自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

学号________ 姓名________

密 …… 封 …… 线

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学建模与数学实验 考试学期 18-19-3 得分________

适用专业 选修各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
批阅人								

可带计算器，如无特殊要求，所有计算结果保留小数点后两位

一、选择题 (每题 3 分，共 15 分)

1. 在非线性方程求近似根时，下列关于一步迭代法论述正确的是 (B)
   (A) 只能求实数根　(B) 可以求实数根，也可以求复数根
   (C) 迭代函数的导数必须小于 1　(D) 迭代函数的导数必须不大于 1

2. n 阶 Leslie 矩阵有________ 个非零元素。 (D)
   (A) 不少于 $(n-1)^2$　(B) 不多于 $(n-1)^2$　(C) 不少于 $2n-1$　(D) 不多于 $2n-1$

3. 下列说法正确的是 (D)
   (A) 判断矩阵一定是一致矩阵　(B) 正互反矩阵一定是判断矩阵
   (C) 能通过一致性检验的矩阵是一致矩阵　(D) 一致矩阵一定能通过一致性检验

4. Logistic(阻滞增长) 微分与差分方程模型关系的正确描述是 (C)
   (A) 二者都有一个稳定的正平衡点　(B) 二者都有一个不稳定的正平衡点
   (C) 二者不等价　(D) 二者等价

5. 在下列 Leslie 矩阵中，主特征值不唯一的是 (D)
   (A) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 1.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$

二、判断题 (每题 2 分，共 10 分)

1. 在非线性方程求近似根时二分法总是可以求出近似根。 (×)

2. n 阶判断矩阵的主特征值 $\lambda_{max} \geq n$。 (√)

3. 寿命服从指数分布的元件存在预防性更换策略。 (×)

4. 当初始时刻人口数量小于环境容纳量时，按照阻滞增长模型计算得到的人口数量增长率一定先增后减。 (×)

5. 赋权图的邻接矩阵是实对称矩阵。 (×)

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

学号＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿

密　封　线

三、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 用 Matlab 求解多项式拟合问题，常用的命令有 polyfit,lsqcurvefit,fit 等。
2. 请描述 Volterra 原理： 提高捕获强度，有利于食饵，不利于捕食者; 降低捕获强度，不利于食饵，有利于捕食者 。
3. 请描述偏角引理： 在流速恒定的水域，当人泳速大小固定时，最快路线位于连接起点和终点的直线段上 。
4. 差分方程 $x_{k+1} = \frac{1}{4}x_k(a - x_k), a \geq 5$ 的正平衡点是 $a - 4$ ，其稳定的条件是 $5 \leq a < 12$ 。
5. 请列出本人提交的上机实验内容（标题即可） 因人而异 。

四、（10 分）

变量 x 与 y 的一组观测数据如下：

x	3	4	5	6
y	24	36	58	89

（1）求 3 次插值多项式。

（2）如经验公式为 $y = e^{ax+b}$ 形式对上述数据进行曲线拟合（保留到小数点后 1 位）。

解：（1）拉格朗日插值：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot y_i, l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) =& \frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{(3-4)(3-5)(3-6)} \times 24 + \frac{(x-3)(x-5)(x-6)}{(4-3)(4-5)(4-6)} \times 36 + \frac{(x-4)(x-4)(x-6)}{(5-3)(5-6)} \times 58 \\ &+ \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(6-3)(6-4)(6-5)} \times 89 \\ =& -\frac{1}{6}x^3 + 7x^2 - \frac{185}{6}x + 58 \end{aligned}$$

---------5'

牛顿插值：$N_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$，

$$A_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{m=0}^{k} \frac{f(x_m)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k}(x_m - x_i)}$$

（2）正规方程模型 $A^TAa = A^Tb$，其中 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \ln 24 \\ \ln 36 \\ \ln 58 \\ \ln 89 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^TA = \begin{pmatrix} 86 & 18 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}, (A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.9 \\ -0.9 & 4.3 \end{pmatrix}$。

$a_1 = 0.4409, a_0 = 1.8438$，$\ln y = 0.4409x + 1.8438$，等价的，$y = 6.3205e^{0.4409x}$。

---------5'

五、(10 分)

给定方程 $x^3-x^2-1=0$，求方程在 $[1,2]$ 内的实根。

（1）能否采用二分法求该方程在 [1,2] 内的根的近似值，说明理由。

（2）用 Newton 迭代法求该方程在 [1,2] 内的根的近似值，写出相应的迭代格式，并取初值为 1.5，给出该方程的近似值，保留小数点后 4 位。

解：（1）可以采用。理由：设 $f(x)=x^3-x^2-1, f(1)=-1<0$，$f(2)=3>0$，由闭区间上连续函数零点定理知在 $(1,2)$ 内的至少存在一个零点。又，$f'(x)=3x^2-2x>0$，导数在此区间不变号，可知函数在此区间严格单增，因此存在唯一一个单重零点。 ---------5'

（2）构造 Newton 迭代格式：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-x_k^2-1}{3x_k^2-2x_k}=\frac{2x_k^3-x_k^2+1}{3x_k^2-2x_k}$，$x_0=1.5$。计算可知，$x_1=1.4667$，$x_2=1.4656$，$x_3=1.4656$。近似值为 1.4656。 ---------5'

六、(20 分)

(1) 若某种群 Leslie 矩阵为 $P=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$,

1）从年龄结构、增长率和数量发展最终趋势三方面分别讨论这个种群的演化规律。

2）通过等比例改变各年龄组的生育率来保持该种群数量上的稳定，请问是否可行？如果可行，则各年龄组生育率应该控制为多少？如果不可行，请说明理由。控制后是否有稳定年龄结构？如果有，求稳定年龄结构，如果没有，求年龄结构的变化周期？

3）如果通过等比例改变每个年龄组的存活率来保持该种群数量上的稳定，请问是否可行？如果可行，则比例应该控制为多少？稳定后年龄结构如何？如果不可行，请说明理由。

解：循环指数 $h=gcd\{1,2,3\}=1$，所以该 Leslie 矩阵主特征值唯一。

（1）特征方程 $f(\lambda)=|\lambda I-P|=\lambda^3-2\lambda^2-1.8\lambda-1.05=0$, 求得主特征值 $\lambda_0=2.7825$。由于主特征值唯一，所以该种群存在稳定年龄结构 $n^*=\left(1,\frac{s_1}{\lambda_0},\frac{s_1s_2}{\lambda_0^2}\right)=(1,0.1078,0.0271)$。单位时间内，该种群的增长率为 $\lambda_0-1=1.7825$。由于 $\lambda_0>1$，所以该种群最终数量趋向无穷大。 ---------7'

（2）假设比例系数为 k，则特征方程为 $f(\lambda,k)=|\lambda I-\tilde{P}|=\lambda^3-2k\lambda^2-1.8k\lambda-1.05k=0$, 令 $f(1,k)=0$，求得 $k=0.2062$，主特征值唯一，$\lambda_0=1$。该方案可行，比例应控制为原水平的 0.2062 倍。控制后有稳定的年龄结构，稳定年龄结构 $n^*=\left(1,\frac{s_1}{\lambda_0},\frac{s_1s_2}{\lambda_0^2}\right)=(1,0.3,0.21)$。 ---------7'

（3）假设比例系数为 k，则特征方程为 $f(\lambda,k)=|\lambda I-\tilde{P}|=\lambda^3-2\lambda^2-1.8k\lambda-1.05k^2=0$, 令 $f(1,k)=0$，$1+1.8k+1.05k^2=0$，显然该方程在 $(0,1)$ 区间内不存在根。所以该方案不可行。

---------6'

七、（20 分）

下表中给出了某项工程中所需要完成的 9 个任务以及相关数据如表 1 所示。从左到右每列给出的信息为：任务号；每个任务预期耗时；先决条件的任务号（代表该项任务必须在其所有的先序任务都完成后才能开始）；正常耗时的基础上所能缩短的最大时间；缩短耗时所需要的额外开支。

任务	正常耗时（周）	先决条件任务号	最大缩短时间（周）	额外开支（千元/周)
1	4		1	10
2	5	1	0	
3	7	2	2	11
4	6	2,3	2	9
5	13	3	3	4
6	7	3	1	6
7	9	2,4	0	
8	11	4,7	4	12
9	8	6	2	8

（1）按照预期耗时施工，求该工程所需要的最短时间？

（2）在问题（1）的基础上进一步考虑缩短工程耗时，假设每缩短一周能带 2 万元的效益，从获利最大的角度，该如何安排每个任务？请建立该问题的数学模型，并判断其类型。

解：(1) 最短工时等于关键路径的权，求出关键路径为：$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 7 \to 8 \to 10$, 计算可得最短工时为 4+5+7+6+9+11=42。 ---------10'

(2) 引入决策变量 S_i、r_i 分别表示第 i 项任务开工时间和缩短时间，参数 T_i、R_i,p_i 分别表示第 i 项任务的正常耗时和最大可缩短时间, 每周额外开支。根据题意，可建立如下数学模型

$$\max \quad 20(42 - S_{10}) - \sum_{i=1}^{n} p_i r_i$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & S_i + T_i - r_i \le S_j, e_{i,j} \in E \\ & S_i \ge 0, \\ & 0 \le r_i \le R_i, i \in \{1, 2, \cdots, 9\} \end{aligned}$$

---------10'

该模型属于线性规划 LP。