TEXTO 1

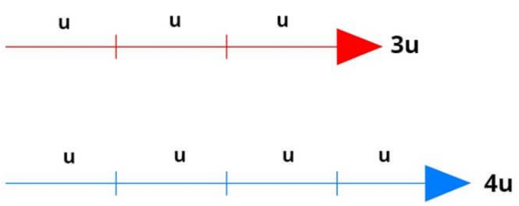
VETORES

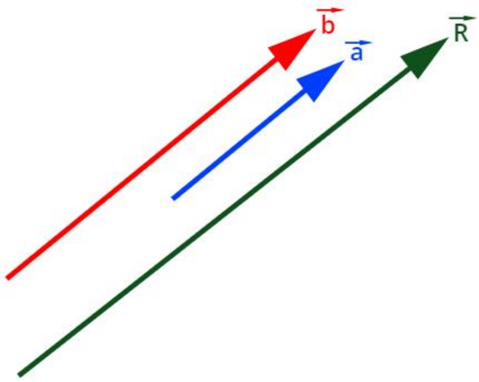
Dado um segmento orientado $\overline{AB}$ (do plano ou do espaço),considere todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento deste segmento. O conjunto de todos estes segmentos é denominado ***vetor*** determinado por $\overline{AB}$ e será denotado por v = $\overrightarrow{AB}$. Qualquer segmento deste conjunto de segmentos é denominado representante de v. O comprimento(ou módulo), a direção e o sentido de v é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes. Indica-se o módulo de v por |v|.

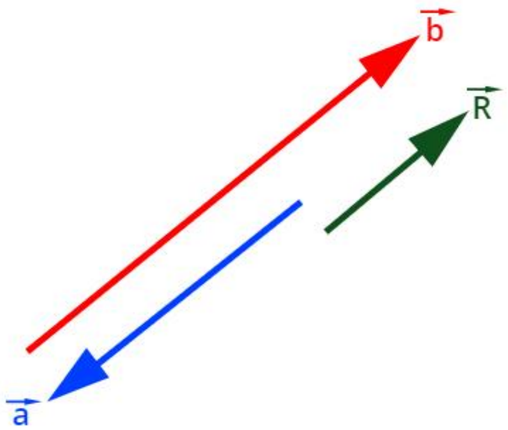
Qualquer ponto do plano ou do espaço é representante do vetor nulo que é indicado por **0**

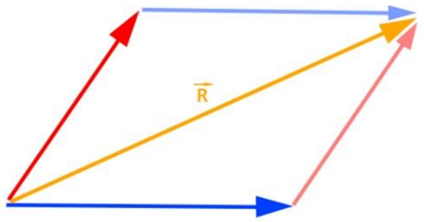
A cada vetor não-nulo v corresponde um vetor oposto –v, que tem o mesmo módulo, a mesma direção, porém sentido oposto ao de v.

Um vetor é unitário se |v|= 1.



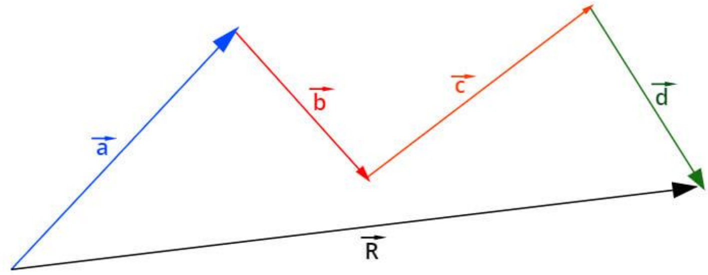






Resultante de vários vetores

Quando temos **diversos vetores** e queremos encontrar o vetor resultante, devemos **conectá-los** uns aos outros. Nesse processo, que independe da ordem escolhida, devemos ligar a ponta de um vetor ao início do próximo. No fim, o vetor resultante será aquele que liga o início do primeiro vetor com a ponta do último:



VETORES NO R^2

O conjunto

$\boldsymbol{R^2}$ = *RxR*= {(x, y) |x, y ∈ ***R*** } é representado geometricamente pelo plano cartesiano xOy.

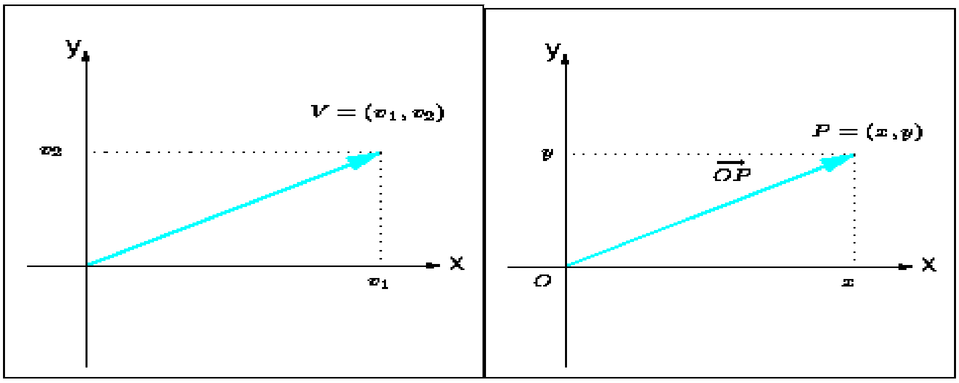
Qualquer vetor v = $\overrightarrow{AB}$ considerado neste plano tem sempre um representante cuja origem é a origem do sistema. Os vetores serão representados, neste sistema, por segmentos orientados com origem na origem do sistema. Assim, cada vetor do plano é determinado pelo ponto extremo do segmento que tem ponto inicial na origem. Portanto o ponto P = (x, y) caracteriza o vetor v = $\overrightarrow{OP}$ e escreve-se:

v = (x, y) ou v = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Neste caso x e y são as componentes ou coordenadas de v.

Coordenadas de um vetor

Sistema de Coordenadas Retangulares: Definimos as componentes de ***V*** como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de ***V*** que tem ponto inicial na origem (0,0).



Coordenadas de v = $\overrightarrow{OP}$, com P = (x,y). Neste caso

v= (x,y)

Ex: Se v = $\overrightarrow{OP}$ e P = (3, 2), então então v = (3, 2)

(Módulo ou comprimento do vetor é representado por |v|)

Se v = (v_1, v_2)

$|v|^2 = v_1^2 + v_2^2$.

$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ (Módulo ou comprimento do vetor)

Exemplo

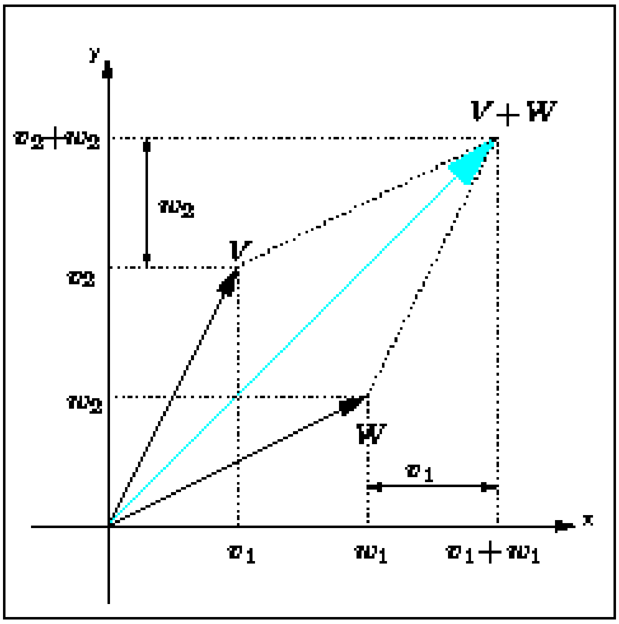
v = (4, -2)

$|v| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

ADIÇÃO DE VETORES

Dados os vetores v = (v_1, v_2) e w = (w_1, w_2), define-se:

$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$



MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Seja v = (a, b) um vetor e seja k um número real. Define-se kv = (ka, Kb).

Exemplo

v = (5, -3), ; 4v = (20, -12)

(-5)v = (-25, 15)

Nota

Se k ≠ 0 e v ≠ **0,** tem-se que

- |kv|=|k||v|
- Direção de kv : é a mesma de v
- Sentido: é o mesmo de v se k > 0 e, o oposto de v se k < 0

Exercício

Se u =(5, 1) e v = (-4, 8), determinem:

a)|u| e |v|;

b) |u| + |v|

c) |u| - |v|

d)|u+v|

= $|(1, 9)| = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$

$|u| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, $|v| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80}$

$|u| + |v| = \sqrt{26} + \sqrt{80}$

IGUALDADE DE VETORES

Dois vetores u = (x_1, y_1) e v = (x_2, y_2) são iguais, se e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se u = v.

MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Seja v = (a, b) um vetor e seja k um número real. Define-se kv = (ka, Kb).

Exemplo

v = (5, -3), ; 4v = (20, -12)

(-5)v = (-25, 15)

Nota

Se $k \neq 0$ e $v \neq \mathbf{0}$, tem-se que

- $|kv|=|k||v|$
- Direção de kv : é a mesma de v
- Sentido: é o mesmo de v se $k > 0$ e, o oposto de v se $k < 0$

ADIÇÃO DE VETORES

Dados os vetores v = (v_1, v_2) e w = (w_1, w_2), define-se:

$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

MÓDULO DE UM VETOR

O módulo de v = (a, b) é dado por

$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exercícios

1.Sejam os vetores u = (4,3), v = (-4,0) e w = (1,-3). Determine

a) u + v =

b) 2u =

c) 3u – w =

d) 2u – 4v + w =

e) |u + v| =

f) |u | + | v| =

g) a representação geométrica de u, v e w

Resolução

a) **u + v = (4, 3)+(-4, 0) = (0, 3)**

b) **2u = 2 (4, 3) = (8, 6)**

c) **3u – w = (12, 9) – (1, ´-3) = (11, 12)**

d) **2u – 4v + w = (8, 6) – (-16, 0) +(1, -3) = (25, 3)**

e) $|\mathbf{u + v}| = \sqrt{\mathbf{0^2 + 3^2}} = \mathbf{3}$

f) $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{4^2 + 3^2}} + \sqrt{\mathbf{(-4)^2 + 0^2}} = \mathbf{5 + 4 = 9}$

Nota

Consideremos o vetor v = $\overrightarrow{PQ}$ de origem no ponto P = (x_1, y_1) e extremidade e Q = (x_2, y_2). As componentes de v são dadas por ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$), isto é, **v = ($\mathbf{x_2 - x_1}$, $\mathbf{y_2 - y_1}$).** Por exemplo, se v = $\overrightarrow{PQ}$,

com P = (3, -2) e Q = (5, -6), então v = Q – P = (5,-6) –(3, -2) = (2, -4).

VETORES NO $\boldsymbol{R^3}$

O conjunto

$\boldsymbol{R^3}$ = RxRxR ={(x, y, z) |x, y, z Є $\boldsymbol{R}$ } é representado geometricamente pelo espaço cartesiano tridimensional Oxyz.

Qualquer vetor v = $\overrightarrow{AB}$ considerado neste espaço tem sempre um representante cuja origem é a origem do sistema. Os vetores serão representados, neste sistema, por segmentos orientados com origem na origem do sistema. Assim, cada vetor do espaço é determinado pelo ponto extremo do segmento que tem ponto inicial na origem. Portanto o ponto P = (x, y,z) caracteriza o vetor v = $\overrightarrow{OP}$ e escreve-se:

v = (x, y, z) ou v = $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Neste caso x, y e z são as componentes ou coordenadas de v.

IGUALDADE DE VETORES

Dois vetores u = (x_1, y_1, z_1) e v = (x_2, y_2, z_2) são iguais, se e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$ .Escreve-se u = v.

MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Seja v = (a, b, c) um vetor e seja k um número real. Define-se kv = (ka, Kb, kc).

Se $k \neq 0$ e $v \neq \mathbf{0}$, tem-se que

- $|kv|=|k||v|$
- Direção de kv : é a mesma de v
- Sentido: é o mesmo de v se $k > 0$ e, o oposto de v se $k < 0$

ADIÇÃO DE VETORES

Dados os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ define-se:

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

MÓDULO DE UM VETOR

O módulo de v = (a, b, c) é dado por

$|v|= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Exercícios

Sejam u = (4, 3, -6), v = (0, -3, 2) e w = (1,3,-2). Determine

a) u +v = (4, 0, -4)

b) 2u – w = (8,6,-12) – (1, 3, -2) = (7, 3, -10)

c) $|v| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

1. Associativa

$u+(v+w) = (u+v)+w$, quaisquer que sejam os vetores u, v e w

2. Comutativa
   $u+v = v + u$, para todos os vetores u e v
3. Existência do elemento neutro
   Existe o vetor nulo **0** tal que: u + **0 =** u**,** qualquer que seja o vetor u
4. Existência do elemento simétrico
   Para cada vetor u existe o vetor – u tal que: u + (-u) = **0**

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

1. $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$,para todos os números reais k_1, k_2 e todo vetor v
2. $k(u+v) = ku + kv$, para todos os vetores u e v e para todo número real k
3. $(k_1+k_2)v = k_1v + k_2v$, para todos os números reais k_1, k_2 e todo vetor v
4. $1u = u$, para todo vetor u

Nota: os vetores considerados são todos do mesmo espaço

Vetor Definido por Dois Pontos

Consideremos o vetor v = $\overrightarrow{PQ}$ de origem no ponto P = (x_1, y_1, z_1) e extremidade e Q = (x_2, y_2, z_2). As componentes de v são dadas por $(x_2 – x_1, y_2 – y_1, z_2 – z_1)$, isto é, $\mathbf{v = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$**.**

Por exemplo, se v = $\overrightarrow{PQ}$, com P = (3, -2, 3) e Q = (5, -6, 8), então

v = Q – P = (2, -4, 5).

Paralelismo de Dois Vetores

Os vetores u =(x_1, y_1, z_1) e v = (x_2, y_2, z_2) são *paralelos* quando existe um número real k tal que u = kv, isto é, (x_1, y_1, z_1) = k(x_2, y_2, z_2), ou seja, (x_1, y_1, z_1) = (kx_2, ky_2, kz_2).

Por exemplo, u = (6, 8, 2) e v = (-3, -4, -1) são paralelos, pois

u = (-2)v.

Banco de imagens (Vetores e Geometria Analítica. Winterle. editora Pearson)

A= (3, -2, 4)

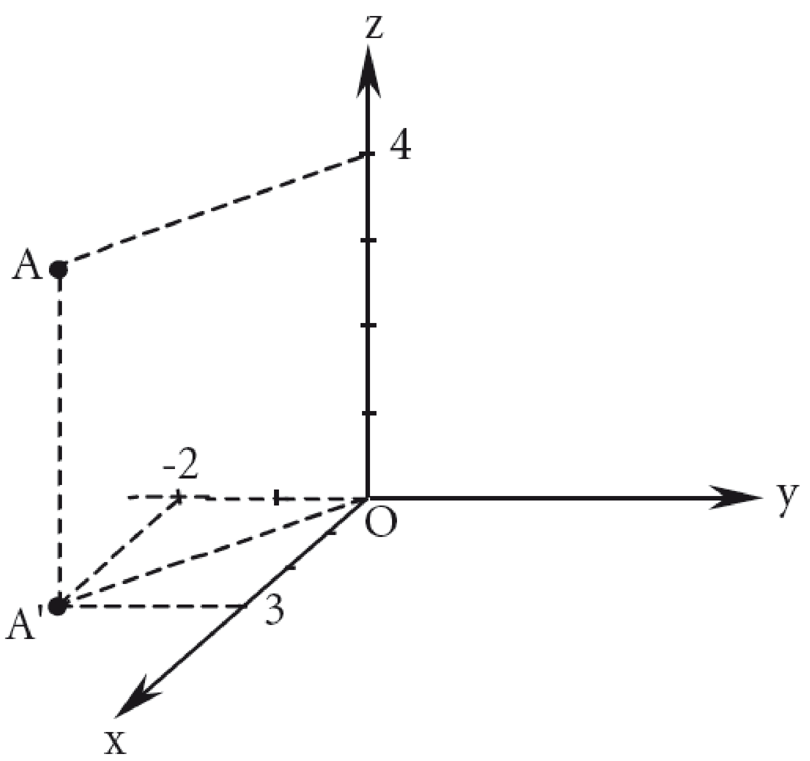


Figura 1.58

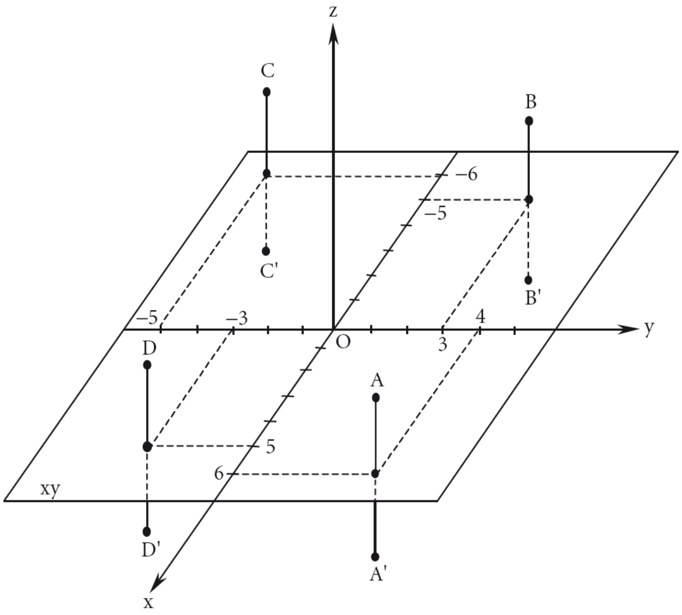


Figura 1.60

Banco de imagens (Vetores e Geometria Analítica. Winterle. editora Pearson)

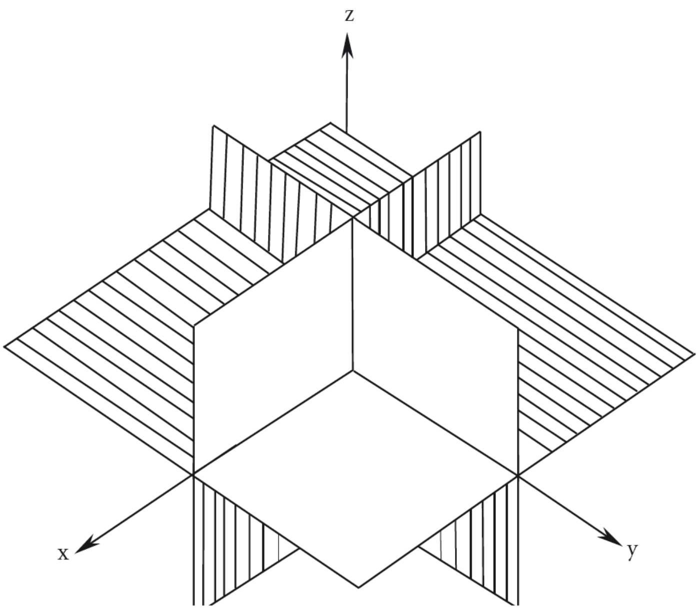


Figura 1.59

- Grandezas vetoriais: a aceleração, a velocidade e o deslocamento, força, etc.
- Grandezas escalares: a massa, o tempo e a temperatura, densidade, etc.