P1.- a)

Dem: Dado el kernel $K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\int K(u)du = 1$ y $K(x) = K(-x)$ definimos la función base

$$w(x, x_i) = \frac{K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_j - x}{h}\right)}$$

Al reemplazar esta función base en 1), obtenemos para el estimador $\hat{r}$, que

$$\hat{r}(x) = \sum_{i=1}^{n} w(x, x_i)\, y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i\, K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_j-x}{h}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\, K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_j-x}{h}\right)}$$

Ahora, si tomamos un kernel gaussiano, se sigue que

$$\hat{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right) y_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right) y_i}{\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right)}$$

Notemos que,

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{-(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right) y_i}{\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{-(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \lim \exp\left(\frac{-(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \lim \exp\left(\frac{-(x-x_i)^T(x-x_i)}{2\sigma^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Mientras que para un Kernel cualquiera, $K(x, y)$ debe ser estimado a partir de las observaciones que tengamos

P1-b)

Dem: Si suponemos que $\int u K(u) du = 0$, veamos que

$$\hat{f}(x) = \frac{\int y \hat{p}(x,y) dy}{\hat{p}(x)}$$

corresponde al estimador de a), donde

·) $\hat{p}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$

·) $\hat{p}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h^2} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) K\left(\frac{y-y_i}{h}\right)$

Notemos que

$$E(\hat{p}(x)) - p(x) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) - p(x)$$

$$= \frac{1}{h} E\left(K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) - p(x)$$

$$= \frac{1}{h} \int K\left(\frac{x-x_1}{h}\right) p(x) dx - p(x)$$

tomando $y = \frac{x-x_i}{h}$, se sigue que

$$E(\hat{p}(x)) - p(x) = \frac{1}{\cancel{h}} \int K(y) p(x_i + hy) dy \, \cancel{h} \; - p(x)$$

$$= \int K(y) \, p(x_i + hy) dy - p(x)$$

tomando una expansión de taylor, con $h \to 0$,

$$\mathbb{E}(\hat{p}(x)) - p(x) = \int K(y)\, p(x-hy)\, dy - p(x)$$

$$= \int K(y)\left(p(x) + hy \cdot p'(x) + o(h)\right) dy - p(x)$$

$$= \int K(y)\, p(x)\, dy + \int K(y)\, hy \cdot p'(x)\, dy + o(h) - p(x)$$

$$= p(x) \int K(y)\, dy + p'(x)\, h \int y\, K(y)\, dy + o(h) - p(x),$$

pero sabemos que $\int K(y)\,dy = 1$ y $\int y K(y)\,dy = 0$. luego

$$\mathbb{E}(\hat{p}(x)) - p(x) = p(x) + o(h) - p(x) = o(h)$$

Con $h \to 0$, $\mathbb{E}(\hat{p}(x)) = p(x)$.

Por otra parte,

$$Var(\hat{p}(x)) = Var\left(\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)\right) = \frac{1}{nh^2} Var\left(K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{nh^2} \mathbb{E}\left(K^2\left(\frac{x_i - x}{h}\right)\right) = \frac{1}{nh^2} \int K^2\left(\frac{\tilde{x} - x}{h}\right) p(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$= \frac{1}{nh} \int K^2(y)\left(p(x) + hy\, p'(x) + o(h)\right) dy$$

$$= \frac{1}{nh}\left(p(x) \int K^2(y)\, dy\right) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

Además, reemplazando las expresiones de $\hat{p}(x)$ y $\hat{p}(x,y)$, tenemos

$$\hat{f}(x) = \frac{\int y \, \hat{p}(x,y) dy}{\hat{p}(x)}$$

$$= \frac{\int y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h^2} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \int \frac{y}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}$$

Luego, notemos que

$$\int \frac{y}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy = \int \frac{y-y_i}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy + \int \frac{y_i}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy,$$

dado que $\int u K(u) du = 0$ y $\int K(z) dz = 1$ se sigue que

$$\int \frac{y}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy = y_i \int \frac{1}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy \overset{y = hz + y_i}{=} y_i \int K(z) dz = y_i$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{h} K\left(\frac{y-y_i}{h}\right) dy = y_i$$

$$\Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}$$

lo cual coincide con la parte a).