

MA5701 Optimización no Lineal. Semestre Otoño 2021

Profesor: Héctor Ramírez C. Auxiliar: Javier Madariaga

Tarea 1

Fecha entrega: Viernes 2 de Julio

1. Problemas

Dada la situación pandémica que vive el mundo por el **Covid-19**, los gobiernos se enfrentan al desafío urgente de dar respuestas adecuadas en cada momento. Por ejemplo, restricciones a la movilidad de la población, aumento de recursos, invertir en ventiladores, nuevas camas de hospital en unidades de cuidados intensivos, así como en mejorar la detección y trazabilidad del virus. Todo esto tiene un gran impacto en la propagación de la infección. Así, los modelos epidemiológicos fundamentales, que típicamente comprenden conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) acopladas y no lineales, son herramientas valiosas para simular la dinámica de la epidemia e investigar estrategias de supresión. Varios trabajos han abordado el desarrollo y montaje de dichos modelos para el **Covid-19**, pudiendo estudiar así el potencial de su propagación, y evaluar estrategias de mitigación.

Las investigaciones basadas en modelos epidemiológicos en relación al brote actual de **Covid-19** se utilizan para determinar las políticas (es decir, los insumos del modelo), como las medidas de distanciamiento social y cantidad de test, que conducen a los mejores resultados a nivel de población. Dichos resultados incluyen, por ejemplo, minimizar el número máximo de personas infectadas o el número total de muertes, mientras que también tienen en cuenta la disponibilidad limitada de recursos y la medida en que el distanciamiento social es factible. Estos modelos están en constante estudio en el mundo así como en nuestro país [1].

Esta tarea consta de dos etapas: en la primera, ajustaremos un modelo epidemiológico a la situación chilena, y en la segunda estudiaremos políticas óptimas.

P1. Descargue los datos provenientes del Github Ministerio de Ciencia, Tecnología, Conocimiento e Innovación, disponibles en <https://github.com/MinCiencia/Datos-COVID19>.

Grafique y estudie la evolución temporal del total a nivel país de infectados, recuperados y muertos entre el 1 de diciembre 2020 y el 31 de mayo 2021.

P2. El modelo epidemiológico que estudiaremos corresponde al SEAIRD: Susceptibles, Expuestos, Asintomáticos (o Infectados no confirmados), Infectados confirmados, Recuperados y Muertos (D). Este modelo viene dado por la siguiente dinámica:

$$\dot{S} = -\frac{\alpha_a(t)}{N}SA - \frac{\alpha_i(t)}{N}SI + \gamma R \quad (1)$$

$$\dot{E} = \frac{\alpha_a(t)}{N}SA + \frac{\alpha_i(t)}{N}SI - \eta E \quad (2)$$

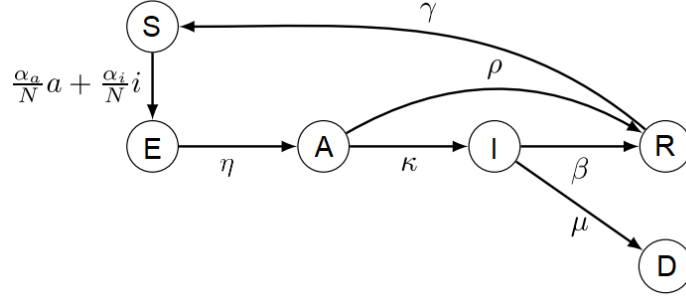
$$\dot{A} = \eta E - \kappa(t)A - \rho A \quad (3)$$

$$\dot{I} = \kappa(t)A - \beta I - \mu I \quad (4)$$

$$\dot{R} = \rho A + \beta I - \gamma R \quad (5)$$

$$\dot{D} = \mu I \quad (6)$$

Esta dinámica se representa por el siguiente diagrama:



Para esta dinámica, los parámetros vienen dados por: N corresponde a la población total y η, β, ρ, μ y γ son las tasas entre los diferentes estados. De estos, usaremos de la literatura [2, 3] los siguientes parámetros: $(\eta, \rho, \gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, 0)$, mientras que los parámetros (β, μ) deben ser calibrados usando los datos.

El modelo contiene además tres parámetros que dependen del tiempo $(\alpha_a(t), \alpha_i(t), \kappa(t))$, que corresponden a las políticas sanitarias adoptadas en el país:

Parámetro	Rango	Descripción
$\alpha_a(t)$ [días ⁻¹]	[0, 1]	Distanciamiento social
$\alpha_i(t)$ [días ⁻¹]	[0, 1]	Cuarentena
$\kappa(t)$ [días ⁻¹]	[0.1, 0.3] [4]	Proporción de test

Para ajustar el modelo a los datos chilenos, en el periodo estudiado en la **P1**, realizaremos lo siguiente.

1. Discretice las ecuaciones diferenciales del modelo.
2. Para calibrar el modelo resolveremos el siguiente problema

$$\min_{\alpha_a(t_j), \alpha_i(t_j), \kappa(t_j), \beta, \mu} \sum_{j=0}^T p_I \cdot (I(t=j) - \hat{I}_j)^2 + p_R \cdot (R(t=j) - \hat{R}_j)^2 + p_D \cdot (D(t=j) - \hat{D}_j)^2$$

donde $\hat{I}, \hat{R}, \hat{D}$ son los valores obtenidos en la base de datos y $p_I, p_R, p_D \geq 0$ son pesos constantes. Resuelva el problema utilizando la función `minimize` del paquete `scipy.optimize` de `python`.

3. Estudie al menos tres métodos de optimización del paquete `scipy.optimize`, explícelos y compare sus resultados. Además comente la solución obtenida.

Recomendaciones para la calibración:

- Note que la cantidad R contempla a los recuperados asintomáticos. Este dato no se encuentra en la base de datos del Github Ministerio de Ciencias. Estime esta cantidad a partir de los datos disponibles.
- Se sugiere realizar una estimación de $\kappa(t)$ en base a los datos y a la información extra disponible en el repositorio para así reducir las variables en el problema, es decir, no considerarlo dentro del problema de optimización planteado en 2.
- Para $\alpha_a(t), \alpha_i(t)$ puede asumirlas funciones escalones (constantes por intervalos) en base a las medidas dadas por el gobierno. Analizar que productos en el Github Ministerio de Ciencias le ayudarían a esto.
- Algunos parámetros iniciales del modelo son desconocidos. Justifique su elección basado en los datos y en la relación entre las variables.

Indicación: Puede servirle mirar el visualizador CMM Covid-19:

<https://covid-19vis.cmm.uchile.cl/>

P3. A pesar de ser beneficiosas para combatir la propagación, el distanciamiento y la cuarentena significan costos sociales y económicos. Del mismo modo, cada test tiene un costo, tanto en su obtención como en la logística asociada a su aplicación. Podemos pensar entonces en un costo (diario) asociado a las medidas tomadas de la forma

$$C(t) := c_a \cdot (1 - \alpha_a(t)) + c_i \cdot (1 - \alpha_i(t)) + c_\kappa \cdot \kappa(t)$$

donde $c_a > 0$ es el costo total asociado al distanciamiento social, $c_i > 0$ es el costo total asociado a la implementación de cuarentena (o aislamiento en este caso), y $c_\kappa > 0$ corresponde al costo total de aplicar un test. Por ejemplo, si se eliminan medidas asociadas a mantener el distanciamiento (i.e., $\alpha_a(t) = 1$) el costo en el instante t es nulo, mientras que si se imponen de manera estricta (i.e., $\alpha_a(t) = 0$), el costo es máximo en dicho instante.

Una buena gestión debe contemplar tanto el buen uso de recursos como el control adecuado de la propagación del virus. Para lidiar con esta coyuntura, en esta pregunta se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_a(t), \alpha_i(t), \kappa(t)} \int_{t_0}^{t_f} C(t) dt \\ \text{s.t. modelo SEAIRD (1) - (6)} \\ \max_t (I(t)) \leq I_{peak} \\ \alpha_a(t) \in [0, 1], \quad \alpha_i(t) \in [0, 1], \quad \kappa(t) \in [0.1, 0.3] \end{aligned}$$

1. Discretice el problema anterior.
2. Estime valores para c_a , c_i , c_κ y I_{peak} a partir de la data o literatura complementaria que usted debe encontrar, haga supuestos realistas y considere distintas configuraciones de valores para estos costos. Resuelva el problema anterior en la ventana de tiempo comprendida entre el 1 de mayo hasta el 30 de septiembre. Comente las soluciones obtenidas. Compare sus resultados con las medidas que ya se han implementado en Chile para el períodos entre el 1 de mayo y la fecha de entrega.
3. Nuevamente estudie distintos métodos de optimización (al menos tres) en el paquete `scipy.optimize`. Explícitelos y compare sus resultados.

2. Entregables

Deberá subir a U-cursos dos archivos:

- a) Un reporte en formato *PDF* que contenga los modelos propuestos, incluyendo las suposiciones y los desarrollos teóricos requeridos en cada problema. El reporte NO debe ser escrito a mano si no que usando alguna editor de texto apropiado (LaTeX, Word, etc.) y debe ser bien escrito y conciso (no más de 10 páginas). No se deben explicar los códigos en este reporte.
- b) Un archivo comprimido (usando *.zip*) que contenga los archivos *.ipynb* utilizados en la resolución numérica. Debe asegurarse que estos archivos se ejecuten apropiadamente.

[1] <https://covid-19.cmm.uchile.cl/covid-19/>

[2] Peng, L., Yang, W., Zhang, D., Zhuge, C. & Hong, L. Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling. arXiv preprint arXiv:2002.06563 (2020)

[3] Rocklöv, J., Sjödin, H. & Wilder-Smith, A. COVID-19 outbreak on the Diamond Princess cruise ship: estimating the epidemic potential and effectiveness of public health countermeasures. *J. Travel Med.* 27, taaa030 (2020).

[4] Nishiura, H. et al. Estimation of the asymptomatic ratio of novel coronavirus infections (COVID-19). *Int. J. Infect. Dis.* 94, 154–155 (2020).