Лабораторная работа №5 на тему итерационных методов решения СЛАУ

Цель: решить систему линейных алгебраических уравнений в виде $Ax = b$ двумя приближенными методами.

В отличии от прямых методов итерационные методы дают решение системы линейных алгебраических уравнений в виде предела последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется при помощи единообразного процесса, называемого процессом итерации. Обычно итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие остановки $\left\|\widetilde{x}^{(k+1)} - \widetilde{x}^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$, где ε – это заданная точность. Для того, чтобы нижеописанные методы сходились достаточно проверить выполнимость одного из условий диагонального преобладания:

- ✓ $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}$

или

- ✓ $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = \overline{1, n}.$

- **Метод Якоби:**

$$x^{(k+1)} = \tilde{A}x^{(k)} + \tilde{b},$$

где $x^{(k+1)}$ — это решение на новом итерационном шаге, а $x^{(k)}$ — это решение с предыдущего итерационного шага, $\tilde{b}$ — вектор с компонентами

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

$\tilde{A}$ — матрица с компонентами:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \\ \tilde{a}_{ij} = 0, & i = j. \end{cases}$$

По итогу формула метода Якоби будет выглядеть следующим образом:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=i}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^{(k)} + \tilde{b}_i.$$

- **Метод Зейделя:**

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=i}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i} \tilde{a}_{ij} x_j^{(k+1)} + \tilde{b}_i.$$

Если расписать формулу метода Зейделя в поэлементном виде, то получится следующая система по нахождению $x_i^{(k+1)}$ на новом итерационном шаге:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \tilde{a}_{12}x_2^{(k)} + \tilde{a}_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n^{(k)} + \tilde{b}_1 \\ x_2^{(k+1)} = \tilde{a}_{21}x_1^{(k+1)} + \tilde{a}_{23}x_3^{(k)} + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n^{(k)} + \tilde{b}_2 \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \tilde{a}_{n1}x_1^{(k+1)} + \tilde{a}_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \tilde{a}_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \tilde{b}_n. \end{cases}$$

- **Метод последовательной верхней релаксации:**

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_j^{(k)} + \omega\left(\sum_{j=i}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i} \tilde{a}_{ij}x_j^{(k+1)} + \tilde{b}_i\right),$$

где $\mathrm{x}^{(\mathrm{k}+1)}$ — это решение на новом итерационном шаге, а $x^{(k)}$ — это решение с предыдущего итерационного шага, ω – это параметр (обычно этот параметр находится в пределах $0 < \omega < 2$, но поскольку в данной лабораторной работе расписан процесс верхней релаксации, то выбираем $1 < \omega < 2$), $\tilde{b}$ — вектор с компонентами

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

$\tilde{A}$ — матрица с компонентами:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \\ \tilde{a}_{ij} = 0, & i = j. \end{cases}$$

- **Метод Ричардсона (Итерационный метод с выбором оптимального параметра):**

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\left(Ax^{(k)} - b\right).$$

Здесь τ – адаптивный шаг в нестационарном методе Ричардсона, но в рамках данной лабораторной работы предлагается рассмотреть стационарный процесс и взять:

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)},$$

Числа $\lambda_{min}(A)$ и $\lambda_{min}(A) -$ минимальные и максимальные собственные значения матрицы A

При таком выборе τ данный метод предназначен только для симметричных и положительно определенных матриц СЛАУ.

Ход работы:

1. Исходя из номера своего варианта решить СЛАУ двумя итерационными методами. Четный вариант реализует метод Якоби и метод верхней релаксации, нечетный – методы Зейделя и стационарного Ричардсона.
2. Решить систему с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{cases} 6.22x_1 + 1.42x_2 - 1.72x_3 + 1.91x_4 = 7.53 \\ 1.42x_1 + 5.33x_2 + 1.11x_3 - 1.82x_4 = 6.06 \\ -1.72x_1 + 1.11x_2 + 5.24x_3 + 1.42x_4 = 8.05 \\ 1.91x_1 - 1.82x_2 + 1.42x_3 + 6.55x_4 = 8.06 \end{cases}$$

3. Вывести полученные решения СЛАУ.
4. Вывести число итераций, потребовавшихся для нахождения решений.
5. Сравнить скорость сходимости двух методов и сделать соответствующий вывод.
6. *Подготовить отчет о выполненной работе.*