TEMA 1:

INTRODUCCIÓN

TEMA 1: INTRODUCCIÓN

1.1. ANÁLISIS COMBINATORIO

1.1.1. VARIACIONES

1.1.2. PERMUTACIONES

1.1.3. COMBINACIONES

1.2. ALGUNAS SERIES E INTEGRALES

- Definición previa

- **FACTORIAL:** Dado $n \in \mathbb{N}$ se define $\boxed{0! = 1}$ y para $\boldsymbol{n} > \mathbf{0}$:

$$\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

Así pues, se tiene que:

1! = 1	***2! = 2***	***3! = 6***	***4! = 24***
5! = 120	***6! = 720***	***7! = 5040***	***8! = 40320***

Cuando *n* >>0 se puede utilizar la aproximación de *Stirling:*

$$n! \approx e^{-n}\cdot n^{n}\cdot\sqrt{2\pi n}$$

HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS COMBINATORIO

- **VARIACIONES**
- **PERMUTACIONES**
- **COMBINACIONES**

⇨ **ORDINARIAS** (SIN REPETICIÓN DE ELEMENTOS)

⇨ **CON REPETICIÓN**

VARIACIONES ORDINARIAS

DEFINICIÓN: Dado un conjunto de *n* elementos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

se llama **variación ordinaria de orden *h*** (siendo $1 \leq h \leq n$), a cualquier *h*-tupla de elementos distintos del conjunto *A*.

Por tanto, dos **variaciones** se consideran **distintas** si:

- tienen distintos elementos, o bien,
- teniendo los mismos elementos, estos están en distinto orden.

VARIACIONES ORDINARIAS (y II)

Ejemplo: Dado $A = \{a, b, c, d\}$, las siguientes 3-tuplas son ejemplos de ***variaciones ordinarias de orden 3*** de los elementos del conjunto A:

$$(a,b,c), (a,b,d), \ldots, (b,a,c), \ldots,$$
$$(c,a,b), \ldots, (d,a,b), \ldots, (d,c,b),$$

con:

$$(a,b,c) \neq (b,c,a) \neq (c,b,a) \neq (d,a,c) \neq (a,c,d) \ldots$$

VARIACIONES ORDINARIAS (y III)

Así pues, para calcular el número total de *variaciones de **n** elementos de orden **h***, que se pueden formar con los elementos de un conjunto *A*, se utiliza la fórmula:

$$\boxed{V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}}$$

VARIACIONES ORDINARIAS (y IV)

Ejemplo: *En una sociedad con 10 miembros, se eligen presidente, secretario y tesorero, ¿de cuántas formas se puede hacer la elección? ¿y si un determinado socio debe estar en la directiva?*

Solución:

Tenemos un conjunto S (la sociedad), con ***10*** elementos (miembros): $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_{10}\}$. Hay que formar ***3***-tuplas (ternas) del tipo *(presidente, secretario, tesorero)*, es decir, el miembro que se elija en primer lugar será el presidente, el segundo el secretario y el tercero el tesorero, por tanto, **IMPORTA** el orden de los elementos en las tuplas.

VARIACIONES ORDINARIAS (y V)

Por tanto, la solución a la **primera pregunta** es:

Conjunto (sociedad): *S={s1,s2, ..., s10}* ⇨ ***10*** elementos.

Tuplas a formar: *(pres, secr, tes)* ⇨ ***3*** elementos, luego:

$$V_{n,h} = V_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

La solución a la **segunda pregunta** es:

Tuplas a buscar: *(sn, x, y), (x, sn, y), (x, y, sn)*, con $s_n \in S$.
Por lo que para cada tipo de tupla:

$$V_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = 9 \cdot 8 = 72$$

y el total es: 3 · 72 = **216**

VARIACIONES CON REPETICIÓN

DEFINICIÓN: Son variaciones ordinarias en las que se pueden repetir elementos, por lo que ***h*** puede ser mayor que ***n***. Es decir, dado

$$A = \{a, b, c, d\}$$

son *variaciones con repetición de orden 3 del conjunto A*, las siguientes:

$$(a,b,c), (a,a,b), (a,b,d), (c,c,c), \ldots$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN (y II)

Así pues, el número total de variaciones con repetición de orden ***h***, que se pueden formar con los ***n*** elementos de un conjunto *A*, se calculan de la siguiente manera:

$$\boxed{VR_{n,h} = n^h}$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN (y III)

Ejemplo: *¿Cuántos números hay de cuatro cifras?*

*Solución: Un número de cuatro cifras se puede interpretar como una tupla de **4** elementos, elegidos de un conjunto de **10**. Como el orden de los elementos importa y se pueden repetir, tenemos variaciones con repetición.*

VARIACIONES CON REPETICIÓN (y IV)

*Por tanto, el total de variaciones con repetición de orden **4** de esos **10** elementos es:*

$$VR_{10,4} = 10^4 = 10000$$

Pero como se trata de números de 4 cifras y no de tuplas, hay que quitar las que empiezan por 0: $(0,x_1,x_2,x_3)$, que son $VR_{10,3}$, así pues el total pedido es:

$$VR_{10,4} - VR_{10,3} = 10^4 - 10^3 = 9000$$

PERMUTACIONES ORDINARIAS

DEFINICIÓN: Son variaciones ordinarias en las que el orden ***(h)*** coincide con el número de elementos del conjunto ***(n)***. Así pues:

$$P_n = V_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$\boxed{P_n = n!}$$

PERMUTACIONES ORDINARIAS (y II)

Ejemplo: *¿De cuántas maneras pueden formar cinco personas una fila?*

Solución: Como el orden de las personas en la fila importa y se quiere formar tuplas con todos los elementos (personas) sin repetirlos, se trata de permutaciones ordinarias de esas 5 personas:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

DEFINICIÓN: Son permutaciones ordinarias en las que se pueden repetir elementos.

Ejemplo: *Con las cifras del número 1.213.224, ¿cuántos números distintos se pueden formar cambiando su posición?*

Solución: Siempre que se intercambien, como mínimo, dos cifras distintas se tendrá un número distinto.

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN (y II)

1 2 1 3 2 2 4

1 2 1 3 2 2 4

2 1 1 3 2 2 4

(número distinto)

1 2 1 3 2 2 4

1 2 1 3 2 2 4

(mismo número)

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN (y III)

Así pues, dados ***n*** elementos, donde sólo hay ***p*** distintos ***a₁***, ***a₂***, …, ***aₚ***, de forma que ***a₁*** se repite α_1 veces, ***a₂*** se repite α_2 veces, etc, siendo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$, el número de permutaciones distintas que se pueden formar con los ***n*** elementos es:

$$PR_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} = \frac{n!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_p!}$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN (y IV)

Solución (al problema anterior):

*Para el número **1213224** se pedía el total de números distintos que se podían conseguir variando la posición de las cifras. Se tiene que el **1** se repite dos veces, el **2** se repite tres y el **3** y el **4** una sola vez, luego:*

$$PR_7^{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 1} = 420$$

COMBINACIONES ORDINARIAS

DEFINICIÓN: Dado un conjunto con ***n*** elementos distintos, cualquier subconjunto de ***h*** de ellos, con $1 \leq h \leq n$, se llama *combinación ordinaria* de esos *n* elementos *de orden h*. Y el número total de ellas se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{C_{n,h} = \binom{n}{h} = \frac{n!}{h! \cdot (n-h)!}}$$

COMBINACIONES ORDINARIAS (y II)

- **NO IMPORTA** el orden de los elementos en las tuplas, a diferencia de las variaciones. Luego, dado un conjunto

$$A = \{a, b, c, d\}$$

se tiene:

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$$

$$(a, b, c) \neq (a, b, d) \neq (b, d, c)$$

COMBINACIONES ORDINARIAS (y III)

Ejemplo: *¿De cuantas formas se pueden extraer dos cartas de una baraja española de 40 cartas?*

Solución: Se pide cuántas tuplas de 2 elementos se pueden formar con 40, además, del contexto se sabe que el orden de los elementos en la tupla no importa, luego se trata de combinaciones ordinarias de 40 elementos de orden 2:

$$C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{2!\cdot(40-2)!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38!}{2\cdot 38!} = 780$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

<u>DEFINICIÓN</u>: Son combinaciones ordinarias de ***n*** elementos de orden ***h***, en las que se pueden repetir los elementos. La forma de calcular el número total de combinaciones con repetición es la siguiente:

$$\boxed{CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h} = \frac{(n+h-1)!}{h!\cdot(n-1)!}}$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN (y II)

Ejemplo: *Un restaurante sirve tres tipos de menú: A, B y C. Si van cuatro amigos a comer y cada uno elige un menú, ¿de cuántas formas pueden hacer el pedido?*

Solución: En este caso el orden no importa, el pedido (A,A,B,C) se considera igual al (A,B,A,C), por tanto son combinaciones y, además, con repetición ya que se pueden repetir los elementos. Otros ejemplos de posibles pedidos son (B,B,C,C), (C,C,C,C), …

COMBINACIONES CON REPETICIÓN (y III)

Por tanto, el total de posibles pedidos que pueden hacer es:

$$CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \frac{(3+4-1)!}{4!\cdot 2!} = 15$$

ESQUEMA-RESUMEN

• IMPORTA EL ORDEN DE LOS ELEMENTOS EN LAS TUPLAS

• VARIACIONES (*Normalmente*: n > h)

- **No se repiten** elementos en las tuplas: ⟹ **VAR. ORD.:** $V_{n,h} = \frac{n!}{(n-h)!}$
- **Se repiten** elementos en las tuplas: ⟹ **VAR. CON REP.:** $VR_{n,h} = n^h$

• PERMUTACIONES (*Normalmente*: n ≤ h)

- **No se repiten** elementos en las tuplas: ⟹ **PERM. ORD.:** $P_n = n!$
- **Se repiten** elementos en las tuplas: ⟹ **PERM. CON REP.:** $PR_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} = \frac{n!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_p!}$

• NO IMPORTA EL ORDEN DE LOS ELEMENTOS EN LAS TUPLAS

• COMBINACIONES

- **No se repiten** elementos en las tuplas: ⟹ **COMB. ORD.:** $C_{n,h} = \binom{n}{h} = \frac{n!}{h!\cdot(n-h)!}$
- **Se repiten** elementos en las tuplas: ⟹ **COMB. CON REP.:** $CR_{n,h} = \binom{n+h-1}{h} = \frac{(n+h-1)!}{h!\cdot(n-1)!}$

Nota: ***n*** es el nº de elementos distintos que pueden aparecer en una posición de la tupla y ***h*** el tamaño de la tupla.

ALGUNAS SERIES E INTEGRALES

- **SERIES NUMÉRICAS**
- **SERIES DE POTENCIAS**
- **INTEGRALES**

SERIES NUMÉRICAS

Serie	$\sum_{k=0}^{\infty} r^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^{k-1}$	$\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) r^{k-2}$
Suma	$\frac{1}{1-r}$	$\frac{1}{(1-r)^2}$	$\frac{2}{(1-r)^3}$

SERIES DE POTENCIAS

- **DESARROLLO DE TAYLOR**:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Y sustituyendo *x* por *-x:*

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

INTEGRALES

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K, \quad n \neq -1$$

$$\int \mathrm{e}^{\lambda x} \, dx = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda} + K, \quad \lambda \neq 0$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \text{método por partes}$$