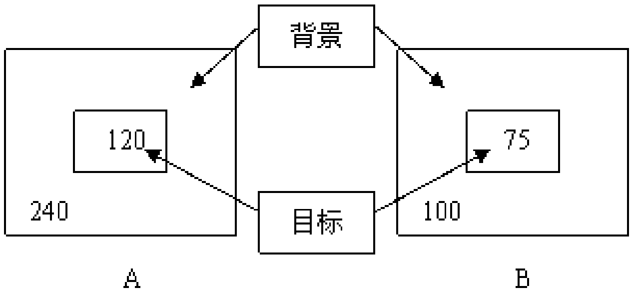
《数字图像处理》试题

1、如图所示，A 和 B 的图形完全一样，其背景与目标的灰度值分别标注于图中，

请问哪一个目标人眼感觉更亮一些？为什么？（10 分）



题 1 图

2、给出一维连续图像函数傅里叶变换的定义，并描述空间频率的概念。（10 分）

3、已知$f(x,y)$的图像数据如图所示，请计算：（15 分）

a、$f(x,y)$的离散傅里叶变换；

b、$f(x,y)$的哈德玛变换。

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

题 2 图

4、写出频域拉普拉斯算子的传递函数，并说明掩模矩阵$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$对图像$f(x,y)$的卷积与拉普拉斯算子对图像$f(x,y)$运算结果之间的关系。（15 分）

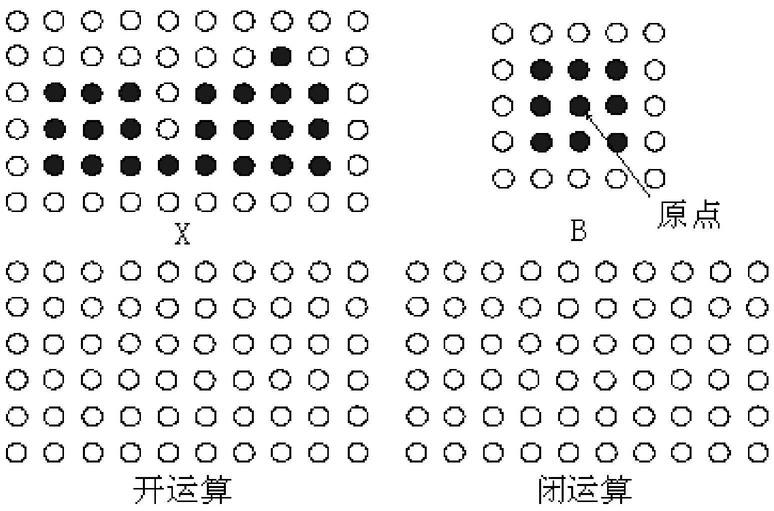
5、如图为一幅 16 级灰度的图像。请写出均值滤波和中值滤波的 3x3 滤波器；说明这两种滤波器各自的特点；并写出两种滤波器对下图的滤波结果（只处理灰色区域，不处理边界）。（15 分）

1	2	2	2	3
1	15	1	2	2
2	1	2	0	3
0	2	2	3	1
3	2	0	2	2

题 5 图

6、写出图像退化/复原的总体模型；利用线性系统的相关知识，推导线性空不变条件下连续图像函数的退化模型。（10 分）

7、如图，X 是待处理图像，黑点代表目标，白点代表背景；B 是结构元素，原点在中心。试分别给出 B 对 X 做开运算和闭运算的结果（在图中涂黑目标点即可）。（10 分）

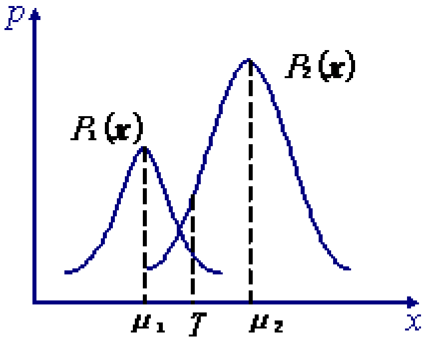


题 7 图

8、设一幅灰度图像，其目标和背景的像素点灰度呈正态分布，灰度直方图如图所示。其中：$p_1(x)$、μ_1 分别为目标点的灰度分布密度函数、均值；$p_2(x)$、μ_2 分别为背景点的灰度分布密度函数、均值。并设目标点和背景点的方差均为 σ^2，

目标点个数和图像总像点数的比为 1:2。T 是根据最小误差准则确定的最佳阈值。（15 分）

试证明：$T=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$



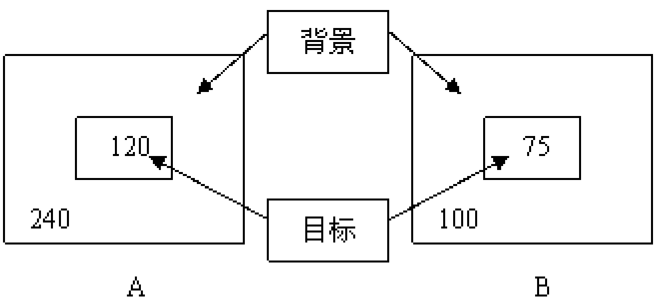
目标点和背景点的灰度分布

题 8 图

《数字图像处理》试题答案

1、如图所示，A 和 B 的图形完全一样，其背景与目标的灰度值分别标注于图中，

请问哪一个目标人眼感觉更亮一些？为什么？（10 分）



题 1 图

答：B 感觉更亮一些。

$\because A:\dfrac{\Delta I}{I}=\dfrac{120}{240}=0.5$

$B:\dfrac{\Delta I}{I}=\dfrac{30}{100}=0.3$（5 分，给出相对亮度概念即可给分）

因为目标比背景暗，所以 $\dfrac{\Delta I}{I}$ 越大，感觉越暗，所以 A 更暗，即 B 更亮一些。（5 分）

2、给出一维连续图像函数傅里叶变换的定义，并描述空间频率的概念。（10 分）

答：1 一维连续图像函数 $f(x)$ 的傅立叶变换定义为：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\{-j2\pi ux\}dx$$ （5 分）

2 空间频率是指单位长度内亮度作周期变化的次数。（2 分）对于傅立叶变换基函数 $\exp\{-j2\pi ux\}=\cos 2\pi(ux)-j\sin 2\pi(ux)$，

考虑 $\cos 2\pi(ux)$ 的最大值直线在坐标轴上的截距为 $1/u$，则 $1/u$ 表示空间周期，u 即为空间频率。（3 分）

3、已知 $f(x,y)$ 的图像数据如图所示，请计算：（15 分）

a、$f(x,y)$ 的离散傅里叶变换；

b、$f(x,y)$ 的哈德玛变换。

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

题 3 图

答：1 $F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{0}^{3}\sum_{0}^{3}f(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$

$u,v=0,1,2,3$ 令 $W^{mn}=\exp\{-j2\pi mn/N\}$，

则 $$A_x=A_y=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix},$$

$$F(u,v)=\frac{1}{4}A_x f A_y=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

（5 分）

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 44 & -10-10j & 0 & -10+10j \\ -2-2j & -2j & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2+2j & -2 & 0 & 2j \end{bmatrix}$$

2 $$A_C=A_R=\frac{1}{\sqrt{4}}H_4=\frac{1}{2}H_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$（3 分）

则 $f(x,y)$ 哈德玛变换为

$$T=A_C f A_R=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 44 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$（3 分）

4、写出频域拉普拉斯算子的传递函数，并说明掩模矩阵$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$对图像$f(x,y)$的卷积与拉普拉斯算子对图像$f(x,y)$运算结果之间的关系。（15 分）

答：1 $g(x,y)=\nabla^2 f(x,y)$

$$G(u,v)=\mathcal{F}\{g(x,y)\}=\mathcal{F}\{\nabla^2 f(x,y)\}=\mathcal{F}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\}$$

$$=\mathcal{F}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\}+\mathcal{F}\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\}$$

$$=(j2\pi u)^2 F(u,v)+(j2\pi v)^2 F(u,v)$$

$$=-(2\pi)^2(u^2+v^2)F(u,v)$$

$$F(u,v) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow G(u,v)$$

$\therefore H=-(2\pi)^2(u^2+v^2)$（6 分）

2 相当于原图像与拉普拉斯算子运算之差（3 分）。

因为

$$\nabla^2 f(i,j) = f(i-1,j) + f(i+1,j) + f(i,j-1) + f(i,j+1) - 4f(i,j)$$

拉式算子：$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$（2 分）

所以：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（4 分）

5、如图为一幅 16 级灰度的图像。请写出均值滤波和中值滤波的 3x3 滤波器；说明这两种滤波器各自的特点；并写出两种滤波器对下图的滤波结果（只处理灰色区域，不处理边界）。（15 分）

1	2	2	2	3
1	15	1	2	2
2	1	2	0	3
0	2	2	3	1
3	2	0	2	2

题 5 图

答：均值滤波：$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$（2 分）

中值滤波：$g(x,y) = Median[x_1, x_2, \cdots, x_9]$（2 分）

均值滤波可以去除突然变化的点噪声，从而滤除一定的噪声，但其代价是图像有一定程度的模糊；中值滤波容易去除孤立的点、线噪声，同时保持图像的边缘。（5 分）

均值滤波：

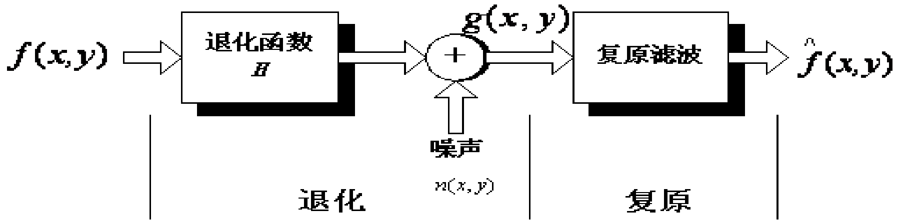
1	2	2	2	3
1	3	3	2	2
2	3	3	2	3
0	2	2	2	1
3	2	0	2	2

（3 分）

中值滤波：

1	2	2	2	3
1	2	2	2	2
2	2	2	2	3
0	2	2	2	1
3	2	0	2	2

（3 分）



6、写出图像退化/复原的总体模型；利用线性系统的相关知识，推导线性空不变条件下连续图像函数的退化模型。（10 分）

答：

$\because g(x,y)=H[f(x,y)]+n(x,y)$ （5 分）

线性系统中：$g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)h(x,\alpha,y,\beta)d\alpha d\beta+n(x,y)$

其中 $h(x,\alpha,y,\beta)$ 为系统 H 的冲激响应。

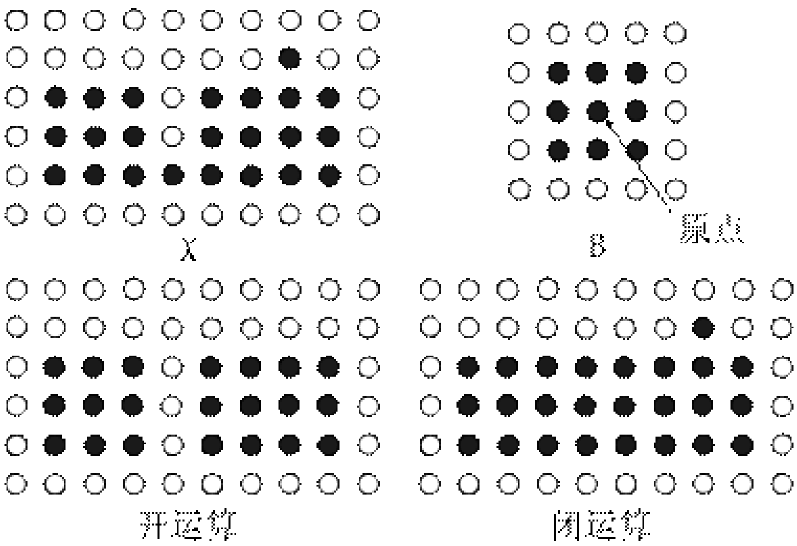
又空不变系统，则 $H\cdot\delta(x-\alpha,y-\beta)=h(x-\alpha,y-\beta)$

$$\therefore g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta+n(x,y)$$

$$=f(x,y)*h(x,y)+n(x,y)$$ （5 分）

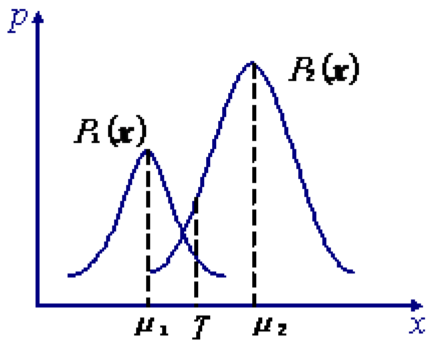
7、如图，X 是待处理图像，黑点代表目标，白点代表背景；B 是结构元素，原点在中心。试分别给出 B 对 X 做开运算和闭运算的结果（在图中涂黑目标点即可）。（10 分）（开运算和闭运算各 5 分）

题 7 图



8、设一幅灰度图像，其目标和背景的像素点灰度呈正态分布，灰度直方图如图所示。其中：$p_1(x)$、μ_1 分别为目标点的灰度分布密度函数、均值；$p_2(x)$、μ_2 分别为背景点的灰度分布密度函数、均值。并设目标点和背景点的方差均为 σ^2，目标点个数和图像总像点数的比为 1:2。T 是根据最小误差准则确定的最佳阈值。（15 分）

试证明：$T=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$



目标点和背景点的灰度分布

题 8 图

证明：整幅图像的密度函数为

$$S(x)=\frac{1}{2}p_1(x)+\frac{1}{2}p_2(x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}\}$$ （5 分）

以阈值 T 进行分割，灰度小于 T 的像点作为背景点，否则作为目标点。则总的误判概率为：

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{T}p_2(x)dx+\frac{1}{2}\int_{T}^{+\infty}p_1(x)dx$$

阈值 T 的选择应使总的误判概率最小，即 $\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t}=0$，则（5 分）

$$-\frac{1}{2}p_1(T)+\frac{1}{2}p_2(T)=0$$

即

$$\ln\frac{\sigma 2}{\sigma_1}-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}=\frac{-(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}$$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，

$$\therefore (T-\mu_1)^2=(T-\mu_2)^2$$

$$\therefore T=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$$ （5 分，需要给出详细证明过程）