Zur Invariantentheorie.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

§ 1.

Der Begriff der Invariante.

Es scheint mir nicht zweckmässig, in der Formentheorie den Begriff der Invariante, wie es zumeist geschieht, von vornherein an die Betrachtung der Formen anzuknüpfen. Denn der Begriff der Invariante hängt gewissermassen nur in indirecter Weise von den Formen ab. Die letzteren dienen nur dazu, die linearen Transformationen der Argumente der Invariante, gegenüber welchen diese die Eigenschaft der Invarianz besitzen soll, zu charakterisiren. Die linearen Transformationen selber bilden das wesentliche Element der Begriffsbildung. Da jede lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante sich zerlegen lässt in eine „unimodulare" (d. h. von der Determinante 1) und in eine Transformation, welche in der Multiplication aller Variabeln mit ein und demselben Factor besteht, so ist es völlig ausreichend nur unimodulare Transformationen zu betrachten, so lange man sich auf homogene Functionen beschränkt. Man wird somit den Begriff der Invariante, in einer alle in der Formentheorie gebrauchten Bildungen umfassenden Weise, folgendermassen formuliren können:

Es seien $a, b, \ldots l$, mehrere, etwa r Systeme von Variabeln. Gegeben seien ferner, diesen Systemen bezüglich zugeordnet, r lineare unimodulare Transformationen $A, B, \ldots L$. Eine in jedem der r Variabelnsysteme homogene ganze rationale Function $J(a, b, \ldots l)$ heisst eine Invariante des Systems von Transformationen $(A, B, \ldots, L)$, wenn die Gleichung

$$J(a, b, \ldots l) = J(a', b', \ldots l')$$

in den Variabeln $a', b', \ldots l'$ identisch gilt, falls die a durch die Transformation A, die b durch die Transformation B u. s. w. aus den $a', b', \ldots$ bez. hervorgehen.

Die hier benutzte Abkürzung, nach welcher ein ganzes System von Variabeln $a_1, a_2, \dots a_n$ durch einen einzigen Buchstaben a (das System $b_1, b_2, \dots b_m$ durch b, das System $a_1', a_2', \dots a_n'$ durch a' etc.) bezeichnet wird, werde ich im Folgenden durchgängig festhalten. Ich werde ferner durch die Gleichung

$$(a) = A(a')$$

andeuten, dass die Variabeln $a_1, a_2, \dots a_n$ durch die Transformation A aus den Variabeln $a_1', a_2', \dots a_n'$ hervorgehen. Diese Gleichung vertritt also n Gleichungen, welche $a_1, a_2, \dots a_n$ als lineare homogene Functionen von $a_1', a_2', \dots a_n'$ darstellen. Wenn $J(a, b, \dots l)$ in dem festgesetzten Sinne eine Invariante des Systemes von Transformationen $(A, B, \dots L)$ ist, so werde ich dies bisweilen auch kürzer so ausdrücken, dass ich sage, $J(a, b, \dots l)$ sei invariant bei $\begin{pmatrix} a, & b, & \dots & l \\ A, & B, & \dots & L \end{pmatrix}$ oder, wenn es unnöthig ist, die Zuordnung der Transformationen zu den Variabelnsystemen anzudeuten, $J(a, b, \dots l)$ sei invariant bei $(A, B, \dots L)$.

Ist eine in jedem der Variablensysteme $a, b, \dots l$ homogene Function $J(a, b, \dots l)$ invariant sowohl bei $(A, B, \dots L)$ wie bei $(A_1, B_1, \dots L_1)$, so ist unmittelbar klar, dass sie auch bei $(AA_1, BB_1, \dots LL_1)$ invariant ist, wo $AA_1, BB_1, \dots$ die aus A und A_1 bez. B und B_1 etc. componirten Transformationen bedeuten. Die Transformationssysteme $(A, B, \dots L)$, denen gegenüber eine bestimmte Function $J(a, b, \dots l)$ invariant ist, bilden also eine Gruppe. Man kann dementsprechend den Begriff der Invariante an die Betrachtung der Gruppen solcher Transformationssysteme anknüpfen. Indessen dürfte es doch einfacher sein, den Begriff, so wie ich es oben gethan habe, nicht von vornherein auf eine Gruppe von Transformationssystemen, sondern auf ein einziges System $(A, B, \dots L)$ zu beziehen. Was übrigens derartige Systeme simultaner Transformationen angeht (deren Einführung durch die Zerlegung der Argumente der Invariante in mehrere Systeme je homogen eingehender Variabeln nothwendig wird), so sind dieselben um Nichts allgemeiner als einzelne Transformationen. In der That, vereinigt man die Variabeln der verschiedenen Systeme $a, b, \dots l$ zu einem einzigen System, so stellt sich ein System von Transformationen $(A, B, \dots L)$ als eine einzige auf die Gesammtheit der Variabeln $a, b, \dots l$ bezügliche Transformation dar.

§ 2.

Contragrediente Substitutionen.

Es ist schon oben erwähnt, dass bei der Definition der Invarianten einer Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, die letztere nur dazu dient, die linearen

Transformationen zu charakterisiren, denen gegenüber die Eigenschaft der Invarianz bestehen soll. Wenn nämlich das System x der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ einer linearen Transformation

(1) $$(x) = S(x')$$

unterworfen wird, so geht die Form f, deren Coefficientensystem mit a bezeichnet werde, über in eine Form f', deren Coefficienten a' lineare homogene Functionen der a sind. Umgekehrt sind dann auch die a lineare homogene Functionen der a', d. h. es ist

(2) $$(a) = A(a'),$$

wo A eine durch S bestimmte Transformation bedeutet. Diese Transformation A, die Sylvester treffend als „inducirte" Transformation bezeichnet, ist gleichzeitig mit S unimodular, wie bekannt ist und übrigens weiter unten gezeigt wird. Die Invarianten der Form f sind nichts Anderes, wie die Functionen $J(a)$, welche im Sinne von § 1 invariant bei den Transformationen A sind.

Es bietet sich hier die Aufgabe dar, die Abhängigkeit der Transformation A von der Transformation S näher zu untersuchen, eine Aufgabe, die weiterhin (§ 9) behandelt werden soll. Zunächst möge nur der einfachste Fall betrachtet werden, wo die Form f eine Linearform ist. Dieser Fall führt bekanntermassen auf den wichtigen Begriff der contragredienten Transformation. Bezeichnen wir die Coefficienten von f mit u anstatt mit a, sodass

(3) $$f = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n = \sum ux$$

ist, so wird der Transformation (1) die Transformation

(4) $$(u) = T(u')$$

entsprechen, die vollständig dadurch bestimmt ist, dass vermöge der Substitutionen (1) und (4) die Gleichung

(5) $$\sum ux = \sum u'x'$$

zu einer in den u' und x' identischen Gleichung wird. Die Transformation T heisst die *contragrediente* oder *conträre* Transformation von S. Ich werde dieselbe zur Abkürzung mit CS bezeichnen.

Für die conträren Transformationen gelten die folgenden bekannten und leicht zu beweisenden Sätze:

1) Die conträre von der conträren Transformation ist die ursprüngliche Transformation, d. h.

(6) $$CCS = S.$$

2) Die conträre von der zusammengesetzten Transformation SS_1 ist die zusammengesetzte von den conträren Transformationen CS und CS_1, d. h.

(7) $$C(S \cdot S_1) = CS \cdot CS_1.$$

Dieser Satz lässt sich offenbar auch so aussprechen: Ersetzt man in einer Gruppe jede Transformation durch ihre conträre, so entsteht eine zu der Gruppe isomorphe Gruppe.

3) Die Determinante einer Transformation S hat den reciproken Werth von der Determinante der conträren Transformation CS.

4) Betrachtet man in der identischen Gleichung (5) die x als die unabhängigen, die x' als von den x vermöge der Substitution (1) abhängenden Variabeln, so ergiebt die Differentiation nach x_i, dass die conträre Transformation von S durch die Gleichungen

$$(8)\qquad u_i = \sum u' \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dargestellt wird.

§ 3.

Die Boole-Sylvester'schen Differentiationsprocesse.

Es giebt ein elementares Princip zur Bildung invarianter Differentiationsprocesse, welches fast alle in der Invariantentheorie gebrauchten Processe in einfacher Weise liefert. Dieses Princip ist in speciellen Fällen schon von dem Begründer der Invariantentheorie Boole, in grösserer Allgemeinheit aber von Sylvester*) aufgestellt worden. Nach dem Voraufgeschickten kann ich dasselbe leicht in seiner umfassendsten Gestalt darlegen.

Wenn die Variabeln $a_1, \ldots a_n$ durch die Transformation A aus den Variabeln $a_1' \ldots a_n'$ hervorgehen, wenn also

$$(1)\qquad (a) = A(a')$$

ist, so lassen sich die nach den a genommenen Differentialquotienten irgend einer Function so darstellen:

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial a_i} = \sum_1^n{}^k \frac{\partial}{\partial a_k'} \cdot \frac{\partial a_k'}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Würden die Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial a}$ und $\frac{\partial}{\partial a'}$ Veränderliche sein, so würden die Gleichungen (2) die conträre Transformation von A darstellen. Man kann also diese Gleichungen durch

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial a}\right) = CA\left(\frac{\partial}{\partial a'}\right)$$

andeuten. Die wiederholte Anwendung dieser Gleichungen lässt erkennen, dass die Differentialquotienten irgend einer Ordnung, etwa der s^{ten} Ordnung, genau in demselben Zusammenhange stehen, wie die Potenzen und Producte von Potenzen s^{ter} Ordnung der als Variable

*) Sylvester: „Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées". Crelle's Journal Bd. 85, S. 89.

angesehenen Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial a'}$. Wenn also $J(a)$ invariant bei der Transformation CA ist, so wird $J\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)$ ein invarianter Process gegenüber der Transformation A sein. Das heisst: wenn $f(a)$ durch die Transformation A in $f'(a')$ übergeht, so giebt die Anwendung der Operation $J\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)$ auf $f(a)$ dasselbe Resultat, wie die Anwendung von $J\left(\frac{\partial}{\partial a'}\right)$ auf $f'(a')$.

Wendet man dieselbe Ueberlegung auf den Fall mehrerer Variabelnsysteme an, so hat man das Boole-Sylvester'sche Princip in seiner allgemeinsten Gestalt:

„*Es seien* $a, b, \ldots g, h, \ldots l$ *irgend welche Variabelnsysteme und* $A, B, \ldots G, H, \ldots L$ *ihnen bezüglich zugeordnete unimodulare Transformationen. Ist dann* $J(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ *invariant gegenüber dem Transformationssystem* $(CA, CB, \ldots CG, H, \ldots L)$, *so ist*

$$J\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \cdots \frac{\partial}{\partial g}, h, \cdots l\right)$$

ein invarianter Process gegenüber dem Transformationssystem

$$(A, B, \ldots G, H, \ldots L).“$$

Insbesondere gilt also der Satz:

„Sind $J(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ und $K(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ invariant bei $(CA, CB, \ldots CG, H, \ldots L)$ bezüglich $(A, B, \ldots G, H, \ldots L)$ so ist das Resultat, welches man durch Anwendung der Operation

$$J\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \cdots \frac{\partial}{\partial g}, h, \cdots l\right)$$

auf $K(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ erhält, wieder invariant bei

$$(A, B, \ldots G, H, \ldots L).“$$

§ 4.

Beispiele. Der Cayley'sche Ω-Process.

Als einfachstes Beispiel zu dem Princip des vorigen Paragraphen bietet sich der Aronhold'sche (Polaren-) Process dar. Seien $a, b, \ldots l$ Variablensysteme und $A, B, \ldots L$ ihnen bez. zugeordnete unimodulare Transformationen. Ich will nun annehmen, dass die Transformationen A und B identisch sind, was natürlich implicirt, dass die Anzahl der Variabeln b dieselbe ist, wie die der a. Da dann $\sum ab$ invariant bei $(A, CA, \ldots L)$ ist, so folgt, dass durch den Process $\sum a \frac{\partial}{\partial b}$ aus jeder Invariante des Transformationssystemes $(A, A, \ldots L)$ wieder eine Invariante entsteht.

In ähnlich einfacher Weise führt unser Princip zu dem Cayley'schen Ω-Process. In der That, seien

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n; \quad \ldots; \quad \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n,$$

n cogrediente Variabelnsysteme von je n Variabeln, wobei, wie üblich, die Bezeichnung „cogrediente" Variabelnsysteme ausdrücken soll, dass diesen Variabelnsystemen immer dieselbe Transformation zugeordnet wird. Da nun die Determinante

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1, & \omega_2, & \ldots & \omega_n \end{vmatrix}$$

bei jeder unimodularen Transformation, welcher die Variabeln $\alpha, \beta, \ldots \omega$ simultan unterworfen werden, invariant ist, so schliesst man aus dem Boole-Sylvester'schen Princip, dass auch die Operation

$$(3) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1}, & \frac{\partial}{\partial \beta_2}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial}{\partial \omega_2}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \omega_n} \end{vmatrix}$$

bei jeder solchen Transformation invariant ist.

Im Anschluss hieran will ich zeigen, wie man ohne jede Rechnung die Erzeugung der Invarianten einer Form (oder eines Formensystems) mit Hülfe des Ω-Processes, wie sie von den Herren Gordan, Mertens und Hilbert*) benutzt worden ist, begründen kann.

Es sei $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Form der n Veränderlichen x; die Coefficienten der Form mögen mit a bezeichnet werden. Der beliebigen unimodularen Transformation S der Variabeln x entspreche die Transformation A der Coefficienten, so dass die Form f aufgefasst als Function der a und x invariant bei (A, S) ist. Führt man nun die mit den x cogredienten Variablensysteme (1) ein, so ist offenbar

$$(4) \quad f(\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \cdots + \omega_1 \xi_n, \quad \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \cdots + \omega_2 \xi_n, \cdots)$$

*) Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, S. 114 ff.

Mertens, Ueber invariante Gebilde ternärer Formen, Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. 95.

Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Mathematische Annalen, Bd. 36, S. 524 ff.

für jede Wahl der Constanten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ invariant bei $\begin{pmatrix} a, \alpha, \beta, \dots \omega \\ A, S, S, \dots S \end{pmatrix}$. Das Gleiche gilt daher auch für die Coefficienten a' der nach Potenzen von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ entwickelten Function (4), d. h. für die Coefficienten der durch die Substitution

$$(5) \qquad x_i = \alpha_i \xi_1 + \beta_i \xi_2 + \cdots + \omega_i \xi_n \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

transformirten Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$. Hieraus folgt weiter, dass auch

$$(6) \qquad D^\mu . F(a'),$$

wo μ einen positiven ganzzahligen Exponenten, $F(a')$ eine Form der a' bezeichnet, invariant bei $\begin{pmatrix} a, \alpha, \beta, \dots \omega \\ A, S, S, \dots S \end{pmatrix}$ ist. Da nun der Process Ω invariant ist, so entsteht durch wiederholte Anwendung des Processes auf (6) stets wieder eine Invariante und insbesondere eine Invariante der Form f, wenn der Process so häufig angewendet wird, bis die Variabeln $\alpha, \beta, \dots \omega$ aus dem Resultat verschwunden sind. Dass auf diese Weise alle Invarianten von f erhalten werden können, folgt leicht aus dem Umstande, dass die μ-malige Anwendung von Ω auf D^μ eine nicht verschwindende Constante ergiebt.

In gleicher Weise lassen sich die von Herrn Hilbert*) angegebenen analogen Sätze beweisen, die sich auf die Fälle beziehen, wo man auf die Variabeln x der Form f nur die Transformationen gewisser Untergruppen der Gesammtgruppe der linearen Transformationen anwendet.

§ 5.

Ein algebraischer Hülfssatz.

Zu jeder linearen Transformation S gehört eine bestimmte andere, nämlich ihre conträre Transformation CS. Die hier zu Grunde gelegte Auffassung der Invarianten macht es aber unerlässlich, neben CS noch andere Transformationen zu betrachten, die nach gewissen Gesetzen aus einer gegebenen Transformation S (oder auch aus mehreren gegebenen Transformationen $S, T, \dots$) abgeleitet werden. Ehe ich hierzu übergehe, will ich, um Wiederholungen zu vermeiden, einen einfachen algebraischen Hülfssatz vorausschicken.

Es seien a_{ik} die als willkürliche Veränderliche gedachten Coefficienten einer linearen Transformation, α_{ik} die Coefficienten der inversen Transformation. Ferner sei $\varphi(a_{ik})$ eine homogene ganze Function r^{ten} Grades der a_{ik}, welche die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(a_{ik}) \cdot \varphi(\alpha_{ik}) = 1$$

befriedigt. Dann ist nothwendig

*) l. c. pag. 532 ff.

(2) $$\varphi(a_{ik}) = \pm \Delta^{\frac{r}{n}},$$
wo Δ die Determinante $|a_{ik}|$ der Transformation bezeichnet.

In der That ist $\alpha_{ik} = \frac{1}{\Delta} A_{ki}$, wo A_{ki} die zu a_{ki} gehörige Unterdeterminante von Δ bezeichnet. Die Gleichung (1) lässt sich daher so schreiben:
$$\varphi(a_{ik}) \cdot \varphi(A_{ik}) = \Delta^r,$$
und da Δ eine irreducible Function der n^2 Veränderlichen a_{ik} ist, so folgt hieraus
$$\varphi(a_{ik}) = c \cdot \Delta^{\frac{r}{n}},$$
unter c einen von den a_{ik} unabhängigen Factor verstanden. Da die Determinante $|\alpha_{ik}|$ gleich $\frac{1}{\Delta}$ ist, so ist in gleicher Weise
$$\varphi(\alpha_{ik}) = c \cdot \Delta^{-\frac{r}{n}},$$
und also, wegen Gleichung (1), $c^2 = 1$ oder $c = \pm 1$.*)

In ähnlicher Weise beweist man den allgemeineren Satz:

Seien $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ die Coefficienten der Transformationen $S, T, \ldots$ bez., ferner $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \ldots$ die Coefficienten der inversen Transformationen $S^{-1}, T^{-1}, \ldots$ bez., endlich $\varphi(a_{ik}, b_{ik}, \ldots)$ eine ganze Function der Variabeln $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$, die homogen vom Grade r_1 in den a_{ik}, homogen vom Grade r_2 in den b_{ik} u. s. w. ist und überdies der Gleichung
$$\varphi(a_{ik}, b_{ik}, \ldots)\, \varphi(\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \ldots) = 1$$
genügt. Dann ist nothwendig
$$\varphi(a_{ik}, b_{ik}, \ldots) = \pm \Delta_1^{\frac{r_1}{n_1}} \cdot \Delta_2^{\frac{r_2}{n_2}} \ldots,$$
wo $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die Determinanten der Transformationen $S, T, \ldots$ bez., ferner $n_1, n_2, \ldots$ ihre Ordnungen bezeichnen, also die Anzahlen der homogenen Variabeln, auf welche sich die Transformationen $S, T, \ldots$ beziehen.

§ 6.

Producttransformationen.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_m$ oder kurz x und y zwei Systeme von n bez. m Variabeln, ferner

(1) $$(x) = S(x'), \quad (y) = T(y')$$
zwei auf diese Variabeln bezüglichen Transformationen. Da vermöge (1) die x lineare homogene Functionen der x' und die y lineare

*) Vgl. Gram, Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne. Mathematische Annalen Bd. 7, S. 234.

homogene Functionen der y' sind, so stellen sich auch die nm Producte $x_i y_k$ als lineare homogene Functionen der Producte $x_i' y_k'$ dar. Das heisst, es ist

$$(2) \qquad (xy) = W(x'y'),$$

wo W eine durch S und T vollkommen bestimmte Transformation bezeichnet, deren Coefficienten offenbar bilineare Functionen der Coefficienten von S und T sind. Diese Transformation W will ich die „Producttransformation" von S und T nennen und mit $S \times T$ bezeichnen.

Dieselbe Begriffsbildung ist auch auf den Fall anwendbar, wo man mehrere Systeme von Variabeln $x, y, z, \ldots$ und ebenso viele den Systemen bezüglich entsprechende Transformationen $S, T, U, \ldots$ betrachtet. Die Producttransformation $S \times T \times U \ldots$ ist dann diejenige Transformation, welche die Producte $xyz\ldots$ erfahren.

Es gelten nun die folgenden Sätze über Producttransformationen, die ich der Einfacheit halber nur für den Fall von zwei Variablensystemen ausspreche:

1) Sind S und T die identischen Transformationen $(x_i = x_i',\ y_k = y_k')$, so ist auch ihre Producttransformation die identische $(x_i y_k = x_i' y_k')$.

2) Ist W die Producttransformation von S und T, ferner W_1 die Producttransformation von S_1 nnd T_1, so ist $W W_1$ die Producttransformation von SS_1 und TT_1.

Denn aus

$$(x) = S(x'), \quad (x') = S_1(x''),$$
$$(y) = T(y'), \quad (y') = T_1(y''),$$

folgt

$$(xy) = W(x'y'), \quad (x'y') = W_1(x''y'').$$

Die Transformation $(xy) = WW_1(x''y'')$ ist daher die Producttransformation von $(x) = SS_1(x'')$ und $(y) = TT_1(y'')$ q. e. d.

Insbesondere ist die Producttransformation der inversen S^{-1} und T^{-1} die inverse der Producttransformation von S und T. Auch folgt nnmittelbar, dass die Producttransformationen W_i $(i = 1, 2, \ldots)$ einer Gruppe von Transformationspaaren (S_i, T_i) eine zu dieser Gruppe isomorphe Gruppe bilden.

3) Ist Δ die Determinante von S und Γ die Determinante von T, so ist

$$\Delta^m \cdot \Gamma^n$$

die Determinante der Producttransformation $S \times T$.

In der That ist die letztere Determinante eine Function $\varphi(a_{ik}, b_{ik})$ der n^2 Coefficienten a_{ik} von S und der m^2 Coefficienten b_{ik} von T, auf welche der im vorigen Paragraphen bewiesene Hülfssatz unmittelbare Anwendung findet. Dass $\Delta^m\Gamma^n$ und nicht $-\Delta^m\Gamma^n$ der Werth der Determinante von $S \times T$ ist, erkennt man sofort, wenn man für S und T die identischen Transformationen nimmt. Sind S und T unimodulare Transformationen, so ist auch $S \times T$ unimodular.

4) „Die Producttransformationen der conträren Transformationen CS und CT ist die conträre von der Producttransformation $S \times T$," ein Satz, der sich kurz durch die Gleichung

$$CS \times CT = C(S \times T) \tag{3}$$

ausdrücken lässt.

Zum Beweise betrachten wir die Transformationen

$$(u) = CS(u'), \quad (v) = CT(v'), \tag{4}$$

also die conträren der Transformationen (1). Aus (4) folge

$$(uv) = \overline{W}(u'v'), \tag{5}$$

so dass $\overline{W}$ die Producttransformation $CS \times CT$ bezeichnet. Da nun die Gleichungen

$$\sum ux = \sum u'x', \qquad \sum vy = \sum v'y',$$

die andere

$$\sum uv \cdot xy = \sum u'v' \cdot x'y'$$

zur Folge haben, so ist die Transformation (5) die conträre der Transformation (2), q. e. d.

§ 7.

Potenztransformationen.

Mit den Producttransformationen eng verwandt sind die Potenztransformationen. Ehe ich diese einführe, schicke ich voraus, dass ich mich in diesem Paragraphen und weiterhin der folgenden Bezeichnungen bedienen werde. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ Variable, so will ich die Potenzen und Producte von Potenzen

$$x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}, \tag{1}$$

für welche die Exponentensumme $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ gleich r ist, als die *„Elementarterme r^{ter} Ordnung"* bezeichnen. Die Anzahl ϱ dieser Terme drückt sich bekanntlich durch einen Binomialcoefficienten aus, es ist nämlich

$$\varrho = \frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!}. \tag{2}$$

Ferner will ich (in Anlehnung an eine Sylvester'sche Bezeichnungsweise) die mit gewissen Zahlenfactoren multiplicirten Elementarterme (1) *„präparirt"* nennen. Der Zahlenfactor, welchen ich dem einzelnen Terme zusetze, ist der reciproke Werth des Productes $\sqrt{e_1!}\cdot\sqrt{e_2!}\cdots\sqrt{e_n!}$, so dass die präparirten Elementarterme diese sind:

$$\text{(3)}\qquad \frac{x_1^{e_1}}{\sqrt{e_1!}}\cdot\frac{x_2^{e_2}}{\sqrt{e_2!}}\cdots\frac{x_n^{e_n}}{\sqrt{e_n!}}.$$

Dabei sind die Quadratwurzeln positiv zu nehmen und unter $0!$ ist die Zahl 1 zu verstehen.

Die präparirten Elementarterme (3) werde ich in einer beliebigen, aber fest gewählten Reihenfolge mit

$$\text{(4)}\qquad X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_\varrho$$

bezeichnen. Die entsprechende Bedeutung sollen $X_1', X_2', \ldots X_\varrho'$; $U_1, U_2, \ldots U_\varrho$; etc. für die Variabelnsysteme $x_1', x_2', \ldots x_n'$; $u_1, u_2, \ldots u_n$; etc. haben.

Dies festgesetzt, betrachte ich irgend eine lineare Transformation S bei n Variabeln. Vermöge der n linearen homogenen Gleichungen

$$\text{(5)}\qquad (x) = S(x')$$

stellen sich dann die Elementarterme r^{ter} Ordnung der Variabeln x als lineare homogene Functionen der Elementarterme r^{ter} Ordnung der Variabeln x' dar und das Gleiche gilt bezüglich der präparirten Elementarterme. Es folgt also aus (5)

$$\text{(6)}\qquad (X) = W(X'),$$

wo W eine durch S mitbestimmte lineare Transformation bezeichnet, deren Coefficienten offenbar homogene Functionen r^{ten} Grades der Coefficienten von S sind. Diese Transformation W will ich die r^{te} *Potenztransformation* von S nennen und mit P_rS bezeichnen.

Durch ähnliche Schlüsse, wie sie im vorigen Paragraphen angewandt wurden, beweist man für die Potenztransformationen nachstehende Sätze:

1) Ist S die identische Transformation, so ist auch P_rS die identische Transformation.

2) Die r^{te} Potenztransformation der zusammengesetzten Transformation SS_1 ist die zusammengesetzte aus den r^{ten} Potenztransformationen P_rS und P_rS_1.

3) Die Determinante von P_rS ist die k^{te} Potenz der Determinante von S, wo

$$k = \frac{r\,.\,\varrho}{n} = \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!\,n!}.$$

4) Die r^{te} Potenztransformation der conträren ist die conträre von der r^{ten} Potenztransformation, oder

$$\text{(7)}\qquad P_rCS = CP_rS.$$

In der That, wenn

$$(x) = S(x'),\quad (u) = CS(u'),$$

so hat man
$$\sum xu = \sum x'u',$$
und da
$$\left(\sum xu\right)^r = (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n)^r = r!\,(X_1 U_1 + \cdots + X^\varrho U_\varrho)$$
ist, so folgt
$$X_1 U_1 + \cdots + X_\varrho U_\varrho = X_1' U_1' + \cdots + X_\varrho' U_\varrho';$$
d. h. die U transformiren sich conträr zu den X.

§ 8.

Die einer linearen Transformation entsprechenden Determinantentransformationen.

In der Invariantentheorie der algebraischen Formen kommen ausser den im vorigen Paragraphen eingeführten Transformationen noch eine Reihe anderer in Betracht, die in bestimmter Weise aus einer gegebenen Transformation abgeleitet werden. Da sich im Anschluss an die vorstehenden Entwicklungen die Bildungsweise und die wesentlichsten Eigenschaften dieser Transformationen leicht auseinandersetzen lassen, so will ich darauf kurz eingehen, obgleich dies für die weiteren Betrachtungen dieser Abhandlung nicht gerade erforderlich ist.*)

Es seien (x), (y), (z), ... Systeme von je n Variabeln. Das System der $\binom{n}{2}$ Determinanten
$$\begin{vmatrix} x_i, & x_k \\ y_i, & y_k \end{vmatrix} \qquad (i < k),$$
diese in eine beliebige, aber feste Reihenfolge gebracht, möge kurz mit $(x)_2$, das System der $\binom{n}{3}$ Determinanten
$$\begin{vmatrix} x_i, & x_k, & x_l \\ y_i, & y_k, & y_l \\ z_i, & z_k, & z_l \end{vmatrix} \qquad (i < k < l),$$
diese ebenfalls in einer beliebigen aber festen Reihenfolge genommen, mit $(x)_3$ bezeichnet werden u. s. f. Auf die Betrachtung dieser Determinanten wird man unmittelbar geführt, wenn man die Variabeln (x), (y), (z), ... als homogene Punktcoordinaten deutet. Bekanntlich sind dann die Determinanten $(x)_2$, $(x)_3$, u. s. f. die Coordinaten der (x) und (y) verbindenden Geraden, bez. der (x), (y) und (z) verbindenden Ebene u. s. f. Zwischen diesen Determinanten bestehen die

*) Dementsprechend kann dieser Paragraph, unbeschadet des Zusammenhanges, überschlagen werden.

bekannten algebraischen Identitäten. Es ist aber wichtig, zu bemerken, dass unter diesen keine linearen sind, dass also die Determinanten linear unabhängig sind.*)

Ich betrachte nun die Gleichungen

(1) $$(x) = S(x'),\quad (y) = S(y'),\quad (z) = S(z'),\ \ldots,$$

wo S irgend eine lineare Transformation bezeichnet. Vermöge dieser Gleichungen drücken sich die $(x)_2$ linear und homogen, durch die in analoger Weise aus den (x') und (y') gebildeten Determinanten $(x')_2$ aus. D. h. die $(x)_2$ gehen vermöge einer durch S mitbestimmten linearen Transformation aus den $(x')_2$ hervor. Diese Transformationen will ich mit $C_2 S$ bezeichnen, so dass gleichzeitig mit (1)

(2) $$(x)_2 = C_2 S(x')_2$$

ist. In gleicher Weise ist

(3) $$(x)_3 = C_3 S(x')_3,$$

wo $C_3 S$ eine bestimmte von S abhängende Transformation bezeichnet. Im Ganzen entspringen so aus S $n-2$ abgeleitete Transformationen

(4) $$C_2 S,\ C_3 S,\ \ldots\ C_{n-1} S,$$

(welche, nach dem oben Bemerkten, die Transformationen der Coordinaten der Geraden, Ebenen u. s. w. sind, die der Transformation S der Punktcoordinaten entsprechen). Es gelten nun folgende Sätze, die ähnlich wie die analogen Sätze für die Product- und Potenztransformationen zu beweisen sind:

1) Ist S die identische Transformation, so ist auch jede der abgeleiteten $C_2 S$, $C_3 S$, ... $C_{n-1} S$ die identische Transformation.

2) Durchläuft die Transformation S die Individuen einer Gruppe, so durchläuft jede der abgeleiteten Transformationen $C_2 S$, $C_3 S$, ... je eine zu jener Gruppe isomorphe Gruppe.

3) Bezeichnet Δ die Determinante der Transformation S, so haben die Determinanten von $C_2 S$, $C_3 S$, ... $C_{n-1} S$ bez. die Werthe Δ^{n-1}, $\Delta^{\binom{n-1}{2}}$, $\Delta^{\binom{n-1}{3}}$, ... Δ^{n-1}. Insbesondere sind die Transformationen $C_2 S$, $C_3 S$, ... $C_{n-1} S$ gleichzeitig mit S unimodular.

4) Sind S und T conträre Transformationen, so sind auch $C_2 S$ und $C_2 T$, ebenso $C_3 S$ und $C_3 T$ u. s. w. je conträre Transformationen, ein Satz, der sich auch durch die Gleichungen:

(5) $$C_2 CS = CC_2 S,\quad C_3 CS = CC_3 S,\ \ldots\ C_{n-1} CS = CC_{n-1} S$$

ausdrücken lässt.

---

*) Die consequente Einführung der Determinanten $(x)_2$, $(x)_3$, ... als selbstständiger Variabeln in die Formentheorie geht auf Clebsch zurück. Vgl. Clebsch: „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie", Göttinger Abhandlungen, Bd. 17 und Mathematische Annalen, Bd. 5, S. 427.

5) Aus der bekannten Darstellung einer n-reihigen Determinante als Aggregat aus den Producten der Determinanten k^{ten} Grades, die sich aus den ersten k Reihen der Determinante bilden lassen, in die complementären Determinanten $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades, die sich aus den übrigen $n-k$ Reihen bilden lassen, schliesst man ferner, dass die Transformationen S und $C_{n-1}S$, C_2S und $C_{n-2}S$, ... je ein Paar conträrer Transformationen bilden, sobald S unimodular ist und die Reihenfolge der Determinanten $(x)_2$, $(x)_3$, ... in geeigneter Weise gewählt wird.

§ 9.

Präparirte Formen.

Bezeichnen $(x), (y), (z), \ldots$ Variabelnsysteme, ferner $X, Y, Z, \ldots$ die präparirten Elementarterme p^{ter}, q^{ter}, r^{ter} ... Ordnung, die aus den Variabeln $x, y, z, \ldots$ bezüglich gebildet werden können, so lässt sich jede ganze Function der Variabeln $x, y, z, \ldots$, welche in den Variabeln x homogen p^{ter} Ordnung, in den Variabeln y homogen q^{ter} Ordnung u. s. w. ist, in die Gestalt

$$f(x, y, z, \ldots) = \sum a\,X\,Y\,Z\,\ldots \tag{1}$$

bringen. In dieser Gestalt nenne ich die Form *präparirt*. Die Bezeichnung rührt von Sylvester her.*) Indessen weicht meine Definition der präparirten Formen ein wenig von der Sylvester'schen ab. Die Sylvester'sche Definition erhält man, wenn man die Elementarterme $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$ nicht durch den Factor $\frac{1}{\sqrt{e_1!}\sqrt{e_2!}\cdots\sqrt{e_n!}}$, sondern durch den Factor $\frac{\sqrt{(e_1+e_2+\cdots+e_n)!}}{\sqrt{e_1!}\sqrt{e_2!}\ldots\sqrt{e_n!}}$ „präparirt".

Werden nun die Variabeln der Form f simultan den Transformationen

$$(x) = S(x'), \quad (y) = T(y'), \quad (z) = U(z'), \ldots \tag{2}$$

unterworfen, so geht f über in

$$f' = \sum a'\,X'\,Y'\,Z'\,\ldots. \tag{3}$$

Unter Verwendung der in den Paragraphen 6 und 7 eingeführten Bezeichnungen ist

$$(X) = P_p S(X'), \quad (Y) = P_q T(Y'), \quad (Z) = P_r U(Z'), \ldots \tag{4}$$

und

$$(XYZ\cdots) = P_p S \times P_q T \times P_r U \times \cdots (X'Y'Z'\cdots). \tag{5}$$

*) l. c. Seite 90.

Die Transformation, welche die Coefficienten a' in die Coefficienten a überführt, ist aber die conträre der Transformation (5). Die durch die Transformationen (2) der Variabeln inducirte Transformation der Coefficienten von f ist also die folgende:

$$(a) = C(P_p S \times P_q T \times P_r U \times \cdots)\,(a'). \tag{6}$$

Betrachtet man nun neben dem Systeme von Transformationen (2) das System der conträren Transformationen

$$(x) = CS(x'),\quad (y) = CT(y'),\quad (z) = CU(z'), \ldots, \tag{7}$$

so entspricht diesen die Transformation

$$(a) = C(P_p CS \times P_q CT \times P_r CU \times \cdots)\,(a') \tag{8}$$

der Coefficienten. Nach den oben bewiesenen Sätzen (§ 2, (6), § 6, (3), § 7, (7)) ist diese Transformation identisch mit

$$(a) = (P_p S \times P_q T \times P_r U \times \cdots)\,(a'). \tag{9}$$

Der Vergleich mit (6) lehrt:

„*Bei einer präparirten Form entsprechen conträren Transformationen der Variabeln conträre Transformationen der Coefficienten.*"

Für den Fall, dass die Form nur eine Reihe von Variabeln (x) enthält, ist dieser Satz von Sylvester aufgestellt und bewiesen worden. Andere Beweise für diesen einfachsten Fall des Satzes haben Lipschitz und Le Paige gegeben. Den Fall zweier Systeme contragredienter Variabeln betrachtet Study.*) Für das Folgende ist es zweckmässig unserem Satze eine etwas andere Fassung zu geben.

Ersetzt man in der Form $f = f(x, y, z, \ldots)$ die Variabelnsysteme (x), (y), (z), ... je durch die contragredienten Variabelnsysteme (u), (v), (w), ... so möge die hierdurch entstehende neue Form $\bar{f} = f(u, v, w, \ldots)$ als die „*conträre*" *Form* von f bezeichnet werden.

Ordnet man nun den Variabelnsystemen (x), (y), (z), ... bezüglich die Transformationen S, T, U, ... zu, so sind hiermit von selber den Variabelnsystemen (u), (v), (w), ... bezüglich die conträren Transformationen CS, CT, CU, ... zugeordnet. Der verallgemeinerte Sylvester'sche Satz lässt sich darnach auch so aussprechen:

„*Die Coefficienten zweier conträrer, präparirter Formen erfahren conträre Transformationen, wenn man die Variabeln der Formen irgend welchen simultanen Transformationen unterwirft.*"

---

*) Sylvester, l. c. p. 91. — Lipschitz, American Journal of Mathematics, Bd. 1, S. 336. — Le Paige, Mathematische Annalen, Bd. 15, S. 206. — Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen (Leipzig 1889) S. 36 ff.

§ 10.

Invariante Differentiationsprocesse für Formensysteme.

Ich gehe jetzt dazu über, den Satz des vorigen Paragraphen mit dem Satze des § 3 zu combiniren, schicke indessen einige Bemerkungen voraus, die sich auf den Begriff der Invariante beziehen. Es seien $(x), (y), (z), \ldots$ Systeme von Variabeln und

$$(1) \qquad f_1, f_2, \ldots f_k, f_{k+1}, \ldots f_r$$

präparirte Formen derselben. Dabei ist natürlich der Fall nicht ausgeschlossen, dass unter den Formen solche vorhanden sind, in denen eines oder mehrere der Variabelnsysteme nicht vorkommen. Die betreffenden Formen sind dann in den fehlenden Variabelnsystemen als vom Grade Null anzusehen.

Ich nehme jetzt an, dass den Variabelnsystemen $(x), (y), (z), \ldots$ bezüglich die unimodularen Transformationen $S, T, U, \ldots$ zugeordnet seien. Dann entsprechen diesen gewisse, ebenfalls unimodulare Transformationen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_r$ der Coefficienten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}$ der Formen $f_1, f_2, \ldots f_r$. Eine Function

$$(2) \qquad J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}),$$

die ganz und homogen in jedem einzelnen Coefficientensystem $a^{(i)}$ ist, wird nun als eine Invariante des Formensystems (1) bezüglich der Transformationen

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z, & \ldots \\ S, & T, & U, & \ldots \end{pmatrix}$$

zu bezeichnen sein, wenn sie im Sinne von § 1 invariant bei

$$\begin{pmatrix} a^{(1)}, & a^{(2)}, & \ldots & a^{(r)} \\ \mathsf{A}_1, & \mathsf{A}_2, & \ldots & \mathsf{A}_r \end{pmatrix}$$

ist.

Ist so der Begriff der Invariante eines Formensystems (1) auf ein bestimmtes System von Transformationen (3) bezogen, so fragt es sich, was man unter einer Invariante des Formensystemes (1) schlechthin zu verstehen hat. Dabei ist Folgendes zu beachten. Während ich die sämmtlichen auftretenden Variabeln $(x), (y), (z), \ldots$ als frei veränderlich voraussetze, soll doch nicht ausgeschlossen sein, dass zwischen einzelnen Variabelnsystemen eine Abhängigkeit in der Art besteht, dass die gewissen Variabelnsystemen zugeordneten Transformationen immer die gewissen anderen Variabelnsystemen zuzuordnenden Transformationen mitbestimmen. So kann z. B. von vornherein festgesetzt sein, dass dem Variabelnsystem (y) immer dieselbe Transformation, wie dem Variabelnsystem (x) zugeordnet werden soll (dass, wie man zu sagen pflegt, (x) und (y) cogrediente Variable sein sollen). Derartige Festsetzungen, die einen Theil der Transformationen $S, T, U, \ldots$ von den übrigen abhängig machen, lassen sich in mannigfaltiger Weise treffen.

Unter einer *Invariante schlechthin* des Formensystemes (1) ist nun jede Function $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ zu verstehen, die eine Invariante bezüglich der Transformationen (3) ist für jede beliebige Wahl der von einander unabhängigen unter diesen Transformationen.

Dies vorausgeschickt, betrachte ich neben dem Formensystem (1) noch das folgende:

$$(4) \qquad \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots \bar{f}_k, f_{k+1}, \ldots f_r,$$

welches dadurch aus dem ersteren entsteht, dass die ersten k Formen durch ihre conträren Formen ersetzt werden. Ich nehme an, dass die Variabelnsysteme $(x), (y), (z), \ldots$ so beschaffen sind, dass mit jedem System auch das System der contragredienten Variabeln auftritt. Diese Annahme hat zur Folge, dass die Formen des zweiten Formensystemes (4) von den nämlichen Variabelnsystemen abhängen, wie die Formen des ersten Formensystemes (1). Zugleich beschränkt diese Annahme nicht die Allgemeinheit, da man die Formen (1) in einem etwa thatsächlich nicht auftretenden Variabelnsysteme als vom Grade Null ansehen kann. (Vgl. oben.)

Die Verbindung der Resultate der Paragraphen 2 und 9 ergiebt nun den folgenden, in specieller Form von Sylvester herrührenden Satz:

„*Sind in Bezug auf ein System von Transformationen* (3)

$$J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}) \quad \textit{und} \quad K(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$$

Invarianten des ersten bezüglich zweiten Formensystemes, so ist das Resultat, welches durch Anwendung der Operation

$$K\left(\frac{\partial}{\partial a^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial a^{(2)}}, \ldots \frac{\partial}{\partial a^{(k)}}, a^{(k+1)}, \ldots a^{(r)}\right)$$

auf $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *entsteht, wieder eine Invariante des ersten Formensystemes bezüglich der Transformationen* (3)".

Und hieraus folgt der entsprechende Satz für die „Invarianten schlechthin":

„*Sind* $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *und* $K(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *Invarianten des ersten bezüglich zweiten Formensystemes, so ist das Resultat, welches durch Anwendung der Operation* $K\left(\frac{\partial}{\partial a^{(1)}}, \ldots \frac{\partial}{\partial a^{(k)}}, a^{(k+1)}, \ldots a^{(r)}\right)$ *auf* $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *entsteht, wieder eine Invariante des ersten Formensystemes.*"

§ 11.

Erzeugung von Invarianten eines Formensystemes aus denen eines zweiten Formensystemes.

Hermite hat unter dem Namen des Reciprocitätsgesetzes (loi de réciprocité) einen Satz aufgestellt, dem zu Folge man durch ein bestimmtes Verfahren aus den Covarianten m^{ten} Grades einer binären Form n^{ter} Ordnung die Covarianten n^{ten} Grades einer binären Form m^{ter} Ordnung ableiten kann.*) Die von Hermite selber, wie von späteren Autoren gegebene Darstellung dieses Verfahrens beruht wesentlich auf der Zerlegung der binären Formen in Linearfactoren und ist somit einer Verallgemeinerung auf Formen von mehreren Variabeln nicht fähig.**) Indessen ist gleichwohl dieses Verfahren nur ein specieller Fall eines weit allgemeinern, welches gestattet, aus den Invarianten eines beliebigen Formensystemes Invarianten eines zweiten Formensystemes abzuleiten. Auf diese Weise erscheint der Hermite'sche Satz in einem neuen Lichte, welches den inneren Grund seines Bestehens klar hervortreten lässt.

Es seien

(1) $$f,\ g,\ f_1,\ f_2, \ldots f_k$$

präparirte Formen von beliebigen Variabelnsystemen. Die Coefficienten der Form f bezeichne ich mit (a), die Coefficienten der Form g mit (b), ferner die conträre Form von f mit $\bar{f}$.

Ist nun weiter $\mathsf{K}(a, b)$ eine Invariante der Formen $\bar{f}$ und g, die in den Coefficienten (a) den Grad r, in den Coefficienten (b) den Grad s besitzt, so kann man

(2) $$\mathsf{K}(a, b) = L_1 A_1 + L_2 A_2 + \cdots + L_\varrho A_\varrho$$

setzen, wo $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ die präparirten Elementarterme r^{ter} Ordnung, gebildet aus den Coefficienten (a) und $L_1, L_2, \ldots L_\varrho$ ganze homogene Functionen s^{ten} Grades der Coefficienten (b) bedeuten.

---

*) Hermite: Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Cambridge und Dublin Mathematical Journal, Bd. 8, S. 172ff. Vgl. auch Faa di Bruno, Einleitung in die Theorie der binären Formen (Leipzig 1881) S. 262 und S. 297, ferner Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen Bd. 2, S. 97. Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen (Leipzig 1877) S. 181 und Sylvester, Note on M. Hermite's law of reciprocity, American Journal, Bd. 1, S. 90.

**) Der vortrefflichen Monographie von Franz Meyer „Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie" im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Berlin 1892) entnehme ich, dass Deruyts eine Ausdehnung des Reciprocitätsgesetzes gegeben hat, die sich aber nur auf specielle Formen bezieht, nämlich auf solche, die in lineare Factoren zerlegbar sind.

Ich betrachte jetzt irgend eine Invariante

(3) $$J = P_1 A_1 + P_2 A_2 + \cdots + P_\varrho A_\varrho$$

der Formen

(4) $$f, f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Die Invariante J sei in den Coefficienten (a) der Form f vom r^{ten} Grade, so dass $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ Functionen der Coefficienten von $f_1, f_2, \ldots f_k$ bezeichnen. Durch die Anwendung der Operation $\mathsf{K}\left(\frac{\partial}{\partial a}, b\right)$ auf J entsteht, wie man sich sofort überzeugt, das Resultat

(5) $$K = P_1 L_1 + P_2 L_2 + \cdots + P_\varrho L_\varrho.$$

Und nun ist nach dem Schlusssatze des letzten Paragraphen*) K eine Invariante des Formensystemes (1), oder, da K die Coefficienten (a) der Form f nicht enthält, eine Invariante des Formensystemes

(6) $$g, f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Es gilt also folgender Satz:

„*Wenn $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ die präparirten Elementarterme r^{ter} Ordnung der Coefficienten (a) einer präparirten Form f bezeichnen, wenn ferner*

$$\mathsf{K} = L_1 A_1 + L_2 A_2 + \cdots + L_\varrho A_\varrho$$

eine Simultaninvariante der zu f conträren Form $\bar{f}$ und irgend einer andern präparirten Form g, wenn endlich

$$J = P_1 A_1 + P_2 A_2 + \cdots + P_\varrho A_\varrho$$

eine Invariante des Formensystemes

$$f, f_1, f_2, \ldots f_k$$

ist, unter $f_1, f_2, \ldots f_k$ irgend welche präparirte Formen verstanden, so wird stets

$$K = P_1 L_1 + P_2 L_2 + \cdots + P_\varrho L_\varrho$$

eine Invariante des Formensystemes

$$g, f_1, f_2, \ldots f_k$$

sein.“

Nach diesem Satze entspricht also, unter Zugrundelegung einer Invariante K der Formen $\bar{f}$ und g, die in den Coefficienten dieser Formen vom r^{ten} bez. s^{ten} Grade ist, jeder Invariante J des Formensystemes $f, f_1, f_2, \ldots f_k$ vom r^{ten} Grad in den Coefficienten von f in

---

*) Der Satz ist anzuwenden auf die Formensysteme

$$f, g, f_1, f_2, \ldots f_k,$$

$$\bar{f}, g, f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Dabei ist J als Invariante der ersten und $\mathsf{K}(a, b)$ als Invariante des zweiten Formensystemes aufzufassen.

eindeutiger Weise eine Invariante K des Formensystemes $g, f_1, f_2, \dots f_k$ vom s^{ten} Grade in den Coefficienten von g.

Da eine Invariante der Form $\bar{f}$ und g auch eine Invariante der Formen f und $\bar{g}$ ist, wo $\bar{g}$ die conträre Form von g bezeichnet, so kann dieselbe Invariante K auch zur Erzeugung von Invarianten des Formensystemes $f, f_1, f_2, \dots f_k$ aus Invarianten des Formensystemes $g, f_1, f_2, \dots f_k$ verwendet werden. Man hat dann nur K nach den Coefficienten von g anzuordnen, also K in die Gestalt

$$\mathsf{K} = M_1 B_1 + M_2 B_2 + \cdots + M_\sigma B_\sigma$$

zu setzen, wo $B_1, B_2, \dots B_\sigma$ die präparirten Elementarterme s^{ter} Ordnung der Coefficienten von g bedeuten.

Wenn jetzt

$$K = Q_1 B_1 + Q_2 B_2 + \cdots + Q_\sigma B_\sigma$$

irgend eine Invariante des Formensystemes $g, f_1, f_2, \dots f_k$ ist (vom s^{ten} Grade in den Coefficienten von g), so wird stets

$$J = Q_1 M_1 + Q_2 M_2 + \cdots + Q_\sigma M_\sigma$$

eine Invariante des Formensystemes $f, f_1, f_2, \dots f_k$ sein.

Man kann hiernach vermöge der Invariante K zunächst aus einer Invariante des Formensystemes $f, f_1, f_2, \dots f_k$ eine solche des Formensystemes $g, f_1, f_2, \dots f_k$ und sodann aus dieser wieder eine Invariante des ersten Formensystemes erzeugen. Die letztere wird in den Coefficienten der Formen dieselben Gradzahlen besitzen, wie die Invariante, von der man ausging, braucht aber darum natürlich nicht mit dieser identisch zu sein.

§ 12.

Das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz.

Der Hermite'sche Satz, nach welchem man aus den Covarianten m^{ten} Grades einer binären Form $f(x_1, x_2)$ n^{ter} Ordnung die Covarianten n^{ten} Grades einer binären Form $g(x_1, x_2)$ m^{ter} Ordnung erzeugen kann, stellt sich nun als ein specieller Fall des soeben bewiesenen Satzes dar.

Die Formen f und g setze ich in präparirter Gestalt voraus. Es seien nun u_1, u_2 die zu x_1, x_2 contragredienten Variabeln und

$$f_1(u_1, u_2) = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2.$$

Dann sind die Invarianten der Formensysteme

(1) $\quad f(x_1, x_2), \quad f_1(u_1, u_2),$

(2) $\quad g(x_1, x_2), \quad f_1(u_1, u_2)$

identisch mit den Covarianten der Form f bezüglich g, die Covarianten geschrieben in den Variabeln ξ_1, ξ_2.

Nach dem Satze des vorigen Paragraphen gestattet demnach jede Simultaninvariante von $\bar{f} = f(u_1, u_2)$ und $g(x_1, x_2)$, oder, was dasselbe ist, von

$$f(-x_2, x_1) \quad \text{und} \quad g(x_1 x_2) \tag{3}$$

aus Covarianten der Form f solche der Form g herzuleiten. Man wähle nun insbesondere für diese Simultaninvariante die Resultante R der Formen (3). Diese ist in den $n+1$ Coefficienten a der Form f vom m^{ten} Grade, in den $m+1$ Coefficienten b der Form g vom n^{ten} Grade. Die Anzahl der Elementarterme m^{ten} Grades aus $n+1$ Grössen beträgt

$$\mu = \frac{(n+m)!}{n!\, m!},$$

und ist also, wegen der Symmetrie in n und m, zugleich die Anzahl der Elementarterme n^{ten} Grades aus $m+1$ Grössen. Demnach hat die Resultante R die Gestalt

$$R = L_1 A_1 + L_2 A_2 + \cdots + L_\mu A_\mu, \tag{4}$$

wobei allgemein

$$L_i = c_{i1} B_1 + c_{i2} B_2 + \cdots + c_{i\mu} B_\mu, \quad (i = 1, 2, \ldots \mu) \tag{5}$$

ist. Hier bedeuten die A_i und B_i die präparirten Elementarterme der Coefficienten a und b, während die c_{ik} numerische Coefficienten sind.

Wenn nunmehr

$$J = C_1 A_1 + C_2 A_2 + \cdots + C_\mu A_\mu \tag{6}$$

eine Covariante von f bezeichnet, die in den Coefficienten a von f vom m^{ten} Grade ist, so dass $C_1, C_2, \ldots C_\mu$ Formen von ξ_1, ξ_2 bedeuten, so ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen

$$K = C_1 L_1 + C_2 L_2 + \cdots + C_\mu L_\mu \tag{7}$$

eine Covariante von g, die in den Coefficienten dieser Form vom n^{ten} Grade ist. Auf diese Weise ist jeder Covariante m^{ten} Grades der Form n^{ter} Ordnung f eindeutig eine Covariante n^{ten} Grades der Form m^{ter} Ordnung g zugeordnet. Es kommt hier aber noch ein wesentlicher Punkt hinzu.

Die Determinante $|c_{ik}|$ der in der Resultante auftretenden numerischen Coefficienten ist nämlich von Null verschieden.*) In Folge dessen kann die Covariante K nur dann identisch verschwinden, wenn J identisch Null ist. Hieraus schliesst man weiter, dass linear unabhängigen Covarianten J auch linear unabhängige Covarianten K ent-

*) Dieser Satz lässt sich leicht mit Hülfe der Factorenzerlegung der Resultante beweisen. Es wäre indessen wünschenswerth, einen anderen von dieser Zerlegung unabhängigen Beweis zu besitzen. (Einen solchen Beweis theilte mir inzwischen Herr Gordan mit. Herr Gordan wird denselben demnächst in diesen Annalen veröffentlichen. August 1894.)

sprechen. Und da jede Covariante n^{ten} Grades von g in die Form (7) gebracht und also als entsprechende einer Covariante m^{ten} Grades von f aufgefasst werden kann, so folgt endlich, dass einem vollständigen Systeme linear unabhängiger Covarianten m^{ten} Grades von f ein vollständiges System linear unabhängiger Covarianten n^{ten} Grades von g entspricht. —

Eine ähnliche Bemerkung lässt sich offenbar an den allgemeinen Satz des vorigen Paragraphen anknüpfen für den Fall, dass die Anzahlen der Elementarterme der a und b, die in der Invariante $\mathsf{K}(a, b)$ auftreten, gleich gross sind und dass diese Invariante, aufgefasst als bilineare Function jener Elementarterme, eine nicht verschwindende Determinante besitzt.

Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen kann man die Resultante R auch dazu verwenden, aus einer Covariante m^{ten} Grades von f eine zweite solche Covariante abzuleiten. Um die hierbei in Betracht kommenden Formeln bequemer schreiben zu können, will ich festsetzen, dass die Indices i, k, h der Werthe $1, 2, \ldots \mu$ fähig sein und, wo sie als Summationsbuchstaben auftreten, alle diese Werthe durchlaufen sollen. Die Resultante R stellt sich dann (nach (4) und (5)) dar in der Gestalt:

$$R = \sum_{i,k} c_{i,k} A_i B_k .$$

Aus der Covariante m^{ten} Grades

$$J = \sum_i C_i A_i$$

der Form f geht nun dadurch, dass allgemein A_i durch seinen Factor in R ersetzt wird, die Covariante n^{ten} Grades

$$K = \sum_{i,k} C_i c_{ik} B_k$$

der Form g hervor. Führt man hier wiederum an Stelle von B_k seinen Factor in R ein, so entsteht aus K die Covariante m^{ten} Grades

$$J' = \sum_{i,k,h} C_i c_{ik} c_{h,k} A_h$$

der Form f. Wenn also unter $d_{i,h}$ die aus den Coefficienten c_{ik} der Resultante abgeleiteten Zahlen

$$d_{i,h} = \sum_k c_{i,k} \,.\, c_{h,k}$$

verstanden werden, so ist gleichzeitig mit

$$J = C_1 A_1 + C_2 A_2 + \cdots + C_\mu A_\mu$$

auch

$$J' = C_1' A_1 + C_2' A_2 + \cdots + C_\mu' A_\mu$$

eine Covariante m^{ten} Grades von f, wo zur Abkürzung

$$C_i' = d_{1,i} C_1 + d_{2,i} C_2 + \cdots + d_{\mu,i} C_\mu$$

gesetzt ist.

§ 13.

Verallgemeinerung des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes.

Indem man den Satz des Paragraphen 11 wiederholt zur Anwendung bringt, kann man aus den Invarianten irgend eines Formensystems Invarianten eines zweiten Formensystems ableiten, welches dadurch aus dem ersten entsteht, dass irgend welche Formen desselben durch irgend welche andere Formen ersetzt werden. Für den Fall der binären Formen erhält man auf diese Weise leicht die folgende Verallgemeinerung des Hermite'schen Satzes.

Es seien

(1) $$f_1, f_2, \ldots f_r, h_1, h_2, \ldots h_s,$$

(2) $$g_1, g_2, \ldots g_r, h_1, h_2, \ldots h_s$$

zwei Systeme von präparirten Formen der binären Variabeln x_1, x_2, die sich in den ersten r Formen unterscheiden. Die Coefficienten der Form f_i mögen mit $a^{(i)}$, die der Form g_i mit $b^{(i)}$, ferner die Ordnung von f_i (Grad in x_1, x_2) mit n_i, die Ordnung von g_i mit m_i bezeichnet werden. Die präparirten Elementarterme m_i^{ter} Ordnung der Coefficienten $a^{(i)}$ seien mit $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \ldots$ bezeichnet und

(3) $$R_i = \sum_k L_k^{(i)} A_k^{(i)},$$

wo die Summe sich auf alle Elementarterme $A_k^{(i)}$ erstreckt, sei die Resultante von $f_i(-x_2, x_1)$ und $g_i(x_1, x_2)$.

Die Coefficienten $L_k^{(i)}$ sind dann homogene Functionen n_i^{ten} Grades der Coefficienten $b^{(i)}$.

Wenn nun nach den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_r$ angeordnet,

(4) $$J = \sum_{k_1, k_2, \cdots k_r} C \,.\, A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} \ldots A_{k_r}^{(r)}$$

eine Invariante des Formensystemes (1) ist, welche in den Coefficienten der Form f_i den Grad m_i besitzt, so wird

(5) $$K = \sum_{k_1, k_2, \cdots k_r} C \,.\, L_{k_1}^{(1)} L_{k_2}^{(2)} \ldots L_{k_r}^{(r)}$$

eine Invariante des Formensystemes (2) sein, welche in den Coefficienten der Form g_i den Grad n_i besitzt. Durch diesen Satz wird jeder Invariante J des Formensystemes (1), von den Geraden $m_1, m_2, \ldots m_r$ in den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_r$ bez., eine bestimmte Invariante K des Formensystemes (2) zugeordnet, von den Geraden $n_1, n_2, \ldots n_r$ in den Coefficienten der Formen $g_1, g_2, \ldots g_r$ bez.

Und zwar zeigt man wieder leicht, dass einem vollständigen System linear unabhängiger Invarianten J ein vollständiges System linear unabhängiger Invarianten K entspricht.

Zürich, den 7. Juni 1894.