Лабораторная работа №4 на тему «QR разложение Грама-Шмидта».

Цель: решить систему линейных алгебраических уравнений в виде $Ax = b$ с помощью QR-разложения.

Данный метод заключается в представлении матрицы А в виде $A = QR$, где Q – ортогональная матрица (т. е. $Q^T Q = E$), а R – верхнетреугольная матрица. Существует несколько методов построения QR-разложения:

1) Метод вращений Гивенса, в основе которого лежит последовательное умножение на матрицы поворота;
2) Метод отражений Хаусхолдера, в котором используются матрицы отражений;
3) Ортогонализация Грама-Шмидта.

С первыми двумя методами можно подробно ознакомиться в учебном пособии Колобова А. Г. «Численные методы линейной алгебры», а суть последнего метода описана ниже.

Для удобства представим матрицу A в виде совокупности вектор столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_n],$$

где a_i соответствует i-тому столбцу матрицы А.

Суть метода ортогонализации Грама-Шмидта заключается в построении ортонормированного базиса $q_1, q_2, \ldots, q_n$, натянутого на столбцы матрицы A: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Матрица, составленная из столбцов $[q_1 | q_2 | \ \ldots \mid q_n]$ является искомой ортогональной матрицей Q. Однако для того, чтобы перейти от одного базиса к другому нам необходимо вычислить матрицу перехода R. Для этого введем промежуточную матрицу U, такую что:

$$u_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, q_j) q_j \,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

где u_i соответствует i-тому столбцу матрицы U, а скалярное произведение (a_i, q_j) расписывается по формуле $(x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Далее, находим столбцы матрицы Q: $q_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. Тогда матрицы Q и R будут иметь следующий вид:

$$Q = [q_1|q_2| \dots |q_n] \qquad R = \begin{pmatrix} (a_1, q_1) & (a_2, q_1) & (a_3, q_1) \\ 0 & (a_2, q_2) & (a_3, q_2) \\ 0 & 0 & (a_3, q_3) \end{pmatrix}.$$

Найденные матрицы будут являться QR −разложением исходной матрицы A. Решением исходной системы $Ax = b$ будет являться решение СЛАУ вида: $QRx = b \ \to Rx = Q^{-1}b \ \to x = R^{-1}Q^T b.$

Ход работы:

1. Находим матрицы Q и R по любому из трех методов ортогонализации.
2. Решить СЛАУ в два этапа:
   a) Находим вектор значений y из системы $y = Q^T b$;
   b) Вычислив массив «y» решаем СЛАУ вида $Rx = y$.
   c) Полученный массив x будет являться решением исходной системы $Ax = b$.
3. Сравнить полученные результаты с точным решением x^* тестовых СЛАУ из таблицы 1.
4. После отладки программы решить следующую систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

5. Вывести полученное решение СЛАУ.
6. *Подготовить отчет о выполненной работе.*

Таблица 1. Тесты.

№	Матрица $\boldsymbol{A}$	Столбец $\boldsymbol{b}$	Точное решение $\boldsymbol{x}^*$
1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} -11.538 \\ 12.923 \\ -2{,}769 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 6.03 & 13 & -17 \\ 13 & 29.03 & -38 \\ -17 & -38 & 50.03 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 2.0909 \\ 4.1509 \\ -5.1191 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} 1.03 \\ 1.03 \\ 1.03 \end{pmatrix}$