Lista de Exercícios
Distribuições de Probabilidades

Monitoria CE081 - atualizado em 27 de abril de 2016 às 00:02:14

A resolução (detalhada) dos exercícios é feita com base nas probabilidades tabeladas da distribuição Normal Padrão na forma: $P(0 \leqslant Z \leqslant Z_c)$ (conforme figura 1 à esquerda). Contudo, para qualquer tabulação da distribuição chegar-se-á ao mesmo resultado.

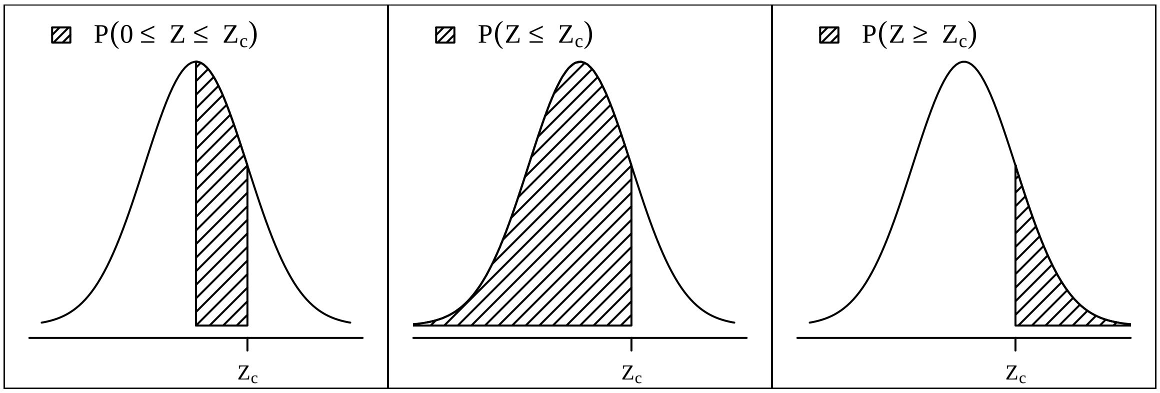


Figure 1: Tipos de distribuições Normais tabelas

Ressalta-se que, embora os procedimentos para resolução sejam exibidos, os cálculos são realizados via procedimentos computacionais, portanto arrendondamentos podem alterar ligeiramente os resultados. Todavia, se houver algum resultado discrepante informe o monitor para correção.

1. (Usando a tabela) Calcule as probabilidades abaixo considerando X uma variável aleatória normalmente distribuída com média μ e variância σ^2:

(a) $P(X \geqslant 1 \mid \mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$ **0,159**
(b) $P(X > -2 \mid \mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$ **0,977**
(c) $P(X < 1,5 \mid \mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$ **0,933**
(d) $P(X \leqslant -0,5 \mid \mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$ **0,309**
(e) $P(-1 < X < 1,5 \mid \mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$ **0,775**
(f) $P(1 < X \leqslant 1,5 \mid \mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$ **0,092**
(g) $P(X \leqslant 9 \mid \mu = 10,\ \sigma^2 = 9)$ **0,369**

(a) Na tabela $P(0 \leqslant Z \leqslant 1) = 0{,}341$.
Portanto $P(Z \geqslant 1) = 0{,}5 - 0{,}341 = 0{,}159$

(b) Na tabela $P(0 \leqslant Z \leqslant 2) = 0{,}477$.
Portanto $P(Z > -2) = 0{,}477 + 0{,}5 = 0{,}977$

(c) Na tabela $P(0 \leqslant Z \leqslant 1,5) = 0{,}433$.
Portanto $P(Z < 1,5) = 0{,}433 + 0{,}5 = 0{,}933$

(d) Na tabela $P(0 \leqslant Z \leqslant 0,5) = 0{,}191$.
Portanto $P(Z \leqslant -0,5) = 0{,}5 - 0{,}191 = 0{,}309$

(e) Na tabela $P(0 \leqslant Z \leqslant 1) = 0{,}341$ *e* $P(0 \leqslant Z \leqslant 1,5) = 0{,}433$. *Portanto* $P(-1 < Z < 1,5) = 0{,}341 + 0{,}433 = 0{,}775$

(f) Na tabela $P(0 \leqslant Z \leqslant 1) = 0{,}341$ *e* $P(0 \leqslant Z \leqslant 1,5) = 0{,}433$. *Portanto* $P(1 < Z \leqslant 1,5) = 0{,}433 - 0{,}341 = 0{,}092$

(g) Padronizando $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{9-10}{\sqrt{9}}\right) = P(Z \leqslant -0{,}333)$. *Na tabela* $P(0 \leqslant Z \leqslant 0,333) = 0{,}131$. *Portanto* $P(Z \leqslant -0,333) = 0{,}5 - 0{,}131 = 0{,}369$

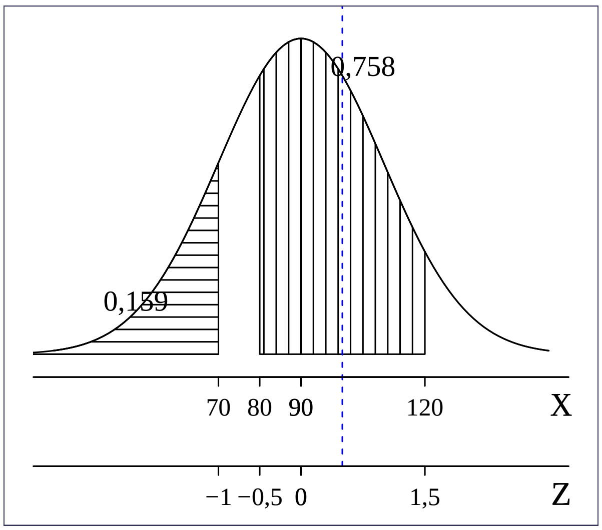
2. Uma lanchonete adquiriu recentemente uma máquina de sorvete italiano automática. Sabe-se, pelo fabricante, que a máquina produz sorvetes com uma variância de 400 gramas^2 e que somente 15,9% dos sorvetes produzidos tem peso inferior a 70 gramas. Supondo uma distribuição Normal para a variável de interesse responda:

(a) Qual a média de peso dos sorvetes produzidos pela máquina? **90 gramas**

(b) Qual a probabilidade de se produzir uma casquinha com peso menor que 85 gramas? **0,401**

(c) Sendo que o peso anunciado da casquinha de 100 gramas e tolera-se casquinhas dentre 80 e 120 gramas. Qual a proporção de casquinhas produzidas com peso inferior a especificação? E peso superior a especificação? **30,854% e 6,681%**

(d) Você acredita que a máquia atende satisfatoriamente as especificações? O que deve ser adequado na distribuição dos pesos para que se atenda as especificações? **O parâmetro de locação μ deve estar de acordo como o especificado.**



X: peso das casquinhas em gramas, $X \sim N(\mu, 400)$

(a) Sabe-se que $P(X < 70) = 0,159$, *consequentemente* $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{70-\mu}{\sqrt{400}}\right) = P(Z < z_{0,159}) = 0,159$. *Pela tabela temos que* $z_{0,159} = 1$, *ou seja,* $\frac{70-\mu}{\sqrt{400}} = 1$. *Assim, isolando* μ *chegamos a* $\mu = 90$.

(b) $P(X < 85) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{85-90}{\sqrt{400}}\right) = P(Z < -0,25)$ *= 0,401.*

(c) Inferior $\Rightarrow P(X \leqslant 80) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{80-90}{\sqrt{400}}\right) = P(Z \leqslant -0,5) = 0,309$

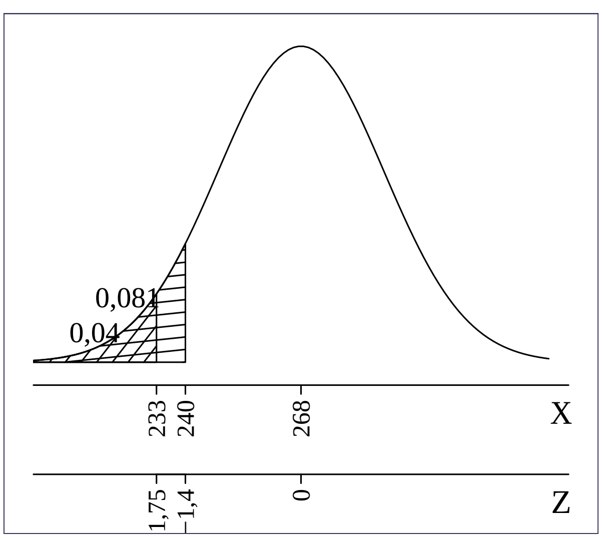
Superior $\Rightarrow P(X \geqslant 120) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{120-90}{\sqrt{400}}\right) = P(Z \geqslant 1,5) = 0,067$

(g) Interpretação pessoal, porém utilize as probabilidades calculadas e o gráfico apresentado (a linha em vermelho representa o valor anunciado, 100 g)

3. O prazo de duração de uma gravidez têm uma distribuição Normal com média 268 dias e variância 225 dias^2. Definindo como prematura uma criança que nascer com menos de 247 dias de gestação, responda:

(a) Qual a porcentagem de crianças nascidas prematuramente? **0,081**

(b) Se tivéssemos interesse em mudar a definição de criança prematura como sendo aquela cujo período de gestação está entre os 4% menores, qual seria o tempo mínimo de gestação para que uma criança não fosse considerada prematura? **241,74**

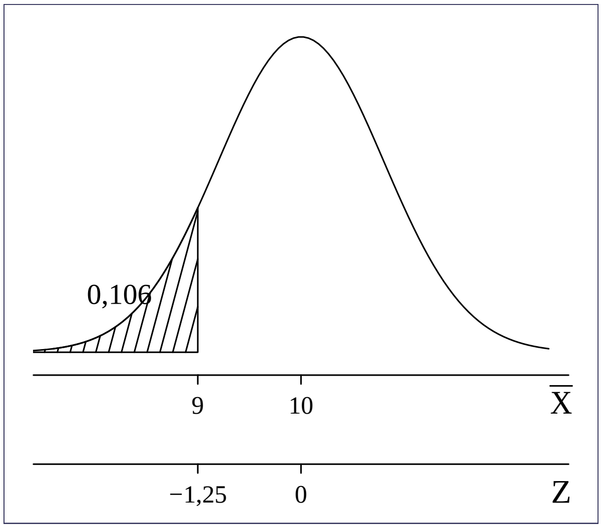


X: tempo de duração de uma gravidez em dias, $X \sim N(268, 225)$

(a) Prematura = nascer com menos de 247 dias. $P(X < 247) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{247-268}{\sqrt{225}}\right) = P(Z < -1,4) = 0,081$.

(b) Prematura, se a probabilidade do tempo de gestação à esquerda de um valor q_p *for menor que 0,04.* $P(X < q_p) = 0,04$, *consequentemente,* $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{q_p-268}{\sqrt{225}}\right) = P(Z < z_{0,04}) = 0,04$. *Pela tabela temos que* $z_{0,04}$ *= -1,751, ou seja,* $\frac{q_p-268}{\sqrt{225}}$ *= -1,751. Assim, isolando* q_p *chegamos a* q_p *= 241,74.*

4. Uma fábrica de alimentos, especializada em rosquinhas, afirma que o comprimento de suas rosquinhas se distribuem normalmente com média de 10 cm e desvio padrão de 4 cm. Recentemente um cliente desta empresa pediu ressarcimento de todo o valor pago nas rosquinhas, pois a especificação estava incorreta, esta constatação do cliente veio após ele obter, de 25 rosquinhas, uma média de 9 cm. Você acredita que o cliente teve razão em pedir ressarcimento?



X: comprimento das rosquinhas em centímetros,
$X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 16)$
$\bar{X}$: *comprimento médio das rosquinhas em centímetros ,*
$X \sim N(\mu = 10, \sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n = 16/25)$

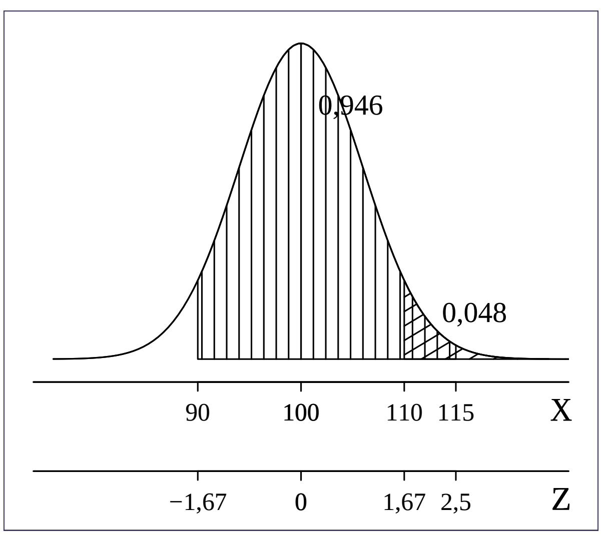
Assim, a probabilidade de ocorrer a situação informada pelo cliente ou algo mais extremo é $P(\bar{X} \leqslant 9) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} < \frac{9-10}{4/\sqrt{25}}\right) = P(Z < -1,25) =$ *0,106*

5. Suponha que a taxa normal de glicose no sangue humano é uma variável aleatória com distribuição Normal de média 100 mg por 100 ml de sangue e desvio padrão 6 mg por 100 ml de sangue. Calcule as probabilidades de:

(a) Apresentar taxa de glicose superior a 110 mg por 100 ml de sangue. **0,048**

(b) Apresentar taxa de glicose entre 90 e 115 mg por 100 ml de sangue. **0,946**

(c) Qual a probabilidade da interseção entre os eventos descritos nos itens (a) e (b). **1, 0,048**



X: taxa normal de glicose no sangue humano em mg/100ml, $X \sim N(100, 6^2)$

(a) $P(X > 110) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{110-100}{6}\right) = P(Z > 1,67) =$ *0,048*

(b) $P(90 < X < 115) = P\left(\frac{90-100}{6} < \frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{115-100}{6}\right) = P(-1,67 < Z < 2,5) =$ *0,946*

(c) $P([X > 110] \bigcap [90 < X < 115]) = P(100 < X < 115) = P\left(\frac{110-100}{6} < \frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{115-100}{6}\right) = P(1,67 < Z < 2,5) =$ *0,042*

6. (Distribuição amostral da média) Seja X uma variável aleatória normalmente distribuída com média 30 e variância 100. Calcule as probabilidades descritas abaixo:

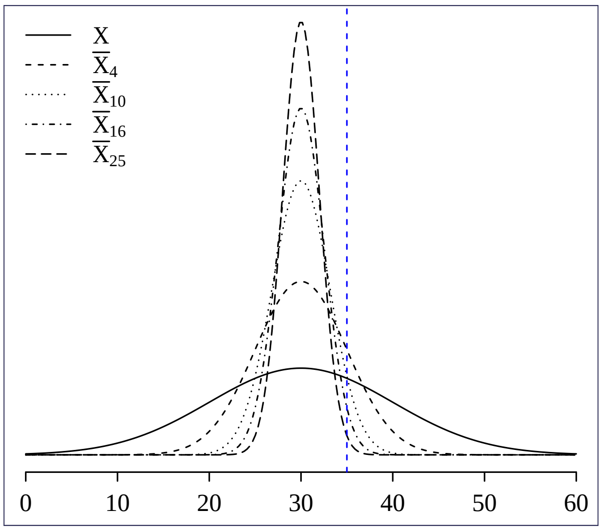
(a) De X ser superior a 35. **0,309**

(b) Da média de 4 amostras de X ser superior a 35. **0,159**

(c) Da média de 10 amostras de X ser superior a 35. **0,057**

(d) Da média de 16 amostras de X ser superior a 35. **0,023**

(e) Da média de 25 amostras de X ser superior a 35. **0,006**



Seja $\bar{X}_n$: média de n observações da variável aleatória X.

(a) $P(X > 35) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{35-30}{\sqrt{(100)}}\right) = P(Z > 0,5) = \mathit{0,309}$

(b) $\bar{X}_4 \sim N(\mu = 4, \sigma_4^2 = 100/4)$

$P(X > 35) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma_4} > \frac{35-30}{\sqrt{(100/4)}}\right) = P(Z > 1) = \mathit{0,159}$

(c) $\bar{X}_{10} \sim N(\mu = 4, \sigma_4^2 = 100/10)$

$P(X > 35) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma_{10}} > \frac{35-30}{\sqrt{(100/10)}}\right) = P(Z > 1,58) =$ *0,057*

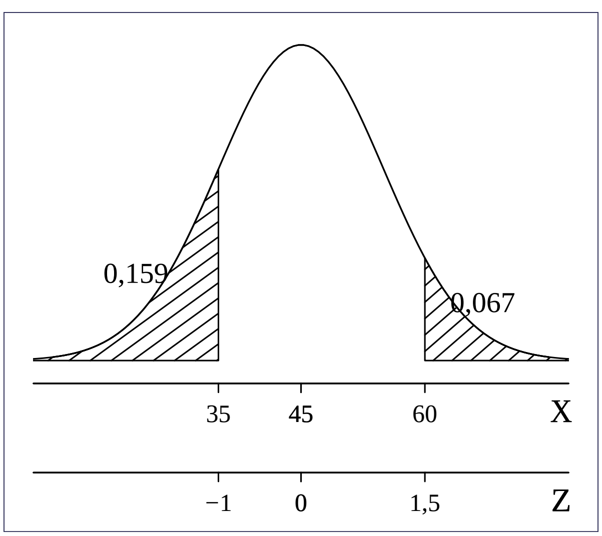
(d) $\bar{X}_{16} \sim N(\mu = 4, \sigma_4^2 = 100/16)$

$P(X > 35) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma_{16}} > \frac{35-30}{\sqrt{(100/16)}}\right) = P(Z > 2) = \mathit{0,023}$

(e) $\bar{X}_{25} \sim N(\mu = 4, \sigma_4^2 = 100/25)$

$P(X > 35) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma_{25}} > \frac{35-30}{\sqrt{(100/25)}}\right) = P(Z > 2,5) = \mathit{0,006}$

7. Um pai decidiu por incentivar seu filho a realizar percursos de corrida de forma mais rápida, o percurso atualmente é realizado, em média, com 45 minutos . O pai propôs um desafio em que, se o filho realiza o percurso antes de 35 minutos recebe um prêmio de R$10,00, porém se o percurso for realizado em 1 hora ou mais o filho deve pagar, ao pai R$4,00. Supondo que a distribuição dos tempos para realização do percurso seja normal e ainda que a variância seja 10 min^2. Quantos reais espera-se que o filho ganhe neste desafio, em 30 corridas? **R$ 278,065**



X: tempo para realização do percurso. $X \sim N(45, 10^2)$ *L: Lucro esperado do filho no desafio*

$$\begin{aligned}
L &= \textit{P(ganhar)R\$10,00 - P(pagar)R\$4,00} \\
&= P(X < 35)10 - P(X > 60)4 \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{35-45}{\sqrt{100}}\right)10 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{60-45}{\sqrt{100}}\right)4 \\
&= P(Z < -1)10 - P(Z > 1.5)4 \\
&= (0,159)10 - (0,067)4 \\
&= 1,59 - 0,268 = 1,319
\end{aligned}$$

Assim L = 1,319 representa o lucro esperado em uma corrida, deseja-se para 30 corridas espera-se que o filho ganhe 39,58 reais.