

A Necessary and Sufficient Condition for Consensus Over Random Networks

Jeremy Krebs - Guillaume Soulié

Université Paris Saclay

15 janvier 2018

Le problème du consensus :

"Le consensus demande à ce qu'un certain nombre de processus s'accordent sur une valeur unique."

1 Introduction

- Etat de l'art
- Objectif

2 Préambule mathématique

- Définitions
- Ergodicité

3 Résultats

- Condition nécessaire et suffisante
- Valeur du consensus

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Cependant ces problèmes considèrent un système déterministe.

- Temps discret : t_0, t_1, \dots
- Systèmes stochastiques

- Temps discret : t_0, t_1, \dots
- Systèmes stochastiques

Problème de la forme : $x_{k+1} = W_k \cdot x_k$

W_k peut être vu comme la matrice de poids d'arêtes d'un graphe aléatoire.

Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- $x(k)$ converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité,

Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- $x(k)$ converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité,
- La convergence en probabilité a été prouvée dans le cas d'un modèle avec des arêtes orientées et non-nécessairement indépendantes, avec une hypothèse un peu forte sur les matrices.

Objectif :

- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour un consensus presque sûr
- S'intéresser à la valeur de convergence du consensus

$x(k) = W_k(\omega)x(k-1)$ où W_k est une matrice de poids.

- Les W_k sont des matrices stochastiques indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.),
- j a accès à i si (i, j) est une arête,
- i et j communiquent si (i, j) et (j, i) sont des arêtes,
- La relation de communication est une relation d'équivalence qui permet de regrouper les arêtes par classes d'équivalence.

Consensus en probabilité :

$\forall \epsilon > 0 \forall i, j = 1, \dots, n P(|x_i(k) - x_j(k)| > \epsilon) \rightarrow 0$
 lorsque $k \rightarrow \infty$

Consensus presque sûr (plus forte) :

$\forall i, j = 1, \dots, n |x_i(k) - x_j(k)| \rightarrow 0$ presque sûrement.

$$x_k = W_k \dots W_1 x_0$$

Intérêt d'étudier le produit infini de matrices W_i et son ergodicité.

Notons $U^{(k,p)} = W_{p+k} \dots W_{p+1}$ le produit à gauche des matrices de la séquence.

Définition - Ergodicité faible :

La séquence infinie W_1, W_2, \dots est faiblement ergodique si et seulement si

$$\forall i, j, s = 1, \dots, n \text{ et } \forall p > 0 \ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

Définition - Ergodicité faible :

La séquence infinie W_1, W_2, \dots est faiblement ergodique si et seulement si

$$\forall i, j, s = 1, \dots, n \text{ et } \forall p > 0 \ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

Définition - Ergodicité forte :

La séquence infinie W_1, W_2, \dots est faiblement ergodique si et seulement si

$$\forall i, s = 1, \dots, n \ U_{i,s}^{k,p} \rightarrow d_s^p \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i
backend

Définition - Ergodicité faible :

La séquence infinie W_1, W_2, \dots est faiblement ergodique si et seulement si

$$\forall i, j, s = 1, \dots, n \text{ et } \forall p > 0 \ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

Définition - Ergodicité forte :

La séquence infinie W_1, W_2, \dots est faiblement ergodique si et seulement si

$$\forall i, s = 1, \dots, n \ U_{i,s}^{k,p} \rightarrow d_s^p \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i

backend Dans le contexte qui nous intéresse, on peut montrer (en

utilisant les suites de Cauchy) que les notions d'ergodicité faible et fortes sont équivalentes.

Ergodicité - consensus

$$x(k) = W_k \cdot x(k-1)$$

$$\begin{pmatrix} x_0^k \\ x_1^k \\ \dots \\ x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{00}^k & \dots & w_{0n}^k \\ w_{10}^k & \dots & w_{1n}^k \\ \dots & & \dots \\ w_{n0}^k & \dots & w_{nn}^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0^{k-1} \\ x_1^{k-1} \\ \dots \\ x_n^{k-1} \end{pmatrix}$$

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(\cdot)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(\cdot) \leq 1$.

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(\cdot)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(\cdot) \leq 1$.

Un coefficient d'ergodicité est dît propre si :

$$\tau(W) = 0 \iff W = \mathbf{1}d^T$$

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(\cdot)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(\cdot) \leq 1$.

Un coefficient d'ergodicité est dît propre si :

$$\tau(W) = 0 \iff W = \mathbf{1}d^T$$

Exemple de coefficient d'ergodicité.

Lien ergodicité faible - coefficient d'ergodicité L'ergodicité faible est équivalente à :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(U^{(k,p)}) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 2 : Si $\tau(\cdot)$ est un coefficient d'ergodicité propre et que pour les $\forall m \geq 1$ matrices stochastiques W_k , $k = 1, \dots, m$ on a $\tau(W_m \dots W_2 W_1) \leq \prod_{k=1}^m \tau(W_k)$,

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 2 : Si $\tau(\cdot)$ est un coefficient d'ergodicité propre et que pour les $\forall m \geq 1$ matrices stochastiques W_k , $k = 1, \dots, m$ on a $\tau(W_m \dots W_2 W_1) \leq \prod_{k=1}^m \tau(W_k)$,

Alors la séquence W_k est faiblement ergodique si et seulement si il existe une séquence d'entiers croissants k_r , $k = 1, 2, \dots$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \tau(W_{k_{r+1}} \dots W_{k_r+1})) = \infty$$

Lemme 1

L'ergodicité faible de W_1, W_2, \dots est un événement trivial.

Lemme 1

L'ergodicité faible de W_1, W_2, \dots est un événement trivial.

La démonstration repose sur la loi du zéro un de Kolmorov.

Lemme 1

L'ergodicité faible de W_1, W_2, \dots est un événement trivial.

La démonstration repose sur la loi du zéro un de Kolmorov.

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\infty} = W_1, W_2, \dots$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs.

Lemme 1

L'ergodicité faible de W_1, W_2, \dots est un événement trivial.

La démonstration repose sur la loi du zéro un de Kolmorov.

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\infty} = W_1, W_2, \dots$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs. Il y a équivalence entre :

- $\{W_k\}_{k=0}^{\infty}$ est faiblement ergodique.

Lemme 1

L'ergodicité faible de W_1, W_2, \dots est un événement trivial.

La démonstration repose sur la loi du zéro un de Kolmorov.

Théorème 3

$\{W_k\}_{k=0}^{\infty} = W_1, W_2, \dots$ i.i.d. matrices stochastiques, avec des coefficients diagonaux positifs. Il y a équivalence entre :

- $\{W_k\}_{k=0}^{\infty}$ est faiblement ergodique.
- Le système $x(k) = (\mathbb{E} W_k)x(k-1)$ atteint un consensus.
- $|\lambda_2(\mathbb{E} W_k)| < 1$

Sa démonstration peut être faite au choix :

- En utilisant des résultats généraux de la théorie ergodique des chaînes de Markov.
- En utilisant le théorème 2.

Lemme 2 - (D'après [19])

- $\alpha_1, \dots, \alpha_s$: classes de communication associées à W .
- $\alpha_r[W]$ est la sous matrice de W associée à α_r
- alors α_r est initial $\iff \text{spectre}(\alpha_r[W]) = \{1\}$.

Corollaire 4 - (Résultat principal de l'article)

consensus presque surement atteint $\iff |\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$

Corollaire 4 - (Résultat principal de l'article)

consensus presque surement atteint $\iff |\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$

\Rightarrow vient généraliser certain papiers.

Valeur du consensus

On a vu $|\lambda_2(\mathbb{E} W_k)| < 1$ implique $x \rightarrow c\mathbf{1}$
(c dépend de $x(0)$ et des matrices W_k .)

Théorème 5

For $y \in \mathbb{R}$, posons $S(y) = \{W \in S_n | y^T W = y^T\}$
si $|\lambda_2(\mathbb{E} W_k)| < 1$ et $\mu(S_n - s(y)) = 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = (y^T x(0))\mathbf{1} \quad \text{a.s.}$$

Valeur du consensus

On a vu $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ implique $x \rightarrow c\mathbf{1}$
(c dépend de $x(0)$ et des matrices W_k .)

Théorème 5

For $y \in \mathbb{R}$, posons $S(y) = \{W \in S_n | y^T W = y^T\}$
si $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ et $\mu(S_n - s(y)) = 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = (y^T x(0))\mathbf{1} \quad \text{a.s.}$$

Les matrices W_k partagent le même vecteur propre de gauche
(associé à la valeur propre 1).

Ce que le papier apporte :

- Le problème du consensus peut être réduit à un problème de faible ergodicité.

Ce que le papier apporte :

- Le problème du consensus peut être réduit à un problème de faible ergodicité.
- Il est caractérisé par la valeur de la deuxième valeur propre de $\mathbb{E}W_k$.

Ce que le papier apporte :

- Le problème du consensus peut être réduit à un problème de faible ergodicité.
- Il est caractérisé par la valeur de la deuxième valeur propre de $\mathbb{E}W_k$.
- Sous certaines conditions des W_k , on peut déterminer de manière certaine la valeur de consensus.

Ce que le papier apporte :

- Le problème du consensus peut être réduit à un problème de faible ergodicité.
- Il est caractérisé par la valeur de la deuxième valeur propre de $\mathbb{E}W_k$.
- Sous certaines conditions des W_k , on peut déterminer de manière certaines la valeur de consensus.

Pour aller plus loin :

- Quelles sont les performances d'un tel consensus?
- Quelles réactions face aux perturbations? (ajout d'un 'bruit de communication' stochastique, ...)

Questions ?