Lista de Exercícios
Intervalos de confiança e teste de hipóteses

Monitoria CE081 - atualizado em 22 de maio de 2016 às 23:41:36

Na resolução detalhada dos exercícios adota-se a notação conforme descrito abaixo.

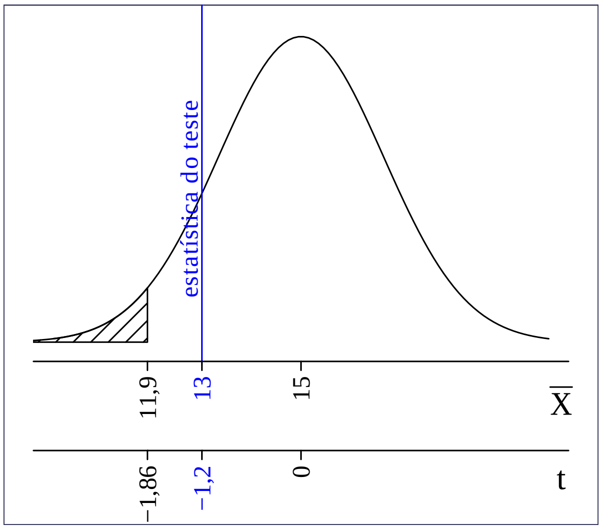
- μ: média populacional
- π: proporção populacional
- σ^2: variância populacional
- $\bar{x}$: média amostral
- $\hat{p}$: proporção amostral
- S^2: variância amostral
- Z: variável aleatória sob distribuição Normal(0, 1)
- IC(θ, (1-α)*100%): intervalo de confiança para o parâmetro θ com confiança de (1-α)*100%
- t_{n-1}: variável aleatória sob distribuição t de Student com n-1 graus de liberdade
- z_{calc}: estatística de um teste de hipóteses. Assume as expressões e distribuições conforme abaixo:
  - teste para média com variância conhecida ou n > 30 [1]. $z_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{Normal}(0, 1)$
  - teste para média com variância desconhecida e n < 30. $z_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
  - teste para proporção. $z_{calc} = \dfrac{\hat{p} - \pi_0}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})/n}} \sim \mathrm{Normal}(0, 1)$

[1] O tamanho de amostra é colocado em várias obras de Estatística Básica, porém resssalta-se que a estatística do teste não segue distribuição Normal(0, 1) quando a variância é desconhecida, independente do tamanho da amostra.

1. Um agricultor, produtor de soja, sabe que com as especificações atuais cada héctare produz em média 15 toneladas de grãos. Nesta safra uma amostra de 9 héctares forneceu as seguintes produções em toneladas por héctare

17 13 6 10 14 17 5 19 16

Com base nos resultados obtidos da amostra há evidências de que a produtividade da safra deste ano esta aquém do esperado? Considere o nível de significância de 5%. **estatística do teste -1.2 > valor de referência -1.86, não rejeita** H_0



Hipóteses: $H_0 : \mu = 15$ *vs* $H_1 : \mu < 15$.
Informações do teste: $\mu_0 = 15$; $\alpha = 0,05$
Informações da amostra: $\bar{x} = 13$; $S = 5$; $n = 9$
Estatística do teste: $z_{calc} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1,2$
Valor de referência: $z_{tab} = t_{(n-1,\alpha)} = -1,86$
Consultado na tabela da distribuição t de Student com n-1 graus de liberdade. Regra de decisão:

$$\begin{cases} \text{Rejeita } H_0, & se\ z_{calc} < z_{tab} \\ \text{Não Rejeita } H_0, & se\ z_{calc} \geqslant z_{tab} \end{cases}$$

Como z_{calc} *= -1,2 é maior que* z_{tab} *= -1,86 não temos evidências para rejeitar* H_0*, ou seja, não temos evidência de que a produção está significativamente aquém do esperado. O valor inferior a 15 pode ser atribuído a mera casualidade da amostra.*

2. Considere a situação apresentada no exercício 1 para a resolução dos itens abaixo:

(a) Construa a regra de decisão do teste na escala da média. **Rejeita** H_0 **se** $\bar{x} < 11,9$

(b) Calcule o p-valor do teste de hipóteses, e conclua sobre o teste a partir dele. **p-valor > 0,1, não rejeita** H_0

(c) Construa um intervalo de confiança para a média de grãos de soja por héctare com 95% de confiança e interprete-o. **IC(μ, 95%): (9,16, 16,84)**

(a) Para um teste de hipóteses unilateral à direita para a média rejeita-se H_0 *quando* $z_{calc} < z_{tab}$*. Trabalhando com esta inequação temos:*

$$z_{calc} < z_{tab} \Rightarrow \quad \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < z_{tab} \Rightarrow \quad \bar{x}-\mu_0 < \frac{z_{tab}\cdot S}{\sqrt{n}} \Rightarrow \quad \bar{x} < \frac{z_{tab}\cdot S}{\sqrt{n}} + \mu_0 \Rightarrow \quad \bar{x} < 11,901$$

Assim a regra de decisão na escala da média fica

$$\begin{cases} \text{Rejeita } H_0, & se\ \bar{x} < 11,901 \\ \text{Não Rejeita } H_0, & se\ \bar{x} \geqslant 11,901 \end{cases}$$

(b) O p-valor refere-se a probabilidade de se observar algo tão extremo quanto o observado, sob a suposição de que a hipótese nula é verdadeira, ou seja, p-valor = $P(t_{n-1} < z_{calc} \mid H_0) = P(t_8 < -1,2 \mid H_0)$ *= 0,132.*
Podemos concluir sobre a rejeição da hipótese nula contrastando o p-valor com o nível de significância adotado, como p-valor $> \alpha$ *(0,132 > 0,05) então não há fortes evidências para rejeição de* H_0.

(c) Para construção dos intervalos de confiança temos que: $\bar{x}$ *= 13,* $S = 5$*,* $n = 9$ *e ainda o coeficiente de confiança é de 0,95 (*α *= 0.05). Como a variância é desconhecida e ainda a amostra é pequena a distribuição t de Student deverá ser utilizada. Com ela obtemos o quantil -2.31 que atende o nível de confiança especificado, ou seja,* $P(t_8 < -2.31)$ *= 0.025. E assim o intervalo de confiança é determinado como*

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \quad 13 \pm 2.31 \cdot \frac{5}{\sqrt{9}} \Rightarrow \quad 13 \pm 1,384 \Rightarrow \quad IC(\mu, 95\%) : (9,157,\ 16,843)$$

Portanto temos 95% de confiança de que o intervalo (9,157, 16,843) contenha o verdadeiro parâmetro μ.

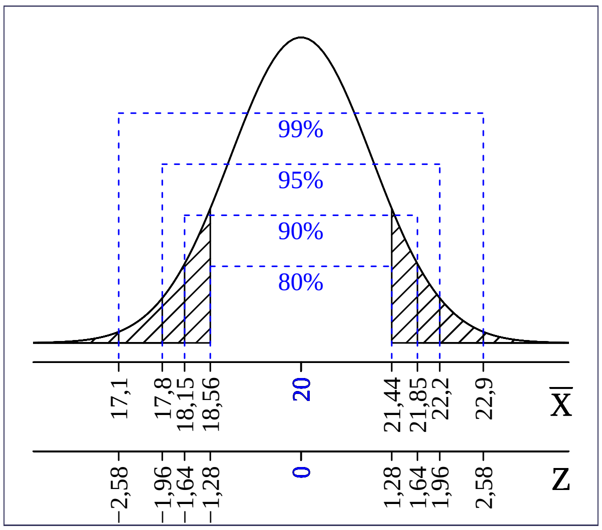
3. Considere X uma variável aleatória normalmente distribuída com média μ e variância σ^2, da qual obteve-se uma amostra que apresentou os seguintes resultados: $\sum_{i=1}^{64} x_i = 1280$ e $\sum_{i=1}^{64} x_i^2 = 26167$.

(a) Construa um intervalo de confiança para média com 80% de confiança. **IC(μ, 80%): (18,56, 21,44)**

(b) Construa um intervalo de confiança para média com 90% de confiança. **IC(μ, 90%): (18,15, 21,85)**

(c) Construa um intervalo de confiança para média com 95% de confiança. **IC(μ, 95%): (17,80, 22,20)**

(d) Construa um intervalo de confiança para média com 99% de confiança. **IC(μ, 99%): (17,10, 22,90)**



Do exercício temos que

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{320}{16} = 20$

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n-1} = \frac{26167 - 64 \cdot 20^2}{64-1} = 9 \Rightarrow S = \sqrt{9} = 3$

E um intervalo de confiança para média com 1-α de confiança é dado por IC(μ, $1-\alpha$): $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$*, em que* $z_{\alpha/2}$ *é o quantil da distribuição Normal(0, 1), tal que* $P(Z < z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

(a) $\alpha = 0,2 \Rightarrow z_{0,1} = 1,28$
IC(μ 80%): $20 \pm 1,28 \cdot 3/\sqrt{64} \Rightarrow (18,558, 21,442)$

(b) $\alpha = 0,1 \Rightarrow z_{0,05} = 1,64$
IC(μ 90%): $20 \pm 1,64 \cdot 3/\sqrt{64} \Rightarrow (18,15, 21,85)$

(c) $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$
IC(μ 95%): $20 \pm 1,96 \cdot 3/\sqrt{64} \Rightarrow (17,795, 22,205)$

(d) $\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{0,005} = 2,58$
IC(μ 99%): $20 \pm 2,58 \cdot 3/\sqrt{64} \Rightarrow (17,102, 22,898)$

4. Uma pesquisa eleitoral realizada com uma amostra de 400 eleitores de uma cidade do Paraná indicou que 140 deles são a favor do candidato A. Determine um intervalo de confiança para a proporção de eleitores favoráveis ao candidato A nesta cidade. Considere um nível de confiança de 95%. **IC(π, 95%): (0,303, 0,397)**

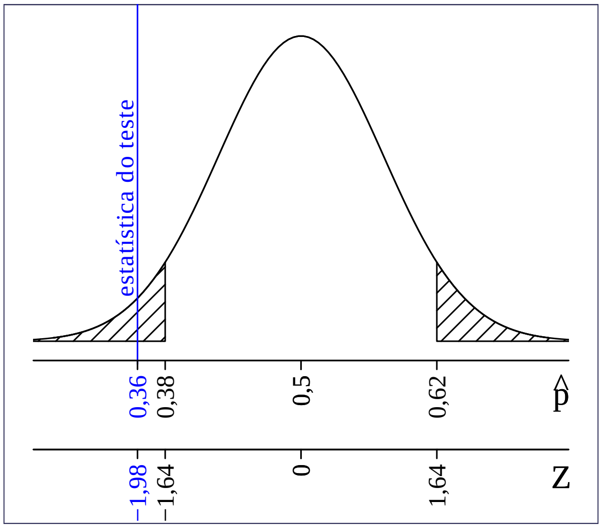
x: número de eleitores favoráveis ao candidato A
n: número total de eleitores na amostra
$\hat{p}$*: proporção de eleitores favoráveis ao candidato A.* $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{140}{400} = 0,35$

Intervalo de confiança para proporção:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow \quad 0,35 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{400}} \Rightarrow \quad 0,35 \pm 0,047 \Rightarrow \quad IC(\pi,\ 95\%) : (0,303, 0,397)$$

Portanto temos 95% de confiança de que o intervalo (0,303, 0,397) contenha o verdadeiro parâmetro π*, proporção de eleitores favoráveis ao cadidato A. .*

5. João um estudante do ensino médio, ao voltar de uma aula sobre probabilidades onde um exemplo com lançamento de moedas foi apresentado, decidiu avaliar se uma moeda com uma pequena deformação era honesta. Para tal avaliação João lançou a moeda 50 vezes e obteve 18 caras. Considerando o experimento do João temos evidências sobre a não honestidade de sua moeda? Considere um nível de significância de 0,1. **estatística do teste |-1.98| > valor de referência 1.64, rejeita** H_0



Hipóteses: $H_0 : \pi = 0,5$ *vs* $H_1 : \pi \neq 0,5$.
Informações do teste: $\pi_0 = 0,5$; $\alpha = 0,1$
Informações da amostra: $n = 50$
$\hat{p} = \frac{18}{50} = 0,36$;
Estatística do teste: $z_{calc} = \frac{\hat{p}-\pi_0}{\sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})/n}} = -1,98$
Valor de referência: $z_{tab} = z_{\alpha/2} = 1,645$
Consultado na tabela da distribuição Z (Normal(0, 1)).
Regra de decisão:

$$\begin{cases} \text{Rejeita } H_0, & \text{se } |z_{calc}| > z_{tab} \\ \text{Não Rejeita } H_0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $|z_{calc}|$ *= 1,98 é maior que* z_{tab} *= 1,645 temos evidências para rejeitar* H_0*, ou seja, há evidências de que a moeda de João não é honesta. Todavia, note que se tivéssemos considerado* α *= 0,05 a decisão seria complicada, nestes casos o ideal é aumentar o tamanho da amostra, neste exprimento, lançar mais vezes a moeda.*