Lista de Exercícios
Distribuições de Probabilidades

Monitoria CE081 - atualizado em 27 de abril de 2016 às 00:02:23

1. Recentemente o jogador de basquete Kobe Bryant encerrou sua carreira. Em sua última partida ele chegou a incríveis 60 pontos marcados na vitória do Lakers sobre o Utah Jazz. Sabendo que a média de pontos de Kobe na sua última temporada foi de 17,6 pontos qual a probabilidade dele ter marcado os 60 pontos naquela última partida? A que fatores você atribuiria este feito do jogador? **aprox. 0**

X: número de pontos de Kobe em uma partida de basquete
$X \sim Poisson(\lambda = 17,6)$

$$P(X = 60) = \frac{e^{-17,6}\, 17,6^{60}}{60!} \approx 0$$

2. Na Liga Paulistana de Futebol Amador o time *Unidos do Colombo* obtém a média de 0,70 gols marcados no primeiro tempo de jogo. Este campeonato é constituído por fases onde os times jogam 2 jogos (um como mandante e outro como visitante), quem tiver o maior número de gols acumulado ganha e em caso de empate recorre-se aos pênaltis. O time está nas semi-finais do campeonato e perdeu o primeiro jogo por 2x0. Supondo equidade no comportamento do time em ambos os tempos de jogo responda:

(a) Qual a probabilidade do *Unidos do Colombo* marcar 1 gol no primeiro tempo? **0,348**

(b) Qual a probabilidade deles marcarem mais que 2 gols no segundo tempo? **0,034**

(c) Qual a probabilidade do *Unidos do Colombo* avançar para a próxima fase sem necessitar dos pênaltis? **0,167**

X: número de gols marcados em um tempo de jogo
$X \sim Poisson(\lambda = 0,7)$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0,7}\, 0,7^{1}}{1!} = 0,348$$

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leqslant 2) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - e^{-0,7}\left(\frac{0,7^0}{0!} + \frac{0,7^1}{1!} + \frac{0,7^2}{2!}\right) = 0,034 \end{aligned}$$

Y*: número de gols marcados em ambos os tempos de jogo*
$Y \sim Poisson(\lambda = 2(0,7) = 1.4)$

$$\begin{aligned} P(Y > 2) &= 1 - P(Y \leqslant 2) \\ &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\ &= 1 - e^{-1,4}\left(\frac{1,4^0}{0!} + \frac{1,4^1}{1!} + \frac{1,4^2}{2!}\right) = 0,167 \end{aligned}$$

3. Seu José, um micro agricultor, está planejando trocar a cultivar de feijão que será plantada em seu terreno e para tal pediu auxílio a um amigo estatístico. Na colheita anterior, seu José teve uma média de 4 grãos de feijão por vagem. E a nova cultivar, segundo a Embrapa, proporciona o número de grãos por vagem (X) com as seguintes probabilidades, calculadas a partir de uma distribuição Poisson.

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	0.04979	0.14936	0.22404	0.22404	0.16803	0.10082	0.05041

Considerando a distribuição de probabilidades descrita, faça o que se pede:

(a) Defina a variável X representada na distribuição de probabilidades e o domínio de X (os valores que X pode assumir).

(b) Qual a taxa de grãos por vagem (λ) considerada pela Embrapa para cálculo das probabilidades? **3**

(c) Calcule as probabilidades de haver pelo menos quatro, exatamente quatro e mais que 4 grãos de feijão em uma vagem. **0,815; 0,168; 0,185**

(d) O que o amigo estatístico de seu José poderia indicar-lhe sobre a escolha desta nova cultivar?

X: número de grão de feijão por vagem, $X \in \mathbb{Z}_+$, *ou seja,* $x = 0, 1, 2, ...$
$X \sim$ *Poisson*(λ)

Sabemos, pela distribuição dada que $P(X = 0) = 0,04979$. *Então,*

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= e^{-\lambda}\, \lambda^0/0! = 0,04979 \\
&= e^{-\lambda} = 0,04979 \\
&= \ln(e^{-\lambda}) = \ln(0,04979) \\
&= \lambda = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant 4) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\
&= 0,04979 + 0,14936 + 0,22404 + 0,22404 + 0,16803 = 0,815
\end{aligned}
$$

$$P(X = 4) = P(X = 4) = 0,168$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - 0,815 = 0,185$$

4. Seja X uma variável aleatória que se distribua conforme modelo Poisson de $\lambda = 5$ em certo espaço de tempo t, ou seja, $X \sim \text{Poisson}(\lambda t = 5t)$. Calcule:

(a) P(X = 3 | t = 1) **0,14**

(b) P(X > 3 | t = 1) **0,735**

(c) P(X ⩽ 2 | t = 1) **0,125**

(d) P(2 < X ⩽ 6 | t = 1) **0,638**

(e) E[X | t = 2] e V[X | t = 2], a média e a variância de X no espaço de tempo t = 2. **10; 10**

(f) As probabilidades dos itens (a), (b), (c) e (d) considerando as contagens no espaço de tempo t = 2. **0,008; 0,99; 0,067; 0,127**

RESOLVER

5. Uma gráfica têm como principal serviço a impressão de calendários personalizados. Para cada calendário vendido lucra-se R$5,00. Ainda, como garantia de qualidade, não se cobra os calendários que apresentarem quaisquer erros de impressão. Nos registros de produção da gráfica constatou-se que já foram produzidos 100 calendários e destes, foram encontrados 50 erros de impressão. Considerando o padrão histórico de produção da gráfica, qual o lucro esperado por calendário? Neste contexto, você manteria a garantia de não cobrar os que apresentarem defeitos? **Lucro esperado R$3,04**

X: número de erros de impressão por calendário
$X \sim$ *Poisson*$(50/100 = 0,5)$

O lucro esperado da empresa será o produto entre o lucro obtido por um calendário sem erros de impressão e a probabilidade de produzir calendários sem erro. Conforme variável aleatório X definida acima, temos:

$P(X = 0) = e^{-0,5}\, 0,5^0/0! = 0,607$

Lucro esperado $= P(X = 0)$ R\$5,00 = R\$3,04

6. Um dos principais problemas nas regiões litorâneas é o índice de afogamento, principalmente no verão. Em uma cidade do litoral do Paraná o número de afogamentos nesta época é de 5 a cada 1.000 banhistas. Sendo assim, calcule as probabilidades:

(a) Ocorrem pelo menos 2 afogamentos em 1.000 banhistas. **0,125**

(b) Ocorrem pelo menos 4 afogamentos em 2.000 banhistas. **0,029**

X: número de afogamentos em 1.000 banhistas
$X \sim Poisson(\lambda = 5)$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^5 \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} \right) = 0,125 \end{aligned}$$

Y: número de afogamentos em 2.000 banhistas
$Y \sim Poisson(\lambda = 5(2) = 10)$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 4) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= e^{10} \left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^3}{4!} \right) = 0,029 \end{aligned}$$