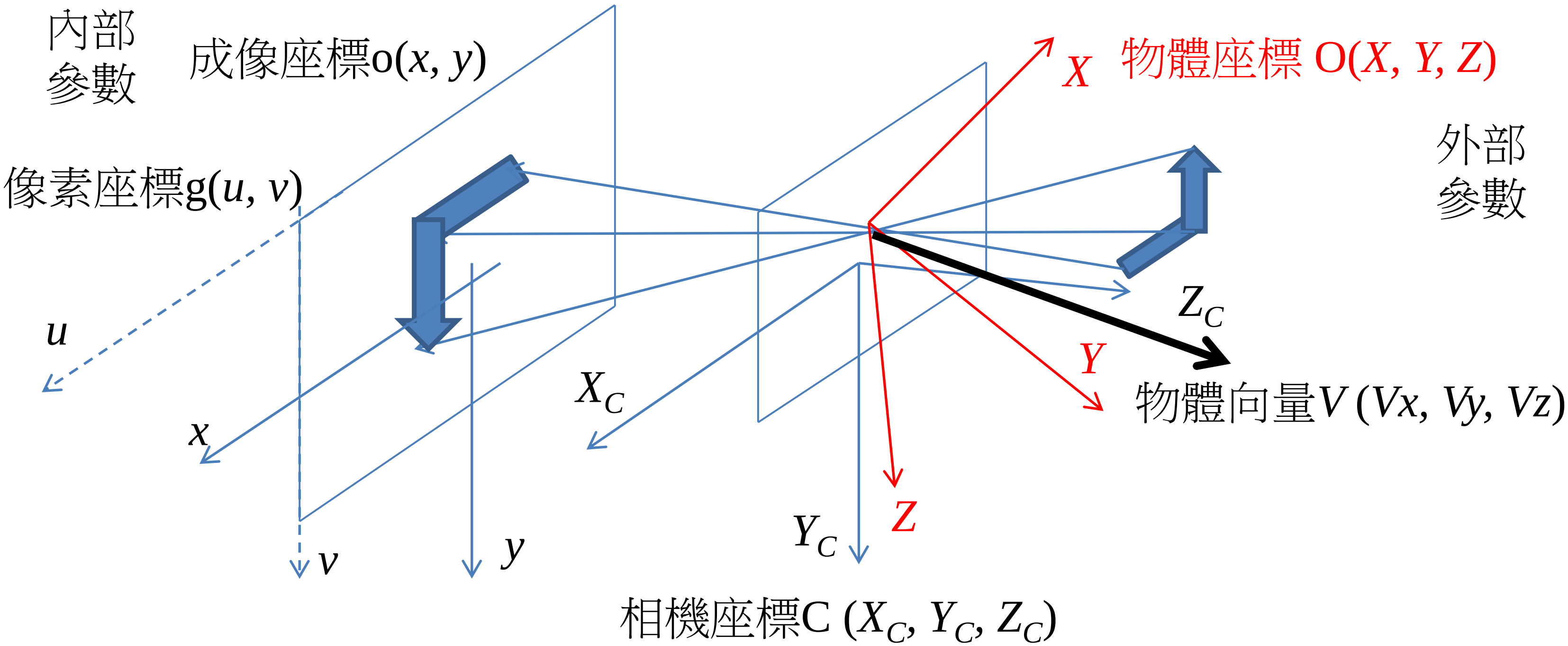
投影座標轉換

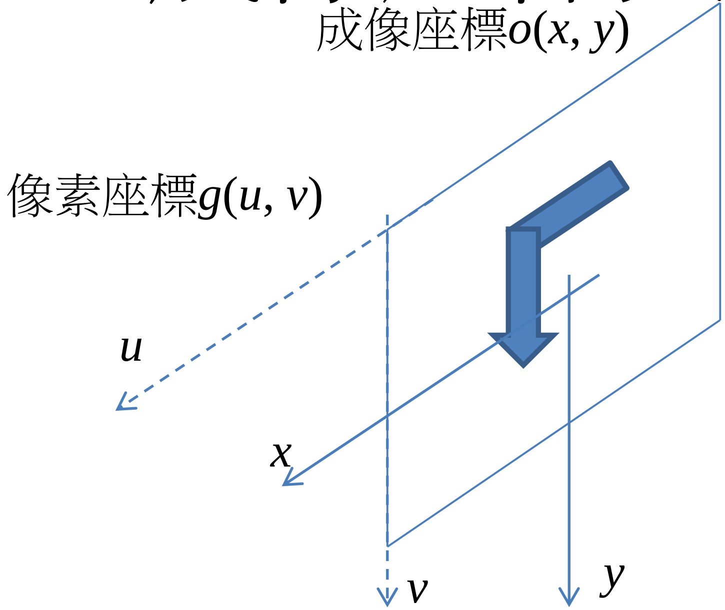
JRphy

物體到CCD之間的各種座標



- 在此先僅考慮進軸近似的成像，也就是經過透鏡後的像不會扭曲，且為正立的像

成像座標與像素座標的關係

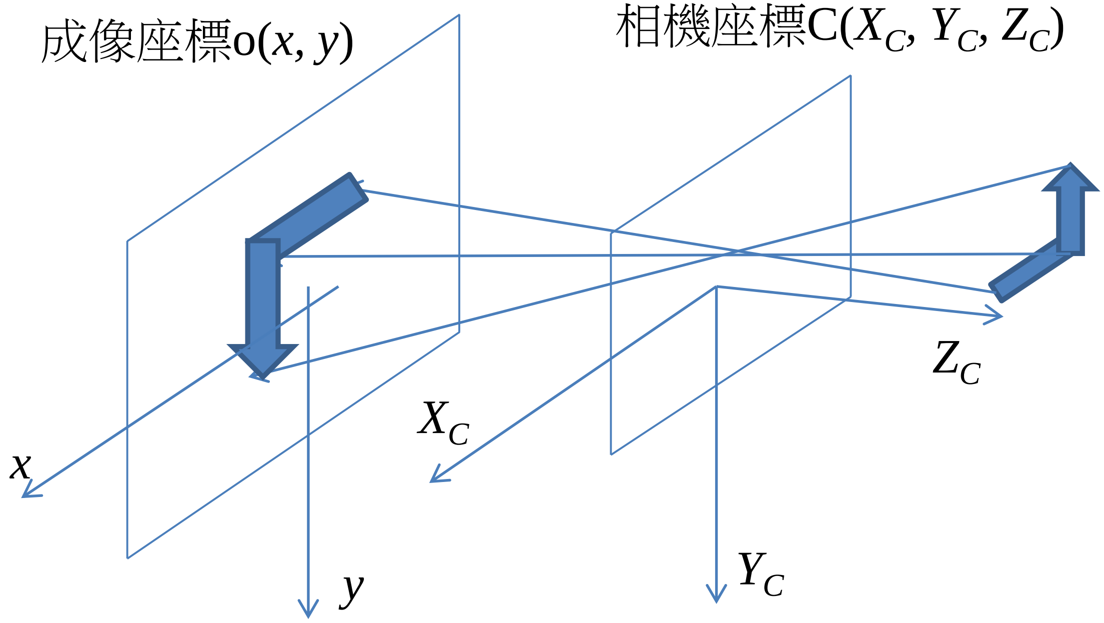


$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{dx} + c \\ v = \dfrac{y}{dy} + d \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & c \\ 0 & 1/dx & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

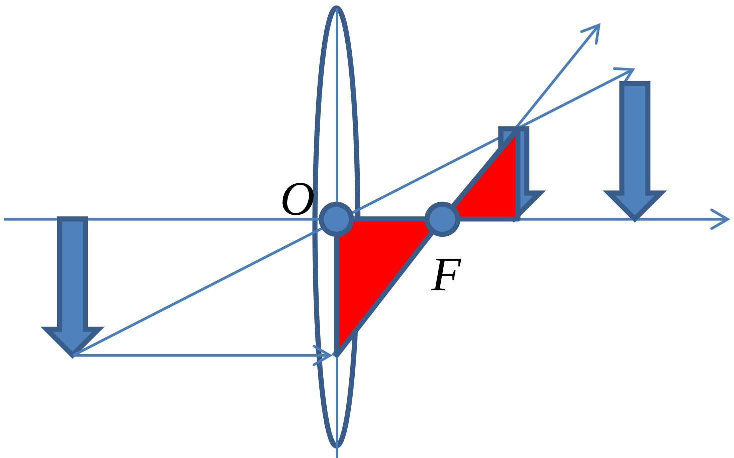
- 若是成像座標原點與像素座標原點不同，則兩者之間需要做平移。設像素格點大小分別為dx, dy，其關係如上矩陣：

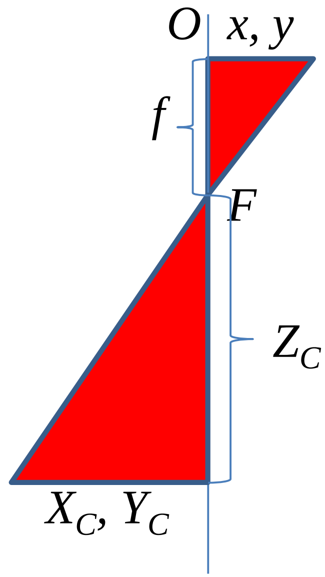
物體座標與相機座標



- 在此先僅考慮進軸近似的成像，也就是經過透鏡後的像不會扭曲，且為正立的像

物體座標與相機座標





$$\begin{cases} x = f\dfrac{X_C}{Z_C} \\ y = f\dfrac{Y_C}{Z_C} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_C}\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Z_C}{f} = \frac{X_C}{x} = \frac{Y_C}{y}$$

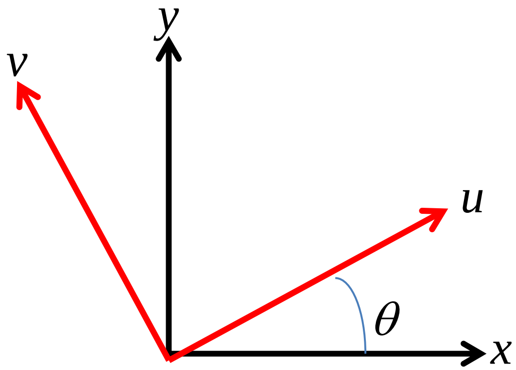
- 利用相似三角形的關係可得相機座標與成像座標的關係。然而成像座標為二維，物體座標為三維，兩者關係如上之矩陣

內部參數M_1

- 綜合前之推導，再將兩矩陣相乘即得到相機外部參數矩陣M_1

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f/dx & 0 & c \\ 0 & f/dx & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

二維旋轉矩陣



$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$v = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 在此定義旋轉方向為逆時針方向。對於任意兩座標系(u, v)與(x, y)而言，(x, y)座標系時針旋轉 θ角得到(u, v)座標系，則兩者的關係如上矩陣

三維旋轉矩陣
Euler Rotation Matrix

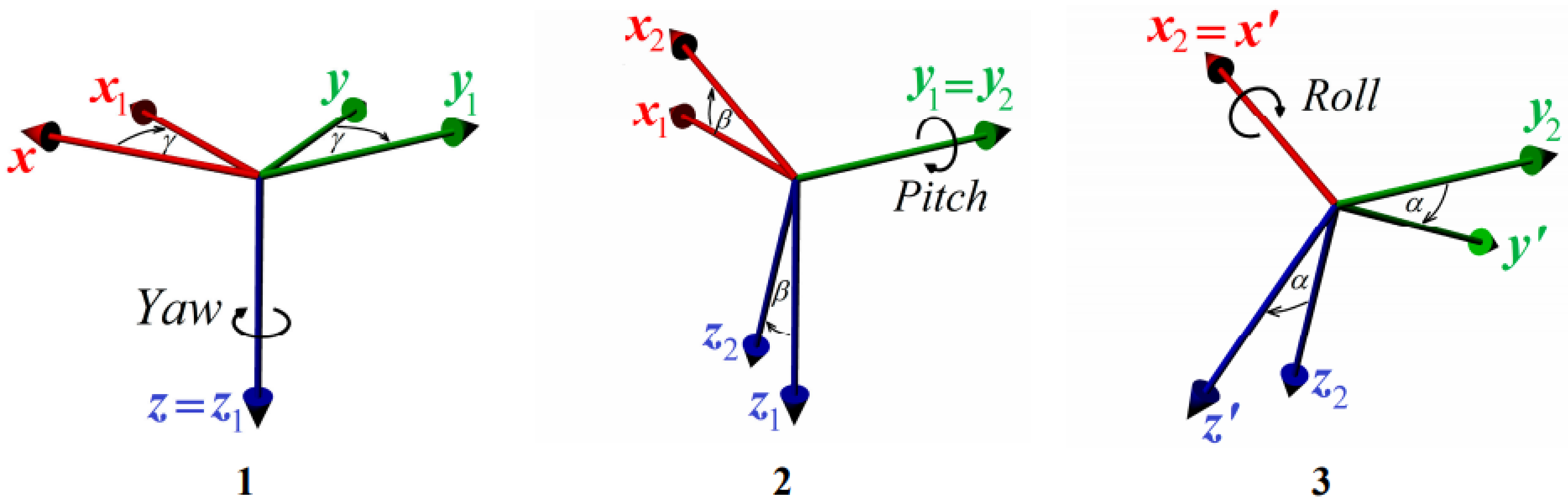
- 從前一頁可知，三維座標旋轉可看成以某一軸為轉軸轉動另外兩軸所得到的旋轉矩陣 $R_z(\theta_z)$、$R_y(\theta_y)$、$R_x(\theta_x)$ 。

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow M_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} & T_X \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} & T_Z \\ R_{13} & R_{22} & R_{33} & T_Y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

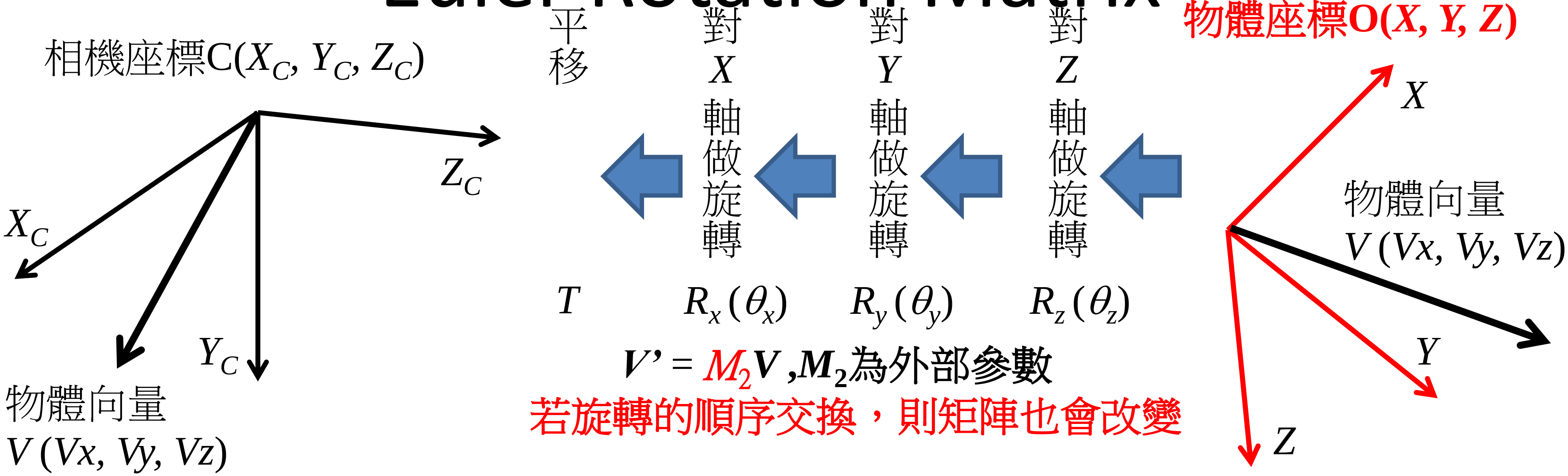
外部參數

三維旋轉矩陣
Euler Rotation Matrix



Aleš Janota *, Vojtech Šimák, Dušan Nemec and Jozef Hrbček ,
Improving the Precision and Speed of Euler Angles Computation from Low-Cost Rotation Sensor Data ,
Sensors 2015, 15, 7016-7039; doi:10.3390/s150307016

三維旋轉矩陣
Euler Rotation Matrix



- 不論相機如何旋轉，透過鏡頭看到的像不隨相機旋轉，故兩者之間應存在一個旋轉關係。而當鏡頭移動時，看到的物體跟著移動，所以存在一個平移關係

Rodrigus rotation

- Euler 旋轉矩陣在計算上是比較耗時的，故在opencv中使用另一種旋轉矩陣：**Rodrigus 旋轉矩陣**。對一個向量 $\vec{V}$ 在直角座標中以 $\hat{k}$ 為轉軸旋轉 θ 角後的向量為 $\vec{V}$‘，其數學式如下：

$$\vec{V}' = \vec{V}\cos\theta + \hat{k}\times\vec{V}\sin\theta + \hat{k}(\hat{k}\bullet\vec{V})(1-\cos\theta)$$

Rodrigus rotation

- 對於向量 $\vec{V}$ 而言，可以拆解成平行轉軸 $\vec{V}_{//}$ 與垂直轉軸 $\vec{V}_{\perp}$ 的分量，其中 $\hat{k}$ 為單位向量

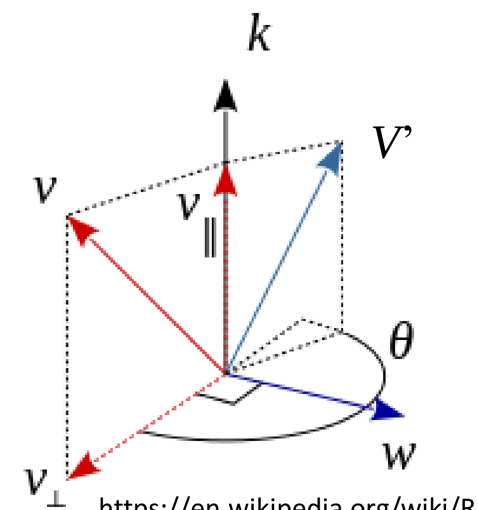
$$\vec{V}_{//} = (\vec{V} \bullet \hat{k})\hat{k}$$

$$\vec{V}_{\perp} = \vec{V} - \vec{V}_{//} = \vec{V} - (\vec{V} \bullet \hat{k})\hat{k}$$

- 而 $\vec{V}'$ 也能做相同的拆解

$$\vec{V}' = \vec{V}_{//}' + \vec{V}_{\perp}' \qquad \vec{V}_{\perp}' = \vec{V}_{\perp}\cos\theta + \vec{w}\sin\theta$$

$$\vec{w} = \hat{k} \times \vec{V}_{\perp} = \hat{k} \times (\vec{V} - \vec{V}_{//}) = \hat{k} \times \vec{V}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues'_rotation_formula

Rodrigus rotation

$$\vec{V}' = \vec{V}_{//}' + \vec{V}_{\perp}'$$
$$= \vec{V}_{//} + \vec{V}_{\perp}\cos\theta + \sin\theta(\hat{k}\times\vec{V})$$
$$= \vec{V}_{//} + (\vec{V} - \vec{V}_{//})\cos\theta + \sin\theta(\hat{k}\times\vec{V})$$
$$= \vec{V}\cos\theta + (1-\cos\theta)(\vec{V}\cdot\hat{k})\hat{k} + \sin\theta(\hat{k}\times\vec{V})$$

$$\vec{k}\times\vec{V} = \begin{bmatrix} (\vec{k}\times\vec{V})_x \\ (\vec{k}\times\vec{V})_y \\ (\vec{k}\times\vec{V})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_yV_z - k_zV_y \\ k_zV_x - k_xV_z \\ k_xV_y - k_yV_x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ k_x & -k_y & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

Rodrigus rotation matrix

$$K \times V = \begin{bmatrix} (k \times V)_x \\ (k \times V)_y \\ (k \times V)_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_y \times V_z - k_z \times V_y \\ k_z \times V_x - k_x \times V_z \\ k_x \times V_y - k_y \times V_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{R} = \cos\theta\, I + (1 - \cos\theta)\, \boldsymbol{K}^2 + \sin\theta\, \boldsymbol{K}$

物體座標與像素座標的關係

- 從前之推導可知，從像素座標轉到物體座標的數學式為：

$$g = M_1 M_2 O$$

- 其中M_1為內部參數，M_2為外部參數而在三維空間中平面有四個未知數，故至少要有四個方程式才能為一決定一平面。
- 若是有很多組點，則可以使用「最小平方法」找出誤差最小的解。

外部參數決定

- 一般外部參數的決定會使用多張棋盤格來決定，從上面推導來看最少需要三張，考慮到雜訊與精確度，通常會使用到十張不同的棋盤格圖來決定。
- 然而棋盤格上的點必須有順序性，否則求解的外部參數會有錯誤。

內部參數數學求解

- 在此我們先使用行向量來取代矩陣中每一行的元素

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f/dx & 0 & c \\ 0 & f/dx & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} & t_1 \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} & t_2 \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

內部參數數學求解

- 不失一般性的，我們假設在真實座標中的 $Z = 0$，則前述的方程式為

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

內部參數數學求解

- 令 $\boldsymbol{H}$ 為$\mathbf{M_1M_2}$的乘積，則

$$H = \begin{bmatrix} h_{i1} & h_{i2} & h_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix}$$

- 旋轉矩陣為正交且規一矩陣，有以下性質：
- $\boldsymbol{RR^T} = \boldsymbol{R^TR} = \boldsymbol{I} \rightarrow \boldsymbol{R^T} = \boldsymbol{R}^{-1}$ → 規一
- $h_1(\boldsymbol{M_1M_1}^T)^{-1}h_1^{\ T} = h_2(\boldsymbol{M_1M_1}^T)^{-1}h_2^{\ T}$
- $\boldsymbol{HH^T} = (\boldsymbol{M_1R})^T = \boldsymbol{M_1RR^TM_1}^T = \boldsymbol{M_1M_1}^T$
- $r_1r_2^{\ T} = 0$ → 正交
- $h_1(\boldsymbol{M_1M_1}^T)^{-1}h_2^{\ T} = 0$

內部參數數學求解

- 其中$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{M_1}\boldsymbol{M_1}^{\boldsymbol{T}})^{-1} = \boldsymbol{M_1}^{-\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M_1}^{-\boldsymbol{1}}$為對稱矩陣，$\boldsymbol{M_1}^{-\boldsymbol{T}}$為$(\boldsymbol{M_1}^{-1})^{\boldsymbol{T}}$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

- $B_{12} = B_{21}$，$B_{31} = B_{13}$，$B_{32} = B_{23}$，如此一來僅有六個未知數要解

內部參數數學求解

$$h_i B h_j^{\;T} = \begin{bmatrix} h_{i1} & h_{i2} & h_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \end{bmatrix} = v_{ij} b$$

$$v_{ij} = [h_{i1}h_{j1}, h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1}, h_{i2}h_{j2}, h_{i1}h_{j3} + h_{i3}h_{j1}, h_{i2}h_{j3} + h_{i3}h_{j2}, h_{i3}h_{j3}]^T$$

$$b = [B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33}]^T$$

從前面正交與歸一條件可得到

$$\begin{bmatrix} v_{12}^{\;T} \\ (v_{11} - v_{22})^T \end{bmatrix} b = Vb = 0$$

內部參數數學求解

- 此為正則方程式，可利用SVD或QRD求解
- 得到 b 之後即可得到 B 矩陣，接著可得 A矩陣，即可得內部參數如下頁。

內部參數數學求解

$$\boldsymbol{c} = (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = B_{33} - [B_{13}^2 + \boldsymbol{c}\,(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})]/B_{11}$$

$$f/_{dx} = \sqrt{\lambda/B_{11}}$$

$$f/_{dy} = \sqrt{\lambda B_{11}/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}$$

$$d = -B_{13}/B_{11}$$

λ 為一個比例常數

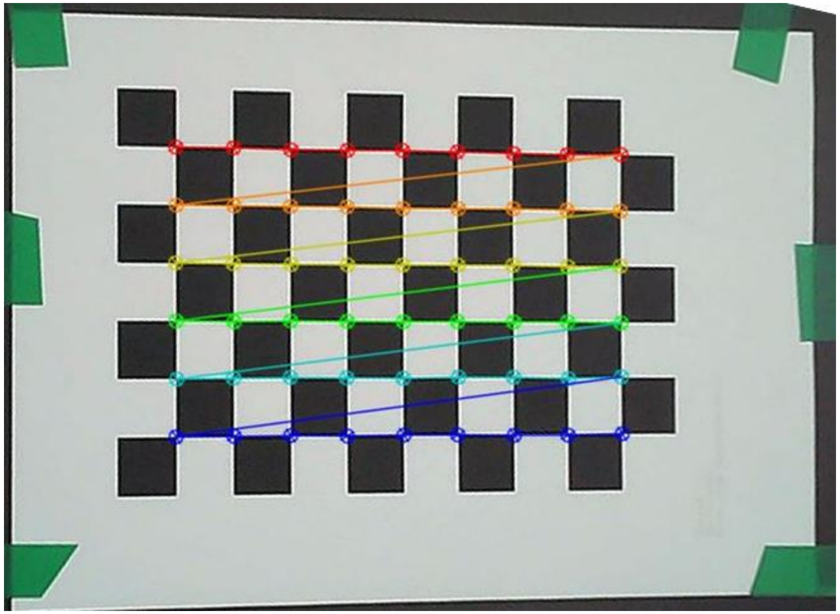
外部參數數學求解

- 求得內部參數後，即可用以下關係求得外部參數

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_1 \\
\mathbf{r}_2 &= \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2 \\
\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\
\mathbf{t} &= \lambda \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_3 \\
\lambda &= 1/\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_1\| = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_2\|
\end{aligned}
$$

相機參數決定

- 一般而言是用棋盤格照片 來決定相機參數，通常需要8~10張從不同角度拍攝的照片 來做校正，並且先決定選點的順序。



https://blog.csdn.net/xuelabizp/article/details/50327393