo A.
X_{Bi} = Cantidad de vuelos por día en la ruta i (i = 1, 2, 3) de los aviones tipo B.

$$\text{Min. } Z = 3000X_{A1} + 2500X_{A2} + 200X_{A3} + 2400X_{B1} + 2000X_{B2} + 1800X_{B3}$$

Sujeto a:

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} \leq 6$$
$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} \leq 8$$
$$140X_{A1} + 100X_{B1} \geq 300$$
$$140X_{A2} + 100X_{B2} \geq 700$$
$$140X_{A3} + 100X_{B3} \geq 220$$
$$X_{A1}, X_{A2}, \ldots, X_{B3} \geq 0$$

3. El Ghotam City National Bank abre de lunes a viernes, de las 9 a.m. hasta las 5 p.m. De experiencias anteriores, el banco sabe que necesita el número de cajeras, indicado en la tabla A. El banco contrata dos tipos de cajeras. Las cajeras de tiempo completo trabajan de 9 a 5, los cinco días de la semana, y tienen 1 hora de descanso para comer. (El banco determina cuando una empleada de tiempo completo puede comer, pero cada cajera tiene que comer entre mediodía y la 1 p.m. o entre la 1 y las 2 p.m.) Se les paga 8 dólares (incluyendo prestaciones complementarias) por hora (incluyendo la hora de la comida) a las empleadas de tiempo completo. El banco también contrata cajeras de tiempo parcial. Cada cajera de tiempo parcial debe trabajar exactamente 3 horas consecutivas cada día. Se les paga 5 dólares/h a una cajera de tiempo parcial (y no reciben beneficios complementarios). Para conservar una calidad adecuada del servicio, el banco ha decidido que se pueden contratar a lo sumo cinco cajeras de tiempo parcial. Formule un PL para cumplir con los requerimientos de las cajeras a un costo mínimo. Resuelve el PL en una computadora. Juegue con las respuestas del PL para determinar una política de contratación que éste cerca de minimizar los costos laborales.

TABLA A

PERIODO DE TIEMPO	CAJERAS REQUERIDAS
09 – 10	4
10 –11	3
11 – MEDIODIA	4
MEDIODIA – 01	6
01 –02	5
02 – 03	6
03 – 04	8
04 – 05	8

Solución

X_i = Número de Cajeras a tiempo completo en el turno i (i = 1, 4, 5)
Y_i = Número de Cajeras a tiempo parcial en el turno i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)

Turnos		Cajeras Requeridas en cada periodo de tiempo							
		Periodo de tiempo							
		T_1 9 -10	T_2 10 –11	T_3 11 -12	T_4 12 -1	T_5 1 - 2	T_6 2 - 3	T_7 3 - 4	T_8 4 - 5
Tipo de cajera	Tiempo Completo	X_1	X_1	X_1	X_4	X_5	X_1	X_1	X_1
	Tiempo Parcial	Y_1	Y_1	Y_1					
			Y_2	Y_2	Y_2				
				Y_3	Y_3	Y_3			
					Y_4	Y_4	Y_4		
						Y_5	Y_5	Y_5	
							Y_6	Y_6	Y_6

Requerimiento	4	3	4	6	5	6	8	8

$$\text{Min } Z = 64X_1 + 15Y_1 + 15Y_2 + 15Y_3 + 15Y_4 + 15Y_5 + 15Y_6$$

Sujeto a:

$X_1 + Y_1 \geq 4$
$X_1 + Y_1 + Y_2 \geq 3$
$X_1 + Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 4$
$X_4 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 6$
$X_5 + Y_3 + Y_4 + Y_5 \geq 5$
$X_1 + Y_4 + Y_5 + Y_6 \geq 6$
$X_1 + Y_5 + Y_6 \geq 8$
$X_1 + Y_6 \geq 8$
$X_4 + X_5 - X_1 = 0$
$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 \leq 5$

$X_1, X_4, X_5, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 \geq 0$

CASO: PROBLEMAS DE METAS DE TRABAJO

1. Un agente vendedor maneja 2 productos. Dicho agente no puede vender más de 10 unid/mes del producto 1 ó 39 unid/mes del producto 2. Para evitar una multa, el debe vender al menos 24 unidades del producto 2. El recibe una comisión del 10% sobre todas las ventas y debe pagar sus propios gastos, la cual se estima en $1,50 por hora gastada en hacer visitas. El trabaja un máximo de 80 hrs/mes. El producto 1 se vende en $150 por unidad y requiere un promedio de 1,5 horas por cada visita; la probabilidad de hacer una venta es de 0,5. El producto 2 se vende en $70 por unidad y requiere un tiempo de 30 minutos por cada visita, siendo la probabilidad de hacer una venta de 0,6.
¿Cuántas visitas mensuales debe hacer a los clientes de cada producto?

Solución

X_i = Numero de visitas para vender el producto i. (i = 1, 2)

LIMITES DE VENTAS:

$$0.5X_1 \leq 10$$
$$0.6X_2 \leq 39$$

$$0.6X_2 \geq 24$$

Tiempo Total de Visitas = Tiempo Disponible:

$$1.5X_1 + 0.5X_2 \leq 80$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Se pide optimizar el número de visitas:

$$\text{Max } Z = 0.1\,[150(0.5)\,X_1 + 70(0.6)\,X_2] - 1.5\,[1{,}5X_1 + 0{,}5X_2]$$

2. Alden Enterprises produce dos productos. Se puede fabricar cada producto en cualquiera de dos máquinas. En la tabla A, se dan los tiempos necesarios (en horas) para producir cada producto en cada máquina. Cada mes los clientes están dispuestos a comprar los productos hasta las cantidades y a los precios indicados en la tabla B. La meta de la compañía es maximizar los ingresos obtenidos mediante la venta de los productos durante los próximos dos meses. Formule un PL para ayudar alcanzar esta meta.

TABLA A

	MAQUINA 1	MAQUINA 2
Producto 1	4	3
Producto 2	7	4

TABLA B

	DEMANDAS		PRECIO(Dólares)	
	Mes 1	Mes 2	Mes 1	Mes 2
Producto 1	100	190	55	12
Producto 2	140	130	65	32

Solución

Sea:
X_{ijk} = Cantidad de producto i, fabricado en maquina j, en el mes k (i, j, k =1, 2)

Mes 1:

$$4X_{111} + 7X_{211} \leq 500$$
$$3X_{121} + 4X_{221} \leq 500$$

Mes 2:

$$4X_{112} + 7X_{212} \leq 500$$
$$3X_{122} + 4X_{222} \leq 500$$

Sea:

C_{ik} = La cantidad de producto i, vendida en el mes k (i, k = 1, 2)
N_{ik} = La cantidad de producto i, que no se vende en el mes k (i, k = 1, 2)

Está sujeta a las siguientes restricciones:

$$X_{111} + X_{121} = C_1 + N_{11}$$
$$C_{11} \leq 100$$

$$X_{211} + X_{22} = C_{21} + N_{21}$$
$$C_{21} \leq 140$$

$$X_{112} + X_{122} + N_{11} = C_{12} + N_{12}$$
$$C_{12} \leq 190$$

$$X_{212} + X_{222} + N_{21} = C_{22} + N_{22}$$
$$C_{22} \leq 130$$

Luego la función objetivo viene a ser la maximización de la venta de los productos durante los próximos dos meses.

$$\text{Max } z = 55C_{11} + 65C_{21} + 12C_{12} + 32C_{22}$$

CASO: PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN DE TIERRAS

1. Una empresa agrícola explota una finca de 200 Ha., de regadío, que puede dedicarse en principio a dos cultivos C_1 y C_2. Los ingresos y costos variables por hectáreas para cada cultivo figuran en la siguiente tabla:

Cultivo	**Ingresos (S/. / Ha)**	**Costos Variables (S/. / Ha)**
Cultivo C_1	14.000	6.000
Cultivo C_2	15.000	6.000

El cultivo C_1 puede repetirse indefinidamente todos los años en la misma parcela; en cambio el cultivo C_2 ha de implementarse en parcelas que el año anterior llevaron otro cultivo; pues sino se sigue esta norma técnica (rotación de cosechas), disminuirán apreciablemente los rendimientos.
El agua para riego es de 1 lt/seg. y por hectárea, es decir 610,000 m2 al mes para toda la finca.
Las necesidades de agua de los cultivos en el mes próximo:

Cultivo C_1 = 3.000 m3/Ha.

Cultivo C_2 = 4.000 m3/Ha.

La cosecha C_2 solo tiene salida en el mercado local, que puede absorber como máximo la producción de 60 Ha. de dicho cultivo.
El fin de la programación es, en este caso, determinar la superficie, que deben cultivarse C_1 y C_2 para que el beneficio sea máximo.

Solución

Xi = Número de hectáreas para el cultivo i (y =1, 2)

Max Z = $14000X_1 + 15000X_2 - 6000X_1 - 6000X_2$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 = 200$$
$$X_2 \leq X_1$$
$$3000X_1 + 4000X_2 \leq 610000$$
$$X_2 < 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

2. La Canadian Parks Comission vigila dos terrenos. El terreno 1 está formado de 300 acres y el terreno 2 por 100 acres. Se puede utilizar cada acre del terreno 1 para abetos, la caza o para ambas cosas. Se puede utilizar cada acre del terreno 2 para abetos, para acampar o para ambas cosas. En la tabla, se da el capital, (en cientos de dólares) Y la mano de obra (días hombre) que se necesitan para mantener un acre de cada terreno, y la ganancia (miles de dólares) por acre, para cada uso posible del suelo. Se dispone un capital de 150000 y 200 días-hombre de trabajo. ¿Cómo se tiene que asignar el suelo a los usos diferentes, para maximizar la ganancia recibida de los dos terrenos?

	Capital	**Mano de obra**	**Ganancia**
Terreno 1 Abetos	3	0.1	0.2
Terreno 1 Caza	3	0.2	0.4
Terreno 1 Ambas cosas	4	0.2	0.5
Terreno 2 Abetos	1	0.05	0.06
Terreno 2 Acampar	30	5	0.09
Terreno 2 Ambas cosas	10	1.01	1.1

Solución

X_{ij} = # de acres del terreno i (1 ,2) para la actividad j (1, 2, 3)

$$\text{Max } Z = 0.2X_{11} + 0.4X_{12} + 0.5X_{13} + 0.06X_{21} + 0.09X_{22} + 1.1X_{23}$$

Sujeto a:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 300$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 100$$

$$300X_{11} + 300X_{12} + 400X_{13} + 100X_{21} + 3000X_{22} + 1000X_{23} \leq 150000$$
$$0.1X_{11} + 0.2X_{12} + 0.2X_{13} + 0.05X_{21} + 5X_{22} + 1.01X_{23} \leq 200$$

CASO: PROBLEMAS DE TRANSPORTE

1. Una empresa empaca frutas envueltas para regalo de aniversario. Los paquetes son envueltos en dos tiendas diferentes desde las cuales son enviadas a cinco vendedoras diferentes. El costo de empacar los productos en las tiendas 1 y 2 es de $ 5.25 y $ 5.70 respectivamente, las predicciones de la empresa sobre la demanda indica que los embarques deben ser como se indica en la Tabla 1. La capacidad de empaque de la tienda 1 es de 20,000 paquetes y la tienda 2 de 12,000. Los costos de distribución desde las dos tiendas se dan en la Tabla 2, formule un modelo de programación lineal para determinar cuántos paquetes debe enviar la empresa desde cada tienda a cada vendedor.

DEMANDA DE LOS MAYORISTAS

Vendedor Mayorista	1	2	3	4	5
Embarques requeridos	4,000	6,000	2,000	10,000	8,000

COSTOS DE DISTRIBUCION

De la tienda	Al vendedor mayorista				
	1	2	3	4	5
1	0.06	0.04	0.12	0.12	0.05
2	0.15	0.09	0.05	0.08	0.08

Solución

X_{ij} = Cantidad de paquetes entregados por la tienda i al vendedor j (i = 1,2) (j = 1,2,3,4,5).

Se debe minimizar el costo del paquete y distribución de las tiendas a los vendedores.

$$Min\ Z = 5.31X_{1\,1} + 5.29X_{12} + 5.37X_{13} + 5.37X_{14} + 5.3X_{15} + 5.85X_{21} + 5.79X_{22} + 5.75X_{23} + 5.78X_{24} + 5.78X_{25}$$

Sujeto a:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \leq 20,000$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} \leq 12{,}000$$
$$X_{11} + X_{21} \geq 4{,}000$$
$$X_{12} + X_{22} \geq 6{,}000$$
$$X_{13} + X_{23} \geq 2{,}000$$
$$X_{14} + X_{24} \geq 10{,}000$$
$$X_{15} + X_{25} \geq 8{,}000$$
$$X_{11}\ldots\ldots\ldots\ldots X_{25} \geq 0$$

CASO: PROBLEMA DE POLÍTICAS Y PRÉSTAMOS BANCARIOS

1. Tengo ahora $ 100. Durante los próximos 3 años se tiene proyectado realizar las siguientes inversiones:

- Inversión A: Cada dólar invertido ahora produce $0.10 dentro de 1 año y $1.3 dentro de 3 años.
- Inversión B: Cada dólar invertido ahora produce $0.2 dentro 1 año y 1.1 dentro de 3 años.
- Inversión C: Cada dólar invertido dentro de 1 año, producirá $1.5 dentro de 3 años.
- Cada año se puede colocar el dinero no invertido en fondos del mercado de dinero, lo que produce 6 % de interés anual. Se puede colocar a lo más 50% en cada una de las inversiones A, B, C.

Formule un P.L para maximizar efectivo en caja dentro de 3 años.

Solución

X_{ij} = Inversión de tipo i en el año j, (i = A, B, C; j = 1, 2, 3)

X_i = Inversión de tipo i para 3 años

X_{Fj} = Cantidad no invertida en el año j.

AÑO 1

$$X_{A1} + X_A \leq 50$$
$$X_B1 + X_B \leq 50$$
$$X_{A1} + X_A + X_{B1} + X_B + X_{F1} = 100$$

AÑO 2

Dinero disponible: $1.1X_{A1} + 1.2X_{B1} + 1.06X_{F1}$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_C + X_{F2} = 1.1X_{A1} + 1.2X_{B1} + 1.06X_F$$
$$X_{A2} \leq 0.5\,(1.1X_{A1} + 1.2X_{B1} + 1.06X_{F1})$$
$$X_{B2} \leq 0.5\,(1.1X_{A1} + 1.2X_{B1} + 1.06X_{F1})$$
$$X_C \leq 0.5\,(1.1X_{A1} + 1.2X_{B1} + 1.06X_{F1})$$

AÑO 3

Dinero disponible: $1.1X_{A2} + 1.2X_{B2} + 1.06X_{F2}$

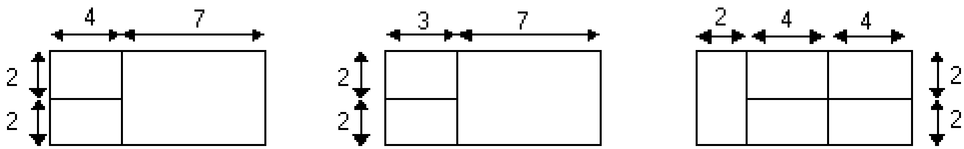
$$X_{A3} + X_{B3} + X_{F3} = 1.1X_{A2} + 1.2X_{B2} + 1.06X_{F2}$$
$$X_{A3} \leq 0.5\,(1.1X_{A2} + 1.2X_{B2} + 1.06X_{F2})$$
$$X_{B3} \leq 0.5\,(1.1X_{A2} + 1.2X_{B2} + 1.06X_{F2})$$

Al final de tercer año:

$$\text{Max } Z = 2.3X_A + 2.1X_B + 2.5X_C + 1.1X_{A3} + 1.2X_{B3} + 1.06X_{F3}$$

CASO: PROBLEMAS DE RESIDUO DE CORTE

1. Un fabricante de láminas metálicas recibe un pedido para producir 2000 láminas de tamaño 2´ x 4´ y 1000 láminas de tamaño 4´ x 7´. Se dispone de dos láminas estándar de tamaños 10´ x 3000´ y 11´ x 2000´. El personal del departamento de Ingeniería decide que los tres siguientes patrones de corte son adecuados para satisfacer el pedido.



PATRON I PATRON II PATRON III

Formular el problema cómo un programa lineal para satisfacer el pedido y minimizar el desperdicio.

Solución

X = Número de láminas del patrón 1 extraídas de la lámina de 11’ x 2000´.
Y = Número de láminas del patrón 2 extraídas de la lámina de 10´ x 3000´.
Z_1 = Número de láminas del patrón 3 extraídas de la lámina de 10´ x 3000´.

Z_2 = Número de láminas del patrón 3 extraídas de la lámina de 11´ x 2000´.

Considerando que cada 4´ se efectúa un corte de cada una de las láminas estándar, se tiene:

Patrones extraídos de las láminas 11´ x 2000´ y 10´ x 3000´

$$X + Z_2 \leq 500$$
$$Y + Z_1 \leq 750$$

Láminas de 2´ X 4´ Y 4´ X 7´:

$$2X + Y + 5Z_1 + 5Z_2 \geq 2000$$
$$X + Y \geq 1000$$
$$X, Y, Z_1, Z_2 \geq 0$$

Se entiende por desperdicios a los residuos que son generados a partir de la confección de los patrones 2 y 3.

Max $Z = Y + Z_2$

2. Una papelera produce papel en bobinas de un ancho definido por las características de sus equipos de proceso. De acuerdo a la política de ventas de la compañía, a determinados compradores se les preparan bobinas de un ancho menor al de las bobinas estándar, por lo cual ésta debe ser cortada para satisfacer la demanda.
La empresa desea hacer la cantidad total de recortes desechables tan pequeña como sea posible.
El caso en estudio presenta una producción de bobinas de 215 cm. De ancho, debiéndose cumplir con los siguientes pedidos:

LONGITUD DEL PEDIDO (m)	**ANCHO (cm)**
18,000	64
9,000	60
9,000	35

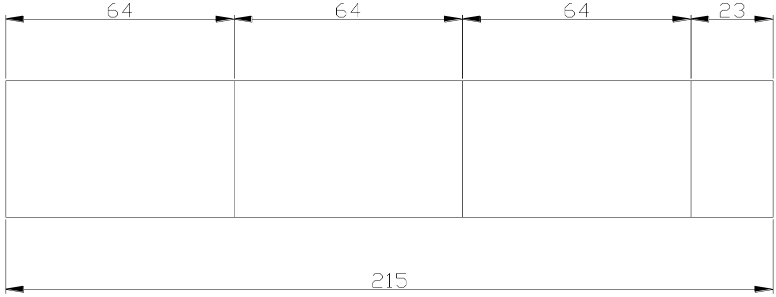
Se aclara que los cortes deben efectuarse en sentido longitudinal y que los mismos no necesitan estar formados por una sola tira.

Solución

Se debe establecer los posibles patrones de corte, o sea las distintas maneras que se ha de cortar la bobina a fin de satisfacer los pedidos.
X_i = Longitud de la tira en metros del patrón i

ANCHO (cm) / LONGITUD (m)	**64**	**60**	**35**	**Ancho Del Recorte**
X_1	3	-	-	23
X_2	2	1	-	27
X_3	2	-	2	17
X_4	1	2	-	31
X_5	1	1	2	21
X_6	1	-	4	11
X_7	-	2	2	25
X_8	-	3	1	--
X_9	-	-	6	5

Ejemplo Del Primer Patrón: X_1



Tiras de 64 cm. de ancho:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 18000$$

Tiras de 60 cm. de ancho:

$$X_2 + 2X_4 + X_5 + 2X_7 + 3X_8 \geq 9000$$

Tiras de 35 cm. de ancho:

$$2X_2 + 2X_5 + 4X_6 + 2X_7 + X_8 + 6X_9 \geq 9000$$
$$X_1, \ldots.., X_9 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 23X_1 + 27X_2 + 17X_3 + 31X_4 + 21X_5 + 11X_6 + 25X_7 + 5X_9$$

1.3 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL PREPARADOS CON LINGO

1. Una compañía elabora dos productos P_1 y P_2, cada uno requiere e componentes C_1 y C_2, la disponibilidad de los componentes y precio de venta de muestra en el siguiente cuadro:

Producto	Componentes		Precio de Venta (S/./Unidad)
	C_1	C_2	
P_1	1	2	4
P_2	3	1	3
Dispone	15000	10000	

Se pide formular el problema y optimizar el ingreso de ventas:

Solución:

!PROBLEMA Nº1;

```
!PROD=TIPO DE PRODUCTO  PV=PRECIO DE VENTA DE PRODUCTO;
!COM=COMPONENTES  DISP=DISPONIBILIDAD DE LOS COMPONENTES;
!CANT=COMPONENTES PARA CADA PRODUCTO  X=CANTIDAD DEL
PRODUCTO(1,2);

SETS:
PROD/1..2/:PV,X;
COM/1..2/:DISP;
MATRIZ(PROD,COM):CANT;
ENDSETS

DATA:
PV=4,3;
DISP=15000,10000;
CANT=1,2,
     3,1;
ENDDATA

MAX=@SUM(PROD:PV*X);
@FOR(COM(J):@SUM(PROD(I):CANT(I,J)*X(I))<=DISP(J));
```

2. **(PROPUESTO)** La capacidad de producción de TEXTIL-PERU es de 900 unidades mensuales. Los costos unitarios de producción y el compromiso mensual de venta a EXPORT-PERU son como sigue:

Mes	Costo de Producción (S/. / unidades)	Venta (Unidades)
1	100	300
2	150	350
3	200	400

3. **(PROPUESTO)** FLORANID S.A., es una empresa dedicada a la comercialización de abonos para plantas que emplea 3 tipos diferentes de ingredientes A, B y C, para conseguir 3 tipos de abonos 1, 2, y 3.

En cuanto a los ingredientes, su disponibilidad es limitada y sus costos son los siguientes:

INGREDIENTE	**CANTIDAD DISPONIBLE (kg)**	**COSTOS (S/./ kg)**
A	4.000	1.300
B	6.000	1.500
C	2.000	1.000

Las utilidades para los abonos son:

Abono 1 $\Rightarrow$ 2.0 S/./ kg
Abono 2 $\Rightarrow$ 3.0 S/./ kg
Abono 3 $\Rightarrow$ 1.5 S/./ kg

Además de lo anterior, los ingredientes han de mezclarse en proporciones específicas para asegurar una combinación adecuada:
Para el abono 1, no menos del 25 % de A y no más del 40 % de C; para el abono 2, no menos del 30 % de A, no menos del 20 % ni más del 30 % de B y no más del 15 % de C; y para el abono 3, no menos del 35 % de B.

Con todos los datos que FLORANID S.A. nos ha facilitado, nos piden que determinemos: ¿Cuánta cantidad de cada tipo de abono hay que producir de forma que se maximice el beneficio de la compañía?

Solución:

Con los datos podemos construir un primer esquema que nos permitirá desarrollar el modelo de programación lineal para la resolución del problema:

INGREDIENTES	**ABONOS**			**CANTIDAD DISPONIBLE (kg)**	**COSTOS (S/. /kg)**
	1	**2**	**3**		
A	X_{11}	X_{12}	X_{13}	4000	1300
B	X_{21}	X_{22}	X_{23}	6000	1500
C	X_{31}	X_{32}	X_{33}	2000	1000

4. **(PROPUESTO)** Una compañía vende dos mezclas diferentes de nueces. La mezcla más barata contiene un 80% de cacahuates y un 20% de nueces, mientras que las más cara contiene 50% de cada tipo. Cada semana la compañía obtiene 1800 kilos de cacahuates y 1200 kilos de nueces de sus fuentes de suministros. ¿Cuántos kilos de cada mezcla debería producir a fin de maximizar las utilidades si las ganancias son de $ 10 por cada kilo de la mezcla más barata y de $ 15 por cada kilo de la mezcla más cara?

MEZCLA	CACAHUATE	NUEZ	GANANCIA POR SEMANA
BARATA	80%	20%	$10 POR KILO
CARA	50%	50%	$ 15 POR KILO

5. **(PROPUESTO)**Una empresa de servicios debe proveer personal de vigilancia a sus clientes durante el próximo año en las siguientes cantidades estimadas:

    1. trimestre: 7000dias vigilante.
    2. trimestre: 8500dias vigilante
    3. trimestre: 6500dias vigilante
    4. trimestre: 9000dias vigilante

Un vigilante debe ser entrenado durante cinco días antes de estar disponible para asignarlo a los clientes.
Existe 65 días de trabajo en cada trimestre y al inicio del primer trimestre existen 120 vigilantes calificados en la nómina. Los vigilantes son pagados por la empresa

y no por el cliente; ellos ganan un salario de S/.500 al mes. Durante cada trimestre la empresa pierde el 15) de su personal (incluyendo vigilantes entrenados en el trimestre anterior). Formular la PL.

6. Los requerimientos para la producción de 3 tipos de barras de chocolate así como la cantidad de recursos y la utilidad de cada tipo se muestran en el siguiente cuadro:

Materia prima	B_1	B_2	B_3	Cantidad disponible
Azúcar	1	1	1	50
Chocolate	2	3	1	100
Ganancia unitaria	3	7	5	

Solución:

```
!D=CANTIDAD DISPONIBLE  G=GANANCIA UNITARIA;
!IN=MATERIA PRIMA  B=TIPO DE BARRA DE CHOCOLATE;
!P=REQUERIMIENTOS PARA CADA PRODUCTO  ;

sets:
in/1..2/:d;
b/1..3/:p,g;
ca(in,b):uso;
endsets

data:
g=3 7 5;
d=50 100;
uso=  1 1 1
     2 3 1;
enddata

max=@sum(b:p*g);
@for(in(i):@sum(b(j):uso(i,j)*p(j))<=d(i));
end

      MAX     3 P( 1) + 7 P( 2) + 5 P( 3)
```

```
SUBJECT TO
2]   P( 1) + P( 2) + P( 3) <=    50
3]   2 P( 1) + 3 P( 2) + P( 3) <=   100
END
```

7. Las fabricas F1 y F2 tienen una capacidad de producción de 30 y 20 unidades respectivamente, se tiene además 3 centros de demanda C1, C2 y C3, con capacidades de 10, 25 y 15 unidades respectivamente; finalmente el costo unitario de transporte de las Fabricas a los Centros es como sigue:

Fabrica / Centro	C_1	C_2	C_3
F1	2	4	6
F2	7	10	1

Minimizar el costo de la manera más óptima.

Solución:

La solución de este problema es un problema tipo clásico y sencillo de transporte, el cual se resolverá de la siguiente forma en LINGO.

```
!CP=CAPACIDAD DE PRODUCCION  D=CAPACIDAD DE DEMANDA;
!CT=COSTO UNITARIO DE TRANSPORTE   X=CANTIDAD A TRANSPORTAR;

sets:
f/1..2/:cp;      !Fabricas con su respectivo costo de
producción
c/1..3/:d;       !Centros de demanda y su respectivo
valor de demanda
rutas(f,c):ct,x;
endsets

data:
cp=30,20;
d=10,25,15;
ct=2 4  6,
   7 10 1;
enddata

min = @sum(rutas:ct*x);
      !Función Objetivo
```

```
@for(c(j):@sum(f(i):x(i,j))>=d(j));
@for(f(i):@sum(c(j):x(i,j))<=cp(i));
end
```

Formulación:

```
MIN      2 X( 1,  1) + 4 X( 1,  2) + 6 X( 1,  3) + 7 X( 2,
1) + 10 X( 2, 2)
      + X( 2, 3)
 SUBJECT TO
 2]   X( 1, 1) + X( 2, 1) >=   10
 3]   X( 1, 2) + X( 2, 2) >=   25
 4]   X( 1, 3) + X( 2, 3) >=   15
 5]   X( 1, 1) + X( 1, 2) + X( 1, 3) <=   30
 6]   X( 2, 1) + X( 2, 2) + X( 2, 3) <=   20
 END
```

8. Steelco produce dos tipos de acero en tres diferentes acerías. Durante un mes dado, cada acería dispone de 200 horas de alto horno. El tiempo y el costo de producción de una tonelada de acero, difiere de una fábrica a otra, debido a las diferencia en los hornos de cada fábrica. En el cuadro siguiente se muestran el tiempo y el costo de producción para cada fábrica. Cada mes, Steelco tiene que producir por lo menos 500 toneladas de acero 1 y 600 toneladas de acero2. formule un PL, para minimizar los costos para producir el acero deseado.

ACERIA	ACERO 1		ACERO 2	
	COSTO	TIEMPO	COSTO	TIEMPO
ACERIA 1	10	20	11	22
ACERIA 2	12	24	9	18
ACERIA 3	14	28	10	30

Solucion:

```
!X=CANTIDAD PRODUCIDA;

SETS:
aceria/1..3/:horas;
acero/1..2/:cantidad;
rutas(aceria,acero):costo,tiempo,x;
```

```
ENDSETS

DATA:
horas=12000,12000,12000;
cantidad=500,600;

costo=10 11,
  12 9,
  14 10;

tiempo=20 22,
  24 18,
  28 30;
ENDDATA

min=@sum(rutas:costo*x);
@for(acero(j):@sum(aceria(i):x(i,j))>=cantidad(j));
@for(aceria(i):@sum(acero(j):tiempo(i,j)*x(i,j))<=horas(i));
END
```

9. Una Tienda de animales ha determinado que cada Hámster debería recibirla al menos 70 unidades de proteína. 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasa. Si la tienda vende los seis tipos de alimentos mostrados en la tabla. ¿Qué mezcla de alimento satisface las necesidades a un costo mínimo para la tienda?

Alimento	Proteínas (Unid /Oz)	Carbohidratos (Unid /Oz)	Grasa (Unid / Oz)	Costo (Oz)
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

Solución:

```
!TIPO=TIPO DE ALIMENTO   CO=COSTO DEL ALIMENTO POR ONZA;
!MACRO=TIPO DE MACRONUTRIENTE  UNID=UNIDADES QUE DEBE RECIBIR
EL HAMSTER;
!CANT= CANTIDAD DE MACRONUTRIENTES  X=CANTIDAD A MEZCLAR;
```

```
SETS:
TIPO/1..6/:CO,X;
MACRO/1..3/:UNID;
MATRIZ1(TIPO,MACRO):CANT;
ENDSETS

DATA:
CO=2,3,5,6,8,8;
UNID=70,100,20;
CANT=20,50,4,
     30,30,9,
     40,20,11
     40,25,10,
     45,50,9,
     30,20,10;
ENDDATA

MIN=@SUM(TIPO:CO*X);
@FOR(MACRO(J):@SUM(TIPO(I):CANT(I,J)*X(I))>=UNID(J));

END
```

10. Las capacidades de producción del producto P de las fábricas A y B, los costos por unidad transportada a los centros de consumo C_1 y C_2 y las demandas de estos son como sigue:

Fabrica	Costos de Transporte		Producción
	C1	C2	
A	5	10	300
B	12	3	400
Demanda	250	350	

Solución:

```
!FAB=FABRICA(1,2)   PROD=PRODUCCION DE CADA FABRICA;
!CEN=CENTRO (1,2)   DEM=DEMANDA;
!CO= COSTO DE TRANSPORTE  X=UNIDADES TRANSPORTADAS;

SETS:
FAB/1..2/:PROD;
CEN/1..2/:DEM;
```

```
MATRIZ1(FAB,CEN):CO,X;
ENDSETS

DATA:
PROD=300,400;
DEM=250,350;
CO= 5,10,
    12,3;
ENDDATA

MIN=@SUM(MATRIZ1:CO*X);
@FOR(FAB(I):@SUM(CEN(J):X(I,J))<=PROD(I));
@FOR(CEN(J):@SUM(FAB(I):X(I,J))>=DEM(J));

END
```

11. Cuatro productos se procesan en secuencia de dos maquinas. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes al problema.

Tiempo de fabricación por unidad (hora)						
Máquina	Costo ($) / hora	Producto 1	2	3	4	Capacidad (hora)
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
Precio de venta		65	70	55	45	

```
!MAQ=MAQUINA(1,2)          CAP=CAPACIDAD     DE     CADA
MAQUINA(HORAS);
!PROD=PRODUCTO(1,2,3,4)   PV=PRECIO DE VENTA;
!TM= TIEMPO   X=UNIDADES PRODUCIDAS   UTI= UTILIDAD;

SETS:
MAQ/1..2/:CAP;
PROD/1..4/:PV;
MATRIZ1(MAQ,PROD):TM,X,uti;
ENDSETS

DATA:
CAP=500,380;
PV=65,70,55,45;
```

```
TM= 2,3,4,2,
    3,2,1,2;
UTI=45,40,15,25
    50,60,50,35;
ENDDATA

MAX=@SUM(MATRIZ1:UTI*X);
@FOR(MAQ(I):@SUM(PROD(J):TM(I,J)*X(I,J))<=CAP(I));

END
```

12. Para una jornada de 24 horas un hospital esta requiriendo el siguiente personal para el área de enfermería, se define 6 turnos de 4 horas cada uno.

Turno	Número mínimo de personal
2:00 - 6:00	4
6:00 - 10:00	8
10:00 - 14:00	10
14:00 - 18:00	7
18:00 - 20:00	12
20:00 - 24:00	4

Los contratos laborales son de 8 horas consecutivas por día. El objetivo es encontrar el número menor de personas que cumplan con los requerimientos. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

Solución:

X_i = Cantidad de personal por cada turno i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Necesidades de personal por horario						
Horas	2:00 - 6:00	6:00 - 10:00	10:00 - 14:00	14:00 - 18:00	18:00 - 20:00	20:00 - 24:00
	X_1	X_1				
		X_2	X_2			
			X_3	X_3		

				X_4	X_4	
					X_5	X_5
	X_6					X_6
Personal	4	8	10	7	12	4

MIN $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_4 + X_5 + X_6$

Sujeto a:

Turno 1: $X_1 + X_6 >= 4$
Turno 2: $X_1 + X_2 >=8$
Turno 3: $X_2 + X_3 >=10$
Turno 4: $X_3 + X_4 >=7$
Turno 5: $X_4 + X_5 >=12$
Turno 6: $X_5 + X_6 >=4$

```
!HORAS=TUENO  X=CANTIDAD DE PERSONAL POR TURNO;
!PERS=PERSONAL  MIN=PERSONAL MINIMO;
!CANT=PERSONAL  POR  TURNO  (1=EXISTE  PERSONAL  EN  EL
TURNO, 0= NO EXISTE PERSONAL EN EL TURNO);

SETS:
HORAS/1..6/:X;
PERS/1..6/:MIN;
MATRIZ1(HORAS,PERS):CANT;
ENDSETS

DATA:
MIN=4,8,10,7,12,4;
CANT=1,1,0,0,0,0,
     0,1,1,0,0,0,
     0,0,1,1,0,0,
     0,0,0,1,1,0,
     0,0,0,0,1,1,
     1,0,0,0,0,1;
ENDDATA

MIN=@SUM(HORAS:X);
@FOR(PERS(J):@SUM(HORAS(I):CANT(I,J)*X(I))>=MIN(J));
```

```
END

MIN      X( 1) + X( 2) + X( 3) + X( 4) + X( 5) + X( 6)
 SUBJECT TO
 2]   X( 1) + X( 6) >=   4
 3]   X( 1) + X( 2) >=   8
 4]   X( 2) + X( 3) >=   10
 5]   X( 3) + X( 4) >=   7
 6]   X( 4) + X( 5) >=   12
 7]   X( 5) + X( 6) >=   4
 END
```

13. Se desean invertir 2 mil dólares en 6 tipos de inversión cuyas características son las siguientes:

Tipo de Inversion	Interes Anual (%)	Factor de Riesgo	Plazo promedio de inversion
1	8.5	0.02	8
2	9	0.01	2
3	8.5	0.38	5
4	14.3	0.45	6
5	6.7	0.07	2
6	13	0.35	4

El factor de riesgo significa la probabilidad de que el rendimiento real sea inferior al esperado. Se considera ventajoso un período promedio ponderado de inversión de ciando menos 5 años; pero el factor promedio ponderado de riesgo no debe ser superior a 0.20. La ley prohíbe que la suma de las inversiones de los tipos 4 y 6 sea mayor al 25% del total de la inversión. Con P.L formule un modelo de P.L para decidir cómo invertir para maximizar el rendimiento de los 2 millones de dólares.

```
!TIPO=TIPO DE INVERSION   INV= INVERSION SUJETA A FACTORES;
!INT=INTERES ANUAL X=CANTIDAD DE DOLARES A INVERTIR EN LA INVERSION;
```

```
!DAT= CARACTERISTICAS;

SETS:
TIPO/1..4/:INV;
CAR/1..6/:INT,X;
MATRIZ1(TIPO,CAR):DAT;
ENDSETS

DATA:
INT=8.5,9,8.5,14.3,6.7,13;
INV= 2000,400,10000,500;
DAT= 1,1,1,1,1,1,
     0.02,0.01,0.38,0.45,0.07,0.35,
     8,2,5,6,2,4,
     0,0,0,1,0,1;
ENDDATA

MIN=@SUM(CAR:0.01*INT*X);
@FOR(TIPO(I):@SUM(CAR(J):DAT(I,J)*X(J))>=INV(I));

END
```

14. Salvaje Oeste produce dos clases de sombrero vaquero. Un sombrero de la clase 1 requiere el doble de mano de obra que uno de la clase 2. Si toda la mano de obra se dedicara solo a la clase 2, la empresa podría producir diariamente 400 de estos sombreros. Los límites de mercado respectivos son 150 y 200 sombreros diarios para esas clases. La utilidad es $8 por cada sombrero de la clase 1, y $5 por cada uno de la clase 2.

Solución:

```
!Rhs=Recursos U=Utilidad de cada sombrero;
!Aij=Coeficientes de las variables    X= Cantidad de
sombreros a producir;

SETS:
VARI/1..3/:Rhs;
VARJ/1..2/:U,X;
ConsVar(VARI,VARJ):Aij;
ENDSETS
```

```
DATA:
Rhs=400,150,200;
U=8,5;
Aij= 2,1,
     1,0,
     0,1;
ENDDATA

MAX=@SUM(VARJ:U*X);
@FOR(VARI(I):@SUM(VARJ(J):Aij(I,J)*X(J))<=Rhs(I));
END
```

15. Blubber Maid, Inc. Fabrica tres productos de caucho: Airtex (material esponjoso), Extendex (material elástico) y Resistex (material rígido). Los tres productos requieren los mismos tres polímeros químicos y una base. La cantidad de cada ingrediente usado por libra del producto final se muestra en la siguiente tabla.

Producto	Ingrediente (OZ/LB de producto)			
	Polímero A	Polímero B	Polímero C	Base
Airtex	4	2	4	6
Extendex	3	2	2	9
Resistex	6	3	5	2
Inventario	500	425	650	1100

Cada producto tiene una utilidad de 7, 7 y 6 S/. ; mientras que la demanda de cada uno es de 1000, 500 y 400 unidades respectivamente.

Solución:

```
!PROD=PRODUCTO  GAN=UTILIDAD  DEM=DEMANDA;
!X= CANTIDAD A PRODUCIR  INV=INVENTARIO  CANT=CANTIDAD DE
INGREDIENTES;

SETS:
PROD/1..3/:GAN,DEM,X;
ING/1..4/:INV;
VECTOR(PROD,ING):CANT;
ENDSETS

DATA:
GAN=7,7,6;
```

```
DEM=1000,500,400;
INV=500,425,650,1100;
CANT=4,2,4,6,
     3,2,2,9,
     6,3,5,2;
ENDDATA

MAX=@SUM(PROD:GAN*X);
@FOR(ING(J):@SUM(PROD(I):CANT(I,J)*X(I))<=16*INV(J));
@FOR(PROD(I):X>=DEM(I));

END
```

16. Walnut Orchard tiene dos granjas que cultivan trigo y maíz. Debido a las diferentes condiciones el suelo, existen diferencias en la producción y en los costos e producción de las dos granjas. En la tabla se encuentran los costos y la producción para las dos granjas. Cada granja dispone de 100 acres para los cultivos. Hay que producir 11000 busheles de trigo y 7000 busheles de maíz. Determinar un plan de siembra que minimice los costos para satisfacer estas demandas.

Granja	Maíz		Trigo	
	Costo	Producción	Costo	Producción
Granja 1	100	500	90	400
Granja 2	120	650	80	350

Solución:

```
!TAM=TAMAÑO DE ACRES DISPONIBLES PARA CADA GRANJA;
!UNID=PRODUCCION DE CADA GRANJA  X=CANTIDAD DE LA
GRANJA(1,2);

SETS:
GRANJA/1..2/:TAM;
PRODUCTO/1..2/:DEMANDA;
RUTAS(GRANJA,PRODUCTO):UNID,COSTO,X;
ENDSETS

DATA:
TAM=100,100;
DEMANDA=11000,7000;
UNID=500,650,
```

```
     400,350;
COSTO=100,120,
      90,80;
ENDDATA


MIN=@SUM(RUTAS:COSTO*X);
@FOR(GRANJA(I):@SUM(PRODUCTO(J):X(I,J))<=TAM(I));
@FOR(PRODUCTO(J):@SUM(GRANJA(I):UNID(I,J)*X(I,J))>=DEMANDA(J)
);
```

Siendo la respuesta a la solución óptima mediante LINGO:

```
MIN      100 X( 1, 1) + 120 X( 1, 2) + 90 X( 2, 1) + 80
X( 2, 2)
 SUBJECT TO
 2]   X( 1, 1) + X( 1, 2) <=   100
 3]   X( 2, 1) + X( 2, 2) <=   100
 4]   500 X( 1, 1) + 400 X( 2, 1) >=   11000
 5]   650 X( 1, 2) + 350 X( 2, 2) >=   7000
 END
```

17. Una empresa produce filtros para monitores de PC formado por tres capas, una intermedia de calidad A y otras dos exteriores de calidad B que envuelven a la anterior. Ambas calidades se consiguen con diferentes mezclas de fibras de vidrio y resina de las que el fabricante dispone por semana de 700 y 900 unidades, respectivamente. La empresa posee cuatro plantas de producción que utilizan procedimientos de fabricación que difieren en las cantidades de materia prima que utilizan. Las cantidades necesarias de materia prima por operación para cada planta que se pueden llevar a cabo total o parcialmente, así como el número de capas producidas de uno y otro tipo, se tiene en la tabla.

	Unidades requeridas por operación		Capas producidas por operación	
Planta	Vidrio	Resina	Tipo A	Tipo B
1	15	19	2	5
2	14	20	3	7
3	16	15	5	4
4	12	188	4	4
Disponibilidad	700	900	SC (1)	SC (2)

Solución:

Xi: numero de operaciones en la planta i (1, 2, 3,4)
Y: filtros fabricados
S: suma de capas producidas

MAX Z = Y

```
!MP= MATERIA PRIMA  X= NUMERO DE OPERACIONES;
!DISP=DISPONIBILIDAD DE LA MATERIA PRIMA  SC=SUMA DE CAPAS;
!Y=SOLUCION  UNID=UNIDADES REQUERIDAS   FAB= NUMERO DE CAPAS;


SETS:
PLANTA/1..4/:X;
MP/1..2/:DISP;
CAP/1..2/:SC;
SOL/1..1/:Y;
VECTOR1(PLANTA,MP):UNID;
VECTOR2(PLANTA,CAP):FAB;
ENDSETS

DATA:
DISP=700,900;
UNID=15,19,
     14,20,
     16,15,
     12,18;
FAB=2,3,
     3,7,
     5,4,
     4,4;
ENDDATA

MAX=@SUM(SOL:Y);
@FOR(MP(J):@SUM(PLANTA(I):UNID(I,J)*X(I))<=DISP(J));
@FOR(CAP(J):@SUM(PLANTA(I):FAB(I,J)*X(I))=SC(J));
Y(1)<=SC(1);
Y(1)<=SC(2)/2;

END
```

18. Una empresa que fabrica un producto único, tiene 3 fábricas y 4 clientes. Las 3 fabricas producen 3 000, 5 000 y 5 000 unidades respectivamente, durante el siguiente periodo. La empresa se comprometió a vender 4 000 unidades al cliente 1; 3 000 unidades al cliente 2; y, por lo menos, 3 000 unidades al cliente 3. Los clientes 3 y 4 quieren comprar la mayor cantidad posible de las unidades restantes. En la siguiente tabla se da la ganancia asociada con el envío de una unidad desde la fábrica i hacia el cliente j.

DESDE	AL CLIENTE			
	1 (dólares)	2 (dólares)	3 (dólares)	4 (dólares)
Fabrica 1	65	63	62	64
Fabrica 2	68	67	65	62
Fabrica 3	63	60	59	60

Plantear un problema de transporte balanceado que se pueda utilizar para maximizar la ganancia de la compañía.

```
SETS:

FABR/FAB1,FAB2,FAB3/: CAPAC;
CLIEN/CEN1,CEN2,CEN3,CEN4/:DEMAN;
VIAS(FABR,CLIEN):GANAN,UNID;
ENDSETS

DATA:
CAPAC=3000 5000 5000;
DEMAN=4000 3000 3000 6000;
GANAN=65,63,62,64,
               68,67,65,62,
               63,60,59,60;
ENDDATA

MAUNID=@SUM(VIAS:GANAN*UNID);
@FOR(CLIEN(J):@SUM(FABR(I):UNID(I,J))>=DEMAN(J));
@FOR(FABR(I):@SUM(CLIEN(J):UNID(I,J))<=CAPAC(I));
END
```

19. OILCO tiene campos petrolíferos es San Diego y en Los Ángeles. El campo de

San Diego puede producir diariamente hasta 500 000 barriles por día.
Se manda el petróleo desde los campos hacia una refinería en Dallas o en Houston (suponga que cada refinería tiene capacidad ilimitada).
Cuesta 700 dólares refinar 100 000 barriles de petróleo en Dallas y 900 dólares 100 000 barriles en Houston. Se envía petróleo refinado hacia clientes en Chicago y en New York. Los clientes en Chicago necesitan diariamente 400 000 barriles de petróleo refinado y los clientes de Nueva York sólo 300 000 barriles de petróleo refinado. En la tabla se muestran los costos de envío de 100 000 barriles de petróleo (refinado o no) entre las ciudades. Formule un modelo de transporte balanceado para esta situación.

DESDE	HACIA			
	Dallas	Houston	New York	Chicago
L.A.	300	110	-	-
San Diego	420	100	-	-
Dallas	-	-	450	550
Houston	-	-	470	530

Solución:

```
!S=COSTO DE ENVIAR DE LOS CAMPOS A LAS REFINERIAS;
!C=COSTO DE ENVIAR DE LAS REFIENRIAS A LOS CLIENTES;
!Y=CANTIDAD ENVIADA A LAS REFINERIAS X=CANTIDAD ENVIADA A LOS
CLIENTES;

SETS:
CAMPOS/C1,C2/:PRODUCCION;
CLIENTES/Z1,Z2,Z3/:DEMANDA;
!se ha creado un cliente ficticio al cual llamamos z3;
RUTA1(CAMPOS,CAMPOS):S,Y;
RUTAS(CAMPOS,CLIENTES):C,X;
ENDSETS

MIN=@SUM(RUTAS:C*X)+@SUM(RUTA1:S*Y);
@FOR(CAMPOS(I):@SUM(CLIENTES(J):X(I,J))>=PRODUCCION(I))
;
@FOR(CLIENTES(J):@SUM(CAMPOS(I):X(I,J))>=DEMANDA(J));

!por 100 000 barriles de petroleo;
```

```
DATA:
   PRODUCCION=500,400;
   DEMANDA=400,300,200;

   S=300,110,
      420,100;
   C= 450,550,0,
      470,530,0;
ENDDATA

END

MIN      450 X( C1, Z1) + 550 X( C1, Z2) + 470 X( C2,
Z1) + 530 X( C2, Z2)
      + 300 Y( C1, C1) + 110 Y( C1, C2) + 420 Y( C2,
C1)
      + 100 Y( C2, C2)
 SUBJECT TO
 2]  X( C1, Z1) + X( C1, Z2) + X( C1, Z3) >=   500
 3]  X( C2, Z1) + X( C2, Z2) + X( C2, Z3) >=   400
 4]  X( C1, Z1) + X( C2, Z1) >=   400
 5]  X( C1, Z2) + X( C2, Z2) >=   300
 6]  X( C1, Z3) + X( C2, Z3) >=   200
 END
```

20. (PROPUESTO) En una compañía se fabrican 2 productos S y T, los cuales tiene que pasar por 2 operaciones de manufactura. La primera operación se realiza en el centro de maquinas 1 o 2; y la segunda en el centro de maquinas 3 o 4. los tiempos de operación por cada unidad producida, las capacidades de dichos centros de maquina y sus costos por minuto se muestran en la tabla. Las necesidades diarias son de 600 unidades para el producto S y 300 unidades para el producto T. El objetivo consiste en encontrar una programación de la producción que minimice los costos totales.

Centro de maquinas	1	2	3	4
Producto S	10	6	16	12
Producto T	20	8	12	10
Capacidad	4800	3600	6000	6000
Costo	30	50	30	50

21. (PROPUESTO)ABC produce dos tipos de productos. Se puede fabricar cada producto en cualquiera de dos maquinas. En la tabla 1 se dan los tiempos necesarios (en horas) para producir cada producto en cada máquina.

Cada mes hay 500 horas de tiempo disponible para cada maquina. Cada mes los clientes están dispuestos a comprar los productos hasta las cantidades y a los precios indicados en la tabla 2. La compañía desea maximizar los ingresos obtenidos mediante la venta de productos durante los dos próximos meses y se ha propuesto además para el mes 2, ofrecer al mercado un nuevo producto que resulta del ensamble de unidades del producto 1 con tres unidades del producto 2, el precio de venta de este nuevo producto es de 280 por unidad y se estima que la demanda de este nuevo producto sea de 50 unidades. Formule un PL para maximizar el ingreso.

Tabla 1

	Maquina 1	Maquina 2
Producto 1	4	3
Producto 2	7	4

Tabla 2

	Demanda mes 1	Demanda mes 2	Precio mes 1	Precio mes 2
Producto 1	100	90	55	42
Producto 2	140	70	65	62

22. (PROPUESTO) La empresa ABC requiere el servicio de corte de FENIX para los siguientes meses:

MES	**UNIDADES**
ENERO	840
FEBRERO	760
MARZO	670
ABRIL	1030

El costo normal de corte por unidad es de 18S/.
Si la solicitud de corte por mes de ABC, baja con respecto al mes anterior ABC deberá pagar a FENIX S/. 3 adicionales al costo de corte por cada unidad de diferencia y si la solicitud de corte aumenta al mes anterior, ABC deberá pagar solo S/. 1 adicional al costo del corte por cada unidad de aumento.
Determinar la función objetivo que optimice el costo de corte.

1.4 ASPECTOS DEL ALGEBRA LINEAL Y ANÁLISIS CONVEXO

1.4.1 VECTORES

Un vector es un arreglo de n números denotados por: $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n-1})$ llamado vector fila o llamado columna donde n es la dimensión del vector.

Ejemplos:

a.- (1, 3, -1, 5) es un vector fila de dimensión **n** = 4.

b.- $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ es un vector columna de dimensión **n** = 2

c.- $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ es un vector unitario de dimensión 4 donde el 1 se ubica en la tercera posición.

d.- $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector cero cuyas componentes son iguales a cero.

1.4.2 OPERACIONES CON VECTORES

- **Suma De Vectores**

Los vectores de igual dimensión se pueden sumar, ejemplo:

$$a_1 = (3, 5, 7)$$
$$a_2 = (4, 2, 1)$$
$$a_3 = a_1 + a_2 = (7, 7, 8)$$

- **Multiplicación Por Un Escalar**

Dado un vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y un escalar k el producto b es:
$b = a\,k = (a_1 k, a_2 k \ldots, a_n k)$

- **Espacio Euclidiano**

Un espacio euclidiano n –dimensional, denotado por E^n, es el conjunto de todos los vectores de dimensión n.

- **Combinación Lineal**

Se dice que un vector b en E^n es una combinación lineal de los vectores a_1, a_2,. . ., a_k en E^n, si:

$$b = \sum_{j=1}^{k} a_j \text{, donde } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ son números reales.}$$

- **Vectores Linealmente Independientes**

Los vectores a_1, a_2,. . ., a_k de dimensión n son linealmente independientes si:

$$\sum_{j=1}^{k} R_j a_j = 0, \text{ implica que } R_j = 0 \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k$$

Ejemplo:

a_1 = (3, 5) y a_2 = (1, 7), estos vectores son linealmente Independientes puesto que:

$$R1\,(3, 5) + R2\,(1, 7) = (0, 0)$$
$$(3R1 + R2,\ 5R1 + 7R2) = (0, 0)$$
$$3R1 + R2 = 0$$
$$5R1 + 7R2 = 0$$

La solución es $R_1 = R_2 = 0$

Si para alguna $R_j = R_1, R_2, \ldots, R_k$ donde no todos son ceros se dice que los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo:

a1 = (3, 5) y a2 = (6, 10)

$$R1\,(3,5) + R2\,(6, 10) = (0, 0)$$

$$3R1 + 6R2 = (0, 0)\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$5R1 + 10R2 = (0, 0)\ldots\ldots.. (2)$$

De (1) $R_1 = -2R_2$, si $R_2 = -1$ entonces $R_1 = 2$. Entonces los vectores a_1 y a_2 son linealmente dependientes.

BASE

Una colección de vectores $a_1, a_2, . . ., a_k$ forman una base de E^n (espacio n dimensional) si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $a_1, a_2, . . ., a_k$ generan a E^n.
2. Si se elimina cualquiera de estos vectores, la colección de vectores restantes no generan E^n.

1.4.3 MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de números denotados por $A = [a_{ij}]_{mxn}$ donde m = # de filas y n = # de columnas.

- **Matriz Cero**

Una matriz $A = [a_{ij}]_{\mathbf{mxn}}$ se llama matriz cero si cada elementos cero.

Es decir, $a_{ij} = 0$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es una matriz cero de orden 2 x 3.

- **Suma de Matrices**

Si A = [a_{ij}] y B [b_{ij}] son matrices mxn, se llama suma de A y B a otra matriz C= [c_{ij}]$_{mxn}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para i = 1, 2, . . .,m y j = 1, 2, . . ., n.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

- **Multiplicación por un Escalar**

Sea A = [a_{ij}] una matriz mxn y k un escalar entonces k A es una matriz m x n cuyo elemento i j es k x a_{ij}.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad K = 2 \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

- **Multiplicación de Matrices**

Dos matrices A = [a_{ik}] y B[b_{kj}] pueden multiplicarse en el orden AB si el numero de columnas de A es igual al número de filas de B, esto es, si A es del orden (mxr) entonces B es del orden (rxn). Sea D = AB, entonces D = [d_{ij}] es del orden (mxn) y sus elementos d_{ij} están dados por:

$$d_{ij} = \sum a_{ik} * b_{kj} \quad \text{Para: } i = 1, 2, \ldots, m \text{ y } j = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1x5 - 1x3 + 1x1 & 1x0 - 1x0 + 1x1 \\ 4x5 - 2x3 + 5x1 & 4x0 - 2x0 + 5x1 \\ 2x5 + 0x3 + 1x1 & 2x0 + 0x0 + 1x1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Transpuesta**

La matriz A^T se denomina transpuesta de A si el elemento a_{ij} de A, es igual al elemento a_{ji} de A^T.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Para las matrices transpuestas se cumple:

$(AT^{)T} = A$
$(A + B)^T = A^T + B^T$; A Y B con igual número de filas y columnas.
$(AB)^T = B^T A^T$
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$
(λ es un escalar).

- **Matriz Identidad**

Sea A = [a_{ij}] una matriz nxn, se dice que es una matriz identidad, denotada por I, si todos los elementos de la diagonal son iguales a uno y todos los demás elementos son iguales a cero.

Ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad de orden 3 x 3

- **Inversión de Matrices**

Sea A = [a_{ij}] una matriz cuadrada nxn. Si B = [b_{ij}] es una matriz nxn tal que AB = I y BA = I, entonces B se llama inversa de A. La matriz inversa, si existe, es única y se denota por A^{-1}.
Si A tiene una inversa, entonces A se llama no singular; en caso contrario se llama singular. Una matriz dada A = $[a_{ij}]_{nxn}$ tiene inversa, si y solo si, las filas de A son linealmente independientes o, de manera equivalente, si las columnas de A son linealmente independientes.

- **Rango de una Matriz**

El rango de una matriz es igual al número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes.

Sea $A = [a_{ij}]_{mxn}$ una matriz m x n, el rango (A) $\leq$ mínimo (m, n).

Si rango (A) = min (m, n) se dice entonces que A es rango completo.

METODO DE GAUSS – JORDAN PARA CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz particionada (A | I) donde $A = [a_{ij}]$ es no singular. Remultiplicando esta matriz por A^{-1} se obtiene:

$$A^{-1}(A \mid I) = (A^{-1}A \mid A^{-1}I) = (I \mid A^{-1})$$

Por consiguiente aplicando una sucesión de transformaciones con filas solamente, la matriz A se cambia a I e I se cambia a A^{-1}.

Ejemplo: Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x_1 + x_2 = 9$$
$$5x_1 - 2x_2 = 4$$

Este es un sistema de la forma **AX= b**

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La solución de **X** y la inversa de la matriz base pueden obtenerse directamente considerando:

(A | I)(x) = b y omitiendo (x) $\rightarrow$ (A | I | b)

Multiplicando por $A^{-1} \rightarrow$ (A^{-1}) (A | I | b)

Obteniendo finalmente $(I \mid A^{-1} \mid A^{-1}b)$

Por consiguiente, aplicando una operación de transformación de filas, se obtiene las siguientes iteraciones:

Para el sistema A x = b, le damos la forma (A | I | b)

$$
\begin{array}{ccc} A & I & b \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]
$$

Iteración 1: (se divide la primera fila entre 3, al resultado se multiplica por (-5) y se suma a la segunda fila)

$$
\left\langle\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -11/3 & -5/3 & 1 & -11 \end{array}\right\rangle
$$

Iteración 2: (la segunda fila se divide entre -11/3, al resultado se multiplica por **(-1/3)** y se suma a la primera fila)

$$
\left\langle\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 2/11 & 1/11 & 2 \\ 0 & 0 & 15/33 & -3/11 & 3 \end{array}\right\rangle
$$

Esto da $X_1 = 2$ y $X_2 = 3$, la inversa de A es:

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 15/33 & -3/11 \end{bmatrix}
$$

Es útil conocer los siguientes hechos sobre inversión de matrices:

Si $A = [a_{ij}]$ es no singular, entonces $A^T = [a_{ij}]$ también es no singular y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices no singulares nxn, entonces AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.4.4 ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz m x n y sea el sistema AX = b y la matriz aumentada (A, b) con m filas y (n+1) columnas.
Si el rango de (A, b) es mayor que el rango de A, entonces b no se puede representar como una combinación de (A, b) es mayor que el rango de A, entonces b no se puede representar como una combinación lineal de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y por lo tanto el sistema AX = b no tiene solución (y en particular, el sistema AX = b, $X \geq 0$ no tiene solución).

Si K es el número de ecuaciones y n el número de incógnitas, entonces: Los casos posibles que pueden ocurrir son:

1. Rango (A, b) > Rango (A). Por lo tanto, AX = b no tiene solución.
2. Rango (A, b) = Rango (A) con k = n, entonces solo existe una solución para el sistema.
3. Rango (A, b) = Rango (A) con k < n, en consecuencia existe un número infinito de soluciones al sistema AX = b

Ejemplos:

Caso 1:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 8 \\ 2X_1 + X_2 &= 13 \\ 3X_1 + 2X_2 &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 13 \\ 3 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Restando la tercera fila con la suma de las dos primeras se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

La tercera fila de A es linealmente independiente de las dos primeras, por consiguiente:

Rango de (A) = 2

Rango de (A, b) = 3 y
AX = b no tiene solución

Caso 2:

$$X_1 + X_2 = 8$$
$$2X_1 + X_2 = 13$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

Rediciendo filas se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por consiguiente $X_1 = 5$ Y $X_2 = 3$

Caso 3:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 8$$
$$2X_1 + X_2 = 13$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

Reduciendo filas se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Sea X_3 equivalente a un valor arbitrario α, entonces: $X_1 = 5 + \alpha$ y $X_2 = 3 - 2\alpha$.
Dado que α puede adquirir cualquier valor, se tiene que el número de soluciones es infinito.
Si se asume que el valor de una de las variables, de las ecuaciones simultáneas del **caso 3**, es cero se tiene que las soluciones básicas se reducen a las siguientes:

SOLUCIONES BÁSICAS

NUMERO	VARIABLES BÁSICAS (X_B)	VARIABLES NO BÁSICAS (X_N)	SOLUCIÓN X_1	X_2	X_3
1	X_1, X_2	X_3	5	3	0
2	X_1, X_3	X_2	6.5	0	-5
3	X_2, X_3	X_1	0	13	-5

X_B = Variables básicas X_N = Variables No Básicas

En general, para un sistema de "m" ecuaciones simultaneas y de "n" variables, si se hace igual a cero las (n-m) variables se tiene que el número de soluciones básicas es:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

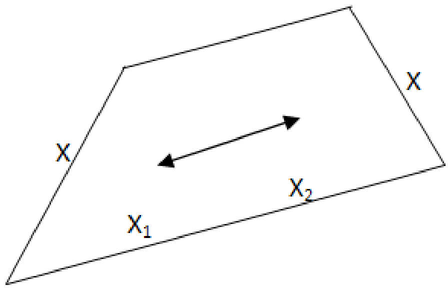
Del ejemplo anterior, m=2 y n=3 el número de soluciones es:

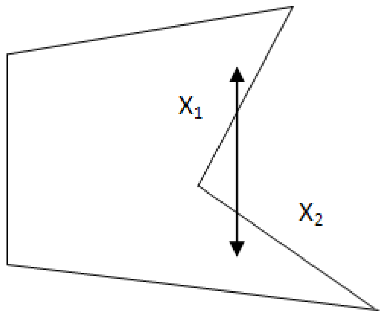
$$C_2^3 = \frac{3!}{2!(3-2)!}$$

1.4.5 CONJUNTOS CONVEXOS

Un conjunto X en E^n se llama convexo, si dados 2 puntos X_1 y X_2, en X, se cumple que $\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 \varepsilon X$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$, a esta expresión se le denomina combinación convexa de X_1 y X_2.
Dicho de otra manera, una conjunto X es convexo si y solo si el segmento determinado por cualquier par de puntos de X está incluido en X.
En la siguiente figura se muestra un ejemplo de conjunto convexo y de un conjunto no convexo.

Ejemplo:



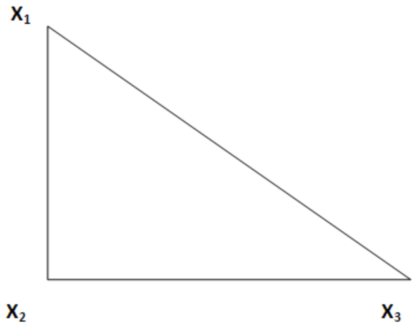


CONJUNTO CONVEXO **CONJUNTO NO CONVEXO**

- **Puntos Extremos**

Sea un conjunto **X** en E^n, se dice que los puntos extremos son aquellos que no pueden ser representados como una combinación convexa estricta de dos puntos distintos en **X**.

Ejemplo:



X_1, X_2, X_3, son puntos extremos de la figura.

- **Hiperplano**

Es aquel que divide a E^n en dos regiones llamadas semiespacios y además es un conjunto convexo.

- **Conjunto Poliédrico**

Es la intersección de un número finito de semiespacios.

PROGRAMACION LINEAL: TABLERO SIMPLEX

CAPÍTULO 2

2.1 MÉTODO GRÁFICO

Consiste en presentar la restricciones sobre los ejes de coordenadas, para delimitar la región donde se encuentran las soluciones factibles ($x \geq 0$).
Las soluciones óptimas se encontrarán en el perímetro del conjunto poliédrico formado por planos.
Sea el siguiente problema

$$Max\ Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 \leq 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$X_1 - X_2 \leq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Si por el momento se considera a estas desigualdades como igualdades, se obtienen puntos que luego los llevaremos a una gráfica, que se muestra en la siguiente página.

$$2X_1 + X_2 = 6$$

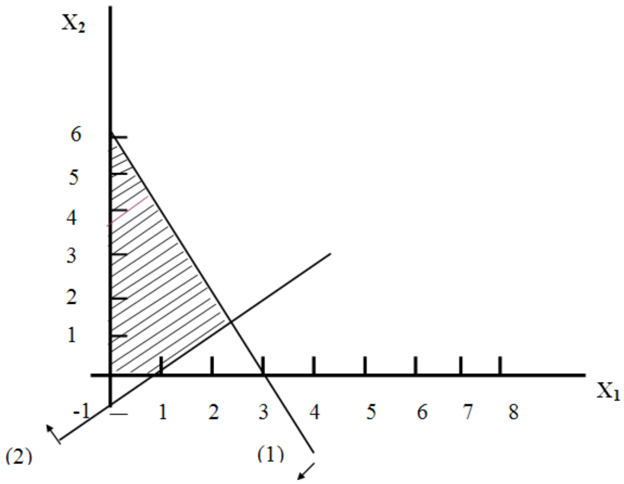
Si $X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 6$
Si $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 3$

X_1	X_2
0	6
3	0

$$X_1 - X_2 = 1$$

X_1	X_2
0	-1
1	0

La orientación de los planos, se logra asumiendo que X_1 = $\boldsymbol{X_2 = 0}$ para cada inecuación, el valor óptimo de la función objetivo se obtiene reemplazando los valores aceptables de X_1 y $\boldsymbol{X_2}$. Los números en paréntesis son las restricciones en la formulación.



La región factible, es el área delimitada por los planos (1) y (2).

Ahora interceptamos las ecuaciones (1) y (2), para obtener los valores de X_1, X_2, convirtiendo las inecuaciones en igualdades.

$$2X_1 + X_2 = 6 \text{.........} (1)$$
$$X_1 - X_2 = 1 \text{.........} (2)$$

$$X_1 = 7/3$$
$$X_2 = 4/3$$

Reemplazando los valores aceptables de $\boldsymbol{X_1}$ y $\boldsymbol{X_2}$**,** obtenemos el valor de la función objetivo. Decimos valores aceptables por que éstos tienen que satisfacer las condiciones de las inecuaciones**.**

$$Z = 2(7/3) + 3(4/3) = 26/3$$

Este valor encontrado es el valor óptimo de la función objetivo, que en este ejemplo se presenta como maximización. A continuación veremos otro método para encontrar la solución de este tipo de problemas.

2.2 MÉTODO SIMPLEX

Optimizar: **Z = CX**

Sujeto a:

AX = b
X≥0

C_B: Coeficientes de las variables básicas
C_N: Coeficientes de las variables no básicas

X_B: Variables básicas
X_N: Variables No básicas

B: Matriz básica
N: Matriz No básica

Entonces si reemplazamos, quedaría de la siguiente forma:

$$Z = (C_B \;\; C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

Sujeto a:

$$(B \;\; N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

- Luego:

$$Z = C_B X_B + C_N X_N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Sujeto a:

$$BX_B + NX_N = b$$

A continuación multiplicamos por B^{-1} tanto en la parte derecha como en la parte izquierda de la restricción:

$$B^{-1}(BX_B + NX_N) = B^{-1}b$$

Resolviendo el siguiente producto:

$$B^{-1}BX_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 2$$

Sabemos que: $X_N = 0$

Reemplazamos 2 en 1

$$Z = C_B\,(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N\,X_N$$

$$Z = C_B\,B^{-1}b – (C_BB^{-1}NX_N - C_N\,X_N)$$

$$Z = C_B\,B^{-1}b – (C_BB^{-1}N - C_N)\,X_N \quad \ldots\ldots\ldots \; 3$$

De 3 :

$$Z = C_B\,B^{-1}b – (C_BB^{-1}N - C_N)\,X_N$$

$$\mathbf{1Z + 0\,X_B + (C_BB^{-1}N - C_N)\,X_N = C_B\,B^{-1}b} \ldots\ldots \; 4$$

De 2 :

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$\mathbf{0\,Z + 1X_B + (B^{-1}N)X_N = B^{-1}b} \quad \ldots\ldots\ldots \; 5$$

De 4 y 5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & C_B B^{-1} N - C_N \\ 0 & 1 & B^{-1} N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{pmatrix}$$

	Z	X_B	X_N	LD
Z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B B^{-1} b$
X_B	0	1	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

METODO DE SOLUCION PARA UN ALGORITMO SIMPLEX

Para resolver un problema Lineal se requiere partir de una solución básica factible ($IX_B = b$). La matriz identidad (I) se obtiene agregando variables artificiales a las restricciones, estas variables formarán la primera base del sistema (X_B) y por consiguiente se tendrá la primera solución básica.

VARIABLES DE HOLGURA

Es una variable positiva que representa la diferencia entre los dos lados de una restricción.

VARIABLES ARTIFICIALES

Después de introducir las variables de holgura y observar que no existe una submatriz identidad para tener una solución básica factible inicial, entonces se introducir variables denominadas como Variables Artificiales para obtener la submatriz identidad.

Se va ilustrar con un ejemplo los pasos a dar para la resolución de un problema.

Max $Z = 3X_1 + 10X_2$

Sujeto a: $2X_1 + 3X_2 \leq 8$

$8X_1 + 3X_2 \leq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

a) Se tiene que transformar las inecuaciones en ecuaciones, para lo cual introducimos solo las variables de holgura ya que las restricciones son del tipo ≤.

Así se tiene:

Max $Z = 3X_1 + 10X_2 + 0X_3 + 0X_4$

Sujeto a: $2X_1 + 3X_2 + X_3 = 8$
$8X_1 + 3X_2 + X_4 = 20$
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

X_3 y X_4 son las variables básicas, siendo X_1 y X_2 las variables no básicas.
Se construye la siguiente tabla:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	LD
Z	1	-3	-10	0	0	0
X_3	0	2	3	1	0	8
X_4	0	8	3	0	1	20

b) Identificación de la variable de entrada a la base: Seleccionar la variable no básica que mejore el valor de Z más rápidamente.

- Para la maximización se elige la de coeficiente más negativo ($Z_J - C_J < 0$)
- Para la minimización se elige la de coeficiente más positivo ($Z_J - C_J > 0$)
- En el caso de que no existan variables con coeficientes negativos en la maximización y positivos en la minimización se habrá alcanzado la solución óptima.

En el ejemplo, la variable X_2 es la que tiene el coeficiente más negativo (-10), por lo tanto se convertiría en la variable de entrada.

c) Identificación de la variable de salida de la base: Se denomina variable de salida a aquella variable, cuyo valor se aproxime más rápidamente o cero a medida que el valor de la variable de entrada vaya creciendo, esto se hace mediante el siguiente procedimiento algebraico.

$$X_K = \min\left(\frac{b_r}{Y_{rK}} \; , \; Y_{rK} > 0 \right)$$

En el ejemplo:

X_K = mínimo (8/3 , 20/3) = 8/3

Este resultado indica que la variable de salida es X_3 y este lugar es ocupado por la variable X_2.

	Z	X_1	X_2 ↓	X_3	X_4	LD
Z	1	-3	-10	0	0	0
← X_2	0	2	3	1	0	8
X_4	0	8	3	0	1	20

d) Determinación de la nueva solución factible básica:

En la tabla, la columna encabezada por la variable de entrada, debe ser un vector unitario, esto se logró mediante operaciones de filas.

En el ejemplo:

$\mathbf{X_2}$	**Se ha de convertir en**	$\mathbf{X_2}$
-10		0
3		1
3		0

La transformación se logró de la manera siguiente:

- Se divide la segunda fila entre 3

(0 2 3 1 0 8) x 1/3

- Al resultado de la segunda fila se le multiplica por 10 y se suma a la primera fila.

	(0	2/3	1	1/3	0	8/3)	x 10
+	(1	-3	·10	0	0	0)	
	1	11/3	0	10/3	0	80/3	

- Al resultado de la segunda fila se multiplica por (-3) y se suma a la tercera fila

	(0	2/3	1	1/3	0	8/3)	x (-3)
+	(0	8	3	0	1	20)	
	0	6	0	-1	1	12	

Entonces la tabla resultante es como sigue:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	LD
Z	1	11/3	0	10/3	0	80/3
X_2	0	2/3	1	1/3	0	8/3
X_4	0	6	0	-1	1	12

Como se puede apreciar en el tablero, no existen variables con coeficientes negativos esto indica que se ha llegado a la solución óptima.

Si hubiese alguna variable con coeficiente negativo se continúa con el paso (b) hasta llegar a una solución óptima.

Cuando existen desigualdades del sentido mayor o igual y también igualdades entonces se prepara el programa, introduciendo variables de holgura y artificiales a fin de obtener una submatriz identidad.

A continuación se presentan dos métodos para resolver problemas de las características precedentes.

2.3 MÉTODO DE PENALIZACION

Para resolver un problema, los pasos que se siguen son:

- Obtención de la submatriz identidad.
- Le adicionan también las variables artificiales en la función objetivo. Con el coeficiente –M para el caso de maximización y +M para el caso de minimización.
- Se procede a solucionar el problema.

Ejemplo:

Min $Z = 3X_1 + 8X_2$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 = 200$$

$$X_1 \leq 800$$

$$X_2 \geq 60$$

Adicionando las variables de holgura X_4 y X_5 y las variables artificiales X_3 y X_6 se tiene:

Min $Z = 3X_1 + 8X_2 + MX_3 + MX_6$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 200$$

$$X_1 + X_4 = 80$$

$$X_2 - X_5 + X_6 = 60$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	1	-3	-8	-M	0	0	-M	0
X_3	0	1	1	1	0	0	0	200
X_4	0	1	0	0	1	0	0	80
X_6	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	M-3	2M-8	0	0	-M	0	260M
X_3	0	1	1	1	0	0	0	200
X_4	0	1	0	0	1	0	0	80
X_6	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	M-3	0	0	0	M-8	8-2M	140M+480
X_3	0	1	0	1	0	1	-1	140
X_4	0	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	0	0	0	3-M	M-8	8-2M	60M+720
X_3	0	0	0	1	-1	1	-1	60
X_1	0	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	0	0	8-M	-5	0	-M	1200
X_5	0	0	0	1	-1	1	-1	60
X_1	0	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	0	1	1	-1	0	0	120

En el primer tablero se multiplica por M las filas 2 y 3 y se suman a la fila 1 para que se tenga vectores unitarios para las variables X_3 y X_6.

Los resultados se muestran en el segundo tablero, de allí el procedimiento es el descrito anteriormente.

Como en el tablero no existen variables con coeficientes positivos, recordar que M es un valor muy grande por tratarse de una minimización, se dice que se ha llegado a su solución óptima.

$X_1 = 80$, $X_2 = 120$, $Z_{MIN} = 1200$

2.4 MÉTODO DE LAS DOS FASES

Para resolver un problema, los pasos que se siguen son:

- Obtención de la submatriz identidad.
- La primera fase consiste en minimizar la función objetivo compuesta de variables artificiales has lograr que sean igual a cero.
- La segunda fase consiste en la optimización de la función objetivo original en base a la solución obtenida en la fase uno.

Ejemplo:

Con el ejemplo utilizado en el Método de Penalización.

FASE I: Se tiene que la función objetivo para la primera fase es:

$$\text{Min} = X_3 + X_6$$

Y los tableros correspondientes son:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	1	0	0	-1	0	0	-1	0
X_3	0	1	1	1	0	0	0	200
X_4	0	1	0	0	1	0	0	80
X_6	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	1	2	0	0	-1	0	260
X_3	0	1	1	1	0	0	0	200
X_4	0	1	0	0	1	0	0	80
X_6	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	1	0	0	0	1	-2	140
X_3	0	1	0	1	0	1	-1	140
X_4	0	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	0	0	0	-1	1	-2	60
X_3	0	0	0	1	-1	1	-1	60
X_1	0	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	0	1	0	0	-1	1	60

Z	1	0	0	-1	0	0	-1	0
X_5	0	0	0	1	-1	1	-1	60
X_1	0	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	0	1	1	-1	0	0	120

Como se observa en último tablero las variables artificiales tienen valor cero lo cual significa que el problema tiene solución.

FASE II: Por consiguiente la segunda fase comprende de la función objetivo inicial y la información de las variables básicas del último tablero de la primera fase donde, si se desea, se puede omitir la información referente a las variables artificiales.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	1	-3	-8		0	0		0
X_5	0	0	0		-1	1		60
X_1	0	1	0		1	0		80
X_2	0	0	1		-1	0		120

Z	1	0	0		-5	0		1200
X_5	0	0	0		-1	1		60
X_1	0	1	0		1	0		80
X_2	0	0	1		-1	0		120

Del tablero se observa que:

$X_1 = 80$, $X_2 = 120$, $Z_{MIN} = 1200$

CAPÍTULO 3

DUALIDAD

3.1 DUALIDAD: UN ENFOQUE CONCEPTUAL

Cuando se asocia un Problema Lineal (PL), con otro Problema Lineal se llama Dualidad. Conocer esta relación existente es muy importante para el entendimiento de temas de programación lineal y no lineal, así como las interpretaciones económicas y por supuesto las perspectivas del análisis de sensibilidad.
Cuando hallamos el dual de un PL, nos referimos al PL dado como el primal; así, si el problema dado es un problema de maximización, el dual será uno de minimización o viceversa.

- **Forma canónica de dualidad**

Supóngase que el programa lineal primal está dado en la forma:

P: Minimizar cx

Sujeto a:

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

D: Maximizar wb

Sujeto a:

$$wA \leq c$$
$$w \geq 0$$

Nótese que existe exactamente una variable dual por cada restricción primal, y exactamente una restricción dual por cada variable primal. Después se dirá más sobre esto.

Considérese el siguiente programa lineal y su dual:
P: Minimizar $6x_1 + 8x_2$

Sujeto a:

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 7$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Su dual será:

D: Maximizar $4w_1 + 7w_2$

Sujeto a:

$$3w_1 + 5w_2 \leq 6$$
$$w_1 + 2w_2 \leq 8$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$

En teoría para aplicar la definición canónica de dualidad primero se debe convertir el programa lineal primal al formato anterior. Sin embargo, en la práctica es posible escribir inmediatamente el dual de cualquier programa lineal.

- **Forma estándar de dualidad**

.
Otra definición equivalente se aplica cuando las restricciones son igualdades. Supóngase que el programa lineal primal está dado en la forma:
P: Minimizar Cx

Sujeto a:

$$Ax = b$$
$$x = 0$$

Entonces el programa lineal dual está definido por:

D: Maximizar Wb

Sujeto a:

$$wA = c$$
w no restringida

Considérese el siguiente programa lineal y su dual:

P: Minimizar $6x_1 + 8x_2$

Sujeto a:

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_4 = 7$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$$

D: Maximizar $4w_1 + 7w_2$

Sujeto a:

$$3w_1 + 5w_2 = 6$$
$$w_1 + 2w_2 = 8$$
$$-w_1 \qquad = 0$$
$$-w_2 = 0$$
$$w_1, \; w_2 \text{ no restringidas}$$

Observación 1: "El dual del dual es el primal"
Este lema indica que las definiciones se pueden aplicar al revés. Los términos "primal "y "dual" son relativos al marco de referencia que se seleccione.

- **Formas mixtas de dualidad**

En la práctica, muchos programas lineales contienen algunas restricciones del tipo "menor o igual que", algunas del tipo "mayor o igual que", y algunas del tipo "igual a". Asimismo, las variables que pueden ser "= 0" ó "no restringida". En teoría, esto no presenta problema alguno porque se pueden aplicar las técnicas de transformación para convertir cualquier problema mixto a una de las formas primal o dual.
Considere el siguiente programa lineal.

PASO 1: Max $z = 2x_1 + x_2$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 - x_2 \geq 3$$
$$x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 \leq 1$$

$=> x_1 - x_2 \geq 1$
$x_1 \geq 0$, x_2 nrs

PASO 2 : Max $z = 2x_1 + x'_2 - x''_2$

Sujeto a :

$$x_1 + x'_2 - x''_2 \geq 2 \;\; => \;\; -x_1 - x'_2 + x''_2 \leq -2$$
$$2x_1 - x'_2 + x''_2 \geq 3 \;\; => -2x_1 + x'_2 - x''_2 \leq -3$$
$$x_1 - x'_2 + x''_2 \leq 1 \;\; => \;\; x_1 - x'_2 + x''_2 \leq 1$$
$$x_1 - x'_2 + x''_2 \geq 1 \;\; => \;\; -x_1 + x'_2 - x''_2 \leq -1$$
$$x_1, x'_2, x''_2 \geq 0$$

PASO 3 : Min $w = -2y_1 - 3y_2 + y_3 - y_3$

Sujeto a:

$$-y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 2$$
$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 1$$
$$2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

De este ejemplo se ve que las restricciones de la forma “mayor o igual que“ en el problema de minimización dan origen a variables **“= 0”** en el problema de maximización dan origen a variables “no restringidas”.

Tabla: Relaciones entre problemas primario y dual.

Variables	**MINIMIZACION DE PROBLEMA** **= 0** **= 0** **No restringido**	$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$	**MAXIMIZACION DE PROBLEMA** **=** **=** =	**Variables**
Restric_ ciones	**=** **=** =	$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$	**= 0** **= 0** **No restringido**	**Restricciones**

Considérese el siguiente programa lineal:

Maximizar $8x_1 + 3x_2$

Sujeto a:

$$x_1 - 6x_2 = 2$$
$$5x_1 + 7x_2 = -4$$
$$x_1, x_2 = 0$$

Aplicando los resultados de la tabla, se puede obtener el dual de inmediato:

Minimizar $2w_1 - 4w_2$

Sujeto a:

$$w_1 + 5w_2 = 8$$
$$-6w_1 + 7w_2 = 3$$
w_1 , w_2 no restringidas

3.2 RELACIONES PRIMAL - DUAL

- **Relaciones entre los valores objetivos**

Considérese la forma canónica de dualidad y sean x_o y w_o soluciones factibles de los programas primal y dual respectivamente. Entonces $Ax_o = b$, $x_o = 0$, $w_oA = c$, y $w_o = 0$. Multiplicando $Ax_o = b$ por $w_o = 0$ a la izquierda, y $w_oA = c$ por $x_o = 0$ a la derecha se obtiene:

$$Cx_o = w_oAx_o = w_ob$$

El resultado es el siguiente.

Observación 2:

El valor de la función objetivo, para cualquier solución factible del problema de minimización, es siempre mayor o igual que el valor de la función objetivo para cualquier solución factible del problema de maximización. En particular, el valor objetivo de cualquier solución factible del problema de minimización da una cota superior del objetivo óptimo del problema de maximización, Análogamente, el valor objetivo de cualquier solución factible de problema de maximización es una cota inferior del objetivo óptimo del problema de minimización.

Corolario 1

Si $\mathbf{x_o}$ y $\mathbf{w_o}$ son soluciones factibles de los problemas primal y dual y son tales que $\mathbf{cx_o = w_ob}$**,** entonces $\mathbf{x_o}$ y $\mathbf{w_o}$ son soluciones óptimas de sus respectivos problemas.

Corolario 2

Si uno de los dos problemas tiene un valor objetivo no acotado, entonces el otro problema no tiene ninguna solución factible.
El corolario indica que el no acotamiento en uno de los problemas implica no factibilidad en el otro problema. ¿Es simétrica esta propiedad? ¿No factibilidad en uno de los problemas implica no acotamiento en el otro? La respuesta es “no necesariamente”. Esto se ilustra mejor con el siguiente ejemplo.

Considérese los siguientes problemas primal y dual:

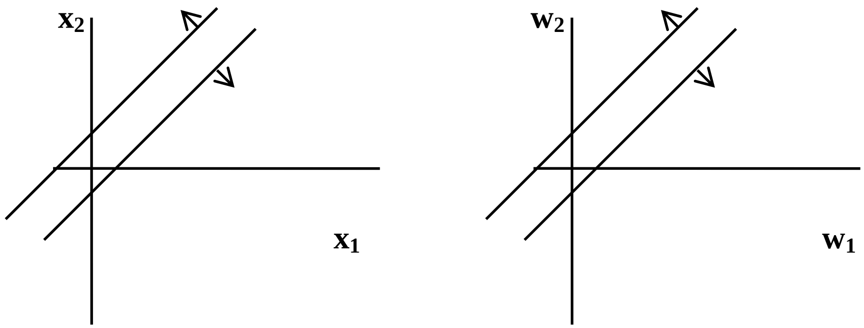
P: Minimizar $-x_1 - x_2$
Sujeto a:

$x_1 - x_2 = 1$
$-x_1 + x_2 = 1$
$x_1 , x_2 = 0$

D: Maximizar $w_1 + w_2$
Sujeta a:

$w_1 - w_2 = -1$
$-w_1 + w_2 = -1$
w_1 , w_2 no restringidas

Graficando ambos se observa que ninguno tiene solución factible



- **Dualidad y condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker**

Recordemos que las condiciones de optimalidad para un programa lineal establecen que una condición necesaria y suficiente para que **x*** sea un punto óptimo del programa lineal Minimizar **cx** sujeta a **Ax = b, x = 0**, es que exista un vector **w*** tal que:

1. $Ax^* = b, x^* = 0$
2. $w^*A = c, w^* = 0$
3. $w^*(Ax^* - b) = 0$

   $(c - w^*A)\, x^* = 0$

La condición 1 anterior simplemente requiere que el punto óptimo x* debe ser factible para el problema primario. La condición 2 esta condición indica que el vector w* debe ser un punto factible para el problema dual. De la condición 3 anterior, se sigue que cx*=w*b. Por lo tanto, w* debe ser una solución óptima del problema dual. Las condiciones de optimalidad de Kuhn - Tucker para el problema dual implican la existencia de una solución factible primal cuyo objetivo es igual al del dual óptimo. La razón nos conduce al siguiente lema.

Observación 3:

Si uno de los problemas tiene una solución óptima, entonces ambos problemas tienen soluciones óptimas y los dos valores objetivos óptimos son iguales.

En lugar de resolver directamente para el óptimo x*, sería razonable buscar entre los valores de w que satisfacen la condición 2 anterior. Sabiendo que (condición 2) cualquier w_o factible satisface $w_o b = cx^*$ y que el w* óptimo satisface w*b=cx*, surge de manera natural la maximización de la forma lineal wb sobre todos los valores factibles de w que satisfacen la condición 2.

- **El teorema fundamental de dualidad**

Teorema 1 (Teorema fundamental de dualidad)
Con respecto de a los problemas de programación lineal primario y dual, exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta.

1. Ambos problemas tienen soluciones óptimas **x*** y **w*,** con **cx*=w*b**.
2. Uno de los problemas tiene valor objetivo no acotado, en cuyo caso el otro problema debe ser no factible.
3. Ambos problemas son no factibles.

De este teorema se ve que la dualidad no es completamente simétrica. Lo más que se puede decir es que (aquí, óptimo significa óptimo finito, y no acotado significa tener objetivo óptimo no acotado).

Podemos decir:

P	óptimo	$\Leftrightarrow$	D	óptimo
P	no acotado	$\Rightarrow$	D	no factible
D	no acotado	$\Rightarrow$	P	no factible
P	no factible	$\Rightarrow$	D	no acotado o no factible
D	no factible	$\Rightarrow$	P	no acotado o no factible

3.3 HOLGURA COMPLEMENTARIA

Sean x* y w* cualquier par de soluciones óptimas de los problemas primal y dual, respectivamente, en forma canónica. Entonces:

$$\mathbf{cx^* = w^* Ax^* = w^* b}$$

Pero $cx^* = w^*b$ (¿porqué?). Luego

$$\mathbf{cx^* = w^*Ax^* = w^*b}$$

Esto da $w^* (Ax^*-b) = 0$ y $(c-w^*A)\, x^* = 0$. Puesto que $w^*=0$ y $Ax^* - b =0$, entonces $w^* (Ax^* - b) = 0$ implica que $w_i^* (a^i x^*-b_i)=0$ para $i=1,...., m$. De igual manera $(c- w^*A)\, x^*= 0$ implica que $(c_j - w^*a)\, x^*_j =0$ para $j =1,...., n$. Por lo tanto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2 (teorema débil de holgura complementaria)
Si x^* y w^* son puntos óptimos cualesquiera de los problemas primario y dual en la forma canónica, entonces

$$(c_j - w^*a)x^*_j = 0 \qquad j = 1,\dots, n$$

$$w^*_i\, (a^i_j x^*-b_i) = 0 \qquad I = 1,\dots, m$$

Este es un teorema muy importante que relaciona los problemas primal y dual. obviamente indica que al menos uno de los factores en cada una de las expresiones anteriores debe ser cero. En particular,

$$x^*_j > 0 \Rightarrow w^*a_j = c_j$$

$$w^*a_j < c_j \Rightarrow x^*_i = 0$$

$$w^*_i > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i$$

El teorema débil de holgura complementaria también se puede enunciar como sigue: en caso de optimalidad, "si una variable en uno de los problemas es positiva, entonces la restricción correspondiente en el otro problema es sin holgura", y "si una restricción en uno de los problemas es con holgura, entonces la variable correspondiente en el otro problema debe ser cero"

- **Uso del dual para resolver el primal**

Ahora se dispone de poderosas herramientas de análisis, en la forma de los teoremas de esta sección, para utilizar el problema dual en la solución del problema primal.
Considere los siguientes problemas primal y dual:

P: Minimizar: $2x_1 + 5x_2 + 3x_3$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

D: Maximizar: $4w_1 + 3w_2$

Sujeto a:

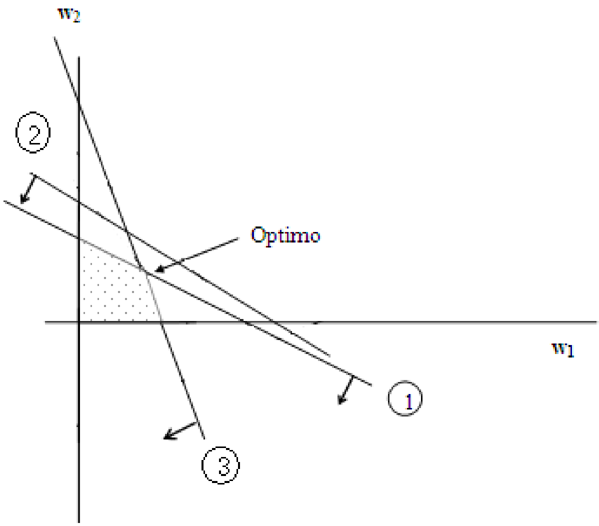
$$w_1 + 2w_2 \leq 2$$

$$2w_1 + 3w_2 \leq 5$$

$$3w_1 + w_2 \leq 3$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Puesto que el dual tiene solo dos variables, se puede resolver gráficamente como se muestra en la figura. La solución optima del dual es $w_1^* = 4/5$, $w_2^* = 3/5$ con objetivo 5. De inmediato se sabe que $z^* = 5$. Utilizando el teorema débil de holgura complementaria, se sabe además que $x^* = 0$, pues ninguna de las correspondientes restricciones duales complementarias son sin holgura.



- **Solución grafica del problema dual.**

Interpretación económica del Dual

Hablaremos de esta interpretación a partir de un problema primal como sigue:

Interpretación económica del problema primal

Variable	Significado
x_j c_j z b_i a_{ij}	Nivel de actividad j (j = 1, 2,…n) Utilidad unitaria de la actividad j Utilidad total Cantidad de recurso i disponible por cada unidad de actividad j

En el problema dual las variables se interpretan como: y es la contribución en la utilidad, por unidad de recurso i (i=1,2,...,m), al usar un conjunto determinado de variables básicas para obtener la solución primal; es decir, y* (la solución optima) representa el precio sombra del recurso i -valor marginal de este recurso.

Como cada unidad de actividad j en el problema primal consume unidades del recurso i

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ Se interpreta como la contribución en la actualidad de la mezcla de recursos que serian consumidos si una unidad de actividad j fuese usada (j=1,2,..., n).

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i$ establece que la contribución en la utilidad de la mezcla de recursos debe ser por lo menos tanto como si fuese usados por una unidad de actividad j, de otra manera no se estaría haciendo el mejor uso posible de estos recursos.

$y_i \geq 0$ La contribución en la utilidad del recurso i(i=1,2,...,n) debe ser no negativa, de lo contrario sería mejor no usar el recurso.

Minimizar y = $\sum_{i=1}^{m} b_i y_I$ es la minimización de valor total implícita de los recursos consumidos por las actividades.

Ambos problemas de programación lineal, en notación matricial son:

Primal

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && z = cx \\ &\text{Sujeto a} && Ax = b \\ & && x = 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && y_o = yb \\ &\text{Sujeto a} && Ay = c \\ & && y = 0 \end{aligned}$$

3.4 EL MÉTODO DUAL SIMPLEX

En esta sección se describirá el método dual simplex, el cual resuelve el problema dual directamente sobre el tablero simplex (primal). En cada iteración el método se mueve de una solución básica factible del problema dual a una solución básica factible mejorada, hasta alcanzar la optimalidad del dual (y también del primal), o bien hasta concluir que el dual es no acotado y que el primal es no factible.

- **Resumen del método dual simplex (problema de minimización)**

PASO INICIAL:

Encuéntrese una base B del primal tal que z_j - c_j = $c_B B^{-1} a_j$ - c_j **=** 0 para todo j.

PASO PRINCIPAL:

1. Si $\bar{b}$ = B^{-1} b **≥** 0, el proceso termina; la solución presente es óptima. En caso contrario, selecciónese el renglón pivote r con $\bar{b}_r < 0$, digamos $\bar{b}_r$ = Mínimo {$\bar{b}_i$}.

2. Si $y_{rj} \geq 0$ para todo j, el proceso termina; el dual es no acotado y el primal es no factible. En caso contrario, selecciónese la columna pivote k mediante la siguiente prueba de la razón mínima:

$$\frac{-z_k - c_k}{y_{rk}} = Minimo \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

3. Pivotéese en y_{rk} y regrese al paso 1.

Considérese el siguiente problema:

Minimizar $2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Una solución básica inicial que sea dual factible se puede obtener utilizando las variables de holgura x_4 y x_5. Esto resulta del hecho de que el vector de costos es no negativo. Aplicando el método dual simplex, se obtiene la siguiente serie de tableros.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
Z	1	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	0	-2	1	-3	0	1	-4

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
Z	1	0	-4	-1	0	-1	4
x_4	0	0	-5/2	1/2	1	-1/2	-1
x_1	0	1	-1/2	3/2	0	-1/2	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
Z	1	0	0	-9/5	-8/5	-1/5	28/5
x_2	0	0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
x_1	0	1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5

Puesto que $\bar{b} \geq 0$ y $z_j - c_j = 0$ para todo j, se tienen a la mano las soluciones óptimas primal y dual. En particular.

$$(X^*_1, X^*_2, X^*_3, X^*_4, X^*_5) = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)$$

$$(w^*_1, w^*_2) = (8/5, 1/5)$$

Nótese que w^*_1 y w^*_2 son, respectivamente, los negativos de las cantidades $z_j - c_j$ que se encuentran abajo de las variables de holgura x_4 y x_5. También nótese que en cada tablero sucesivo el valor de la función objetivo es creciente, como debe ser, para el problema (de maximización) dual.

3.5 EL MÉTODO PRIMAL – DUAL

Recuérdese que en el método dual simplex se empieza con una solución básica (no necesariamente factible) para el problema primal y una solución básica factible complementaria para el problema dual. El método dual simplex procede, mediante pivoteos, a través de una serie de soluciones básicas factibles duales hasta que la solución básica primal complementaria asociada es factible, satisfaciendo así todas las condiciones para optimalidad de Kuhn - Tucker.

En esta sección se describirá un método, llamado el algoritmo primal - dual similar al método dual simplex, el cual empieza con factibilidad dual y proceda a obtener factibilidad primaria, manteniendo durante el proceso holgura complementaria. Una diferencia importante entre el método dual simplex y el método primal - dual es que este último no requiere que una solución factible dual sea básica. Dada una solución factible dual, se determina las variables primales que corresponden a restricciones duales ligantes o activas (de tal manera que la holgura complementaria se satisface). Usando la fase I del método simplex, se trata de alcanzar la factibilidad primal, se cambia la solución factible dual en tal forma que se admita al menos una nueva variable en el problema de la fase I. Esto se continúa hasta que, o bien la solución primal se hace factible, o bien, la solución dual se hace no acotada.

- **Resumen del algoritmo primal - dual** (problema de minimización)

PASO INICIAL:

Selecciónese un vector w tal que $wa_j - c_j = 0$ para todo j.

PASO PRINCIPAL:

1. Sea $Q = \{ j : wa_j - c_j = 0\}$ y resuelvase el siguiente problema restringido:

$$Minimizar \sum_{j \in Q} 0 x_j + 1 x_o$$

$$Sujeta \quad a \quad \sum_{j \in Q} a_j x_j + x_a = b$$

$$x_j \geq 0 \text{ para } j \in Q$$
$$x_a \geq 0$$

Denótese el objetivo óptimo por x_o, si $x_o = 0$, deténgase; se ha obtenido una solución optima. En caso contrario, denótese por v* la solución dual óptima del problema primal restringido anterior.

Si $v^*a_j = 0$ para todo j, entonces deténgase: el dual es no acotado y el primal es no factible. En caso contrario, defínase

$$\theta = Minimo\left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^* a_j} : v^* a_j > 0 \right\} > 0$$

y reemplácese w por $w + \theta v^*$. Repítase el paso 1.

Considérese el siguiente problema:

Minimizar $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5$

Sujeto a:

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 - x_6 = 6$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

El problema dual es el siguiente:

Maximizar $6w_1 + 3w_2$

Sujeto a:

$$2w_1 + w_2 = 3$$
$$-w_1 + w_2 = 4$$
$$1w_1 + 2w_2 = 6$$
$$6w_1 + w_2 = 7$$
$$-5w_1 + 2w_2 = 1$$
$$-w_1 = 0$$
$$-w_2 = 0$$
$$w1, w2 \quad \text{no restringida}$$

Una solución factible dual inicial está dada por $w = (w_1 , w_2) = (0,0)$. Sustituyendo w en cada restricción dual, se encuentra que las dos últimas restricciones duales son estrictas de manera que $Q = \{6,7\}$. Denotando las variables artificiales por X_8 y X_9, el problema primal restringido resulta ser el siguiente:

Minimizar $x_8 + x_9$

Sujeto a:

$$- x_6 + x_8 = 6$$
$$-x_7 + x_9 = 3$$
$$x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Es claro que la solución óptima primal restringido es $(x_6, x_7, x_8, x_9) = (0,0,6,3)$ y el objeto óptimo es $x_o = 9$. El dual de este problema primal restringido es el siguiente:

Maximizar $6v_1 + 3v_2$

Sujeto a:

$-v_1 = 0$

$-v_2 = 0$

$v_1 = 1$

$v_2 = 1$

v_1, v_2 no restringida

Utilizando holgura complementaria, se ve que, puesto que x_8 y x_9 son básicas, las dos últimas restricciones duales deben ser holgura y $v^* = (v^*_1 , v^*_2) = (1,1)$. Calculando v^*a_j para cada columna j, se obtiene $v^*a_1 = 3$, $v^*a_2 = 0$, $v^*a_3 = 0$, $v^*a_4 = 7$, y $v^*a_5 = -3$. Por lo tanto, θ se determina como sigue:

$$\theta = Minimo\left\{-\left(-\frac{3}{3}\right), -\left(-\frac{6}{3}\right), -\left(-\frac{7}{7}\right)\right\} = 1$$

y $w^1 = (0,0) + 1(1,1) = (1,1)$.

Con la nueva solución dual w^1, se calcula de nuevo Q y se obtiene Q ={1,4} esto da el siguiente problema primal restringido:

Minimizar $x_8 + x_9$

Sujeto a:

$2x_1 + 6x_4 + x_8 = 6$

$x_1 + x_4 + x_9 = 3$

$x_1 , x_4 , x_8 , x_9 \geq 0$

Esta vez una solución al problema restringido está dada por:

$(x_1, x_4 , x_8 , x_9) = (3 , 0, 0 , 0)$

Con X_o = 0. Así pues, se tiene una solución óptima del problema original con soluciones óptimas primal y dual dadas por:

$$(x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4, x^*_5, x^*_6, x^*_7) = (3, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad y,$$

$$(w^*_1, w^*_2) = (1,1)$$

3.6 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una fábrica pequeña de juguetes produce 2 tipos de pelotas. Los recursos disponibles mensualmente son 200 pies^2 de cuero y 18 horas máquina. Los requerimientos de recursos por cada unidad de los dos tipos de pelotas, así como la ganancia unitaria se muestran en el siguiente cuadro:

PELOTA TIPO	HORAS MAQUINA (por tipo)	CUERO (pie^2/tipo)	GANANCIA (S/./unid.)
1	0.3	2	200
2	0.2	1	150
Disponibilidad	18	200	

Plantear el problema primal y discutir el significado económico del programa dual.

Solución:

Xi = número de pelotas de tipo i (i = 1,2)

Entonces el programa primal es:

max $Z = 200X_1 + 150X_2$

Sujeto a:

H-Máquina $0.3X_1 + 0.2X_2 \leq 18$ (1)

Cuero $2X_1 + X_2 \leq 200$ (2)

$X_1, X_2 > 0$

La solución del problema es:

$Z = 13500$; $X_1 = 0$; $X_2 = 90$

Reemplazando los valores de X_1 y X_2 en las restricciones se tiene:

Precio Dual

H-Máquina	$0.3\ (0) + 0.2\ (90) \leq 18$	Y_1
Cuero	$2\ (0) + 1\ (90) \leq 200$	Y_2

Observe que se ha utilizado todas las horas máquina (restricción limitante) y que hay un excedente de 110 pies^2 de cuero (restricción no limitante).
Esto implica que para aumentar la ganancia e necesario aumentar la disponibilidad del recurso 1.
Ahora procederemos a hallar el dual para realizar algunas discusiones:
El programa dual esta dado por.

Min $W = 18Y_1 + 200Y_2$

Sujeto a:

$$0.3Y_1 + 2Y_2 \geq 200 \qquad (1)$$

$$0.2Y_1 + Y_2 \geq 150 \qquad (2)$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

Si se aumenta, por ejemplo, en 2 unidades las horas máquina (recurso limitante) del programa primal, se tiene:

Max $Z = 200X_1 + 150X_2$

Sujeto a:

$$0.3X_1 + 0.2X_2 \leq 20$$

$$2X_1 + X_2 \leq 200$$

La solución del problema es:

$Z = 15000$; $X_1 = 0$; $X_2 = 100$

Con la solución de los dos problemas, se puede determinar la variación de Z por unidad de recurso:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta b} = \frac{15000 - 13500}{20 - 18} = 750 = Y_1$$

Este valor representa el precio dual del primer recurso, es decir que Z aumentará en 750 unidades si las horas máquina aumentan en 1 hora.

Si ahora aumentamos, por ejemplo, en 2 unidades el recurso cuero, se tiene:
Max $Z = 200X_1 + 150X_2$

Sujeto a:

$$0.3X_1 + 0.2X_2 \leq 18$$
$$2X_1 + X_2 \leq 202$$

La solución del problema es:

$Z = 13500$; $X_1 = 0$; $X_2 = 90$

La variación de Z por unidad del recurso es:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta b} = \frac{13500 - 13500}{202 - 200} = 0 = Y_2$$

Como se sabe el recurso cuero esta en exceso y por consiguiente incrementar este recurso no aporta en nada a la función objetivo.
La formulación estándar y el último tablero del primal es como sigue:

Max $Z = 200X_1 + 150X_2 + 0X_3 + 0X_4$

Sujeto a:

$$0.3X_1 + 0.2X_2 + X_3 = 18$$
$$2X_1 + X_2 + X_4 = 200$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	LD
Z	1	25	0	75	0	1350
X_2	0	1.5	1	0.5	0	9
X_4	0	25	0	75	1	191

Como se observa $(Z_3 – C_3) = 75$ y $(Z_4 – C_4) = 0$ [debajo de X_3 y X_4] son los valores de las variables U_1 y U_2 respectivamente, esto se explica por lo siguiente:

El tablero puede ser escrito de la siguiente forma:

	Z	X_B	X_{N1}	X_H	LD
Z	1	0	$C_BB^{-1}N_1 – C_{N1}$	$C_BB^{-1}I – 0$	$C_BB^{-1}b$
X_B	0	I	$B^{-1}N_1$	B^{-1}	$B^{-1}b$

Donde:

$X_N \;\; = (X_{N1} \quad X_H)$

$X_{N1} = (X_{m+1} \quad X_{m+2} \quad ... \quad X_n)$

$X_H \;\; = (X_{n+1} \quad X_{n+2} \quad ... \quad X_{n+m})$

Como se sabe los coeficientes de X_H en la función objetivo son iguales a 0 y C_BB^{-1} son los valores de las variables duales.

2. Cierta dietista necesita preparar una comida que contenga determinados nutrientes, al menos en las cantidades que se indican en la siguiente tabla. Dispone de tres ingredientes cuyos costos y contenidos de cada nutriente (unidades por gramo de ingrediente) se dan en la misma tabla

Nutriente	**Ingredientes**			**Requerimientos u./comida.**
	1	**2**	**3**	
A	4	3	2	20
B	5	6	3	30
C	1	2	1	10
D	2	1	2	5
E	2	3	1	10
Costo $/g	200	300	250	

El problema a resolver consiste en definir la combinación de ingredientes que permite obtener, al mínimo costo, el alimento con el contenido nutricional deseado. La solución puede obtenerse resolviendo el siguiente modelo, en el cual las variables **Xi** indican la cantidad (g.) del ingrediente i a utilizar.

Minimizar Costo: Utilidad= $200X_1 + 300X_2 + 250X_3$

Sujeto a:

$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 20$ Nutriente A

$5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \geq 30$ Nutriente B

$1X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 10$ Nutriente C

$2X_1 + 1X_2 + 2X_3 \geq 5$ Nutriente D

$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \geq 10$ Nutriente E

Con $X_i \geq 0$, i =1, 2,3.

Antes de conocer la solución óptima de este modelo, consideremos una situación hipotética que puede presentársele a la dietista. Un laboratorio farmacéutico ofrece pastillas de cada uno de los nutrientes, con los cuales ella puede sustituir la comida que piensa preparar.

Para resolver este nuevo problema reflexionemos en el hecho de que el director del laboratorio desea obtener la máxima utilidad en la venta de las pastillas. Por ello, al evaluar la cotización del laboratorio, en comparación con el costo de preparar la comida, la dietista necesita conocer el máximo precio que puede pagar por una pastilla que contenga una unidad de cada nutriente.

La dietista también sabe que los precios que puede pagar tienen limitaciones provenientes de los costos y contenido vitamínico de los ingredientes, así por ejemplo:

Un gramo del alimento 1 cuesta \$200 y aporta cuatro unidades del nutriente A, cinco del nutriente B, uno del C, dos del D y dos del E. Por lo tanto, por esas cantidades de los nutrientes puede pagarse en total un máximo de \$200.

Similarmente, como un gramo del alimento 2 cuesta \$300 y aporta tres unidades del nutriente A, seis del B, dos del C, uno del D y tres del E, lo máximo que podemos pagar conjuntamente por esas cantidades de los nutrientes es \$300.

Si denotamos respectivamente con las variables YA, YB, YC, YD, YE, los precios máximos que se pueden pagar por la pastilla con una unidad de cada uno de los nutrientes, y efectuamos un análisis para todos los ingredientes, obtenemos el siguiente modelo de programación lineal.

Maximizar Ventas $ZD = 20Y_A + 30Y_B + 10Y_C + 5Y_D + 10Y_E$

Sujeto a:

$4Y_A + 5Y_B + 1Y_C + 2Y_D + 2Y_E \leq 200$ ingrediente 1
$3Y_A + 6Y_B + 2Y_C + 1Y_D + 3Y_E \leq 300$ ingrediente 2
$2Y_A + 3Y_B + 1Y_C + 2Y_D + 1Y_E \leq 250$ ingrediente 3

Con $Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E \geq 0$

Este segundo modelo representa el enfoque dual del primero y de nuevo podemos verificar que se presentan ciertas relaciones estructurales, a saber

1. El vector de coeficientes objetivo de uno es la transpuesta del vector de coeficientes recurso del otro.
2. El vector de coeficientes recurso del uno es la transpuesta del vector de coeficientes objetivo del otro.
3. La matriz de coeficientes tecnológicos de uno es la transpuesta de la matriz de coeficientes tecnológicos del otro.
4. Ambos problemas están en formato canónico, o sea que tienen las siguientes características

4.1 El objetivo del primal es minimizar, mientras que el del dual es maximizar.
4.2 Las restricciones del primo son del tipo $\geq$, y las del dual del tipo $\leq$.
4.3 Las variables de ambos problemas solo pueden tomar valores mayores o iguales que cero.

Pero las relaciones de forma no son las más importantes para nuestro estudio de la dualidad en Programación lineal, como si lo son las relaciones lógicas existentes entre sus soluciones óptimas y el significado económico de las variables del modelo dual.

Resolviendo ambos modelos obtenemos, para el **PRIMAL**:

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1600.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         2.000000          0.000000
        X2         4.000000          0.000000
        X3         0.000000         90.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000        -20.000000
        3)         4.000000          0.000000
        4)         0.000000       -120.000000
        5)         3.000000          0.000000
        6)         6.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       2


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1      200.000000      199.999985        50.000000
       X2      300.000000      100.000000       150.000000
       X3      250.000000        INFINITY        90.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2       20.000000       20.000000         5.000000
        3       30.000000        4.000000         INFINITY
        4       10.000000        3.333333         2.222222
        5        5.000000        3.000000         INFINITY
        6       10.000000        6.000000         INFINITY
```

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	2.00	200.00	400.00	0	basic	150.00	400.00
X2	4.00	300.00	1200.00	0	basic	150.00	400.00
X3	0	250.00	0	90.00	at bound	160.00	M
Objective	Function	(Min.) =	1600.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
NUTRI A	20.00	>=	20.00	0	20.00	15.00	40.00
NUTRI B	34.00	>=	30.00	4.00	0	-M	34.00
NUTRI C	10.00	>=	10.00	0	120.00	7.78	13.33
NUTRI D	8.00	>=	5.00	3.00	0	-M	8.00
NUTRI E	16.00	>=	10.00	6.00	0	-M	16.00

$X1^* = 2$; $X2^* = 4$; $EB^* = 4$; $ED^* = 3$; $EE^* = 6$; $Z = \$1600$

Interpretando los valores de las variables de decisión, ha encontrado que mezclando 2 gramos del ingrediente 1 y cuatro gramos del ingrediente 2 obtendría el menor costo posible que es de $1600. De la misma manera interpretando las variables de holgura, también observa que la comida resultante contiene exactamente las 20 unidades requeridas del nutriente A(pues EA = 0) y las 10 unidades requeridas del nutriente C (pues EC = 0), mientras que del nutriente B tendrá 4 unidades por encima de las 30 requeridas (pues EB = 4), del nutriente D tendrá 3 unidades más que las 5 requeridas (pues ED = 3) y del nutriente E tendrá 6 unidades adicionales a las 10 requeridas (pues EE = 6). Dicho más exactamente, la mezcla (comida) que se prepare con los gramos de cada ingrediente prescritos por esta solución óptima, tendrá la siguiente composición:

Nutriente	**cantidad contenida**	**cantidad requerida**	**exceso**
A	20	20	0
B	34	30	4
C	10	10	0
D	8	5	3
E	16	10	6

Podemos decir que si nos aumentaran, por ejemplo en una unidad, las exigencias de alguno de los nutrientes B, D o E, el costo (y la mezcla actual de ingredientes) no cambiaría ya que las unidades de esos nutrientes con que efectivamente queda la comida, son superiores a las exigencias, así estas suban en una unidad.

Solución aumentando en uno las exigencias del nutriente B

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1600.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         2.000000          0.000000
        X2         4.000000          0.000000
        X3         0.000000         90.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000        -20.000000
        3)         3.000000          0.000000
        4)         0.000000       -120.000000
        5)         3.000000          0.000000
        6)         6.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       0


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1      200.000000       199.999985        50.000000
       X2      300.000000       100.000000       150.000000
       X3      250.000000        INFINITY         90.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2       20.000000        20.000000         3.750000
        3       31.000000         3.000000         INFINITY
        4       10.000000         3.333333         1.666667
        5        5.000000         3.000000         INFINITY
        6       10.000000         6.000000         INFINITY
```

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	2.00	200.00	400.00	0	basic	150.00	400.00
X2	4.00	300.00	1200.00	0	basic	150.00	400.00
X3	0	250.00	0	90.00	at bound	160.00	M
Objective	Function	(Min.) =	1600.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
NUTRI A	20.00	>=	20.00	0	20.00	16.25	40.00
NUTRI B	34.00	>=	31.00	3.00	0	-M	34.00
NUTRI C	10.00	>=	10.00	0	120.00	8.33	13.33
NUTRI D	8.00	>=	5.00	3.00	0	-M	8.00
NUTRI E	16.00	>=	10.00	6.00	0	-M	16.00

Solución aumentando en uno las exigencias del nutriente D

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	2.0000	200.0000	400.0000	0	basic	150.0000	400.0000
X2	4.0000	300.0000	1,200.0000	0	basic	150.0000	400.0000
X3	0	250.0000	0	90.0000	at bound	160.0000	M
Objective	Function	(Min.) =	1,600.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
NUTRI A	20.0000	>=	20.0000	0	20.0000	16.6667	40.0000
NUTRI B	34.0000	>=	30.0000	4.0000	0	-M	34.0000
NUTRI C	10.0000	>=	10.0000	0	120.0000	7.7778	13.3333
NUTRI D	8.0000	>=	6.0000	2.0000	0	-M	8.0000
NUTRI E	16.0000	>=	10.0000	6.0000	0	-M	16.0000

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1600.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         2.000000          0.000000
        X2         4.000000          0.000000
        X3         0.000000         90.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000        -20.000000
        3)         4.000000          0.000000
        4)         0.000000       -120.000000
        5)         2.000000          0.000000
        6)         6.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       0


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1      200.000000       199.999985        50.000000
       X2      300.000000       100.000000       150.000000
       X3      250.000000         INFINITY        90.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2       20.000000        20.000000         3.333333
        3       30.000000         4.000000         INFINITY
        4       10.000000         3.333333         2.222222
        5        6.000000         2.000000         INFINITY
        6       10.000000         6.000000         INFINITY
```

En cambio si, por ejemplo, nos piden que la comida debe contener una unidad mas del nutriente A,(la exigencia será de 21 unidades y no de 20) la solución actual (X1=2 y X2= 4,), no cumpliría esta nueva condición y por ello no sería más la solución óptima. Será necesario encontrar una mezcla diferente de los ingredientes, de tal forma que el contenido del nutriente A sea de 21 unidades y esta mayor exigencia elevará el costo de la comida.

Escribamos el modelo modificado al incluir esta nueva exigencia para el contenido del nutriente A y resolvámoslo.

Minimizar Costo: Utilidad= $200X_1$+ $300X_2$+ $250X_3$

Sujeto a: $4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 21$ Nutriente A

$5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \geq 30$ Nutriente B

$1X_1 + 2X_2 + 1X_3 \geq 10$ Nutriente C

$2X_1 + 1X_2 + 2X_3 \geq 5$ Nutriente D

$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \geq 10$ Nutriente E

Con $Xi \geq 0$, i =1, 2,3.

Solución aumentando en uno las exigencias del nutriente A

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1620.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         2.400000          0.000000
        X2         3.800000          0.000000
        X3         0.000000         90.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000        -20.000000
        3)         4.800000          0.000000
        4)         0.000000       -120.000000
        5)         3.600000          0.000000
        6)         6.200000          0.000000

NO. ITERATIONS=       0


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      X1      200.000000      199.999985        50.000000
      X2      300.000000      100.000000       150.000000
      X3      250.000000        INFINITY        90.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  RHS           INCREASE         DECREASE
       2       21.000000       19.000000         6.000000
       3       30.000000        4.800000         INFINITY
       4       10.000000        4.000000         2.666667
       5        5.000000        3.600000         INFINITY
       6       10.000000        6.200000         INFINITY
```

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
NUTRI A	20.00	20.00	400.00	0	basic	15.00	40.00
NUTRI B	0	30.00	0	-4.00	at bound	-M	34.00
NUTRI C	120.00	10.00	1200.00	0	basic	7.78	13.33
NUTRI D	0	5.00	0	-3.00	at bound	-M	8.00
NUTRI E	0	10.00	0	-6.00	at bound	-M	16.00
Objective	Function	(Max.) =	1600.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
X1	200.00	<=	200.00	0	2.00	150.00	400.00
X2	300.00	<=	300.00	0	4.00	150.00	400.00
X3	160.00	<=	250.00	90.00	0	160.00	M

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	2.40	200.00	480.00	0	basic	150.00	400.00
X2	3.80	300.00	1140.00	0	basic	150.00	400.00
X3	0	250.00	0	90.00	at bound	160.00	M
Objective	Function	(Min.) =	1620.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
NUTRI A	21.00	>=	21.00	0	20.00	15.00	40.00
NUTRI B	34.80	>=	30.00	4.80	0	-M	34.80
NUTRI C	10.00	>=	10.00	0	120.00	7.33	14.00
NUTRI D	8.60	>=	5.00	3.60	0	-M	8.60
NUTRI E	16.20	>=	10.00	6.20	0	-M	16.20

X1 = 2.4 X2 = 3.8   EB = 4.8 ED = 3.6 EE = 6.2   costo $ 1 620

En el Dual:

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      1600.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      YA        20.000000          0.000000
      YB         0.000000          4.000000
      YC       120.000000          0.000000
      YD         0.000000          3.000000
      YE         0.000000          6.000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         0.000000          2.000000
      3)         0.000000          4.000000
      4)        90.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      YA       20.000000        20.000000         5.000000
      YB       30.000000         4.000000         INFINITY
      YC       10.000000         3.333333         2.222222
      YD        5.000000         3.000000         INFINITY
      YE       10.000000         6.000000         INFINITY

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
       2      200.000000       199.999985        50.000000
       3      300.000000       100.000000       150.000000
       4      250.000000         INFINITY        90.000000
```

YA = 20; YC = 120; H3* = 90; ZD = $1 600

La conclusión de la dietista será entonces mezclar dos gramos del ingrediente 1 y cuatro gramos del ingrediente 2**,** para obtener la comida a un costo mínimo de $1600. Pero también puede adquirir las pastillas de una unidad de los nutrientes, pagando un máximo de $20 por cada pastilla del nutriente A y de $120 por cada pastilla del nutriente C.

De esta manera, si las unidades de vitamina A se consiguen a un precio inferior de $20, o las de vitamina B a un precio inferior de $120, es más favorable para la dietista comprar las unidades, ya que obtiene una disminución de los costos en comparación con el costo de preparar la comida.

Acá se ha planteado esta situación hipotética del dual, no con el ánimo de llevarla a cabo sino como medio para determinar el costo implícito de las unidades asociadas a cada restricción del modelo primal.

Hablamos de las unidades de vitamina A y B cuyos precios sombra o costos implícitos fueron dados por el valor de las variables del modelo dual.
Es decir, las variables del modelo dual pueden significar ya sea la utilidad marginal o el costo implícito (precio sombra) de un recurso, dependiendo del contexto lógico del problema primal al que se refiera.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

CAPÍTULO 4

El análisis de sensibilidad es el estudio de la forma en que afectan a la solución óptima los cambios en los coeficientes de un programa lineal. Usando análisis de sensibilidad puede responderse a las preguntas siguientes:

- ¿Como afectara a la solución óptima un cambio en un coeficiente de la función objetivo?
- ¿Cómo afectará a la solución óptima un cambio en el valor del segundo miembro de una restricción?

Como el análisis de sensibilidad se ocupa de la forma en que los cambios anteriores afectan a la solución óptima del análisis no comienza sino hasta que se obtiene tal solución al problema de programación lineal, porque eso se le llama también análisis de post-optimalidad.

El análisis de sensibilidad que se realiza sobre la solución óptima ofrece información complementaria que es valiosa para quien toma las decisiones.
La principal importancia del análisis para quienes toman decisiones es que los problemas reales ocurren en un medio ambiente dinámico, es decir cuando ocurre alguna de las situaciones siguientes:

1. Los precios de las materias primas varían.
2. L a demanda fluctúa.
3. Las compañías adquieren maquinas nuevas para reemplazar las antiguas.
4. Los mercados globales de mano de obra ocasionan cambios en los costos de producción.
5. Rotación e los empleos.

Los gerentes y ejecutivos desean determinar la forma en que estos cambios afectan a la solución óptima del problema primitivo de programación lineal.

EJEMPLO
Una compañía textil, incursiona en el mercado de bolsas de tela por despacho de mercaderías y fabrica dos clases de bolsas: el modelo estándar por tiendas y bodegas y el de lujo para supermercados y grandes almacenes. El proceso de fabricación es corte y teñido, costura, terminado e inspección y embalaje, cuya programación lineal es la siguiente:

$\boldsymbol{MAX}\ Z = 10X_1 + 9X_2$

Sujeto a:

$7X_1 + 10X_2 \leq 6300$ → Corte y Teñido

$6X_1 + 10X_2 \leq 7200$ → Costura

$3X_1 + 2X_2 \leq 2124$ → Terminado

$4X_1 + 10X_2 \leq 5400$ → Inspección y Emb.

$X_1, X_2 \geq 0$

La solución optima X_1= 540 bolsas estándar, X_2 = 252 bolsas de lujo y Z = 7688, donde X_1 da $10 de utilidades y X_2 da $9.0.

Supongamos que posteriormente debido a una reducción en el precio, la contribución a las utilidades de las bolsas estándar se reduce a $7.0, puede utilizarse el análisis de sensibilidad para determinar si el programa de producción de 540 bolsas estándar y 252 bolsas de lujo sigue siendo la mejor solución, si lo es, no habrá necesidad de resolver un programa lineal modificado que tenga $7X_1 + 9X_2$ como función objetivo

4.1 ANÁLISIS GRÁFICO DE SENSIBILIDAD

En este caso se utilizara métodos gráficos de solución para problemas de programación lineal con dos variables de decisión para realizar análisis de sensibilidad sobre los coeficientes de la función objetivo y sobre los valores en el segundo miembro o lado derecho de las restricciones.

- **COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO**

En el ejemplo anterior la solución óptima indica la fabricación de 540 bolsas estándares y 252 bolsas de lujo. El intervalo de optimidad para cada coeficiente de la función objetivo muestra la gama de valores sobre las cuales la solución del momento sigue siendo óptima. En la grafica siguiente muestra la solución grafica del problema, una observación cuidadosa en la grafica indica mientras el pendiente de la función objetivo se encuentra entre las pendientes de la recta A y la pendiente de la recta B el punto extremo 3 con $X_1 = 540$ y $X_2 = 252$ será óptimo.
Girar la recta de la función objetivo en sentido contrario al del reloj ocasiona que la pendiente se vuelva menos negativa, permitiendo el aumento de la pendiente, llegando los óptimos alternos de los puntos extremos 3 y 2
Del análisis debe resultar evidente que el punto extremo 3 será la solución óptima y cuando:

$$\boxed{(Pndte\ de\ la\ \ recta\ \ A) \leq (Pndte\ de\ la\, recta\ \ F.O) \leq (Pndte\ de\ la\ \ recta)}$$

En la figura se observa que la ecuación de la recta A (la recta de restricción de corte y teñido) es la siguiente:

$$7X_1 + 10X_2 < 6300$$

Despejando X_2 se obtiene en su forma de pendiente y ordenada en el origen:

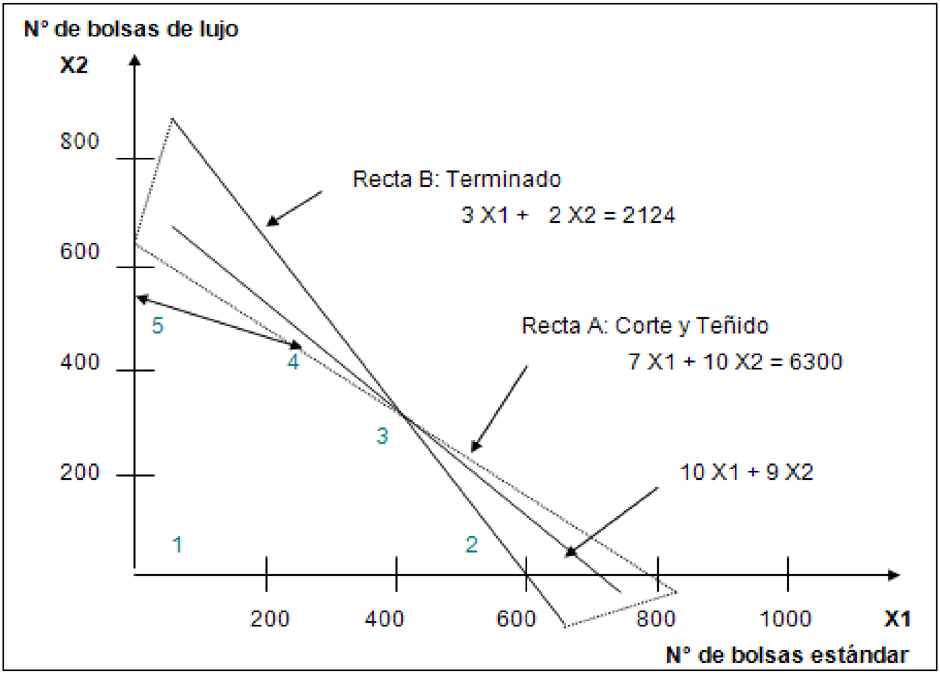
$$X_2 = -\frac{7}{10}X_1 + \ 630$$

La ecuación de la recta B:

$$3X_1 + 2X_2 < 2124$$

Despejando X_2 y poniendo en pendiente e intersección para la recta B:

$$X_2 = -\frac{3}{2}X_1 + 1062$$



Para que el extremo 3 siga siendo óptimo, se debe cumplir que:

<u>Ecuación (a)</u>

$$-\frac{3}{2} \leq Pendiente\ de\ la\ F.O. \leq -\frac{7}{10}$$

Considere la ecuación de la función objetivo como: $Z = C_1X_1 + C_2X_2$

Despejando X_2:

$$X_2 = \frac{C_1}{C_2}X_1 + \frac{Z}{C_2}$$

De ello se desprende que la pendiente, de la función objetivo es – C_1/C_2 luego sustituyendo en la ecuación (a) se observa que el punto extremo 3 seguirá siendo óptimo siempre y cuando se satisfaga la expresión siguiente:

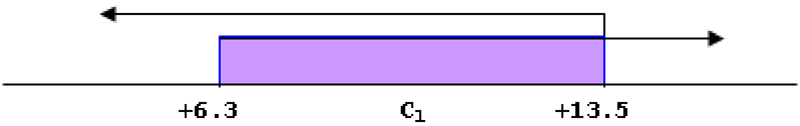
$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_1}{C_2} \leq -\frac{7}{10}$$

Para calcular el intervalo de optimidad para la contribución a las utilidades por las bolsas estándares, se mantiene fija la contribución a las utilidades por las bolsas de lujo, en su valor inicial C_2 = 9, luego:

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_1}{9} \leq -\frac{7}{10}$$

Combinando los límites para C1 se obtiene el intervalo de optimidad para la contribución a las utilidades de la bolsa estándar.

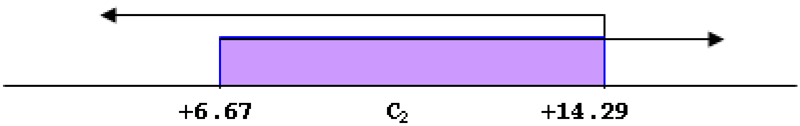
$$6.3 \leq C_1 \leq 13.5$$



Esto significa que si no se cambia los demás coeficientes, la contribución a las utilidades de la bolsa estándar puede encontrarse en cualquier punto entre $6.30 y $13.5 y las cantidades de 540 bolsas estándar y 252 bolsas de lujo seguirán siendo optimas.

Similarmente, manteniendo constante $C_1 = 10$, se puede verificar que

$$6.67 \leq C_2 \leq 14.29$$



4.2 CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Aquí se calcula la variación de los coeficientes de las variables de decisión de las variables de la función objetivo manteniendo la misma base.
Sean los siguientes coeficientes de las variables de decisión:

$$C = C_{B1}, C_{B2}, \ldots, C_{BR}, \ldots, C_{BM}\, ;\, C_{m+1}, C_{m+2}, \ldots, C_n$$

$C_B = C_{B1}, C_{B2}, \ldots, C_{BR}, \ldots, C_{BM}$ (Coeficientes de variables básicas)

$C_N = C_{m+1}, C_{m+2}, \ldots, C_n$ (Coeficientes de Variables no básicas)

4.2.1 CAMBIO DEL COEFICIENTE $C_{Br} \in C_B$

Si se altera el coeficiente C_{Br} en una cantidad ΔC_{Br}, el nuevo coeficiente es:

$C'_{Br} = C_{Br} + \Delta C_{Br}$, y por consiguiente:

$C'_B = C_{B1}, \ldots, C_{Br} + \Delta C_{Br}, \ldots, C_{Bm}$

Caso I: Maximización

En la K-ésima columna (K = m+1, m+2,... n), se tiene:

$Z'_K - C_K \geq 0$

$C'_B B^{-1} a_K - C_K \geq 0$

$$(C_{B1}, C_{B2}, \ldots, C_{Br} + \Delta C_{Br}, \ldots, C_{Bm}) \begin{bmatrix} Y_{1k} \\ Y_{2k} \\ . \\ . \\ Y_{rk} \\ . \\ . \\ Y_{mk} \end{bmatrix} - C_k \geq 0$$

Operando resulta:

$Z_K - C_K + \Delta C_{Br} Y_{rK} \geq 0$; K = m+1, m+2,…, n..............................(1)

Caso II: Minimización

De manera análoga se obtiene:

$Z_K - C_K + \Delta C_{Br} Y_{rK} \leq 0$; K = m+1, m+2,…, n..............................(2)

EJEMPLO

Se desea optimizar la producción de mesas y sillas de una fábrica industrial, para lo cual se dispone del número de horas máquina en cada una de las secciones siguientes:

MAQ.	MESAS	SILLAS	HORAS - MAQUINA
A	2	2	20
B	4	2	28
UTILIDAD	10	8	

El programa lineal es:

$$MAX\ Z = 10X_1 + 8X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 28$$

Sea el último tablero de la función objetivo:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	LD
Z	1	0	0	3	1	88
X_2	0	0	1	1	-1/2	6
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	4

Variación de C_1 ***:*** Primer coeficiente de la función objetivo de:

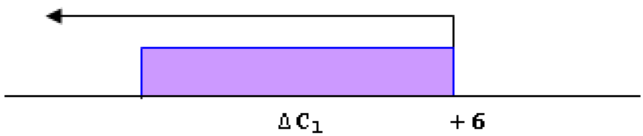
$$Z_K - C_K + \Delta C_{Br} Y_{rK} \geq 0\ ; \qquad k = 3, 4; \qquad r = 2$$

- Para k = 3

$$Z_3 - C_3 + \Delta C_1 Y_{23} \geq 0;$$

$$3 + (-\tfrac{1}{2})\Delta C_1 \geq 0;$$

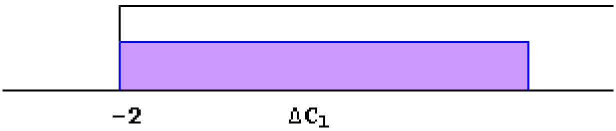
Entonces: $\Delta C_1 \leq 6$



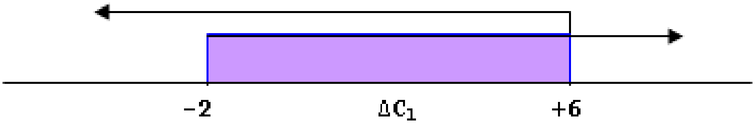
- Para k = 4

$$1 + (\tfrac{1}{2})\Delta C_1 \geq 0;$$

Entonces: $\Delta C_1 \geq -2$



Por tanto***:*** $\boldsymbol{-2 \leq \Delta C_1 \leq 6}$



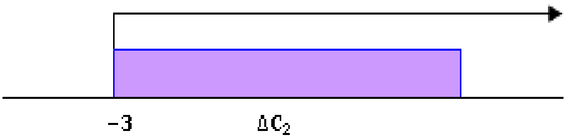
Variación de C_2 *:* Segundo coeficiente de la función objetivo de:

$$Z_K - C_K + \Delta C_{Br} Y_{rK} \geq 0\,; \qquad k = 3, 4; \qquad r = 1$$

- Para k = 3

$$Z_3 - C_3 + \Delta C_1 Y_{13} \geq 0;$$
$$3 + (1)\Delta C_2 \geq 0;$$

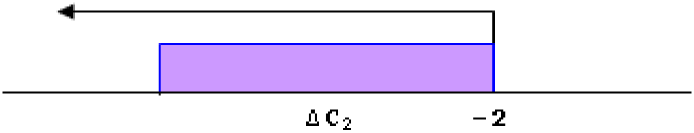
Entonces: $\Delta C_2 \geq -3$



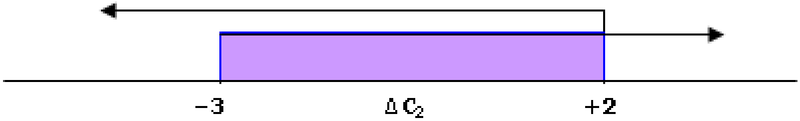
- Para k = 4

$$1 + (-\tfrac{1}{2})\Delta C_2 \geq 0;$$

Entonces: $\Delta C_2 \leq -2$



Por tanto***:*** $-3 \leq \Delta C_2 \leq 2$



Por otra parte la $Z_j - C_{Bj}$, perteneciente a la variable básica X_j es igual a cero y permanece con el mismo valor para el coeficiente $C'_{Bj} = C_{Bj} + \Delta C_{Bj}$ puesto que:

$Z'_j = C'_B B^{-1} a_j$

$Y_j = B^{-1} a_j$

$Y_j = e_j$

$Z'_j - C'_{Bj} = C'_{Be_j} - C'_{Bj} = C'_{Bj} - C'_{Bj}$

$Z'_j - C'_{Bj} = 0$

4.2.2 CAMBIO DEL COEFICIENTE $C_r \in C_N$

Si se altera el coeficiente C_r en una cantidad ΔC_r el nuevo coeficiente es:

$$C'_r = C_r + \Delta C_r$$

Caso I: Maximización

En el último tablero (en la posición r, r = m+1, m+2,..., n) se tiene:

$Z_r - C'_r \geq 0$

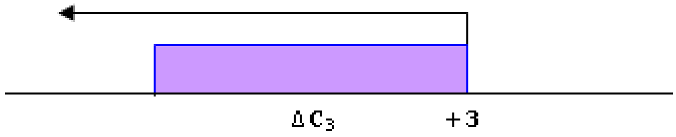
$Z_r - (C_r + \Delta C_r) \geq 0$

$\Delta C_r \leq Z_r - C_r$

- En el caso del coeficiente $X_3 \rightarrow r = 3$

  $(Z_3 - C_3) - \Delta C_3 \geq 0$

  $3 - \Delta C_3 \geq 0$

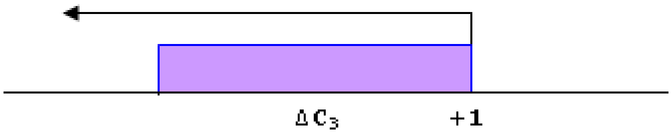


Por tanto: $-\infty \leq \Delta C_3 \leq 3$

- En el caso del coeficiente $X_4 \rightarrow r = 4$

  $(Z_4 - C_4) - \Delta C_4 \geq 0$

  $1 - \Delta C_4 \geq 0$



Por tanto: $-\infty \leq \Delta C_4 \leq 1$

Caso II: Minimización

$Z_r - C'_r \leq 0$
$\Delta C_r \geq Z_r - C_r$

4.3 CAMBIOS EN LA DISPONIBILIDAD DE RECURSOS

Aquí se calcula la variación de cada uno de los recursos, manteniendo la misma base.
Se sabe que:

$X_B = B^{-1}b$ y que: $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_r \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$, $B^{-1}b = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ . \\ br \\ . \\ bm \end{bmatrix}$

Si se altera el recurso b_r en una cantidad Δb_r se tiene que: $b'_r = b_r + \Delta b_r$

y deberá ocurrir que:

$$b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_r + \Delta b_r \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

i se asume que $B^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & \ldots.. & v_{1r} & \ldots.. & v_{1n} \\ v_{21} & \ldots.. & v_{2r} & \ldots.. & v_{2n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ v_{m1} & \ldots.. & v_{mr} & \ldots.. & v_{mn} \end{bmatrix}$

Para que se mantenga la misma base se debe cumplir con lo siguiente:

$B^{-1}b' \geq 0$ (siempre, en min. y máx.).

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1r} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & \ldots & v_{2r} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m1} & \ldots & v_{mr} & \ldots & v_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_r + \Delta b_r \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \geq 0$$

$$B^{-1}b' = \begin{array}{l} \overline{b_1} + v_{1r} * \Delta b_r \geq 0 \\ \overline{b_2} + v_{2r} * \Delta b_r \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{br} + v_{rr} * \Delta b_r \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{b_m} + v_{mr} * \Delta b_r \geq 0 \end{array}$$

En el problema anterior:

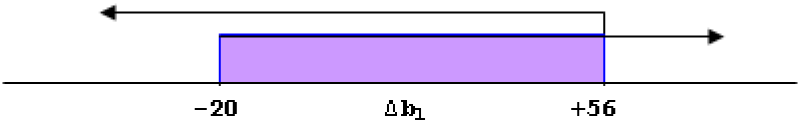
$$b = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- Si variamos el primer recurso b1:

$20 + 1\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -20$

$28 + \left(\frac{1}{2}\right)\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 56$

Entonces: $-20 \leq \Delta b_1 \leq 56$

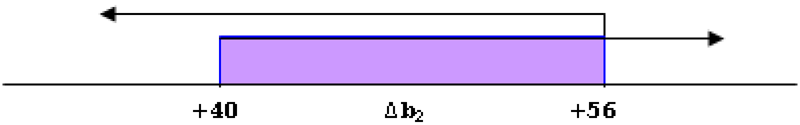


- Si variamos el segundo recurso b2:

$$20 + \left(-\frac{1}{2}\right)\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_2 \leq 40$$

$$28 + \left(\frac{1}{2}\right)\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_2 \geq 56$$

Entonces: $40 \leq \Delta b_2 \leq 56$



4.4 PRECIO DUAL

Llamado también imagen o sombra, solo las restricciones que tienen holgura o exceso cero tendrán un precio dual diferente de cero.
Indica la tasa de variación del valor óptimo de la función objetiva cuando cambia el segundo miembro de una restricción dentro de cierto rango de sensibilidad, y según el siguiente esquema:

Restricción		Variación en el recurso b		Consecuencia en función Objetivo
< b		Si el recurso b aumenta una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. mejora en una tasa igual al precio dual
		Si el recurso b disminuye en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. empeora en una tasa igual al precio dual
> b		Si el recurso b aumenta en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. empeora en una tasa igual al precio dual
		si el recurso b disminuye en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. mejora en una tasa igual al precio dual
= b	MAX	si el recurso b aumenta en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. mejora en una tasa igual al precio dual
		si el recurso b disminuye en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. empeora en una tasa igual al precio dual
	MIN	si el recurso b aumenta en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. empeora en una tasa igual al precio dual
		si el recurso b disminuye en una unidad	$\Rightarrow$	la F.O. mejora en una tasa igual al precio dual

4.5 CAMBIOS EN LA MATRIZ DE COEFICIENTES TECNOLÓGICOS

Sea el siguiente problema:

$MAX\ Z = CX$

Sujeto a:

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

El vector columna a_j se cambia por a'_j, entonces:

$$MAX\ Z = CX$$

Sujeto a:

$$A'X \leq b$$
$$X \geq 0$$

Este cambio afecta al producto $B^{-1}(a'_j)$. Luego también a $Z_j - C_j$ entonces se tiene:

$$Z'_j - C_j = C_B B^{-1} a'_j - C_j$$

Que deberá cumplir con la función de optimización ($Z'_j - C_j \geq 0$), en caso contrario se pivotea para encontrar el óptimo.

EJEMPLO

Winco vende 3 productos 1, 2 y 3. En la tabla se dan los recursos requeridos para producir una unidad de cada producto y los precios de venta de cada producto.

	Producto 1	**Producto 2**	**Producto 3**
Materia Prima	1	2	4
Horas de Trabajo	2	1	3
Precio Venta	6	10	8

Se dispone de 8 unidades de materia prima y 12 horas de trabajo para la producción.
Formulando el Programa Lineal para maximizar los ingresos de Winco por las ventas de sus productos

$$MAX\ Z = 6X_1 + 10X_2 + 8X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 8$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 12$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Y cuya solución es:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	1	0	0	38/3	14/3	2/3	136/3
X_2	0	0	1	5/3	2/3	-1/3	4/3
X_1	0	1	0	2/3	-1/3	2/3	16/3

En la actualidad Winco necesita de 2 unidades de materia prima y de 2 horas de trabajo para producir una unidad del producto 3. Se desea saber si la solución óptima varía con el cambio.

Solución:

Se desea cambiar $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ por $a'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ entonces:

$$Y'_3 = B^{-1}a'_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Luego: $Z'_3 - C_3 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 8 = 8/3$

La solución óptima no varía porque: $Z'_3 - C_3 \geq 0$

4.6 ADICIÓN DE UNA VARIABLE

Aquí se requiere conocer la columna de la actividad y coeficientes de la función objetivo, así para la columna j = n + m + 1, se tiene:

$$Y_j = B^{-1}a_j$$
$$Z_j - C_j = C_B Y_j - C_j$$

$Z_j - C_j \geq 0$, si se trata de maximizar.

$Z_j - C_j \leq 0$, si se trata de minimizar.

EJEMPLO

En el problema de las mesas y sillas se desea incorporar la línea de producción de repisas, si se necesitan una hora por cada máquina para elaborar una repisa siendo la utilidad de S/.8 por unidad ¿Cómo cambia la solución? Recordemos que este es el último tablero de la función objetivo:

	Z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**LD**
Z	1	0	0	3	1	88
X_2	0	0	1	1	-1/2	6
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	4

Solución:

La información para este problema será:

Máquina	**Mesas**	**Sillas**	**Repisas**	**Horas Máquina**
A	2	2	1	20
B	4	2	1	28
Utilidad	10	8	8	

El nuevo PL es:

$$MAX\,Z = 10X_1 + 8X_2 + 8X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \le 20$$
$$4X_1 + 2X_2 + X_3 \le 28$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Hallando el valor de $Z_3 - C_3$, conociendo los valores de $C_3 = 8$ (utilidad)

$$y \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; Y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Z_3 - C_3 = \begin{pmatrix} 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - 8 = -4$$

Introduciendo este valor al tablero:

	Z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	1	0	0	3	1	-4	88
X_2	0	0	1	1	-1/2	1/2	6
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	0	4

- Empleando el método Simplex

Dado que $Z_5 - C_5 < 0$ se pivotea

En el último tablero:

	Z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	1	6	8	8	0	0	160
X_5	0	2	2	1	0	1	20
X_4	0	2	0	-1	1	0	8

Se concluye que se debe producir sólo repisas, dado que las Variables básicas (de decisión) son ahora X_5 y X_4 (no se considera X_4 porque es una variable de holgura).

4.7 ADICIÓN DE UNA RESTRICCIÓN

Se necesita analizar si esta hace variar el vector solución, si ocurre esto se pivotea, si para un Programa lineal al introducir la restricción m +1 el sistema tiene m + 1 filas y m + n + 1 columnas.
La adición de una nueva restricción puede dar origen a una de dos condiciones:

1. La restricción satisface la solución actual y en este caso la restricción es redundante, y, por lo tanto, su adición no alterara la solución.
2. La solución actual no satisface la restricción. En este caso, la nueva solución se obtiene utilizando el Método Simplex Dual.

EJEMPLO

Para el problema de mesas y sillas se ha adicionado la máquina "C" la que produce 2 mesas y 1 silla, para lo cual dispone de 28 horas - máquina. Se desea saber si la solución óptima varía con el cambio.

Maquina	Mesas	Sillas	Horas - Máquina
A	2	2	20
B	4	2	28
C	2	1	28
Utilidad	10	8	

El nuevo PL es:

$$MAX\, Z = 10X_1 + 8X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 28$$
$$2X_1 + X_2 \leq 28$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Incorporando esta información en el tablero resulta:

	Z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	1	0	0	3	1	0	88
X_2	0	0	1	1	-1/2	0	6
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	0	4
X_5	0	2	1	0	0	1	28

- Por teoría de matrices podemos ingresar toda una fila sin tener problemas

Debemos pivotear la última fila del tablero

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	1	0	0	3	1	0	88
X_2	0	0	1	1	-1/2	0	6
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	0	4
X_5	0	0	0	0	-1/2	1	14

Donde se concluye que la nueva restricción no afecta a la solución original.

4.8 REGLA DEL 100%

4.8.1. Regla del 100% para el cambio de coeficientes de la función objetivo

Se consideran dos casos dependiendo, si cambia o no el coeficiente de la función objetivo de cualquier variable con un costo reducido de cero en el cuadro óptimo:

Caso I: Variación de los Coeficientes de las variables de decisión con todos sus costos reducidos diferentes de cero.

Caso II: Variación de los Coeficientes de las variables de decisión con al menos uno de sus costos reducidos igual a cero.

EJEMPLO

Mi alimentación requiere que todo lo que coma pertenezca a uno de los cuatro "grupos básicos de alimentos" (pastel de chocolate, helado, refrescos y pastel de queso). Actualmente, se dispone de los siguientes alimentos para el consumo: bizcochos de chocolate y nueces, helado de chocolate, cola, y pastel de queso con piña. Cada bizcocho cuesta 50 centavos; cada bola de helado de chocolate, 20 centavos; cada botella de refresco de cola, 30 centavos; y cada pieza de pastel de queso con piña, 80 centavos. Cada día tengo que ingerir por lo menos 500 calorías, 6 onzas de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. El contenido nutritivo por unidad de cada elemento se muestra en la tabla.

	Calorías	Chocolate (onzas)	Azúcar (onzas)	Grasa (onzas)
Bizcocho	400	3	2	2
Helado de chocolate (1 bola)	200	2	2	4
Refresco de Cola (1 botella)	150	0	4	1
Pastel de Queso con piña	500	0	4	5

El PL que satisface mis requerimientos alimenticios diarios a un costo mínimo es:

X_1 = Bizcocho

X_2 = Bola de helado de chocolate

X_3 = Botella de refresco de cola

X_4 = Pastel de queso con piña

$$Min\ Z = 50X_1 + 20X_2 + 30X_3 + 80X_4$$

Sujeto a:

$400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 \geq 500$ (Rest. de calorías)

$3X_1 + 2X_2 \geq 6$ (Rest. de chocolate)

$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$ (Rest. del azúcar)

$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 5X_4 \geq 8$ (Rest. de grasa)

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

La salida en LINDO para este problema es la siguiente:

MIN $50X_1 + 20X_2 + 30X_3 + 8X_4$

SUBJECT TO

2) $400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 >= 500$

3)	$3X_1$ +	$2X_2$			>= 6
4)	$2X_1$ +	$2X_2$ +	$4X_3$ +	$4X_4$	>= 10
5)	$2X_1$ +	$4X_2$ +	X_3 +	$5X_4$	>= 8

END

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 90.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	0.000000	27.500000
X_2	3.000000	0.000000
X_3	1.000000	0.000000
X_4	0.000000	50.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	250.000000	0.500000
3)	0.000000	-2.000000
4)	0.000000	-7.000000
5)	5.000000	0.000000

Nº ITERATIONS = 5

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X_1	50.000000	INFINITY	27.500000
X_2	20.000000	18.333334	5.000000
X_3	30.000000	10.000000	30.000000
X_4	80.000000	INFINITY	50.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	500.000000	250.000000	INFINITY
3)	6.000000	4.000000	2.857143
4)	10.000000	INFINITY	4.000000
5)	8.000000	5.000000	INFINITY

A. Suponga que el precio de un bizcocho aumenta hasta 60 centavos, y el precio de una rebanada de pastel de queso con piña disminuye hasta 50 centavos. ¿Seguirá siendo óptima la base actual? ¿Cuál sería la nueva solución óptima?

Solución:

Como los bizcochos X_1 y el pastel de queso con piña X_4 tienen costos reducido diferente de cero, se presenta el **caso I.**
De la salida del LINDO se ve que la base actual es óptima, si y sólo si:

$$22.5 = 50 - 27.5 \leq X_1 \leq 50 + \infty = \infty$$

$$30 = 80 - 50 \leq X_4 \leq 80 + \infty = \infty$$

Como los nuevos precios satisfacen ambas condiciones, la base actual permanece óptima. Tampoco cambia el valor óptimo de z y el valor óptimo de las variables de decisión.

B. Si el precio de un bizcocho baja hasta 40 centavos, y el precio de una rebanada de pastel de queso con piña baja hasta 25 centavos, ¿será todavía óptima la base actual?

Solución:

De la salida del LINDO, se ve que se presenta nuevamente el Caso I. Aunque el costo de un bizcocho está dentro del intervalo permisible, el caso del precio de una rebanada de pastel de queso con piña, ya está fuera de su intervalo permisible. Por lo tanto, la base actual ya no es óptima, y hay que resolver nuevamente el problema.

4.8.2 LA REGLA DEL 100% PARA CAMBIAR LOS LADOS DERECHOS

Hay que considerar dos casos, dependiendo de si cualquier de las restricciones, cuyos lados derechos se cambian, son obligatorios o no:

CASO I: Todas las restricciones cuyos lados derechos se modifican, no son obligatorias.
CASO II: Al menos una de las restricciones que se modifica es una restricción obligatoria.

Del ejemplo de alimentación:

CASO I

A. Suponga que las calorías necesarias disminuyen hasta 400 y que el requerimiento de grasa aumenta hasta 10 onzas. ¿Permanecerá óptima la base actual?, ¿Cuál será la nueva solución optima?

Solución:

Como ambas restricciones no son obligatorias, se presenta el caso I. De la corrida del lindo, observamos que los intervalos permisibles para las restricciones de las calorías de la grasa son:

$$-\infty = 500 - \infty \leq \text{calorias necesarias} \leq 500 + 250 = 750$$

$$-\infty = 8 - \infty \leq \text{requerimento de grasa} \leq 8 + 5 = 13$$

Los nuevos requerimientos de calorías y grasa permanecen dentro de sus valores permisibles; por lo tanto, la base actual permanece óptima. No cambian el valor óptimo de Z y los valores de las variables de decisión.

B. Suponga que disminuye el requerimiento de calorías hasta 400, y que el requerimiento de grasa aumenta hasta 15 onzas. ¿Permanecerá óptima la base actual?

Solución:

EL requerimiento de grasa ya no se encuentra dentro de su intervalo permisible de esta manera la base actual ya no es optima.

CASO II

Al menos una de las restricciones que se modifica es una restricción obligatoria. En el problema de la alimentación, supóngase que se aumenta la cantidad necesaria de chocolate hasta 8 onzas y que se reduce la del azúcar hasta 7 onzas. ¿Permanecerá óptima la base actual?

Solución:

Ya que las restricciones para el chocolate y el azúcar son obligatorias se presenta el Caso II y hay que utilizar la regla del 100%.

$\Delta b_2 = 8 - 6 = 2, \qquad I_2 = 4$, entonces $r_2 = 2/4 = 0.5$

$\Delta b_3 = 7 - 10 = -3, \quad D_3 = -4$, entonces $r_3 = 3/4 = 0.75$

$\Delta b_1 = \Delta b_4 = 0$, entonces $r_1 = r_4 = 0$

Ya que $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1.25 > 1$, la Regla del 100 % no proporciona información si la base actual es óptima o no.

4.9 INTERPRETACIÓN DEL PROGRAMA LINDO:

Ejemplo 1:

Un empresario, fabricante de artículos de cuero ha decidido lanzar un nuevo producto de bolsas de piel para damas. El distribuidor Alda de línea de cartera, bolsas y bolsones acepta comprar todas las bolsas que fabrique la empresa. Las operaciones necesarias para la fabricación de las bolsas son las siguientes:

1) Cortar y Teñir el material
2) Coser
3) Terminar
4) Inspeccionar y embalar

El problema del empresario es determinar cuantas bolsas estándares y cuantas bolsas de lujo deben fabricar con objeto de maximizar la contribución a las utilidades.

	TIEMPO DE PRODUCCIÓN				
PRODUCTO	**Corte y teñido.**	**Costura**	**Terminado**	**Insp. y Emb.**	**Utilidad**
Bolsa Estándar	7/10	1/2	1	1/10	10
Bolsa de Lujo	1	5/6	2/3	1/4	9
Disponibilidad de Prod.-horas	603	600	708	135	-

X_1 : Nº de bolsas estándares fabricadas

X_2 : Nº de bolsas de lujo fabricadas

$$MAX\,Z = 10X_1 + 9X_2$$

Sujeto a:

7/10 X1 + 10X2 <= 630

1/2X1 + 5/6X2 <= 600

X1 + 2/3X2 <= 708

1/10X1 + 1/4X2 <= 135

X1, X2 >= 0

El desarrollo en Lindo es:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 7662.147000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	538.418091	0.000000
X_2	253.107346	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	4.331450
3)	120.711861	0.000000
4)	0.000000	6.967985
5)	17.881355	0.000000

Nº ITERATIONS = 0

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X_1	10.000000	3.432836	3.700000
X_2	9.000000	5.285714	2.300000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	630.000000	51.885242	134.400009
3)	600.000000	INFINITY	120.711861
4)	708.000000	192.000000	126.599998
5)	135.000000	INFINITY	17.881355

La interpretación del problema mediante Lindo será:

- **Objetive Valúe**, representa el valor óptimo de la función objetivo y es $7668

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE

  1) 7662.147000

- **Value**, representa los valores óptimos de las variables , que son :

VARIABLE	VALUE
X_1	538.418091
X_2	253.107346

- **Reduced Cost**, representa el costo reducido, significa cuanto tendría que mejorar el coeficiente de la función objetivo de cada variable de decisión antes de que sea posible que tal variable asuma un valor positivo en la solución óptima. Si una variable de decisión ya es positiva en la solución optima, su costo reducido es cero. En un problema de maximización, mejorar significa aumentar y en un problema de minimización, mejorar significa disminuir.

VARIABLE	REDUCED COST
X_1	0.000000
X_2	0.000000

- **Slack or surplus**, representa holguras o excesos e indica el valor óptimo de las variables de holgura asociada con cada restricción del problema transformado.

ROW	SLACK OR SURPLUS	
2)	0.000000	/ corte y teñido
3)	120.711861	/ costura
4)	0.000000	/ terminado
5)	17.881355	/ inspección y embalaje

- **Dual Prices**, representa los precios duales, significa que el índice de la mejoría de la función objetivo cuando el vector disponibilidad de recursos aumenta sobre el rango permisible. También el precio dual correspondiente a una restricción es el Mejoramiento en el valor óptimo de la función objetivo (recursos) de la restricción.

ROW	DUAL PRICES	
2)	4.331450	/ corte y teñido
3)	0.000000	/ costura
4)	6.967985	/ terminado
5)	0.000000	/ inspección y embalaje

Se puede afirmar que una hora adicional de tiempo corte t teñido mejora (aumenta) el valor de la función objetivo en $4.33 y una hora adicional de tiempo de Terminado mejora (aumenta) en $6.967.
En consecuencia, aumenta el tiempo de corte y teñido de 630 a 631 horas, manteniendo constante todos los demás coeficientes del problema, aumentando las utilidades de la compañía de 7662.1 + 4.33 = 7666.43, similarmente en el caso de terminado aumenta el tiempo de 7662.1 + 6.97 =7669.07. Los precios duales cero señalan que aumentar las horas disponibles de estos recursos no mejora el valor de la función objetivo.
Si el precio dual es negativo por ejemplo – 4.33 significa que al aumentar el tiempo de corte y teñido de 630 a 631 horas las utilidades disminuirían en $4.33

Ejemplo 2:

Considere el PL siguiente y su tablero óptimo:

$$Max\ 3X_1 + X_2 + 6X_3$$

ST

$$2X_1 + 5X_2 + 4X_3 <= 18$$

$$3X_1 - 7X_2 + 3X_3 <= 10$$

$$X_1 + X_3 <= 9$$

ROW(BASIS)	X1	X2	X3	slk2	slk3	slk4	LD
1 ART	0.907	0.000	0.000	1.047	0.605	0.000	24.884
2 slk4	0.326	0.000	0.000	-0.163	-0.116	1.000	4.907
3 X2	-0.140	1.000	0.000	0.070	-0.093	0.000	0.326
4 X3	0.674	0.000	1.000	0.163	0.116	0.000	4.093

a) Prepare el reporte lindo.

b) Calcule la holgura del primer recurso.

c) Cual debe ser el coeficiente de la variable X_1 para que pueda ser variable básica.

d) Obtenga el máximo valor de la función objetivo para la variación del segundo recurso.

e) Obtenga el máximo valor de la función objetivo para la variación del coeficiente X_2

Solución:

a) Hallando los intervalos pedidos tenemos:

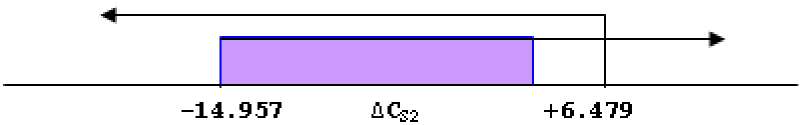
- **Para x2**

$0.907 + (-0.140)\ \Delta Cs_2 \geq 0$ $\qquad \Delta Cs_2 \leq 6.479$

$1.047 + (0.070)\ \Delta Cs_2 \geq 0$ $\qquad \Delta Cs_2 \geq -14.957$

$0.605 + (-0.093)\ \Delta Cs_2 \geq 0$ $\qquad \Delta Cs_2 \leq 6.505$

$-14.957 \leq \Delta Cs_2 \leq 6.479$



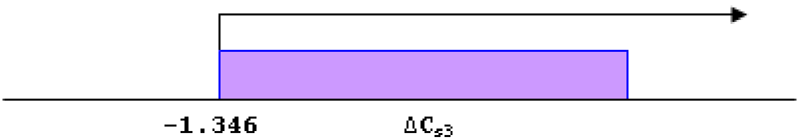
- **Para x3**

$0.907 + (0.674)\ \Delta Cs_3 \geq 0$ $\qquad \Delta Cs_3 \geq -1.346$

$1.047 + (0.163)\ \Delta Cs_3 \geq 0$ $\qquad \Delta Cs_3 \geq -6.423$

$0.605 + (0.116)\ \Delta Cs_3 \geq 0$ $\qquad \Delta Cs_3 \geq -5.216$

$-1.346 \leq \Delta Cs3 \leq$ infinito



Ahora preparamos el Reporte de Lindo

Z = 24.884

Var.	**Valor**	**Costo reducido**
X1	0	0.907
X2	0.326	0
X3	4.093	0

Recurso	**Valor**	**Precio Dual**
2)	0	1.047
3)	0	0.605
4)	4.907	0

RANGOS

Var.	**Coef.**	**Aumento**	**Disminución**
X1	3	infinito	infinito
X2	1	6.479	14.957
X3	6	infinito	1.346

b) 2X1 + 5X2 + 4X3 + S1 = 18

S1= -0.002

c) Para que sea básica x1 debe ser 3 + 0.907 = 3.907 su coeficiente

d) Para el segundo recurso: Max incremento

$4.907 + (-0.116)\ \Delta Cs_2 \geq 0 \qquad \Delta Cs_2 \leq 42.302$

$0.326 + (-0.093)\ \Delta Cs_2 \geq 0 \qquad \Delta Cs_2 \leq 3.505$

$4.093 + (0.116)\ \Delta Cs_2 \geq 0 \qquad \Delta Cs_2 \leq -35.284$

e) Para Z máximo entonces el incremento debe ser máximo

Coeficiente de X2: 1+6.479=7.479

Max Z = 3X1 + 7.479X2 + 6X3 Z = 26.996

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Beerco fabrica cerveza tipo ALE y BEER, a partir de trigo, lúpulo y malta. Actualmente, se disponen de 40 lb. de trigo, 30 lb. de lúpulo y 40 lb. de malta. Un barril de ALE se vende a 40 dólares y requiere 1 lb. de trigo, 1 lb. de lúpulo y 2 lb. de malta. Un barril de BEER se vende a 50 dólares y se necesitan 2 lb. de trigo, 1 lb. de lúpulo y 1 lb. de malta. Beerco puede vender toda la ALE y toda la BEER que produce. Suponiendo que la meta de Beerco es maximizar el ingreso total de las ventas, Beerco tendrá que resolver el PL siguiente:

Max Z = 40ALE + 50BEER

Sujeto a:

$$\begin{aligned} ALE + 2\,BEER &\leq 40 \\ ALE + BEER &\leq 30 \\ 2ALE + BEER &\leq 40 \\ ALE,\ BEER &\geq 0 \end{aligned}$$

ALE = barriles de ale producidos y BEER = barriles de cerveza producidos.

En la tabla se muestra un cuadro óptimo para este PL.

	Z	**ALE**	**BEER**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**LD**
Z	1	0	0	20	0	10	1200
BEER	0	0	1	2/3	0	-1/3	40/3
S2	0	0	0	-1/3	1	-1/3	10/3
ALE	0	1	0	-1/3	0	2/3	40/3

a) Escribir la solución dual y obtenga su solución optima

b) Encuentre el intervalo de los valores del precio de ALE para los cuales la base actual permanece óptima.

c) Encuentre el intervalo de los valores del precio de BEER para los cuales la base actual permanece óptima.

d) Halle el intervalo de los valores de la cantidad de trigo disponible para los cuales la base actual permanece óptima.

e) Obtenga el intervalo de los valores de la cantidad de lúpulo disponible para los cuales la base actual permanece óptima.

f) Obtenga el intervalo de los valores de la cantidad de malta disponible para los cuales la base actual permanece óptima.

g) Suponga que Beerco está considerando producir otro tipo de cerveza (MALT LIQUOR). Un barril de MALT LIQUOR requiere 0.5 lb. de trigo, 3 lb. de lúpulo y 3 lb. de malta y se vende a 50 dólares. ¿Tendrá que producir Beerco Malt liquor?

Solución:

a) Solución dual :

$Min\ 40Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3$

Sujeto a:

$$Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \geq 40$$

$$2Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 50$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

La solución óptima es: **40*20 + 30*0 + 40*10 = 1200**

b) EL intervalo de los valores del precio de ALE para los cuales la base actual permanece optima.

Sea el cuadro óptimo el siguiente:

Para k = 3, r = 3

Z3 - C3 + Y_{33}□CALE □ 0

20 + (-1/3)□CALE □ 0

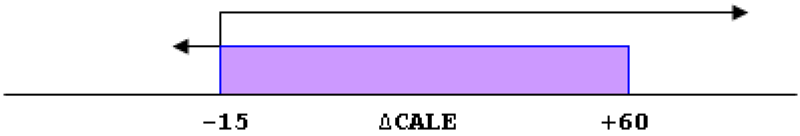
□CALE □ 60

Para k = 5, r = 3

Z5 - C5 + Y_{35}□CALE □ 0

10 + (2/3)□CALE □ 0

□CALE □ -15



El intervalo es: $-15 \leq \Delta C_{ALE} \leq 60$

c) El intervalo de los valores del precio de la BEER para los cuales la base actual permanece optima.

Para k = 3, r = 1

Z3 - C3 + □CBEERY13 □ 0

20 + (2/3)□CBEER □ 0

□CBEER □ -30

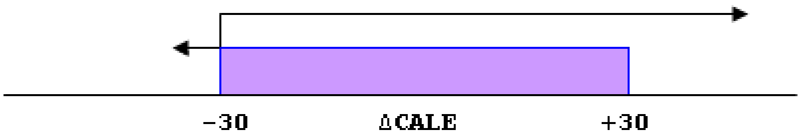
Para k = 5, r = 1

Z5 - C5 + □CBEER □ 0

10 + (1/3)□CBEER □ 0

□ CBEER □ 30

El intervalo es: $-30 \leq \Delta C_{BEER} \leq 30$



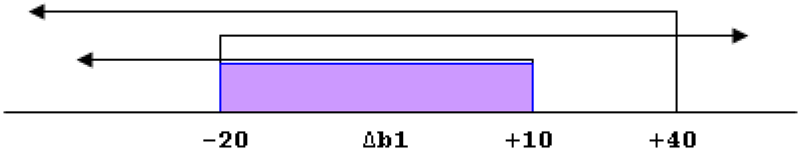
d) El intervalo de los valores de la cantidad de trigo disponible para los cuales la base actual permanece optima.

Para Δb_1: (Restricción del trigo)

$40/3 + (2/3)\Delta b_1 \geq 0$ $\Delta b_1 \geq -20$

$10/3 + (-1/3)\Delta b_1 \geq 0$ $\Delta b_1 \leq 10$

$40/3 + (-1/3)\Delta b_1 \geq 0$ $\Delta b_1 \leq 40$



El intervalo es: $\boldsymbol{-20 \leq \Delta b_1 \leq 10}$

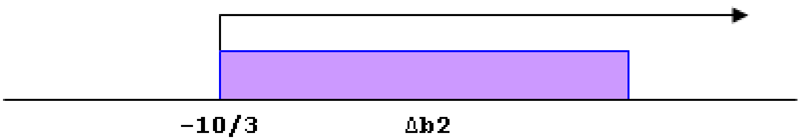
e) El intervalo de los valores de la cantidad de lúpulo disponible para los cuales la base actual permanece optima.

Para Δb_2: (Restricción del lúpulo)

$40/3 + (0)\Delta b_2 \geq 0$ $\Delta b_2 \geq -\infty$

$10/3 + (1)\Delta b_2 \geq 0$ $\Delta b_2 \geq -10/3$

$40/3 + (0)\Delta b_2 \geq 0$ $\Delta b_2 \geq -\infty$



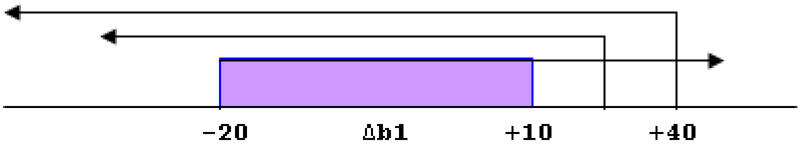
El intervalo es: $-10/3 \le \Delta b_2 \le \infty$

f) El intervalo de los valores de la cantidad de malta disponible para los cuales la base actual permanece optima.

- Para Δb_3: (Restricción de la malta)

$40/3 + (-1/3)\Delta b_3 \ge 0$	$\Delta b_3 \le 40$
$10/3 + (-1/3)\Delta b_3 \ge 0$	$\Delta b_3 \le 10$
$40/3 + (2/3)\Delta b_3 \ge 0$	$\Delta b_3 \le -20$

El intervalo es: $-20 \le \Delta b_3 \le 10$



g) Beerco está considerando producir otro tipo de cerveza (MALT LIQUOR). Un barril de malt liquor requiere 0.5 lb. de trigo, 3 lb. de lúpulo y 3 lb. de malta y se vende a 50 dólares. ¿Tendrá que producir Beerco Malt liquor?

Al aumentar una nueva actividad, el tablero inicial será ahora:

	Z	ALE	BEER	MALT	S_1	S_2	S_3	LD
Z	1	- 40	- 50	-50	0	0	0	0
S_1	0	1	2	0.5	1	0	0	40
S_2	0	1	1	3	0	1	0	30
S_3	0	2	1	3	0	0	1	40

$$Z_j - C_j = C_{VB}B^{-1}\left[a_j\right] - C_j$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - 50 = 10 + 30 - 50 = -10$$

$$A_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 11/6 \\ 11/6 \end{bmatrix}$$

- El nuevo tablero óptimo será:

	Z	ALE	BEER	MALT LQ	S1	S2	S3	LD
Z	1	0	0	-10	20	0	10	1200
CERV.	0	0	1	-2/3	2/3	0	-1/3	40/3
S2	0	0	0	11/6	-1/3	1	-1/3	10/3
ALE	0	1	0	11/6	-1/3	0	2/3	40/3

Dado que el valor del coeficiente de Malt Liquor es < 0 (= -10), esto indica que la base no sería optima; por lo tanto, podría usar el algoritmo Simplex a fin de no tener coeficientes negativos en el renglón o, con lo que la variable Malt Liquor entraría a la base, convirtiéndose en variable de decisión.

2. Radioco fabrica dos tipos de radios. El único recurso escaso que se necesita para producir los radios es la mano de obra. Actualmente la compañía tiene dos trabajadores. El trabajador 1 está dispuesto a trabajar hasta 40 horas a la semana, y se le para 5 dólares la hora. El trabajador 2 está dispuesto a trabajar hasta 50 horas a la semana, y se le paga 6 dólares la hora. En la tabla siguiente se dan los precios, así como los recursos requeridos para fabricar cada tipo de radio.

RADIO 1		**RADIO 2**	
Precio (dólares)	***Recursos Requeridos***	***Precio (dólares)***	***Recursos Requeridos***
25	Trabajador 1: 1 hora	22	Trabajador 1: 2 horas
	Trabajador 2: 2 horas		Trabajador 2: 1 hora
	Materia prima: Costo: 5 dólares		Materia prima costo: 4 dólares

a). Sea Xi el número de radios tipo i producidos semanalmente. Demuestre que Radioco tendría que resolver el PL siguiente (su cuadro optimo se da en la siguiente tabla)

b). ¿Para qué valores del precio de un radio tipo 1, la base actual permanece óptima?

c). ¿Para qué valores del precio de un radio tipo 1, la base actual permanece óptima?

d). Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar solamente 30 horas a la semana, ¿permanecería óptima la base actual?

e). Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar hasta 60 horas a la semana, ¿permanecería óptima la base actual?

f). Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar una hora adicional, ¿cuál sería la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar Radioco?

g). Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar solamente 48 horas, ¿cuáles serían las utilidades de Radioco?. Verifique su respuesta al determinar el número de radios de cada tipo que se producirían si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar solamente 48 horas.

h). Radioco esta considerando la posibilidad de producir un radio tipo 3. Las especificaciones para un radio tipo 3 son las siguientes: precio, 30 dólares, 2 horas del trabajador 1; 2 horas del trabajador 2, costo de la materia prima, 3 dólares. ¿Tendría que producir Radioco radios tipo 3?

$$Max\,Z = 25X_1 - (5 + 5 + 6 * 2)X_1 + 22X_2 - (4 + 5 * 2 + 6)X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$2X_1 + X_2 \leq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

En la tabla se muestra un cuadro óptimo para este PL.

	X_1	X_2	S_1	S_2	LD
Z	0	0	1/3	4/3	80
X_1	1	0	-1/3	2/3	20
X_2	0	1	2/3	-1/3	10

Solución:

a) Calculando:

$$Max\,Z = (25 - 5 - 2 * 6 - 5)X_1 + (22 - 2 * 5 - 6 - 4)X_2 \rightarrow Z = 3X_1 + 2X_2$$

Trabajador 1: $X1 + 2X_2 \leq 40$

Trabajador 2: $2X_1 + X2 \leq 50$

Desarrollo del PL con la ayuda del LINDO

```
MAX   3X1 + 2X2
SUBJECT TO:
          X1 + 2X2 <= 40
```

2X1 +   X2 <= 50

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 80.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	20.000000	0.000000
X_2	10.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.333333
3)	0.000000	1.333333

Nº ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X_1	3.000000	1.000000	2.000000
X_2	2.000000	4.000000	0.500000

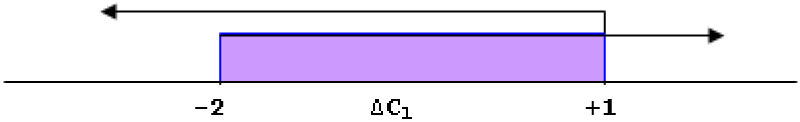
RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	40.000000	60.000000	15.000000
3)	50.000000	30.000000	30.000000

b) Valores del precio de un radio tipo 1, en donde la base actual permanece optima

k = 4 $\quad 1/3 + (-1/3)\Delta C_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_1 \leq 1$

$k = 5 \qquad 4/3 + (2/3)\Delta C_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_1 \geq -2$



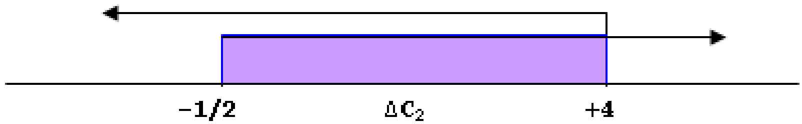
$C'_1 = 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad P_1 - 22 = 4 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 26$

$C'_1 = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1 - 22 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 23$

c) Valores del precio de un radio tipo 1,en donde la base actual permanece optima

$1/3 + (2/3)\ \Delta C_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_2 \geq -1/2$

$4/3 + (-1/3)\ \Delta C_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_2 \leq 4$



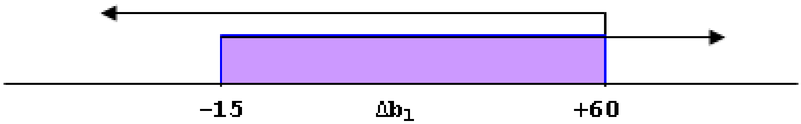
$C'_2 = 2 - 1/2 \quad \Rightarrow \quad P_2 - 20 = 2 - 1/2 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 21.5$

$C'_2 = 2 + 4 \quad \Rightarrow \quad P_2 - 20 = 2 + 4 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 26$

d) Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar solamente 30 horas a la semana, ¿permanecería óptima la base actual?

$20 + (-1/3)\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \quad \Delta b_1 \leq \ 60 \quad \Rightarrow \quad 40 + 60 = 100$

$10 + (2/3)\Delta b_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_1 \geq -15 \quad \Rightarrow \quad 40 - 15 = \ 25$

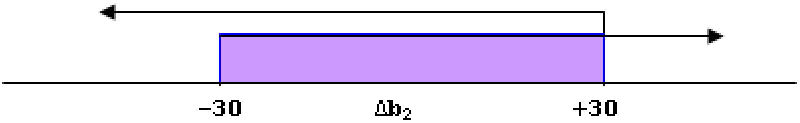


La base actual permanece óptima.

e) Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar hasta 60 horas a la semana, ¿permanecería óptima la base actual?

$20 + (2/3)\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \quad \Delta b_2 \geq -30 \quad \Rightarrow \quad 50 + 30 = 80$

$10 + (-1/3)\Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \quad \Delta b_2 \leq 30 \quad \Rightarrow \quad 50 - 30 = 20$



Por lo tanto, la base actual permanece óptima.

f) Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar una hora adicional, la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar Radioco:

A partir del precio sombra de 1/3 de la restricción $X_1 + 2X_2 \leq 40$, se observa que si hay 41 horas de trabajo disponible, entonces (después de pagar 5 dólares por hora extra de trabajo). Las utilidades aumentaran en 1/3 dólar. Por lo tanto Radioco paga 5 dólares + 1/3 dólar = 16/3 dólares por una hora extra de trabajo. Esto significa que Radioco estaría dispuesto a pagar hasta 16/3 dólares por otra hora de trabajo.

g) Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar solamente 48 horas, las utilidades de Radioco

$$B^{-1}.b = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 48 \end{bmatrix} \qquad \#RADIOS = \begin{bmatrix} 56/3 \\ 32/3 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56/3 \\ 32/3 \end{bmatrix} = 77.33$$

De otra manera: $Z = 80 - 2x4/3 = 77.33$

h) Radioco considera la posibilidad de producir un radio tipo 3. Las especificaciones para un radio tipo 3 son las siguientes: precio, 30 dólares, 2 horas del trabajador 1; 2 horas del trabajador 2, costo de la materia prima, 3 dólares
Para que Radioco no produzca el radio tipo 3:

$$Z_j - C_j \geq 0$$

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1}(a_j) - C_j$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}^{2}_{2} 3$$

$$\frac{2}{3}\frac{8}{3} 3 \frac{1}{3} \geq 0$$

Por lo tanto Radioco no tendría que producir radios tipo 3.

4.10 INTERPRETACIÓN DEL PROGRAMA LINGO

3. Carco fabrica automóviles y camiones. Cada automóvil contribuye con 300 dólares a la utilidad, y cada camión contribuye con 400 dólares. En la Tabla se muestran los recursos requeridos para la producción de un automóvil y de un camión. Cada día, Carco puede rentar hasta 98 máquinas tipo 1 a un costo de 50 dólares la máquina. Actualmente, la compañía dispone de 73 máquinas tipo 2 y 260 ton. de acero. Consideraciones del mercado indican que hay que producir por lo menos 88 automóviles y por lo menos 26 camiones.

Sea:

$X1$ = automóviles producidos diariamente

$X2$ = camiones producidos diariamente

$M1$ = máquinas tipo 1 rentadas diariamente

	DÍAS EN LA MÁQUINA TIPO 1	**DÍAS EN LA MÁQUINA TIPO 2**	**TONELADAS DE ACERO**
AUTOMÓVIL	0.8	0.6	2
CAMIÓN	1	0.7	3

Para maximizar la ganancia, Carco tendrá que resolver el PL de la Fig. Utilice la salida de LINDO para contestar las preguntas siguientes.

a) Si los automóviles contribuyeran con 310 dólares a la utilidad, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema?

b) ¿Cuál es la máxima cantidad que Carco tendría que estar dispuesto a pagar para rentar 1 máquina adicional de tipo1 por día?

c) ¿Cuál es la máxima cantidad que Carco tendría que estar dispuesto a pagar por una tonelada extra de acero?

d) Si Carco tuviera que producir por lo menos 86 automóviles, ¿cuál sería la utilidad de Carco?

e) Carco considera la posibilidad de producir vehículos para todo terreno (jeep). Un jeep contribuye con 600 dólares a la utilidad y requiere 1.2 días de la máquina 1,2 días de la máquina 2 y 4 ton. de acero. ¿Tendría que producir Carco algún jeep?

REPORTE EN LINDO:

MAX 300X1 + 400X2 - 50M1

SUBJECT TO

2) 0.8X1 + X2 - M1 $\leq$ 0
3) M1 $\leq$ 98
4) 0.6X1 + 0.7X2 $\leq$ 73
5) 2X1+ 3X2 $\leq$ 260
6) X1 $\geq$ 88
7) X2 $\geq$ 26

END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 32540.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_1	88.000000	0.000000
X_2	27.599998	0.000000
X_3	98.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	400.000000
3)	0.000000	350.000000
4)	0.879999	0.000000
5)	1.200003	0.000000
6)	0.000000	-20.000000
7)	1.599999	0.000000

Nº ITERATIONS = 1

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X_1	300.000000	20.000000	INFINITY
X_2	400.000000	INFINITY	25.000000
X_3	-50.000000	INFINITY	350.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	0.000000	0.400001	1.599999
3)	98.000000	0.400001	1.599999
4)	73.000000	INFINITY	0.879999
5)	260.000000	INFINITY	1.200003
6)	88.000000	1.999999	3.000008
7)	26.000000	1.599999	INFINITY

Solución:

a). Si los automóviles contribuyeran con 310 dólares, se estaría adicionando $ 10 a la utilidad.

Observando el reporte en LINDO, vemos que 10 está dentro del rango admisible para un incremento de X1 (automóviles); por lo tanto la F.O. seguiría siendo óptima.

Nuevo valor objetivo $z = 32540 + 10(88) = 33420$ dólares

b). Según el reporte LINDO, el aumento máximo permisible de la Máq. Tipo 1 es 0.400001, por lo que si alquilamos 1 Máq. adicional, ésta no estará dentro del intervalo permisible (< 1).

c). Carco no utiliza todo el recurso disponible de *acero;* por lo tanto, no le interesa comprar 1 ton extra de acero.

$\Rightarrow \geq 0$

d). Si Carco tuviera que producir por lo menos 86 automóviles (dos automóviles menos que el planteamiento original). Veremos que una disminución en 2 está dentro del rango permisible; por lo tanto:

$$\boxed{\text{Nueva utilidad} = 32540 + (-2)(-20) = 32580}$$

e). Si se considera la posibilidad de producir jeep:

Tendríamos que reformular con los datos de la nueva línea:

Sea X_3 el número de jeep a producir:

MAX 300X1 + 400X2 + 600X3 - 50MT

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
0.8X1 + X2 + 1.2X3 - M1 &\leq 0 \\
M1 &\leq 98 \\
0.6X1 + 0.7X2 + 2X3 &\leq 73 \\
2X1 + 3X2 + 4X3 &\leq 260 \\
X1 &\geq 88 \\
X2 &\geq 26 \\
X1, X2, X3 &\geq 0
\end{aligned}$$

El reporte en LINDO nos arroja una F.O. de 32631 dólares, que es mayor a la F.O. original, lo que significa que aumentaría nuestras utilidades.

Por lo tanto, es recomendable producir *jeep*.

4. WIVCO fabrica un producto 1 y un producto 2, procesando materia prima. Se puede comprar hasta 90 lb. De materia prima a un costo de 10 dólares/lb. Se puede utilizar una libra de materia prima, para producir 1 lb. del producto 1, ó 0.33 lb. del producto 2, Usar una libra de materia para producir 0.33 lb. del producto 2, requiere tres horas de mano de obra. Se disponen 200 has de mano de obra; se pueden vender a lo más 40 libras del producto 2. Se vende el producto 1 a 13 dólares/lb., y el producto 2 a 40 dólares/lb. Sea:

RM = Lb. de materia prima procesadas

P1 = Lb. de materia prima utilizadas para fabricar el producto 2

Para maximizar la ganancia, WINCO tendrá que resolver el PL siguiente:

$$Max\,Z = 13P_1 + 40(0.33)P_2 - 10RM$$

Sujeto a:

$$P_1 + P_2 \leq RM$$

$$2P_1 + 3P_2 \leq 200$$

$$RM \geq 90$$

$$0.32P_2 \leq 40$$

$$P_1, P_2, RM \geq 0$$

Con la ayuda de la salida de LINDO de la Fig. Conteste las preguntas siguientes:

a) Si se pudieran comprar solamente 87 lb. de materia prima ¿Cuáles serían las utilidades de WIVCO?

b) Si se vendiera el producto2 a 39.50 dólares/lb., ¿cuál sería la nueva solución optima para el problema de WIVCO?

c) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que estar dispuesta a pagar WIVCO por la otra libra de materia prima?

d) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar WIVCO por otra hora de trabajo?

e) Supóngase que se puede utilizar una libra de materia prima para fabricar 0.8 lb. del producto 3. El producto 3 se vende a 24 dólares/lb. y por procesar 1 lb. de materia prima de 0.8 lb. del producto 3 requiere 7 horas de mano de obra. ¿Tendría que producir WIVCO algún producto 3?

```
MAX   13 P1 + 13.2P2 - 10RM

SUBJECT TO

        - P1-P2+RM ≥ 0
        2P1+3P2 ≤ 200
        RM ≤ 90
        0.33P2 ≤ 40
    END

    LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

          1)                        90.000000

     VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        P1          70.000000          0.000000
        P2          20.000000          0.000000
        RM          90.000000          0.000000

          ROW     SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
          2)         0.000000         -12.600000
          3)         0.000000           0.200000
          4)         0.000000           2.600000
          5)        33.400002           0.000000


    N° ITERATIONS = 3


    RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:
```

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
P1	13.000000	0.200000	0.866667
P2	13.200000	1.300000	0.200000
RM	-10.000000	INFINITY	2.600000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	0.000000	23.333334	10.000000
3)	200.000000	70.000000	20.000000
4)	90.000000	10.000000	23.333334
5)	40.000000	INFINITY	33.400002

Solución:

a. Si se pudieran comprar solamente 87 lb. De materia prima, estaríamos disminuyendo 3 lb. de m.p. ésta disminución está dentro del rango permisible (reporte LINDO) por lo tanto:

$\boxed{\text{Nueva utilidad} \quad Z = 274 - (2.6x3) = 266.20 \quad \text{dólares}}$

b. Las variables de decisión permanecen igual

$\boxed{\text{Nuevo valor objetivo } Z = 13x70 + 39.5x\,(0.33)20 - 10x90 = 270.70 \text{ dólares}}$

c. Una máquina adicional del tipo 1 por día:

La respuesta la obtendremos directamente observando los precios duales del reporte LINDO

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-12.600000

Por lo que WIVCO estará dispuesto a pagar 12.60 dólares por rentar dicha máquina

d. De igual manera, la respuesta la obtendremos directamente observando los precios duales del reporte LINDO:

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
3)	0.000000	0.200000

Por lo que WIVCO estará dispuesto a pagar 0.20 dólares (20 centavos $) por una hora adicional de mano de obra.

e. Suponiendo que se fabrica el producto 3; se tendría que modificar nuestra formulación de la siguiente manera:

Sea P3 número de artículos del producto 3 a fabricar

$$Max\ Z = 13P_1 + 40(0.33)P_2 + 24(0.8)P_3 - 10RM$$

Sujeto a:

$$RM \geq P_1 + P_2 + P_3$$

$$2P_1 + 3P_2 + 7P_3 \geq 200$$

$$RM \geq 90$$

$$0.3P_2 \leq 40$$

$$P_1, P_2, RM \geq 0$$

Lo cual no da una nueva F.O. de 294.800000 dólares

294.800000 > 274000000

Significa mayor utilidad; por lo tanto se fabricará el producto 3.

5. El Granjero Leary Cultiva trigo y maíz en su granza de 45 acres. Puede vender a lo más 140 bushel de trigo y, a lo más, 120 bushel de trigo. Cada acre cultivado produce 5 bushel de trigo o 4 bushel de maíz a 50 dólares el bushel. Se necesitan seis horas de mano de obra para cosechar un acre de trigo y 10 horas de mano de obra para cosechar un acre de maíz. Se pueden adquirir 350 horas de mano de obra a 10 dólares la hora. Sea.

A1 = Acres sembrados de trigo

A2 = Acres sembrados de maíz

L = h de trabajo adquiridas.

Para maximizar las utilidades, el grajero Leary tendrá que resolver al PL siguiente:

$$Max\ Z = 150A_1 + 200A_2 - 10L$$

Sujeto a:

$$A_1 + A_2 \leq 45$$
$$6A_1 + 10A_2 - L \leq 0$$
$$L \leq 350$$
$$5A_1 \leq 130$$
$$4A_2 \leq 120$$
$$A_1, A_2, L \geq 0$$

Utilice la salida de LINDO de la figura para contestar las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar el granjero, Leary por una hora adicional de mano de obra?

b) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar el granjero Leary por un acre adicional de tierra?

c) Si dispusiera solamente de 40 acres de tierra ¿Cuál sería la utilidad del granjero Leary?

d) Si el precio del trigo bajara 26 dólares ¿Cuál sería la nueva solución óptima para el problema del granjero Leary?

e) El granjero Leary considera la posibilidad de cultivar cebada. La demanda de cebada no tiene límites. Un acre produce 4 bushel de cebada y requiere 3 horas de mano de obra. Si la cebada se venda a 30 dólares el bushel ¿tendría que producir el granjero Leary algo de cebada).

MAX 150A1+ 200A2 - 10L

SUBJECT TO

$$
\begin{aligned}
A1 + A2 &\leq 45 \\
6\,A1 + 10A2 - L &\leq 0 \\
L &\leq 350 \\
5\,A1 &\leq 140 \\
4A2 &\leq 120
\end{aligned}
$$

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4250.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A1	25.000000	0.000000
A2	20.000000	0.000000
L	350.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	75.000000
3)	0.000000	12.000000
4)	0.000000	2.500000
5)	15.000000	0.000000
6)	40.000000	0.000000

Nº ITERATIONS = 3

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

	OBJ COEFFICIENT RANGES		
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
A1	150.000000	10.000000	30.000000
A2	200.000000	50.000000	10.000000
L	-10.000000	INFINITY	2.500000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	45.000000	1.200000	6.666667
3)	0.000000	40.000000	12.000000
4)	350.000000	40.000000	12.000000
5)	140.000000	INFINITY	15.000000
6)	120.000000	INFINITY	40.000000

Solución:

a) La máxima cantidad que estará dispuesto a pagar el granjero Leary por una hora adicional de mano de obra será menos de 2.5 dólares.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
4)	0.000000	2.500000
	…	...

b) La máxima cantidad que estará dispuesto a pagar el granjero Leary por un acre adicional de tierra será: 75 dólares.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	75.000000
	…	…

c) Si se dispusieran 40 acres de tierra, tendríamos 5 acres de tierra menos. Observando el reporte LINDO, 5 acres está dentro del rango de disminución Permisible, por lo que la solución actual permanecerá siendo óptima.

Nueva utilidad	Z = 4250 - 5(75) = 3875 dólares

d) Sabemos que actualmente se tiene 5 x 30 = 150 dólares en trigo por cada acre ; si el precio del trigo bajara a 26 dólares (el bushel) se tendría 5 x 26=130 dólares en trigo lo que significa una disminución de 20 dólares.

Una disminución de 20 dólares mantendrá óptima a la F.O por estar dentro del intervalo permisible

$\boxed{\text{Nueva utilidad } Z = 130(25) + 200(20) - 10(350) = 3750 \text{ dólares}}$

e) Suponiendo que se cultiva cebad, la nueva formulación será:

MAX Z= 150 A1 + 200 A2 + 120 A3 – 10L

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
&A1 + A2 + A3 \leq 45\\
&6\,A1 + 10\,A2 + 3\,A3 - L \leq 0\\
&L \leq 350\\
&5\,A1 \leq 140\\
&4\,A2 \leq 120\\
&A1, A2, L \geq 0
\end{aligned}$$

Lo cual nos da una nueva F.O. de \$ 4,350.0, que es una utilidad mayor a la anterior de 4,250.0, por lo que si se puede cultivar cebada.

6. Con rubíes y zafiro Zales Jewelers producen dos tipos de anillos. Un anillo tipo 1 requiere 2 rubíes, 3 zafiros y 1 h. de trabajo de un joyero. Un anillo tipo 2 requiere 3 rubíes, 2 zafiros y 2 h de trabajo de un joyero. Cada anillo tipo 1 se vende a 400 dólares y cada anillo tipo 2 a 500 dólares. Se pueden vender todos los anillos producidos por Zales. Actualmente Zales dispone de 100 rubíes, 120 zafiros y 70 horas de trabajo de un joyero. Se puede compras más rubíes a un costo de 100 dólares el rubí. La demanda del mercado requiere una producción por lo menos de 20 anillos tipo 1 y por lo menos 25 anillos tipo. Para maximizar la ganancia Zales tendrá que resolver el PL siguiente:

X_1 = Anillos tipo 1 producidos

X_2 = Anillos tipo 2 producidos

R = Número de rubíes comprados

$$Max\ Z = 400X_1 + 500X_2 - 200R$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 3X_2 - R \leq 100$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 120$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 170$$
$$X_1 \geq 20$$
$$X_2 \geq 25$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Con la ayuda de la salida de LINDO de la Fig. Conteste las preguntas siguientes:

a) Suponga que cada rubí cuesta 190 dólares, en lugar de 100 dólares ¿Todavía compraría Zales rubíes? ¿Cuál sería la nueva solución óptima para el problema?

b) Suponga que Zales solamente tuviera que producir 23 anillos tipo 2 ¿Cuál sería la utilidad de Zales ahora?

c) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar Zales por otra hora de trabajo a un joyero?

d) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que estar dispuesto a pagar Zales por otro zafiro?

e) Zales considera producir anillos tipo 3. Cada anillo tipo 3 puede venderse a 550 dólares y requiere 4 rubíes, 2 zafiros y 1 hora de trabajo de un joyero. ¿Tendría que producir Zales anillos tipo 3?

```
MAX   400X1 + 500X2 - 100R
SUBJECT TO
                 2X1 + 3X2 – R ≤ 100
                3X1 + 2X2 ≤ 120
                  X1 + 2X2 ≤ 70
                  X1 >= 20
                  X2 >= 25

END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 19000.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	25.000000	0.000000
R	15.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	100.000000
3)	10.000000	0.000000
4)	0.000000	200.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	-200.000000

Nº ITERATIONS = 1

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

	OBJ COEFFICIENT RANGES		
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	400.000000	INFINITY	100.000000
X2	500.000000	200.000000	INFINITY
R	-100.000000	100.000000	100.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	100.000000	15.000000	INFINITY
3)	120.000000	INFINITY	10.000000
4)	70.000000	3.333333	0.000000
5)	20.000000	0.000000	INFINITY
6)	25.000000	0.000000	2.500000

Solución:

a) Suponiendo que cada rubí cuesta 190 dólares en lugar de 100 dólares; entonces habría un incremento de 90 dólares; si observamos el reporte LINDO, 90 estará dentro del intervalo permisible del aumento por lo que la nueva solución seguirá siendo óptima.

Nueva solución óptima = 400(20) + 500(25) - 190(15) = 17650 dólares

b) En caso de que Zales solamente tuviera que producir 23 anillos tipo 2 (2 anillos menos), la F.O. permanecerá óptima y la nueva utilidad sería.

Nueva solución óptima = 19000 – 2(-200) = 19400 dólares

c) La máxima cantidad que estaría dispuesto a pagar Zales por otra hora de trabajo de un joyero será: 200 dólares.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
4)	0.000000	200.000000

d) La máxima cantidad que Zales estaría dispuesto a pagar por otro Zafiro seria 0 dólares.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
3)	10.000000	0.000000

e) Si se considera producir anillos tipo 3:

Tendríamos que reformular de la siguiente manera:

Sea X3 ➔ Anillos del tipo 3

Max Z = 400X1 + 500X2 + 550X3 - 100R

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&2X1 + 3X2 + 4X3 - R \leq 100\\
&3X1 + 2X2 + 2X3 \leq 120\\
&X1 + 2X2 + X3 <= 70\\
&X1 \leq 20\\
&X2 \leq 25\\
&X1, X2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La nueva F.O. seguirá siendo 19000 dólares y no se reducirá el anillo tipo 3.

7. SOFÍA S.A. produce cuatro tipos de losetas, las cuales serán vendidas en la próxima edición de la Feria del Hogar. Estos cuatro tipos son:

- Romana
- Esparta
- Sicilia
- Atenas

En la tabla se dan los recursos requeridos para producir una unidad de cada producto y los precios de venta de cada tipo de loseta. SOFÍA S.A. dispone de 5 toneladas de Barbotina (Barro Líquido) y 4600 horas de trabajo .la empresa debe abastecer su stand con una producción exacta de 950 unidades en total .Por estudios de mercado y de aceptación de productos, se exige que se produzcan por lo menos 400 unidades de losetas Atenas.

	Romana	Esparta	Sicilia	Atenas
Materia Prima (Barbotina)en Kg./unid	3	4	5	6
Horas de trabajo (hr/unid)	2	3	4	6
Precio de venta($/unid)	4	6	7	8

SOFÍA S.A. necesita conocer la cantidad de losetas a producir por cada tipo a fin de maximizar ingresos.

MAX: $4X_1+6X_2+7X_3+8X_4$

SUBJECT TO

```
2)     X1 +   X2 +   X3 +   X4 =    950
3)                          X4 >=  400
4)   2X1 + 3X2 + 4X3 + 6X4<= 4600
5)   3X1 + 4X2 + 5X3 + 6X4<= 5000

END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)          6900.000000

VARIABLE            VALUE        REDUCED COST
      X1          0.000000          1.000000
      X2        150.000000          0.000000
      X3        400.000000          0.000000
      X4        400.000000          0.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)          0.000000          2.000000
      3)          0.000000          0.000000
      4)        150.000000          0.000000
      5)          0.000000          1.000000
```

Nº ITERATIONS = 3

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	1.000000	INFINITY
X2	6.000000	0.000000	0.500000
X3	7.000000	1.000000	0.000000
X4	8.000000	0.000000	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	950.000000	100.000000	30.000000
3)	400.000000	150.000000	150.000000
4)	4600.000000	INFINITY	150.000000
5)	5000.000000	150.000000	400.000000

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo de losetas tendrá que producir SOFÍA S.A.?

- No debe producir losetas Romanas, según lo que observamos en la salida de LINDO, ya que el valor de esta variable (X1) es igual a cero.
- Debe producir 150 unidades de losetas Esparta
- Debe producir 400 unidades de losetas Sicilia
- Debe producir 400 unidades de losetas Atenas.

b) Al producir estas cantidades de losetas, ¿cuál será la utilidad que percibirá la empresa?

La utilidad que percibirá la empresa SOFÍA S.A. es de $ 6900, como lo apreciamos en el reporte LINDO.

c) Si es que SOFÍA S.A. decidiera producir una loseta más, ¿cuál sería el costo al que incurriría?
La cantidad de losetas está referido en la fila 2, por lo cual para saber el costo de producir una loseta más estaría en el precio dual de dicha fila, el cual es de $2.Además si se podría producir una loseta más porque la holgura de ésta fila es cero lo que quiere decir que las 950 unidades producidas han sido vendidas

d) ¿Cuál es la máxima cantidad que tendría que pagar SOFÍA S.A. por un kilo de materia prima (barbotina) adicional?
La materia prima se encuentra referida en la fila 4 del reporte de LINDO por lo cual para saber cuanto más se pagará de por un kilo adicional de materia prima , observamos el precio dual de la fila 4 que es $1.00, entonces este será el precio que SOFÍA S.A. pagaría por un kilo de barbotina extra.

e) ¿Cuánto le costaría a SOFÍA S.A. producir una unidad adicional de loseta Atenas?
SOFÍA S.A. no debe producir más losetas Atenas porque como observamos en el reporte de LINDO tiene un exceso de 150 unidades (holgura de fila 3)

f) Si las Losetas Atenas contribuirían con 8.5 dólares a la utilidad se SOFÍA S.A. ¿Cuál sería la nueva utilidad de la empresa?
De la Salida de LINDO (Análisis de Sensibilidad) vemos que el incremento del precio de venta de estas losetas (variable X4) que es de 8.00-8.50=0.5 dólares, se encuentra dentro rango de incremento permisible: incremento de 1 dólar. Luego la nueva utilidad será:

$$Z_{\text{nueva}} = 6900 + (0.5)550 = 7175 \text{ dólares}$$

g) De Acuerdo a los últimos resultados de un estudio de mercado, los clientes de loseta prefieren el tipo Nápoles (línea anteriormente producida por SOFÍA S.A.). Una loseta Nápoles requiere 5 kilos de materia prima, 5 horas de trabajo y se vende a 9 dólares .La empresa debe tomar la decisión de producir o no dicho tipo de losetas para la temporada de Feria.

Solución:

El Producir un tipo de loseta más estaría aumentando una nueva actividad, por lo tanto, el tablero inicial será ahora:

Nueva Actividad X5

↓

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	S4	LD
Z	1	-4	-6	-7	-8	-9	0	0	0	0	0
S1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	950
S2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	400
S3	0	2	3	4	6	5	0	0	1	0	4600
S4	0	3	4	5	6	5	0	0	0	1	5000

Entonces se hallan los valores del coeficiente de X5 y su respectiva columna a_5, que se encontrará en el tablero óptimo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - 9 = 5 - 9 = -4$$

$$a_\delta = B^{-1} a_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introducimos estos valores en la solución óptima:

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	LD
Z	1	1	0	0	0	-4	0	0	0	6900
X2	0	2	1	0	0	-5	0	1	-2	950
S1	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	400
X4	0	0	0	0	1	1	0	1	-1	4600
X3	0	-1	0	1	0	5	0	-2	3	5000

Dado que el valor del coeficiente de Losetas Nápoles <0 (= - 4), esto indica que la base no sería óptima; por lo tanto, podríamos usar el algoritmo Simplex a fin de no tener coeficientes negativos en el reglón (o con lo que la variable de Losetas Nápoles entraría a la base, convirtiéndose en variables de decisión).

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	S1	S2	S3	LD
Z	1	0.5	0	0.5	0	0	2.5	1.5	0	7325
X2	0	1.5	1	0.5	0	0	-0.5	-0.5	0	275
X5	0	-0.5	0	0.5	0	1	1.5	0.5	0	275
X4	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	400
S3	0	-0.5	0	0.5	0	0	0.5	-0.5	1	125

De estos resultados SOFÍA S.A. puede notar que se deberían producir 275 unidades de las losetas Nápoles y no producir losetas Sicilia; ya que así aumenta la utilidad a $7325.00

8. SOFÍA S.A. está planeando dar un acabado especial a sus losetas , el cual consiste en un fino acabado de oro. Es necesario entonces utilizar más horas por cada tipo de losetas : para el tipo Romana , se necesitan 4 horas; para el tipo Esparta , 3 horas; para el tipo Sicilia, 5 horas; y para el tipo Atenas, 4 horas. La disponibilidad máxima de horas de acabado es de 4000 ¿Disminuirá las utilidades de la empresa añadiendo este tipo de acabado a las losetas?

Solución:

Agregamos los valores de las restricciones de las horas de acabado de oro a la Tabla óptima, con lo que aumentaría una variable S_4 de holgura. Esta variable se asume en el tablero como variable básica, y se puede notar que las columnas a_{ij} de cada una de las variables básicas restantes quedarán alteradas por el ingreso de esta nueva restricción. Este problema se solucionará usando el método de transformaciones de Gauss-Jordan

Tablero Óptimo Alterado:

	Z	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**LD**
Z	1	1	0	0	0	0	0	1	0	6900
X2	0	2	1	0	0	0	1	-2	0	950
S1	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	400
X4	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	4600
X3	0	-1	0	1	0	0	-2	3	0	5000
S4	0	4	**3**	**5**	**4**	0	0	0	1	4000

- Debemos transformar los valores en negrita, que son los que alteran el tablero óptimo.

Luego de las transformaciones, obtenemos el siguiente tablero óptimo:

	Z	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**LD**
Z	1	1	0	0	0	0	0	1	0	6900
X2	0	2	1	0	0	0	1	-2	0	300
S1	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	150
X4	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	550
X3	0	-1	0	1	0	0	-2	3	0	100
S4	0	3	0	0	0	0	3	-5	1	400

- Entonces, aunque el valor de la función no ha cambiado, vemos que ahora Sofía S.S. deberá producir 300 losetas Esparta; 550 losetas Atenas y 1000 losetas Sicilia.

9. Wivco fabrica dos productos: producto 1 y producto2 .Los datos pertinentes se encuentran en la tabla .Cada semana, se puede comprar hasta 400 unidades de materia prima, a un costo de 1.50 dólares la unidad. La compañía tiene 4 trabajadores, que trabajan 40 horas a la semana (su salario se considera como un costo fijo): se Puede pedir a los obreros que trabajen tiempo extra, y se le paga 6 dólares la hora extra. Cada semana se dispone de 320 horas de máquina. Sin publicidad, la demanda semanal del producto 1 es 50, y del producto 2 es de 60. Se puede usar publicidad para estimular la demanda de cada producto .Cada dólar que se gasta para el producto 1, aumenta la demanda en 10 unidades; y cada dólar que se gasta en publicidad para el producto 2, aumenta la ganancia en 15 unidades .Se puede gastar hasta 1000 dólares en publicidad. Defina las variables de decisión siguientes:

P1 = Unidades del producto 1 producidas cada semana

P2 = Unidades del producto 2 producidas cada semana

OT = Número de horas extras empleadas cada semana

RM = Número de unidades de materia prima comprada semanalmente

A1 = Dólares gastados semanalmente en la publicidad del producto 1

A2 = Dólares gastados semanalmente en la publicidad del producto 1

	PRODUCTO 1	**PRODUCTO 2**
Precio de Venta	15 dólares	8 dólares
Trabajo requerido	0.75 horas	0.50 horas
Tiempo de máquina requerido	1.50 horas	0.80 horas
Materia prima requerida	2 unidades	1 unidad

PROGRAMA EN LINDO

MAX 15P1+8P2-6OT-1.5RM-A1-A2

SUBJECT TO

```
2)  P1   - 10A1             <= 50
3)  P2 - 15A2               <= 60
4)  0.75P1 +  0.5P2 - OT <= 160
```

```
 5)  2P1 +     P2 - RM     <=  0
 6)  RM                    <= 400
 7)  A1    + A2            <= 100
 8)  1.5P1+   0.8P2        <= 320

END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 6900.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
P1	160.000000	0.000000
P2	80.000000	0.000000
OT	0.000000	2.133333
RM	400.000000	0.000000
A1	11.000000	0.000000
A2	1.333333	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.100000
3)	0.000000	0.066667
4)	0.000000	3.866667
5)	0.000000	6.000000
6)	0.000000	4.000000
7)	87.666664	0.000000
8)	16.000000	0.000000

Nº ITERATIONS = 5

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
P1	15.000000	0.966667	0.533333
P2	8.000000	0.266667	0.483333
OT	-6.000000	2.133333	INFINITY
RM	-1.000000	INFINITY	4.500000
A1	-1.000000	1.000000	5.333333
A2	-1.000000	1.000000	7.250000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	50.000000	110.000000	876.666626
3)	60.000000	20.000000	1314.999878
4)	160.000000	27.500000	2.500000
5)	0.000000	6.666667	55.000000
6)	400.000000	6.666667	55.000000
7)	100.000000	INFINITY	87.666667
8)	320.000000	INFINITY	16.000000

a) Si el tiempo extra costara solamente 4 dólares la hora ¿Utilizaría Wivco tiempo extra?

b) Si se vendiera cada unidad de producto 1 a 15.50 dólares; ¿Permanecería óptima la base actual? ¿Cuál sería la nueva solución óptima?

c) ¿Cuál es la máxima cantidad que Wivco estaría dispuesto a pagar por otra unidad e materia prima?

d) ¿Cuál es la cantidad que Wivco estaría dispuesto a pagar por hora de Tiempo máquina?

e) Si se exigiera a cada trabajador a trabajar 45 horas a la semana (como parte de la semana normal de trabajo). ¿Cuál sería ahora la ganancia?

f) Wivco considera fabricar un nuevo producto (producto 3). Se vende cada unidad del producto 3 a 17 dólares y se requieren 17 horas de trabajo por unidad de materia prima y 2 horas de tiempo máquina. ¿Tendría que producir Wivco algún producto 3?

g) Si se vendiera cada unidad de producto 2 a 10 dólares ¿Permanecería óptima la base actual?

Solución:

a) Al costar 4 dólares la hora, la disminución sería de 2 dólares; la que se encuentra en el rango permisible de disminución. Aún así la solución óptima no es afectada ya que la variable *horas extras de trabajo (OT)* no es una variable de decisión.

b) Al costar 15.50 dólares la hora, se está aumentando el costo en 0.50 dólares; este aumento se encuentra en el rango permisible de aumento que es 0.96 dólares. Entonces:

$$Z_{nueva} = Z + \Delta C_1 = 2427.667 + (0.5)160 = 2507.667$$

c) Wivco debería pagar por otra unidad de materia prima 4.5 dólares, este valor lo obtenemos del precio dual de la fila (6), ya que esta fila está referida a las unidades de materia prima.}

d) Con respecto a las horas máquinas, sabemos que Wivco utiliza 1.5 horas en el producto 1 y 0.8 en el producto 2 (tabla 1), esto está referido en la fila 8, entonces para saber si se necesitan más horas máquinas tenemos que ver la holgura (slack or surplus) de la fila 8, el valor que encontramos es de 16; esto implica que están sobrando 16 horas máquina, por lo que Wivco no pagaría nada por hora máquina.

e) Al aumentar las horas-hombre a 45 (45x4=180), encontramos un aumento de 20 horas(45x4-40x4=20), este aumento está en el rango permisible de aumento ; la fila 4 se refiere a las horas-hombres , y el precio dual de esta fila es 3.866667 , al calcular la nueva solución óptima tendremos que esta será : 2505 dólares, lo que se puede obtener tanto del reporte LINDO, como de ejecutar:

$$Z_{nueva} = Z + \Delta C_1 = 2427.667 + (20)(3.866667) = 2505$$

f) Los requerimientos del producto 3 son:

	PRODUCTO 3
Precio de Venta	17 dólares
Trabajo requerido	2 horas
Tiempo de máquina requerido	2 horas
Materia prima requerida	1 unidad

Al introducir estos datos en el reporte LINDO se tendrá los siguientes valores:

Función Objetivo = 2443.769, aumenta en 16.102 dólares al producir 7 unidades del producto 3, por lo que si debería producir el producto 3 pero ya no se produciría ninguna unidad del producto 2.

g) No se puede aumentar a 10 dólares el precio de venta del producto 2, ya que sería un incremento de 2 dólares lo cual no está permitido en el rango de aumento permisible para este producto. Y la base actual no permanecería óptima.

10. ABC, puede fabricar los productos A, B y C, para el cual requiere de los componentes C1, C2 y C3, la cantidad de componentes por unidad de producto así como el precio de venta unitario se presenta en la siguiente tabla:

PRODUCTO	**C1**	**C2**	**C3**	**PRECIO DE VENTA**
A	1	2	6	60
B	3	2	2	70
C	4	5	1	80
CANTIDAD DISPONIBLE	140	130	80	

El programa lineal y el tablero son como sigue:

MAX 60XA+70XB+80XC

ST

2) $XA + 3XB + 4XC < 140$

3) $XA + 2XB + 5XC < 130$

4) 6XA + 2XB + XC < 80

THE TABLEAU

ROW	(BASIS)	XA	XB	XC	SLK 2	SLK 3
1	ART	6.000	0.000	0.000	18.000	0.000
2	XC	-3.200	0.000	1.000	1.400	0.000
3	SLK 3	8.800	0.000	0.000	-1.600	1.000
4	XB	4.600	1.000	0.000	-0.200	0.000

ROW	SLK 4	
1	8.000	3160.000
2	-0.600	8.000
3	1.400	18.000
4	0.800	36.000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3160.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XA	0.000000	6.000000
XB	36.000000	0.000000
XC	8.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	18.000000
3)	18.000000	0.000000
4)	0.000000	8.000000

Nº ITERATIONS = 2

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
XA	60.000000	6.000000	INFINITY
XB	70.000000	90.000000	1.304348
XC	80.000000	1.875000	45.000000

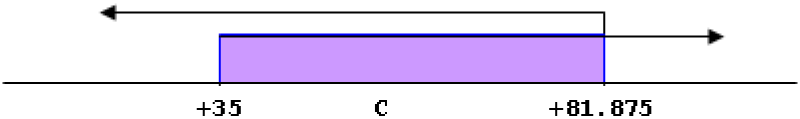
RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	140.000000	11.250000	20.000000
3)	130.000000	INFINITY	18.000000
4)	80.000000	13.333333	12.857143

a) Encuentre el intervalo de los valores del precio de C para los cuales la base actual permanece óptima.

Como e	Aumento Admisible	Disminución Admisible
	1.875	45

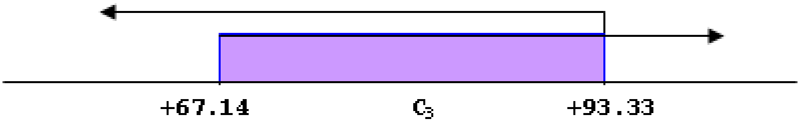
$$80-45 \leq C+\Delta C \leq 80+1.875$$
$$35 \leq C \leq 81.875$$



b) Halle los intervalos de los valores de la cantidad del componente C3 para los cuales la base actual permanece óptima.

Como el	Aumento Admisible	Disminución Admisible
	13.33	12.86

$$80 - 12.86 \le C_3 + \Delta C_3 \le 80 + 13.33$$
$$67.14 \le C_3 \le 93.33$$



c) ¿Cuál es la máxima cantidad adicional que ABC estaría dispuesto a pagar por otra unidad de C1?

El equivalente al precio dual o precio sombra; 18

d) Si ABC tuviera la posibilidad de conseguir 11 unidades del componente C1, ¿Cuál sería el ingreso total?

Como el Aumento Admisible
11.25

$$Z = 3160 + 11 * 18 = 3358$$

e) Si fuera posible disminuir el precio de B en la unidad, ¿Cuál sería el ingreso total?

Como la Disminución Admisible
1.304

$$Z = 3160 + (-1) * 36 = 3124$$

12. ABC es una empresa especializada en la fabricación de tres modelos de puertas. La empresa cuenta con la siguiente información.

MODELO	MATERIALES	M. DE OBRA	T DE MAQ.	P. DE VENTA
A	2	1.5	0.5	80
B	4	2	1.2	130
C	1	0.5	0.2	40
RECURSO DISPONIBLE	700	450	220	

El costo por unidad de recurso de MATERIALES, MANO DE OBRA, TIEMPO DE MAQUINA es de 15, 5 y 10 soles respectivamente.
La demanda mínima de A es 150 unidades
El programa lineal y la solución del mismo, maximizando las utilidades, es como sigue:

```
MAX 37.5XA + 48XB+20.5XC
ST
        2)    2XA +    4XB +      XC < =700
        3)  1.5XA +    2XB + 0.5XC <=450
        4)  0.5XA + 1.2XB + 0.2XC <=220
        5)      XA                         >=150

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)              13825.000000

VARIABLE              VALUE        REDUCED COST
      XA         150.000000            0.000000
      XB           0.000000           34.000000
      XC         400.000000            0.000000


     ROW     SLACK OR SURPLUS          DUAL PRICES
      2)             0.000000            20.500000
      3)            25.000000             0.000000
      4)            65.000000             0.000000
      5)             0.000000            -3.500000

Nº ITERATIONS = 2
```

RANGES IN WHICH THE BASIC IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
XA	37.500000	3.500000	INFINITY
XB	48.000000	34.000000	INFINITY
XC	20.500000	INFINITY	1.750000

OBJ COEFFICIENT RANGES

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2)	700.000000	50.000000	400.000000
3)	450.000000	INFINITY	5.000000
4)	220.000000	INFINITY	65.000000
5)	150.000000	50.000000	50.000000

Se pide responder:

a) ¿Cuál deberá ser el precio de B para hacer atractiva su fabricación?

Precio de Vta. + Costo reducido

$$130 + 34 = 164$$

b) Calcule la holgura del tiempo de máquina

0.5XA+1.2XB+0.2XC + H = 220

0.5*150+1.2*0+0.2*400 + H = 220

H = 65

c) Calcule la utilidad total si solo se produce 110 unidades de A.

Z = 13825 + (110 – 150)*(-3.5) = 13965

d) Calcule la utilidad total si se deseas aumentar en 10 unidades los MATERIALES, considerando que se deberá pagar 20 soles por cada unidad adicional

$Z = 13825 + (20.5 – (20 - 15))*10 = 13980$

e) Exprese en el modelo los cambios que se deberá hacer para incluir lo solicitado en (d).

MAX 37.5XA + 48XB + 20.5XC – 5XM
ST
2) 2XA + 4XB + XC < 700 + XM
3) 1.5XA + 2XB + 0.5XC <450
4) 0.5XA + 1.2XB + 0.2XC <220
5) XA >150

f) ¿Cuál es el nuevo valor de Z si la utilidad en S/1.00 y la del modelo C se disminuye en S/. 0.8 por unidad?

Aplicando la regla del 100%

$1/3.5 + 0.8/1.75 = 0.7<1$

$Z = 13825 + 1*150 – 0.8*400 = 13655$

CAPÍTULO 5

PROGRAMACION ENTERA

Un problema de programación entera se puede definir en forma sencilla como un programa lineal en el cual algunas de las variables o todas son números enteros no negativos.

Mediante el uso de la programación entera es posible formular una mayor cantidad de situaciones de la vida real que las que se formularían mediante la programación lineal, aún cuando, la formulación de un programa entero, es más difícil de realizar que la formulación de un programa lineal.

En este capítulo se desarrollarán una gran variedad de problemas tipo y a la vez se pondrá a vuestro alcance algunas herramientas bastante útiles y de gran ayuda para la formulación de diversas situaciones lógicas que se presentan en una gran variedad de problemas.

- **PROBLEMAS DE PROGRAMACION ENTERA PURA**

Se llaman así a los problemas en la cual todas las variables tienen que ser números enteros.

Ejemplo:

Min $Z = 5 X_1 + 3 X_2$

Sujeto a:

$5 X_1 + 3 X_2 / 6$

$X_1, X_2 / 0, X_1, X_2$ enteros

- **PROBLEMAS DE PROGRAMACION ENTERA MIXTA**

Se llaman así los problemas en la cual solamente algunas de las variables tienen que ser números enteros.

Ejemplo:

Min Z = 5 X_1 + 3 X_2

Sujeto a:

5 X_1 + 3 X_2 / 6
X_1, X_2 / 0
X_1 entero
X_2 no tiene que ser un número entero

- **PROBLEMAS DE PROGRAMACION ENTERA 0-1**

Se llama así a los problemas en los cuales todas las variables deben ser iguales a 0 ó 1.

Ejemplo:

Min Z = 5 X_1 + 3 X_2

Sujeto a:

5 X_1 + 3 X_2 / 6
X_1, X_2 = 0 ó 1

- **RESTRICCIONES O BIEN**

Frecuentemente se dará la situación en que se dan restricciones de la forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \qquad (\alpha)$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \qquad (\beta)$$

Donde se quiere estar seguro que se satisfaga al menos 1, de las restricciones (α) y (β), también conocidas como restricciones **"o bien"**. Para poder estar seguros de que se satisface al menos 1 de las restricciones (α) y (β) se deben agregar a la formulación las dos restricciones siguientes:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1-y)$$

Donde:

y : es una variable 0-1

M : es un número suficientemente grande que se escoge para asegurar que se satisfagan las dos restricciones anteriores, para todos los valores de X_1, $X_2, \ldots, X_n$, que a su vez satisfacen las otras restricciones del problema.

Ejemplo:

Si *x* e *y* son enteros, ¿cómo podría asegurar que *x* e *y* satisfarán $x + y \leq 3$, $2x + 5y \leq 12$, ó ambas?

Solución:

Escribiendo las restricciones anteriores de la forma (α) y (β) se tiene:

$$x + y - 3 \leq 0 \qquad \ldots(1)$$
$$2x + 5y - 12 \leq 0 \qquad \ldots(2)$$

Las restricciones que se deben remplazar en la formulación son:

$$x + y - 3 \leq M y_i \qquad \ldots(1.1)$$
$$2x + 5y - 12 \leq M(1-y_i) \qquad \ldots(2.1)$$

Donde:

y_i : es una variable 0 – 1 y,
M : es un valor suficientemente grande que se escoge para asegurar que se satisfagan las Ec. (1.1) y (2.1)

De la Ec. (2.1) , el lado izquierdo toma su valor máximo, cuando x e y toman valores máximos, pero de la Ec.(1), se tiene que $x + y$, toma como valor máximo 3, o sea *x* e *y* son linealmente dependientes entre sí es decir : $x + y = 3$, ó también y = 3 – x; luego a medida que x aumenta y disminuye, pero de la Ec.(2.1) como el coeficiente que afecta a la variable *y* es mayor que el coeficiente que afecta a *x*, entonces para que el lado izquierdo tome su valor máximo *y* tiene que tomar su valor máximo (y = 3) y x tiene que ser cero, Reemplazando datos se tiene que el valor del lado izquierdo es 3, por lo tanto el valor de M para que se satisfaga esta restricción (se satisfaga o no la otra) tiene que ser mayor igual que 3. En forma análoga se hace el calculo del valor mínimo que puede tomar M en la Ec.(1.1) para que satisfaga esta ecuación (satisfaga o no la otra), este valor es: 3. Finalmente el valor que M que se toma debe ser suficientemente grande para satisfacer las dos ecuaciones (1.1) y (2.1) por lo tanto se toma el mayor valor M y las ecuaciones (1.1) y (2.1) se escribirán:

$$x + y - 3 \leq 3 y_i \qquad \text{...(1.2)}$$

$$2x + 5y - 12 \leq 3(1 - y_i) \qquad \text{...(2.2)}$$

Finalmente podemos afirmar que cuando $y_i = 0$, se satisface la restricción 1 o bien las restricciones (1) y (2) y cuando $y_i = 1$, se satisface la restricción (2) o bien las restricciones (1) y (2).

- **RESTRICCIONES SI ENTONCES**

También es posible encontrar muchos problemas donde se presenta la situación siguiente: se desea estar seguro de que se debe satisfacer la restricción $g(x_1,x_2,..,x_n) \,/\, 0$, si se satisface una restricción $f(x_1,x_2,..,x_n) > 0$, mientras que si no se satisface $f(x_1,x_2,..,x_n) > 0$, entonces $g(x_1,x_2,..,x_n) \,/\, 0$ puede o no satisfacerse. Resumiendo se quiere estar seguro que:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \Rightarrow g(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$$

Para lograr esto, es necesario incluir las restricciones siguientes a la formulación:

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y)$$

Donde:

Y: es una variable 0-1
M: es un número positivo suficientemente grande para que se cumplan las dos restricciones anteriores, para todos los valores de x_i que satisfacen las otras restricciones del problema.

EJEMPLOS

1. El gobierno peruano, dentro de sus planes de apoyo y fomento del sector agrario, está considerando 4 proyectos de irrigación. El proyecto 1, irrigará aproximadamente 20000 hectáreas de terreno, el proyecto 2, 27500 hectáreas, el proyecto 3, 15000 hectáreas y el proyecto 4, 10000 hectáreas. La ejecución y puesta en marcha del proyecto 1 tiene un costo de 10 millones de dólares, el proyecto 2, 14 millones de dólares, el proyecto 3, 8 millones y el proyecto 4, 6 millones. Si además se sabe que el presupuesto para la ejecución de proyectos de inversión en el sector agrario es de 28 millones de dólares, formule un P.E., cuya solución ayude al gobierno a maximizar el número de hectáreas irrigadas.

Solución:

Como el gobierno puede tomar solo dos decisiones, respecto a cada proyecto de inversión, empezamos definiendo una variable 0-1.

Sea X_i: 0 – 1: Se ejecuta o no el proyecto de inversión i (i = 1,2,3,4)

Por ejemplo si el proyecto 3 se ejecuta, la variable $X_3 = 1$, y si no se realiza, $X_3 = 0$.

El número total de hectáreas que se irrigarán será:

$$20000\,X_1 + 27500\,X_2 + 15000\,X_3 + 10000\,X_4$$

Hay que tener en cuenta que el número de hectáreas irrigadas depende de los valores que tomen las variables de decisión, por ejemplo, si las variables toman los valores siguientes: $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$ y $X_4 = 0$, entonces el número de hectáreas irrigadas será de: 47500 hectáreas, Luego como el gobierno desea irrigar la mayor cantidad de terreno habrá que maximizar el valor de esta expresión:

$$\text{Max } Z = 20000\,X_1 + 27500\,X_2 + 15000\,X_3 + 10000\,X_4 \quad ...(1)$$

La cantidad total invertida en millones de dólares es:

$$10\,X_1 + 14\,X_2 + 8\,X_3 + 6\,X_4$$

Como el presupuesto para la ejecución de proyectos de inversión es de 28 millones entonces la cantidad total invertida tiene que ser menor o igual que el presupuesto. Esto es:

$$10\ X_1 + 14\ X_2 + 8\ X_3 + 6\ X_4 \leq 28 \qquad \text{...(2)}$$

Finalmente de (1) y (2) se tiene el P.E 0-1 siguiente:

$$\text{Max } Z = 20000\ X_1 + 27500\ X_2 + 15000\ X_3 + 10000\ X_4$$

Sujeto a:

$$10\ X_1 + 14\ X_2 + 8\ X_3 + 6\ X_4 \leq 28$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \ / \ 1$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ / \ 0$$

2. El entrenador Night trata de escoger una alineación inicial para el equipo de básquetbol. El equipo consta de jugadores que han sido evaluados (en una escala de 1= pobre a 3 = excelente) de acuerdo a su manejo de pelota, sus tiros, su rebote y sus habilidades defensivas. En la tabla 1 se encuentran las posiciones que cada jugador puede ocupar y sus habilidades.
La alineación inicial de cinco jugadores debe satisfacer las restricciones siguientes:

- Por lo menos cuatro jugadores del equipo inicial deben poder jugar en la defensa (D) , por lo menos 2 miembros deben pode jugar al ataque (A) y por lo menos un jugador del equipo inicial debe poder jugar en el centro (C) .
- El nivel medio del manejo de la pelota, de los tiros, y del rebote de la alineación inicial debe ser por lo menos igual a 2.
- Si inicia el jugador 3 entonces el jugador 6 no podrá iniciar.
- Si el jugador 1 inicia, entonces los jugadores 4 y 5 deben iniciar al mismo tiempo.

- Ya sea el jugador 2 o el jugador 3 debe iniciar.

Dadas estas restricciones, el entrenador Night quiere maximizar la habilidad total defensiva del equipo inicial. Formule un PE que ayude al entrenador Night escoger su equipo inicial.

Tabla 1

JUGADOR	POSICIÓN	MANEJO DE PELOTA	TIROS	REBOTE	DEFENSA
1	A	3	3	1	3
2	C	2	1	3	2
3	A-D	2	3	2	2
4	D-C	1	3	3	1
5	A-D	1	3	1	2
6	D-C	3	1	2	3
7	A-D	3	2	2	1

Solución:

De la tabla 1 se puede observar que los jugadores juegan en las posiciones siguientes:

Posición	Jugadores
D	3,4,5,6,7
A	1,3,5,7
C	2,4,6

Sea:

y_i = 1,0 : Inicia o no el juego el jugador i (i = 1,2…,7)

$$\text{Max} \qquad Z = 3\,y_1 + 2\,y_2 + 2\,y_3 + y_4 + 2\,y_5 + 3\,y_6 + y_7$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 &= 5 \\
3\,y_1 + 2\,y_2 + 2\,y_3 + y_4 + y_5 + 3\,y_6 + 3\,y_7 &\;/\; 10 \\
3\,y_1 + y_2 + 3\,y_3 + 3\,y_4 + 3\,y_5 + y_6 + 2\,y_7 &\;/\; 10 \\
y_1 + 3\,y_2 + 2\,y_3 + 3\,y_4 + y_5 + 2\,y_6 + 2\,y_7 &\;/\; 10
\end{aligned}$$

$$y_3 + y_6 \leq 1$$
$$y_1 - y_4 \leq 0$$
$$y_1 - y_5 \leq 0$$
$$y_2 + y_3 \ / \ 1$$
$$y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \ / \ 4$$
$$y_1 + y_3 + y_5 + y_7 \ / \ 2$$
$$y_2 + y_4 + y_5 \ / \ 1$$

3. Debido a la contaminación excesiva del río Mommis, el estado de Mommis construirá algunas estaciones para el control de la contaminación. Se está considerando 3 lugares (Lugares 1,2 y 3). A Mommis le interesa controlar los niveles de contaminación de dos contaminantes (Contaminantes 1 y 2), la legislación del estado requiere que se eliminen por lo menos 80000 toneladas del contaminante 1 y por lo menos 50000 toneladas del contaminante 2 del río. En la Tabla 2 se encuentran los datos relevantes para este problema.
Formule un PE para minimizar el costo de cumplir con las metas de la legislación del estado

Tabla 2

	COSTO DE CONSTRUC. DE UNA ESTACION (dólares)	**COSTO DEL TRATAM. DE 1 TON. DE AGUA (dólares)**	**CANTIDAD REMOVIDA POR TONELADA DE AGUA**	
			Contam. 1	**Contam. 2**
Lugar 1	100000	20	0.40 Ton	0.30 Ton
Lugar 2	60000	30	0.25 Ton	0.20 Ton
Lugar 3	40000	40	0.20 Ton	0.25 Ton

Solución:

Sea:

y_i = 1,0 Se construye o no una estación en el lugar i (i = 1,2,3)

X_i = Nº de toneladas de agua tratadas en la estación i (i = 1,2,3)

$$\text{Min} \quad Z = 100000\, y_1 + 60000\, y_2 + 40000\, y_3 + 20\, X_1 + 30\, X_2 + 40\, X_3$$

Sujeto a:

$$0.40X_1 + 0.25\ X_2 + 0.20\ X_3\ /\ 80000$$
$$0.30\ X_1 + 0.20\ X_2 + 0.25\ X_3\ /\ 50000$$
$$X_1 \leq\ M_1\ y_1$$
$$X_2 \leq M_2\ y_2$$
$$X_3 \leq M_3\ y_3$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3\ /\ 0$$

Donde:

$$M_1\ = \text{Max}\ (80000/0.40\ ,\ 50000/0.30) = 200000$$
$$M_2\ = \text{Max}\ (80000/0.25,\ 50000/0.20) = 320000$$
$$M_3\ = \text{Max}\ (80000/0.20,\ 50000/0.25) = 400000$$

4. Para graduarse en la Basketweavers University, con una especialidad de investigación de operaciones, un estudiante debe completar por lo menos dos cursos de matemáticas, por lo menos dos cursos de IO y por lo menos dos cursos de computación. Se pueden utilizar algunos cursos para satisfacer mas de un requisito: El cálculo puede satisfacer el requerimiento de las matemáticas; la Investigación de Operaciones; los requerimientos de Matemáticas y de IO; la Estructura de Datos, los de Matemáticas y de Computación; la Estadística para la Administración, los de Matemáticas y de IO; la Simulación por Computadora, los de IO y de Computación; la Introducción a la Programación de Computadoras, los de Computación; y la Predicción, los requerimientos de IO y de Matemáticas.

Algunos cursos son pre-requisitos para otros: el Cálculo es un requisito para la Estadística para la Administración; la Introducción a la Programación de Computadoras es un requisito para la Simulación por Computadora y para la Estructura de Datos; y la Estadística para la Administración es un requisito para la Predicción. Formule un PE que minimice el número de cursos necesarios para satisfacer los requerimientos para la especialización

Solución:

Los datos de este problema se pueden escribir de la manera siguiente:

MATERIAS	CURSOS (i)							
	Calc. (1)	**IO** (2)	**Estr. Dat** (3)	**Estad adm** (4)	**Sim. Comp** (5)	**Intr Prog** (6)	**Pred Requer** (7)	**Total**
Matemáticas	X	X	X	X			X	2
Inv. Oper.		X		X	X		X	2
Computación			X		X	X		2
Pre-Requisito	Ning	Ning	(6)	(1)	(6)	Ning	(4)	

Sea:

$y_i = 1{,}0$: Se estudia o no el curso i ($i = 1,2,\ldots,7$)

Min $\quad Z = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$

Sujeto a:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_7 \,/\, 2$$
$$y_2 + y_4 + y_5 + y_7 \,/\, 2$$
$$y_3 + y_5 + y_6 \,/\, 2$$
$$- y_1 + y_4 \leq 0$$
$$y_3 - y_6 \leq 0$$
$$y_5 - y_6 \leq 0$$
$$- y_4 + y_7 \leq 0$$

5. Una compañía considera la apertura de almacenes en cuatro ciudades: Nueva York, Los Angeles, Chicago y Atlanta. Cada almacén puede enviar 100 unidades a la semana. El costo semana fijo para mantener abierto cada almacén es de 400 dólares en Nueva York, de 500 dólares en Los Angeles, de 300 dólares en Chicago, y de 150 dólares en Atlanta. La región 1 del país requiere semanalmente 80 unidades; la región 2,70 unidades y la región 3, 40 unidades. En la tabla 3 se muestran los costos (incluyendo los costos de producción y de envío) para enviar 1 unidad de la fábrica a una región. Se desea satisfacer las demandas semanales a un costo mínimo, sujetas a la información anterior y a las restricciones siguientes:

1. Si se abre el almacén en Nueva York, entonces hay que abrir el almacén en Los Ángeles.
2. Se pueden abrir a lo más dos almacenes.
3. Hay que abrir el almacén en Atlanta o en Los Ángeles.

Formule un PE que se utilice para minimizar los costos semanales de satisfacer la demanda

Tabla 3			
	HACIA		
DE	**Región 1 (dólares)**	**Región 2 (dólares)**	**Región 3 (dólares)**
Nueva York	20	40	50
Los Angeles	48	15	26
Chicago	26	35	18
Atlanta	24	50	35

Solución:

La tabla 3 se puede re-escribir de la manera siguiente:

Ciudad (i)	HACIA Región 1 (dólares)	Región 2 (dólares)	Región 3 (dólares)	Envío (sem.)	Costo Fijo (semanal)
New York (1)	20	40	50	100	400
Los Ang. (2)	48	15	26	100	500
Chicago (3)	26	35	18	100	300
Atlanta (4)	24	50	35	100	150
Requer./sem.	80	70	40		

Sea:

y_i = 1,0 Se abre o no un almacén en la ciudad i (i = 1,2,3,4)

X_{ij} = Nº de unid. Enviadas semanalmente de la ciudad i a la región j (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3)

Min $Z = 20 X_{11} + 40 X_{12} + 50 X_{13} + 400 y_1 +$
$48 X_{21} + 15 X_{22} + 26 X_{23} + 500 y_2 +$
$26 X_{31} + 35 X_{32} + 18 X_{33} + 300 y_3 +$
$24 X_{41} + 50 X_{42} + 35 X_{43} + 150 y_4$

Sujeto a:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100 y_1$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 100 y_2$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 100 y_3$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} \leq 100 y_4$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} / 80$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} / 70$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} / 40$

$y_1 - y_2 \leq 0$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2$

$y_2 + y_4 / 1$

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{41}, X_{42}, X_{43} / 0$

6. El administrador de la computadora DED de la Universidad Estatal quiere tener la posibilidad de accesar cinco archivos diferentes. Estos archivos se encuentran en diez discos, como se muestra en la tabla 4. La capacidad de almacenamiento requerido por cada disco se da a continuación: 1,3K; disco 2,5K; disco 3,1K; disco 4,2K; disco 5,1K; disco6,4K; disco 7,3K; disco 8,1K; disco 9,2K; disco10,2K.

(a) Formule un programa PE que determine un conjunto de discos que necesitan la mínima cantidad de almacenaje, tal que cada archivo se encuentra en por lo menos uno de los discos. Para un disco dado, hay que almacenar o bien todo el disco o bien nada del disco; no es posible guardar parte de un disco.

(b) Modifique su formulación de modo que si se usa el disco 3 o el disco 5, entonces habrá que utilizar también el disco 2.

Tabla 4										
	DISCO									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Archivo 1	X	X		X	X			X	X	
Archivo 2	X		X							
Archivo 3		X			X		X			X
Archivo 4			X			X		X		
Archivo 5	X	X		X		X	X		X	X

Solución:

La Capacidad de los Discos la podemos tabular de la manera siguiente:

	DISCO									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capacidad (K)	3	5	1	2	1	4	3	1	2	2

a) Sea:

y_i = 1,0 Se selecciona o no el disco i (i = 1,2,…,10)

Min Z = $3\,y_1 + 5\,y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 + 4\,y_6 + 3\,y_7 + y_8 + 2\,y_9 + 2\,y_{10}$

Sujeto a:

$y_1 + y_3 + y_4 + y_5 + y_8 + y_9$ / 1

$y_1 + y_3$ / 1

$y_2 + y_5 + y_7 + y_{10}$ / 1

$y_3 + y_6 + y_8$/ 1

$y_1 + y_2 + y_4 + y_6 + y_7 + y_9 + y_{10}$ / 1

b) Para esta parte habrá que agregar a la formulación anterior la siguiente condición:

Si $y_3 + y_5 > 0$ Entonces $y_2 / 1$

Esta condición lógica puede escribirse:

$$1 - y_2 \leq M\, y$$
$$y_3 + y_5 \leq M\,(1-y)$$

Donde el mínimo valor que puede tomar M es: $M = 2$

Por lo tanto:

$$1 - y_2 \leq 2\, y$$
$$y_3 + y_5 \leq 2\,(1-y)$$

7. El proyecto Lotus Point Condo contendrá casas y departamentos, en el lugar se puede acomodar hasta 10000 viviendas. El proyecto debe incluir un proyecto recreativo; ya sea un complejo para natación y tenis, o bien, una dársena para veleros, pero no ambas cosas. Si se construye una dársena, el número de casas en el proyecto tendrá que ser por lo menos el triple del número de departamentos. Una dársena costará 1.2 millones de dólares y un complejo para natación y tenis costará 2.8 millones de dólares. Los promotores creen que cada departamento proporcionará ingresos con un valor actual neto de 48000 dólares, y que cada casa proporcionará ingresos por un valor actual neto de 46000 dólares. El costo de construcción de cada casa (o departamento) es de 40000 dólares. Formule un PE para ayudar a Lotus Point a maximizar las ganancias.

Solución:
Los Ingresos y costos se pueden tabular como sigue:

	INGRESO (MILES $)	**COSTO (MILES $)**	**UTILIDAD (MILES $)**
departamento	48	40	8
casas	46	40	6

Sea:

y_j = 1,0 Se construye o no el proyecto recreacional j (j = 1,2)

X_i = El número de viviendas de tipo i en miles (i = 1,2: Casa, Dpto.)

Max $Z = 8 X_2 + 6 X_1 - 28000 y_1 - 12000 y_2$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 \leq 10 \qquad (1)$$
$$y_1 + y_2 = 1 \qquad (2)$$

La condición:

Si se construye una dársena, el número de casas en el proyecto tendrá que ser por lo menos el triple del número de departamentos, puede escribirse.

Si $y_2 > 0$ Entonces

$$X_1 / 3 X_2$$
$$3 X_2 - X_1 \leq M y$$
$$y_2 \leq M (1-y)$$

Donde M puede tomar como valor mínimo: M = 3 (10000)

Por lo tanto:

$$3 X_2 - X_1 \leq 30000 y \qquad \ldots(3)$$
$$y_2 \leq 30000 (1-y) \qquad \ldots(4)$$

Obs:

Las restricciones (3) y (4), pueden escribirse como:

$$3 X2 - X1 \leq 30000 (1-y2)$$

Además

Teniendo en cuenta que: y1 + y2 = 1, también se pueden escribir como:

$$3 X2 - X1 \leq 30000 y1$$

8. Speaker's Clearinghouse debe desembolsar cheques a los ganadores de la lotería en 4 regiones diferentes del país; Sudeste (SE), Noreste (NE), Lejano Oeste (LO), Medio Oeste(MO). El promedio de la cantidad diaria de los cheques extendidos a ganadores en cada región del país se da a continuación: SE, 40000 dólares; EN, 60000 dólares; LO, 30000 dólares; MO, 50000 dólares. Speaker's debe extender el cheque el mismo día que se da cuenta de que un cliente ha ganado. Pueden retrasar el cobro rápido por parte de los ganadores, al extender al ganador un cheque girado en un banco remoto (esto hace mas despacio la liquidación del cheque). Se están considerando cuatro lugares de bancos: Frosbite Falls, Montana (FF); Redville, South Carolina (R); Painted Forest, Arizona (PF); y Beanville, Maine (B). El costo anual para mantener una cuenta abierta en cada uno de los bancos es: FF, 50000 dólares; R, 40000 dólares; PF, 30000 dólares; B, 20000 dólares respectivamente. Cada banco tiene como restricción que el promedio diario de cheques girados no puede ser superior a 90000 dólares. En la tabla 5 se da el promedio del número de días que tarda la liquidación de un cheque. En donde tendría que tener Speaker's sus cuentas bancarias y de que banco dado tendría que recibir un cliente dado su cheque, suponiendo que el dinero invertido por: Speaker's gana 15% al año?

Tabla 5

	FF	**R**	**PF**	**B**
SE	7	2	6	5
EN	8	4	5	3
LO	4	8	2	11
MO	5	4	7	5

Solución:

La tabla 5 la podemos escribir de la manera siguiente:

REGION	**FF**	**R**	**PF**	**B**	**Cant. Prom. extend en cheq./día**
SE	X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{41}	40000
EN	X_{12}	X_{22}	X_{32}	X_{42}	60000
LO	X_{13}	X_{23}	X_{33}	X_{43}	30000
MO	X_{14}	X_{24}	X_{34}	X_{44}	50000
Prom. Cheques/día	90000	90000	90000	90000	
C. de mantener una Cta. /año	50000	40000	30000	20000	

Tasa de Interés anual = 15%

Donde es necesario definir:

X_{ij} =La cantidad Promedio girada en cheques por el banco i desde la región j (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)

y_i = 1,0 : Se abre o no una cuenta en el lugar de bancos i (i = 1,2,3,4)

Función objetivo

Max Z = $0.15(2555\, X_{11} + 2920\, X_{12} + 1460\, X_{13} + 1825\, X_{14} + 730\, X_{21} + 1460\, X_{22} + 2920\, X_{23} + 1460\, X_{24} + 2190\, X_{31} + 1825\, X_{32} + 730\, X_{33} + 2555\, X_{34} + 1825\, X_{41} + 1095\, X_{42} + 4015\, X_{43} + 1825\, X_{4}) – 50000\, y_1 – 40000 y_2 – 30000\, y_3 – 20000\, y_4$

Sujeto a:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 40000$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 60000$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 30000$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 50000$$
$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 90000$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 90000$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 90000$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 90000$$

$X_{11}, X_{21}, X_{31}, X_{41}, X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{42}, X_{13}, X_{23}, X_{33}, X_{43,} X_{14}\ X_{24}, X_{34}, X_{44}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{31}, X_{32}\ X_{33}, X_{34}, X_{41}, X_{42}, X_{4,} X_{44} /0$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una compañía produce dos productos A y B. Cada unidad de producto A requiere una hora de servicios de ingeniería y 5 horas de tiempo máquina. Producir una unidad de producto B requiere 2 horas de servicios de ingeniería y 8 horas de maquina disponible. Hay 100 horas de ingeniería y 400 horas de tiempo de maquina disponible. El costo de producción es una función no lineal de la cantidad producida tal como se da en la tabla 7

Tabla 7

PRODUCTO A		**PRODUCTO B**	
Producción (unidades)	**Utilidad**	**Producción (unidades)**	**Utilidad**
0 - 49	10	0 - 39	7
50 - 100	8	40 - 100	3

Solución:

Sea:

$X_{ij} =$ Unidades del producto i con costo de producción del rango j (i=A,B; j=1,2)

$Y_i = 1,0$; (i = 1,2)

$$MAX\ Z = 10X_{A1} + 8X_{A2} + 7X_{B1} + 3X_{B2}$$

Sujeto a:

$(X_{A1} + X_{A2}) + 2\ (X_{B1} + X_{B2}) \leq 100$

$5\ (X_{A1} + X_{A2}) + 8\ (X_{B1} + X_{B2}) \leq 400$

$X_{A1} \leq 50$

$X_{A1}\ /\ 50\ y_1$

$X_{A2} \leq 50\ y_1$

$X_{B1} \leq 40$

$X_{B1} \leq 40\ y_2$

$X_{B2}\ \leq 60\ y_2$

$X_{A1}\ ,\ X_{A2}\ ,\ X_{B1}\ ,\ X_{B2}\ \ /\ 0$

2. Un urbanizador de bienes raíces está estudiando varios proyectos estrechamente interrelacionados. Algunos proyectos solo se pueden llevar a cabo si se cumplen ciertas condiciones (Tabla 8). Sea R1 la utilidad total de la inversión i y C1 el costo de hacerlo. Desea maximizar la utilidad total al invertir hasta M dólares. Formule el problema como un PE. Defina sus variables de decisión.

Tabla 8	
PROYECTO	**CONDICION**
A	Ninguna
B	No si C y solo si E
C	No si B
D	Solo si A
E	No si F y solo si C
F	No si E y solo si C
G	Solo si A y B

Solución:

Sea:

$X_i = 1,0$: Se realiza o no el proyecto i (i = A,B,…,G)

Max $Z = R_A X_A + \ldots + R_G X_G - (C_A X_A + \ldots\ldots + C_G X_G)$

Sujeto a:

$X_B + X_C \leq 1$

$X_E - X_B\ \ /0$

$X_C - X_F \leq 1$

$X_A - X_D \leq 0$

$X_E + X_F \leq 1$

$X_C - X_E \leq 0$

$2\ X_G - X_A - X_B \leq 0$

$X_A + \ldots + X_G / 0$

3. Un problema que afronta todos los días un electricista consiste en decidir que generadores conectar. El electricista en cuestión tiene tres generadores con las características que se muestran en la Tabla 9. Hay dos periodos del día. En el primero se necesitan 2900 megawatts. En el segundo 3900 megawatts. Un generador que se conecte para el primer periodo puede ser usado en el segundo sin causar un nuevo gasto de conexión. Todos los generadores principales (como son A, B y C de la tabla 9) son apagados al término del día. Formule este problema como un PLE.

Tabla 9			
Generador	**Costo fijo de conexión**	**Costo por periodo por megawatts usado**	**Capacidad máxima en cada periodo en (MW)**
A	3000	5	2100
B	2000	4	1800
Costos	1000	7	3000

Solución:

Sea:

X_{ij} = MW utilizados por el generador i en el periodo j (i = A,B,C; j = 1,2)

y_i = 1,0 : Se utiliza o no el generador i (i = A,B,C)

Min Z = $3000\, y_A + 2000\, y_B + 1000\, y_C + 5\,(X_{A1} + X_{A2}) + 4\,(X_{B1} + X_{B2}) + 7\,(X_{C1} + X_{C2})$

Sujeto a:

$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} / 2900$

$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} / 3900$

$X_{A1} \leq 2100\, y_A$

$X_{A2} \leq 2100\, y_A$

$X_{B1} \leq 1800\ y_B$

$X_{B2} \leq 1800\ y_B$

$X_{C1} \leq 3000\ y_C$

$X_{C2} \leq 3000\ y_C$

X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} , X_{C1} , X_{C2} / 0

4. La junta de directores de una empresa manufacturera esta estudiando un conjunto de inversiones sujetas a las siguientes condiciones:

INVERSION	**CONDICION**
1	Ninguna
2	Solo sí 1
3	Solo sí 2
4	Se hará sí 1 y 2
5	No sí 1 ó 2
6	No sí 2 ó 3
7	Solo sí 2 y no 3

Sean Ri y Ci el rédito y costo de las inversiones i, la junta desea maximizar el rédito total, invirtiendo no más de M soles en total.
Elabore el programa.

Solución:

Xi = 0,1; se invierte o no en el proyecto de inversión i.

$$Max\ Z = \sum RiXi$$

Sujeto a:

C.2: $X_2 - X_1 \leq 0$

C.3: $X_3 - X_2 \leq 0$

C.4: $X_4 - X_1 \leq 0$

$X_4 - X_2 \leq 0$

C.5: $X_1 - X_2 + X_5 \leq 1$

$- X_1 + X_2 + X_5 \leq 1$

C.6: $X_2 + X_3 + X_6 \leq 2$

C.7: $X_2 + X_3 + X_7 \leq 2$

$X_2 - X_7$ / 0

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$ / 0

INV.2

X_2	X_1
1	1
1	0
0	1
0	0

Solo sí 1

$X_2 - X_1 \leq 0$

INV.3

X_3	X_2
1	1
1	0
0	1
0	0

Solo sí 2

$X_3 - X_2 \leq 0$

INV. 4

X_4	X_1	X_2
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

Se hará sí 1 y 2

$$\begin{pmatrix} X_4 - X_1 \leq 0 \\ X_4 - X_2 \leq 0 \end{pmatrix} \equiv (X_1 + X_2 - 2X_4 \geq 0)$$

INV. 5

X_1	X_2	X_5
1	1	1
1	1	0

No sí 1 ó 2

$X_2 + X_3 + X_6 \leq 2$

1	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

INV. 6

X_6	X_2	X_3
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

No sí 2 y 3

$X_2 + X_3 + X_6 \leq 2$

INV. 7

X_7	X_2	X_3
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

Solo sí 2 y no 3

$X_7 - X_2 \leq 0$

$X_3 + X_7 \leq 1$

5. El gobernador Blue del estado de Berry intenta convencer a la asamblea legislativa del estado para que dividan arbitrariamente los distritos congresionales (para sacar ventaja de ello) de Berry. El estado consta de diez ciudades; el número de republicanos y de demócratas registrados (en miles) en cada ciudad, se encuentra en la tabla 6. Berry tiene cinco representantes congresionales. Para formar distritos congresionales, hay que agrupar las ciudades según las siguientes restricciones:

1. Todos los votantes de una ciudad deben estar en el mismo distrito.

2. Cada distrito debe tener entre 150000 y 250000 votantes (no hay votantes independientes)

El gobernador Blue es demócrata. Suponga que cada elector siempre vota por su propio partido. Formule un PE para ayudar al gobernador Blue a maximizar el número de demócratas que ganarán una silla en el congreso.

Tabla 6

	REPUBLICANOS	**DEMOCRATAS**
Ciudad 1	80	34
Ciudad 2	60	44
Ciudad 3	40	44
Ciudad 4	20	24
Ciudad 5	40	114
Ciudad 6	40	64
Ciudad 7	70	14
Ciudad 8	50	44
Ciudad 9	70	54
Ciudad 10	70	64

Solución:

Sea:

$y_{ij} = 1,0$: Pertenece o no la ciudad i al distrito congresional j ($i = 1,2,\dots,10$; $j = 1,2,\dots,5$)

Como cada distrito tiene entre 150000 y 250000 votantes se tienen:

$114\, y_{11} + 104\, y_{21} + 84\, y_{31} + \dots\dots + 134\, y_{101}$ / 150000

$114\, y_{11} + 104\, y_{21} + 84\, y_{31} + \dots\dots + 134\, y_{101} \leq 250000$

$114\, y_{12} + 104\, y_{22} + 84\, y_{32} + \dots\dots + 134\, y_{102}$ / 150000

$114\, y_{12} + 104\, y_{22} + 84\, y_{32} + \dots\dots + 134\, y_{102} \leq 250000$

$114\, y_{13} + 104\, y_{23} + 84\, y_{33} + \dots\dots + 134\, y_{103}$ / 150000

$114\, y_{13} + 104\, y_{23} + 84\, y_{33} + \dots\dots + 134\, y_{103} \leq 250000$

$114\, y_{14} + 104\, y_{24} + 84\, y_{34} + \dots\dots + 134\, y_{104}$ / 150000

$114\, y_{14} + 104\, y_{24} + 84\, y_{34} + \dots\dots + 134\, y_{104} \leq 250000$

$$114\,y_{15} + 104\,y_{25} + 84\,y_{35} + \ldots\ldots + 134\,y_{105} / 150000$$

$$114\,y_{15} + 104\,y_{25} + 84\,y_{35} + \ldots\ldots + 134\,y_{105} \leq 250000$$

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} = 1$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25} = 1$$

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35} = 1$$

....

....

$$y_{91} + y_{92} + y_{93} + y_{94} + y_{95} = 1$$

$$y_{101} + y_{102} + y_{103} + y_{104} + y_{105} = 1$$

Para cumplir 2, de la tabla 6 podemos tabular la diferencia entre demócratas y republicanos en cada ciudad en la tabla siguiente:

	REPUBLICANOS (R)	**DEMOCRATAS (D)**	**(R) - (D)**
Ciudad 1	80	34	46
Ciudad 2	60	44	16
Ciudad 3	40	44	-4
Ciudad 4	20	24	-4
Ciudad 5	40	114	-74
Ciudad 6	40	64	-24
Ciudad 7	70	14	56
Ciudad 8	50	44	6
Ciudad 9	70	54	26
Ciudad 10	70	64	6

Luego es necesario definir:

Sea:

X_j = 1,0: Gana o no el partido demócrata en el distrito congresional j

Entonces:

Si $46\,y_{11} + 16\,y_{21} - 4\,y_{31} + \ldots + 6\,y_{101} > 0$, Entonces $y_1 \leq 0$

- Esta expresión lógica se puede escribir de la manera siguiente:

$$46\ y_{11} + 16\ y_{21} - 4\ y_{31} + \ldots + 6\ y_{101} \leq M\ (1\text{-}y1)$$
$$X_1 \leq M\ y1$$

- De manera análoga se tiene:

$$46\ y_{12} + 16\ y_{22} - 4\ y_{32} + \ldots + 6\ y_{102} \leq M\ (1-y_2)$$
$$X_2 \leq M\ y_2$$
…………………………………………………….
…………………………………………………….
$$46\ y_{15} + 16\ y_{25} - 4\ y_{35} + \ldots + 6\ y_{105} \leq M\ (1-y_5)$$
$$X_5 \leq M\ y_5$$

Finalmente el PE se puede escribir como:

Sea:

y_{ij} = 1,0 : Pertenece o no la ciudad i al distrito congresional j (i = 1,2,…,10; j = 1,2,…,5)

X_j = 1,0: Gana o no el partido demócrata en el distrito congresional j

y_j = 1,0 : Se cumple o no la condición j

Max $\quad Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

Sujeto a:

$$114\ y_{11} + 104\ y_{21} + 84\ y_{31} + \ldots\ldots + 134\ y_{101} \,/\, 150000$$
$$114\ y_{11} + 104\ y_{21} + 84\ y_{31} + \ldots\ldots + 134\ y_{101} \leq 250000$$
$$114\ y_{12} + 104\ y_{22} + 84\ y_{32} + \ldots\ldots + 134\ y_{102} \,/\, 150000$$
$$114\ y_{12} + 104\ y_{22} + 84\ y_{32} + \ldots\ldots + 134\ y_{102} \leq 250000$$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………

$$114\ y_{15} + 104\ y_{25} + 84\ y_{35} + \ldots\ldots + 134\ y_{105} / 150000$$

$$114\ y_{15} + 104\ y_{25} + 84\ y_{35} + \ldots\ldots + 134\ y_{105} \leq 250000$$

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} = 1$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25} = 1$$

………………………………...................................

………………………………...................................

$$y_{51} + y_{52} + y_{53} + y_{54} + y_{55} = 1$$

$$46\ y_{11} + 16\ y_{21} - 4\ y_{31} + \ldots + 6\ y_{101} \leq M\ (1-y_1)$$

$$X_1 \leq M\ y_1$$

$$46\ y_{12} + 16\ y_{22} - 4\ y_{32} + \ldots + 6\ y_{102} \leq M\ (1-y_2)$$

$$X_2 \leq M\ y_2$$

…………......……………………………………………

…………......……………………………………………

…………......……………………………………………

…………......……………………………………………

$$46\ y_{15} + 16\ y_{25} - 4\ y_{35} + \ldots + 6\ y_{105} \leq M\ (1-y_5)$$

$$X_5 \leq M\ y_5$$

PROBLEMAS DE PROGRAMACION ENTERA CON LINGO

1. Una decisión de la corte indica que las inscripciones en cada secundaria en la ciudad de Metrópolis deben incluir por lo menos un 20% de negros. En la tabla se muestra el número de alumnos negros y blancos de las secundarias en cada uno de los cinco distritos escolares de la ciudad.

	BLANCOS	**NEGROS**
Distrito 1	80	30
Distrito 2	70	5
Distrito 3	90	10
Distrito 4	50	40
Distrito 5	60	30

La distancia, en millas, que debe viajar un alumno de cada distrito para llegar a cada secundaria se muestra en la siguiente tabla:

	ESC.SEC 1	**ESC.SEC 2**
Distrito 1	1	2
Distrito 2	0.5	1.7
Distrito 3	0.8	0.8
Distrito 4	1.3	0.4
Distrito 5	1.5	0.6

La política de la dirección de la escuela establece que todos los alumnos de un distrito dado deben asistir a la misma escuela. Suponiendo que cada escuela debe tener una población de por lo menos 150 alumnos, formule una PE para minimizar la distancia total que deben viajar los alumnos de Metrópolis a su secundaria.

```
MODEL:

SETS:
BN/1,2/:;
DIS/1..5/:;
ESC/1,2/:;
BNDIS(BN,DIS):;
```

```
BNESC(BN,ESC):;
DISESC(DIS,ESC):;
ALUMNO(BN,DIS,ESC):Y,X,DISTA,NUME;
ENDSETS

DATA:
DISTA=1,2,.5,1.7,.8,.8,1.3,.4,1.5,.6,
      1,2,.5,1.7,.8,.8,1.3,.4,1.5,.6;
NUME=80,80,70,70,90,90,50,50,60,60,
     30,30,5,5,10,10,40,40,30,30;
ENDDATA

MIN=@SUM(ALUMNO:X*DISTA);
@FOR(ESC(K):@SUM(BNDIS(I,J):X(I,J,K))>=150);
@FOR(ESC(K):@SUM(BNDIS(I,J)|I#EQ#2:X(I,J,K))*4>=@SUM(BN
DIS(I,J)|I#EQ#1:X(I,J,K)));
@FOR(ALUMNO:X=NUME*Y);
@FOR(DISESC(J,K):Y(1,J,K)=Y(2,J,K));
@FOR(BNDIS(I,J):Y(I,J,1)+Y(I,J,2)=1);

@FOR(ALUMNO:@BIN(Y));
END
```

2. State University debe comprar 1100 computadoras de tres vendedores. El vendedor 1 cobra $500 por computadora, más un costo de transporte de $5000. El vendedor 2 cobra $350 más $4000, el vendedor 3 cobra $250 más $6000. El vendedor 1 venderá a lo más 500 computadoras a la universidad, el vendedor 2 venderá a lo más 900 computadoras, y el vendedor 3 venderá a lo más 400 computadoras. Formule una PE para minimizar el costo de la compra de las computadoras necesarias.

- **EN LINGO**

```
!Xi: #computadoras del vendedor i
 Yi: Si compro o no al vendedor i;

MODEL:
SETS:
F/1..3/:CF,CV,X,Y,LIM;
ENDSETS
```

```
DATA:
CV=500,350,250;
CF=5000,4000,6000;
LIM=500,900,400;
ENDDATA

MIN=@SUM(F:CV*X+CF*Y);
@FOR(F(I):X(I)<=LIM(I)*Y(I));
@SUM(F:X)=1100;
@FOR(F:@BIN(Y));
END
```

- **ALGEBRAICAMENTE:**

```
MIN
5000Y(1)+4000Y(2)+6000Y(3)+500X(1)+350X(2)+250X(3)

 SUBJECT TO
 2]- 500 Y( 1) + X( 1) <=   0
 3]- 900 Y( 2) + X( 2) <=   0
 4]- 400 Y( 3) + X( 3) <=   0
 5]  X( 1) + X( 2) + X( 3) =    1100
 END
 INTE     3
```

Reconsiderando el problema 19, suponga que al inicio del año 1 se han construido y están en operación las plantas generadoras de energía eléctrica 1-4. Al inicio de cada año, PSI puede cerrar una planta que está funcionando, o volver a echar a andar una planta cerrada. En las tablas siguientes se muestran las Capacidades generadoras deseadas, los costos asociados a la reapertura o cierre de una planta. Formule una PE para minimizar el costo total para poder satisfacer las demandas de los próximos cinco años.

	CAPACIDAD GENERADORA (millones kwh)
AÑO 1	80
AÑO 2	100
AÑO 3	120
AÑO 4	140
AÑO 5	160

	Capacidad Generadora	Costo Operación	Costo Reapertura	Costo por cierre
PLANTA 1	70	1.5	1.9	1.7
PLANTA 2	50	0.8	1.5	1.2
PLANTA 3	60	1.3	1.6	1.3
PLANTA 4	40	0.6	1.1	0.8

```
!Xij Yij Zij   i=Planta j=año;
MODEL:

SETS:
PLA/1..4/:CAPL;
ANO/1..5/:CAPAC;
FUN(PLA,ANO):Y,X,Z,COSOP,COSCIE,COSABR;
ENDSETS

DATA:
CAPL=70,50,60,40;
CAPAC=80,100,120,140,160;
COSOP=1.5,1.5,1.5,1.5,1.5,.8,.8,.8,.8,.8,1.3,1.3,1.3,1.
3,1.3,.6,.6,.6,.6,.6;
COSCIE=1.7,1.7,1.7,1.7,1.7,1.2,1.2,1.2,1.2,1.2,1.3,1.3,
1.3,1.3,1.3,.8,.8,.8,.8,.8;
COSABR=1.9,1.9,1.9,1.9,1.9,1.5,1.5,1.5,1.5,1.5,1.6,1.6,
1.6,1.6,1.6,1.1,1.1,1.1,1.1,1.1;
ENDDATA

MIN=@SUM(FUN:X*COSOP+Y*COSCIE+Z*COSABR);

@FOR(ANO(J):@SUM(FUN(I,J):X(I,J)*CAPL(I))>=CAPAC);
@FOR(FUN(I,J)|J#EQ#1:X(I,J)=1);
@FOR(FUN(I,J)|J#EQ#1:Z(I,J)=0);
```

```
@FOR(FUN(I,J)|J#NE#5:X(I,J)-Y(I,J)=X(I,J+1));
@FOR(FUN(I,J):Y(I,J)<=X(I,J));
@FOR(FUN(I,J)|J#NE#1:X(I,J)-Z(I,J)=X(I,J-1));
@FOR(FUN(I,J):Z(I,J)<=X(I,J));

@FOR(FUN:@BIN(Y));
@FOR(FUN:@BIN(X));
@FOR(FUN:@BIN(Z));
END
```

3. Se disponen de cuatro camiones para entregar leche a cinco tiendas de comestibles. En la siguiente tabla se muestran la capacidad y el costo diario de operación de cada camión.

Nota: He supuesto que ese costo diario es por CADA operación, es decir, si el camión 1 va a dos tiendas, el costo de operación del camión 1 será 45+45=90.

Se puede satisfacer la demanda de una tienda de comestibles mediante un solo camión pero un mismo camión puede entregar leche a más de una tienda. La demanda diaria de cada una de las tiendas es la siguiente: tienda 1 demanda 100 galones, tienda 2=200galones, tienda3=300 galones, tienda 4=500 galones, tienda 5 demanda 800 galones. Formule una PE que se puede usar para minimizar el costo diario para satisfacer las demandas de las cinco tiendas.

	CAPACIDAD (galones)	COSTO OPERACIÓN ($)
Camión 1	400	45
Camión 2	500	50
Camión 3	600	55
Camión 4	1100	60

```
! Xij=galones transportados   i=camión  j=tienda;

MODEL:

SETS:
CA/1..4/:CAP,OPE;
TI/1..5/:DEM;
```

```
MILK(CA,TI):X,Y,COS;
ENDSETS

DATA:
CAP=400,500,600,1100;
COS=45,45,45,45,45,50,50,50,50,50,55,55,55,55,55,60,60,
60,60,60;
DEM=100,200,300,500,800;
ENDDATA

MIN=@SUM(MILK:COS*Y);
@FOR(TI(J):@SUM(CA(I):X(I,J))=DEM(J));
@FOR(MILK(I,J):X(I,J)<=CAP(I)*Y(I,J));
@FOR(CA(I):@SUM(TI(J):X(I,J))<=CAP(I));

@FOR(MILK:@BIN(Y));
END
```

SECUENCIACIÓN EN LINGO

Sea la siguiente matriz de tiempos:

	MAQUINA J		
TRABAJO I	M1	M2	M3
A	3	--	8
B	7	3	--
C	5	4	3

Donde Dij es el tiempo de operación del trabajo i en la máquina j.

Sea la secuencia de operaciones de cada uno de los trabajos:

	SECUENCIA K		
TRABAJO I	1	2	3
A	M3	M1	--
B	M2	M1	--
C	M1	M3	M2

Se pide determinar el tiempo mínimo de ejecución de los trabajos.

Tij = Tiempo de inicio del trabajo i en la máquina j
Dij = duración del trabajo i en la máquina j
TT = Tiempo total del programa
Yk = 1 Si se cumple que, por ejemplo, el trabajo1 en la máquina 1 es anterior al trabajo 2 en la máquina 1.

<u>FORMULACIÓN EN LINGO:</u>

```
!PROBLEMA DE SECUENCIACIÓN
Tij= Tiempo de Inicio del trabajo i en la máquina j
Dij = Duración
TT = tiempo total del programa;

MODEL:

SETS:
A/1/:TT;
B/1..5/:Y;
TR/1..3/:;
MQ/1..3/:;
GOL(TR,MQ):T,D;
ENDSETS

MIN=@SUM(A:TT);
@FOR(GOL(I,J)|I#EQ#1:T(1,3)+8<=T(1,1));
@FOR(GOL(I,J):T(1,1)+3<=TT(1));
@FOR(GOL(I,J)|I#EQ#2:T(2,2)+3<=T(2,1));
@FOR(GOL(I,J):T(2,1)+7<=TT(1));
@FOR(GOL(I,J)|I#EQ#3:T(3,1)+5<=T(3,3));
@FOR(GOL(I,J)|I#EQ#3:T(3,3)+3<=T(3,2));
@FOR(GOL(I,J):T(3,2)+4<=TT(1));

@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#1:T(1,1)+3<=T(2,1)+500*Y(1));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#1:T(2,1)+7<=T(1,1)+500*(1-Y(1)));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#1:T(1,1)+3<=T(3,1)+500*Y(2));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#1:T(3,1)+5<=T(1,1)+500*(1-Y(2)));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#1:T(2,1)+7<=T(3,1)+500*Y(3));
```

```
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#1:T(3,1)+5<=T(2,1)+500*(1-Y(3)));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#2:T(2,2)+3<=T(3,2)+500*Y(4));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#2:T(3,2)+4<=T(2,2)+500*(1-Y(4)));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#3:T(1,3)+8<=T(3,3)+500*Y(5));
@FOR(GOL(I,J)|J#EQ#3:T(3,3)+3<=T(1,3)+500*(1-Y(5)));

@FOR(B:@BIN(Y));
END
```

FORMULACIÓN ALGEBRAICA

```
MIN      TT( 1)
SUBJECT TO
2]- T( 1, 1) + T( 1, 3) <= - 8
5]  T( 1, 1) - TT( 1) <= - 3
10]  T( 1, 1) - TT( 1) <= - 3
14]- T( 2, 1) + T( 2, 2) <= - 3
17]  T( 2, 1) - TT( 1) <= - 7
26]  T( 3, 1) - T( 3, 3) <= - 5
29]- T( 3, 2) + T( 3, 3) <= - 3
32]  T( 3, 2) - TT( 1) <= - 4
41]- 500 Y( 1) + T( 1, 1) - T( 2, 1) <= - 3
44]  500 Y( 1) - T( 1, 1) + T( 2, 1) <=   493
47]- 500 Y( 2) + T( 1, 1) - T( 3, 1) <= - 3
50]  500 Y( 2) - T( 1, 1) + T( 3, 1) <=   495
53]- 500 Y( 3) + T( 2, 1) - T( 3, 1) <= - 7
56]  500 Y( 3) - T( 2, 1) + T( 3, 1) <=   495
59]- 500 Y( 4) + T( 2, 2) - T( 3, 2) <= - 3
62]  500 Y( 4) - T( 2, 2) + T( 3, 2) <=   496
65]- 500 Y( 5) + T( 1, 3) - T( 3, 3) <= - 8
68]  500 Y( 5) - T( 1, 3) + T( 3, 3) <=   497

END
INTE Y( 1)
INTE Y( 2)
INTE Y( 3)
INTE Y( 4)
INTE Y( 5)
```

HACIENDO CORRER EL PROGRAMA:

```
Global optimal solution found at step:            80
 Objective value:                           15.00000
 Branch count:                                     2
```

Variable	Value	Reduced Cost
TT(1)	15.00000	0.0000000
Y(1)	1.000000	0.0000000
Y(2)	1.000000	0.0000000
Y(3)	1.000000	0.0000000
Y(4)	0.0000000	0.0000000
Y(5)	0.0000000	-500.0000
T(1, 1)	12.00000	0.0000000
T(1, 2)	0.0000000	0.0000000
T(1, 3)	0.0000000	1.000000
T(2, 1)	5.000000	0.0000000
T(2, 2)	0.0000000	0.0000000
T(2, 3)	0.0000000	0.0000000
T(3, 1)	0.0000000	0.0000000
T(3, 2)	11.00000	0.0000000
T(3, 3)	8.000000	0.0000000

```
                    D(  1,  1)              0.0000000
0.0000000
                    D(  1,  2)              0.0000000
0.0000000
                    D(  1,  3)              0.0000000
0.0000000
                    D(  2,  1)              0.0000000
0.0000000
                    D(  2,  2)              0.0000000
0.0000000
                    D(  2,  3)              0.0000000
0.0000000
                    D(  3,  1)              0.0000000
0.0000000
                    D(  3,  2)              0.0000000
0.0000000
                    D(  3,  3)              0.0000000
0.0000000
```

Como se puede ver, el tiempo mínimo de ejecución de los trabajos es 15.

6.2 ANEXO

LENGUAJE DE MODELADO LINGO

¿Qué es LINGO?

LINGO es una herramienta simple para utilizar la potencialidad de la optimización lineal y no lineal para formular problemas muy grandes de una manera concisa, resolverlos y analizar su solución. La optimización le ayuda a encontrar la respuesta que representa la mejor solución; obtiene la mayor utilidad, respuesta o felicidad; o logra el menor costo, desperdicio o disconformidad. A menudo estos problemas significan hacer el uso más eficiente de sus recursos- incluyendo ***dinero, tiempo, maquinaria, personal, inventario*** y mucho más. Los problemas de optimización se clasifican a menudo como lineales y no lineales, dependiendo si las relaciones entre las variables son o no lineales.

LINGO es un lenguaje de modelado matemático diseñado para formular y resolver problemas de programación lineal, programación entera y programación no lineal.

Lenguaje de modelado de LINGO

Sintaxis de LINGO

La sintaxis que se utiliza en este programa es muy sencilla. Para el nombre de las Variables y otros identificadores se establece que pueden tener 32 caracteres como Máximo, Deben comenzar con una letra seguido de letras, dígitos o _.
LINGO no distingue entre mayúsculas y minúsculas.

Con respecto a las ***sentencias:***

• Todas las sentencias deben terminar en un punto y coma.
• Para darle un nombre a la función objetivo o a las restricciones, estos se deben colocar entre corchetes.
• Para declarar la función objetivo debemos colocar las palabras reservadas MAX o MIN, (aparecerán resaltadas en azul) seguidas del signo = .
• Los comentarios deben comenzar con un signo "!" , los cuales aparecen resaltados en verde. Al igual q las sentencias los comentarios finalizan con un punto y coma.

Una formulación **en LINGO, tiene tres secciones:**

1. **Sección de conjuntos**, SETS**, que especifica los conjuntos y sus atributos**
2. **Sección de datos,** DATA, **que proporciona los datos a usar o indica donde obtenerlos**
3. **Sección del modelo,** MODEL, **lugar donde se describe el modelo matemático.**

SECCION DE CONJUNTOS

Cada conjunto tiene la sintaxis siguiente:

NOMBRE/ LOS MIEMBROS/**:** LOS ATRIBUTOS**;**

SETS:FABRICAS /F1,F2/ : CAPACIDAD;
CENTROS /C1,C2,C3/ :DEMANDA;
RUTAS(FABRICAS, CENTROS): C, X;
ENDSETS

Los conjuntos, FABRICAS y CENTROS se denominan ***conjuntos primitivos*** y el último se denomina **conjunto derivado**, donde C y X representan, respectivamente, los costos unitarios de transporte y cantidad transportada de las fabricas a los centros.

SECCION DE DATOS

Los valores de los atributos de los elementos de los conjuntos, tienen la sintaxis siguiente:

DATA:
CAPACIDAD = 30, 20;
DEMANDA = 10, 25, 15;
C = 2, 4, 6,7, 10, 1;
ENDDATA

SECCION DEL MODELO

Para presentar el modelo se utiliza dos funciones @SUM y @FOR.

@SUM calcula la suma de una expresión sobre todos los miembros del conjunto.

La forma general es:

@SUM (set: expresión)

Suma la expresión que sigue a los dos puntos.

Por ejemplo:

@SUM (RUTAS: C*X)

Suma la expresión que sigue a los dos puntos que corresponde al producto del costo unitario de transporte por la cantidad transportada de cada origen a cada destino considerado.

La segunda función es @FOR, esta función sirve para generar restricciones sobre los miembros de un conjunto. La forma general es:

@FOR(set: restricción)

Por ejemplo:

@FOR(CENTROS(J):@SUM(FABRICAS(I):X(I,J))<=CAPACIDAD(I));

Indica que se genere la restricción que sigue a los dos puntos para cada miembro del conjunto que les precede. Cada elemento del conjunto CENTROS(J) para J = 1,2,3 se genera las restricciones siguientes:

J = 1: X11 + X21 >= 10

J = 2: X12 + X22 >= 25

J = 3 X13 + X23 >= 15

La formulación completa es como sigue:

MODEL:
! 2 FABRICAS, 3 CENTROS, problema de transporte;
SETS:
FABRICAS /F1, F2/: CAPACIDAD;

```
CENTROS /C1, C2, C3/   : DEMANDA;
RUTAS (FÁBRICAS, CENTROS): C, X;
ENDSETS

DATA:
CAPACIDAD = 30,20;
DEMANDA = 10, 25,15;
C = 2, 4, 6,
    7,10, 1;
ENDDATA

! LA FUNCION OBJETIVO;
MIN = @SUM(RUTAS:C*X);

! RESTRICCIONES DE LA DEMANDA;
@FOR (CENTROS (J): @SUM (FABRICAS (I): X (I, J)) >= DEMANDA (J));

! RESTRICCIONES DE LA OFERTA;
@FOR (FABRICAS (I): @SUM (CENTROS (J): X (I, J)) <= CAPACIDAD (I));
END
```

Para presentar el modelo algebraico se hace clic en la ficha LINGO, ***Generate, Algebraic,*** Generate y se tiene como resultado lo siguiente:

```
MIN  =   X*( F2, C3) + 10 *X( F2, C2) + 7 *X( F2, C1) +
6 *X( F1, C3) + 4 *X( F1, C2) + *2 X( F1, C1)
 SUBJECT TO
 2]  X( F2, C1) + X( F1, C1) >=   10
 3]  X( F2, C2) + X( F1, C2) >=   25
 4]  X( F2, C3) + X( F1, C3) >=   15
 5]  X( F1, C3) + X( F1, C2) + X( F1, C1) <=   30
 6]  X( F2, C3) + X( F2, C2) + X( F2, C1) <=   20
 END
```

Se puede omitir el paso anterior pasando a la solución del modelo haciendo clic en ***LINGO, Solve*** obteniendo el siguiente resultado:

Objective value: 160.0000

Variable	Value	Reduced Cost
CAPACIDAD(F1)	30.00000	0.0000000
CAPACIDAD(F2)	20.00000	0.0000000
DEMANDA(C1)	10.00000	0.0000000
DEMANDA(C2)	25.00000	0.0000000
DEMANDA(C3)	15.00000	0.0000000
C(F1, C1)	2.000000	0.0000000
C(F1, C2)	4.000000	0.0000000
C(F1, C3)	6.000000	0.0000000
C(F2, C1)	7.000000	0.0000000
C(F2, C2)	10.00000	0.0000000
C(F2, C3)	1.000000	0.0000000
X(F1, C1)	5.000000	0.0000000
X(F1, C2)	25.00000	0.0000000
X(F1, C3)	0.0000000	10.00000
X(F2, C1)	5.000000	0.0000000
X(F2, C2)	0.0000000	1.000000
X(F2, C3)	15.00000	0.0000000

Uso de funciones de dominio de variables

A menos que se especifique lo contrario, las variables en un modelo de LINGO son continuas y no negativas. Más específicamente las variables pueden asumir cualquier valor real desde cero hasta más infinito. En muchos casos este dominio para una variable puede ser inapropiado. Por ejemplo puede necesitarse que una variable asuma valores negativos, o solamente valores enteros. LINGO está provisto de cuatro funciones de dominio de variables que permiten sobrepasar el dominio por omisión de una variable:

@GIN	Limita la variable sólo a valores enteros
@BIN	Hace una variable binaria (0 ó 1)
@FREE	Permite que la variable tome cualquier valor real (positivo o negativo)
@BND	Limita la variable para que se ajuste a un rango finito

Ejemplos de uso de *variables enteras*:

@GIN(X); Transforma la variable escalar X en entera
@GIN(PRODUCE(5)); Transforma la variable PRODUCE(5) en entera
@FOR(DAYS(I): @GIN(START(I))); Transforma todas las variables del atributo START en binarias

Ejemplos de uso de *variables binarias*:

@BIN(X); Transforma la variable escalar X en binaria
@BIN(INCLUDE(4));Transforma la variable INCLUDE(4) en binaria
@FOR(ITEMS:@BIN(INCLUDE));Transforma todas las variables del atributo INCLUDE en binarias

Ejemplos de uso de *variables libres*:

@FREE(X); Transforma la variable escalar X en libre
@FREEE(QUANTITY(4)); Transforma la variable QUANTITY(4) en libre
@FOR(ITEMS:@FREE(QUANTITY));Transforma todas las variables del atributo QUANTITY en libres

Ejemplos de uso de variables con límites:

@BND(-1, X, 1) : Restringe la variable X al intervalo [-1, 1]
@BND(100, QUANTITY(4), 200): Limita QUANTITY(4) entre 100 y 200
@FOR(ITEMS: @BND(10, Q, 20)): Fija los límites de todas las variables del atributo Q en 10 y 20

@FOR(ITEMS: @BND(QL, Q, QU)): Fija los límites de todas las variables del atributo Q en QL y QU (A QL y QU deben habérsele asignado valores en la sección de datos)

OPERADORES LOGICOS

LINGO tiene nueve operadores lógicos:
NOT (no), EQ (igual), NE (no igual), GT (mayor que), GE (mayor igual), LT (menor igual), LE (menor igual), AND (y) y OR (o) que se utilizan para comparar valores, la forma de usar es: #operador#.

Problema Nº 1: (MEZCLA) (usando 1 variables)

Una compañía Fabrica tres productos de caucho: AIRTEX (material esponjoso), EXTENDEX (material elástico) y RESISTEX (material rígido). Los tres productos requieren los mismos tres polímeros químicos y una base. La cantidad de cada ingrediente usado por libra del producto final se muestra en la siguiente tabla.

Producto	Ingrediente (OZ/LB de producto)			
	Polímero A	Polímero B	Polímero C	Base
AIRTEX	4	2	4	6
EXTENDEX	3	2	2	9
EXTENDEX	6	3	5	2
Inventario	500	425	650	1100

La compañía tiene el compromiso de producir ala menos 1000 libras de airtex,500 libras de extendex y 400 libras de resistex para la próxima semana pero la gerencia de la compañía sabe que puede vender más de cada uno de los tres productos .los inventarios actuales de los ingredientes son 500 libras del polímero A , 425 libras del polímero B,650 libras el polímero C Y 1100 libras de la base . Cada libra de airtex produce a la compañía una ganancia de $ 7, cada libra de extendex una ganancia de $7 y cada libra de resistex una ganancia de $6.como gerente del departamento de producción, usted necesita determinar el plan de producción optimo para esta semana.

Solución:

	Ingredientes (oz/lb. de producto)					
Producto	**Polímero A**	**Polímero B**	**Polímero C**	**base**	**compromiso**	**ganancia**
airtex	**4**	**2**	4	**6**	**1000**	**7**
extendex	**3**	**2**	**2**	**9**	**500**	**7**
resistex	**6**	**3**	**5**	**2**	**400**	**6**
inventario	**500**	**425**	**650**	**1100**		

Sea:
Xi: la cantidad de ingredientes del PRODUCTO i(i=airtex,extendex,resistex)que se puede usar.

FUNCION OBJETIVO: $\sum_{i=1}^{3} X_i * ganancia_i$;donde ganancia es la utilidad ya sea del Producto airtex, extendex, resistex.
Entonces: MAX Z = $7*X_1 + 7*X_2 + 6*X_3$

SUJETO A:

$$\sum_{i=1}^{3} X_i \geq COM_i$$

Para i=1-----X_1 >=1000
Para i=2-----X_2 >=500
Para i=3-----X_3 >=400

$\sum_{i=1}^{3} X_i * requerimiento(i,j) \leq inventario_j$, donde requerimiento (i , j) es la cantidad de producto de cada tipo de ingrediente.

para J=1------□$4X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 500*16$;
para J=2------□$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 425*16$;

para J=3------□$4X_1 + 2X_2 + 5X_3$ <= 650*16;
para J=4------□$6X_1 + 9X_2 + 2X_3$ <= 1100*16;

```
SETS:
PRODUCTO/AIRTEX                                    EXTENDEX
RESISTEX/:NIVEL,COMPROMISO,GANANCIA;
INGREDIENTE/POLIA POLIB POLIC/:INVENTARIO;
PROIN(PRODUCTO,INGREDIENTE):X;
ENDSETS

DATA:
COMPROMISO=1000,500,400;
GANANCIA=7,7,6;
INVENTARIO =500,425,650,1100;
X=4,2,4,6,
  3,2,2,9,
  6,3,5,2;
ENDDATA

!FUNCION OBJETIVO MAXIMIZAR LA UTILIDAD;
MAX=@SUM(PRODUCTO:GANANCIA*NIVEL);
!RESTRICCION DEL INVENTARIO;
@FOR(INGREDIENTE(I):@SUM(PRODUCTO(P):X(P,I)*NIVEL(P))<=INVEN
TARIO(I)*16);
!RESTRICCION DEL COMPROMISO;
@FOR(PRODUCTO:NIVEL>=COMPROMISO);
END
```

Problema Nº 2: (DIETAS) (usando 1 subíndice):

El departamento de nutrición de un hospital prepara 30 menús de cena, uno para cada día del más. Una comida consiste en espagueti, pavo, papas en escalope y pastel de manzanas. Como director del departamento de nutrición, usted ha determinado que esta comida debe proporcionar 63000 miligramos de proteínas,10 miligramos de hierro,15 miligramos de niacina, 1 miligramo de tiamina y 50 miligramos de vitamina C .cada 100 gramos de esta comida proporciona la cantidad de cada nutriente y grasas indicadas en la siguiente tabla:

	NUTRIENTE(mg / 100g)					
	Proteína	Hierro	Tiacina	Tiamina	Vitna c	Grasa
Espagueti	5000	1.1	1.4	0.18	0.0	5000
Pavo	29300	1.8	5.4	0.06	0.0	5000
Papas	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900
Espinacas	3000	2.2	0.5	0.07	28	300
Pastel	4000	1.2	0.60	0.15	3.0	14300

Solución: hacemos nuestra tabla

Potaje	**NUTRIENTE(mg/100g)**						
	Proteína	**Hierro**	**Tiacina**	**Tiamina**	**Vitna c**	**Grasa**	**Maximo**
Espagueti	5000	1.1	1.4	0.18	0	5000	300
Pavo	29300	1.8	5.4	0.06	0	5000	300
Papas	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900	200
Espinacas	3000	2.2	0.5	0.07	28	300	100
Pastel	4000	1.2	0.6	0.15	3	14300	100
Minimo	63000	10	15	1	50	0	

Sea Xi: cantidad de nutriente de tipo (i=1,2,3,4,5,6)
i=1---espagueti
i=2---pavo
i=3---papas
i=4---espinacas
i=5---pastel
i=6---grasa

Función objetivo:

min $Z=X_6$;

Sujeto a:

Restricción de la cantidad de grasa total que debe haber :

$$X_6 - \sum_{i=1}^{5} X_i * CG_i = 0 \quad ; donde$$ *CGi es la cantidad de grasa ya sea en*

Pavo , papas ,espinacas ,pastel, espagueti.

Por lo tanto: *$X_6 – X_1*5000 – 5000*X_2 – 7900*X_3 – 3000*X_4 – 14300*X_5=0$*

Restricción de la cantidad de nutriente por cada 100 mg que proporciona:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i <= MAXIMO_i / 100 \quad ; donde$$ MAXIMO i es la cantidad máxima de cada potaje ya sea de

Espagueti, pavo, papas, espinacas y pastel

Por lo tanto:

Para i=1--□X_1<=300/100
Para i=2--□X_2<=300/100
Para i=3--□X_3<=200/100
Para i=4--□X_4<=100/100
Para i=5--□X_5<=100/100

Restricción de la cantidad de nutriente por pataje que debe haber como mínimo:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i * nutriente_{j,i} >= MINIMO_j$$

Donde:

NUTRIENTEj,i . j ,es la cantidad de nutriente ya sea de proteína, hierro, tiacina, tiamina, vitna C ,grasa por cada potaje i ya sea: Espagueti, pavo, papas ,espinacas, pastel.

y MINIMOj es la cantidad de potaje como máximo que debe existir.

Por lo tanto:

Para i=1,2,3,4,5 Y j=1
X_1*5000 + X_2*29300 + X_3*5300 + X_4*3000 + X_5*4000 >=63000

Para i=1,2,3,4,5 Y j=2
X_1*1.1 + X_2*1.8 + X_3*0.5 + X_4*2.2 + X_5*1.2 >=10

Para i=1,2,3,4,5 Y j=3
X_1*1.4 + X_2*5.4 + X_3*0.9 + X_4*0.5 + X_5*0.6 >=15

Para i=1,2,3,4,5 Y j=4
X_1*0.18 + X_2*0.06+ X_3*0.06 + X_4*0.07 + X_5* 0.15 >=1

Para i=1,2,3,4,5 Y j=5
X_1*5000 + X_2*5000 + X_3*7900 + X_4*300 + X_5*14300 >=0

```
SETS:
POTAJE/ESPAGUETI PAVO PAPAS ESPINACAS PASTEL/:NIVEL,MAXIMO;
NUTRIENTE/PROTEINA HIERRO TIACINA TIAMINA VITAMC GRASA/:MINIMO;
PONU(POTAJE,NUTRIENTE):REQ;
ENDSETS
DATA:
MAXIMO=300,300,200,100,100;
MINIMO=63000,10,15,1,50,0;
REQ=5000,1.1,1.4,0.18,0,5000,
   29300,1.8,5.4,0.06,0,5000,
   5300,0.5,0.9,0.06,10,7900,
   3000,2.2,0.5,0.07,28,300,
   4000,1.2,0.6,0.15,3,14300;
ENDDATA
MIN=GRASA;
GRASA=@SUM(POTAJE(I):REQ(I,6)*NIVEL(I));
@FOR(POTAJE(I):NIVEL(I)<=MAXIMO(I)/100);
@FOR(NUTRIENTE(J):@SUM(POTAJE(I):REQ(I,J)*NIVEL(I))>=MINIMO(J))
;
END
```

HACIENDO CORRER EL PROGRAMA CON LINGO 10.0

```
Objective value:                    54800.00
  Total solver iterations:                   3



               Variable           Value        Reduced Cost
        NIVEL( ESPAGUETI)        3.000000            0.000000
            NIVEL( PAVO)        2.833333            0.000000
           NIVEL( PAPAS)        2.000000            0.000000
        NIVEL( ESPINACAS)        1.000000            0.000000
          NIVEL( PASTEL)       0.6666667            0.000000

A ASI SUCESIVAMENTE……….
```

Problema Nº 3: (TRANSPORTE) (usando 2 subíndices):

La cadena de restaurantes "CUATRO MARIAS" se especializa en la preparación y venta de pescados y mariscos. La demanda de pescado de las 4 sucursales de la cadena de restaurantes "CUATRO MARIAS" es presentada en la siguiente tabla.

Sucursal	Jesús María	Callao	San Luis	Los Olivos
Demanda(Ton)	15	17	22	12

La cadena de restaurantes "CUATRO MARIAS" compra el pescado de 3 proveedores que proporcionan las siguientes cantidades (ton) de pescado

Proveedor	ventanilla	Villa el salvador	chorrillos
cantidad	30	25	21

Los costos de transporte (soles/tonelada) de los proveedores a las sucursales son:

	sucursal			
Proveedor	Jesús María	Callao	San Luis	Los Olivos
Ventanilla	6	2	6	7
V. salvador	4	9	5	3
chorrillos	8	8	1	5

Formule el modelo de PL que permita la distribución óptima de pescado de los proveedores de las sucursales.

SOLUCION:

El problema nos menciona q debemos determinar la distribución óptima de pescado o también dicho la cantidad de toneladas pescado q debe ir de cada proveedor a cada sucursal de la empresa, este dato debe reflejarse en la función objetivo (FO).

X_{ij}: cantidad de pescado distribuido (en toneladas) por el proveedor i hacia destino j donde: (i va de 1 a 3 y j va de 1 a 4)

En esta expresión “i” (por convención representa las filas) representa a los proveedores y “j” representa a las sucursales de la empresa “CUATRO MARIAS”

Ya tenemos el conjunto de variables con que vamos a trabajar pero eso no es suficiente para determinar la FO, para nuestro caso nos pide determinar la distribución óptima para tener el menor costo posible debido a la distribución del pescado.

	sucursal			
Proveedor	Jesús Maria	Callao	San Luis	Los Olivos
Ventanilla	**6**	**2**	**6**	**7**
V. salvador	**4**	9	5	3
chorrillos	**8**	8	1	5

Para armar la función objetivo necesitamos relacionar los datos costo unitario por tonelada de pescado por número de toneladas pescados trasportados esto nos daría es costo total de transporte.

En la tabla relacionamos primero al primer proveedor ventanilla (rojo) con la primera sucursal Jesús María (verde) este dato nos refleja el costo por tonelada de trasporte desde ventanilla hacia Jesús María (azul) lo cual nos da la relación $6*X_{11}$ este mismo paso es para los demás datos con lo cual tendríamos:

FO: MIN Z = $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} X_{ij} C_{ij}$

MIN Z = $6*X_{11} +2*X_{12}+ 6*X_{13}+ 7*X_{14} +4*X_{21}+ 9*X_{22} +5*X_{23} +3*X_{24} +8*X_{31} +8*X_{32} +1*X_{33} 5*X_{34}$

Determinando las restricciones:

Al determinar nuestra función objetivo ya tenemos un punto de partida de donde trabajar ahora debemos relacionar de la forma más adecuada todos los datos q tengamos a mano de preferencia almacenarlos en una sola tabla.

	Sucursal				
proveedor	Jesús M.	Callao	S. Luis	Los Olivos	disponibilidad
ventanilla	6	2	6	7	**30**
V. Salvador	4	9	5	3	**25**
Chorrillos	8	8	1	5	**21**
Demanda	**15**	**17**	**22**	**12**	

A la tabla de costos hemos hecho unos añadidos los cuales son la disponibilidad y la demanda, la que nos ayudaran a determinar las restricciones del problema

Restricción de la demanda:

Para la determinación de las restricciones se debe tener muy en cuenta la relación entre los datos, para el caso de la demanda ella está relacionada directamente con los proveedores ya q refleja la cantidad de toneladas q requiere cada sucursal. Entonces la restricción de la demanda va estar basada según sucursal "j".

Para j=1-----□ $\sum_{i=1}^{3} X_{i1} \geq$ [illegible]

$X_{11}+ X_{21} +X_{31} \geq 15$ (Jesús Maria)

Para j=2-----□ $\sum_{i=1}^{3} X_{i2} \geq$ [illegible]

$X_{12}+ X_{22} +X_{32} \geq 17$ (Callao)

Para j=3-----□ $\sum_{i=1}^{3} X_{i3} \geq$ [illegible]

$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 22$ (San Luis)

Para j=4-----□ $\sum_{i=1}^{3} X_{i4} \geq$ [illegible]

$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 12$ (Los Olivos)

El símbolo de mayor igual en las restricciones quiere decir q la empresa requiere satisfacer sus necesidades de demanda más un excedente para q no haya problemas de insuficiencia de comida

Como se observa no se ha tomado los datos de los costos de transporte, esto se debe a que la DEMANDA está en función a las cantidad de toneladas de pescado y no en función a los costos, es por ello q se relaciona directamente con las cantidades a transportar, en conclusión se deben relacionar datos q tengan igual UNIDADES de medición para q exista concordancia en el problema.

Restricción de la disponibilidad:

Se trabaja de forma análoga a la restricción de demanda pero como se vio en el cuadro anterior la disponibilidad no está relacionada con las sucursales sino con los proveedores “i”, entonces

El símbolo de menor igual refleja q los pro veedores pueden distribuir todo el pescado q poseen o menos hacia las sucursales.

Para i=1-----□ $\sum_{j=1}^{2} X_{1j} \geq$ [illegible]

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \geq 30$ (ventanilla)

Para i=2-----□ $\sum_{j=1}^{2} X_{2j} \geq$ [illegible]

i = 2 $X_{21} + X_{22} + X_{23} \geq 25$ (Villa el Salvador)

Para i=3-----□ $\sum_{j=1}^{2} X_{3j} \geq$ [illegible]

i = 3 $X_{31} + X_{32} + X_{33} \geq 21$ (Chorrillos)

Al igual que la demanda la disponibilidad está en función a la cantidad de toneladas trasportadas así q no debe estar relacionada con ninguna dato que refleje costos.

Problema Nº 3: (usando 3 subíndices):

La ciudad de Busville tiene tres distritos escolares. En la tabla A se da el número de estudiantes que pertenecen a grupos minoritarios y no minoritarios. El 25% de todos los estudiantes (200/800) pertenecen a grupos minoritarios.

Tabla A:

DISTRITO	ESTUDIANTES DE GRUPOS MINORITARIOS	ESTUDIANTES DE GRUPOS NO MINORITARIOS
1	50	200
2	50	250
3	100	150

La corte local a decidido que cada una de las dos escuelas de segunda enseñanza de la ciudad (Cooley y walt whitman) debe tener aproximadamente (más o menos 5%) el mismo porcentaje de estudiantes de minorías, que la ciudad entera. En la tabla B se da las distancias entre los distritos escolares y las escuelas. Cada escuela debe tener entre 300 y 500 estudiantes. Utilice la programación lineal para determinar la asignación de los estudiantes a cada escuela para minimizar la distancia total que tienen que viajar los estudiantes para llegar a ella.

Tabla B:

DISTRITO	COOLEY	WALT WHITMAN
1	1	2
2	2	1
3	1	1

Solución:

Primero vamos a encontrar la función objetivo, la escuela busca minimizar la distancia total recorrida por sus estudiantes desde su distrito a la escuela y cuantos estudiantes son mayorías y minoritarios, entonces vamos a llamar a la variable **estudiantes** *i,j,k*, donde i: estudiantes del distrito i (i=1,2,3) que pertenecen al grupo j (1:minoria,2:mayoria) y que estudian en la escuela k (1:Cooley,2:Walt Whitman).Si lo queremos expresar escalarmente con los datos de la tabla Nro 2

$$MIN=1*(\text{estudiantes}_{111}+\text{estudiantes}_{121})+2*(\text{estudiantes}_{211}+2*\text{estudiantes}_{221})+1*(\text{estudiantes}_{311}+\text{estudiantes}_{321})+2*(\text{estudiantes}_{112}+\text{estudiantes}_{222})+1*(\text{estudiantes}_{221}+\text{estudiantes}_{222})+1*(\text{estudiantes}_{312}+1*\text{estudiantes}_{322})$$

Esta fórmula nos explica que se está multiplicando la distancia recorrida de la escuela k con la cantidad de estudiantes de tipo j (1: minoria y 2: mayoria) en cada distrito i. Si lo queremos expresar matemáticamente seria:

$$MINIMIZAR\ \Sigma\ DISTANCIAik\ *\ ESTUDIANTEijK$$

Las Restricciones:

La primera restricción va ser con respecto a cantidad de alumnos de los dos tipos minoría y mayoría en los distritos i, según la encuesta realizada matemáticamente lo expresaríamos así.

$$For\ i\ (\ For\ j\ \ \Sigma\ EST\ UDIANTE\ ijK\ < CANTIDAD\ ij\ )$$

La segunda restricción es con respecto a la cantidad de estudiantes en cada escuela por dato nos dicen que lo mínimo numero de estudiantes para la dos escuelas es 300 estudiantes y la máxima 500 estudiantes, lo presentaremos matemáticamente así

$$For\ k\ \ \Sigma i\ \ \Sigma j\ \ ESTUDIANTE\ ijk\ >= Numero\ de\ estudiantes$$

La tercera restricción es con respecto al porcentaje de alumnos en cada escuela, la minoría representa el 25 % de la ciudad entera y la mayoría representa el 75%, como nos dice que cada escuela tiene un +- 5% de minoría de la minoría total de la ciudad, entonces cada escuela debe tomar entre el 20% y el 30% de estudiantes de las minorías .Representando matemáticamente

For k (Σi Σj ESTUDIANTE ijk >= PORCTIPO*(Σi Σj ESTUDIANTE ijk))

```
!colegios ;
SETS:
DIST/1..3/:;
TIPO/1..2/:;
COLE/1..2/:;
DT(DIST,TIPO):CANT;
DC(DIST,COLE):DISTA;
ALUMNOS(DIST,TIPO,COLE):X;
ENDSETS
DATA:
CANT=50,200,50,250,100,150;
DISTA=1,2,2,1,1,1;
ENDDATA
MIN=@SUM(ALUMNOS:DISTA*X);
!ALUMNOS POR DISTRITO Y POR TIPO;
@FOR(DT(I,J):@SUM(ALUMNOS(I,J,K):X(I,J,K))=CANT(I,J));
@FOR(COLE(K):@SUM(ALUMNOS(I,J,K):X(I,J,K))>300);
@FOR(COLE(K):@SUM(ALUMNOS(I,J,K):X(I,J,K))<500);
@FOR(COLE(K):@SUM(ALUMNOS(I,J,K)|J#EQ#1:X(I,J,K))>0.2*(
@SUM(DT(I,J):X(I,J,K))));
@FOR(COLE(K):@SUM(ALUMNOS(I,J,K)|J#EQ#1:X(I,J,K))<0.3*(
@SUM(DT(I,J):X(I,J,K))));
END
```

EL MODELO ALGEBRAICO:

```
MODEL:
   [_1] MIN= X_1_1_1 + 2 * X_1_1_2 + 2 * X_1_2_1 + X_1_2_2
+ X_2_1_1 + 2 *
   X_2_1_2 + 2 * X_2_2_1 + X_2_2_2 + X_3_1_1 + 2 * X_3_1_2
+ 2 * X_3_2_1 +
   X_3_2_2 ;
   [_2] X_1_1_1 + X_1_1_2 = 50 ;
   [_3] X_1_2_1 + X_1_2_2 = 200 ;
   [_4] X_2_1_1 + X_2_1_2 = 50 ;
   [_5] X_2_2_1 + X_2_2_2 = 250 ;
   [_6] X_3_1_1 + X_3_1_2 = 100 ;
   [_7] X_3_2_1 + X_3_2_2 = 150 ;
   [_8] X_1_1_1 + X_1_2_1 + X_2_1_1 + X_2_2_1 + X_3_1_1 +
X_3_2_1 <= 300;
   [_9] X_1_1_2 + X_1_2_2 + X_2_1_2 + X_2_2_2 + X_3_1_2 +
X_3_2_2 <= 500;
   [_10] 0.8 * X_1_1_1 - 0.2 * X_1_2_1 + 0.8 * X_2_1_1 -
0.2 * X_2_2_1 +
   0.8 * X_3_1_1 - 0.2 * X_3_2_1 >= 0 ;
   [_11] 0.8 * X_1_1_2 - 0.2 * X_1_2_2 + 0.8 * X_2_1_2 -
0.2 * X_2_2_2 +
   0.8 * X_3_1_2 - 0.2 * X_3_2_2 >= 0 ;
   [_12] 0.7 * X_1_1_1 - 0.3 * X_1_2_1 + 0.7 * X_2_1_1 -
0.3 * X_2_2_1 +
   0.7 * X_3_1_1 - 0.3 * X_3_2_1 <= 0 ;
   [_13] 0.7 * X_1_1_2 - 0.3 * X_1_2_2 + 0.7 * X_2_1_2 -
0.3 * X_2_2_2 +
   0.7 * X_3_1_2 - 0.3 * X_3_2_2 <= 0 ;
  END
```

Problema Nº 5: (TRASPORTE) (usando 4 subíndices):

La quality paper,fabricante y distribuidor de papel .produce 3 tipos diferentes de papel que se pueden fabricar tanto en la fábrica A,B, o C ubicados en lima.la empresa busca satisfacer la demanda establecida para las ciudades(Tacna y Cuzco) en donde se venden los productos. Además en cada ciudad existen 2 tipos de centros de distribución (supermercados y librerías) los cuales pertenecen a la corporación.los precios de ventas de los productos según donde fueron fabricados, la ciudad y el centro de distribución donde se va a vender son los siguientes:

TACNA							CUZCO					
	SUPERMEMRCADO			LIBRERIA			SUPERMERCADO			LIBRERIA		
	Prod 1	Prod 2	Prod 3	Prod 1	Prod 2	Prod 3	Prd 1	Prod 2	Prod 3	Prod 1	Prod 2	Prod 3
FAB A	13	15	17	11	12	15	14	12	13	15	13	12
FAB B	10	13	14	12	14	16	13	14	15	11	12	13
FAB C	12	11	13	10	11	13	11	13	14	12	13	14

LA corporación busca maximizar sus ventas y saber cómo va a distribuir sus productos tomando en cuenta la capacidad de producción de las fábricas, la demanda de las ciudades y la capacidad de los centros de distribución.

Capacidad de producción

	FAB	***FAB***	***FAB C***
PROD1	***75***	***65***	***70***
PROD2	***60***	***70***	***80***
PROD3	***65***	***75***	***75***

Demanda

	TACNA	***CUZCO***
PROD1	***73***	***67***
PROD2	***58***	***72***
PROD3	***67***	***74***

Capacidad de los centros de distribución

	TACNA	***CUZCO***
SUPER MERCADO	150	***140***
LIBRERÍA	***130***	150

Solución:

Xi,j,k,l=cantidad de productos fabricados en la fabrica i(i=A,B,C),en la ciudad si en TACNA, si y CUZCO**(j=TC,CZ)** distribuidos en SUPER MERCADO y LIBRERÍA (**K=SM,L**) el producto L(**L=P1,P2,P3**).

FUNCION OBJETIVO:

MAX $\sum_{I=A,}^{C}\sum_{J=TC}^{CZ}\sum_{K=SM}^{L}\sum_{L=P1}^{P4} X_{I,J,K,L} * PRECIO_{I,J,K,L}$, donde PRECIO es el precio de venta de cada producto.

MAXZ=12 * XA,P1,SM,TC + 15* XA,P1,SM,CZ + 17 * XA,P1,L,TC
+11 * XA,P1,L,CZ + 12 * XA,P2,SM,TC + 15 * XA,P2,SM,CZ
+14*XA,P2,L,TC + 12 * XA,P2_L,CZ + 13 * XA,P3,SM,TC +
15 * XA,P3,SM,CZ + 13 * XA,P3,L,TC + 12 * XA,P3,L,CZ +
10 * XB,P1,SM,TC + 13 *XB,P1,SM,CZ + 14 * XB,P1,L,TC +
12 * XB, P1, L, CZ + 14 * XB,P2,SM,TC + 16 * XB,P2,SM,CZ +
13 * XB,P2,L,TC + 14 * XB,P2,L,CZ + 15 * XB,P3,SM,TC +
11 * XB,P3,SM,CZ + 12 * XB,P3,L,TC + 13 * XB,P3,LCZ +
12 * XC,P1,SM,TC + 11 * XC,P1,SM,CZ + 13 * XC,P1,L,TC +
10 *XC,P1,L,CZ + 11 * XC,P2,SM,TC + 13 * XC,P2,SM,CZ +
11 * XC,P2,LTC +13 * XC,P2,L,CZ + 14 * X,C,P3,SM,TC +
12 * XC,P3,SM,CZ + 13 *XC,P3,L,TC + 14 * XC,P3,LCZ ;

SUJETO A:

Capacidad de producción:

$$\sum_{K=SM}^{L}\sum_{L=P1}^{P4} X_{I,J,K,L}$$

Para I=A,J=P1:

XA,P1_SM,TC + XA,P1,SM,CZ + XA,P1,L,TC + XA,P1,L,CZ <= 75 ;

Para I=A,J=P2:
XA,P2,SM,TC + XA,P2,SM,CZ + XA,P2,L,TC + XA,P2,L,CZ <= 60 ;

Para I=A,J=P3:
XA,P3,SM,TC + XA,P3,SM,CZ + XA,P3,L,TC + XA,P3,L,CZ <= 65 ;

Para I=B,J=P1:
XB,P1,SM,TC + XB,P1,SM,CZ + XB,P1,L,TC + XB,P1,L,CZ <= 65 ;

Para I=B,J=P2:
XB,P2,SM,TC + XB,P2,SM,CZ + XB,P2,L,TC + XB,P2,L,CZ <= 70 ;

Para I=B,J=P3:
XB,P3,SM,TC + XB,P3,SM,CZ + XB,P3,L,TC + XB,P3,L,CZ <= 75 ;

Para I=C,J=P1:
XC,P1,SM,TC + XC,P1,SM,CZ + XC,P1,L,TC + XC,P1,L,CZ <= 70 ;

Para I=C,J=P2:
XC,P2,SM,TC + XC,P2,SM,CZ + XC,P2,L,TC + XC,P2,LCZ <= 80 ;

Para I=C,J=P3:
XC,P3,SM,TC + XC,P3,SM,CZ + XC,P3,L,TC + XC,P3,L,CZ <= 75

Demanda:

$$\sum_{I=A}^{C}\sum_{K=SM}^{L} X_{I,J,K,L}$$

Para J=TC, L=P1:

XA,P1,SM,TC + XA,P1,L,TC + XB,P1,SM,TC + XB,P1,L,TC +XC,P1,SM,TC + XC, P1, L, TC >= 73;

Para J=CZ, L=P1:

XA,P1,SM,CZ + XA,P1,L,CZ + XB,P1,SM,CZ + XB,P1,L,CZ + XC,P1,SM,CZ + XC,P1,L,CZ >= 67 ;

Para J=TC, L=P2:

XA,P2,SM,TC + XA,P2,L,TC + XB,P2,SM,TC + XB,P2,L,TC + XC,P2,SM,TC + XC,P2,L,TC >= 58 ;

Para J=CZ, L=P2:

XA,P2,SM,CZ + XA,P2,L,CZ + X,B,P2,SM,CZ + XB,P2,L,CZ + XC,P2,SM,CZ + XC,P2,L,CZ >= 72 ;

Para J=TC, L=P3:

XA,P3,SM,TC + XA,P3,L,TC + XB,P3,SM,TC + XB,P3,L,TC +
XC,P3,SM,TC + XC,P3,L,TC >= 67 ;

Para J=CZ, L=P3:

XA,P3_SM,CZ + XA,P3,L,CZ + XB,P3,SM,CZ + XB,P3,L,CZ +
XC,P3,SM,CZ + XC,P3,L,CZ >= 74 ;

Capacidad de los centros de distribución:

$$\sum_{I=A}^{C}\sum_{L=P1}^{P4} X_{I,J,K,L}$$

Para J=TC, K=SM:

XA,P1,SM,TC + XA,P2,SM,TC + XA,P3,SM,TC + XB,P1,SM,TC +
XB,P2,SM,TC + XB,P3,SM,TC + XC,P1,SM,TC + XC,P2,SM,TC +
XC,P3,SM,TC<=150

Para J=CZ, K=SM:

XA,P1,SM,CZ + X,A,P2,SM,CZ + X,A,P3,SM,CZ + X,B,P1,SM,CZ +
X_B_P2_SM_CZ + XB,P3_SM,CZ + XC,P1,SM,CZ + XC,P2,SM,CZ +
XC,P3,SM,CZ <= 140 ;

Para J=TC, K=L:

XA,P1,L,TC + XA,P2,L,TC + X,A,P3,L,TC + XB,P1,L,TC +XB,P2,L,TC +
XB,P3,L,TC + XC,P1,L,TC + XC,P2,L,TC + XC,P3,L,TC <=130 ;

Para J=CZ, K=L:

XA,P1,L,CZ + XA,P2,L,CZ + XA,P3,L,CZ + XB,P1,L,CZ +XB,P2,L,CZ +
XB,P3,L,CZ + XC,P1,L,CZ + XC,P2,L,CZ + XC,P3,L,CZ <=150 ;

EL EQUIVALENTE EN LINGO ES:

```
SETS:
! FABRICAS DONDE SE VA A PRODUCIR EL PAPEL;
FABRICAS/A B C/: ;
! PRODUCTOS A SER PRODUCIDO POR LAS FÁBRICAS;
PRODUCTOS/P1 P2 P3/: ;
! CENTRO DE DISTRIBUCION DE LOS PRODUCTOS;
CDIST/SM L/:;
! CIUDADES DONDE VAN A SER DISTRIBUIDOS LOS PRODUCTOS;
CIUDAD/TC CZ/:;
! REQUERIMIENTO DE PRODUCTOS PARA UNA FABRICA ,EN UNA
CIUDAD,EN UN DETERMINADO SUPERMERCADO;
FPCC (FÁBRICAS, PRODUCTOS, CDIST, CIUDAD): PRECIO, X;
! CAPACIDAD DE PRODUCCION DE UN TERMENINADOM PRODUCTO
POR FÁBRICA;
FABPRO (FÁBRICAS, PRODUCTOS): CAPACIDAD;
! DEMANDA DE PRODUCCION;
PROCIU(PRODUCTOS,CIUDAD):DEMANDA;
! CAPACIDAD DE LOS CENTROS DE DISTRIBUCION;
CDCIUDAD (CDIST, CIUDAD): CAPACCD;
ENDSETS

DATA:
CAPACIDAD=75,60,65,
          65,70,75,
          70,80,75;
DEMANDA=   73,67,
          58,72,
          67,74;
CAPACCD=   150,140,
          130,150;
PRECIO=    12,15,17,11,12,15,14,12,13,15,13,12,
          10,13,14,12,14,16,13,14,15,11,12,13,
          12,11,13,10,11,13,11,13,14,12,13,14;
ENDDATA
!FUNCION OBJETIVO ,MAXIMIZANDO LA UTILIDAD;
[OBJETIVO]MAX =@SUM(FPCC:PRECIO*X);
!RESTRICCION DE LA CAPACIDAD DE DISTRIBUCION ;
@FOR(FABPRO(I,J):@SUM(FPCC(I,J,K,L):X(I,J,K,L))<=CAPACIDAD(I,J));
!RESTRICCION DE LA DEMANDA;
```

```
@FOR(PROCIU(J,L):@SUM(FPCC(I,J,K,L):X(I,J,K,L))>=DEMANDA(J,L));
! RESTRICCION DE LA CAPACIDAD DE LOS CENTROS DE DISTRIBUCION;
@FOR(CDCIUDAD(K,L):@SUM(FPCC(I,J,K,L):X(I,J,K,L))<=CAPACCD(K,L)
);
END
```

EL MODELO ALGEBRAICO:

```
MODEL:
  [OBJETIVO] MAX= 12 * X_A_P1_SM_TC + 15 * X_A_P1_SM_CZ + 17 *
X_A_P1_L_TC
  + 11 * X_A_P1_L_CZ + 12 * X_A_P2_SM_TC + 15 * X_A_P2_SM_CZ + 14 *
  X_A_P2_L_TC + 12 * X_A_P2_L_CZ + 13 * X_A_P3_SM_TC + 15 *
X_A_P3_SM_CZ +
  13 * X_A_P3_L_TC + 12 * X_A_P3_L_CZ + 10 * X_B_P1_SM_TC + 13 *
  X_B_P1_SM_CZ + 14 * X_B_P1_L_TC + 12 * X_B_P1_L_CZ + 14 *
X_B_P2_SM_TC +
  16 * X_B_P2_SM_CZ + 13 * X_B_P2_L_TC + 14 * X_B_P2_L_CZ + 15 *
  X_B_P3_SM_TC + 11 * X_B_P3_SM_CZ + 12 * X_B_P3_L_TC + 13 *
X_B_P3_L_CZ +
  12 * X_C_P1_SM_TC + 11 * X_C_P1_SM_CZ + 13 * X_C_P1_L_TC + 10 *
  X_C_P1_L_CZ + 11 * X_C_P2_SM_TC + 13 * X_C_P2_SM_CZ + 11 *
X_C_P2_L_TC +
  13 * X_C_P2_L_CZ + 14 * X_C_P3_SM_TC + 12 * X_C_P3_SM_CZ + 13 *
  X_C_P3_L_TC + 14 * X_C_P3_L_CZ ;
  [_2] X_A_P1_SM_TC + X_A_P1_SM_CZ + X_A_P1_L_TC + X_A_P1_L_CZ
<= 75 ;
  [_3] X_A_P2_SM_TC + X_A_P2_SM_CZ + X_A_P2_L_TC + X_A_P2_L_CZ
<= 60 ;
  [_4] X_A_P3_SM_TC + X_A_P3_SM_CZ + X_A_P3_L_TC + X_A_P3_L_CZ
<= 65 ;
  [_5] X_B_P1_SM_TC + X_B_P1_SM_CZ + X_B_P1_L_TC + X_B_P1_L_CZ
<= 65 ;
  [_6] X_B_P2_SM_TC + X_B_P2_SM_CZ + X_B_P2_L_TC + X_B_P2_L_CZ
<= 70 ;
```

```
  [_7] X_B_P3_SM_TC + X_B_P3_SM_CZ + X_B_P3_L_TC + X_B_P3_L_CZ
<= 75 ;
  [_8] X_C_P1_SM_TC + X_C_P1_SM_CZ + X_C_P1_L_TC + X_C_P1_L_CZ
<= 70 ;
  [_9] X_C_P2_SM_TC + X_C_P2_SM_CZ + X_C_P2_L_TC + X_C_P2_L_CZ
<= 80 ;
  [_10] X_C_P3_SM_TC + X_C_P3_SM_CZ + X_C_P3_L_TC + X_C_P3_L_CZ
<= 75 ;
  [_11] X_A_P1_SM_TC + X_A_P1_L_TC + X_B_P1_SM_TC + X_B_P1_L_TC
+
  X_C_P1_SM_TC + X_C_P1_L_TC >= 73 ;
  [_12] X_A_P1_SM_CZ + X_A_P1_L_CZ + X_B_P1_SM_CZ + X_B_P1_L_CZ
+
  X_C_P1_SM_CZ + X_C_P1_L_CZ >= 67 ;
  [_13] X_A_P2_SM_TC + X_A_P2_L_TC + X_B_P2_SM_TC + X_B_P2_L_TC
+
  X_C_P2_SM_TC + X_C_P2_L_TC >= 58 ;
  [_14] X_A_P2_SM_CZ + X_A_P2_L_CZ + X_B_P2_SM_CZ + X_B_P2_L_CZ
+
  X_C_P2_SM_CZ + X_C_P2_L_CZ >= 72 ;
  [_15] X_A_P3_SM_TC + X_A_P3_L_TC + X_B_P3_SM_TC + X_B_P3_L_TC
+
  X_C_P3_SM_TC + X_C_P3_L_TC >= 67 ;
  [_16] X_A_P3_SM_CZ + X_A_P3_L_CZ + X_B_P3_SM_CZ + X_B_P3_L_CZ
+
  X_C_P3_SM_CZ + X_C_P3_L_CZ >= 74 ;
  [_17] X_A_P1_SM_TC + X_A_P2_SM_TC + X_A_P3_SM_TC +
X_B_P1_SM_TC +
     X_B_P2_SM_TC + X_B_P3_SM_TC + X_C_P1_SM_TC +
     X_C_P2_SM_TC + X_C_P3_SM_TC
  <= 150 ;
  [_18] X_A_P1_SM_CZ + X_A_P2_SM_CZ + X_A_P3_SM_CZ +
X_B_P1_SM_CZ +
  X_B_P2_SM_CZ + X_B_P3_SM_CZ + X_C_P1_SM_CZ + X_C_P2_SM_CZ +
X_C_P3_SM_CZ
  <= 140 ;
  [_19] X_A_P1_L_TC + X_A_P2_L_TC + X_A_P3_L_TC + X_B_P1_L_TC +
  X_B_P2_L_TC + X_B_P3_L_TC + X_C_P1_L_TC + X_C_P2_L_TC +
X_C_P3_L_TC <=
  130 ;
```

```
  [_20] X_A_P1_L_CZ + X_A_P2_L_CZ + X_A_P3_L_CZ + X_B_P1_L_CZ +
  X_B_P2_L_CZ  +  X_B_P3_L_CZ  +  X_C_P1_L_CZ  +  X_C_P2_L_CZ  +
X_C_P3_L_CZ <=
  150 ;
 END
```

HACIENDO CORRER EL PROGRAMA CON LINGO 10.0

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                    8260.000
  Total solver iterations:                  20


                Variable           Value        Reduced Cost
       PRECIO( A, P1, SM, TC)       12.00000          0.000000
       PRECIO( A, P1, SM, CZ)       15.00000          0.000000
        PRECIO( A, P1, L, TC)       17.00000          0.000000
        PRECIO( A, P1, L, CZ)       11.00000          0.000000
       PRECIO( A, P2, SM, TC)       12.00000          0.000000
       PRECIO( A, P2, SM, CZ)       15.00000          0.000000
        PRECIO( A, P2, L, TC)       14.00000          0.000000
        PRECIO( A, P2, L, CZ)       12.00000          0.000000
       PRECIO( A, P3, SM, TC)       13.00000          0.000000

A ASI SUCESIVAMENTE……….
```

Problema en LINGO exportando datos en Excel

Los pasos que se sigue para crear una base de datos en EXCEL son:

1. Crear una carpeta en C, por ejemplo: USO DEL LINGO CON EXCEL.
2. Crear una Hoja de cálculo denominada COLHO siguiendo la secuencia:

3. C:\COLHO hacemos doble click , se continúa con el ingreso de la información para resolver el problema, los pasos que se siguen son los siguientes:

Así como en SETS del programa LINGO se generaron los conjuntos, en EXCEL se crean las registros con los rangos con estos mismos nombres.

Hacer clic en X (cerrar)/si/Guardar Como/B/Aceptar

Finalmente se utiliza otra función de conexión @OLE(), para transferir datos de y a la hoja de cálculo .
Se ingresa la información, en la hoja de cálculo tal como se indica en el siguiente programa,

La compañía Coelho S.A. fabrica los motores. El departamento de mercadeo está previendo ventas de 6100 unidades del Roncam de motor el próximo semestre. Esto es una nueva demanda y la compañía tendrán que probar su capacidad de producción. Los motores tipo Roncam el montaje consta de tres componentes: el cuerpo, la base y el armado. Algunos de estos componentes ellos pueden comprarse de otros proveedores, si hay limitaciones de Coelho S.A. Los costos de la producción y la adquisición cuesta en $/unidad se resume en la tabla siguiente.

Componente	Costo de Adquisición (en minutos)	Costo de Producción (en minutos)
Cuerpo	10	8
Base	20	20
Armado	16	16

La fábrica de la Compañía Coelho S.A. tiene tres departamentos. El requisito de tiempo en minutos que cada componente consume en cada departamento se resume en la tabla siguiente. El tiempo disponible en la compañía para cada componente está rayado en la última línea.

Componente	Tiempo de	Tiempo de	Tiempo de

	Preparación	Molde	Fabricación
Cuerpo	2	4	2
Base	5	2	4
Armado	4	5	5
Disponibilidad	49200	49200	49200

El modelo de decisión del problema se da debajo, dónde el Xij representa la cantidad de componentes el i=(1=si el componente es el Cuerpo, 2=si el componente es la Base y 3=si el componente es la Armado) y proviene de j = (A=si el componente se adquiera y F= Si el componente se fabrica).

$$\text{Min} \quad 8X_{1F} + 20X_{2F} + 1\,0X_{3F} + 10\,X_{1A} + 20\,X_{2A} + 16X_{3A}$$

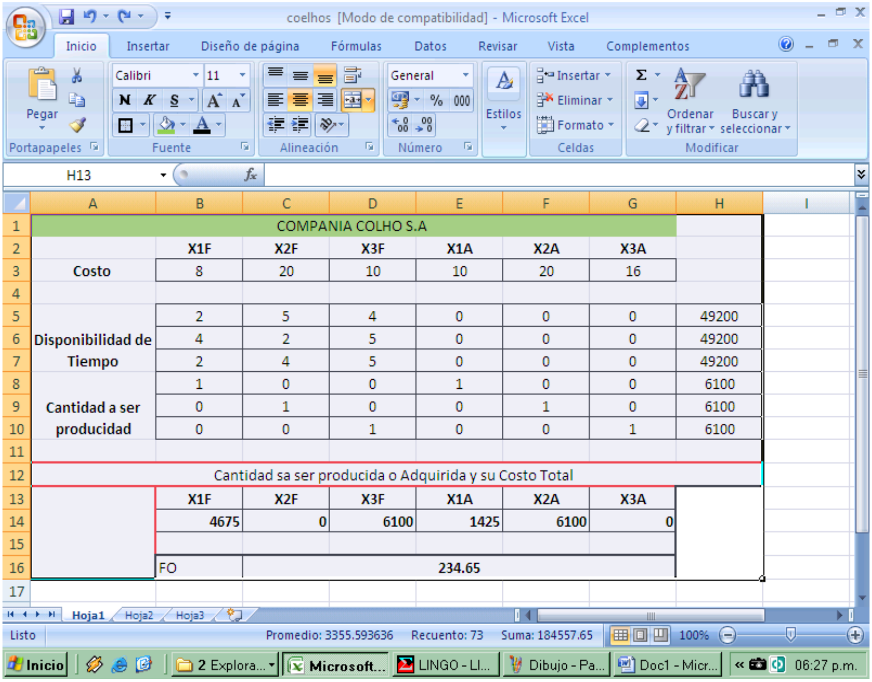
$$\begin{aligned} \text{S.A} \quad & 2\,X_{1F} + 5X_{2F} + 4X_{3F} <= 49200 \\ & 4X_{1F} + 2X_{2F} + 5\,X_{3F} <= 49200 \\ & 2\,X_{1F} + 4X_{2F} + 5\,X_{3F} <= 49200 \\ & X_{1F} + X_{1A} <= 6100 \\ & X_{2F} + X_{2A} <= 6100 \\ & X_{3F} + X_{3A} <= 6100 \end{aligned}$$

$$X_{1F}\,,\ X_{2F},\ X_{3F}\,,\ X_{1A},\ X_{2A},\ X_{3A} >= 0$$

El modelamiento en Lingo para este PPL se presenta en el Figura 1. A diferencia de este modelo de otros está el hecho de nosotros estamos leyendo las constantes de los SETS de la sección a través de una hoja de cálculo de Excel y exportando el resultado después para el mismo, utilizando las DATA de la sección. Tanto la lectura como la exportación de los datos para la hoja de cálculo se hace a través del orden @ OLE ('nombre de la Hoja de Calculo.xls', 'el nombre del grupo de celdas’). Para el uso de una hoja de cálculo de Excel, nosotros debimos un nombre al definir para cada de grupo de celdas referenciadas en el modelo.
Considerado la hoja de cálculo presentada en la figura 2, nosotros tenemos los grupos siguientes de celdas con sus nombres respectivos:

Conjunto de Celdas	Nombre
B3 a G3	Costo
H5 a HI7	Coef1
H8 a H10	Coef2
C16	FO
B5 a G7	Rest1

B8 a G10	Rest2
B14 a G14	x




```
DATA:
n=6;
m=3;
ENDDATA
SETS:
v1/1.. n/:c,x;
v2/1..m/:b,e;
m1(v2,v1):a,d;
ENDSETS
DATA:
c,a,d,b,e=@OLE('C:\Samples\coelhos.xls','custo','Rest1'
,'Rest2','Coef1','Coef2');
ENDDATA
MIN=FO;
```

```
FO=@SUM(v1(j):c(j)*x(j));
@FOR(v2(i):@sum(v1(j):a(i,j)* x(j))<=b(i));
@FOR(v2(i):@sum(v1(j):d(i,j)* x(j))>=e(i));

DATA:
@OLE('C:\Samples\coelhos.xls','x','FO')= x,FO;
ENDDATA
```

Observación:

-Intenta poner la Hoja de cálculo sin ruta te va salir una venta diciéndote "OPEN FILE" si no pones la ruta tiene que estar el archivo abierto, para exportar los resultados.

Si no quieres que el archivo se abra inmediatamente después de la compilación tienes que poner la ruta como en la figura, esta ruta puede ser cualquiera donde tu decidas guardar tu archivo.

```
Objective value:                                    234650.0
  Total                  solver                  iterations:
3



    Export Summary Report
    ---------------------
    Transfer Method:       OLE BASED
    Workbook:              C:\Samples\coelhos.xls
    Ranges Specified:              2
        x
        FO
    Ranges Found:                  2
    Range Size Mismatches:         0
    Values Transferred:            7


                       Variable                           Value
Reduced Cost
                              N                       6.000000
0.000000
```

```
                                  M                    3.000000
0.000000
                                 FO                    234650.0
0.000000
                              X(  1)                   4675.000
0.000000
                              X(  2)                   0.000000
1.000000
                              X(  3)                   6100.000
0.000000
                              X(  4)                   1425.000
0.000000
                              X(  5)                   6100.000
0.000000
                              X(  6)                   0.000000
3.500000
```

EL PROBLEMA DE LAS BARRAS DE CHOCOLATE

Los requerimientos para la producción de 3 tipos de barras de chocolate así como la cantidad de recursos y la utilidad de cada tipo se muestran en el siguiente cuadro:

MATERIA PRIMA	***B1***	***B2***	***B3***	***CANTIDAD DISPONIBLE***
AZUCAR	1	1	1	50
CHOCOLATE	2	3	1	100
GANANCIA UNITARIA	3	7	5	

SOLUCION.

Xi = Cantidad de barras de tipo i a producir; (i = 1, 2,3)

FO max 3X1+7X2 +5X3

Sujeto a:

$$X1+ X2 + X3 < 50$$

$$2X1+ 3X2 + X3 < 100$$

SOLUCIÓN EN LINGO

```
SETS:
!BARRAS,PRODUCCION Y GANANCIA;
!INGREDIENTES (AZUCAR,CHOCOLATE) Y DISPONIBILIDAD;
!CANTIDAD USADA POR BARRA;
B/B1,B2,B3/:P,G;
IN/A,CH/: D;
CA(IN,B):USO;
ENDSETS
MAX= @SUM(B:P*G);
@FOR(IN(I):@SUM(B(J):USO(I,J)*P(J))<=D(I));
DATA:
G=3,7,5;
D=50,100;
USO= 1,1,1,
     2,3,1;
ENDDATA
END
```

1) IMPORTAR Y EXPORTAR DATOS DE EXCEL

Para importar y exportar datos de una hoja de cálculo, LINGO tiene una función, @OLE( ) .

Para pasar los datos de la sección DATA a EXCEL se procede como sigue:

1.1 En EXCEL

Se tiene por ejemplo el conjunto de datos G = 3,7,5 del problema de las barras de chocolate, se digita en cada casillero, prescindiendo de la coma, un numero de acuerdo al orden establecido.

Con el ratón se marca las celdas del un conjunto de datos (3 7 5)

Con INSERTAR, NOMBRE, DEFINIR del menú, se define el nombre del conjunto (Ejemplo: G)

En LINGO

En la sección DATA, para importar información, se escribe el nombre del conjunto que se iguala a la función @OLE señalando la ruta donde se ubican los datos y si se desea exportar resultados a un lugar predefinido en EXCEL se escribe primero la función y esta se iguala al nombre de las celdas definidas en EXCEL

SOLUCION COLOCANDO LOS DATOS EN EXCEL

```
SETS:
!BARRAS,PRODUCCION Y GANANCIA;
!INGREDIENTES (AZUCAR,CHOCOLATE) Y DISPONIBILIDAD;
!CANTIDAD USADA POR BARRA;
B/B1,B2,B3/:P,G;
IN/A,CH/: D;
CA(IN,B):USO;
ENDSETS

MAX= @SUM(B:P*G);
@FOR(IN(I):@SUM(B(J):USO(I,J)*P(J))<=D(I));

DATA:
G=@OLE('C:\MIS DOCUMENTOS\BARRAS.XLS');
D=@OLE('C:\MIS DOCUMENTOS\BARRAS.XLS');
USO= @OLE('C:\MIS DOCUMENTOS\BARRAS.XLS');
!RESPUESTA DE PRODUCCION DE BARRAS;
@OLE('C:\MIS DOCUMENTOS\BARRAS.XLS')=P;
```

```
ENDDATA
END
```

2) IMPORTAR Y EXPORTAR DATOS EN LA BASE DE DATOS ACCESS

Los pasos que se sigue para crear una base de datos en ACCESS son:

- Crear una carpeta en C, por ejemplo: USO DEL LINGO CON ACCESS.
- Crear una base de datos en ACCESS denominada BARRA con: INICIO CONFIGURACION PANEL DE CONTROL (clic) FUENTE DE DATOS ODBC(doble clic)DSN USUARIO nombre MS ACCESS DATABASE, controlador MICRSOFT ACCESS DRIVER (*.mdb) AGREGAR DRIVER DO MICROSOFT ACCESS(*.mdb) FINALIZAR.
- En NOMBRE DE ORIGEN DE DATOS, se escribe: BARRA /BASE DE DATOS CREAR C:\(doble clic)ubicar USO DEL LINGO CON ACCESS(doble clic) NOMBRE DE BASE DE DATOS se escribe BARRA.mdb ACEPTAR ACEPTAR, ACEPTAR.

Creada la base de datos BARRA se continúa con el ingreso de la información para resolver el problema, los pasos que se siguen son los siguientes:

- En la carpeta USO DEL LINGO CON ACCESS localizar la base de datos BARRA e ingresar a la base haciendo clic.
- Así como en SETS del programa LINGO se generaron los conjuntos B, IN y CA, en ACCESS se crean las tablas con estos mismos nombres.
- Para crear la primera tabla B se procede como sigue: Crear una tabla utilizando el asistente/Nuevo/Vista Diseño/Aceptar/en Nombre del Campo

, colocar BB/en Tipo de Datos: texto, se sigue nombrando los demás campos:

Nombre del Campo	Tipo de Datos
BB	Texto
P	Texto
G	numérico

Hacer clic en X (cerrar)/si/Guardar Como/B/Aceptar

Las demás tablas se crean bajo el mismo procedimiento y para llenar la información en estas se ingresa a cada una de estas haciendo doble clic y luego se escribe los datos quedando estas como a continuación se indica:

B		
BB	P	G
B1	P1	3
B2	P2	7
B3	P3	5

IN		
II		D
A		50
CH		100

CA		
IN	B	USO
A	B1	1
A	B2	1
A	B3	1
CH	B1	2
CH	B2	3
CH	B3	1

Finalmente en la sección DATA del programa LINGO, de manera semejante a lo ocurrido en EXCEL, aquí se utiliza otra función de conexión @ODBC(), para transferir datos de y a una base de datos. Las bases de datos de mayor uso como Oracle, Paradox, DB/2, MS/Access y SQL Server, son compatibles con la convención ODBC.

Se ingresa la información, en DATA, tal como se indica en el siguiente programa, se deberá observar que en la sección SETS no se tiene los elementos de B y de IN es por ello que estos, además de G, D y USO deberán ser señalados en DATA.

```
SETS:
!BARRAS,PRODUCCION Y GANANCIA;
!INGREDIENTES (AZUCAR,CHOCOLATE) Y DISPONIBILIDAD;
!CANTIDAD USADA POR BARRA;
B:P,G;
IN: D;
CA(IN,B):USO;
ENDSETS
MAX= @SUM(B:P*G);
@FOR(IN(I):@SUM(B(J):USO(I,J)*P(J))<=D(I));
DATA:
B=@odbc('BARRA','B','BB');
G=@odbc('BARRA','B','G');
IN=@odbc('BARRA','IN','II');
D=@odbc('BARRA','IN','D');
USO=@odbc('BARRA','CA','USO');
ENDDATA
END
```