A Necessary and Sufficient Condition for Consensus Over Random Networks

Jeremy Krebs - Guillaume Soulié

Université Paris Saclay

8 janvier 2018

- Problème du Consensus

- Problème du Consensus
- Temps discret

- Problème du Consensus
- Temps discret
- Systèmes stochastiques

- Problème du Consensus
- Temps discret
- Systèmes stochastiques

Problème de la forme : $x_{k+1} = W_k.x_k$

- Problème du Consensus
- Temps discret
- Systèmes stochastiques

Problème de la forme : $x_{k+1} = W_k.x_k$
W_k peut être vu comme la matrice de poids d'arêtes d'un graphe aléatoire.

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Cependant ces problèmes considéraient un système déterministe.

Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- x_k converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité, Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- x_k converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité,
- La convergence en probabilité a été prouvée dans le cas d'un modèle avec des arêtes orientées et non-nécessairement indépendantes, avec une hypothèse un peu forte sur les matrices.

Objectif :

- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour un consensus presque sûr
- Cas particulier d'un système dynamique qui converge vers un vecteur fixe avec probabilité 1

On considère que :

- Les W_k sont des matrices stochastiques indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)
-

$x_k = W_k(\omega)x_{k-1}$ où W_k est une matrice de poids.

- j a accès à i si (i, j) est une arête,
- i et j communiquent si (i, j) et (j, i) sont des arêtes,
- La relation de communication est une relation d'équivalence qui permet de définir de regrouper les arêtes par classes d'équivalence.

$x_k = W_k ... W_1 \; x_0$

Intérêt d'étudier le produit infini de matrices W_i et son ergodicité.

Notons $U^{(k,p)} = W_{p+k} ... W_{p+1}$ le produit à gauche des matrices de la séquence.

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0$ $(U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \to 0$ quand $k \to \infty$

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0$ $(U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$

Définition - Ergodicité forte :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, s = 1, .., n$ $U_{i,s}^{k,p} \rightarrow d_s^p$ quand $k \rightarrow \infty$
où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i