Capítulo 4

Esperanza y momentos

4.1 Esperanza de una variable

Definición 4.1 *Dada una v.a. X con función de cuantía o densidad f, se llama* esperanza matemática *de X, $\mathrm{E}(X)$ al número (si existe) definido de la forma*

- *Caso discreto:* $\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i\, f(x_i)$
- *Caso continuo:* $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$

La esperanza se llama también media, valor medio, promedio, etc.

Ejemplo: *Hallése el valor medio de la puntuación en el lanzamiento de un dado.*

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

Ejemplo: *Hállese* $\mathrm{E}(X)$ *para la v.a* X *con la siguiente función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Por la definición

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2\, dx = \int_0^1 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

El ejemplo del caso discreto pone de manifiesto que la esperanza no tiene que ser necesariamente uno de los valores de X.
En el caso discreto, si X toma un número finito de valores, entonces existe la esperanza , pero en el caso de tomar un número infinito de posibles valores, la suma que define la esperanza puede no ser convergente. Para su existencia, la serie debe ser absolutamente convergente, es decir

$$\sum_i |x_i|\, f(x_i) < +\infty$$

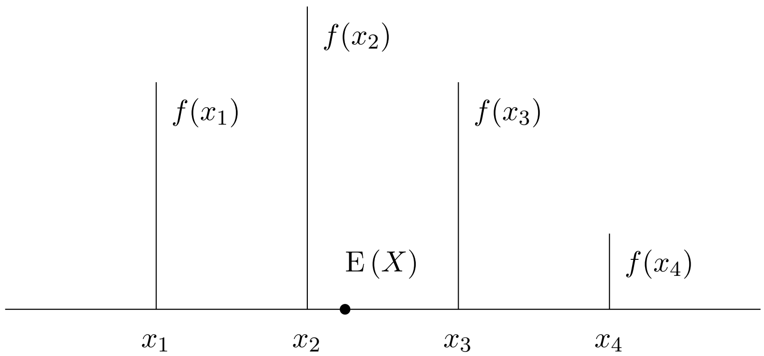
Análogamente en el caso continuo, la esperanza existe si y sólo si

$$\int_{\infty-}^{+\infty} |x|\; f(x)\, dx < \infty$$

4.1.1 Interpretación de la esperanza

La esperanza $\mathrm{E}(X)$ ó media de la distribución se puede interpretar como un centro de gravedad. Imaginemos que la v.a. X toma sólo 4 valores x_1, x_2, x_3, x_4 y la función de cuantía representada en la figura 4.1. Consideremos el eje X como una barra sin peso, en la que colocamos masas de la siguiente forma: en cada punto x_i se coloca una masa igual a $f(x_i)$. La barra quedará en equilibrio, sólo si se apoya sobre el punto $\mathrm{E}(X)$.
Si la distribución es simétrica, esto es, existe un número μ tal que $f(\mu - x) = f(\mu + x)$ para todo x, entonces la media (si existe) debe ser el centro de simetría μ. Sin embargo, siendo simétrica la distribución, puede no existir la media como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Figura 4.1: Media de una distribución.



Sea la variable X con f.d.d.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

Esta distribución, llamada de *Cauchy*, aunque simétrica, no tiene media pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = +\infty$$

4.1.2 Esperanza de una función

Para una variable que sea función de otra, esto es: $Y = h(X)$, se demuestra que su esperanza se calcula de la forma

(a) Caso discreto: $\mathrm{E}\,(h(X)) = \sum_i h(x_i)\, f(x_i)$

(b) Caso continuo: $\mathrm{E}\,(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx$

Ejemplo: *Hállese el valor medio de* $Y = 3X^2 + 5$ *siendo* X *la v.a discreta con función de cuantía*

X	-2	-1	0	1	2
f	$0'3$	$0'1$	$0'2$	$0'3$	$0'1$

La media es

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= (3(-2)^2+5)\cdot 0'3 + (3(-1)^2+5)\cdot 0'1 + \\ &+ (3(0)^2+5)\cdot 0'2 + (3(1)^2+5)\cdot 0'3 + (3(2)^2+5)\cdot 0'1 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Sea ahora una v.a. continua X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Calcúlese $\mathrm{E}(Y)$ siendo $Y = 2X - 1$.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 (2x-1)\cdot 2x\,dx = \frac{1}{3}.$$

Supóngase ahora que se tiene una función de otras dos, $Z = h(X,Y)$ y que es conocida la función de densidad o cuantía conjunta $f(x,y)$. Como en el caso de una variable, no es necesario conocer la distribución de Z, pues se demuestra que

- Caso discreto
$$\mathrm{E}(Z) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j)\, f(x_i, y_j)$$
- Caso continuo
$$\mathrm{E}(Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

Ejemplo: *Hállese el valor medio de* $X^2 + 3Y$*, siendo* (X,Y) *un punto seleccionado al azar en el cuadrado* $[0,1]\times[0,1]$.

La función de densidad conjunta es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene por tanto

$$\mathrm{E}\left(X^2+3Y\right)=\int_0^1\int_0^1 (x^2+3y)\,dx\,dy=\int_0^1 (x^2+\frac{3}{2})dx=\frac{11}{6}.$$

Ejemplo: *Calcúlese* $\mathrm{E}\left(X\cdot Y\right)$

$$\begin{array}{c|ccc}
Y & & & \\
2 & 0'2 & 0'1 & 0'1 \\
1 & 0'1 & 0'2 & 0'3 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 \quad X
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X\cdot Y\right) &= 0\cdot 1\cdot 0'1+0\cdot 2\cdot 0'2\\
&+ 1\cdot 1\cdot 0'2+1\cdot 2\cdot 0'1\\
&+ 2\cdot 1\cdot 0'3+2\cdot 2\cdot 0'1\\
&= 1'4.
\end{aligned}$$

4.1.3 Propiedades de la Esperanza

A continuación veremos que la media de una suma de variables es la suma de las medias (aunque no sean independientes); para el producto no ocurre lo mismo, se multiplican las medias cuando sean independientes. En el siguiente teorema supondremos que las medias implicadas existen, y a y b representan constantes.

Teorema 4.1 *Se tienen las siguientes propiedades*

(a) $\mathrm{E}\left(aX+b\right)=a\,\mathrm{E}\left(X\right)+b$

(b) Dadas n variables $\{X_i\}_1^n$

$$\mathrm{E}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=\mathrm{E}\left(X_1\right)+\mathrm{E}\left(X_2\right)+\cdots+\mathrm{E}\left(X_n\right)$$

(c) Si las n variables $\{X_i\}_1^n$ son independientes

$$\mathrm{E}\left(X_1\cdot X_2\cdots X_n\right)=\mathrm{E}\left(X_1\right)\cdot\mathrm{E}\left(X_2\right)\cdots\mathrm{E}\left(X_n\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Se hará la segunda propiedad para el caso continuo y $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\, f(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\, dy \\
&= \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

Nótese que la media de la suma de variables es la suma de las medias, aunque las variables **no** sean independientes. Para el producto se necesita la independencia.

A veces conviene descomponer una variable en suma de otras cuyas medias sean de fácil cálculo, como en el siguiente

Ejemplo: *Un cartero entrega n cartas en n direcciones al azar. Calcúlese el valor medio del número de cartas X entegadas correctamente.*

Se define una variable para cada carta

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{la carta i-ésima es entregada correctamente} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de cuantía de X_i es

X_i	0	1
f_i	(n-1)/n	1/n

Puesto que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ y $\mathrm{E}(X_i) = \dfrac{1}{n}$, se tiene

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{n} + \overset{n}{\cdots} + \frac{1}{n} = 1$$

La media es 1 (no depende del número de cartas.)

Esperanza de la distribución uniforme

(a) Caso discreto: la variable toma los valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

El valor medio es la media aritméica.

(b) Caso continuo La variable tiene la siguiente f.d.d

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

El valor medio es el punto medio del intervalo; esto es $\dfrac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

4.2 Varianza

4.2.1 Varianza y desviación típica

La media es una medida de centralización; nos da el centro de la distribución pero los valores de la variable pueden estar más o menos dispersos respecto a la media y se necesitan otros parámetros para medir el grado de alejamiento de éstos valores respecto a la media. Veamos un ejemplo

X_1	4	6
f_1	1/2	1/2

X_2	0	10
f_2	1/2	1/2

Ambas variables tienen la misma media, esto es, 5, pero los valores de la segunda están más dispersos que los de la primera. Una medida de esta dispersión es la varianza que se define a continuación.

Definición 4.2 *Dada una v.a.* X *con media* $\mu = \mathrm{E}(X)$*, se define la varianza como*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right)$$

Puesto que la variable $(X-\mu)^2$ es no negativa, la varianza también lo es si existe (por ser una esperanza, puede no existir). A su raiz cuadrada positiva se le llama *desviación típica* que se representa por σ. La varianza se representará a veces por σ^2. Para el cálculo de la varianza es más operativa la siguiente fórmula

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu^2.$$

La demostración es la siguiente

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right) &= \mathrm{E}\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\mu \mathrm{E}(X) + \mu^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu^2.
\end{aligned}$$

La varianza representa, como se dijo, una medida de la dispersión de una distribución en torno a su media μ. Un valor pequeño indica que la distribución (los valores de la variable) está concentrada cerca de la media. Calculemos la varianza de las variables del ejemplo de la introducción

$$\mathrm{E}(X_1) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 5, \quad \mathrm{E}\left(X_1^2\right) = 4^2 \cdot \frac{1}{2} + 6^2 \cdot \frac{1}{2} = 26.$$

Por tanto $\mathrm{Var}(X_1) = 26 - 5^2 = 1$. Para la otra:

$$\mathrm{E}(X_2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} = 5, \quad \mathrm{E}\left(X_2^2\right) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Así que $\mathrm{Var}(X_2) = 50 - 5^2 = 25$. Tiene una varianza mayor, como se esperaba.

Ejemplo: *Calcúlese la desviación típica de X, dada por la tabla siguiente*

X	-2	-1	0	1	2
f	$0'3$	$0'1$	$0'2$	$0'3$	$0'1$

Se tiene

$$\mathrm{E}(X) = (-2)\cdot 0'3 + (-1)\cdot 0'1 + 0\cdot 0'2 + 1\cdot 0'3 + 2\cdot 0'1 = -0'2$$
$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = (-2)^2\cdot 0'3 + (-1)^2\cdot 0'1 + 0^2\cdot 0'2 + 1^2\cdot 0'3 + 2^2\cdot 0'1 = 2$$

Por tanto $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 = 2 - (-0'2)^2 = 1'96$, y $\sigma = \sqrt{1'96} = 1'4$.

Ejemplo: *Hállese* $\mathrm{Var}(X)$ *para* X *con la f.d.d siguiente*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x\cdot 2x\,dx &= \left.\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \\
\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx &= \left.\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

4.2.2 Propiedades de la varianza

La varianza, a diferencia de la media, no queda afectada por una traslación, esto es, si sumamos a los valores de X una cantidad constante, la varianza es la misma; por ejemplo $\mathrm{Var}(X+100) = \mathrm{Var}(X)$. Sumar 100 a los valores de X es una traslación que modifica la media (la aumenta en 100), aunque no la varianza, (véase la primera de las propiedades) pues la dispersión es la misma como ilustra el ejemplo siguiente

Ejemplo: *Hállese* $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(X+100), \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(X+100)$

X	0	1	2
f	$0'2$	$0'2$	$0'6$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0\cdot 0'2 + 1\cdot 0'2 + 2\cdot 0'6 = 1'4\\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= 0^2\cdot 0'2 + 1^2\cdot 0'2 + 2^2\cdot 0'6 = 2'6\\
\mathrm{Var}(X) &= 2'6 - (1'4)^2 = 0'64\\
\mathrm{E}(X+100) &= 100\cdot 0'2 + 101\cdot 0'2 + 102\cdot 0'6 = 101'4\\
\mathrm{E}\left((X+100)^2\right) &= 100^2\cdot 0'2 + 101^2\cdot 0'2 + 102^2\cdot 0'6 = 10282'6\\
\mathrm{Var}(X+100) &= 10282'6 - (101'4)^2 = 0'64.
\end{aligned}$$

Como se ha visto, la media ha aumentado en 100 pero la varianza no ha variado.

Ejemplo: *Hállese* $\mathrm{E}(X-50)$ *y* $\mathrm{Var}(X-50)$ *siendo* X *la v.a. continua del ejemplo de la página* 129

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X-50) = \int_0^1 (x-50)\cdot 2x\,dx &= \left[\frac{2x^3}{3} - 50x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 50 = -\frac{148}{3}\\
\mathrm{E}\left((X-50)^2\right) = \int_0^1 (x-50)^2\cdot 2x\,dx &= \left[\frac{2x^4}{4} - 200\frac{x^3}{3} + 2500x^2\right]_0^1\\
&= \frac{1}{2} - \frac{200}{3} + 2500 = \frac{14603}{6}\\
\mathrm{Var}(X-50) &= \frac{14603}{6} - \left(-\frac{148}{3}\right)^2\\
&= \frac{43809-43808}{18} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Se observa que la media ha disminuido en 50 unidades, pero la varianza es la misma.

Teorema 4.2 *Se tienen las siguientes propiedades*

(a) $\mathrm{Var}\,(aX+b) = a^2\mathrm{Var}\,(X)$

(b) *Si* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *son independientes*

$$\mathrm{Var}\,(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathrm{Var}\,(X_1)+\mathrm{Var}\,(X_2)+\cdots+\mathrm{Var}\,(X_n)$$

Como consecuencia de (a) y (b) se tiene:

(c) *Si* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *son independientes*

$$\mathrm{Var}\left(b+\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2\,\mathrm{Var}\,(X_i)$$

DEMOSTRACIÓN:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(aX+b) &= \mathrm{E}\left(a^2X^2+2abX+b^2\right)-(a\mu+b)^2\\
&= a^2\mathrm{E}\left(X^2\right)+2ab\mathrm{E}\,(X)+b^2-a^2\mu^2-2ab\mu-b^2\\
&= a^2\mathrm{E}\left(X^2\right)-a^2\mu^2\\
&= a^2(\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mu^2)\\
&= a^2\mathrm{Var}\,(X)\,.
\end{aligned}$$

(b) Veámoslo para $n=2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X+Y) &= \mathrm{E}\left((X+Y)^2\right)-(\mathrm{E}\,(X)+\mathrm{E}\,(Y))^2\\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right)+\mathrm{E}\left(Y^2\right)+2\mathrm{E}\,(XY)\\
&- \mathrm{E}\,(X)^2-\mathrm{E}\,(Y)^2-2\mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y)\\
&= (\text{como son independientes})\\
&= \mathrm{Var}\,(X)+\mathrm{Var}\,(Y)\,.
\end{aligned}$$

Varianza de la distribución uniforme

Usaremos que $\mathrm{Var}\,(x) = \mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}\,(X)^2$.

(a) Caso discreto. La variable toma los valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ todos con la misma probabilidad

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2.$$

(b) Caso continuo; en la página 65 hemos obtenido que $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3}. \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
&= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} \\
&= \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Ejemplo: *Dada una v.a. con* $\mathrm{E}(X) = \mu$ *y* $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, *pruébese que*

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \mu(\mu-1) + \sigma^2.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X(X-1)) = \mathrm{E}\left(X^2 - X\right) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mu^2 - \mu \\
&= \mu(\mu-1) + \sigma^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo: *Dadas X e Y independientes con* $\mathrm{Var}(X) = 3, \mathrm{Var}(Y) = 2$, *calcúlese*

(a) $\mathrm{Var}(X+Y)$

(b) $\mathrm{Var}(X-Y)$

(c) $\mathrm{Var}(2X-4Y-5)$

(a) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 5$

(b) $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 5$

(c) $\mathrm{Var}(2X-4Y-5) = 4\mathrm{Var}(X) + 16\mathrm{Var}(Y) = 44.$

4.3 Momentos

La media y la varianza son un caso particular de unos parámetros llamados *momentos*. Distinguiremos entre momentos respecto al origen y momentos centrales.

Momentos respecto al origen

Definición 4.3 *Dada una v.a. X de llama momento de orden k centrado en el origen al número (si existe)* $\mathrm{E}\left(X^k\right)$

En particular el momento de orden 1 es la media $\mu = \mathrm{E}(X)$

Momentos centrales

Definición 4.4 *Dada una v.a. con media μ, se llama momento central de orden k al número (si existe)* $\mathrm{E}\left((X-\mu)^k\right)$.

Obsérvese que el momento central de primer orden es nulo (demuéstrese) y que el momento central de orden 2 es precisamente la varianza.

4.3.1 Función Generatriz de Momentos

Definición 4.5 *Dada la v.a. X, se llama función generatriz de momentos (f.g.m) a la función real de variable t:*

$$\psi(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

La f.g.m. puede existir para algunos valores de t y no existir para otros. Sin embargo siempre existe para $t = 0$ pues, en este caso, $\psi(0) = \mathrm{E}\,(1) = 1$.

Ejemplo: *Hállese la función generatriz de momentos de X*

X	-1	0	1
f	$0'3$	$0'2$	$0'5$

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}\,0'3 + \mathrm{e}^{0}\,0'2 + \mathrm{e}^{t}\,0'5 = 0'2 + 0'3\,\mathrm{e}^{-t} + 0'5\,\mathrm{e}^{t}$$

El nombre *generatriz de momentos* quedará justificado cuando se demuestre que las derivadas sucesivas en el punto 0 son precisamente los momentos respecto al origen como afirma el siguiente

Teorema 4.3 *Si la f.g.m $\psi(t)$ existe en un entorno de 0, entonces es derivable en $t = 0$ un número arbitrario de veces y además*

$$\psi^{(k)}(0) = \mathrm{E}\left(X^k\right)$$

El cálculo de la f.g.m. facilita en algunos casos la obtención de la media y la varianza de una distribución.

Ejemplo: *Hállese la media y varianza de la variable exponencial (página 66) usando la f.g de momentos*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

La función generatriz de momentos es

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx}\, f(x)\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{tx}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{(t-\lambda)x}\, dx$$

Para que exista la integral, el "coeficiente" de x en el exponente de e debe ser negativo, pues es sabido que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0.$$

Por lo que ha de ser $t-\lambda<0$, o sea, $t<\lambda$, en cuyo caso

$$\psi(t) = \lambda \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{(t-\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Los momentos (respecto al origen) se obtienen:

$$\begin{aligned} \psi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{E}(X) = \psi'(0) = \frac{1}{\lambda} \\ \psi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3} \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) = \psi''(0) = \frac{2}{\lambda^2} \\ \mathrm{Var}(X) \quad &= \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Teorema 4.4 *Se tienen las propiedades*

(a) Sea X una v.a. con f.g.m ψ_X, y sea $Y = aX + b$; entonces

$$\psi_Y(t) = \mathrm{e}^{bt}\, \psi_X(at)$$

(b) *Sean* $\{X_i\}_1^n$*, v.a. independientes con f.g.m respectivamente* ψ_i*, y sea* Y *la variable suma:* $Y = X_1 + \cdots + X_n$ *con f.g.m* ψ

$$\psi(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(t)$$

(c) *Si las f.g.m de dos v.a.* X *e* Y *son idénticas en un entorno de 0, entonces las distribuciones de* X *e* Y *son idénticas.* (Esta propiedad se usará con frecuencia)

Demostración:

(a) $\psi_Y(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(aX+b)}\right) = \mathrm{e}^{bt}\,\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{(at)X}\right) = \mathrm{e}^{bt}\,\psi_X(at)$

(b) $\psi(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(X_1)}\cdots\mathrm{e}^{t(X_n)}\right) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(t)$

4.4 Covarianza y Correlación

Covarianza

Al estudiar conjuntamente dos distribuciones X e Y, las medias y varianzas $\mathrm{E}(X)$ (en lo sucesivo μ_X), $\mathrm{E}(Y)$ (μ_Y), $\mathrm{Var}(X)$ (σ_X^2)y $\mathrm{Var}(Y)$ (σ_Y^2), proporcionan información sobre las distribuciones marginales X e Y; pero si queremos estudiar la relación entre ellas, como por ejemplo, el grado de dependencia de una respecto de la otra, debemos definir otros parámetros para tales propósitos; uno de estos parámetros es la *covarianza* que se define a continuación.

Definición 4.6 *Se llama covarianza de las v.a* (X, Y) *al número*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$$

Para el cálculo usaremos ésta otra $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ que se deduce

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) &= \mathrm{E}\,(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \cdot \mu_Y) \\ &= \mathrm{E}\,(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y \\ &= \mathrm{E}\,(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y.\end{aligned}$$

Ejemplo: *Hállese* Cov (X,Y) *de la v.a*

$$\begin{array}{c|ccc} Y & & & \\ 2 & 0'2 & 0'2 & 0'2 \\ 1 & 0 & 0'3 & 0'1 \\ \hline & 0 & 1 & 2 \quad X \end{array}$$

Hay que hallar las medias de X e Y lo que implica obtener las marginales

X	0	1	2
f_1	$0'2$	$0'5$	$0'3$

Y	1	2
f_2	$0'4$	$0'6$

Se tiene $\mu_X = 1'1$ y $\mu_Y = 1'6$. Calculemos ahora

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,(XY) &= 0\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 0'2 \\ &+ 1\cdot 1\cdot 0'3 + 1\cdot 2\cdot 0'2 \\ &+ 2\cdot 1\cdot 0'1 + 2\cdot 2\cdot 0'2 \\ &= 1'7.\end{aligned}$$

Para terminar $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 1'7 - 1'1\cdot 1'6 = -0'06$.
La covarianza, a diferencia de la varianza, puede ser negativa, nula o positiva (véase el ejemplo) y, por supuesto, al ser una esperanza, puede no existir; también se deduce que

$$(X,Y) \text{ independientes } \longrightarrow \mathrm{Cov}\,(X,Y) = 0.$$

El apartado anterior afirma que dos variables independientes tienen covarianza nula. Sin embargo el recíproco no es cierto; dos variables con covarianza nula pueden ser dependientes. Veamos un ejemplo

$$\begin{array}{c|ccc} Y & & & \\ 1 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ \hline & -1 & 0 & 1 \quad X \end{array}$$

Las marginales son

X	-1	0	1
f_1	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Y	0	1
f_2	$1/3$	$2/3$

Efectuando los cálculos $\mathrm{E}(X) = 0$ y $\mathrm{E}(XY) = 0$ por lo que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Sin embargo son variables dependientes pues

$$f(0,1) = 0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = f_1(0) \cdot f_2(1).$$

Un análisis mas detallado revela que $Y = X^2$ por lo que la dependencia es funcional.

Relación de la covarianza con las varianzas

Teorema 4.5 *Se tienen las siguientes relaciones:*

(a) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

(b) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$

(c) $\mathrm{Var}(aX + bY + c) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$.

Demostración:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}\left((X+Y)^2\right) - [\mathrm{E}(X+Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - [\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) + 2\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y)^2 \\
&\quad -\mathrm{E}(X)^2 - 2\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 + \mathrm{E}(Y)^2 \\
&\quad -\mathrm{E}(Y)^2 + 2\left[\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\right] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(aX, bY) &= \mathrm{E}(aX \cdot bY) - \mathrm{E}(aX)\,\mathrm{E}(bY) \\
&= ab\mathrm{E}(XY) - ab\ \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= ab \cdot \operatorname{Cov}(X, Y)\,.
\end{aligned}$$

(c) Aplicando (a) y (b) se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(aX + bY + c) &= \operatorname{Var}(aX + bY) \\
&= \operatorname{Var}(aX) + \operatorname{Var}(bY) + 2\operatorname{Cov}(aX, bY) \\
&= a^2\operatorname{Var}(X) + b^2\operatorname{Var}(Y) + 2\ a\,b \cdot \operatorname{Cov}(X, Y)\,.
\end{aligned}$$

En particular se tiene

$$\operatorname{Var}(X - Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 2\operatorname{Cov}(X, Y)\,.$$

Al igual que la varianza, la covarianza depende de la unidad de medida de los valores de X e Y (si los valores de X son longitudes, una medida en metros proporciona una varianza 10000 veces mayor que una medida en centímetros). Conviene, por tanto, un parámetro independiente de la unidad de medida, y éste, es la *correlación*.

Correlación

Definición 4.7 *Si las v.a. X e Y tienen varianzas finitas, se define la correlación como*

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Cuando la correlación es nula (o, lo que es lo mismo, $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$) se dice que las variables están incorreladas. Antes se vió que si (X, Y) son independientes, entonces están incorreladas, pero el recíproco no es cierto. Se va a demostrar ahora que $\rho(X, Y)$ (o simplemente ρ) toma valores en el intervalo $[-1, 1]$, o lo que es lo mismo, $\rho^2 \leq 1$. Para ello necesitamos el siguiente resultado

Teorema 4.6 (Desigualdad de Schwarz) *Dadas dos variables aleatorias U y V se tiene la desigualdad*

$$[\mathrm{E}(UV)]^2 \le \mathrm{E}\left(U^2\right) \cdot \mathrm{E}\left(V^2\right)$$

Una demostración puede verse en [1]; volvamos al rango de la correlación. Aplicando la desigualdad anterior a las distribuciones $U = X - \mu_X$ y $V = Y - \mu_Y$, se tiene

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \le \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \longleftrightarrow \rho^2 \le 1.$$

Teorema 4.7 *Sea $Y = aX + b$ con $a \neq 0$, entonces $\rho = \mathrm{signo}(a)$, siendo*

$$\mathrm{signo}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Demostración: Dado que $\mathrm{Var}(Y) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ es $\sigma_Y = |a|\,\sigma_X$ por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X(aX+b)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(aX+b) \\
&= a\mathrm{E}\left(X^2\right) + b\mathrm{E}(X) - a[\mathrm{E}(X)]^2 - b\mathrm{E}(X) \\
&= a\mathrm{Var}(X) = a\sigma_X^2 \\
\rho &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{|a|\,\sigma_X^2} \\
&= \frac{a}{|a|} = \mathrm{signo}(a).
\end{aligned}$$

Cuando hay una relación lineal "perfecta" de la forma $Y = aX + b$, el valor de ρ es ± 1; cuanto más cerca está de estos extremos se puede conseguir una "buena" aproximación (ajuste) $Y \approx aX + b$; si por el contrario el valor de ρ es cercano a 0 no tiene sentido buscar un ajuste lineal.

Por lo dicho anteriormente, ρ es el coeficiente de correlación lineal. No profundizamos más pues el estudio de las rectas de ajuste (regresión lineal) se aparta de los objetivos de este libro; sin embargo veamos un ejemplo en el que, sin cálculos, se puede deducir que $\rho = -1$.

Ejemplo: *De una urna que contiene* 4 *bolas blancas y* 2 *negras, se extraen* 3. *Sea* X = *número de blancas e* Y = *número de negras. Hállese la correlación.*

Evidentemente $X + Y = 3$ (las bolas que no sean blancas serán negras) por lo que $Y = -X + 3$ así que, al haber una relación lineal será $\rho = -1$. En efecto, los rangos de X e Y son $\{1, 2, 3\}$ y $\{0, 1, 2\}$ respectivamente. De los 9 pares de valores sólo hay 3 probables pues

$$f(1,0) = f(1,1) = f(2,0) = f(2,2) = f(3,1) = f(3,2) = 0.$$

Para el resto, como hay $\binom{6}{3} = 20$ casos posibles tenemos

$f(1,2)$	$f(2,1)$	$f(3,0)$
$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{20}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{20}$	$\frac{\binom{4}{3}}{20}$

Las funciones de cuantía conjunta y marginales son

Y				
2	$0'2$	0	0	
1	0	$0'6$	0	
0	0	0	$0'2$	
	1	2	3	X

X	1	2	3
f_1	$0'2$	$0'6$	$0'2$

Y	0	1	2
f_2	$0'2$	$0'6$	$0'2$

Los cálculos son:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \cdot Y) &= 1 \cdot 2 \cdot 0'2 + 2 \cdot 1 \cdot 0'6 = 1'6 \\
\mathrm{E}(X) &= 1 \cdot 0'2 + 2 \cdot 0'6 + 3 \cdot 0'2 = 2 \\
\mathrm{E}(Y) &= 0 \cdot 0'2 + 1 \cdot 0'6 + 2 \cdot 0'2 = 1 \\
\mathrm{Cov}(X, Y) &= 1'6 - 2 \cdot 1 = -0'4 \\
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= 1^2 \cdot 0'2 + 2^2 \cdot 0'6 + 3^2 \cdot 0'2 = 4'4 \\
\mathrm{Var}(X) &= 4'4 - 2^2 = 0'4 \\
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &= 0^2 \cdot 0'2 + 1^2 \cdot 0'6 + 2^2 \cdot 0'2 = 1'4 \\
\mathrm{Var}(Y) &= 1'4 - 1^2 = 0'4.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-0'4}{\sqrt{0'4}\sqrt{0'4}} = -1.$$

4.5 Esperanza condicional

Supongamos que dada una distribución bidimensional continua (X, Y), se ha observado el valor $Y = y$. Entonces la esperanza de X dada $Y = y$ se llama *esperanza condicional* cuyo valor $\mathrm{E}\,(X \mid y)$, viene dado por

$$\mathrm{E}\,(X \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g_1(x \mid y)\, dx$$

O sea, es la media o esperanza de la distribución condicional de X para $Y = y$. La esperanza condicional de Y para $X = x$ se define de forma análoga

$$\mathrm{E}\,(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g_2(y \mid x)\, dy$$

Para el caso discreto se tiene

(a) $\mathrm{E}\,(X \mid y) = \sum_x x\, g_1(x \mid y)$

(b) $\mathrm{E}\,(Y \mid x) = \sum_y y\, g_2(y \mid x)$

Nótese que $\mathrm{E}\,(X \mid Y)$ es una función de Y; es por tanto una variable aleatoria. Veamos que su esperanza coincide con la de X (caso continuo).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,(\mathrm{E}\,(X \mid Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\,(X \mid y)\; f_2(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, g_1(x \mid y)\, f_2(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right] x\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx \\
&= \mathrm{E}\,(X)
\end{aligned}$$

Ejemplo: *hállese* $\mathrm{E}\left(X \mid Y = \frac{1}{2}\right)$*, si* (X, Y) *está distribuida uniformemente sobre el círculo unidad* $\mathcal{C} = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

La función de densidad conjunta es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & (x, y) \in \mathcal{C} \\ 0, & (x, y) \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

Necesitamos la marginal de Y particularizada en $\frac{1}{2}$. Para $y = \frac{1}{2}$, el valor de x está en el intervalo $I = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_I \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

Calcularemos $g_1(x \mid \frac{1}{2})$ y después haremos

$$\mathrm{E}\left(X \,\middle|\, Y = \frac{1}{2}\right) = \int_I x g_1\left(x \,\middle|\, \frac{1}{2}\right) dx.$$

Para los valores de x en el intervalo I se tiene:

$$g_1(x \,\Big|\, \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{\pi}}{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Resumiendo

$$g_1\left(x \,\middle|\, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

Como g_1 está uniformemente distribuida en I, su media es el punto medio de I, esto es, 0.

4.6 Desigualdad de Chebychev

Cuando de una variable se conoce sólo la media y varianza, la desigualdad de Chebychev informa de la probabilidad de que la variable se aleje de la media; puesto que es razonable que X no se eleje demasiado, Chebychev confirma que la probabilidad de que la diferencia entre X y su media sea "grande", tiende a 0. Exactamente

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

Cuando $t \rightarrow +\infty$ entonces

$$\lim_{t\rightarrow+\infty} \mathrm{P}\left(|X-\mu| \geq t\right) = 0.$$

Veamos antes otra desigualdad

Teorema 4.8 (Desigualdad de Markov) *Si X es una v.a. con media μ tal que*

$$\mathrm{P}\left(X \geq 0\right) = 1$$

Entonces, dado $t > 0$

$$\mathrm{P}\left(X \geq t\right) \leq \frac{\mu}{t}$$

Demostración: Para el caso continuo

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{t} x\, f(x)\, dx + \int_{t}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&\geq \int_{t}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&\geq t\int_{t}^{\infty} f(x)\, dx \\
&= t\cdot \mathrm{P}\left(X \geq t\right)
\end{aligned}$$

La desigualdad tiene interés para valores grandes de t y su importancia radica en el hecho de su generalidad pues vale para todas las variables, dando información conociendo sólo la media μ. Así si $\mu = 1$, la probabilidad de que la variable sea mayor que 5 es a lo sumo 0'2, pues

$$\mathrm{P}\left(X \geq 5\right) \leq \frac{1}{5} = 0'2.$$

Teorema 4.9 (Desigualdad de Chebychev) *Sea X una v.a. con varianza finita σ^2. Dado $t > 0$*

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

DEMOSTRACIÓN: La demostración se basa en la desigualdad de *Markov*, considerando la variable $Y = [X-\mu]^2$ cuya esperanza es σ^2

$$\mathrm{P}\left(Y \geq t^2\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \rightarrow \mathrm{P}\left(|X-\mu| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

La desigualdad de Chebychev se puede dar en las siguientes formas

(a) Recurriendo al suceso contrario

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| < t\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{t^2}$$

(b) Midiendo la distancia de la variable con la media en múltiplos de σ; esto es, haciendo $t = k\sigma$

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

y su equivalente:

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Ejemplo: *Supongamos que una v.a. tiene de media μ y desviación σ. Hállese la probabilidad de que la variable difiera de su media menos de dos desviaciones.*

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| < 2\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0'75.$$

A veces, la desigualdad no proporciona ninguna información; por ejemplo (haciendo $k = 1$)

$$\mathrm{P}\left(|X-\mu| < \sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{1^2} = 0.$$

En este caso, obtenemos un resultado conocido: ya sabíamos que la probabilidad es no negativa: la desigualdad no da información alguna.

4.7 Media muestral

Sea X una variable de media μ y varianza σ^2; si se realiza el experimento n veces de forma independiente obtenemos n resultados que llamamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Se dice que tenemos una *muestra aleatoria* de tamaño n de la variable X. Las n variables están idénticamente distribuidas (todas tienen la misma media y varianza) y son independientes. La media aritmética se llama *media muestral* y se representa por $\overline{X}_n$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Es fácil ver que $\mathrm{E}\left(\overline{X}_n\right) = \mu$ y que $\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
La media muestral tiene la misma media que la variable original, pero una varianza n veces mas pequeña; por tanto la distribución de probabilidad de la media muestral está más concentrada alrededor del valor medio que la distribución original.
La desigualdad de Chebychev para el caso de la media muestral queda como sigue; dado que $\overline{X_n}$ tiene media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < t\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{nt^2}$$

Y haciendo $t = k\sigma$

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{nk^2} \tag{4.1}$$

Ejemplo: *Determínese el tamaño mínimo n de una muestra aleatoria seleccionada de una distribución para que la probabilidad de que la media muestral diste de la media de la distribución menos de dos desviaciones típicas, sea al menos $0'99$.*

Hay que calcular n para que

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 2\sigma\right) \geq 0'99$$

Haciendo en la ecuación 4.1 $k = 2$ se tiene que

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 2\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{4n} \geq 0'99$$

de donde se obtiene $n \geq 25$.

4.7.1 Ley de los grandes números

La desigualdad de Chebychev es una herramienta más teórica que práctica, puesto que suele dar valores grandes para el tamaño de la muestra aleatoria, aunque se insiste en que sirve para todas las distribuciones. Conocido el modelo de distribución, los cálculos son mas exactos y se rebaja considerablemente la cota que da la desigualdad 4.1.

Ejemplo: *Hállese el mínimo número n de lanzamientos de una moneda para que la proporción de caras esté entre $0'4$ y $0'6$ con una probabilidad mínima de $0'9$.*

Consideremos las variables X_i para $i = 1, 2 \ldots, n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si sale cara en el } i\text{−simo lanzamiento} \\ 0, & \text{si sale cruz en el } i\text{−simo lanzamiento} \end{cases}$$

La función de cuantía de X_i es

X_i	0	1
f	$0'5$	$0'5$

La media y varianza son

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \cdot 0'5 + 1 \cdot 0'5 = 0'5 \\ (\mathrm{E}(X))^2 &= 0^2 \cdot 0'5 + 1^2 \cdot 0'5 = 0'5 \\ \mathrm{Var}(X) &= 0'5 - 0'5^2 = 0'25 \\ \sigma &= \sqrt{0'25} = 0'5. \end{aligned}$$

Por tanto X_i tiene media $\mu = 0'5$ y desviación $\sigma = 0'5$. Como el número total de caras es la suma $X_1 + \cdots + X_n$ y la proporción de caras $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ es la media muestral $\overline{X}_n$, buscamos n para que

$$\mathrm{P}\left(0'4 < \overline{X}_n < 0'6\right) \geq 0'9$$

o lo que es lo mismo

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - 0'5\right| < 0'1\right) \geq 0'9$$

Haciendo $k\sigma = 0'1$ y, puesto que $\sigma = 0'5 \to k = 0'2$, y en la desigualdad de Chebychev

$$1 - \frac{1}{0'2^2 \cdot n} \geq 0'9$$

y obtenemos $n \geq 250$. Es decir, con un mínimo de 250 lanzamientos, la probabilidad de que la proporción de caras esté entre $0'4$ y $0'6$ es al menos $0'9$. Sin embargo, en el capítulo siguiente, conociendo la distribución que mide el número de caras (binomial), rebajaremos esa cota a 68; bastarán 68 lanzamientos para asegurar aquella probabilidad.
La desigualdad de Chebychev se puede utilizar, no obstante, para demostrar importantes resultados.

Definición 4.8 *Una sucesión de v.a.* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge en probabilidad a* k *si para cualquier* $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|X_n - k| < \epsilon\right) = 1$$

La convergencia *en probabilidad* que en Estadística se llama *convergencia débil* se representa con la notación

$$X_n \xrightarrow{p} k$$

Teorema 4.10 (Ley de los grandes números) *Si* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *constituyen una muestra aleatoria de media* μ*, y* $\overline{X}_n$ *es la media muestral*

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Demostración: Por la desigualdad de Chebychev

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \epsilon\right) = 1.$$

4.8 Problemas

Variables discretas

4.1 Se elige aleatoriamente un número entero entre 0 y 10 ¿Cuál es el valor medio? (S: 5)

4.2 Calcular la esperanza de la v.a. X, con función de cuantía

X	0	1	2	3
p	$0'5$	$0'1$	$0'1$	$0'3$

(S. 1'2)

4.3 La edad de los alumnos de cierta clase se distribuye como sigue

Edad	18	19	20	21	22	35	43
Número	27	30	15	10	13	1	1

¿Cuál es la edad media? (S: 19'9)

4.4 Calcular la esperanza de la v.a. X, cuya función de cuantía es

$$\mathrm{P}\left(X=k\right)=\frac{1}{2^k}, \quad k=1,2,3,\ldots$$

4.5 Dése un ejemplo de una variable X que cumpla

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)\neq\mathrm{E}\left(X\right)^2, \quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)\neq\frac{1}{\mathrm{E}\left(X\right)}$$

Solución: Sea la variable

X	1	2
f	$0'4$	$0'6$

Se tiene

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}\left(X\right)=1'6 & \mathrm{E}\left(X^2\right)=2'8 & \mathrm{E}\left(X\right)^2=2'56\neq\mathrm{E}\left(X^2\right) \\ & \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)=0'7 & \dfrac{1}{\mathrm{E}\left(X\right)}=\dfrac{1}{1'6}=0'625. \end{array}$$

4.6 Calcular el valor medio de la suma de puntuaciones en el lanzamiento de dos dados. (S: 7)

4.7 Hallar el valor medio del número de caras en el lanzamiento de 3 monedas. Generalizar para n monedas. (S: $1'5$, $\frac{n}{2}$)

4.8 Hallar el número medio de lanzamientos de una moneda hasta obtener la primera cara. Repetir con la segunda cara. (S: 2 y 4)

4.9 Lanzamos repetidamente tres monedas hasta obtener por primera vez tres caras. ¿Cuál es la media del número de lanzamientos requerido?

Solución: La variable toma los valores $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ con probabilidad

$$f(n) = \mathrm{P}\left(X = n\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{8}.$$

La media es

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X\right) &= 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right) + 3 \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \ldots \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right) + 3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Aparece la serie (1.3) de la página 8 cuya suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Por tanto

$$\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(1-\frac{7}{8})^2}\right) = 8.$$

4.10 Una urna contiene dos bolas blancas y tres negras. Cuatro jugadores A, B, C y D extraen en este orden una bola sin devolución. El primer jugador que saque una bola blanca percibe 100€. Calcular la esperanza de la ganancia de cada jugador. (S: 40,30,20,10€)

4.11 Un juego se dice equitativo cuando la esperanza de la ganancia es 0; una lotería tiene como premios 6000€ con probabilidad 0'02 y 3000€ con probabilidad 0'04 ¿Cuánto hay que pagar por el billete para que el juego sea equitativo? (S: 240€)

4.12 Determinar el número medio de identificaciones correctas en la variable aleatoria, X, que asigna aleatoriamente 3 refrescos a 3 marcas. (S: 1)

4.13 Sea una urna con 5 bolas numeradas del 1 al 5. Se extraen 3 bolas al azar. Determinar el valor medio del número más pequeño de esas bolas. (S: 1'5)

4.14 Tenemos una v.a. X que toma los valores 1 y 0 con probabilidades p y q respectivamente. Calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$. (S: p, pq)

4.15 Se define la v.a.

$$Y = \frac{1}{1 - X + \mathrm{E}(X)}$$

siendo X la v.a. del problema anterior. Hallar $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$. (S: $\frac{2}{1+p}, \frac{q}{p(1+p)^2}$)

4.16 Avanzo hacia el norte un metro si sale cara en el lanzamiento de una moneda, y hacia el sur un metro si sale cruz ¿Cuál es la posición esperada después de 100 movimientos? ¿Y si los pasos hacia el sur son de medio metro? (S: Posición inicial y 25 metros al norte resp.)

4.17 Tengo dos cajas de fósforos, una A con 100 y otra B con 90; cada vez que tengo que encender uno, elijo una caja al azar; después de 60 encendidos, hallar el número medio de fósforos que quedan en la caja A. (S: 70)

4.18 Idéntico problema que el anterior, pero la caja se elige lanzando dos monedas; elijo la caja B si salen dos caras, y en otro caso elijo la caja A. (S: 55)

4.19 Una persona debe incorporarse a la empresa A o a la B. Se supone que ambas realizan igual número de operaciones. Las operaciones responden a la siguientes perspectivas

$$\mathrm{A}\left\{\begin{array}{l}\text{Ganar 120 euros con p}= 0'7\\ \text{Perder 50 euros con p}= 0'3\end{array}\right. \qquad \mathrm{B}\left\{\begin{array}{l}\text{Ganar 90 euros con p}= 0'9\\ \text{Perder 90 euros con p}= 0'1\end{array}\right.$$

¿Qué empresa es más conveniente? (S: B)

4.20 De una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras, se extraen 3 al azar. Sea $X =$ número de bolas negras. Hállese la media y varianza. (S:1 y 2/5)

Variables continuas

4.21 Se eligen, con independencia, dos números reales; uno, X en el intervalo $[0, 4]$y, el otro Y en $[1, 7]$. Se forma a continuación un rectángulo de lados X e Y. Calcúlese el valor medio del área del rectángulo. (S: 8)

4.22 En el problema 3.40, hállese el valor medio de la longitud del trozo mayor y menor. (S: $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$)

4.23 En el problema 3.41, hállese el valor medio del mayor y menor de los números. (S: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$)

4.24 Calcular la esperanza y varianza de la variable exponencial (véase el ejemplo de la página 66). (S: $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}$)

4.25 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable X con función de densidad

$$f(x) = \frac{3x^2}{1000}, \qquad 0 \leq x \leq 10$$

El precio del artículo se obtiene como $Y = 40 - 2X$. Hállese el precio medio.

Momentos y función generatriz

4.26 Dada una variable aleatoria X con

$$\mathrm{E}(X) = 1,\ \mathrm{E}\left(X^2\right) = 2,\ \mathrm{E}\left(X^3\right) = 5.$$

Hállese el momento central de orden tres. (S: 1)

4.27 Hallar la función generatriz de la distribución geométrica definida:

$$f(x) = p \cdot q^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots \quad p + q = 1.$$

(S: $\psi(t) = \frac{p}{\mathrm{e}^{-t} - q}$)

4.28 Hallar la función generatriz de la distribución exponencial. (Véase el problema 4.24) (S: $\psi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ si $t < \lambda$)

4.29 Calcular la función generatriz de una variable X, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(x+2), & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{11}(x+3), & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

4.30 Probar que la siguiente función no puede ser la función generatriz de alguna variable X.

$$\psi(t) = 0'1\,\mathrm{e}^t + 0'2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Solución: La función generatriz siempre existe en $t = 0$ y vale:

$$\psi(0) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{0 \cdot X}\right) = \mathrm{E}(1) = 1.$$

En nuestro caso: $\psi(0) = 0'1\,\mathrm{e}^0 + 0'2\,\mathrm{e}^0 = 0'3$. por lo que no puede ser generatriz.

Covarianza

4.31 Dadas X e Y con la misma distribución, demostrar que las v.a. $X+Y$ y $X-Y$ son incorreladas; esto es, $\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y)=0$.

4.32 ¿Quién es mayor, $\operatorname{Var}(X+Y)$ ó $\operatorname{Var}(X-Y)$?. Estúdiese en función del signo de $\operatorname{Cov}(X,Y)$

4.33 Se seleccionan al azar dos bolas de una urna en la que hay 4 bolas blancas, 1 bola roja y 2 negras. Sea X el número de bolas rojas en la selección e Y el de bolas negras. Determinar $\operatorname{Cov}(X,Y)$. (S: $-\frac{10}{147}$)

4.34 Demostrar que $\rho(aX+b, cY+d) = \operatorname{signo}(ac)\rho(X,Y)$, siendo a, b, c, d constantes, $ac \neq 0$, y la función signo

$$\operatorname{signo}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

4.35 La función de densidad de dos variables aleatorias continuas es

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2) & x \in [0,1],\ y \in [0,1]. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular

(a) $\operatorname{E}(X)$, $\operatorname{E}(Y)$ (S: $\frac{5}{8}, \frac{5}{8}$)

(b) $\operatorname{Var}(X)$, $\operatorname{Var}(Y)$ (S: $\frac{73}{960}, \frac{73}{960}$)

(c) $\operatorname{Cov}(X,Y)$ (S: $-\frac{1}{64}$)

4.36 Una variable aleatoria bidimensional discreta tiene la siguiente función de cuantía conjunta

Y					
3	0'07	0'03	0'10	0'12	
2	0'05	0'05	0'05	0'03	
1	0'10	0'10	0'20	0'10	
	1	2	3	4	X

Calcular $\operatorname{Cov}(X,Y)$ y $\operatorname{E}\left(3X^2-7Y^3+5\right)$. (S: 0'0834 y –44'79)

4.37 Dada la función de densidad bidimensional

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$$

Hallar $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (S: $\frac{7}{12},\frac{7}{12},-\frac{1}{144}$)

4.38 Dada la función de densidad conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2+2y), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$$

Calcular el coeficiente de correlación lineal ρ. (S: -0'1367)

4.39 Dada la variable (X,Y) con función de cuantía

Y				
$1'5$	$0'1$	$0'3$	$0'2$	
$0'5$	$0'2$	$0'1$	$0'1$	
	1	2	3	X

Calcúlese el coeficiente de correlación lineal. (S: 0'2635)

4.40 Demostrar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

(a) Sea X una variable aleatoria con $0<\mathrm{Var}(X)<+\infty$. Sea $Y=aX+b$ con $a\neq 0$. Entonces

(1) $a>0\to\rho(X,Y)=1$

(2) $a<0\to\rho(X,Y)=-1$

(b) Si $\rho(X,Y)=0$, X e Y son independientes.

(c) Si X e Y son dos v.a. con varianza finita

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

4.41 Consideramos el experimento aleatorio de lanzar 4 veces una moneda normal, y definimos las siguientes variables aleatorias
$X=\{$ número de caras en los dos primeros lanzamientos.$\}$
$Y=\{$ número de caras en los cuatro lanzamientos.$\}$

(a) Calcular la función de cuantía conjunta y marginales.

(b) $\mathrm{P}(Y > 2 \mid X = 1)$ (S: $\frac{1}{4}$)

(c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ (S: 0'5)

(d) ρ (S: 0'7071)

4.42 Dada la siguiente función de densidad conjunta de una variable aleatoria bidimensional (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+2y), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular

(a) k (S: $\frac{2}{3}$)

(b) $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(Y)$ (S: $\frac{5}{9}, \frac{11}{18}$)

(c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$. (S: $-\frac{1}{162}$)

4.43 De una urna que contiene 5 bolas blancas y 4 rojas, se realizan 2 extracciones sucesivas. Sea X el número de bolas blancas en la selección e Y el de bolas rojas.

(a) La función de cuantía conjunta.

(b) La función de cuantía marginal de Y.

(c) La covarianza. (S: –0'4321)

(d) El coeficiente de correlación. (S: –1)

Esperanza condicional

4.44 Dada la tabla de la función de cuantía de (X, Y), donde las probabilidades aparecen multiplicadas por 100

Y \ X	10	11	12	13	14
4	8	6	1	5	1
3	5	4	9	10	3
2	1	2	8	15	4
1	2	3	7	2	4

Calcular

(a) $\mathrm{E}(Y \mid X = 11)$ (S: $\frac{43}{15}$)

(b) $\mathrm{E}(X \mid Y = 3)$ (S: $\frac{374}{31}$)

4.45 Se elige un punto aleatorio (X, Y) del cuadrante de círculo

$$\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Hallar $\mathrm{E}\left(X \;\middle|\; Y = \frac{1}{2}\right)$ (S: $\frac{\sqrt{3}}{4}$)

4.46 Se elige un punto aleatorio (X, Y) del recinto

$$\{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x^2\}$$

Hallar $\mathrm{E}\left(Y \;\middle|\; X = \frac{1}{2}\right)$ (S: $\frac{1}{8}$)

Desigualdad de Chebychev

4.47 Sea X una v.a. que toma valores no negativos y tal que $\mathrm{P}(X \geq 6) = \frac{1}{2}$. Probar que $\mathrm{E}(X) \geq 3$ (Usar des. Markov)

4.48 Sea X que cumple

$$\mathrm{E}(X) = 6, \quad \mathrm{P}(X \leq 4) = 0'3, \quad \mathrm{P}(X \geq 8) = 0'4$$

Probar que $\mathrm{Var}(X) \geq 2'8$.

4.49 Se toman 9 medidas independientes de una v.a. X de media 5 y varianza 1. Si $\overline{X_9}$ es la media muestral, hallar una cota para $p = \mathrm{P}\left(4 < \overline{X_9} < 6\right)$ (S: $p \geq \frac{8}{9}$.)

4.50 En el problema anterior, hallar el mínimo n para que

$$\mathrm{P}\left(3 < \overline{X}_n < 7\right) \geq 0'99 \text{ (S: 25.)}$$

4.51 En el problema 4.20 hállese $\mathrm{P}(|X - \mu| < 2\sigma)$ comparándola con la desigualdad de Chebychev.

Solución: Calculemos la función de cuantía:

X	0	1	2
p	1/5	3/5	1/5

De la tabla se deduce $\mu = \mathrm{E}(X) = 1$ y $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X-\mu| < 2\sigma) &= \mathrm{P}\left(|X-1| < 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(0'735 < X < 2'265\right) \\ &= \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) = \frac{4}{5} = 0'8. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Chebychev se obtiene:

$$\mathrm{P}(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

La desigualdad de Chebychev da una cota mínima de $0'75$, y se ha obtenido $0'8$ lo que confirma la desigualdad.

Problemas de examen

4.52 De una urna que contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5, se extraen *tres* al azar. La variable X representa el número mas pequeño de las bolas extraidas, y la variable Y el número mayor.

(a) Hallar la función de cuantía conjunta.

(b) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$.

(c) $\mathrm{P}(X+Y>6)$.

Solución:

(a) La función de cuantía conjunta es

Y \ X	1	2	3
5	$0'3$	$0'2$	$0'1$
4	$0'2$	$0'1$	0
3	$0'1$	0	0

(b) Las marginales son:

X	1	2	3
f_1	$0'6$	$0'3$	$0'1$

Y	3	4	5
f_2	$0'1$	$0'3$	$0'6$

Por lo que $\mathrm{E}(X) = 0'6 + 0'6 + 0'3 = 1'5$ y $\mathrm{E}(Y) = 0'3 + 1'2 + 3 = 4'5$.

(c) $\mathrm{P}(X + Y > 6) = f(2,5) + f(3,4) + f(3,5) = 0'3$.

4.53 La vida en horas de unas piezas determinadas es una variable aleatoria continua X. La probabilidad de que la vida X de una pieza sea mayor que x decrece exponencialmente a medida que aumenta x, según la expresión $\mathrm{P}(X > x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$

(a) Hallar las funciones de distribución y de densidad de la variable X.

(b) Hallar α para que la vida media de la pieza sea de 1000 horas.

Solución:

(a) (1)
$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - \mathrm{P}(X > x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}, x > 0.$$

(2) Derivando $F(x)$ se tiene
$$f(x) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha x}, \quad x > 0.$$

(b)
$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x \cdot \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} = 1000 \to \alpha = 0{,}001$$

4.54 Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Se extraen, al azar y sin reemplazamiento, 4 de ellas. Calcular el valor medio de bolas blancas en la extracción.

Solución: La variable X que mide el número de bolas blancas tiene la cuantía:

X	2	3
f	$0'6$	$0'4$

Por tanto la media es $\mathrm{E}(X) = 1'2 + 1'2 = 2'4$.

4.55 Un alumno contesta *al azar* a un test de 10 preguntas cuyas únicas respuestas son `SI` o `NO`. Cada acierto vale un punto, mientras que cada fallo resta $0'25$ puntos. Calcúlese la puntuación media.

Solución: Sea X el número de aciertos; el de fallos es $10 - X$ y la puntuación será

$$P = X - 0'25 \cdot (10 - X) = 1'25X - 2'5.$$

Puesto que $\mathrm{E}(X) = 5$ se tiene que $\mathrm{E}(P) = 1'25 \cdot 5 - 2'5 = 3'75$.

4.56 Un fabricante de motores produce un 10 % de defectuosos. El coste por motor es 400€y el precio de venta 900€. Si el motor es defectuoso debe devolverse lo cobrado y pagar una indemnización de 600€.

(a) Calcular el beneficio medio por motor.

(b) Se puede hacer una prueba de control que cuesta 100€y determina con toda seguridad si el motor es o no defectuoso ¿Es conveniente realizarla?

Solución:

(a) Sea el suceso $X = \{$ beneficio por motor$\}$. Si el motor es bueno, el fabricante gana $900 - 400 = 500$; si es defectuoso, pierde $400 + 600 = 1000$; por tanto la función de cuantía es

X	500	-1000
f	0'9	0'1

Se desprende que $\mathrm{E}(X) = 350e$.

(b) Sea $Y = \{$ beneficio por motor realizando la prueba $\}$. Si el motor es bueno, el fabricante gana $900 - 400 - 100 = 400$; si es defectuoso no lo vende pero pierde la fabricación y la prueba $400 + 100 = 500$; la función de cuantía es

Y	400	-500
f	0'9	0'1

EL beneficio medio es $\mathrm{E}(Y) = 360 - 50 = 310$. Cokmo el beneficio medio es menor haciendo la prueba, se deduce que **no** es rentable realizarla.

4.57 Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 negras; se seleccionan tres bolas al azar y sea X el número de blancas e Y el de negras. Calcúlese $\mathrm{E}(X - Y)$.

Solución: Dado que $Y = 3 - X$, hay que calcular $\mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}(2X - 3) = 2\mathrm{E}(X) - 3$. Obsérvese que X no puede valer 0 pues las tres bolas no pueden ser negras; la función de cuantía de X es la que sigue

X	1	2	3
f	$\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{3}{10}$	$\dfrac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{6}{10}$	$\dfrac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \dfrac{1}{10}$

Se obtiene que $\mathrm{E}(X) = 1'8$ y por tanto $\mathrm{E}(X - Y) = 0'6$.

4.58 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1000}x^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x \notin [0, 10] \end{cases}$$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la relación

$$Y = 40 - 2X.$$

Calcúlese

(a) Cantidad producida media.

(b) Precio medio.

Solución:

(a)
$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{10} x \frac{3}{1000} x^2 \, dx = \frac{3}{1000} \int_0^{10} x^3 \, dx = \frac{3}{1000} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{10} = 7'5.$$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 40 - 2\mathrm{E}(X) = 40 - 15 = 25$.

4.59 La duración en minutos de una llamada telefónica de larga distancia, se asocia a una variable aleatoria X cuya *función de distribución* es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Calcúlese

(a) Función de densidad.

(b) La duración media de una llamada.

(c) La probabilidad de que la duración de una llamada esté comprendida entre 2 y 5 minutos.

Solución:

(a) Derivando la función de distribución

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} \quad \text{para } x \geq 0.$$

(b)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\, dx = 3.$$

Luego las llamadas tienen una duración media de 3 minutos.

(c)

$$\mathrm{P}\,(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} = 0'3245.$$

4.60 El tiempo X (expresado en minutos) entre dos visitas consecutivas en una página web durante el horario diurno es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \quad \text{para } x > 0.$$

(a) Calcular $\mathrm{E}\,(X)$.

(b) Calcular la función de distribución de X.

(c) Calcular la probabilidad de que el intervalo entre dos visitas sea mayor que 4 minutos si se sabe que su duración ya ha sido al menos 2 minutos.

Solución:

(a) Véase el problema anterior.

(b) Para $x < 0$ es $F(x) = 0$ y, para $x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\, dt = \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}} \Big]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$$

(c)
$$\mathrm{P}\,(X > 4 \mid X \geq 2\,) = \frac{\mathrm{P}\,(X > 4)}{\mathrm{P}\,(X \geq 2)} = \frac{1 - F(4)}{1 - F(2)} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} = 0'5134.$$

4.61 Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3$^{\text{o}}$, 2 de 2$^{\text{o}}$ y 1 de 1$^{\text{o}}$. Sean $X = \{$ número de alumnos de 2$^{\text{o}}$ en el comité $\}$ e $Y = \{$ número de alumnos de 1$^{\text{o}}$ en el comité $\}$. Hállese $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$.

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

Y				
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	
	0	1	2	X

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene
$$\mathrm{E}\,(XY) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}\,(X) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}\,(Y) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto
$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = -\frac{4}{45}.$$

4.62 En una urna hay 3 bolas blancas, 2 negras y 1 roja. Un experimento consiste en extraer al azar dos de ellas. Se consideran las variables:

$$B = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas blancas.}\}$$
$$N = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras.}\}$$
$$R = \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas rojas.}\}$$

Calcúlese

(a) La tabla de cuantía conjunta de la variable (N, R).

(b) La media de la variable B.

(c) El número medio de bolas negras, sabiendo que una bola (exactamente una) ha sido roja.

Solución:

(a)

R				
1	3/15	2/15	0	
0	3/15	6/15	1/15	
	0	1	2	N

(b) La tabla de cuantía de B es

B	0	1	2
f_B	3/15	9/15	3/15

Su media es, por tanto: $\mathrm{E}(B) = 1$.

(c) De la tabla

$N \mid R = 1$	0	1
g_1	3/5	2/5

Se desprende que $\mathrm{E}(N \mid R = 1) = 2/5$.

4.63 Una pulga situada inicialmente en el origen de coordenadas se mueve aleatoriamente (derecha o izquierda con la misma probabilidad) sobre el eje X con saltos de una unidad. Sea P la variable que mide la posición (abcisa) después de 3 saltos. Calcúlese la función de cuantía de P y $\mathrm{E}(P)$.

Solución: La función de cuantía está recogida en la tabla

P	-3	-2	-1	0	1	2	3
f	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

La media es $-3 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 0$.

4.64 La función de cuantía de una variable bidimensional (X, Y) aparece en la siguiente tabla, donde las probabilidades están multiplicadas por 100:

Y				
2	10	7	12	
1	9	15	10	
0	11	18	8	
	0	1	2	X

Calcúlense:

(a) $\mathrm{P}(X+Y \leq 2)$.

(b) $\mathrm{P}(X=2 \mid Y=2)$.

(c) $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$.

(d) ¿Son independientes? (justifíquese la respuesta)

(e) $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Solución: Las funciones de cuantía de las distribuciones marginales son

X	0	1	2
f_1	0’3	0’4	0’3

Y	0	1	2
f_2	0’37	0’34	0’29

(a) $\mathrm{P}(X+Y \leq 2) = 0'11 + 0'09 + 0'18 + 0'10 + 0'15 + 0'08 = 0'71$

(b) $\mathrm{P}(X=2 \mid Y=2) = \dfrac{\mathrm{P}(X=2; Y=2)}{\mathrm{P}(Y=2)} = \dfrac{0'12}{0'29} = 0'4138$

(c) $\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0'3 + 1 \cdot 0'4 + 2 \cdot 0'3 = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 0 \cdot 0'37 + 1 \cdot 0'34 + 2 \cdot 0'29 = 0'92$.

(d) No son independientes; por ejemplo $f(0,0) \neq f_1(0) \cdot f_2(0)$.

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 0'15 + 1 \cdot 2 \cdot 0'07 + 2 \cdot 1 \cdot 0'10 + 2 \cdot 2 \cdot 0'12 - 1 \cdot 0'92 \\
&= 0'05.
\end{aligned}
$$

4.65 Dada la siguiente función de densidad conjunta de una variable aleatoria bidimensional (X,Y):

$$
f(x,y) = \begin{cases} k(x+2y), & 0<x<1\,,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}
$$

Calcular:

(a) El valor de k. (Sol: 2/3)

(b) $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$. (Sol: 5/9 y 11/27)

(c) La recta de regresión de Y sobre X.

4.66 Dada la función de densidad de una v.a. bidimensional:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y), \mathrm{Cov}(X,Y)$.

Solución: En el problema 3.48 (véase la página 108) se obtiene

$$f_1(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12}.$$

Igualmente $\mathrm{E}(Y) = 7/12$; para la $\mathrm{Cov}(X,Y)$ falta hallar:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2y + xy^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2y^2 + x\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{3}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{95}{144}$.