A Necessary and Sufficient Condition for Consensus Over Random Networks

Jeremy Krebs - Guillaume Soulié

Université Paris Saclay

15 janvier 2018

1. Introduction
   - Etat de l'art
   - Objectif
2. Préambule mathémathique
   - Définitions
   - Ergodicité
3. Résultats
   - Condition nécéssaire et suffisante
   - Valeur du consensus

Le problème du consensus :

"Le consensus demande à ce qu'un certain nombre de processus s'accordent sur une valeur unique."

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Cependant ces problèmes considéraient un système déterministe.

- Temps discret : $t_0, t_1, \ldots$
- Systèmes stochastiques

- Temps discret : $t_0, t_1, \ldots$
- Systèmes stochastiques

Problème de la forme : $x_{k+1} = W_k . x_k$
W_k peut être vu comme la matrice de poids d'arêtes d'un graphe aléatoire.

Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- $x(k)$ converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité, Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- $x(k)$ converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité,
- La convergence en probabilité a été prouvée dans le cas d'un modèle avec des arêtes orientées et non-nécessairement indépendantes, avec une hypothèse un peu forte sur les matrices.

Objectif :

- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour un consensus presque sûr
- S'intéresser à la valeur de convergence du consensus

$x(k) = W_k(\omega)x(k-1)$ où W_k est une matrice de poids.

- Les W_k sont des matrices stochastiques indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.),
- j a accès à i si (i, j) est une arête,
- i et j communiquent si (i, j) et (j, i) sont des arêtes,
- La relation de communication est une relation d'équivalence qui permet de regrouper les arêtes par classes d'équivalence.

Consensus en probabilité :
$\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ i,j = 1,..,n\ P(|x_i(k) - x_j(k)| > \epsilon) \to 0$
lorsque $k \to 0$

Consensus en probabilité :
$\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ i, j = 1, .., n\ P(|x_i(k) - x_j(k)| > \epsilon) \to 0$
lorsque $k \to 0$

Consensus presque sûr (plus forte) :
$\forall\ i, j = 1, .., n\ |x_i(k) - x_j(k)| \to 0$ presque sûrement.

$x_k = W_k ... W_1 \; x_0$

Intérêt d'étudier le produit infini de matrices W_i et son ergodicité.

Notons $U^{(k,p)} = W_{p+k} ... W_{p+1}$ le produit à gauche des matrices de la séquence.

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0\ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \to 0$ quand $k \to \infty$

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0\ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \to 0$ quand $k \to \infty$

Définition - Ergodicité forte :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, s = 1, .., n\ U_{i,s}^{k,p} \to d_s^p$ quand $k \to \infty$
où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i
backend

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, \ldots$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0\ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$

Définition - Ergodicité forte :
La séquence infinie $W_1, W_2, \ldots$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, s = 1, .., n\ U_{i,s}^{k,p} \rightarrow d_s^p$ quand $k \rightarrow \infty$
où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i
backend Dans le contexte qui nous intéresse, on peut montrer (en

utilisant les suites de Cauchy) que les notions d'ergodicité faible et fortes sont équivalentes.

Ergodicité - consensus

$$x(k) = W_k \cdot x(k-1)$$

$$\begin{pmatrix} x_0^k \\ x_1^k \\ \dots \\ x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{00}^k & \dots & w_{0n}^k \\ w_{10}^k & \dots & w_{1n}^k \\ \dots & & \dots \\ w_{n0}^k & \dots & w_{nn}^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0^{k-1} \\ x_1^{k-1} \\ \dots \\ x_n^{k-1} \end{pmatrix}$$

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(.)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(.) \leq 1$.

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(.)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(.) \leq 1$.

Un coefficient d'ergodicité est dît propre si :

$$\tau(W) = 0 \iff W = \mathbf{1}d^T$$

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(.)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(.) \leq 1$.

Un coefficient d'ergodicité est dît propre si :

$$\tau(W) = 0 \iff W = \mathbf{1}d^T$$

Example de coefficient d'ergodicité.

Lien ergodicité faible - coefficient d'ergodicité L'ergodicité faible est équiavelente à :

$$\lim_{k \to \inf} \tau(U^{(k,p)}) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 2 : Si $\tau(.)$ est un coefficient d'ergodicité propre et que pour les $\forall m \geq 1$ matrices stochastiques $W_k, \ k = 1, .., m$ on a $\tau(W_m..W_2 W_1) \leq \prod_{k=1}^{m} \tau(W_k)$,

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 2 : Si $\tau(.)$ est un coefficient d'ergodicité propre et que pour les $\forall m \geq 1$ matrices stochastiques $W_k, \; k = 1, .., m$ on a $\tau(W_m..W_2 W_1) \leq \prod_{k=1}^{m} \tau(W_k)$,

Alors la séquence W_k est faiblement ergodique si et seulement si il existe une séquence d'entiers croissants $k_r, k = 1, 2, ..$ telle que :

$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \tau(W_{k_{r+1}}..W_{k_r+1}) = \infty$

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\inf} = W_1, W_2, ...$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs.

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\text{inf}} = W_1, W_2, \ldots$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs. Il y a équivalence entre :

- $\{W_k\}_{k=0}^{\text{inf}}$ est faiblement ergodique.

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\text{inf}} = W_1, W_2, \ldots$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs. Il y a équivalence entre :

- $\{W_k\}_{k=0}^{\text{inf}}$ est faiblement ergodique.
- Le système $x(k) = (\mathbb{E}W_k)x(k-1)$ atteint un consensus.
- $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\inf} = W_1, W_2, ...$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs. Il y a équivalence entre :

- $\{W_k\}_{k=0}^{\inf}$ est faiblement ergodique.
- Le système $x(k) = (\mathbb{E}W_k)x(k-1)$ atteint un consensus.
- $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$

Lemme 2 - (D'après [19])

- $\alpha_1, ..., \alpha_s$: classes de communication associées à W.
- $\alpha_r[W]$ est la sous matricede W associée à α_r
- alors α_r est initial $\iff$ $\mathit{spectre}(\alpha_r[W]) = \{1\}$.

Corrollaire 4 - (Résultat principal de l'article)

$$\text{consensus presque surement atteint} \iff |\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$$

Valeur du consensus

On a vu $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ implique $x \to c\mathbf{1}$
(c dépend de $x(0)$ et des matrices W_k.)

Valeur du consensus

On a vu $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ implique $x \to c\mathbf{1}$
(c dépend de $x(0)$ et des matrices W_k.)

Théorème 5

For $y \in \mathbb{R}$, posons $S(y) = \{W \in S_n | y^T W = y^T\}$
si $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ et $\mu(S_n - s(y)) = 0$, alors

$$\lim_{k \to \inf} x(k) = (y^T x(0))\mathbf{1} \quad \text{a.s.}$$

Valeur du consensus
On a vu $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ implique $x \to c\mathbf{1}$
(c dépend de $x(0)$ et des matrices W_k.)

Théorème 5
For $y \in \mathbb{R}$, posons $S(y) = \{W \in S_n | y^T W = y^T\}$
si $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ et $\mu(S_n - s(y)) = 0$, alors

$$\lim_{k \to \inf} x(k) = (y^T x(0))\mathbf{1} \quad \text{a.s.}$$

Les matrices W_k partagent le même vecteur propre de gauche (associé à la valeur propre 1).

Ce que le papier apporte :

- Le problème du consensus peut être réduit à un problème de faible ergodicité.
- Il est caractérisé par la valeur de la deuxième valeur propre de $\mathbb{E}W_k$.
- Sous certaines conditions des W_k, on peut déterminer de manière certaines la valeur de consensus.

Ce que le papier apporte :

- Le problème du consensus peut être réduit à un problème de faible ergodicité.
- Il est caractérisé par la valeur de la deuxième valeur propre de $\mathbb{E}W_k$.
- Sous certaines conditions des W_k, on peut déterminer de manière certaines la valeur de consensus.

Pour aller plus loin :

- pont 1

Questions ?