Universidad de Chile
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

Tarea 1: Preparación Teórica, Laboratorio 1
Análisis Numérico de EDP: Teoría y Laboratorio MA5307-2023

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Nicolás Barnafi, Sebastián Tapia, Tomás Banduc

1. Parte teórica Laboratorio 1

1.1. Ecuación del Calor en estado estacionario

Considere la ecuación del calor en estado estacionario dada por

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{sobre } \Omega = [0,1]^2 \\ u(0,y) = u(1,y) &= 0 & \text{para } y \in [0,1] \\ u(x,0) &= 0 & \text{para } x \in [0,1] \\ u(x,1) &= g(x) & \text{para } x \in [0,1] \end{aligned} \tag{1}$$

donde $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ es tal que $g(0) = g(1) = 0$.

Problema 1. Demuestre, utilizando el Método de Separación de Variables y $f \equiv 0$, que el problema (1) tiene solución.

Sea $N \in \mathbb{N}$, considere la aproximación del cuadrado unitario dado por la malla de puntos

$$\Omega_h = \{(x_j, y_k) \mid j \in \{0, 1, \ldots, N+1\} \wedge k \in \{0, 1, \ldots, N+1\}\}$$

donde $x_j = jh$, $y_k = kh$ y $h = \dfrac{1}{N+1}$.
Para aproximar el operador Laplaciano de la ecuación (1), se define el operador *Laplaciano Discretizado* por 5 puntos como:

$$\Delta_N u_{j,k} = \frac{1}{h^2}\left(u_{j+1,k} + u_{j-1,k} - 2u_{jk}\right) + \frac{1}{h^2}\left(u_{j,k-1} + u_{j,k+1} - 2u_{jk}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{-4u_{jk} + \left(u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1}\right)}{h^2} \tag{3}$$

donde u_{jk} aproxima a $u\left(x_j, y_k\right)$.

Problema 2. Demuestre que, si $u \in \mathcal{C}^4\left(\overline{\Omega}\right)$, entonces existe una constante C que solo depende de u y Ω tal que para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$ y todo $k \in \{1, \ldots, N\}$

$$\left|\Delta_N u_{j,k} - \Delta u\left(x_j, y_k\right)\right| \leq C h^2$$

Problema 3. Dadas las condiciones de borde de tipo Dirichlet, las incógnitas del problema discreto son solo los N^2 puntos interiores. Si se enumeran dichos puntos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, entonces es posible listar sin ambigüedad los puntos antes mencionados mediante la regla

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}_h)_n &= u_h(x_j, y_k) \\ n &= (k-1)N + j \end{aligned}$$

Asimismo, se define $\boldsymbol{u}$ como $(\boldsymbol{u})_n = u(x_j, y_k)$.
Reduzca el problema discreto a un sistema lineal de la forma

$$\boldsymbol{A}_h \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{b}_h$$

donde $\boldsymbol{A}_h \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ es una matriz definida por bloques y

$$\boldsymbol{A}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_4 & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{L}_4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{L}_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2} \qquad \boldsymbol{L}_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{f}_h + \frac{1}{h^2} \boldsymbol{g}_h$$

donde $(\boldsymbol{f}_h)_n = f(x_j, y_k)$ y

$$\boldsymbol{g}_h(x_j, y_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq N+1 \\ g(x_j) & \text{si } k = N+1 \end{cases}$$

1.2. Dominio Perforado

En lo que sigue trabajaremos con el dominio de la Figura 2, donde la discretiazación queda definida por la grilla ilustrada.

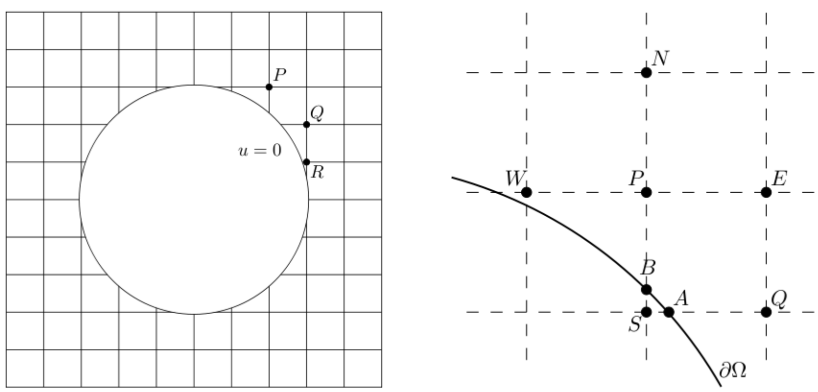

FIGURA 1.1: Dominio dado por $\Omega = [0, 1]^2 \setminus B((0,5, 0,5), 0,3)$.

Queda claro que, en este caso, uno de los problemas fundamentales es definir los valores de $\Delta_N u$ en los puntos que quedan cercanos a la perforación circular. Para ejemplificar lo anterior consideremos el punto P, el cual tiene tres vecinos dentro del dominio: N, W y E. Lamentablemente S queda fuera de Ω y no es posible utilizar la discretización en 5 puntos pues, aunque u_{xx} queda correctamente definido, u_{yy} utiliza S y por ende no se puede calcular.
Para resolver el problema planteado se propone el siguiente esquema : encontrar una combinación lineal de $u(x_N, y_N)$, $u(x_P, y_P)$ y $u(x_B, y_B)$ que aproxime correctamente a $u_{yy}(x_P, y_P)$ con un error de orden $\mathcal{O}(h)$. Esto es, encontrar α, β, γ tales que

$$\alpha u(x_N, y_N) + \beta u(x_P, y_P) + \gamma u(x_B, y_B) = u_{yy}(x_P, y_P) + \mathcal{O}(h) \tag{4}$$

Problema 4. Demuestre que encontrar las incógnitas de la ecuación (4) es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha h - \gamma |y_B - y_P| = 0 \\ \alpha \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{|y_B - y_P|^2}{2} = 1 \end{cases}$$

Problema 5. Al igual que antes, puede notar que habrá puntos de la grilla en que no es posible calcular u_{xx} utilizando la discretización a 5 puntos ya que alguno quedará fuera del dominio.
Basándose en el mismo razonamiento anterior, plantee una forma de aproximar u_{xx} con un error de orden $\mathcal{O}(h)$ y encuentre el sistema que permita calcular las incógnitas.

2. Aplicaciones del Laplaciano en grafos e imágenes

Problema 6. Investigue y encuentre bibliografía asociada a los tópicos siguientes:

a. Aplicaciones del Laplaciano o métodos de Laplaciano en procesamiento de imágenes.

b. Aplicaciones del Laplaciano o métodos de Laplaciano en grafos.

Escriba 1 plana **para cada uno** sobre lo que se descubrió: qué problemas se resuelven, modelamiento, etc. Incluyendo citas y bibliografía.