A Necessary and Sufficient Condition for Consensus Over Random Networks

Jeremy Krebs - Guillaume Soulié

Université Paris Saclay

14 janvier 2018

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Le problème de consensus suscite beaucoup d'intérêt :

- Coordination d'agents autonomes
- Calculs de moyennes d'un groupe de capteurs
- Problèmes de rendez-vous

Cependant ces problèmes considéraient un système déterministe.

- Problème du Consensus
- Temps discret
- Systèmes stochastiques

- Problème du Consensus
- Temps discret
- Systèmes stochastiques

Problème de la forme : $x_{k+1} = W_k.x_k$
W_k peut être vu comme la matrice de poids d'arêtes d'un graphe aléatoire.

Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- $x(k)$ converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité, Il y a déjà eu plusieurs résultats sur le sujet :

- $x(k)$ converge presque sûrement si les arêtes de $G(W_k)$ sont choisies de manière indépendante et avec la même probabilité,
- La convergence en probabilité a été prouvée dans le cas d'un modèle avec des arêtes orientées et non-nécessairement indépendantes, avec une hypothèse un peu forte sur les matrices.

Objectif :

- Trouver une condition nécessaire et suffisante pour un consensus presque sûr
- Cas particulier d'un système dynamique qui converge vers un vecteur fixe avec probabilité 1

$x(k) = W_k(\omega)x(k-1)$ où W_k est une matrice de poids.

- Les W_k sont des matrices stochastiques indépendantes et identiquement distribuées,
- j a accès à i si (i, j) est une arête,
- i et j communiquent si (i, j) et (j, i) sont des arêtes,
- La relation de communication est une relation d'équivalence qui permet de regrouper les arêtes par classes d'équivalence.

Consensus en probabilité :
$\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ i, j = 1, .., n\ P(|x_i(k) - x_j(k)| > \epsilon) \to 0$
lorsque $k \to 0$

Consensus en probabilité :
$\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ i, j = 1, .., n\ P(|x_i(k) - x_j(k)| > \epsilon) \to 0$
lorsque $k \to 0$

Consensus presque sûr (plus forte) :
$\forall\ i, j = 1, .., n\ |x_i(k) - x_j(k)| \to 0$ presque sûrement.

$x_k = W_k \dots W_1 \; x_0$

Intérêt d'étudier le produit infini de matrices W_i et son ergodicité.

Notons $U^{(k,p)} = W_{p+k} \dots W_{p+1}$ le produit à gauche des matrices de la séquence.

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, \ldots$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0$ $(U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \to 0$ quand $k \to \infty$

Définition - Ergodicité faible :

La séquence infinie $W_1, W_2, \ldots$ est faiblement ergodique si et seulement si

$\forall \ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall \ p > 0 \ (U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \to 0$ quand $k \to \infty$

Définition - Ergodicité forte :

La séquence infinie $W_1, W_2, \ldots$ est faiblement ergodique si et seulement si

$\forall \ i, s = 1, .., n \ U_{i,s}^{k,p} \to d_s^p$ quand $k \to \infty$

où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i

Définition - Ergodicité faible :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, j, s = 1, .., n$ et $\forall\ p > 0$ $(U_{i,s}^{k,p} - U_{j,s}^{k,p}) \to 0$ quand $k \to \infty$

Définition - Ergodicité forte :
La séquence infinie $W_1, W_2, ...$ est faiblement ergodique si et seulement si
$\forall\ i, s = 1, .., n$ $U_{i,s}^{k,p} \to d_s^p$ quand $k \to \infty$
où d_s^p est une constante ne dépendant pas de i

Dans le contexte qui nous intéresse, on peut montrer (en utilisant les suites de Cauchy) que les notions d'ergodicité faible et fortes sont équivalentes.

Ergodicité - consensus

Insérer schéma ici pour montrer pourquoi l'ergodicité peut être lié au consensus.

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(.)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(.) \leq 1$.

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(.)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(.) \leq 1$.

Un coefficient d'ergodicité est dît propre si :

$$\tau(W) = 0 \iff W = \mathbf{1}d^T$$

Coefficient de d'ergodicité Une fonction $\tau(.)$ définie sur l'ensemble des matrices stochastiques de taille $n \times n$ est un coefficient d'ergodicité si $0 \leq \tau(.) \leq 1$.

Un coefficient d'ergodicité est dît propre si :

$$\tau(W) = 0 \iff W = \mathbf{1}d^T$$

Example de coefficient d'ergodicité.

Lien ergodicité faible - coefficient d'ergodicité L'ergodicité faible est équiavelente à :

$$\lim_{k \to \inf} \tau(U^{(k,p)}) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 2 : Si $\tau(.)$ est un coefficient d'ergodicité propre et que pour les $\forall m \geq 1$ matrices stochastiques $W_k,\ k = 1, .., m$ on a $\tau(W_m..W_2W_1) \leq \prod_{k=1}^{m} \tau(W_k)$,

Théorème 1 : L'ergodicité faible du produit à gauche des matrices stochastiques est équivalente à son ergodicité forte.

Théorème 2 : Si $\tau(.)$ est un coefficient d'ergodicité propre et que pour les $\forall m \geq 1$ matrices stochastiques $W_k, \ k = 1, .., m$ on a $\tau(W_m..W_2W_1) \leq \prod_{k=1}^{m} \tau(W_k)$,

Alors la séquence W_k est faiblement ergodique si et seulement si il existe une séquence d'entiers croissants $k_r, k = 1, 2, ..$ telle que :

$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \tau(W_{k_{r+1}}..W_{k_r+1}) = \infty$