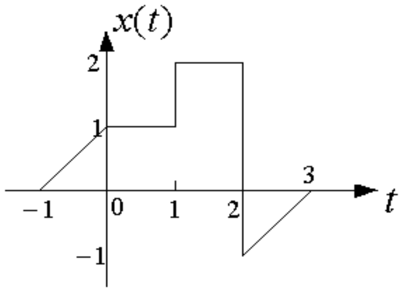
第 1 章 信号与系统(P43)

1.1 (1) 已知连续时间信号 $x(t)$ 如图 (a)所示。试画出下列各信号的波形图，并加以标注。

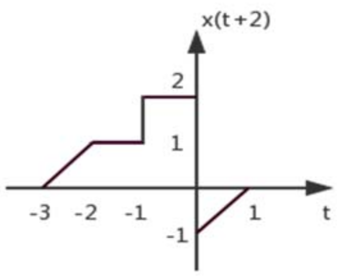
(c) $x(2t+2)$



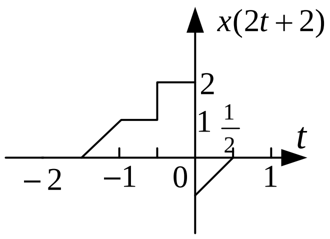
(a)

具体过程：

左移 2 得到:



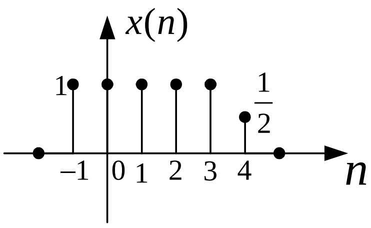
尺度变换得到:



（c）

1.2 (1) 已知离散时间信号 $x(n)$ 如图 (a)所示，试画出下列各信号的波形图，并加以标注。

$$\hat{x}(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{3}), & n \\ 0，其他n \end{cases}$$

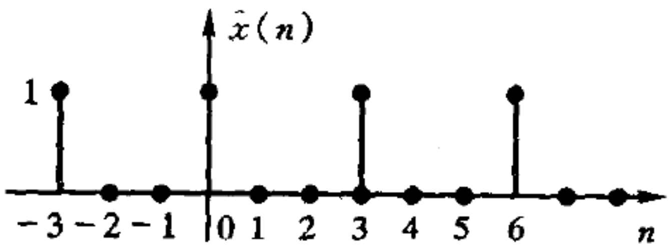


(a)

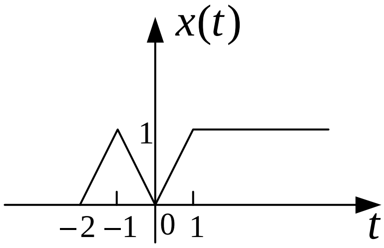
分析：书本 P19 信号的内插

$\hat{x}(n)$ 是通过对 $x(n)$ 两点之间插入两个零点来实现。

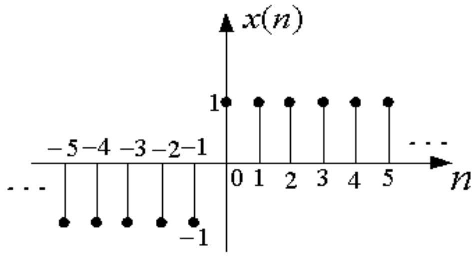
$\hat{x}(n)$ 为



1.3 画出图 P1.3 所给各信号的奇部和偶部。



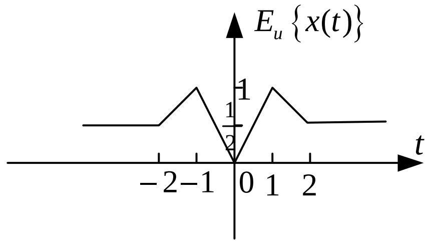
(b)

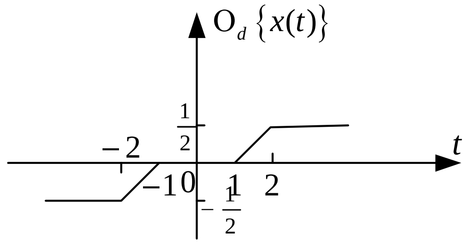


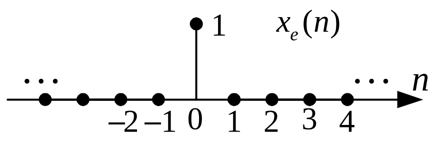
(c)

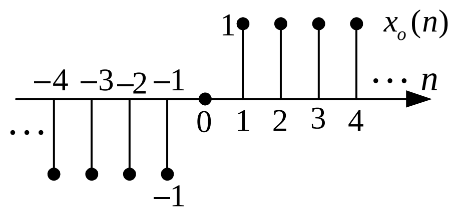
分析：书本 P14

$$\begin{cases} E_u\{x(t)\} = \left(x(t)+x(-t)\right)/2 \\ O_d\{x(t)\} = \left(x(t)-x(-t)\right)/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_e(n) = \left(x(n)+x(-n)\right)/2 \\ x_o(n) = \left(x(n)-x(-n)\right)/2 \end{cases}$$









1.5 判断下列各信号是否是周期信号，如果是周期信号，求出它的基波周期。

(b) $x(n)=\cos(8\pi n/7+2)$

(c) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$

(g) $x(n)=\cos(n/4)\times\cos(n\pi/4)$

分析：书本 P11, P27, P24,

(b) $x(n)=\cos(8\pi n/7+2)$，周期信号，

$\because\ \omega_0=\dfrac{8\pi}{7}$，

$\therefore\ N=m\dfrac{2\pi}{\omega_0}=m\dfrac{2\pi}{8\pi/7}=\dfrac{7}{4}m;$　　当m=4时基波周期$N_0=7$.　(P27)

验证：$x(n+7k)=\cos(8\pi(n+7k)/7+2)=\cos(8\pi n/7+2)=x(n)$　(P11)

(c) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$，周期信号，$T=2$。

$\because\ \Omega_0=\pi$，

$\therefore\ T=k\dfrac{2\pi}{|\Omega_0|}=k\dfrac{2\pi}{\pi}=2k;$　　当k=4时基波周期$T_0=2$.　(P24)

(g) $\because\ \cos\dfrac{n}{4}$ 是非周期的，$\therefore\ x(n)$ 是非周期信号。

1.13 根据本章的讨论，一个系统可能是或者不是：①瞬时的；②时不变的；③线性的；④因果的；⑤稳定的。对下列各方程描述的每个系统，判断这些性质中哪些成立，哪些不成立，说明理由。

(a) $y(t)=e^{x(t)}$

(b) $y(n)=x(n)x(n-1)$

(f) $y(n)=nx(n)$

(a) 无记忆（瞬时的）。∵ 输出只决定于当前时刻 t 的输入，与其它时刻的输入无关。(P37)

非线性。∵ $e^{x_1(t)+x_2(t)}=e^{x_1(t)}e^{x_2(t)}=y_1(t)y_2(t)\neq y_1(t)+y_2(t)$ 不满足叠加性(P41)

时不变。∵ $e^{x(t-t_0)}=y(t-t_0)$ (P39)

因果。∵ 无记忆系统必然是因果的。输出只决定于当前时刻 t 的输入以及时刻 t 以前的输入。(P39)

稳定。∵ 当 $|x(t)|\leq M$ 时，$|y(t)|=|e^{x(t)}|\leq e^{|x(t)|}\leq e^{M}$。 (P39)

(b) 记忆。∵ 输出不只决定于 n 时刻的输入，还决定于 n-1 时刻的输入。

非线性。∵ 系统不满足叠加性和齐次性。

时不变。∵ $x(n-n_0)x(n-n_0-1)=y(n-n_0)$。

因果。∵ 输出只与当时和以前的输入有关。

稳定。∵ 当 $x(n)$ 有界时，$x(n-1)$ 也有界，从而 $y(n)$ 必有界。

(f) 无记忆。∵ $y(n)$ 只与当时的输入有关。

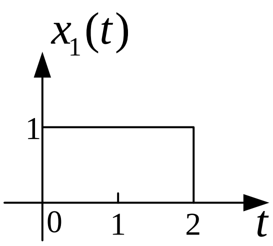
时变。∵ $nx(n-n_0)\neq y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$。

线性。∵ 系统满足叠加性和齐次性。

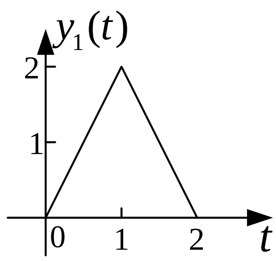
因果。∵无记忆系统必定是因果的。

不稳定。∵ $x(n)$ 有界但 $n\to\infty$ 时，$y(n)\to\infty$。

1.16 已知某线性时不变系统对图 P1. 16(a)所示信号 $x_1(t)$ 的响应是图 P1. 16(b)所示的 $y_1(t)$。分别确定该系统对图 P1. 16(c)和(d)所示输入 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的响应 $y_2(t)$ 和 $y_3(t)$，并画出其波形图。



(a)



(b)

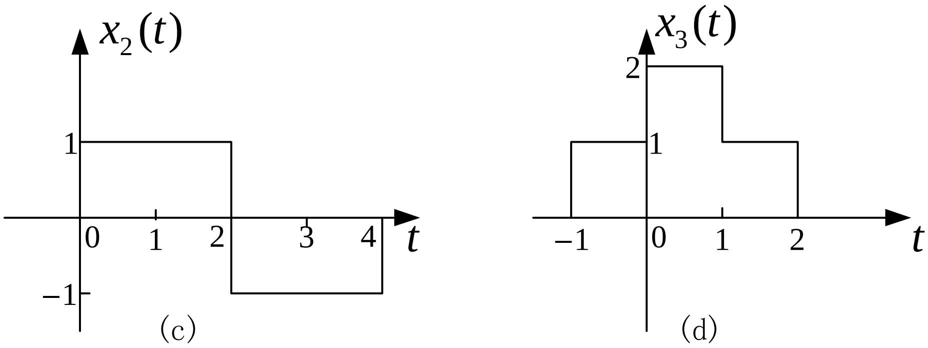


图 P1.16

分析:书本 P40

解：（a）$\because\ x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-2)\quad \therefore\ y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-2)$ 如图 PS1.16（a）所示。

（b）$\because\ x_3(t)=x_1(t+1)+x_1(t)\quad \therefore\ y_3(t)=y_1(t+1)+y_1(t)$ 如图 PS1.16（b）所示。

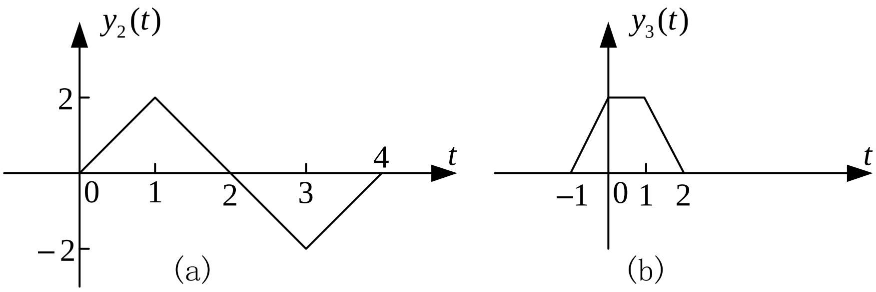
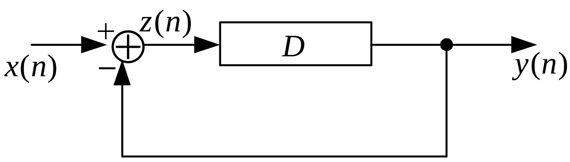


图 PS1.16

1.18 对图所示的反馈系统，假定 $n<0$ 是， $y(n)=0$。

（a）当 $x_1(n)=\delta(n)$ 时，求输出 $y_1(n)$，并画出其波形图。

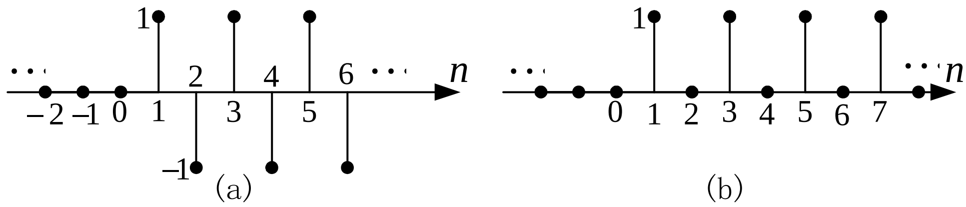
（b）当 $x_2(n)=u(n)$ 时，求输出 $y_2(n)$，并画出其波形图。



分析:书本 P35

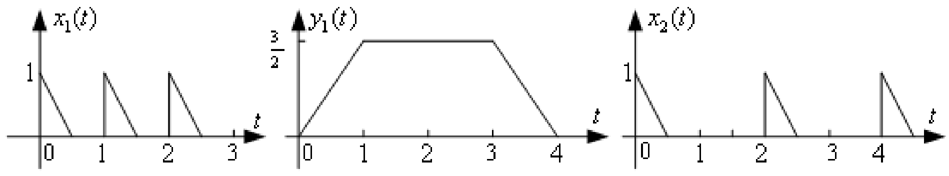
（a）$y_1(n+1)=\delta(n)-y_1(n)\Rightarrow\begin{cases}y_1(0)=\delta(-1)-y_1(-1)=0\\ y_1(1)=\delta(0)-y_1(0)=1\\ y_1(2)=\delta(1)-y_1(1)=-1\\ y_1(3)=\delta(2)-y_1(2)=1\\ \vdots\end{cases}$ （P31）

(b) $y_2(n+1)=u(n)-y_2(n)\Rightarrow\begin{cases} y_2(0)=u(-1)-y_2(-1)=0 \\ y_2(1)=u(0)-y_2(0)=1 \\ y_2(2)=u(1)-y_2(1)=0 \\ y_2(3)=u(2)-y_2(2)=1 \\ \vdots \end{cases}$ (P29)



(a) (b)

1.19 某线性时不变系统，当输入为图（a）所示的 $x_1(t)$ 时，输出 $y_1(t)$ 如图（b）所示。试求当输入为（c）所示的 $x_2(t)$ 时，系统的输出 $y_2(t)$。



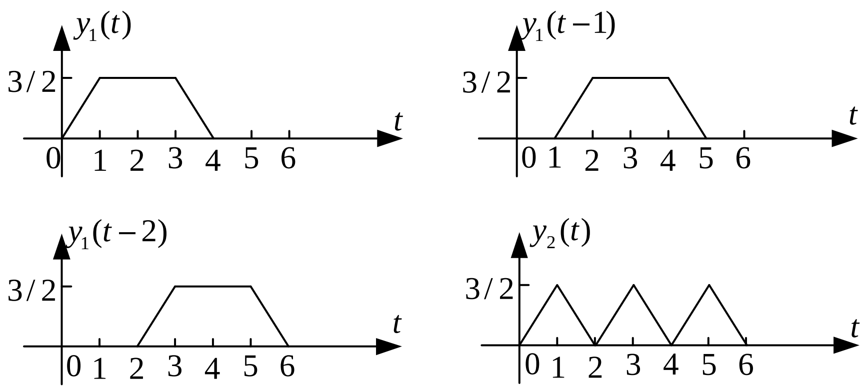
(a) (b) (c)

解： 由观察可知 $x_2(t)=x_1(t)-x_1(t-1)+x_2(t-2)$

∵ 当输入为 $x_1(t)$ 时，输出为 $y_1(t)$

∴ 由 LTI 系统性质可知当输入为 $x_2(t)$ 时，输出 $y_2(t)=y_1(t)-y_1(t-1)+y_2(t-2)$。

(P40)



第 2 章 信号与系统的时域分析(P84)

2.2 计算下列各对信号的卷积和 $y(n)=x(n)*h(n)$:

(a) $x(n)=\alpha^n u(n)$ $\quad h(n)=\beta^n u(n)$ $\quad \alpha\neq\beta$

(c) $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-4)$ $\quad h(n)=4^n u(2-n)$

(d) $x(n)=h(n)$ 如图 P2.2 所示， $y(n)$ 的最大值在什么位置出现？其值为多少？

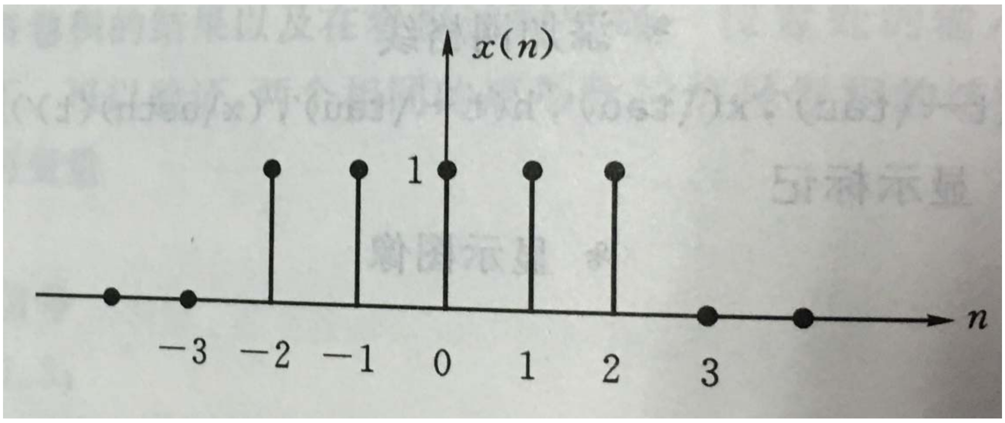


图 P2.2

解：书本 P54

(a)

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^k u(k)\beta^{n-k}u(n-k)$$

$$=\beta^n\sum_{k=0}^{n}(\alpha/\beta)^k=\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right]u(n)$$

(c) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k-4]4^{n-k}u[2-n+k]$

令 $\begin{cases}k-4\geqslant 0\\ 2-n+k\geqslant 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}k\geqslant 4\\ k\geqslant n-2\end{cases}$

当 $n-2\leqslant 4$ 即 $n\leqslant 6$ 时，则有

$$y[n]=\sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^{n-k}=4^n\sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k$$

$$=4^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k-\sum_{k=0}^{3}\left(-\frac{1}{8}\right)^k\right]$$

$$=4^n\left[\frac{1}{1+1/8}-\frac{1-(-1/8)^4}{1+1/8}\right]=\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^4 4^n$$

当 $n-2>4$ 即 $n>6$ 时，则有

$$y[n]=\sum_{k=n-2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}4^{n-k}=4^{n}\sum_{k=n-2}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k}$$

$$=4^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{n-3}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k}\right]$$

$$=4^{n}\left[\frac{1}{1+1/8}-\frac{1-(-1/8)^{n-2}}{1+1/8}\right]=\frac{512}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

故

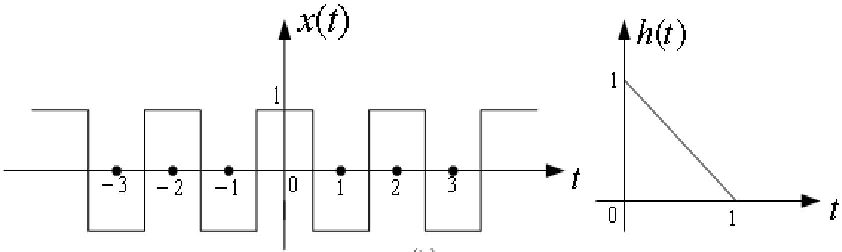
$$y[n]=\begin{cases}\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^{4}4^{n}, & n\leqslant 6\\ \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}, & n>6\end{cases}$$

(d)

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$
$$=x(-2)h(n+2)+x(-1)h(n+1)+x(0)h(n)+x(1)h(n-1)+x(2)h(n-2)$$
$$=h(n+2)+h(n+1)+h(n)+h(n-1)+h(n-2)$$

$y(n)$ 的最大值在 n=0 的位置出现，其值为 5。

2.3 已知 x(t)和 h(t)如图所示，用图解法计算卷积积分 y(t)=x(t)*h(t) ,y(t)是周期的吗？为什么？



(b)

解：

(e) 设 $x_0(t)=u\left(t+\frac{1}{2}\right)-u\left(t-\frac{1}{2}\right)-\left[u\left(t-\frac{1}{2}\right)-u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]$，

则

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0(t-2n)$$

即 $x(t)$ 是以 $x_0(t)$ 重复的周期信号，且 $T=2$。

$$y(t)=x(t)*h(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0(t-2n)\right]*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_0(t-2n)*h(t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_0(t-2n)$$

即 $y(t)$ 也是周期为 $T=2$ 的周期信号，其中

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= x_0(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [-(t-\tau-1)][u(t-\tau)-u(t-\tau-1)]\mathrm{d}\tau \\
&\quad - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} [-(t-\tau-1)][u(t-\tau)-u(t-\tau-1)]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau-t+1)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau-t+1)u(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau \\
&\quad - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (\tau-t+1)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (\tau-t+1)u(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau-t+1)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau &= \begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{t} (\tau-t+1)\mathrm{d}\tau \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau-t+1)\mathrm{d}\tau \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}, & -\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{1}{2} \\ 1-t, & t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau-t+1)u(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau &= \begin{cases} -\int_{-\frac{1}{2}}^{t-1} (\tau-t+1)\mathrm{d}\tau \\ -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau-t+1)\mathrm{d}\tau \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}, & \frac{1}{2} \leqslant t < \frac{3}{2} \\ t-1, & t \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(\tau-t+1)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}-\int_{\frac{1}{2}}^{t}(\tau-t+1)\mathrm{d}\tau\\-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(\tau-t+1)\mathrm{d}\tau\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{5}{8}, & \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{2}\\t-2, & t\geqslant\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(\tau-t+1)u(t-\tau-1)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}\int_{\frac{1}{2}}^{t-1}(\tau-t+1)\mathrm{d}\tau\\\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(\tau-t+1)\mathrm{d}\tau\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{9}{8}, & \frac{3}{2}\leqslant t<\frac{5}{2}\\2-t, & t\geqslant\frac{5}{2}\end{cases}$$

故当$-\frac{1}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}$时， $y_0(t)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}$

当$\frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{2}$时，

$y_0(t)=1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{5}{8}=t^2-3t+\frac{7}{4}$

当$\frac{3}{2}\leqslant t<\frac{5}{2}$时，

$$y_0(t)=1-t+t-1+t-2-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{9}{8}=-\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{2}t-\frac{25}{8}$$

当 $t\geqslant\frac{5}{2}$ 时， $y_0(t)=1-t+t-1+t-2+2-t=0$

当 $t<-\frac{1}{2}$ 时， $y_0(t)=0$

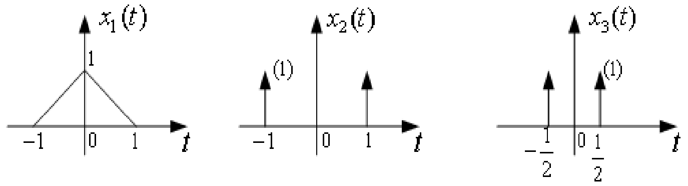
即 $y_0(t)$ 仅在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$ 上不为零，且

$$y_0(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}, & -\frac{1}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}\\ t^2-3t+\frac{7}{4}, & \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{2}t-\frac{25}{8}, & \frac{3}{2}\leqslant t\leqslant\frac{5}{2}\end{cases}$$

$y(t)$ 则是以 $y_0(t)$ 重复的周期信号，其周期也为 2。

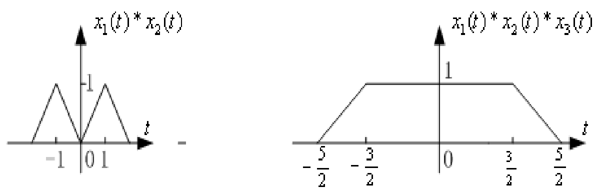
2.5 各信号波形如图所示，求下列卷积:

(a) $x_1(t)*x_2(t)$ (d) $x_1(t)*x_2(t)*x_3(t)$



(a) (b) (c)

解：书本 P59



(a) (d)

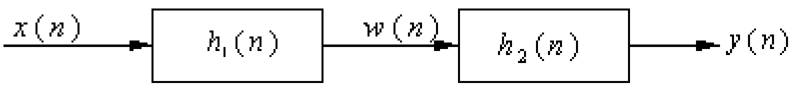
2.7 对图所示的两个 LTI 系统的级联，已知：

$h_1(n) = \sin 6n$

$h_2(n) = a^n u(n),\ |a| < 1$

输入为 $x(n)=\delta(n)-a\delta(n-1)$

求输出 $y(n)$ 。



解：书本 P65

$y(n)=x(n)*h_1(n)*h_2(n)$

$=(x(n)*h_2(n))*h_1(n)$ P65

$=\left(\delta(n)-a\delta(n-1)\right)*\left(a^n u(n)\right)*\left(sin6n\right)$

$=\left(a^n u(n)-aa^{n-1}u(n-1)\right)*\left(sin6n\right)$ P59

$=a^n\delta(n)*\left(sin6n\right)$ P31

$=a^0\delta(n)*\left(sin6n\right)$ P31

$=sin6n$ P59

2.8 对图 P2.8-1 所示的 LTI 系统的互联：

(a) 用 $h_1(n),h_2(n),h_3(n),h_4(n),h_5(n)$ 表示总的单位脉冲响应 $h(n)$；

(b) 当 $h_1(n)=4\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)-u(n-3)\right]$

$$h_2(n)=h_3(n)=(n+1)u(n)$$
$$h_4(n)=\delta(n-1)$$
$$h_5(n)=\delta(n)-4\delta(n-3)$$

时，求 $h(n)$。

(c) $x(n)$ 如图 P2.8-2 所示，求(b)中所给系统的响应，并画出响应的波形图。

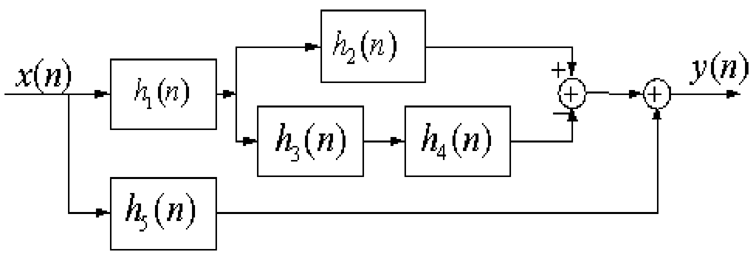


图 P2.8-1

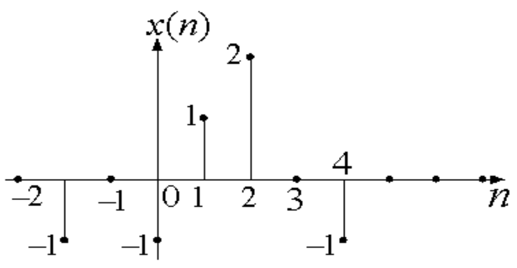


图 P2.8-2

解：(a) $h(n)=h_5(n)+h_1(n)*\left[h_2(n)-h_3(n)*h_4(n)\right]$ 书本 P64，P65

(b) $\because$ $h_3(n)*h_4(n)=(n+1)u(n)*\delta(n-1)=nu(n-1)$ P59

$$h_2(n)-h_3(n)*h_4(n)=h_2(n)-nu(n-1)=(n+1)u(n)-nu(n-1)=n\delta(n)+u(n)=u(n)$$ P31

$$h_1(n)*\left[h_2(n)-h_3(n)*h_4(n)\right]=h_1(n)*u(n)=4\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)-u(n-3)\right]*u(n)$$

$$=4\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]*u(n)$$

$$=4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta(n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta(n-2)\right]*u(n)$$

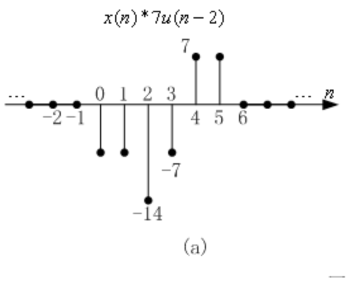
$$=4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0\delta(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^1\delta(n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\delta(n-2)\right]*u(n)$$

$$=\left[4\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]*u(n)$$
$$=4u(n)+2u(n-1)+u(n-2)=4\left[u(n-1)+\delta(n)\right]+2u(n-1)+u(n-2)$$
$$=4\delta(n)+6u(n-1)+u(n-2)=4\delta(n)+6\left[u(n-2)+\delta(n-1)\right]+u(n-2)$$
$$=4\delta(n)+6\delta(n-1)+7u(n-2)$$

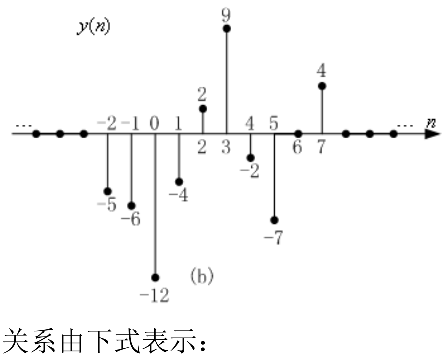
$$\therefore\ h(n)=5\delta(n)+6\delta(n-1)-4\delta(n-3)+7u(n-2)$$

(c) $y(n)=x(n)*h(n)=5x(n)+6x(n-1)-4x(n-3)+7\sum_k x(k)u(n-k-2)$

其中 $x(n)*7u(n-2)$ 如图 PS2.8(a)所示， $y(n)$ 如图 PS2.8(b)所示。



(a)



(b)

2.9 某线性时不变系统的输入输出关系由下式表示：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

(a) 该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是什么？

(b) 当 $x(t)$ 如图所示时，确定系统的响应 $y(t)$ 。

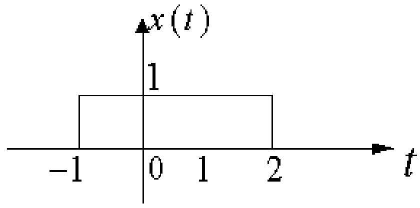


图 P3.7

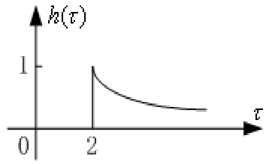
解：(a) $\because\ y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{t-2}x(\sigma)e^{-(t-\sigma-2)}d\sigma=x(t)*e^{-(t-2)}u(t-2)$

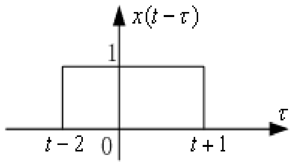
$\therefore\ h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$

(b) 由图知，当$t\le 1$时，$y(t)=x(t)*h(t)=0$

当$1<t\le 4$时，$y(t)=\int_{2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=1-e^{-(t-1)}$

当$t>4$时，$y(t)=\int_{t-2}^{t+1}e^{-(\tau-2)}d\tau=e^{-(t-4)}-e^{-(t-1)}$





2.12 判断下列每一个系统的稳定性和因果性。

(a) $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$ (c) $h(n)=(0.9)^n u(-n)$

(e) $h(t)=e^{-5t}u(t-1)$ (g) $h(t)=e^{-6|t|}$

解：(a) $\because$ $n<0$时，$h(n)=0$，$\therefore$ 系统是因果的。

又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=2$ $\therefore$ 系统是稳定的。

(c) $\because$ $n<0$时，$h(n)\ne 0$，$n>0$时，$h(n)=0$，$\therefore$ 系统反因果。

又 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{0}(0.9)^n=\infty$，$\therefore$ 系统不稳定。

(e) $\because$ $t<0$时，$h(t)=0$，$\therefore$ 系统是因果的。

又 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{1}^{\infty}e^{-5t}dt<\infty$，$\therefore$ 系统稳定。

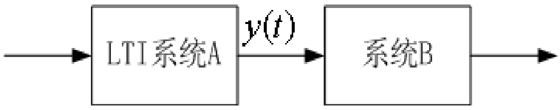
(g) $\because$ $t<0$时，$h(t)\ne 0$，$\therefore$ 系统非因果。

又$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{0}e^{6t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-6t}dt=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}<\infty$， $\therefore$ 系统稳定。

2.13 对图所示的级联系统，已知系统 A 是 LTI 系统，系统 B 是系统 A 的逆系统。设 $y_1(t)$ 表示系统 A 对 $x_1(t)$ 的响应， $y_2(t)$ 是系统 A 对 $x_2(t)$ 的响应。

(a) 系统 B 对输入 $ay_1(t)+by_2(t)$ 的响应是什么？这里 a 和 b 是常数。

(b) 系统 B 对输入 $y_1(t-\tau)$ 的响应是什么？



解：(a) $\because$ 系统 B 是系统 A 的逆系统，$\therefore$ 图中所示的整个系统是恒等系统。系统 A 对 $ax_1(t)+bx_2(t)$ 的响应为 $ay_1(t)+by_2(t)$，因此系统 B 对输入 $ay_1(t)+by_2(t)$ 的响应为 $ax_1(t)+bx_2(t)$。

(b) $\because$ 系统 A 对 $x_1(t-\tau)$ 的响应是 $y_1(t-\tau)$，

$\therefore$ 系统 B 对 $y_1(t-\tau)$ 的响应是 $x_1(t-\tau)$。

2.16 用直接Ⅱ型结构实现下列每个离散时间 LTI 系统，假定这些系统都是最初松弛的

(a) $y(n)-y(n-1)=x(n)-x(n-4)$

解：(a) 直接Ⅱ型结构如图 PS3.17(a)所示。

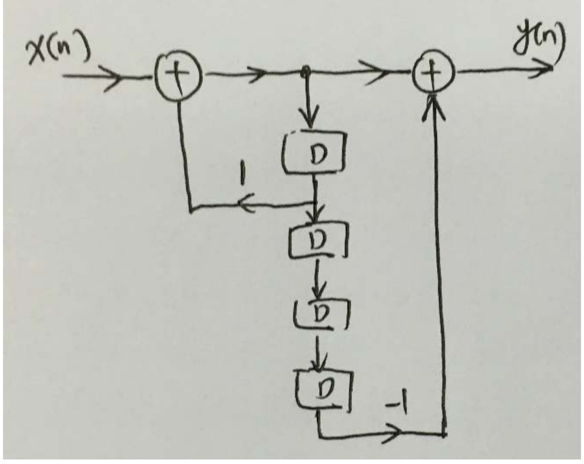


图 PS3.17

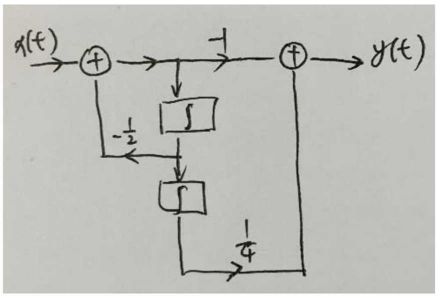
2.17 用直接Ⅱ型结构实现下列每个连续时间 LTI 系统，假定这些系统都是最初松弛的。

(a) $4\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{dy(t)}{dt}=x(t)-4\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

(b) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=x(t)-2\dfrac{dx(t)}{dt}$

解：(a) 直接Ⅱ型结构如图 PS2.17(a)所示。

(c) 直接Ⅱ型结构如图 PS2.17(b)所示。



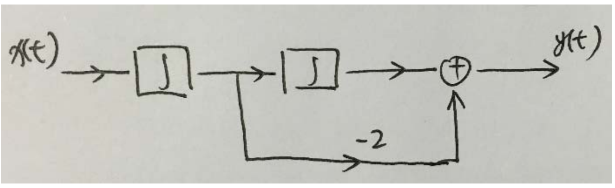


图 PS2.17

第 3 章 连续时间信号与系统的频域分析（P130）

3.2 求下列信号的傅里叶级数表示式。

(a) $x(t) = \cos 4t + \cos 6t$

(c) $x(t)$ 如图 P3.2(a)所示。

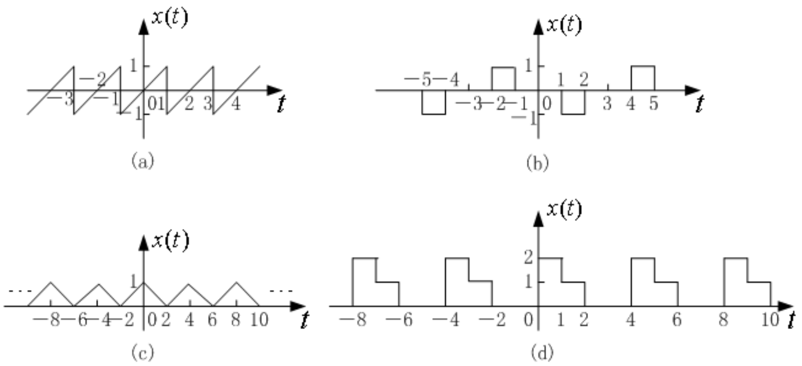


图 P3.2

解：(a) $\cos 4t + \sin 6t = \dfrac{1}{2}e^{j4t} + \dfrac{1}{2}e^{-j4t} + \dfrac{1}{2j}e^{j6t} - \dfrac{1}{2j}e^{-j6t}$，可以得到 $\omega_0 = 2$，$T_0 = \pi$，

信号中只含有 2 次和 3 次谐波，且

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2};\ a_3 = a_{-3}^* = \frac{1}{2j};\ a_{-3} = a_3^* = -\frac{1}{2j};\ a_k = 0\ \ (k \neq \pm 2, \pm 3)$$

(c)

解 (a) 对于图 3-4(a)，$T = 2, \omega_0 = 2\pi/T = \pi, x(t) = t$，$-1 \leqslant t < 1$。由于 $x(-t) = -x(t)$，所以 $a_0 = 0$。

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}dt = -\frac{1}{j2k\pi}\int_{-1}^{1} t\,de^{-jk\pi t}$$

$$= -\frac{1}{j2k\pi}\left[te^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-jk\pi t}dt\right]$$

$$= -\frac{1}{j2k\pi}\left[e^{-jk\pi} + e^{jk\pi} + \frac{1}{jk\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= -\frac{1}{jk\pi}\cos k\pi + \frac{1}{2k^2\pi^2}(e^{-jk\pi} - e^{jk\pi})$$

$$= \frac{j}{k\pi}\cos k\pi = \frac{j(-1)^k}{k\pi},\quad k \neq 0$$

所以 $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\pi t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}\sin k\pi t$$

3.6 设 $x(t)$ 是一个周期信号，其基波周期为 T_0，傅里叶级数的系数为 $\dot{A}_k$，用 $\dot{A}_k$ 表示下列信

号的傅里叶级数系数。此题证明了表 4.2 中所列的傅里叶级数的有关性质。

(a) $x(t-t_0)$ (e) $\dfrac{dx(t)}{dt}$

解：(a) $\tilde{A}_k = \dfrac{1}{T_0}\int_T x(t-t_0)e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dt = \dfrac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t-t_0)e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dt = \dfrac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2k\pi}{T}(t+t_0)}dt$

$$= \frac{1}{T_0}e^{-j\frac{2k\pi}{T}t_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dt = e^{-j\frac{2k\pi}{T}t_0}\dot{A}_k$$

(e) $\dfrac{dx(t+T)}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt}$ 因此以 T 为周期

$$\tilde{A}_k = \int_0^T \frac{dx(t)}{dt}e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dt = \int_0^T e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dx(t)$$

$$= x(t)e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}\Big|_0^T + \int_0^T x(t)\,j\frac{2k\pi}{T}e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}dt$$

$$= j\frac{2k\pi}{T}\dot{A}_k$$

3.7 已知某周期信号的前四分之一周期的波形如图 P3.7 所示。就下列情况画出一个周期（$0<t<T$）内完整的波形。

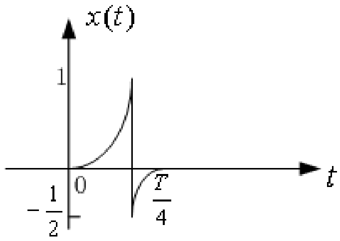


图 P3.7

(a) $x(t)$ 是偶函数，只含有偶次谐波。

(b) $x(t)$ 是偶函数，只含有奇次谐波。

(c) $x(t)$ 是偶函数，含有奇次和偶次谐波。

(d) $x(t)$ 是奇函数，只含有偶次谐波。

(e) $x(t)$ 是奇函数，只含有奇次谐波。

(f) $x(t)$ 是奇函数，含有偶次和奇次谐波。

解：(a) $x(t)=x(-t)$ 且 $x(t+\dfrac{T}{2})=x(t)$，如图 PS3.7(a)所示。

(b) $x(t)=x(-t)$ 且 $x(t-\dfrac{T}{2})=-x(t)$，如图 PS3.7(b)所示。

(c) $x(t)=x(-t)$，如图 PS3.7(c)所示。

(d) $x(t)=-x(-t)$ 且 $x(t+\frac{T}{2})=x(t)$，如图 PS3.7(d)所示。

(e) $x(t)=-x(-t)$ 且 $x(t-\frac{T}{2})=-x(t)$，如图 PS3.7(e)所示。

(f) $x(t)=-x(-t)$，如图 PS3.7(f)所示。

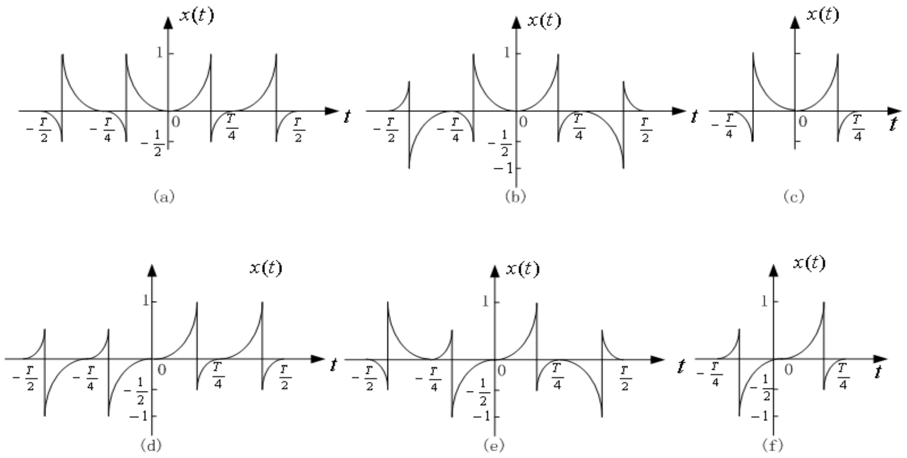


图 PS3.7

3.8 计算下列信号的傅里叶变换：

(a) $x(t)=e^{-3t}\left[u(t+2)-u(t-3)\right]$

(b) $x(t)=u_1(t)+2\delta(3-2t)$，其中 $u_1(t)=\dfrac{d\delta(t)}{dt}$

(c) $x(t)$ 如图 P3.8(a)所示。

(d) $x(t)$ 如图 P3.8(b)所示。

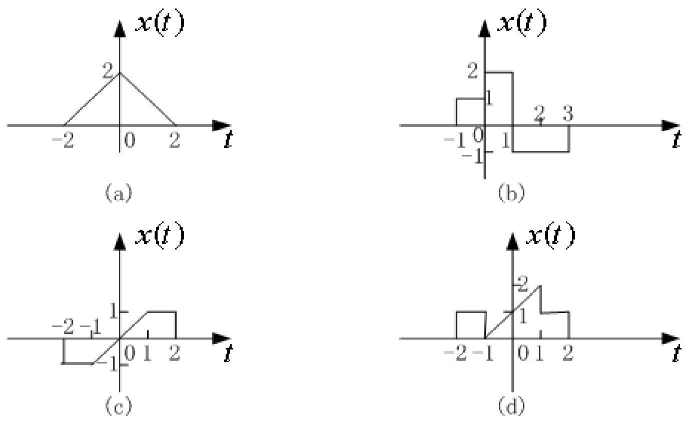


图 P3.8

解：(a) $\because\ e^{-3t}\left[u(t+2)-u(t-3)\right]=e^{6}e^{-3(t+2)}u(t+2)-e^{-9}e^{-3(t-3)}u(t-3)$

$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{3+j\Omega} \quad e^{-3(t+2)}u(t+2) \leftrightarrow \frac{e^{j2\Omega}}{3+j\Omega} \quad e^{-3(t-3)}u(t-3) \leftrightarrow \frac{e^{-j3\Omega}}{3+j\Omega}$$

$$\therefore\ e^{-3t}\left[u(t+2)-u(t-3)\right] \leftrightarrow \frac{1}{3+j\Omega}(e^{6+j2\Omega}-e^{-9-j3\Omega})$$

(b) $\because\ \ u_1(t) \leftrightarrow j\Omega,\ \ \delta(3-2t)=\frac{1}{2}\delta(t-\frac{3}{2}) \leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$

$$\therefore\ u_1(t)+2\delta(3-2t) \leftrightarrow j\Omega+e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$$

(c) $X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-2}^{0}(t+2)e^{-j\Omega t}dt+\int_{0}^{2}(2-t)e^{-j\Omega t}dt=\frac{2}{\Omega}-\frac{2\cos 2\Omega}{\Omega^2}$

(d) $x(t)=u(t+1)+u(t)-3u(t-1)+u(t-3)$

$$\therefore\ X(\Omega)=\left(\frac{1}{j\Omega}+\pi j\delta(0)\right)\left(e^{j\Omega}+1-3e^{-j\Omega}+e^{-j3\Omega}\right)$$

3.11　确定下列傅里叶变换所对应的连续时间信号：

(c) $X(\Omega)=\dfrac{2\sin\left[3(\Omega-2\pi)\right]}{(\Omega-2\pi)}$

(e) $X(\Omega)$ 如图 P3.11 (b)所示。

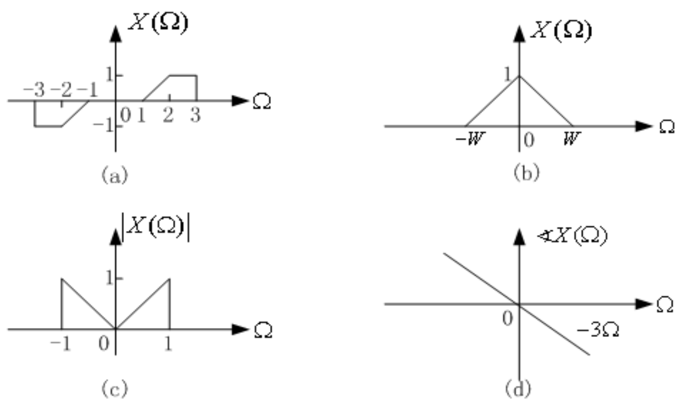


图 P3.11

解：

(c) $\because\quad \dfrac{2\sin 3\Omega}{\Omega} \leftrightarrow u(t+3)-u(t-3)$

$\therefore\quad \dfrac{2\sin 3(\Omega-2\pi)}{\Omega-2\pi} \leftrightarrow x(t)=e^{j2\pi t}\left[u(t+3)-u(t-3)\right]$

即

$$x(t)=\begin{cases} e^{j2\pi t}, & |t|<3 \\ 0, & |t|>3 \end{cases}$$

设 $$X_1(j\omega) = \frac{2\sin 3\omega}{\omega}$$

则 $$X(j\omega) = X_1(j\omega - 2\pi)$$

$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin 3\omega}{\omega} \longleftrightarrow u(t+3) - u(t-3)$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$$ 根据频移特性

$$x(t) = [u(t+3) - u(t-3)]e^{j2\pi t}$$

(e) $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-W}^{0}\left(1+\frac{\Omega}{W}\right)e^{j\Omega t}d\Omega + \int_{0}^{W}\left(1-\frac{\Omega}{W}\right)e^{j\Omega t}d\Omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-W}^{W} e^{j\Omega t}d\Omega + \int_{-W}^{0}\frac{\Omega}{W}e^{j\Omega t}d\Omega - \int_{0}^{W}\frac{\Omega}{W}e^{j\Omega t}d\Omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\sin Wt}{t} - \frac{W\cos Wt}{t} - \frac{\sin Wt}{t^2}\right)$$

3.13 设 $X(\Omega)$ 是图 P3.13 所示信号 $x(t)$ 的频谱，不求出 $X(\Omega)$ 而完成下列计算：

(a) 求 $X(0)$

(b) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)d\Omega$

(c) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\frac{2\sin\Omega}{\Omega}e^{j2\Omega}d\Omega$

(d) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$

(e) 画出 $\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$ 对应的信号。

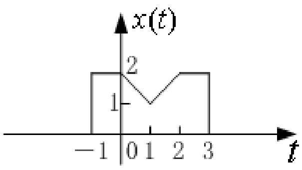


图 P3.13

解： (a) $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 8 - 1 = 7$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)d\Omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

(c) $\because \qquad 2\dfrac{\sin\Omega}{\Omega} \leftrightarrow u(t+1)-u(t-1)$

$$2\frac{\sin\Omega}{\Omega}e^{j2\Omega} \leftrightarrow u(t+3)-u(t+1)=x_1(t)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\frac{2\sin\Omega}{\Omega}e^{j2\Omega}d\Omega = 2\pi\bullet x(t)*x_1(t)\big|_{t=0}$$

$$=2\pi\int_1^3 x(t)dt = 2\pi\left(4-\frac{1}{2}\right)=7\pi$$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\Omega)\right|^2 d\Omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt = 4\pi\left[4+\int_0^1(t^2-4t+4)dt\right]$

$$=4\pi\left(4+\frac{7}{3}\right)=\frac{76}{3}\pi$$

(e) $\Re_e\left\{X(\Omega)\right\} \leftrightarrow x_e(t)=\dfrac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]$，如图 PS3.13 所示。

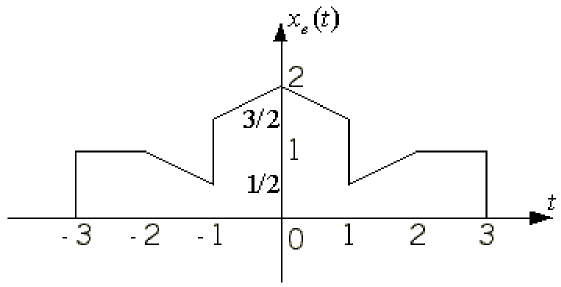


图 PS3.13

3.16　求图 P3.16 所示周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。

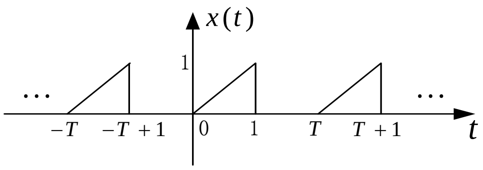


图 P3.16

解：　$\displaystyle a_k=\frac{1}{T}\int_0^1 te^{-j\frac{2\pi k}{T}t}dt=\frac{jT}{2\pi k}e^{-j\frac{2\pi k}{T}}+\frac{T^2}{4k^2\pi^2}\left(e^{-j\frac{2\pi k}{T}}-1\right)\quad (k\neq 0)$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^1 tdt=\frac{1}{2T}$$

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t} \Rightarrow X(\Omega)=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}a_k\delta(\Omega-\frac{2k\pi}{T})$$

3.21　已知某 LTI 系统的单位冲激响应为

$$h(t)=e^{-4t}u\left(t\right)$$

对下列输入信号，求输出响应 $y(t)$ 的傅里叶级数表示式。

(a) $x(t)=\cos 2\pi t$

(b) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$

(c) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$

(d) $x(t)$ 如图 P3.21 所示。

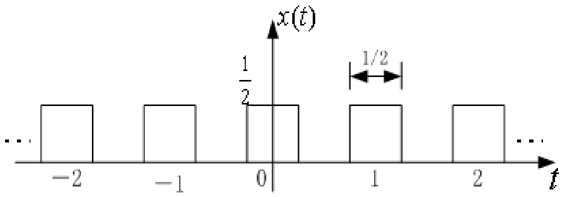


图 P3.21

解：设 $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{jk\omega_0 t}$, 则 $b_k=a_k H(k\omega_0)$; 其中 a_k、b_k 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶级数系数。

(a) $x(t)=\cos 2\pi t, \omega_0=2\pi;\ a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$, 其余 $a_k=0$

$$\therefore b_1=a_1H(\omega_0)=\frac{1}{4(2+j\pi)},\ b_{-1}=b_1^*=\frac{1}{4(2-j\pi)}，\text{其余} b_k=0$$

(b) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$； $T=1,\omega_0=2\pi;\ \therefore a_k=1, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

$$b_k=\frac{1}{4+j2k\pi}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

(c) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$； $T=2,\omega_0=\pi;$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]e^{-jk\pi t}dt=\frac{1}{2}(1-e^{jk\pi})=\begin{cases}0, & k\text{偶}\\ 1, & k\text{奇}\end{cases}$$

$$\therefore\qquad b_k=\begin{cases}0 & ,\ k\text{偶}\\ \dfrac{1}{4+jk\pi}, & k\text{奇}\end{cases}$$

(d) 由图 P3.21 所示 $x(t)$ 可得：　$T=1,\omega_0=2\pi$

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_k=\frac{1}{2}\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2},\ k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad b_0=\frac{1}{8},\ b_k=\begin{cases}0 & ,k\text{偶},k\neq 0\\ \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi(4+j2k\pi)}, & k\text{奇}\end{cases}$$

3.27 某 LTI 系统对输入信号

$$x(t)=\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$$

的响应为

$$y(t)=\left(2e^{-t}-2e^{-4t}\right)u(t)$$

(a) 求该系统的频率响应。
(b) 求该系统的单位冲激响应。
(c) 写出描述系统的微分方程，并用直接 II 型结构实现该系统。

解： (a) $$X(\Omega)=\frac{1}{1+j\Omega}+\frac{1}{3+j\Omega}=\frac{4+2j\Omega}{\left(j\Omega\right)^2+4j\Omega+3}$$

$$Y(\Omega)=\frac{2}{1+j\Omega}-\frac{2}{4+j\Omega}=\frac{6}{\left(j\Omega\right)^2+5j\Omega+4}$$

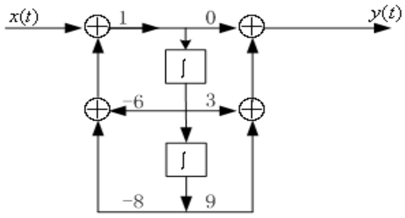
$$\therefore\quad H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{3\left(j\Omega+3\right)}{\left(j\Omega+2\right)\left(j\Omega+4\right)}=\frac{3/2}{j\Omega+2}+\frac{3/2}{j\Omega+4}$$

(b) $h(t)=\dfrac{3}{2}\left[e^{-2t}+e^{-4t}\right]u(t)$

(c) 由 $H(\Omega)=\dfrac{3j\Omega+9}{\left(j\Omega\right)^2+6j\Omega+8}$ 可得

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+9x(t)$$

其直接 II 型结构如图 PS3.27 所示。



3.29

3.29 已知某连续时间 LTI 稳定系统分别由图 P3.29 所示的方框图描述，对下列情况，求出：

(1)该系统的频率响应 $H(j\Omega)$；

(2)系统的单位冲激响应 $h(t)$；

(3)写出描述该系统的微分方程；

(4)如果系统的输入为 $x(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的输出响应 $y(t)$。

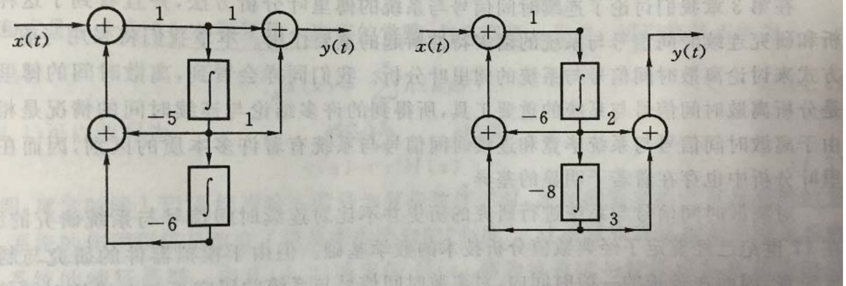


图 P3.29

解：对于图 P3.29（a）

(1) $H(j\Omega)=\dfrac{(j\Omega)^2+j\Omega}{(j\Omega)^2+5j\Omega+6}=1-\dfrac{4j\Omega+6}{(j\Omega+2)(j\Omega+3)}=1-\dfrac{-2}{j\Omega+2}-\dfrac{6}{j\Omega+3}$

(2) $h(t)=\delta(t)+2e^{-2t}u(t)-6e^{-3t}u(t)$

(3) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+5\dfrac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+\dfrac{dx(t)}{dt}$

(4) $x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(j\Omega)=\dfrac{1}{j\Omega+1}$

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)H(j\Omega)=\frac{1}{j\Omega+1}\frac{j\Omega(j\Omega+1)}{(j\Omega+2)(j\Omega+3)}$$

$$=\frac{j\Omega}{(j\Omega+2)(j\Omega+3)}=\frac{-2}{j\Omega+2}+\frac{3}{j\Omega+3}$$

$$y(t)=-2e^{-2t}u(t)+3e^{-3t}u(t)$$

对于图 P3.29（b）

(1) $H(j\Omega)=\dfrac{2j\Omega+3}{(j\Omega)^2+6j\Omega+8}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{j\Omega+2}+\dfrac{3}{j\Omega+4}$

(2) $h(t)=-\dfrac{1}{2}e^{-2t}u(t)+3e^{-4t}u(t)$

(3) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+6\dfrac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2\dfrac{dx(t)}{dt}+3x(t)$

(4) $x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(j\Omega)=\dfrac{1}{j\Omega+1}$

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)H(j\Omega)=\frac{1}{j\Omega+1}\frac{2j\Omega+3}{\left(j\Omega+2\right)\left(j\Omega+4\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{j\Omega+1}+\frac{\frac{1}{2}}{j\Omega+2}+\frac{-\frac{5}{6}}{j\Omega+3}$$

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)-\frac{5}{6}e^{-3t}u(t)$$

补充作业 1:

假如信号 f(t)是周期为 T 的周期性信号，则对于 f(t)+f(t+2.5T)的傅立叶级数包含什么分量？

方法一：

$$f(t)+f(t+2.5T)=f(t)+f(t+0.5T)$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$f(t+0.5T)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\Omega_0(t+0.5T)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\Omega_0 0.5T}e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\pi}e^{jk\Omega_0 t}$$

$$f(t)+f(t+0.5T)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\Omega_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\pi}e^{jk\Omega_0 t}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k\left(1+e^{jk\pi}\right)e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k\left(1+(-1)^k\right)e^{jk\Omega_0 t}$$

当 k 为奇数时，$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k\left(1+(-1)^k\right)e^{jk\Omega_0 t}=0$

当 k 为偶数时，$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k\left(1+(-1)^k\right)e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\dot{F}_k e^{jk\Omega_0 t}$

因此，f(t)+f(t+2.5T)的傅立叶级数只包含偶次谐波分量。

方法二：

记 $f_1(t)=f(t)+f(t+2.5T)=f(t)+f(t+0.5T)$，则

$$f_1(t+0.5T)=f(t+0.5T)+f(t+0.5T+0.5T)=f(t+0.5T)+f(t)=f_1(t)$$

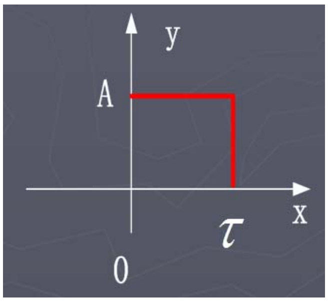
所以 $f_1(t)$ 是偶谐信号（书本 P131）。

偶谐信号的傅立叶级数中只包含偶次谐波。

补充作业 2:

1：求下图非周期信号的傅立叶变换，

2：将此信号扩展为周期 T 信号 f (t)，求 f (t)傅立叶级数（扩展后的信号无重叠）



解:

(1)假设非周期信号表示为 $f_0(t)$, 则

$$f_0(t)=A\left[u(t)-u(t-\tau)\right]=\begin{cases}A, & 0\le t\le\tau\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

方法一 (P123, P124)

$$F_0(\Omega)=A\left[\left(\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}\right)-\left(\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}\right)e^{-j\Omega\tau}\right]$$

$$=A\left[\left(\pi\delta(\Omega)-\pi\delta(\Omega)e^{-j\Omega\tau}\right)+\left(\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{j\Omega}e^{-j\Omega\tau}\right)\right]$$

$$=A\left(\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{j\Omega}e^{-j\Omega\tau}\right)$$

方法二:利用微分性质(P123, P124)

$$f_0'(t)=A\left[\delta(t)-\delta(t-\tau)\right]$$

上式的傅立叶变换为

$$F\left[f_0'(t)\right]=A\left[1-e^{-j\Omega\tau}\right]$$

利用微分性质，得 $f_0(t)$的傅立叶变换为

$$j\Omega F_0(\Omega)=A\left[1-e^{-j\Omega\tau}\right]\Rightarrow F_0(\Omega)=A\left[\frac{1}{j\Omega}-\frac{e^{-j\Omega\tau}}{j\Omega}\right]$$

(2)求周期信号的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{F}_k e^{jk\Omega_0 t} \quad ,\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

利用傅里叶变换与傅里叶级数的关系 （P103）

$$\dot{F}_k=\frac{1}{T}F_0(\Omega)\Big|_{\Omega=k\Omega_0}$$

$$=\frac{A}{T}\left[\frac{1}{jk\Omega_0}-\frac{e^{-jk\Omega_0\tau}}{jk\Omega_0}\right]$$

$$=\frac{A}{2jk\pi}\left(1-e^{-jk\Omega_0\tau}\right)$$

第 4 章 离散时间信号与系统的频域分析(P168)

4.1 对下面离散时间周期信号，确定其离散时间傅立叶级数的系数 A_k 。

(a) $x(n)=\cos(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/7)$

(b) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$， $-2\le n\le 3$，且 $x(n)$ 以 6 为周期。

解：

(a) $$x(n)=\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{-j\frac{2\pi}{3}n}\right]+\frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{7}n}-e^{-j\frac{2\pi}{7}n}\right],\qquad N=21$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{21}7n}+e^{-j\frac{2\pi}{21}7n}\right]+\frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{21}3n}-e^{-j\frac{2\pi}{21}3n}\right]$$

若取 $0\le k\le 20$，则有：

$$a_7=\frac{1}{2};a_{14}=a_{-7}=\frac{1}{2};a_3=\frac{1}{2j};a_{18}=a_{-3}=-\frac{1}{2j};\text{其余}a_k=0$$

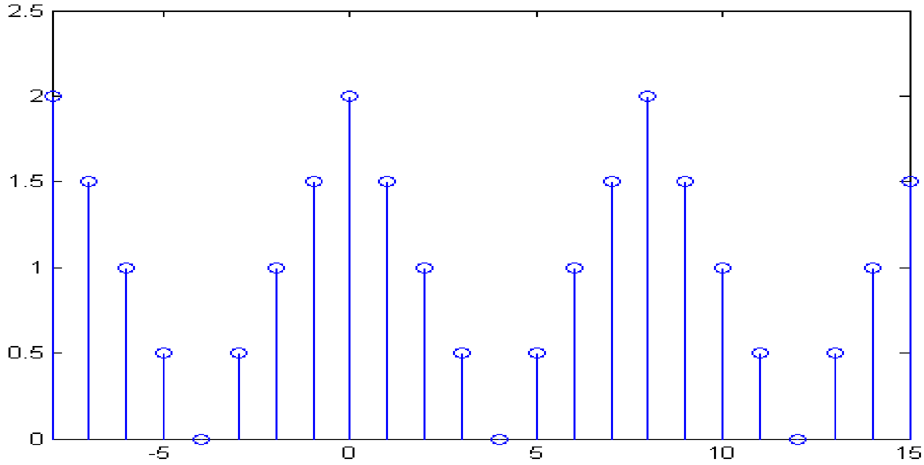
(b) $$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-2}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\frac{\pi}{3}kn}=\frac{1}{6}\bullet\frac{4e^{j\frac{2\pi}{3}k}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6 e^{-j2\pi k}\right]}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$$

$$=\frac{2}{3}\left[(-1)^k\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{e^{j\frac{\pi}{3}k}-\frac{1}{2}}\right],\qquad (0\le k\le 5)$$

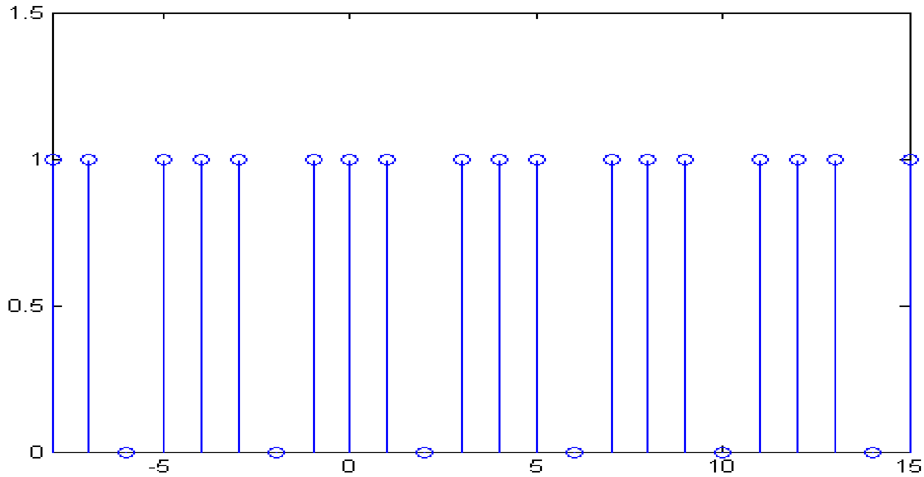
4.2 已知周期为 8 的离散时间信号具有如下傅立叶技术系数，试确定信号 $x(n)$ 。

(a) $A_k=\cos(\pi k/4)+\sin(3\pi k/4)$　　　(b) A_k 如图 P4.2(a)所示。

(b) $A_k=\begin{cases}\sin(\pi k/3),0\le k\le 6\\ 0,k=7\end{cases}$　　　(d) A_k 如图 P4.2(b)所示。



(a)



（b）

解：(a) $a_k=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}k}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}k}+\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}8k}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}8k}$， $N=8$

$\therefore$ $x[n]=4\delta[n-1]+4\delta[n+1]+4j\delta[n-3]-4j\delta[n+4]$， $-3\le n\le 4$

$\bar{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[n+8r]$， 即为所求周期信号。

(b)

$$a_k=2\delta[k]+\delta[k+1]+\delta[k-1]+\frac{1}{2}\delta[k+2]+\frac{1}{2}\delta[k-2]+\frac{1}{4}\delta[k+3]$$
$$+\frac{1}{4}\delta[k-3]$$

$\therefore \quad x[n]=\sum_{k=-3}^{4} a^k e^{j\frac{\pi}{4}kn} = 2+2\cos\frac{\pi}{4}n+\cos\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n, \quad (0 \le n \le 7)$

$\bar{x}$[n]= $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n+8r]$ 即为所求周期信号。

4.4 已知 x(n)是以 N 为周期得序列，其傅立叶级数表示式为 $x(n)=\sum_{k=<N>} A_k e^{j2\pi kn/N}$,试用 A_k 表示下列信号得傅立叶级数系数

(a) $x(n-n_0)$ (b) $x(n)-x(n-1)$

解： (a) $\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n-n_0]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=<N>} x[m]e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \bullet e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$

(b) $\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} (x[n]-x[n-1])e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = a_k - a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

4.6 求下列信号的离散时间傅立叶变换:

(a) $(\frac{1}{4})^n u(n-2)$ (b) $2^n u(-n)$ (c) $(a^n \cos\omega_0 n)u(n), |a| < 1$

解： (a) $x(\Omega)=\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{4})^n e^{-j\Omega n} = \frac{(\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}{1-\frac{1}{4}e^{j\Omega}} = \frac{\frac{1}{16}e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$

(b) $x(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}(2)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$

(c) $x[n=[a^n \cos\Omega_0 n]u(n) = \frac{1}{2}a^n[e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}]u[n]$

$$x(\Omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(a)^n e^{-j(\Omega-\Omega_0)n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-j(\Omega+\Omega_0)n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-ae^{-j(\Omega-\Omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\Omega-\Omega_0)}})$$

$$= \frac{1-ae^{-j\Omega}\cos\Omega_0}{1-2a\cos\Omega_0 e^{-j\Omega}+a^2 e^{-j2\Omega}}$$

4.7 已知离散时间信号的傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$,求信号 x(n).

(a) $X(e^{j\omega})=1-3e^{-j\omega}+2e^{j2\omega}+4e^{-j4\omega}$

(c) $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \delta(\omega-\frac{\pi}{2}k)$

(h) $X(e^{j\omega})$ 如图 P4.7(b)所示

解： (a) 书本 P162 表 4.2 和 P163 表 4.3

因为 $\delta[n] \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} 1$，且由傅里叶变换的时移性有

$$\delta[n-n_0] \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} e^{-jn_0\omega}, \quad n_0 \text{ 为整数}$$

$x(n)=\delta(n)-3\delta(n-1)+2\delta(n+2)+4\delta(n-4)$

(c)

方法一：

解法一 已知周期信号的傅里叶级数表达式为

$$x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} A_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{它的傅里叶变换为}$$

$$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

已知 $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\omega-\frac{\pi}{2}k)$，可见

$$N=4, \quad 2\pi A_k=(-1)^k$$

即 $A_k=\dfrac{(-1)^k}{2\pi}$

所以 $x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} A_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}=\sum_{k=\langle N\rangle}\frac{(-1)^k}{2\pi}e^{jk\frac{\pi}{2}n}=\sum_{k=-1}^{2}\frac{(-1)^k}{2\pi}e^{jk\frac{\pi}{2}n}$

$$=\frac{1}{2\pi}(-e^{-j\frac{\pi}{2}n}+1-e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{j\pi n})$$

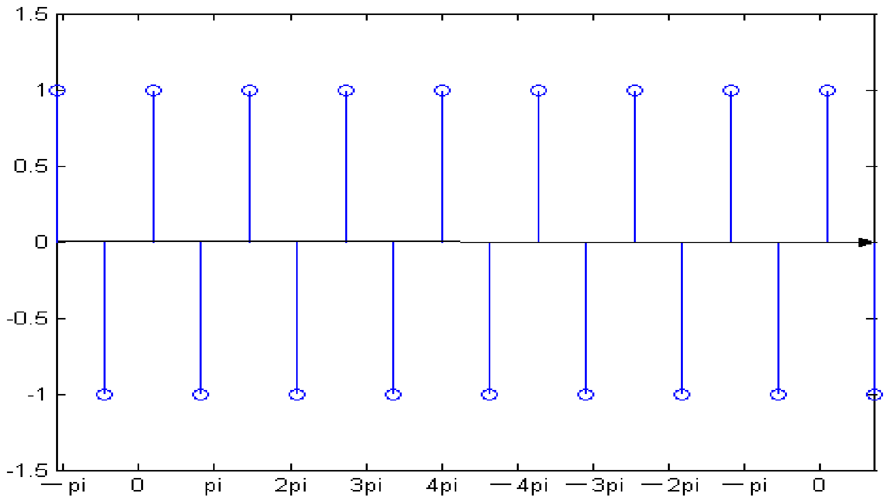
$$=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^n-2\cos\frac{\pi}{2}n]$$

方法二：分析

首先求出在一个 2π 区间上信号频谱的分布

然后得出所对应的时域信号

$X(\Omega)$ 如图 PS4.7-1 所示，在一个周期内可表示为



PS4.7-1

$X(\Omega)$ 是以 N=4 为周期的，在一个周期内可以表示为：

$$X(\Omega)=\delta(\Omega)-\delta(\Omega-\frac{\pi}{2})-\delta(\Omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\pi)$$

$$\therefore \begin{aligned} x[n]&=\frac{1}{2\pi}(1+e^{j\pi n}-e^{j\frac{\pi}{2}n}-e^{-j\frac{\pi}{2}n})=\frac{1}{2\pi}\left[1+(-1)^n-2\cos\frac{\pi n}{2}\right] \\ &=\frac{2}{\pi},\quad n=4m+2, m=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{aligned}$$

(h) 令 $X(\Omega)=X_1(\Omega)+X_2(\Omega)$，其中 $X_1(\Omega)$ 和 $X_2(\Omega)$ 如图 PS5.15-2 所示。

$$\frac{1}{\pi n}(\sin\frac{\pi}{8}n-\sin\frac{7\pi}{8}n)$$

$$=\frac{1}{2\pi jn}[e^{j\Omega n}\Big|_{-\pi}^{-5\pi/8}+e^{j\Omega n}\Big|_{-3\pi/8}^{3\pi/8}+e^{j\Omega n}\Big|_{5\pi/8}^{\pi}]$$

$$=\frac{1}{\pi n}(\sin\frac{3\pi}{8}n-\sin\frac{5\pi}{8}n)$$

$$x_2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-7\pi/8}e^{j\Omega n}d\Omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/8}^{\pi/8}e^{j\Omega n}d\Omega+\frac{1}{2\pi}\int_{7\pi/8}^{\pi}e^{j\Omega n}d\Omega$$

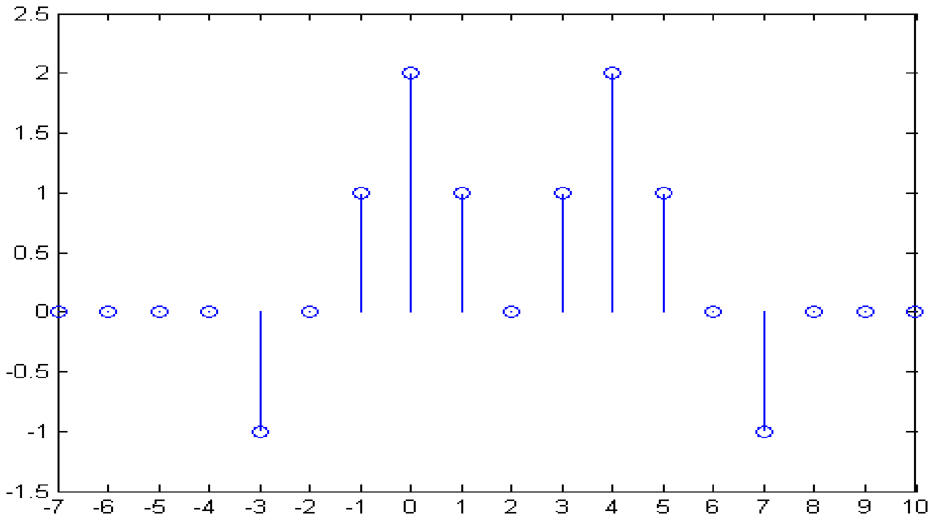
$$=\frac{1}{2\pi jn}[e^{j\Omega n}\Big|_{-\pi}^{-7\pi/8}+e^{j\Omega n}\Big|_{-\pi/8}^{\pi/8}+e^{j\Omega n}\Big|_{7\pi/8}^{\pi}]$$

$$=\frac{1}{\pi n}(\sin\frac{\pi}{8}n-\sin\frac{7\pi}{8}n)$$

$$\frac{1}{8}(2+3\cos\omega+2\cos2\omega+\cos3\omega)$$

$$= -2N\sin(\Omega N) - 2(N-1)\sin[\Omega(N-1)] - \cdots 2\sin\Omega$$

4.9 如果 $X(e^{j\omega})$ 是图 P4.9 所示信号 x(n)的傅立叶变换，不求出 $X(e^{j\omega})$ 而完成下列计算。



4.9

(a)求 $X(e^{j0})$

(d) 计算 $\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})d\omega$

解：

(a)

(1) 由 $\quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

则 $\quad X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\cdot 0\cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 6$

(d)

(c) 由 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$，得

$$x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega\cdot 0}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega$$

即可得 $$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=2\pi x[0]=2\pi\times 2=4\pi$$

4.10 确定图 P4.10 所示信号中哪些信号的傅立叶变换满足下列条件之一：

(a) $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=0$

(b) $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]=0$

(c) 存在一个实数 a，使得 $X(e^{j\omega})e^{ja\omega}$ 是实函数。

(d) $\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})d\omega=0$

(e) $X(e^{j0})=0$

解：

满足 (a) 的有 b，g。

满足 (b) 的有 d，e。

满足（c）的有 a b e d f。

满足（d）的有 d，b，e，f，g。

满足（e）的有 b，c，g

关于条件(a)的分析：

解 (1) 因为 $\mathrm{Ev}\{x[n]\}\xleftrightarrow{FT}\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$，所以 $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=0$ 意味着 $\mathrm{Ev}\{x[n]\}=0$。我们知道，$x[n]$若是个奇信号，则其偶部为0。纵观(a)～(i)中所有信号，只有(b)和(i)是奇信号，满足此条件。

关于条件(b)的分析：

(2) 因为 $\mathrm{Od}\{x[n]\}\xleftrightarrow{FT}j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$，所以 $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0$ 意味着 $\mathrm{Od}\{x[n]\}=0$。与(1)相反，$x[n]$应为偶信号。纵观(a)～(i)中所有信号，只有(d)和(h)是偶信号，满足此条件。

关于条件(c)的分析：

(3) 因为(a)～(i)中所有信号都是实的，且实偶信号的傅里叶变

换是实偶的，所以 $e^{j\alpha\omega}X(e^{j\omega})$ 是实的，意味着 $x[n+\alpha]$ 是偶序列。那么在(a)～(i)中，只要有某个信号平移 α 位后(α 应为整数)得到的是个偶信号，就可满足此条件。纵观(a)～(i)中所有信号，(a)、(b)、(d)、(f)、(h)均可满足此条件。

关于条件(d)的分析：

(4) 由题 5-3 知，$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=2\pi x[0]$，$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=0$ 就意味着 $x[0]=0$。纵观(a) ～ (i) 中所有信号，(b)、(e)、(f)、(h)、(i) 均

关于条件(e)的分析：

(6) 由题 5-3 知，$X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$，所以 $X(e^{j0})=0$ 就意味着序列 $x[n]$ 所有样值的和等于 0。纵观(a) ～ (i) 中所有信号，(b)、

4.19.

(a) 如果一个离散时间 LTI 系统对输入信号

$$x[n]=(\frac{1}{2})^n u(n)-\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

所产生得输出响应为：$y[n]=(\frac{1}{3})^n u(n)$

求该系统得频率响应，单位脉冲响应以及描述该系统得差分方程。

(b) 如果某离散时间 LTI 系统对输入 $(n+2)(1/2)^n u(n)$ 所产生得响应为 $(1/4)^n u(n)$，为使该系统产生得输出为 $\delta(n)-(-1/2)^n u(n)$，应该给系统输入什么信号？

解：(a)

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}-\frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}};$$

$$Y(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

(i)

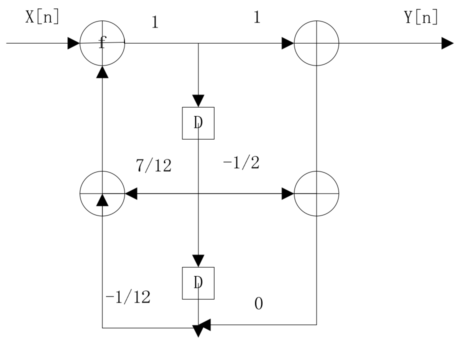
$$H(\Omega)=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore h[n]=[3(\frac{1}{4})^n-2(\frac{1}{3})^n]u[n]$$

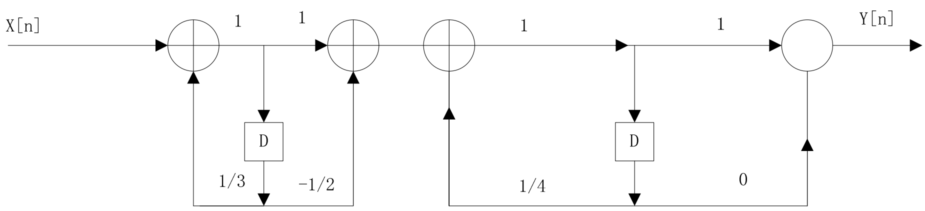
(ii) 由 $H(\Omega)$ 可得出差分方程：

$$y[n]-\frac{7}{12}y[n-1]+\frac{1}{12}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

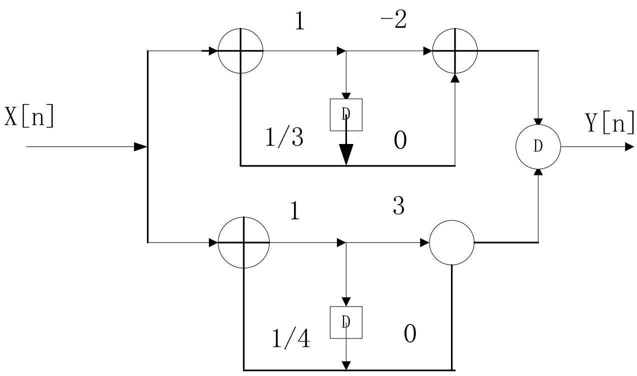
图 PS4.19



(a)



(b)



(c)

图 4.19

(b)

$$\because x_1[n]=(n+2)(\frac{1}{2})^n u[n]=(n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$\therefore X_1(\Omega)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{2-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$Y_1(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}};\therefore H(\Omega)=\frac{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{2(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

而 $$Y(\Omega)=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\therefore X(\Omega)={Y(\Omega)}\big/{H(\Omega)}$$

$$=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=e^{-j\Omega}[\frac{9/16}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{5/16}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1/8}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}]$$

$$x[n]=[\frac{9}{16}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{5}{16}(\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{8}n(\frac{1}{2})^{n-1}]u(n-1)$$

第 5 章傅里叶分析的应用-滤波与调制(P212)

5.4 参考：

5.4 某连续时间 LTI 系统的单位冲激响应为 $h(t)=\dfrac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}$，求系统对下列输入信号的响应 $y(t)$，并说明该系统对输入信号而言是否为不失真传输系统。

(a) $x(t)=\cos\pi t+2\sin\dfrac{3}{2}\pi t$

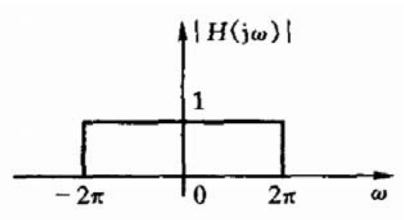
(b) $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\dfrac{10}{3}k\right)$

注：从频域分析入手，先写出系统的频率响应。

解：具有线性相位的理想低通滤波器 (P185)

$$h(t)=\frac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)} \leftrightarrow H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega 2}, & |\omega|<2\pi \\ 0, & |\omega|>2\pi \end{cases}$$

$H(j\omega)$ 的幅度 $|H(j\omega)|$ 如下图所示



（a） $x(t)=\cos\pi t+2\sin\dfrac{3}{2}\pi t$ 中 $\cos\pi t$ 的频率分量 $\pm\pi$ 在通带[-2π, 2π]内； $\sin\dfrac{3}{2}\pi t$ 的频率分量 $\pm\dfrac{3}{2}\pi$ 在通带[-2π, 2π]内。因此不失真；

注：书本 P124

$\cos\pi t \leftrightarrow \pi\left[\delta(\Omega-\pi)+\delta(\Omega+\pi)\right]$ 所以频率分量为 $\pm\pi$

$\sin\dfrac{3}{2}\pi t \leftrightarrow \dfrac{\pi}{j}\left[\delta\left(\Omega-\dfrac{3}{2}\pi\right)-\delta\left(\Omega+\dfrac{3}{2}\pi\right)\right]$ 所以频率分量为 $\pm\dfrac{3}{2}\pi$

(b) 失真.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{10}{3}k\right),\quad T=\frac{10}{3}$$

$$a_k=\frac{1}{T},\quad X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0),\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{6}{10}\pi$$

k>3 后的频率分量都被滤波器滤掉了.

所以 $$Y(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\delta(\omega)+\frac{2\pi}{T}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$
$$+\frac{2\pi}{T}[\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)]$$
$$+\frac{2\pi}{T}[\delta(\omega-3\omega_0)+\delta(\omega+3\omega_0)]$$

经反变换后 $$y(t)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}(\cos\omega_0 t+\cos 2\omega_0 t+\cos 3\omega_0 t)$$

5.18 求图 P5.18 所示已调信号的频谱。

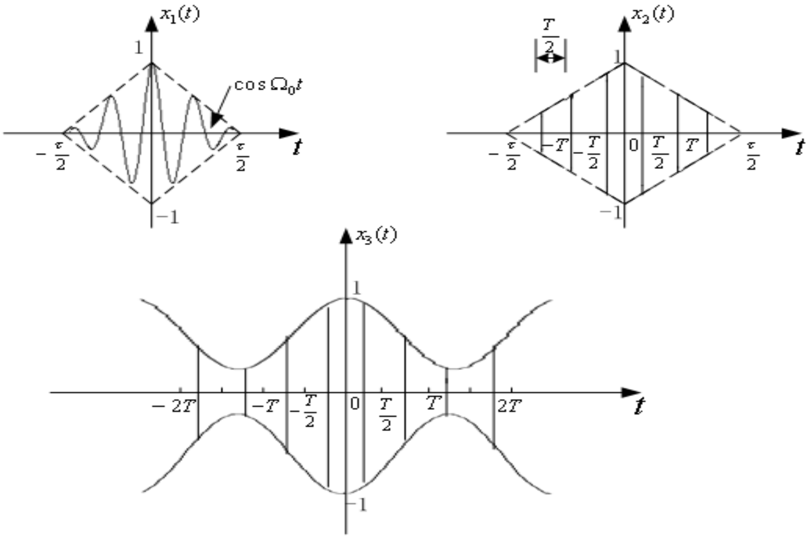


图 P5.18

解： $x_1(t)=x_{10}(t)\bullet\cos\Omega_0 t$，其中 $x_{10}(t)$ 如图 PS5.18 所示。

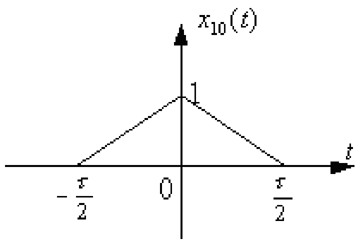


图 PS5.18

$$X_1(\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_{10}(\Omega)*\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

$x_2(t)$：调制周期为 T 的方波， $x_{20}(t)$ 同 $x_{10}(t)$

$x_3(t)$：调制周期为 T 的方波， $x_{30}(t)=\cos\dfrac{\pi}{T}t+m$

同 $X_1(\Omega)$，可计算 $X_2(\Omega)$ 及 $X_3(\Omega)$。

5.19 图 P5.19 所示系统中，已知输入信号的频谱为 $X(\Omega)$，如图所示。试确定并粗略画出 $y(t)$ 的频谱 $Y(\Omega)$。

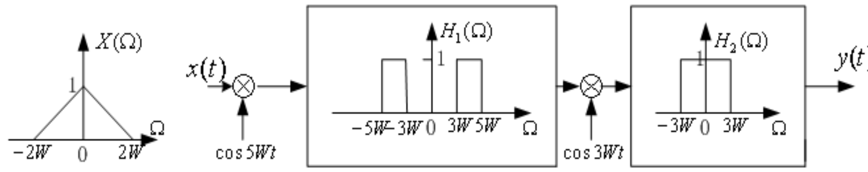


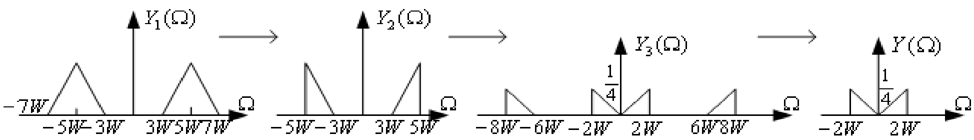
图 P5.19

解：

$$Y(\Omega)=\left\{\left[X(\Omega)*\frac{1}{2}\left(\delta(\Omega-5W)+\delta(\Omega+5W)\right)\right]\bullet H_1(\Omega)\right\}$$

$$*\frac{1}{2}\left[\delta(\Omega-3W)+\delta(\Omega+3W)\right]\bullet H_2(\Omega)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left[X(\Omega-5W)+X(\Omega+5W)\right]\bullet H_1(\Omega)\right\}*\left[\delta(\Omega-3W)+\delta(\Omega+3W)\right]\bullet H_2(\Omega)$$



其中：$Y_1(\Omega)=\frac{1}{2}[X(\Omega-5W)+X(\Omega+5W)]$

$Y_2(\Omega)=Y_1(\Omega)\bullet H_1(\Omega)$

$Y_3(\Omega)=Y_2(\Omega)*\frac{1}{2}[\delta(\Omega-3W)+\delta(\Omega+3W)]$

$Y(\Omega)=Y_3(\Omega)\bullet H_2(\Omega)$

第 6 章采样(P228)

6.3　已知信号 $x_1(t)$ 带限于 Ω_1， $x_2(t)$ 带限于 Ω_2， $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 相乘之后被理想 抽样。试确定允许的最大抽样间隔 T ，使抽样后的信号能够通过理想低通滤波器不失真地恢复成原始信号。

解： $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)$　　　频带范围为 $\left[-(\Omega_1+\Omega_2),(\Omega_1+\Omega_2)\right]$

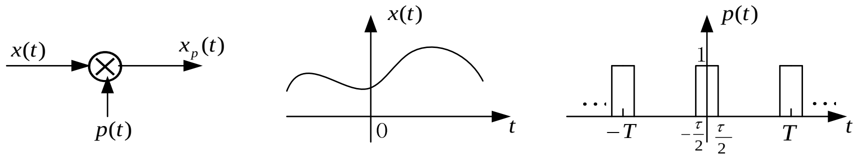
若不失真恢复，则 $\dfrac{2\pi}{T} \ge 2(\Omega_1+\Omega_2)$　即 $T \le \dfrac{\pi}{\Omega_1+\Omega_2}$

6.8　已知连续时间信号 $x(t)$ 被图 P6.8 所示的窄脉冲串抽样，$x(t)$ 的频谱为 $X(\Omega)$， $p(t)$ 的频谱为 $P(\Omega)$。

(a)　证明抽样后信号 $x_p(t)$ 的频谱为

$$X_p(\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\Omega-\frac{2\pi}{T}k)P(\frac{2\pi}{T}k)$$

(b)　为了能够从 $x_p(t)$ 恢复原信号 $x(t)$，需要满足哪些条件？



解:

(a)　书本 P220，P124，P116，P96

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_1(t-nT),$$

$$p_1(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau/2\\ 0, & \tau/2<|t|\le T/2\end{cases}$$

$$p_1(t)\leftrightarrow P_1(\Omega)=\frac{2\sin\left(\Omega\tau/2\right)}{\Omega}=\tau Sa\left(\Omega\tau/2\right)=\tau Sa\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)=\tau\,\mathrm{sin\,c}\left(\frac{\Omega\tau/2}{\tau}\right)$$

$$p(t)\leftrightarrow P(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\left(k\pi\tau/T\right)}{k}\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{T}\right)=\frac{2\pi\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$
\begin{aligned}
X_p(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) \\
&= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{\tau}{T} X(\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) X\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned}
$$

注意：时域脉冲串抽样，对应频谱幅度加权后的周期延拓。

(b)需要满足的条件：P220

1. $x(t)$是一个带限信号，带限于最高频率Ω_M，即在$|\Omega| > \Omega_M$时，$X(j\Omega) = 0$。

2.采样频率$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_M \Rightarrow T < \frac{\pi}{\Omega_M}$。

第 7 章 离散傅里叶变换(DFT)

7.3 求下列 N 点有限长序列的 DFT，其中 N=8：

(a) $x(n)=R_N(n)$ (c) $x(n)=e^{j\omega_0 n}R_N(n)$ (e) $x(n)=nR_N(n)$

解：(a) $x(n)=R_N(n)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{N},k=0\\0,1\le k\le \mathrm{N}-1\end{cases}$$

(c) $x(n)=e^{j\omega_0 n}R_N(n)$

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 N}W_N^{kn}R_N(k)=\frac{1-e^{j\omega_0 N}W_N^{kN}}{1-e^{j\omega_0}W_N^{k}}R_N(k)$$

$$=e^{j(\frac{\pi}{N}k+\frac{N-1}{2}\omega_0)}\frac{\sin(\frac{\omega_0}{2}N)}{\sin(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\pi k}{N})}R_N(k)$$

(e) $x(n)=nR_N(n)$

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{kn}R_N(k)=[W_N^{k}\frac{d\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{kn}}{dx}]R_N(k)$$

$$=e^{j(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{N}k)}\frac{N}{2\sin(\frac{\pi k}{N})}R_N(k)$$

7.20 如果 x(n)和 y(n)都是 N=10 的有限长序列，且

$$x(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 4\\0,\text{其他n}\end{cases}\qquad \mathrm{y}(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 4\\-1,5\le \mathrm{n}\le 9\end{cases}$$

求圆周卷积 $f_1(n)=x(n)\otimes y(n)$ 和线性卷积 $f_2(n)=x(n)*y(n)$,并利用 Matlab 计算对其予以验证。

解：

$$f_1(n)=x(n)\otimes y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)y\left((n-k)\right)_N R_N(n)$$
$$=\sum_{k=0}^{4}x(k)y\left((n-k)\right)_{10} R_{10}(n)$$
$$=x(0)y\left((n)\right)_{10}+x(1)y\left((n-1)\right)_{10}+x(2)y\left((n-2)\right)_{10}+x(3)y\left((n-3)\right)_{10}+x(4)y\left((n-4)\right)_{10}$$
$$\Rightarrow$$
$$f_1(0)=x(0)y\left((0)\right)_{10}+x(1)y\left((0-1)\right)_{10}+x(2)y\left((0-2)\right)_{10}+x(3)y\left((0-3)\right)_{10}+x(4)y\left((0-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(0)+x(1)y(9)+x(2)y(8)+x(3)y(7)+x(4)y(6)=-3$$
$$f_1(1)=x(0)y\left((1)\right)_{10}+x(1)y\left((1-1)\right)_{10}+x(2)y\left((1-2)\right)_{10}+x(3)y\left((1-3)\right)_{10}+x(4)y\left((1-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(1)+x(1)y(0)+x(2)y(9)+x(3)y(8)+x(4)y(7)=-1$$
$$f_1(2)=x(0)y\left((2)\right)_{10}+x(1)y\left((2-1)\right)_{10}+x(2)y\left((2-2)\right)_{10}+x(3)y\left((2-3)\right)_{10}+x(4)y\left((2-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(2)+x(1)y(1)+x(2)y(0)+x(3)y(9)+x(4)y(8)=1$$
$$f_1(3)=x(0)y\left((3)\right)_{10}+x(1)y\left((3-1)\right)_{10}+x(2)y\left((3-2)\right)_{10}+x(3)y\left((3-3)\right)_{10}+x(4)y\left((3-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(3)+x(1)y(2)+x(2)y(1)+x(3)y(0)+x(4)y(9)=3$$
$$f_1(4)=x(0)y\left((4)\right)_{10}+x(1)y\left((4-1)\right)_{10}+x(2)y\left((4-2)\right)_{10}+x(3)y\left((4-3)\right)_{10}+x(4)y\left((4-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(4)+x(1)y(3)+x(2)y(2)+x(3)y(1)+x(4)y(0)=5$$

$$f_1(5)=x(0)y\left((5)\right)_{10}+x(1)y\left((5-1)\right)_{10}+x(2)y\left((5-2)\right)_{10}+x(3)y\left((5-3)\right)_{10}+x(4)y\left((5-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(5)+x(1)y(4)+x(2)y(3)+x(3)y(2)+x(4)y(1)=3$$
$$f_1(6)=x(0)y\left((6)\right)_{10}+x(1)y\left((6-1)\right)_{10}+x(2)y\left((6-2)\right)_{10}+x(3)y\left((6-3)\right)_{10}+x(4)y\left((6-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(6)+x(1)y(5)+x(2)y(4)+x(3)y(3)+x(4)y(2)=1$$
$$f_1(7)=x(0)y\left((7)\right)_{10}+x(1)y\left((7-1)\right)_{10}+x(2)y\left((7-2)\right)_{10}+x(3)y\left((7-3)\right)_{10}+x(4)y\left((7-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(7)+x(1)y(6)+x(2)y(5)+x(3)y(4)+x(4)y(3)=-1$$
$$f_1(8)=x(0)y\left((8)\right)_{10}+x(1)y\left((8-1)\right)_{10}+x(2)y\left((8-2)\right)_{10}+x(3)y\left((8-3)\right)_{10}+x(4)y\left((8-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(8)+x(1)y(7)+x(2)y(6)+x(3)y(5)+x(4)y(4)=-3$$
$$f_1(9)=x(0)y\left((9)\right)_{10}+x(1)y\left((9-1)\right)_{10}+x(2)y\left((9-2)\right)_{10}+x(3)y\left((9-3)\right)_{10}+x(4)y\left((9-4)\right)_{10}$$
$$=x(0)y(9)+x(1)y(8)+x(2)y(7)+x(3)y(6)+x(4)y(5)=-5$$

$$f_2(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{4} x(k)y(n-k)$$

$$= x(0)y(n) + x(1)y(n-1) + x(2)y(n-2) + x(3)y(n-3) + x(4)y(n-4)$$

$$\Rightarrow$$

$$f_2(0) = x(0)y(0) + x(1)y(0-1) + x(2)y(0-2) + x(3)y(0-3) + x(4)y(0-4) = 1$$

$$f_2(1) = x(0)y(1) + x(1)y(1-1) + x(2)y(1-2) + x(3)y(1-3) + x(4)y(1-4) = 2$$

$$f_2(2) = x(0)y(2) + x(1)y(2-1) + x(2)y(2-2) + x(3)y(2-3) + x(4)y(2-4) = 3$$

$$f_2(3) = x(0)y(3) + x(1)y(3-1) + x(2)y(3-2) + x(3)y(3-3) + x(4)y(3-4) = 4$$

$$f_2(4) = x(0)y(4) + x(1)y(4-1) + x(2)y(4-2) + x(3)y(4-3) + x(4)y(4-4) = 5$$

$$f_2(5) = x(0)y(5) + x(1)y(5-1) + x(2)y(5-2) + x(3)y(5-3) + x(4)y(5-4) = 3$$

$$f_2(6) = x(0)y(6) + x(1)y(6-1) + x(2)y(6-2) + x(3)y(6-3) + x(4)y(6-4) = 1$$

$$f_2(7) = x(0)y(7) + x(1)y(7-1) + x(2)y(7-2) + x(3)y(7-3) + x(4)y(7-4) = -1$$

$$f_2(8) = x(0)y(8) + x(1)y(8-1) + x(2)y(8-2) + x(3)y(8-3) + x(4)y(8-4) = -3$$

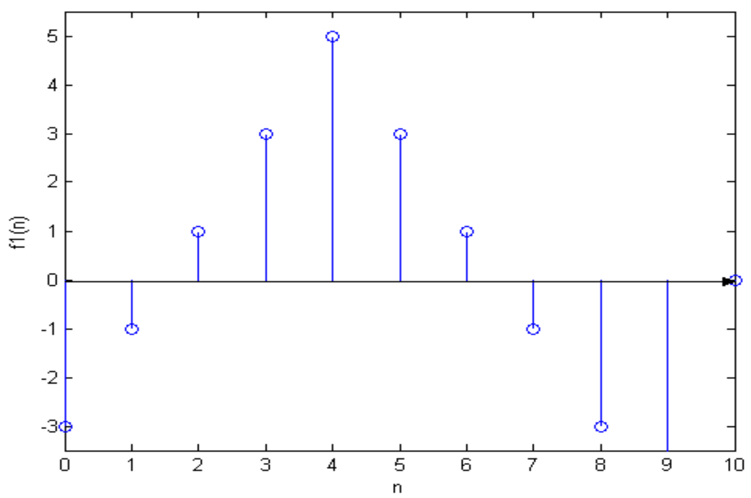
$$f_2(9) = x(0)y(9) + x(1)y(9-1) + x(2)y(9-2) + x(3)y(9-3) + x(4)y(9-4) = -5$$

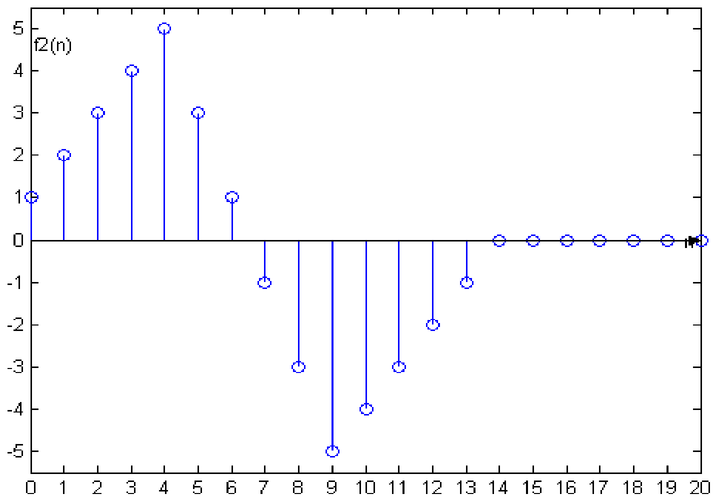
$$f_2(10) = x(0)y(10) + x(1)y(10-1) + x(2)y(10-2) + x(3)y(10-3) + x(4)y(10-4) = -4$$

$$f_2(11) = x(0)y(11) + x(1)y(11-1) + x(2)y(11-2) + x(3)y(11-3) + x(4)y(11-4) = -3$$

$$f_2(12) = x(0)y(12) + x(1)y(12-1) + x(2)y(12-2) + x(3)y(12-3) + x(4)y(12-4) = -2$$

$$f_2(13) = x(0)y(13) + x(1)y(13-1) + x(2)y(13-2) + x(3)y(13-3) + x(4)y(13-4) = -1$$




f2(n)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

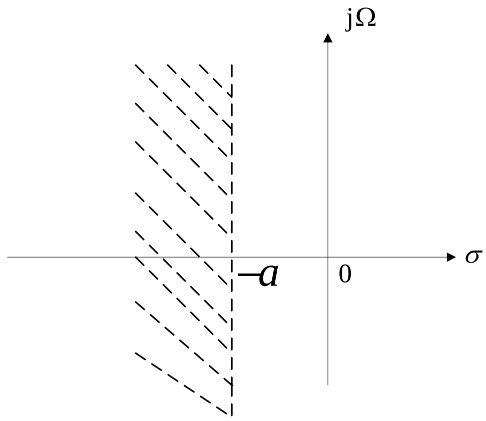
第 8 章拉普拉斯变换(P310)

1. 用定义计算下列信号的拉氏变换及其收敛域，并画出零极点图和收敛域。

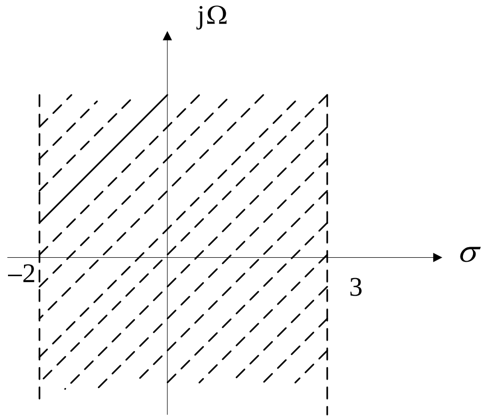
(a) $e^{-at}u(-t), a>0$ (d) $x(t)=\begin{cases} e^{-2t}, t>0 \\ e^{3t}, t<0 \end{cases}$

解：(a) $-\dfrac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\}<-a$,见图(a)

(d) $\dfrac{1}{3-s}+\dfrac{1}{2+s}, -2<\mathrm{Re}\{s\}<3$,见图(d)

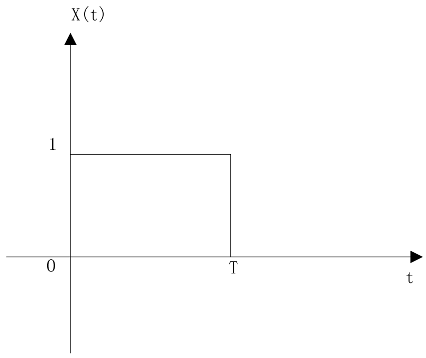


(a)

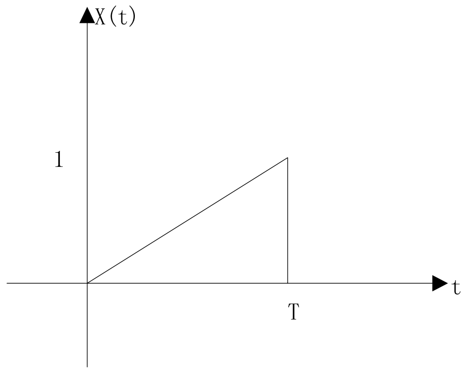


(d)

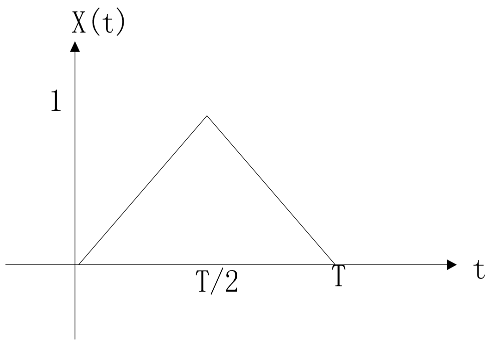
2. 用定义计算图 P6.2 所示各信号的拉氏变换式。



(a)



(c)



(e)

解：

(a)

$$\int_0^{\pi} \sin t e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t[u(t) - u(t-\pi)] e^{-st} dt = \frac{1}{s^2+1} - e^{-s\pi} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1-e^{-sT}}{s^2+1} \quad \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1}{s}(1-e^{-sT})$$

(c) $\frac{1}{T}\int_0^T te^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{Ts^2}(1-e^{-sT})$

(e) $X(s) = -\frac{1}{s}e^{-\frac{sT}{2}} + \frac{2}{Ts^2}(1-e^{-\frac{sT}{2}}) + e^{-2s}[\frac{1}{s} - \frac{2}{Ts^2}(1-e^{-\frac{sT}{2}})]$

3. 对图 P6.3 所示的每一个零极点图，确定满足下述情况的收敛域。

(a) x(t)的傅立叶变换存在。 (b) $x(t)e^{2t}$ 的傅立叶变换存在

(c) $x(t)=0, t>0$ (d) $x(t)=0, t<5$

解：(a) x(t)的傅立叶变换存在，则 $s=\mathrm{j}\Omega$ 应在 $X(s)$ 的收敛域内

图(a) $-1<\mathrm{Re}\{s\}<1$

图(b) $-3<\mathrm{Re}\{s\}<3$

图(c) $\mathrm{Re}\{s\}>-1$

(b) $x(t)e^{2t}$ 的傅立叶变换存在，则 s＝-2 轴一定在 $x(s)$ 的收敛域内

图(a), $\mathrm{Re}\{s\}<-1$

图(b), $-3<\mathrm{Re}\{s\}<3$

图(c), $-3<\mathrm{Re}\{s\}<-1$

(c) x(t)=0,t>0,则 x(t)为左边信号

图(a), $\mathrm{Re}\{s\}<-1$

图(b), $\mathrm{Re}\{s\}<-3$

图(c), $\mathrm{Re}\{s\}<-3$

(d) x(t)=0, t<5,则 x(t)为右边信号

图(a), Re{s}>1

图(b), Re{s}>3

图(c), Re{s}>-1

5. 求图 P6.7 所示信号的拉氏变换式及收敛域。

(a) $\dfrac{1}{s^2}(1-e^{-s})(1-e^{-2s}), \mathrm{Re}\{s\}>0$

(b) $\dfrac{a}{s}(1-e^{-s})+ae^{-s}\dfrac{1}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\}>0$

(f) $\dfrac{(1-e^{-\frac{T}{2}s})^2}{s(1-e^{-Ts})}=\dfrac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{s(1+e^{-\frac{T}{2}s})}, \mathrm{Re}\{s\}>0$

(g) $\dfrac{(1-e^{-(s+\frac{1}{\tau})})(1-e^{-2s})}{(s+\frac{1}{\tau})(1-e^{-4s})}=\dfrac{1-e^{-(s+\frac{1}{\tau})}}{(s+\frac{1}{\tau})(1-e^{-2s})}$

11. 对一个 LTI 系统，我们已知如下信息：输入信号 $x(t)=4e^{2t}u(-t)$；输出响应 $y(t)=e^{2t}u(-t)+e^{-2t}u(t)$

(a) 确定系统的系统函数 H(s)及收敛域;

(b) 求系统的单位冲激响应 h(t);

(c) 如果输入信号 $x(t)=e^{-t},-\infty<t<+\infty$ 求输出 y(t);

(d) 如果输入信号 x(t)=u(t), 求输出 y(t)。

解：(a) $X(s)=-\dfrac{4}{s-2},\quad \mathrm{Re}\{s\}<2$ (P278)

$$Y(s)=-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}=\frac{-4}{(s-2)(s+2)},\quad -2<\mathrm{Re}\{s\}<2$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{-4}{(s-2)(s+2)}\Big/\left(-\frac{4}{s-2}\right)=\frac{1}{s+2},\mathrm{Re}\{s\}>-2$$

(b) $h(t)=e^{-2t}u(t)$ (P278)

(c) $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-\tau)}e^{-2\tau}u(\tau)d\tau=e^{-t}$

(d) $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t-\tau)e^{-2\tau}u(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}$

12.

$u(t)$，求输出 $y(t)$。

12 已知系统函数 $H(s)$的零、极点分布如图 P8.12 所示，系统单位冲激响应 $h(t)$的初值 $h(0^+)=2$，系统最初是松弛的。

(a)求系统函数 $H(s)$，并说明该系统是否稳定？

(b)求系统的单位冲激响应 $h(t)$；

(c)系统的输入 $x(t)=10\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3})$时，求系统的输出 $y(t)$。

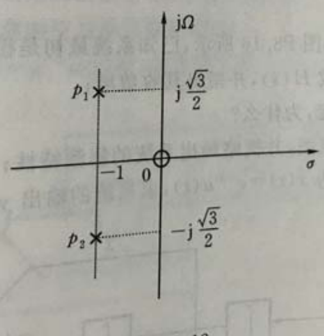


图 P8.12

解 (1) 由零极点图可写出 $H(s)=\dfrac{s}{(s+1-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2})(s+1+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2})}\cdot H_0$

又因有 $h(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sH(s)=\lim\limits_{s\to\infty}H_0\dfrac{s^2}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}=H_0\times 1=H_0$

故得 $H_0=2$

$$H(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2s}{s^2+2s+\frac{7}{4}}$$

$H(s)$的极点 P_1，P_2 在 s 平面的左半平面，ROC 是极点 P_1，P_2 的右边包含 jω 轴，所以系统为稳定系统。

(2) $$H(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$h(n)=2\left[e^{-t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]u(t)-\frac{4}{\sqrt{3}}\left[e^{-t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]u(t),\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$=\left[2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]e^{-t}u(t),\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

(P278)

(3) 把 $s=\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入 $H(s)$ 得到

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\times \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}+1)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\mathrm{j}\sqrt{3}}{1+\mathrm{j}\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$$

$$y(t)=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=5\sqrt{3}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3})$$

16.

8.16 某连续时间 LTI 系统如图 P8.16 所示，已知系统最初是松弛的。

(a)求该系统的系统函数 $H(s)$，并指出其收敛域；

(b)判断该系统是否稳定，为什么？

(c)绘出该系统的零极点图，并概略画出系统的幅频特性；

(d)若系统的输入信号为 $x(t)=\mathrm{e}^{-4t}u(t)$，求系统的输出 $y(t)$。

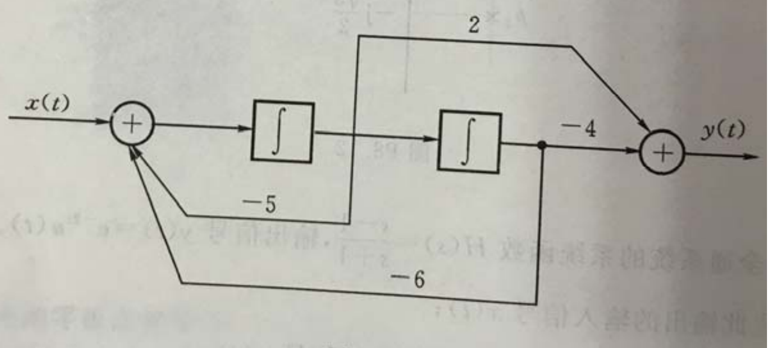
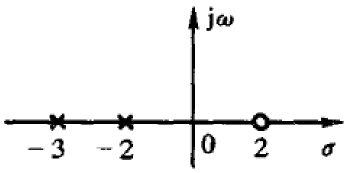


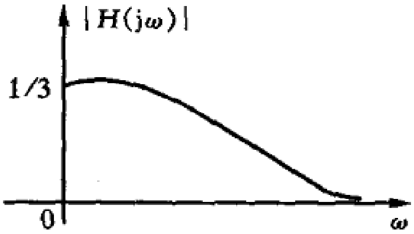
图 P8.16

解 (1) $H(s)=\dfrac{2s-4}{s^2+5s+6}=\dfrac{2(s-2)}{(s+2)(s+3)}$， $\mathrm{Re}\{s\}>-2$

(2) 因为收敛域包括了 $j\omega$ 轴，所以系统是稳定的。

(3) 零极点图及幅频特性如下图所示





(4) $X(s)=\dfrac{1}{s+4}$， $\mathrm{Re}\{s\}>-4$

$$Y(s)=X(s)H(s)$$

$$=\frac{2(s-2)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$=\frac{10}{s+3}-\frac{4}{s+2}-\frac{6}{s+4},\ \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$y(t)=(10e^{-3t}-4e^{-2t}-6e^{-4t})u(t)$$

24.求下列由微分方程描述的增量线性系统的响应 $y(t)$.

(a) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\dfrac{3}{2}\dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{1}{2}y(t)=u(t)$, $y(0^-)=0$, $y'(0^-)=1$;

(b) $\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\sin(\Omega_c t)u(t)$, $y(0^-)=1$;

解:

(a) 对微分方程两边进行单边拉氏变换，有

$$s^2\mathcal{Y}(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+\frac{3}{2}\left(s\mathcal{Y}(s)-y(0^-)\right)+\frac{1}{2}\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{s},$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{Y}(s)+\frac{3}{2}s\mathcal{Y}(s)+\frac{1}{2}\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{s}+sy(0^-)+y'(0^-)+\frac{3}{2}y(0^-)=\frac{1}{s}+1$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}(s)=\frac{\frac{1}{s}+1}{s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}}=\frac{s+1}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)}=\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

对上式进行部分分式展开，可得

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{2}{s}+\frac{-2}{s+\frac{1}{2}}$$

通过拉氏反变换可得 (P278)

$$y(t)=\left(2e^{-t}-2e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$

(b)对微分方程两边进行单边拉氏变换，有 (P278)

$$s\mathcal{Y}(s)-y(0^-)+2\mathcal{Y}(s)=\frac{\Omega_c}{s^2+\Omega_c^2},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$\Rightarrow s\mathcal{Y}(s)+2\mathcal{Y}(s)=\frac{\Omega_c}{s^2+\Omega_c^2}+y(0^-)=\frac{\Omega_c}{s^2+\Omega_c^2}+1$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y}(s)=\left(\frac{\Omega_c}{s^2+\Omega_c^2}+1\right)\frac{1}{s+2}=\frac{\Omega_c}{(s+2)(s^2+\Omega_c^2)}+\frac{1}{s+2}$$

对上式进行部分分式展开，可得

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{\Omega_c}{(s+2)(s+j\Omega_c)(s-j\Omega_c)}+\frac{1}{s+2}$$

$$=\frac{\frac{\Omega_c}{4+\Omega_c^2}}{s+2}+\frac{\frac{1}{-4j-2\Omega_c}}{s+j\Omega_c}+\frac{\frac{1}{4j-2\Omega_c}}{s-j\Omega_c}+\frac{1}{s+2}$$

通过拉氏反变换可得 (P278)

$$y(t)=\left(\frac{\Omega_c}{4+\Omega_c^2}+1\right)e^{-2t}u(t)+\frac{1}{-4j-2\Omega_c}e^{-j\Omega_c t}u(t)+\frac{1}{4j-2\Omega_c}e^{j\Omega_c t}u(t)$$

$$=\left(\frac{\Omega_c}{4+\Omega_c^2}+1\right)e^{-2t}u(t)+\frac{-\frac{\Omega_c}{2}+j}{4+\Omega_c^2}e^{-j\Omega_c t}u(t)+\frac{-\frac{\Omega_c}{2}-j}{4+\Omega_c^2}e^{j\Omega_c t}u(t)$$

$$=\left(\frac{\Omega_c}{4+\Omega_c^2}+1\right)e^{-2t}u(t)+\frac{1}{4+\Omega_c^2}\left(-\Omega_c\cos(\Omega_c t)+2\sin(\Omega_c t)\right)u(t)$$

$$=\frac{1}{4+\Omega_c^2}\left[\left(4+\Omega_c+\Omega_c^2\right)e^{-2t}-\Omega_c\cos(\Omega_c t)+2\sin(\Omega_c t)\right]u(t)$$

第 9 章习题答案

1. 用定义求下列信号的 z 变换及收敛域。

(a) $\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-2)$ (d) $(\frac{1}{2})^n u(-n)$ (e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ (f) $e^{an}u(n)$

解： (a) $\sum_{n=-\omega}^{+\infty}[\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-2)]z^{-n}=1-\frac{1}{2}z^{-2}$,除去$z=0$或$|z|=\infty$的全部z

(d) $\frac{-z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.|z|<\frac{1}{2}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}2^m z^m=\frac{1}{1-2z}$$

$$|z|<\frac{1}{2}$$

(e) $\frac{\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}.|z|<2,|z|>\frac{1}{2}$

或者

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{n}-1$$

$$=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-2}-1$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\qquad \frac{1}{2}<|z|<2$$

(f) $\dfrac{1}{1-e^{a}z^{-1}}, |z|>e^{a}$

2.假设 $x(n)$的 z 变换为

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

试画出 $X(z)$的零极点图，并求 $X(z)$可能的收敛域。

分析：

有限长序列的收敛域为：$0<|z|<\infty$ ， $n_1\le n\le n_2$

特殊情况有：$0<|z|\le\infty$ ， $n_1\ge 0$

$0\le|z|<\infty$ ， $n_2\le 0$

右边序列的收敛域为：$R_{x-}<|z|<\infty$ ，$n\ge n_1$

因果序列的收敛域为：$R_{x-}<|z|\le\infty$ ，$n\ge n_1\ge 0$

左边序列的收敛域为：$0<|z|<R_{x+}$ ，$n\le n_2$

特殊情况有：$|z|<R_{x+}$ ，$n\le n_2\le 0$

双边序列的收敛域为：$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

有三种收敛域：圆内、圆外、环状（$z=0$，$z=\infty$ 要单独讨论）

解：对 X(Z)的分子和分母进行因式分解得

$$X(Z)=\frac{(1-\frac{1}{2}Z^{-1})(1+\frac{1}{2}Z^{-1})}{(1+\frac{1}{4}Z^{-2})(1+\frac{1}{2}Z^{-1})(1+\frac{3}{4}Z^{-1})}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}jZ^{-1})(1-\frac{1}{2}jZ^{-1})(1+\frac{3}{4}Z^{-1})}$$

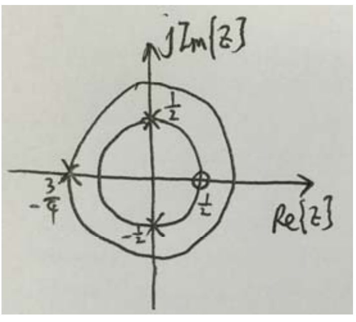
X(Z)的零点为： 1/2 ， 极点为： j/2 , -j/2 , -3/4

∴ X(Z)的收敛域为：

(1) 1/2 < | Z | < 3/4 , 为双边序列， 请看 <图形一>

(2) | Z | < 1/2 ， 为左边序列，请看 <图形二>

(3) | Z | > 3/4 ， 为右边序列， 请看 <图形三>



3. 如果 X(z)代表 x(n)的 z 变换，R 代表它的收敛域，试用 X(z)和 R 确定下面每个序列 y(n)的 z 变换和响应的收敛域：

解: (a) $Y(z)=X^*(\frac{1}{z}), z\neq 0, z\in R$(收敛域)

(b) $Y(z)=\dfrac{X(z)+X^*(\frac{1}{z})}{2}, z\neq 0, z\in R$

(c) $\dfrac{X(z)}{1-z^{-1}}, z\neq 0$

(d) $Y(z)=\dfrac{1-z^{-m}}{1-z^{-1}}, R\cap |z|>1$

(e) $Y(z)=\dfrac{X(z)}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}, R\cap\{|z|>1\}\cap\{|z|>a\}$

(f) $Y(z)=\dfrac{X(\frac{z}{a})}{1-az^{-1}}, |a|R\cap\{|z|>a\}$

4. 试用部分分式展开法求以下各式的 z 反变换。

(c) $\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}, \frac{1}{2}<|z|<1$

$$x(n)=-2u(-n-1)-2(\frac{1}{2})^n u(n)$$

5. z 变换 X(Z)为 $X(z)=\dfrac{1}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})}$

(a) 确定与 X(z)有关的所有可能的收敛域；

(b) 求每种收敛域对应的离散时间序列；

(c) 以上哪种序列存在离散时间傅立叶变换。

解：(a) 可能的收敛域$|z|>\frac{4}{3}, |z|<\frac{1}{3}, \frac{1}{3}<|z|<\frac{4}{3}$

(b) $|z|>\frac{4}{3}, x(n)=\frac{1}{5}(-\frac{1}{3})^n u(n)-\frac{4}{5}(\frac{4}{3})^n u(n)$

$|z|<\frac{1}{3}, x(n)=-\frac{1}{5}(-\frac{1}{3})^n u(-n-1)+\frac{4}{5}(\frac{4}{3})^n u(-n-1)$

$\frac{1}{3}<|z|<\frac{4}{3}, x(n)=\frac{1}{5}(-\frac{1}{3})^n u(n)-\frac{4}{5}(\frac{4}{3})^n u(-n-1)$

(c) 当 $\frac{1}{3}<|z|<\frac{4}{3}$

12．对差分方程

$$y(n)+\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

所确述的 LTI 稳定系统，确定

（a）系统函数；　　　　（b）单位脉冲响应；

（c）若系统输入 $x(n)=u(n)$，求系统的响应 $y(n)$；

（d）如果系统输出 $y(n)=[2(-\frac{1}{3})^n-3(-\frac{1}{2})^n]u(n)$，求系统输入信号 $x(n)$。

解：（a）$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

（b）$h(n)=(-\frac{1}{3})^n u(n)$

（c）$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{3}{4}(\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}})$

$$y(n)=\frac{3}{4}u(n)+\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n u(n)$$

（d）

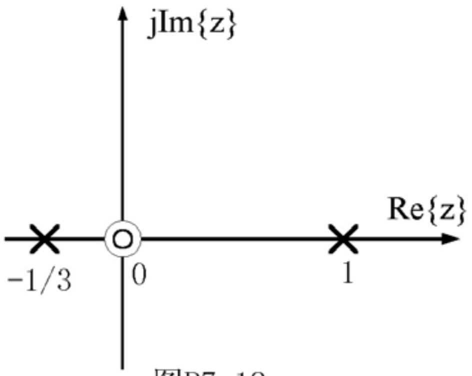
$$y(n)=\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)^n-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{\frac{2}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}}=2-\frac{3\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=2-3\left(1-\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)=-1+\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$x(n)=-\delta(n)-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$　　P333 时移性质

14. 某一离散时间 LTI 因果系统的零极点如图 P7.18 所示，已知系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的终值 $\lim_{n\to\infty}h(n)=1$。



图P7. 18

（a） 确定系统函数；

（b） 求系统的单位脉冲响应；

（c） 写出系统的差分方程；

（d） 若系统的激励 $x(n)=(-2)^n u(n)$，求系统响应 $y(n)$；

解：（a）
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2z^{-1}}}}{\dfrac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}=\frac{-\frac{7}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{10}{3}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

（b）
$$\because H(z)=z^{-2}\left(\frac{\frac{3}{16}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{9}{16}}{1-z^{-1}}\right)$$

$$\therefore h(n)=\frac{3}{16}(-\frac{1}{3})^n u(n-2)+\frac{9}{16}u(n-2)$$

（c）
$$y(n)-\frac{2}{3}y(n-1)-\frac{1}{3}y(n-2)=\frac{3}{4}x(n-2)$$

（d）
$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{\frac{3}{4}z^{-2}}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$$

23. 某离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n-1)-2x(n-2)$$

初始条件 $y(-2)=\frac{3}{2}, y(-1)=1$。当加入激励信号 $x(n)$ 时，系统响应 $y(n)=(2^n-1)u(n)$，求系统激励信号 $x(n)$。

解： 对差分方程两边进行单边 z 变换

$$X(z)=\frac{(1-3z^{-1}+2z^{-2})Y(z)}{z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{2z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}}+2\frac{z^{-1}}{z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{3}{1-2z^{-1}}$$

故 $x(n) = 3 \cdot 2^{-n} u(n)$