Лабораторная работа №6 на тему «Проблема собственных значений матрицы».

Цель: Найти методом простых итераций одно из собственных значений и все собственные значения симметричной положительно определенной матрицы A методом вращений (Якоби).

Метод вращений Якоби заключается в сведении исходной матрицы A к почти диагональной. Из курса линейной алгебры известно, что собственными значениями диагональной матрицы являются элементы на главной диагонали:

$$\lambda_i = a_{ii}, \;\; i = 1, \dots, n$$

Таким образом, если свести матрицу A к диагональному виду, то решением полной задачи собственных значений будет являться вектор с элементами:

$$\lambda = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Ход работы.

Ход работы.

1. Реализовать метод итераций по следующей схеме:
    a. Задаем нормированное начальное приближение x^0 и точность нахождения собственного значения ε;
    b. Находим значение вектора $y^{k+1} = Ax^k$;
    c. Осуществляем нормировку $x^{k+1} = \frac{y^{k+1}}{\|y^{k+1}\|}$
    d. Вычисляем значение $\lambda^{k+1} = \max\left(\frac{x_i^{k+1}}{x_i^k}\right)$, где $i = \overline{0, n-1}$, n – размерность матрицы A.
    e. Повторяем шаги $(a) - (d)$ до тех пор, пока не будет выполняться условие $|\lambda^{k+1} - \lambda^k| \le$ ε.
2. Реализовать метод вращений:
    a. Задаем точность нахождения собственных значений ε;
    b. Поскольку по условию исходная матрица симметричная, мы можем рассматривать либо верхний треугольник матрицы, либо нижний. Рассмотрим верхнюю треугольную наддиагональную часть матрицы A. В ней выделяем максимальный по модулю элемент $a_{ij}, \;\; i \ne j$;
    c. Найти угол поворота по формуле $\varphi = \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$ (если $a_{ii} = a_{jj}$, то угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$);
    d. Составить матрицу вращения T_{ij}, где:
    $$t_{ii} = t_{jj} = cos(\varphi), \;\; t_{ij} = -t_{ji} = -sin(\varphi), \qquad (1)$$
    $$t_{kk} = 1, \qquad k \ne ii, ij, ji, jj.$$
    Остальные элементы матрицы вращений равны нулю;

e. Вычислить новое приближение $A^{k+1} = \left(T_{ij}^k\right)^T A^k T_{ij}^k$

   Замечание: в целях оптимизации перемножать полностью на матрицы T не нужно, поскольку по факту у матрицы A поменяются только компоненты ii, ij, ji и jj;

f. Повторять шаги $(a) - (e)$ до тех пор, пока не будет выполняться условие $\sum_{i \neq j} \left|a_{ij}^{k+1}\right|^2 \leq \varepsilon$, то есть сумма квадратов внедиагональных элементов матрицы A^{k+1} не должна превышать заданную на первом шаге точность.

3. Необходимо сгенерировать симметричную, положительно определенную матрицу A /размерностей n = 3, n = 5, n = 7. Изучить, сколько требуется шагов обоим методам для каждого случая при $\varepsilon = 10^{-3},\ 10^{-7}$;
4. Вывести полученные собственные значения матрицы A^{k+1}.
5. Для каждой из матриц пункта 2 вывести число итераций, потребовавшихся для нахождения значений.
6. *Подготовить отчет о выполненной работе.*