Capítulo 3

Variables Aleatorias

3.1 Variables unidimensionales

Consideremos el experimento consistente en lanzar tres monedas y llamemos X al número de caras; cada vez que realizamos el experimento, X toma un valor del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$; es por tanto una variable que toma valores de forma aleatoria. A esta variable X se le llama *variable aleatoria*; a veces abreviaremos el nombre y pondremos v.a.

Se puede hablar de la probabilidad de que X tome valores en el conjunto $\mathbb{R}$; por ejemplo para que X valga 0, se tiene que presentar el suceso $\{\times, \times, \times\}$ esto es, las tres cruces; puesto que $\mathrm{P}(\{\times, \times, \times\}) = \frac{1}{8}$ pondremos $\mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{8}$; obsérvese que X es una aplicación entre el espacio muestral y el conjunto de los números reales de la forma:

$$\begin{array}{cccc}
X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & (\mathsf{C}, \mathsf{C}, \mathsf{C}) & \longrightarrow & 3 \\
 & (\mathsf{C}, \mathsf{C}, \times) & \longrightarrow & 2 \\
 & (\mathsf{C}, \times, \mathsf{C}) & \longrightarrow & 2 \\
 & (\times, \mathsf{C}, \mathsf{C}) & \longrightarrow & 2 \\
 & (\mathsf{C}, \times, \times) & \longrightarrow & 1 \\
 & (\times, \mathsf{C}, \times) & \longrightarrow & 1 \\
 & (\times, \times, \mathsf{C}) & \longrightarrow & 1 \\
 & (\times, \times, \times) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

La probabilidad de que X valga 2 es la del suceso $\{\mathsf{C}, \mathsf{C}, \times\} \cup \{\mathsf{C}, \times, \mathsf{C}\} \cup \{\times, \mathsf{C}, \mathsf{C}\}$ ó, lo que es lo mismo $\frac{3}{8}$. No hace falta restringirnos a que X tome un valor puntual; por ejemplo, tiene sentido hallar la probabilidad de que X sea menor que $1'7$ en cuyo caso debe valer 1 ó 0 y por tanto $\mathrm{P}(X < 1'7) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, mientras que $P(X = 4) = 0$. El papel de sucesos lo desempeñan subconjuntos de $\mathbb{R}$ (habitualmente intervalos.)

Definición 3.1 *Se llama variable aleatoria a cualquier aplicación*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dado un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ (normalmente un intervalo, acotado o no), la antiimagen $X^{-1}(I)$ es un subconjunto de Ω, esto es, un suceso, y por tanto se puede poner

$$P(X \in I) = P\left(X^{-1}(I)\right)$$

Se suele abreviar la notación y poner $P(I)$ en lugar de $P(X \in I)$; Se puede hablar por tanto de la probabilidad de un intervalo (eventualmente punto ó numero): $P([a, b]) = P(X \in [a, b])$. Nótese que

$$P(\mathbb{R}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(\Omega) = 1$$

O sea, el conjunto $\mathbb{R}$ juega el papel de suceso seguro. Algunos ejemplos de variables aleatorias son

(a) Número de caras (o cruces) al lanzar n monedas.

(b) Número de lanzamientos de un dado hasta sacar un seis.

(c) Longitud en mm de los tornillos fabricados por una determinada empresa.

(d) El peso o estatura de las personas de cierta población.

(e) El número de clientes que entran a una determinada tienda por hora.

(f) La duración de un componente electrónico de una máquina.

Distinguiremos dos tipos de variables: aquellas que pueden tomar un número finito o infinito numerable (sucesión) de valores como por ejemplo el numero de caras al lanzar varias monedas o el número de tiradas de una dado hasta obtener un seis a las que llamamos *discretas* y aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo real como la longitud de los tornillos, a las que llamamos *continuas*; empezamos con las primeras

3.1.1 Variables discretas. Función de cuantía

Definición 3.2 *Una v.a. X es discreta si el conjunto imagen $X(\Omega)$ es un conjunto discreto. Esto es*

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

El conjunto $X(\Omega)$ puede se finito $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ o infinito (sucesión) $\{x_i\}_{i=1}^{+\infty}$; los valores que toma X se pueden, por tanto, numerar y la variable queda así determinada por las probabilidades

$$\mathrm{P}\left(X = x_i\right), \quad i = 1, 2, 3 \ldots$$

Definición 3.3 *Dada una v.a.discreta, se llama función de cuantía (o de probabilidad) a la aplicación*

$$\begin{array}{l} f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \mathrm{P}\left(X = x\right) \end{array}$$

Nótese que es una función definida para todo número real, aunque la función es nula salvo para el conjunto numerable $\{x_i\}$: si x no es ninguno de éstos, entonces es $f(x) = 0$. Las propiedades que deben cumplir una función de cuantía son:

- $0 \leq f(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$, pues $f(x) = \mathrm{P}\left(X = x\right) \in [0, 1]$.
- $\displaystyle\sum_{x_i} f(x_i) = 1$, pues los sucesos $\{X = x_i\}$ son incompatibles dos a dos, y su unión es el suceso seguro, de donde la suma de sus probabilidades es 1.

Ejemplo: *De una urna que contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5, se extraen aleatoriamente 3 de ellas; Sea $X =$ el número mayor de las tres; hállese la función de cuantía.*

Solución: Los casos posibles son $\binom{5}{3} = 10$ (extraer 3 de 5). El número mayor puede ser 3, 4, ó 5; hay que calcular la probabilidad de cada uno.

- Para que $X = 3$, el único caso favorable es que salgan las bolas 1, 2 y 3; Por tanto sólo un caso favorable y 10 posible, por lo que $f(3) = 1/10$.
- Si el número mayor es el 4, ha de salir la bola 4 y las otras dos de entre las bolas 1, 2 y 3 por lo que $f(4) = \frac{\binom{3}{2}}{10} = \frac{3}{10}$.

Razonando de esta forma se obtiene $f(5) = 6/10$ por lo que la tabla queda de la siguiente manera:

X	3	4	5
f	1/10	3/10	6/10

La función de cuantía de la variable *"número de caras al lanzar* 3 *dados" es*

X	0	1	2	3
f	1/8	3/8	3/8	1/8

Una variable sencilla es la que todos sus valores son igualmente probables, como cuando se elige un objeto de entre n idénticos; se trata de la siguiente:

Definición 3.4 (variable uniforme) *Una variable es uniforme si todos los valores que toma son equiprobables (ha de ser por tanto un conjunto finito); esto es, si hay n valores $\{x_i\}_i^n$, la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{n}$.*

Un ejemplo es elegir un número natural de 1 a 6 lanzando un dado; la variable X es el número elegido y la función de cuantia es:

X	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.1.2 Variables continuas. Función de densidad

Una v.a. continua puede tomar cualquier valor de un intervalo, por lo que no se puede definir una función como la de cuantía para las variables discretas; por ejemplo si se elige un número real aleatorio entre 0 y 1, la probabilidad de elegir uno determinado es 0 (hay infinitos). Se acude entonces a una función, llamada de densidad, de la siguiente forma

Definición 3.5 *Una v.a. X es continua si existe una función $f(x)$ no negativa, tal que para cualquier intervalo real I*

$$\mathrm{P}\left(X \in I\right) = \int_I f(x)\, dx$$

Esta función se llama *función de densidad*. La forma del intervalo I es irrelevante; puede ser cualquiera

$$[a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[,]-\infty, b], [a,+\infty[,]-\infty,+\infty[$$

Además se deduce que $\mathrm{P}\left(X = a\right) = 0$, es decir, en los puntos aislados la probabilidad es cero

- $\mathrm{P}\left(X \in I\right) = \displaystyle\int_I f(x)\ dx$
- $\mathrm{P}\left(X = a\right) = \displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

Una función de densidad debe verificar las dos condiciones siguientes

- $f(x) \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Definición 3.6 (variable uniforme sobre un intervalo) *Una variable X es uniforme sobre un intervalo $[a,b]$, si su función de densidad (f.d.d) es constante en el intervalo, y nula fuera de él.*

Es decir, la función de densidad es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

La constante se halla fácilmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_a^b k\, dx = 1 \rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

La variable X toma valores en el intervalo $[a, b]$, y la probabilidad de cualquier subintervalo es proporcional a su longitud; es decir, dos subintervalos de la misma longitud tienen la misma probabilidad.

Ejemplo: *Supóngase que el diámetro en mm de los CD de cierta marca es una v.a. continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in [118, 120] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que un CD de esa marca elegido al azar tenga un diámetro mayor de 119'5 mm?

Hay que integrar entre 119'5 y 120 la función $y = 1/2$ lo que equivale al área del ractangulo de base $120 - 119'5 = 0'5$ y altura $0'5$ que es $0'25$. Si se hace la integral

$$\int_{119'5}^{120} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}[x]_{119'5}^{120} = \frac{1}{2} \cdot 0'5 = 0'25.$$

Definición 3.7 (variable exponencial) *Una v.a se llama exponencial de parámetro $\lambda > 0$ cuando tiene la siguiente función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Es una función no negativa pues $\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$ para todo x, y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \lambda \left(0 - \frac{1}{-\lambda}\right) = 1.$$

Las funciones de cuantía de una v.a. discreta y la de densidad de una continua tienen similitudes que se reflejan en la tabla siguiente:

Discreta	Continua
$f \geq 0$	$f \geq 0$
$\sum_i f(x_i) = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

3.1.3 Función de Distribución

Para todas la variables aleatorias, discretas o continuas se define una función, llamada *distribución* de la forma:

Definición 3.8 *Dada una v.a. X, se llama función de distribución (o acumulativa) a la función real:*

$$\begin{array}{l} F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ F(x) = \mathrm{P}\left(X \leq x\right) = \mathrm{P}\left(]-\infty, x]\right) \end{array}$$

Si la variable es discreta $\mathrm{P}\left(X < x\right) = F(x) - \mathrm{P}\left(X = x\right)$. Si es continua $F(x) = \mathrm{P}\left(X \leq x\right) = \mathrm{P}\left(X < x\right)$. La función de distribución tiene las siguientes propiedades:

(a) $0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(c) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(d) Si $a < b$ es $\mathrm{P}\left(a < X \leq b\right) = F(b) - F(a)$. La forma del intervalo es importante si la variable es discreta, pero no si es continua; en este caso

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \mathrm{P}\left(a < X \leq b\right) = \mathrm{P}\left(a \leq X \leq b\right) \\ &= \mathrm{P}\left(a \leq X < b\right) = \mathrm{P}\left(a < X < b\right) \end{aligned}$$

Si es discreta:

- $\mathrm{P}\left(a < X \leq b\right) = F(b) - F(a)$.

- $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + \mathrm{P}(X = a)$.
- $\mathrm{P}(a \leq X < b) = F(b) - F(a) + \mathrm{P}(X = a) - \mathrm{P}(X = b)$.
- $\mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) - \mathrm{P}(X = b)$.

(e) $\mathrm{P}(X > a) = 1 - F(a)$. Vale aquí el comentario anterior, si es continua la variable $1 - F(a) = \mathrm{P}(X > a) = \mathrm{P}(X \geq a)$ mientras que si es discreta, $\mathrm{P}(X \geq a) = 1 - F(a) + \mathrm{P}(X = a)$.

(f) $F(x)$ es no decreciente: $a < b \to F(a) \leq F(b)$

(g) $F(x)$ es continua por la derecha en todo punto.

(h) $F(x)$ es discontinua por la izquierda en los puntos $x = b$ para los que $\mathrm{P}(X = b) \neq 0$

Demostración:

(a) Por ser una probabilidad, $F(x) \in [0, 1]$

(b) Cuando x tiende a $+\infty$, el suceso $]-\infty, x]$ "tiende" al suceso seguro y su probabilidad, o sea, $F(x)$ tiende a 1.

(c) Cuando x tiende a $-\infty$, el suceso $]-\infty, x]$ "tiende" al suceso imposible, o sea, $F(x)$ tiende a 0.

(d) Los sucesos $]-\infty, a]$ y $]a, b]$ son incompatibles, por lo que:

$$\mathrm{P}(]-\infty, b]) = \mathrm{P}(]-\infty, a] \cup]a, b]) = \mathrm{P}(]-\infty, a]) + \mathrm{P}(]a, b])$$

y por tanto $F(b) = F(a) + \mathrm{P}(]a, b])$, de donde se deduce el resultado.

(e) Puesto que $\mathbb{R} =]-\infty, a] \cup]a, +\infty[$ (unión de incompatibles), tomando probabilidades

$$1 = \mathrm{P}(]-\infty, a]) + \mathrm{P}(]a, +\infty]) = F(a) + \mathrm{P}(X > a)$$

de donde se deduce $\mathrm{P}(X > a) = 1 - F(a)$

(f) $F(b) - F(a) = \mathrm{P}(a < X \leq b) \geq 0 \to F(b) \geq F(a)$

(g) Sea $a \in \mathbb{R}$. En efecto, si $h \to 0^+$ el intervalo $]a, a+h]$ tiende a $\emptyset$

$$\lim_{h \to 0^+} [F(a+h) - F(a)] = \lim_{h \to 0^+} \mathrm{P}(a < X \leq a+h) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$$

(h) Sea $b \in \mathbb{R}$. Si $h \to 0^+$ el intervalo $]b-h, b]$ tiende al punto b por lo que

$$\lim_{h\to 0^+} [F(b) - F(b-h)] = \lim_{h\to 0^+} \mathrm{P}\,(b-h < X \leq b) = \mathrm{P}\,(X = b)$$

Si $\mathrm{P}\,(X = b) \neq 0$ la función es discontinua por la izquierda.

Relación de la función de distribución con las funciones de cuantía y densidad

Función de cuantía

Si X es discreta se cumple $f(x) = \mathrm{P}\,(X = x) = F(x) - F(x^-)$ (salto en x); en efecto

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^-) &= F(x) - \lim_{h\to 0^+} F(x-h) \\ &= \lim_{h\to 0^+} (F(x) - F(x-h)) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \mathrm{P}\,(x-h < X \leq x) \\ &= \mathrm{P}\,(X = x) = f(x). \end{aligned}$$

Para obtener $F(x)$ a partir de f se procede:

$$F(x) = \mathrm{P}\,(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}\,(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

La función de distribución acumula los valores de la de cuantía. En el ejemplo del número de caras al lanzar 3 monedas, es:

x	$F(x)$
$x < 0$	0
$0 \leq x < 1$	1/8
$1 \leq x < 2$	1/2
$2 \leq x < 3$	7/8
$3 \leq x$	1

La función de distribución, en el caso discreto, es una función escalonada con saltos en los puntos x_i de valor $f(x_i) = \mathrm{P}\,(X = x_i)$.

Función de densidad

La función de distribución de una variable continua es derivable en $\mathbb{R}$ salvo posiblemente en un conjunto discreto, y su derivada es precisamente la función de densidad.

(a) Obtención de f a partir de F: $f(x) = F'(x)$.

(b) Obtención de F a partir de f: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

En la siguiente tabla se da la forma de hallar la probabilidad de distintos intervalos usando ambas funciones; como la forma del intervalo es irrelevante, se puede sustituir $\leq$ ($\geq$) por $<$ ($>$).

Suceso	Probabilidad con f	Probabilidad con F
$X \leq a$	$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$	$F(a)$
$a \leq X \leq b$	$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$	$F(b) - F(a)$
$X \geq a$	$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$	$1 - F(a)$

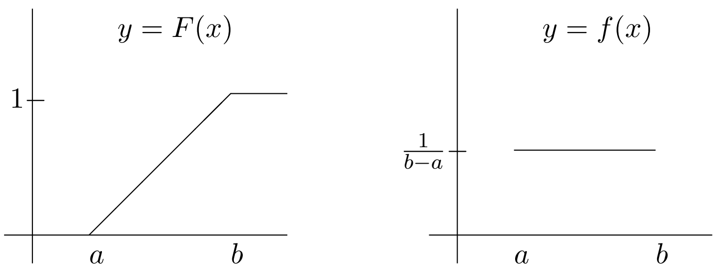
Ejemplos y gráficos

Las gráficas (distribución y densidad) de una distribución uniforme aparecen en la figura 3.1.

Ejemplo: *Hállese la función de distribución de la variable uniforme* (página 65)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Figura 3.1: Distribución uniforme.



Ejemplo: *Hállese la función de distribución de la variable exponencial* (página 66)

$F(x)$ es la probabilidad del intervalo $]-\infty, x]$; o sea, hay que integrar la función de densidad entre $-\infty$ y x.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Como $f(x)$ tiene una expresión para $x < 0$ y otra para $x \geq 0$, tendrémoslo en cuenta a la hora de calcular $F(x)$. Si $x < 0$ es $f(x) = 0$ por lo que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

Para $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{0}^{x} \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ dt = \lambda \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = \lambda \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda} \right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\,.$$

Es decir

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

3.2 Variables bidimensionales

Ante un experimento, conviene a veces considerar no sólo una variable aleatoria, sino varias que se estudian conjuntamente; por ejemplo la estatura y peso de las personas de cierto colectivo , el número de accidentes y la edad de los conductores, etc. Es interesante estudiar la relación entre las variables (correlación) para poder predecir el valor de una sabiendo el da la otra. Surge así el concepto de variable aleatoria multidimensional, aunque en este curso nos restringiremos al estudio de las variables de dos dimensiones. Una variable bidimensional es simplemente un par de variables y se indica por (X, Y).

Definición 3.9 *Dado un experimento con espacio muestral* Ω *se denomina variable aleatoria bidimensional a toda aplicación*

$$(X, Y) \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

El papel de los intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma $]-\infty, a]$ lo hacen ahora los rectángulos de $\mathbb{R}^2$ de la forma $]-\infty, a]\times]-\infty, b]$, o sea el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \leq a, \, y \leq b\}$. Como en el caso de una dimensión, estamos interesados en dos tipos de variables bidimensionales: discretas y continuas.

3.2.1 Variables bidimensionales discretas

Cuando el subconjunto $(X(\Omega), Y(\Omega)) \subseteq \mathbb{R}^2$ es discreto, llamaremos *discreta* a la variable bidimensional (X, Y). En tal caso, llamaremos *función de cuantía conjunta* a la función real de dos variables

$$\begin{aligned} f \colon \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f(x, y) = \mathrm{P}\left(X = x, Y = y\right) \end{aligned}$$

Si $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$ representan los conjuntos discretos de X e Y en $\mathbb{R}$, se debe cumplir $\displaystyle\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$

La función de cuantía conjunta, en el caso finito se puede representar en forma de tabla como en el ejemplo siguiente

Y						
4	0'01	0'04	0'18	0'01	0'08	
3	0'03	0	0	0'15	0'09	
2	0	0'05	0	0'07	0'11	
1	0'01	0'02	0'04	0'08	0'03	
	1	2	3	4	5	X

Ejemplo: *Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 negras y 1 roja. Se extraen 3 al azar y sean*

$$X = \textit{número de bolas blancas}$$
$$Y = \textit{número de bolas negras}$$

Puesto que X puede tomar los valores $\{0,1,2,3\}$ e Y los valores $\{0,1,2\}$ hay, en principio, 12 pares a estudiar; algunos de éstos no son posibles; por ejemplo $f(3,2) = 0$ pues no pueden salir 3 blancas y 2 negras (como se extraen 3 bolas, es $X + Y \leq 3$). La tabla completa queda

Y					
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	0	0	
1	0	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	0	
0	0	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	
	0	1	2	3	X

Los valores se han obtenido de la siguiente forma: los casos posibles son $\binom{6}{3} = 20$ y para calcular, por ejemplo, $f(1,1)$ ha de salir una bola blanca y una negra (y la otra roja) lo que se puede conseguir de $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 6$ formas, así que $f(1,1) = \frac{6}{20}$. Los demás valores se obtienen de forma análoga.

3.2.2 Variables bidimensionales continuas

Definición 3.10 *Se dice que dos variables X e Y tienen una distribución* continua *si existe una función no negativa $f(x,y)$ definida en $\mathbb{R}^2$ tal que para cualquier recinto $\mathcal{A}$ del plano se tiene*

$$\mathrm{P}\left((X,Y) \in \mathcal{A}\right) = \iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\, dx\, dy$$

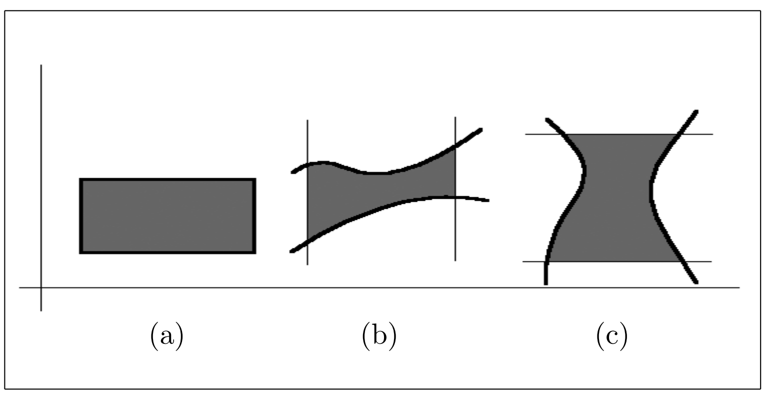
A la función f se le llama *función de densidad conjunta*, y debe cumplir dos condiciones

(a) $f(x, y) \geq 0$

(b) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = 1$

Los sucesos se corresponden con recintos del plano y sus probabilidades se calculan integrando en los correspondientes recintos.
A continuación vamos a ver de forma sucinta el cálculo de integrales dobles sin entrar en consideraciones teóricas. La integración de una función de una variable en un intervalo real, se generaliza para funciones de dos variables sobre un recinto del plano. El cálculo se reduce al de dos integrales simples, integrando primero respecto de una variable y después respecto de la otra. Se necesita una función real de dos variables (por ejemplo $f(x, y) = x + y$, $f(x + y) = x^2y$, etc) y un recinto de integración. Veamos los tres casos que se presentan en la práctica; en la figura 3.2 están los tres

Figura 3.2: Recintos de integración.



(a) **Integración sobre un rectángulo.** Si el rectángulo es

$$\mathcal{A} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) :\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

la integral se calcula

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy
\end{aligned}$$

(b) **Integración en un recinto limitado por dos funciones de** x. El recinto es por tanto

$$\mathcal{A} = \{(x,y) :\ a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Se integra de esta forma

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

(c) **Integración en un recinto limitado por las funciones de** y. El recinto es

$$\mathcal{A} = \{(x,y) :\ c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

Y la integral

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Veamos varios ejemplos. Sea $\mathcal{A}$ el rectángulo $[0,1]\times[0,1]$ y sea la función $f(x,y) = x+y$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 (x+y)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sea para la misma función en el interior del triángulo

$$\mathcal{A} = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Sea ahora el interior del triángulo

$$\mathcal{A} = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1, y \le x \le 2-y\}$$

Para la función anterior

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (x+y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_y^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 \left(-2y^2+2\right) dy \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo: *La siguiente función es la de densidad de una v.a.* (X,Y)

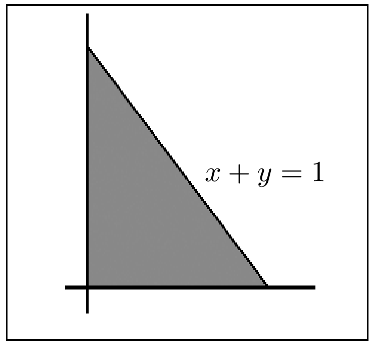
$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot x^2 y, & (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Hállese k *y* $\mathrm{P}(X+Y<1)$.

Para calcular k se usa la condición $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\ dy = 1$. La integral de la f.d.d. extendida a $\mathbb{R}^2$ debe ser 1. Separando por recintos, como la f.d.d es nula fuera del rectángulo $[0,1]\times[0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 \int_0^1 k(x^2y)\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2y\,dy\right) dx \\
&= k\int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx \\
&= k\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = k\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{k}{6} \to k=6.
\end{aligned}$$

La recta $x+y=1$ divide al plano en dos semiplanos correspondientes a las desigualdades $x+y<1$ y $x+y>1$. El suceso $\{X+Y<1\}$ se corresponde con el recinto de la figura siguiente.



Integrando ahora

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X+Y<1) &= 6\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 y\,dy\right) dx \\
&= 6\int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx \\
&= 3\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{10}.
\end{aligned}
$$

Distribución uniforme

Cuando la función de densidad es constante en un recinto del plano, la variable se dice que sigue una distribución uniforme (véase el caso unidimensional).

Definición 3.11 (variable uniforme sobre un recinto) *Una v.a. es uniforme sobre un recinto $\mathcal{A}$ cuando la función de densidad conjunta es*

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y)\in\mathcal{A} \\ 0, & (x,y)\notin\mathcal{A} \end{cases}$$

Sabiendo que $\iint_{\mathcal{A}} k\,dx\,dy = 1$, y que $\iint_{\mathcal{A}} dx\,dy = \text{área}(\mathcal{A})$ (lo que se demuestra en Cálculo infinitesimal) se deduce que

$$k = \frac{1}{\text{área}(\mathcal{A})}.$$

Para calcular, por ejemplo $\mathrm{P}\left((X, Y) \in \mathcal{B}\right)$ (llamamos a $\mathcal{B}$ recinto favorable y a $\mathcal{A}$ recinto posible), hay que integrar

$$\iint_{\mathcal{B}} k \, dx \, dy = k \cdot \text{área}(\mathcal{B}) = \frac{\text{área}(\mathcal{B})}{\text{área}(\mathcal{A})}.$$

Se puede poner, pues, que la probabilidad en el caso de una variable uniforme es un cociente de áreas, una extensión de la ley de Laplace.

Ejemplo: *Se elige aleatoriamente un punto (X, Y) del círculo unidad*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Calcúlese la función de densidad conjunta.

Tenemos una variable bidimensional continua. Como cualquier punto es igualmente verosímil, la función de densidad conjunta debe ser constante en el círculo y nula fuera de él. Por tanto, como el área del círculo es π la función de densidad es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

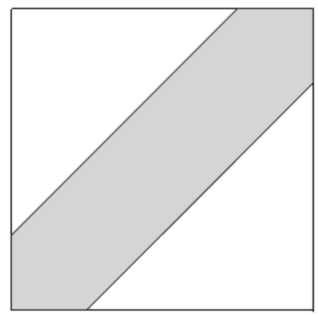
Ejemplo: *Dos personas se citan entre las cuatro y las cinco, conviniendo en no esperar más de 15 minutos. Si las llegadas son aleatorias, calcular la probabilidad de que se encuentren.*

Llamemos X e Y al tiempo medido en minutos a partir de las cuatro (la unidad de medida es irrelevante) de la llegada de los amigos; de esta forma $(X, Y) \in [0, 60] \times [0, 60]$. El recinto posible es el cuadrado $[0, 60] \times [0, 60]$ y el favorable (para que se encuentren) es el recinto

$$|X - Y| \leq 15 \quad \text{o bién} - 15 \leq X - Y \leq 15.$$

Está limitado por las rectas $-15 = X - Y$ y $X - Y = 15$ y en la figura siguiente aparece tal recinto cuya área es 1575, por lo que la solución es

$$p = \frac{\text{área favorable}}{\text{área posible}} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}.$$



3.2.3 Función de distribución

Definición 3.12 *Se llama función de distribución $F(x,y)$ de una v.a. bidimensional a la función real de dos variables $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = \mathrm{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \mathrm{P}\left((X \leq x) \cap (Y \leq y)\right)$$

Algunas propiedades las recoge el teorema siguiente

Teorema 3.1 *Dada la v. a. bidimensional (X,Y) se tiene:*

(a) $0 \leq F(x,y) \leq 1$

(b) $F(-\infty, y) = 0 = F(x, -\infty)$

(c) $F(+\infty, +\infty) = 1$

(d)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2\right) &= F(a_2,b_2) - F(a_1,b_2) \\ &- F(a_2,b_1) + F(a_1,b_1). \end{aligned}$$

Relación de la función de distribución con la de cuantía

La relación de la función de cuantía conjunta con la de distribución es similar al caso unidimensional

$$F(x,y) = \mathrm{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} f(x_i, y_j)$$

En el ejemplo

Y					
4	0’01	0’04	0’18	0’01	0’08
3	0’03	0	0	0’15	0’09
2	0	0’05	0	0’07	0’11
1	0’01	0’02	0’04	0’08	0’03
	1	2	3	4	5 X

se tiene $F(2,3) = 0'03 + 0 + 0 + 0'05 + 0'01 + 0'02 = 0'11$.

Relación de la función de distribución con la de densidad

La función de distribución conjunta se puede calcular a partir de la densidad como sigue

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, ds\, dt$$

Recíprocamente, la función de densidad conjunta se obtiene de la distribución

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

en los puntos (x,y) en los que exista la derivada segunda.

Ejemplo: *Sea la distribución bidimensional* (X,Y) *con función de densidad conjunta*

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Calcúlese k

(b) Calcúlese la función de distribución conjunta.

(a) La integral de la f.d.d. extendida a $\mathbb{R}^2$ debe ser 1. Separando por recintos, como la f.d.d es nula fuera del rectángulo $[0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1\int_0^1 k(x+y)\,dx\,dy \\ &= k\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)\,dx\right)dy \\ &= k\int_0^1\left(y+\frac{1}{2}\right)dy \\ &= k. \end{aligned}$$

Por tanto, k=1

(b)
- Si $x<0$ ó $y<0$ es $F(x,y)=0$ ¿por qué?
- Si $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$
$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y (s+t)\,ds\,dt=\int_0^x\int_0^y (s+t)\,ds\,dt=\frac{1}{2}xy(x+y)$$
- Si $x\ge 1$, $0\le y\le 1$
$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^y (s+t)\,ds\,dt=\frac{1}{2}y(1+y)$$
- Si $0\le x\le 1$, $y\ge 1$
$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^1 (s+t)\,ds\,dt=\frac{1}{2}x(1+x)$$
- Si $1\ge x$, $y\ge 1$
$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^1 (s+t)\,ds\,dt=1$$

3.2.4 Distribuciones Marginales

Dada la función de cuantía de la v.a. (X,Y)

Y					
3	0'07	0'12	0'05	0'11	
2	0'08	0'15	0'06	0'07	
1	0'03	0'12	0'04	0'10	
	1	2	3	4	X

Se puede encontrar la distribución de X de la siguiente forma; para hallar la probabilidad de un determinado suceso, por ejemplo, $\mathrm{P}(X=1)$ (que pondremos $f_1(1)$) se puede descomponer como unión de los siguientes:

$$\{X=1,Y=1\}\cup\{X=1,Y=2\}\cup\{X=1,Y=3\}$$

y, por tanto, se tiene: $\mathrm{P}(X=1)=0'03+0'08+0'07=0'18$. Esta distribución se llama *marginal* de X. La tabla (función de cuantía) completa para X es

X	1	2	3	4
f_1	0'18	0'39	0'15	0'28

Hemos sumado la columna correspondiente a cada x. Para la variable Y se suma la fila de cada uno

Y	1	2	3
f_2	0'29	0'36	0'35

Definición 3.13 *Dada una v.a. (X,Y), se denomina distribución marginal de X (Y), a la distribución unidimensional que tiene X (Y) cuando se prescinde de los valores de Y (X).*

En otras palabras, las funciones de distribución son

$$F_1(x)=P(X\le x, y<+\infty),\qquad F_2(y)=P(x<+\infty, Y\le y)$$

o, lo que es lo mismo

$$F_1(x)=F(x,+\infty),\qquad F_2(y)=F(+\infty,y)$$

Las funciones de cuantía (densidad) se obtienen:

- Caso discreto

$$f_1(x)=\sum_y f(x,y),\qquad f_2(y)=\sum_x f(x,y)$$

- Caso continuo

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy,\qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

Ejemplo: *Calcular las funciones de densidad marginales de la distribución bidimensional (X,Y) con la función de densidad conjunta siguiente*

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para $0 \leq x \leq 1$ se tiene

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

Para otros valores de x, como $f(x,y) = 0$ será en consecuencia $f_1(x) = 0$.

3.2.5 Independencia de Variables

Definición 3.14 *Las variables aleatorias X e Y se denominan* independientes, *si para cualesquiera conjuntos numéricos A y B es*

$$\mathrm{P}\left(X \in A, Y \in B\right) = \mathrm{P}\left(X \in A\right) \cdot \mathrm{P}\left(Y \in B\right) \tag{3.1}$$

Entonces para todo valor de x e y es

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right) & = & \mathrm{P}\left(X \leq x\right) \cdot \mathrm{P}\left(Y \leq y\right) \\ & \Updownarrow & \\ F(x,y) & = & F_1(x) \cdot F_2(y) \quad \forall x, \forall y. \end{array}$$

La ecuación anterior representa una condición necesaria y suficiente de independencia. Otro criterio de independencia lo tenemos en las funciones de cuantía y densidad; en el caso discreto, aplicando (3.1), la condición de independencia es :

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x, \forall y.$$

En el caso en que la distribución sea continua, la condición necesaria y suficiente para la independencia es:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x, \forall y.$$

En efecto

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1(x) \cdot F_2(y) \to f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\partial y} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Ejemplo: *Construir la tabla de cuantía de una v.a. (X, Y) que sean independientes.*

Basta partir de dos v.a. unidimensionales, y construir la conjunta multiplicando las marginales; por ejemplo

X	0	1
f_1	0'4	0'6

Y	1	2
f_2	0'7	0'3

Se obtiene

$$\begin{array}{c|cc} Y & & \\ 2 & 0'12 & 0'18 \\ 1 & 0'28 & 0'42 \\ \hline & 0 & 1 \quad X \end{array}$$

Ejemplo: *Considérese la f.d.d conjunta*

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estudiaremos si son independientes las variables X e Y, calculando las distribuciones marginales

- Para $x \in [0,1]$, $\quad f_1(x) = \displaystyle\int_0^1 4xy\, dy = 2x$
- Para $y \in [0,1]$, $\quad f_2(y) = \displaystyle\int_0^1 4xy\, dx = 2y$

Las dos marginales son

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad f_2(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como se cumple que $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall\, x, y$, (compruébese!) las variables son independientes.

Ejemplo: *¿Son independientes las variables de los ejemplos de las páginas 77 y 84?*

Caalculemos las marginales de la variable

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Marginal X: para $0 \le x \le 1$ se tiene

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 6x^2y\,dy = \left[6x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 3x^2.$$

Para otros valores de x, como $f(x,y) = 0$ será en consecuencia $f_1(x) = 0$. La otra marginal: para $0 \le y \le 1$ se tiene

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 6x^2y\,dx = \left[6y\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2y.$$

Por tanto las marginales son

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se deduce que son independientes pues $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

El ejemplo de la página 84 es

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las marginales son

$$f_1(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto NO son independientes.

Ejemplo: *En el lanzamiento de un dado sean las variables*

$$X = \begin{cases} 0, & \text{si en el dado sale } 1,2,3 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} 0, & \text{si en el dado sale } 3,4 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Son independientes?

Las funciones de cuantía son

X	0	1
f_1	1/2	1/2

Y	0	1
f_2	1/3	2/3

Y		
1	1/3	1/3
0	1/6	1/6
	0	1 X

Como $f(0,0) = f_1(0) \cdot f_2(0)$, $f(0,1) = f_1(0) \cdot f_2(1)$, $f(1,0) = f_1(1) \cdot f_2(0)$ y $f(1,1) = f_1(1) \cdot f_2(1)$ se deduce que son independientes.

3.2.6 Distribuciones condicionales

Distribuciones condicionales discretas

En el experimento de lanzar una moneda cuatro veces, sea X el número de caras en las cuatro tiradas, y sea Y el número de caras en las dos últimas tiradas. La variable (X, Y) es discreta, y su función de cuantía es

Y					
2	0	0	1/16	1/8	1/16
1	0	1/8	1/4	1/8	0
0	1/16	1/8	1/16	0	0
	0	1	2	3	4 X

Una vez realizado el experimento, supongamos que sabemos que $Y = 1$. Este hecho condiciona la distribución de X, porque, por ejemplo, ahora X no puede tomar el valor 4; es decir, a priori, $\mathrm{P}(X = 4) = \dfrac{1}{16}$, pero ahora $\mathrm{P}(X = 4) = 0$. Llamaremos a la nueva distribución *condicional de* X *dada* $Y = 1$. Puesto que

$$\mathrm{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

la distribución condicional de X para un valor y tal que $f_2(y) > 0$ se puede definir por una función de cuantía:

$$g_1(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad \text{para } y\colon f_2(y) > 0$$

Comprobemos que la función g_1 es de cuantía

(a) $g_1(x \mid Y = y) \geq 0$

(b) $\displaystyle\sum_x g_1(x \mid Y = y) = \sum_x \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1}{f_2(y)} \sum_x f(x,y) = \frac{1}{f_2(y)} f_2(y) = 1$

Análogamente se define la distribución condicional de Y dado $X = x$

$$g_2(y \mid X = x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad \text{para } x\colon f_1(x) > 0$$

En el ejemplo inicial tenemos

$(X \mid Y = 1)$	0	1	2	3	4
$g_1(x \mid 1)$	0	1/4	1/2	1/4	0

Si quitamos los valores imposibles, nos queda

$(X \mid Y = 1)$	1	2	3
$g_1(x \mid 1)$	1/4	1/2	1/4

Se ha dividido cada celdilla de la fila $Y = 1$ (o sea $f(x,1)$) por la suma de la fila (la marginal $f_2(1) = 1/2$). Análogamente para un valor dado de X (por ejemplo $X = 2$) se tiene la condicional de Y dividiendo cada celdilla de la columna $X = 2$ por la suma de la columna (marginal $f_1(2)$):

$(Y \mid X = 2)$	0	1	2
$g_2(y \mid 2)$	1/6	2/3	1/6

Distribuciones condicionales continuas

En el caso discreto, aplicando la definición de suceso condicional, surge de forma natural la distribución condicional. Esto no ocurre en el caso continuo, pues la probabilidad de que una variable tome un valor concreto es nula. Imaginemos que el experimento es elegir un punto aleatorio del rectángulo $[0,1] \times [0,1]$. La variable (X,Y) representa las coordenadas del punto. Supongamos que Y ha tomado el valor 0'5 y sea el suceso $\{X > 0'5\}$. Si hacemos

$$\mathrm{P}\left(X > 0'5 \mid Y = 0'5\right) = \frac{\mathrm{P}\left(X > 0'5, Y = 0'5\right)}{\mathrm{P}\left(Y = 0{,}5\right)}$$

nos encontramos que el denominador es cero (y también el numerador). Por ello hay que definir la distribución condicional en el caso continuo.
Sea y tal que $f_2(y) > 0$. La función de densidad condicional g_1 de X para $Y = y$ se define como la función

$$g_1(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Análogamente, si x es tal que $f_1(x) > 0$, se define la función de densidad condicional g_2 de Y para $X = x$ como la función

$$g_2(y \mid X = x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Resolvamos el problema propuesto anteriormente: la función de densidad conjunta se distribuye uniformemente en $[0,1] \times [0,1]$. Por tanto es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La f.d.d. marginal de Y es

$$f_2(y) = \int_0^1 1\,dx = 1, \quad x \in [0,1]$$

Así, $g_1(x \mid Y = 0'5) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(0'5)} = 1$. Una vez calculada la función de densidad marginal

$$\mathrm{P}\left(X > 0'5 \mid Y = 0'5\right) = \int_{0'5}^1 g_1(x \mid 0'5)\,dx = 0'5.$$

Puesto que $g_1(x \mid Y = y) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}$, en el caso de independencia será:

$$g_1(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x) f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x)$$

por lo que coincidirán la distribución condicional de X y la marginal de X (y también la condicional de Y con la marginal de Y).

Ejemplo: *Hállese la condicional de X para $Y = \frac{1}{2}$ de la siguiente variable (véase la página 85), comprobando que coincide con la marginal*

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $x \notin [0,1]$ es $g_1(x \mid \frac{1}{2}) = 0$; para $x \in [0,1]$ se tiene

$$g_1\left(x \;\middle|\; \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4x \cdot \frac{1}{2}}{1} = 2x.$$

que coincide con la marginal $f_1(x)$.

Ejemplo: *Pruébese que las variables X e Y con la siguiente función de cuantía conjunta son independientes, y hállese la condicional de Y para $X = 1$ comprobando que coincide con la marginal f_2.*

$$\begin{array}{c|ccc} Y & & & \\ 1 & 0'56 & 0'14 & \\ 0 & 0'24 & 0'06 & \\ \hline & 1 & 2 & X \end{array}$$

Calculemos las dos marginales y la condicional

X	1	2
f_1	$0'80$	$0'20$

Y	0	1
f_2	$0'3$	$0'7$

Como $f_1(1) = 0'80$ se tiene la condicional

$(Y \mid X = 1)$	0	1
$g_2(y \mid 1)$	$0'24/0'80 = 3/10$	$0'56/0'80 = 7/10$

Ejemplo: *Dada la v.a.* (X, Y) *siguiente (véanse las páginas* 84 *y* 86*), hállese la distribución condicional de* X *para un valor genérico* $Y = y$

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de densidad de la distribución condicional es

$$g_1(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Se debe definir sólo para $y \in [0,1]$ pues de lo contrario sería $f_2(y) = 0$. Para $y \in [0,1]$ ya se vió (página 84) que $f_2(y) = y + \frac{1}{2}$. Para $x \in [0,1]$ es $f(x,y) = x + y$, por lo que

$$g(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

NOTA: Para el valor particular $Y = \frac{1}{2}$ se tiene

$$g_1\left(x \,\middle|\, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo que coincide con la marginal f_1, a pesar de la **dependencia** de (X, Y). Por tanto

$$\boxed{\text{Independencia} \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; \text{Marginales} = \text{Condicionales}}$$

3.3 Funciones de una variable aleatoria

Tratamos ahora la cuestión de hallar la distribución de una v.a. que sea función de otra conocida. Conocida la v.a. X, y dada, la variable $Z = h(X)$ queremos hallar la función de densidad (cuantía) de Z. Veamos un ejemplo para el caso discreto y otro para el continuo.
Sea la v.a. X que sólo toma los valores dados en la tabla

x_i	$f(x_i)$
-1	1/4
0	1/2
1	1/4

Sea la v.a. $Z = X^2$; Es evidente que la v.a. puede tomar los valores 0 y 1 con probabilidades respectivas $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. En general, si $Z = h(X)$, entonces

$$f_Z(z) = \mathrm{P}\left(Z = z\right) = \sum_{\{x_i \,/\, h(x_i)=z\}} f_X(x_i)$$

Para el caso continuo sea X la v.a. con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, & x \in [1,3] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para hallar la f.d.d. de la variable $Z = X^2$, calculemos previamente su función de distribución; como X toma valores en $[1,3]$ la variable Z los tomará en el intervalo $[1,9]$. Para estos valores

$$F_Z(z) = \mathrm{P}\left(Z \le z\right) = \mathrm{P}\left(X^2 \le z\right) = \mathrm{P}\left(X \le \sqrt{z}\right) = F_X(\sqrt{z}).$$

Como necesitamos la función de distribución F_X, la calculamos integrando la f.d.d.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{4}, & x \in [1,3] \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Tenemos que para $z \in [1,9]$

$$F_Z(z) = F_X(\sqrt{z}) = \frac{(\sqrt{z}-1)^2}{4}$$

Y la función de distribución de Z será

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ \dfrac{(\sqrt{z}-1)^2}{4}, & z \in [1,9] \\ 1, & z > 9 \end{cases}$$

La f.d.d. se obtiene derivando la de distribución; puesto que

$$\frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{\sqrt{z}-1}{4\sqrt{z}}$$

tenemos por fin

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{z}-1}{4\sqrt{z}}, & z \in [1,9] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvense los pasos dados para el cálculo de f_Z

- Obtención de F_X
- Obtención de F_Z en función de F_X
- Obtención de f_Z derivando F_Z

Se puede obtener directamente la función f_Z en el caso en que la función h sea estrictamente creciente o decreciente

(a) Supongamos que X toma valores en $[a,b]$ (el intervalo puede ser acotado o no). Supongamos también que la función h es estrictamente creciente de forma que $Z = h(X)$ toma valores en $[\alpha,\beta] = [h(a),h(b)]$. La función inversa existe $X = h^{-1}(Z)$. Dado z, sea $x = h^{-1}(z)$. Calculemos la función f_Z siguiendo los pasos anteriores

- $F_Z(z) = \mathrm{P}\left(Z \le z\right) = \mathrm{P}\left(h(X) \le z\right) = \mathrm{P}\left(X \le h^{-1}(z)\right) = F_X(x)$
- $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = \dfrac{dF_X(x)}{dz} = f_X(x)\dfrac{dx}{dz}$

La función se obtiene sustituyendo en la f.d.d. de X la x en función de z y multiplicando por la derivada de x respecto de z (derivada de la función h^{-1}).

(b) Supongamos que X toma valores en $[a,b]$ (el intervalo puede ser acotado o no). Supongamos también que la función h es estrictamente decreciente de forma que $Z = h(X)$ toma valores en $[\alpha,\beta] = [h(b),h(a)]$. La función inversa existe $X = h^{-1}(Z)$. Dado z, sea $x = h^{-1}(z)$.

- $F_Z(z) = \mathrm{P}\left(Z \le z\right) = \mathrm{P}\left(h(X) \le z\right) = \mathrm{P}\left(X \ge h^{-1}(z)\right) = \mathrm{P}\left(X \ge x\right)$
$= 1 - F_X(x)$

- $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = \dfrac{d\,(1 - F_X(x))}{dz} = -f_X(x)\dfrac{dx}{dz}$

Como la función h es decreciente, su inversa h^{-1} también lo es, y su derivada es negativa. Entonces

$$f_Z(z) = -f_X(x)\frac{dx}{dz} = f_X(x)\left|\frac{dx}{dz}\right|$$

Resumen:

Si la función h es estrictamente creciente o decreciente, y la variable $Z = h(X)$ es continua, la función de densidad de Z, f_Z se obtiene

$$f_Z(z) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dz}\right|.$$

La variable Z tomará valores en $[h(a), h(b)]$ si h es creciente, o en $[h(b), h(a)]$ si es decreciente (el intervalo podría ser no acotado).

En el ejemplo anterior $Z = X^2 \rightarrow X = \sqrt{Z}$. La función Z es estrictamente creciente en el intervalo $[1, 3]$, y la inversa es estrictamente creciente en $[1, 9]$

$$f_Z(z) = \frac{\sqrt{z} - 1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z} - 1}{4\sqrt{z}}$$

válido para el intervalo $[1, 9]$. En el resto de $\mathbb{R}$ la función de densidad f_Z es nula.

Ejemplo: *Hállese la f.d.d. de la v.a. $Z = -2X + 3$, teniendo X la f.d.d. siguiente*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}(2x - 4), & x \in [2, 5] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La solución es

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{-1}{18}(z + 1), & z \in [-7, -1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.4 Problemas

Variables discretas

3.1 Si X representa la suma de puntuaciones en el lanzamiento de dos dados, hállese la función de cuantía.

Solución: Las 36 posibilidades se representan en la siguiente tabla

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

De ella surge de forma inmediata la función de cuantía

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

3.2 Calcúlese la función de cuantía de la variable X que mide la diferencia en valor absoluto de las puntuaciones en el lanzamiento de 2 dados.

Solución: De los 36 casos posibles, es fácil formar la tabla siguiente

X	0	1	2	3	4	5
f	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

3.3 Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 negras; otra contiene 1 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extraen 3 bolas; hállese la función de cuantía de $X =$ número de bolas blancas en la extracción.
(S: $f(0) = 1/5, f(1) = 9/20, f(2) = 6/20, f(3) = 1/20$.)

3.4 Sea X el número de lanzamientos necesarios de una moneda, hasta obtener la primera cara. Calcúlese la función de cuantía.

3.5 De un lote de 6 piezas, se sabe que hay una defectuosa. Para localizarla, se prueba una por una. Sea X la variable que mide el número de pruebas necesarias para localizar la pieza defectuosa. Hallése la función de cuantía.
(S: $f(n) = 1/6, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.)

3.6 Repetir el problema anterior pero conteniendo el lote dos piezas defectuosas. La variable X mide ahora el número de pruebas necesarias hasta localizar las dos piezas defectuosas. (S: $f(n) = (n-1)/15$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6$)

3.7 De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar dos de ellas sin reemplazamiento. Si las dos bolas no son blancas, se introducen en la urna y se repite el proceso hasta obtener dos blancas. La variable X mide el número de extracciones necesarias para obtener las dos blancas. Dar la función de cuantía de X.

Solución: La variable X es discreta, aunque toma infinitos valores

$$X \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

Sea $A = \{$Obtener dos bolas blancas en una extracción.$\}$ Tenemos:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Para obtener dos bolas blancas en la $k-$sima extracción se deben verificar:

$$\underbrace{\overline{A}, \overline{A}, \ldots, \overline{A}}_{k-1 \text{ sucesos}}, A$$

Dada la independencia de los sucesos se tiene:

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

3.8 Los siguientes ejemplos [1] son variables aleatorias discretas. Demostrar en cada caso que las funciones dadas son de cuantía:

(a) GEOMÉTRICA Dado $0 < p < 1,\ q = 1 - p$

$$f(k) = \mathrm{P}(X = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) BINOMIAL Dados $n \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p$

$$f(k) = \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

[1] Mas adelante recibirán un estudio en detalle

(c) POISSON Dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$f(k) = \mathrm{P}\,(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución: En todos los casos los valores (probabilidades) son números no negativos. Hay que comprobar que la suma de valores es 1.

(a) Véase la serie geométrica de la página 9

$$\sum_{0}^{+\infty} p \cdot q^k = p \sum_{0}^{+\infty} q^k = p \frac{1}{1-q} = p \frac{1}{p} = 1.$$

(b) Véase el ejemplo (b) de la página 5.

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

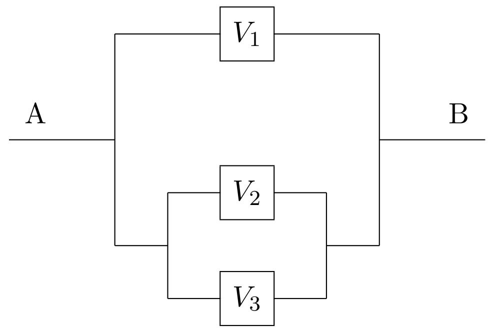
(c) Véase el desarrollo de e^x de la página 9

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \mathrm{e}^{\lambda} = 1.$$

3.9 En una fábrica hay tres máquinas A_i, $i = 1, 2, 3$ que producen piezas buenas con probabilidad $0'9$, $0'95$ y $0'97$ respectivamente. Se elige una pieza de cada máquina y se considera la variable: $X =$ Número de piezas defectuosas. Hállese la función de cuantía de X.
(S:$X \in \{0, 1, 2, 3\}$ con probabilidades $0'8293$, $0'1615$,$0'0091$ y $0'00015$)

3.10 Tres conductores se inscriben en una carrera automovilística. La probabilidad que tiene cada uno de clasificarse es de $0'1$, y actúan de forma independiente. Sea $X =$ Número de los tres que se clasifican $\in \{0, 1, 2, 3\}$. Calcular la función de cuantía de X. (S: $0'729, 0'243, 0'027, 0'001$)

3.11 Un sistema de tuberías tiene la forma de la figura adjunta. El agua fluye desde A hasta B, y V_i son válvulas, inicialmente cerradas que se abren independientemente por control remoto mediante interruptores con probabilidad p. Abriendo todos los interruptores, sea X el número de vias abiertas para que el agua llegue a B. Hállese la función de cuantía de X.



3.12 Una urna contiene 4 bolas blancas y 7 negras. Se extraen al azar 9 de ellas. Hállese la función de cuantía del número de bolas blancas en la extracción. (S: $X \in \{2, 3, 4\}$ con probs. $6/55, 28/55, 21/55$)

3.13 Dos amigos A y B, llevan 2 y 1 monedas respectivamente. Juegan de forma que en cada partida uno gana una moneda al otro (ambos ganan con la misma probabilidad). El juego termina cuando uno de ellos se queda con las tres monedas (y el otro con ninguna). Hállese la función de cuantía del número de partidas necesarias para que termine el juego. (S: $\frac{1}{2^k}, k = 1, 2 \ldots$)

Variables continuas

3.14 Dada la siguiente función de densidad de una variable X

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese la función de distribución.

3.15 La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/6, & 1 < x \leq 2 \\ 1/3, & 3 < x \leq 4 \\ 1/2, & 5 < x \leq 6 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular

(a) La función de distribución.

(b) $\mathrm{P}(X \leq 1'75)$ (S: $0'125$)

(c) $\mathrm{P}(1'8 < X \leq 3'5)$ (S: $0'2$)

(d) $\mathrm{P}(1'2 < X \leq 5'4)$ (S: $2/3$)

3.16 Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0'15, & 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{16}x - \dfrac{1}{4}, & 4 < x \leq 8 \\ -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{22}{5}, & 10 < x \leq 11 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular

(a) La función de distribución

(b) $\mathrm{P}(X \leq 9)$ (S: $0'8$)

(c) $\mathrm{P}(1 < X \leq 10'5)$ (S: $0'8$)

(d) $\mathrm{P}(X \geq 6)$ (S: $0'575$)

3.17 Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x^2), & x \in [0,3] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Hallar k y la función de distribución. (S: $\frac{1}{12}$)

(b) $\mathrm{P}(X \in [1,2])$ (S: $0'2778$)

(c) $\mathrm{P}(X < 1)$ (S: $\frac{1}{9}$)

(d) $\mathrm{P}(X < 2 \mid X > 1)$ (S: $0'3125$)

3.18 Dada la siguiente función de distribución de una variable X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{1+x}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1+x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Hállese:

(a) $\mathrm{P}\left(X \in [-0'2, 0'8]\right)$ (S: $0'42$)

(b) $\mathrm{P}\left(X > -0'4\right)$ (S: $0'7$)

(c) La función de densidad.

3.19 Dada la siguiente función de densidad de X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hállese:

(a) La función de distribución.

(b) $\mathrm{P}\left(X \in [0'2, 1'5]\right)$ usando $f(x)$ y $F(x)$ (S: $0'6$)

(c) $\mathrm{P}\left(X > 0'5 \mid X < 1\right)$

3.20 Dada la siguiente función de densidad de X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x+1), & -1 < x < 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hállese:

(a) La función de distribución.

(b) $\mathrm{P}\left(X < \frac{2}{3}\right)$ usando $f(x)$ y $F(x)$ (S: $80/81$)

(c) $\mathrm{P}\left(x < 0'5 \mid x > 0\right)$ (S: $0'875$)

3.21 Dada la siguiente función de densidad de X:

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Hállese: $\mathrm{P}\left(X > 1 \mid X > 0\right)$ (S: $0'5$)

3.22 La duración en minutos de las llamadas telefónicas interurbanas de cierta población , se puede representar por una variable aleatoria X cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Hállese:

(a) Función de distribución.

(b) Probabilidad de que una llamada dure más de 2 minutos. (S: $0'8045$)

(c) Probabilidad de que la duración de una llamada esté comprendida entre 2 y 5 minutos. (S: $0'4020$)

(d) Probabilidad de que una llamada dure más de 2 minutos sabiendo que ha durado menos de 5 minutos. (S: $0'4997$)

3.23 Un viajante recorre todos los días el mismo trayecto. La duración del mismo medida en minutos es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[115, 125]$. Hállese:

(a) Probabilidad de que un día tarde mas de 2 horas. (S: $0'5$)

(b) Probabilidad de que un día tarde entre 118 minutos y 2 horas. (S: $0'2$)

(c) Probabilidad de que un día tarde menos de 2 horas sabiendo que ha tardado más de 118 minutos. (S: 2/7)

3.24 La duración en horas de unos determinados componentes electrónicos sigue una v.a. con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200} e^{-\frac{x}{200}}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El aparato A usa dos de estos componentes y para que funcione el aparato es imprescindible que funcionen ambos. El aparato B también usa dos componentes pero basta que uno funcione para que el aparato funcione. Hállese la probabilidad de que:

(a) El aparato A funcione más de 200 horas. (S: $0'1353$)

(b) El aparato B funcione más de 200 horas. (S: $0'6004$)

(c) Los dos aparatos funcionen más de 200 horas. (S: $0'0813$)

(d) Alguno de ellos funcione más de 200 horas. (S: $0'6545$)

3.25 El tiempo (en segundos) que tarda el lector de un periódico en resolver el crucigrama del mismo se puede expresar mediante una variable continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{a}{x^2}, & x \geq a \end{cases}$$

siendo a un número real positivo.

(a) Probabilidad de que un lector tarde menos de $2a$ segundos. (S: $0'5$)

(b) Para el caso $a = 600$, probabilidad de que un lector que ha necesitado más de 15 minutos, lo haya resuelto en menos de 20 minutos. (S: $0'25$)

Variables bidimensionales discretas

3.26 Una urna contiene 3 bolas blancas, 7 negras y 2 rojas. Se extraen al azar tres bolas de la bolsa. Sea X el número de bolas blancas que hay en la extracción, y sea Y el de negras. Calcular la función de cuantía conjunta $f(x, y)$ y la probabilidad $\mathrm{P}(X < Y)$ (S: $0'6682$)

3.27 Se lanzan 5 monedas; las variables X e Y representan el número de caras en las tres primeras monedas y el número de caras en las cinco respectivamente. Hallése la función de cuantía conjunta.

Solución: Las probabilidades multiplicadas por 32 son:

Y \ X	0	1	2	3
5				1
4			3	2
3		3	6	1
2	1	6	3	
1	2	3		
0	1			

3.28 Dada la siguiente tabla de cuantía de una variable (X,Y), calcúlense las siguientes probabilidades

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5
4	0'07	0'04	0'06	0'01	0'08
3	0'03	0'05	0'03	0'10	0'09
2	0'08	0'05	0'03	0'05	0'08
1	0'01	0'02	0'04	0'05	0'03

(a) $\mathrm{P}(X>1)$ (S: $0'81$)

(b) $\mathrm{P}(X+Y<4)$ (S: $0'11$)

(c) $\mathrm{P}(\{X>1\}\cap\{Y<3\})$ (S: $0'35$)

(d) $\mathrm{P}(\{X>1\}\cup\{Y\le 3\})$ (S: $0'93$)

(e) $\mathrm{P}(X>1 \mid Y<3)$ (S: $0'7955$)

3.29 Dada la siguiente tabla de probabilidad de una variable bidimensional (X,Y):

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0'3	0'1	0'2
0	0'1	0'2	0'1

Calcúlese

(a) $F(1,0)$ (S: $0'3$)

(b) $F(1'5,1'5)$ (S: $0'7$)

(c) $\mathrm{P}\big(Y\le (X-1)^2\big)$ (S: $0'9$)

Variables bidimensionales continuas

3.30 Dada la variable (X,Y) cuya función de densidad es:

$$f(x,y)=\begin{cases} k(x^2+y), & (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Hállese

(a) k (S: 6/5).

(b) $\mathrm{P}(X > Y)$ (S: 1/2).

3.31 Se eligen al azar dos números X e Y (reales) entre 0 y 2. Calcúlese

(a) $\mathrm{P}(X + Y < 3)$ (S: 7/8)

(b) $\mathrm{P}(Y < 2X)$ (S: 3/4)

(c) $\mathrm{P}\left(X^2 + Y^2 < 1\right)$ (S: $\pi/16$)

3.32 Se eligen dos números X e Y aleatorios en el intervalo $[0, 1]$. Calcular

(a) $\mathrm{P}(X + 2Y \leq 2)$ (S: $0'75$)

(b) $\mathrm{P}\left(X^2 + Y^2 > 1\right)$ (S: $1 - \pi/4$)

3.33 Se eligen al azar dos números reales del intervalo $]0, 1[$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el menor sea mayor que el cuadrado del mayor? (S: 1/3)

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que con los tres segmentos en que queda dividido el intervalo $]0, 1[$ se puede formar un triángulo? (S: 1/4)

3.34 Hállese k para que la siguiente función sea la de densidad conjunta de alguna variable bidimensional y $\mathrm{P}(X < Y)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} k \cdot xy, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(S: 2)

3.35 Dada la variable (X, Y) con función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese

(a) $\mathrm{P}(X < Y < 2X)$ (S: 1/6)

(b) $\mathrm{P}(Y < 2X)$ (S: 2/3)

(c) $\mathrm{P}(Y > X \mid Y < 2X)$ (S: 1/4)

3.36 Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot y(1-x-y), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Hállese k. (S: 24)

(b) Hállese $\mathrm{P}(Y < X)$. (S: 1/4)

3.37 Dada la variable bidimensional distribuida uniformemente en el interior del triángulos de vértices $(0,0), (2,0), (1,2)$, hállese

(a) la función de densidad conjunta

(b) $\mathrm{P}(X < 1; Y < 1)$

(c) $\mathrm{P}(X - Y < 0)$

Solución:

(a) Puesto que el área del triángulo es 2 y llamando $\mathcal{T}$ al recinto, la f.d.c es

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in \mathcal{T} \\ 0, & (x,y) \notin \mathcal{T} \end{cases}$$

(b) El área favorable es 3/4 por lo que la solución es 3/8

(c) El área favorable es 2/3 por lo que la solución es 1/3.

3.38 Hállese k en la siguiente función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot (x+2y), & |x-2| + |y-2| < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(S: 1/48)

3.39 Supóngase que un químico toma dos medidas independientes de la concentración de cierto componente, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [1,3] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Hállese la probabilidad de que una medida sea mayor o igual que 2. (S: $0'7308$)

(b) Hállese la probabilidad de que la media aritmética de las dos medidas sea mayor o igual que 2 (S: $0'7982$)

3.40 Una estaca de 1 metro se rompe por un punto aleatoriamente. Hallar las funciones de densidad de las longitudes del trozo mayor (L) y del menor (l). (S: distribuidas uniformemente en $[\frac{1}{2}, 1]$ y en $[0, \frac{1}{2}]$ respect.)

3.41 Se eligen dos números aleatorios del intervalo $[0, 1]$. Hallar la f.d.d. del mayor (M) y del menor (m). (S: $f_M(x) = 2x$ en $[0, 1]$, y $f_m(x) = 2(1 - x)$ en $[0, 1]$)

Marginales discretas

3.42 Hállese la función de cuantía de las distribuciones marginales X e Y, dada la conjunta:

Y					
4	$0'12$	$0'08$	$0'07$	$0'07$	
3	$0'06$	$0'09$	$0'15$	$0'03$	
2	$0'08$	$0'08$	$0'08$	$0'09$	
	0	1	2	3	X

3.43 Una variable aleatoria bidimensional discreta (X,Y) tiene la siguiente función de cuantía conjunta ($\times 100$)

Y					
3	7	3	10	12	
2	5	5	5	3	
1	10	10	20	10	
	1	2	3	4	X

Calcular

(a) Marginales.

(b) $\mathrm{P}(X = 3, Y \leq 2)$ (S: $0'25$)

(c) $\mathrm{P}(X + Y > 3)$ (S: $0'75$)

3.44 Hállese p y q para que sean independientes las variables X e Y, cuya distribución conjunta es:

$$\begin{array}{c|ccc}
Y & & & \\
1 & 0'2 & 0'3 & \\
0 & \text{p} & \text{q} & \\
\hline
 & 1 & 2 & X
\end{array}$$

Solución: Las marginales son

X	1	2
f_1	$p+0'2$	$q+0'3$

Y	0	1
f_2	$p+q$	$0'5$

Ha de ser

$$\begin{array}{ll}
p=(p+q)(p+0'2) & q=(p+q)(q+0'3) \\
0'2=0'5(p+0'2) & 0'3=0'5(q+0'3)
\end{array}$$

Se obtiene la solución $p=0'2$ y $q=0'3$.

Marginales continuas

3.45 Hállese las distribuciones marginales de la variable continua (X,Y), dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} k, & x^2+y^2\le 1 \\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$$

¿Son independientes? (S: No.)

3.46 Dada la función de densidad de la la variable continua (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases} k\cdot x^2, & (x,y)\in[0,1]\times[0,4] \\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$$

(a) Hállense las distribuciones marginales.

(b) ¿Son independientes? (S: Si.)

(c) Hállese $\mathrm{P}\left(X>\frac{1}{2};Y<3\right)$ (S: 21/32)

3.47 Hállese las distribuciones marginales de la variable continua (X,Y), dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$$

3.48 Dada la función de densidad bidimensional

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hallar:

(a) $\mathrm{P}\left(X \leq 0'6, Y \geq 0'2\right)$ (S: $0'432$)

(b) $\mathrm{P}\left(X \geq Y\right)$ (S: $0'5$)

(c) Funciones de densidad marginales. (S: $f_1(x) = x + 1/2$ para $x \in [0,1]$)

(d) $\mathrm{P}\left(X \geq 0'3\right)$ (S: $0'805$)

3.49 La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias con distribución continua es

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+xy), & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Hallar k (S: $\frac{4}{3}$)

(b) Funciones de densidad marginales.

(c) ¿Son independientes? (S: Si)

3.50 Hallar las f.d.d. marginales de la distribución

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

¿Son independientes? (S: $2(1-x)$ en $[0,1]$; la otra igual; no son independientes)

3.51 Hallar las f.d.d. marginales de la distribución

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

¿Son independientes? (S: $f_1(x) = 30x^2(1-x)^2$ en $[0,1]$. No)

3.52 Hallar las f.d.d. marginales de la distribución

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x,y) \in [0,4] \times [0,2] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

¿Son independientes? (S: $1/4$ en $[0,4]$ y $1/2$ en $[0,2]$. Si)

3.53 Hállese las distribuciones marginales de la variable continua (X, Y), dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in [1,2] \times [2,5] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

¿Son independientes?

3.54 La concentración de cierto componente químico de un marca de pintura es una variable aleatoria continua, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{19}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se determina independientemente, la concentración del componente químico en dos botes de pintura. Sean X e Y las variables que representan las concentraciones medias. Hallar

(a) La función de densidad conjunta

(b) $\mathrm{P}(X > Y)$ (S: $0'5$)

(c) $\mathrm{P}(X + Y \leq 5)$ (S: $0'3691$)

Condicionales

3.55 Dada la distribución del problema 3.42, hállese

(a) $g_1(x|y = 3)$ (S: $6/33, 9/33, 15/33, 3/33$ para $x = 0, 1, 2, 3$)

(b) $g_2(y|x = 0)$ (S: $8/26, 6/26, 12/26$ para $y = 2, 3, 4$)

(c) $\mathrm{P}(x \leq 2 \mid y = 3)$ (S: $30/33$)

(d) $\mathrm{P}(y \leq 3 \mid x = 0)$ (S: $14/26$)

3.56 Se elige un punto aleatorio del rectángulo $[0, 2] \times [0, 2]$

(a) Hállese la distribución de X dado $Y = y$ particularizando para $y = 1$.

(b) Hállese $\mathrm{P}(X > 1 \mid Y = 1)$ (S: $0'5$)

3.57 Se elige un punto aleatorio del recinto

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x^2\}$$

(a) Hállese la distribución de Y dado $X = x$ y particularizar para $x = 1{,}5$

(b) Hállese $\mathrm{P}\left(Y > \frac{1}{2} \mid X = 1{,}5\right)$ (S: 7/9)

3.58 Hallar la distribución condicional del problema 3.50, $g_2(y \bigm| x = \frac{3}{4})$.
(S: 4 en $[0, 1/4]$)

3.59 Hallar la distribución condicional del problema 3.51, $g_1(x \bigm| y = \frac{1}{2})$.
(S: $24x^2$ en $[0, 1/2]$)

3.60 Hallar la distribución condicional del problema 3.52, $g_1(x \mid y)$.
(S: 1/4 en $[0, 4]$ para $y \in [0, 2]$)

3.61 Elijo un punto aleatorio del recinto: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$.

(a) Hallar las distribuciones condicionales.

(b) $\mathrm{P}\left(X > \frac{3}{4} \bigm| Y = \frac{1}{2}\right)$ (S: $\frac{1}{2}$)

3.62 Igual que el problema anterior, pero el punto se elige del círculo de radio unidad centrado en el origen. (S: $0'0670$)

3.63 Dada la variable (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Hállese la distribución de X dado $Y = y$

(b) Hállese $\mathrm{P}\left(X > \frac{1}{2} \bigm| Y = \frac{1}{3}\right)$ (S: 11/16)

3.64 Se elige un punto aleatorio del círculo $x^2 + y^2 < 4$. Dar la distribución condicional de X dado $Y = y$; Hállese después $\mathrm{P}\,(X < 1 \mid Y = 1)$
(S: $(1 + \sqrt{3})/2\sqrt{3}$)

3.65 Las medidas de dos características de cierta población de coleópteros tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}(2x + 3y), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese

(a) $\mathrm{P}(X > 0'7)$ (S: 0,384)

(b) $\mathrm{P}(X > 0'7)$ sabiendo que $Y = 0'4$ (S: $0'3955$)

(c) $\mathrm{P}(Y < 0'5)$ sabiendo que $X = 0'3$ (S: $0'3214$)

3.66 Dada la variable (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & (x,y) \in [0,2] \times [2,4] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállense las dos distribuciones condicionales.

3.67 Dada la variable (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese

(a) Distribución Marginal de Y (S: $f_2(y) = \mathrm{e}^{-y}$ para $y \geq 0$)

(b) $\mathrm{P}(Y > 1)$ (S: $1/e$)

(c) ¿Son independientes? (S: Si)

(d) Distribución condicional de X (S: $g_1(x \mid y) = \mathrm{e}^{-x}$ para $x, y > 0$)

(e) $\mathrm{P}(X > 1 \mid Y = 1)$ (S: $1/e$)

3.68 Dada la variable (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese $g_1(x \mid Y = y)$ y particularizar para $Y = \dfrac{1}{2}$

Cambio de variable

3.69 Dada la variable X con la función de cuantía de la tabla, Hállese la de la variable $Y = 2X^2 + 1$

X	-2	-1	0	1	2
p	0'1	0'1	0'2	0'2	0'4

3.70 Hállese la función de densidad de $Y = -3X + 6$ siendo la de X,

$$f(x) = \begin{cases} k, & x \in [1, 4] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Problemas de examen

3.71 Consideremos el experimento aleatorio de lanzar 4 veces una moneda normal y se definen las variables aleatorias siguientes:

$$\begin{aligned} X &= \text{número de caras en los dos primeros lanzamientos} \\ Y &= \text{número de caras en los cuatro lanzamientos.} \end{aligned}$$

Calcúlese:

(a) La función de cuantía conjunta y las marginales

(b) $\mathrm{P}(Y > 2 \mid X = 1)$

Solución: La función de cuantía conjunta aparece en la siguiente tablas (las probabilidades están multiplicadas por 16).

Y				
4	0	0	1	
3	0	2	2	
2	1	4	1	
1	2	2	0	
0	1	0	0	
	0	1	2	X

De la tabla se deduce fácilmente

$$\mathrm{P}(Y > 2 \mid X = 1) = \frac{1}{4}.$$

3.72 El consumo diario de agua, en miles de metros cúbicos para dos ciudades A y B, son dos variables aleatorias continuas con funciones de densidad:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \qquad f_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcular para cada ciudad la probabilidad de que en un día determinado, el consumo de agua supere los $1800\,\mathrm{m}^3$. (Solución 0'2 y 0'6)

(b) Se ha elegido un fichero al azar y un dato tomado de él señala que el consumo diario supera los $1800\,\mathrm{m}^3$. ¿Cuál es la probabilidad de que el dato tomado haya sido de la ciudad A?. (Solución 0'25)

3.73 Se eligen al azar dos números reales en el intervalo $[0, 1]$.Probabilidad de que su suma no supere $1'5$. (S: 7/8)

3.74 De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen las bolas una a una sin reemplazamiento, hasta que hayan salido 2 bolas blancas. Si X es la variable que mide el número total de bolas extraidas e Y el número de bolas negras extraidas, hállese la función de cuantía conjunta de (X, Y). ¿Son independientes?

Solución: La siguiente tabla muestra los casos posibles con los valores de X e Y, y las probabilidades

	X	Y	p
bb	2	0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
bnb	3	1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nbb	3	1	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nnbb	4	2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
nbnb	4	2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
bnnb	4	2	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$

Como, obviamente, es $Y = X - 2$, hay dependencia funcional entre ambas. Las funciones de cuantía son

X	2	3	4
f_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

Y	0	1	2
f_2	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

La función de cuantía conjunta aparece en la siguiente tabla

Y				
2	0	0	$\frac{3}{10}$	
1	0	$\frac{2}{5}$	0	
0	$\frac{3}{10}$	0	0	
	2	3	4	X

La tabla confirma la dependencia entre las variable; por ejemplo:

$$f(2,0) = \frac{3}{10} \neq f_1(2) \cdot f_2(0) = \frac{9}{100}.$$

3.75 La vida en horas de cierto tipo de bombillas eléctricas es una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \dfrac{50}{x^2}, & x > 100 \\ 0, & x \leq 100 \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que de tres bombillas elegidas al azar, una al menos siga dando luz, después de 150 horas de funcionamiento.

Solución: Calculemos primero el valor de k

$$\begin{aligned} 1 = \int_{100}^{+\infty} f(x)\,dx &= k \int_{100}^{+\infty} \frac{50}{x^2}\,dx \\ &= 50k \int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= 50k \left[\frac{-1}{x}\right]_{100}^{+\infty} \\ &= 50k \frac{1}{100} = \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Se deduce que $k = 2$. Calculemos ahora la probabilidad de que una bombilla funcione después de 150 horas

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 150) &= 100 \int_{150}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= 100 \left[\frac{-1}{x} \right]_{150}^{+\infty} \\ &= 100 \cdot \frac{1}{150} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si llamamos $A_i = \{$ la bombilla $-i-$ funciona después de 150 horas $\}$ para $i = 1, 2, 3$, el suceso

$$B = \{\text{al menos una bombilla funciona después de150 horas}\}$$

es $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. El contrario $\overline{B} = \{$ ninguna funciona $\}$ es de cálculo más facil:

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}.$$

3.76 La duración en horas de un cierto componente electrónico sigue una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Probabilidad de que un componente dure más de 200 horas.

(b) Si un aparato usa 3 de estos componentes, y funciona cuando lo hacen al menos 2 componentes ¿cuál es la probabilidad de que el aparato funcione al menos 200 horas?

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= 1 - P(X < 200) \\ &= 1 - \frac{1}{100}\int_0^{200} e^{-\frac{x}{100}}\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{100}\left[-100\, e^{-\frac{x}{100}}\right]_0^{200} \\ &= 1 - \frac{1}{100}\left[-100\, e^{-\frac{200}{100}} + 100\, e^{-\frac{0}{100}}\right] \\ &= 1 + e^{-2} - 1 = e^{-2} \end{aligned}$$

(b) Sea $Y = \{$ número de componentes que funcionan al menos 200 horas $\}$. Y sigue una distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = e^{-2}$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1) \\ &= 1 - \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 - \binom{3}{1} p(1-p)^2 \\ &= 3p^2 - 6p^3 \\ &= 3\, e^{-4} - 2\, e^{-6} = 0'049990. \end{aligned}$$

3.77 El tiempo de un viaje (ida y vuelta) de los camiones que transportan material hacia una obra se distribuye uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos si se sabe que ha sido mayor a 55 minutos?

Solución: Sea X la variable que mide el tiempo en minutos de los viajes; la función de densidad es

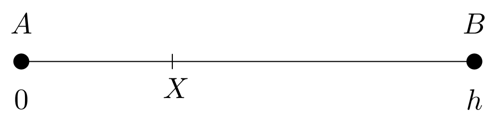
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & x \in [50, 70] \\ 0, & x \notin [50, 70] \end{cases}$$

Por tanto

$$P(X > 65 \mid X > 55) = \frac{P(X > 65)}{P(X > 55)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{1}{3}.$$

3.78 Si un paracaidista cae en un sitio aleatorio de la línea entre los marcadores A y B, calcúlese la probabilidad de que caiga más cerca de A que de B. Calcúlese tambien la probabilidad de que la distancia a A sea más de tres veces la distancia a B.

Solución: Si la distancia entre A y B es h, la situación es equivalente a elegir un número X aleatorio en el intervalo $[0, h]$ como se ve en la figura



Para que esté mas cerca de A, ha de ser $X \leq \frac{h}{2}$. Como X está distribuido uniformemente en $[0, h]$, la probabilidad

$$\mathrm{P}\left(X \leq \frac{h}{2}\right) = \frac{\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}$$

La distancia a A es X y la distancia a B es $h - X$; para ser $X > 3(h - X)$ ha de ser $X > \dfrac{3h}{4}$; el segmento favorable es $\dfrac{h}{4}$ por lo que

$$\mathrm{P}\left(X > \frac{3h}{4}\right) = \frac{\frac{h}{4}}{h} = \frac{1}{4}$$

Se puede hacer usando la función de densidad que es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & x \in [0, h] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

pero al ser uniforme se ha usado el cociente $p = \dfrac{\text{segmento favorable}}{\text{segmento posible}}$.

3.79 Se tiene una urna con 1 bola blanca, 2 bolas rojas y 3 azules. Se extraen aleatoriamente 3 bolas y se consideran las variables:

$$X = \{\text{Número de bolas blancas}\} \quad Y = \{\text{Número de bolas rojas}\}$$

Hállense la función de cuantía conjunta y las marginales.

Solución:

Y			
2	3/20	1/20	
1	6/20	6/20	
0	1/20	3/20	
	0	1	X

Las tablas marginales son

X	0	1
f_1	1/2	1/2

Y	0	1	2
f_2	1/5	3/5	1 /5

3.80 Las caras de un dado cúbico están marcadas con las cifras 1,1,2,2,3,4. Consideremos el experimento aleatorio { lanzar dos veces el dado }, y las variables aleatorias $X = \{$ puntos obtenidos en el primer lanzamiento $\}$ e $Y = \{$ suma de puntos en los dos lanzamientos $\}$. Se pide calcular:

(a) Función de cuantía conjunta de (X, Y).

(b) Funciones de cuantía marginales.

(c) ¿Son independientes?

Solución: En la siguiente tabla, aparecen las probabilidades multiplicadas por 36.

Y					
8				1	
7			1	1	
6		2	1	2	
5	2	2	2	2	
4	2	4	2		
3	4	4			
2	4				
	1	2	3	4	X

Las marginales son (la de Y aparece multiplicada por 36):

X	1	2	3	4
f_1	1/3	1/3	1/6	1/6

Y	2	3	4	5	6	7	8
f_2	4	8	8	8	5	2	1

No son independientes pues, por ejemplo,

$$f(1,2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq f_1(1) \cdot f_2(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{27}.$$

3.81 Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) cuya función de densidad es

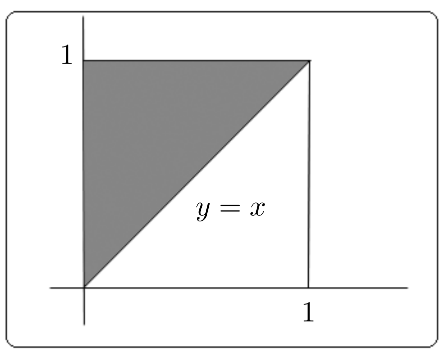
$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(\frac{x}{2}+y\right), & (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular $\mathrm{P}(X<Y)$.

Solución: Para el cálculo de k usaremos que $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= k\int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{2}+y\right)dy\right]dx = k\int_0^1 \left[\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx \\ &= k\int_0^1 \left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]dx = k\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_0^1 = k\cdot\frac{3}{4} \end{aligned}$$

De donde se deduce que $k = \frac{4}{3}$. Para hallar $\mathrm{P}(X<Y)$ hay que integrar en el recinto de la figura



$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X<Y) &= \frac{4}{3}\int_0^1 \left[\int_x^1 \left(\frac{x}{2}+y\right)dy\right]dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \left[\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-x^2\right)dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$