МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

Лабораторная работа №1 по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9122-01.03.02сп
Лунев А. В _______
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Проверил д.ф-м.н, профессор
Пермяков М.С. _________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

«_____»______________2025г.

г. Владивосток
2025

Оглавление

Введение

Моделирование роста популяций — важная задача, связанная с изучением динамики численности в условиях ограниченных ресурсов, что актуально для демографии, экологии и других наук. Одной из первых попыток описать этот процесс стала модель Мальтуса, предложенная Томасом Мальтусом в конце XVIII века, которая предполагает экспоненциальный рост населения и подчеркивает проблему возможного перенаселения. В XIX веке модель Ферхюльста–Пирла, известная как логистическая, усовершенствовала этот подход, введя понятие предельной емкости среды, что позволило учитывать замедление роста при исчерпании ресурсов.

В данном отчёте мы рассмотрим применение этих моделей к реальным данным, чтобы проиллюстрировать их возможности и ограничения в прогнозировании численности населения.

Основная часть

Постановка задачи

Имеется:

- Модель Мальтуса для описания роста популяции.
- Модель Ферхюльста–Пирла (логистическая модель) для описания роста популяции с учетом емкости среды.

Требуется:

- Для модели Мальтуса: определить численность популяции в будущем времени на основе начальной численности и темпа роста.
- Для модели Ферхюльста–Пирла: исследовать изменение численности популяции с течением времени с учетом начальной численности, темпа роста и емкости среды.

Условные обозначения

Для модели Мальтуса:

- N_0 — начальная численность популяции (число особей).
- $N(t)$ — численность популяции в момент времени t (размерность: особи).
- t — время (размерность: единицы времени, например, годы).
- r — темп роста популяции (1/единица времени).

Для модели Ферхюльста–Пирла:

- N_0 — начальная численность популяции (число особей).
- r — темп роста популяции (1/единица времени).
- K — емкость среды (максимальная численность популяции, которую может поддерживать среда, в числе особей).
- t — время (размерность: единицы времени, например, годы).

Построение математической модели

Модель Мальтуса

Модель Мальтуса представляет собой простейшую математическую конструкцию для описания динамики роста популяции, где численность увеличивается пропорционально текущему значению, не учитывая ограничения ресурсов. Основное уравнение модели выражается через обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое определяет скорость изменения численности популяции. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Для получения аналитического решения этого дифференциального уравнения применяются стандартные методы разделения переменных. Интегрируя обе части уравнения с учетом начального условия, получаем:

$$\frac{dN}{N} = rdt$$

После интегрирования слева и справа:

$$\ln|N| = rt + C$$

Экспоненцируя обе части, исключаем логарифм:

$$N = e^{rt+C} = e^C \cdot e^{rt}$$

Обозначив e^C как константу, связанную с начальным значением, и учитывая начальное условие $N(0) = N_0$, получаем окончательное аналитическое решение:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Это решение описывает экспоненциальный рост или спад популяции, в зависимости от знака r, и зависит от начальной численности N_0 и времени t. Начальное условие $N(0) = N_0$ задает точку отсчета, которая соответствует численности популяции в момент времени $t = 0$.

Модель Ферхюльста–Пирла

Модель Ферхюльста–Пирла, также известная как логистическая модель, представляет собой более сложную и реалистичную интерпретацию роста популяции, которая учитывает ограничения ресурсов и емкость среды. Основное уравнение модели выражено через нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое отражает замедление роста по мере приближения численности к предельному значению. Уравнение имеет следующую форму:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Член $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ играет ключевую роль, вводя нелинейность: он уменьшает скорость роста пропорционально отношению текущей численности к емкости среды. Когда N близко к нулю, рост близок к экспоненциальному (как в модели Мальтуса), а при N близком к K, скорость роста приближается к нулю, что предотвращает бесконечный рост.

Для получения аналитического решения уравнение разделяют переменные:

$$\frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = rdt$$

Интегрирование правой части дает $rt + C$. Левая часть требует частичного дробного разложения:

$$\frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{1 - \frac{N}{K}}$$

Решая для A и B, получаем:

$$\frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{1 - \frac{N}{K}}$$

Интегрируя, приходим к выражению:

$$\ln|N| - \ln|K - N| = rt + C$$

Упростив, получаем:

$$\ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = e^{rt+C} = C_1 e^{rt}$$

где $C_1 = e^C$. Решая относительно N:

$$N = \frac{C_1 e^{rt} K}{1 + C_1 e^{rt}}$$

Подставляя начальное условие $N(0) = N_0$, определяем C_1:

$$N_0 = \frac{C_1 K}{1 + C_1} \Rightarrow C_1 = \frac{N_0}{K - N_0}$$

Таким образом, общее решение принимает вид:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(K - \frac{N_0}{N_0}\right) e^{rt}}$$

Это решение описывает логистическую кривую, где популяция растет быстро на начальном этапе, затем замедляется и стабилизируется около значения K при больших t. Начальное условие $N(0) = N_0$ задает стартовую точку для моделирования.

Аналитическое поведение модели

Модель Мальтуса

Равновесие:

Чтобы найти равновесие, приравниваем производную к нулю:

$$\frac{dN}{dt} = rN = 0$$

Решение: $N = 0$ (тривиальное равновесие).

Устойчивость:

При $N > 0$ и $r > 0$: $\frac{dN}{dt} > 0$, популяция растет экспоненциально.

При $N < 0$ (не имеет физического смысла): $\frac{dN}{dt} < 0$.

Равновесие $N = 0$ неустойчиво, так как малейшее отклонение от нуля приводит к неограниченному росту.

Модель Ферхюльста–Пирла

Равновесие:

Приравниваем производную к нулю:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0$$

Решения:

1. $N = 0$
2. $N = K$

Устойчивость:

Для $N = 0$:

Если N чуть больше 0, то $\frac{dN}{dt} > 0$ (рост), равновесие неустойчиво.

Для $N = K$:

Если $N < K$, то $1 - \frac{N}{K} > 0, \frac{dN}{dt} > 0$ (рост к K).

Если $N > K$, то $1 - \frac{N}{K} > 0, \frac{dN}{dt} < 0$ (спад к K).

Равновесие $N = K$ устойчиво, так как система стремится к нему при любом отклонении.

Вычислительный эксперимент

Модель Мальтуса (население России)

Конкретные значения параметров:

- Начальная численность населения (N_0): 147 миллионов человек (147,000,000) в 1990 году.
- Период прогнозирования: с 1990 года до 1996 года (6 лет).
- Темп роста (r): На основе уточненного среднего естественного прироста, рассчитанного по данным рождаемости и смертности за 1990–1995 годы
- Шаг по времени (Δt): 0.1 года (для повышения точности численного метода, итого 60 шагов за 6 лет).

Численный метод:

Для решения дифференциального уравнения $\frac{dN}{dt} = rN$ используется метод Эйлера, который аппроксимирует изменение численности на каждом шаге времени: $N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \cdot r \cdot N(t)$ Метод Эйлера выбран за его простоту и достаточную точность при малом шаге Δt. Для сравнения также вычислено аналитическое решение: $N(t) = N_0 e^{rt}$

Процесс расчета:

1. **Аналитическое решение:**

   Для $t = 6$ лет: $N(6) = 147{,}000{,}000 \cdot e^{-0.002198 \cdot 6}$

   - $-0.002198 \cdot 6 = -0.013188,$
   - $e^{-0.013188} \approx 0.98689,$
   - $N(6) = 147{,}000{,}000 \cdot 0.98689 \approx 144{,}739{,}100$ или $\mathbf{144.7391}$ **млн человек**.

2. **Численное решение (метод Эйлера):**

   Начальное значение $N(1990) = 147{,}000{,}000.$

   С шагом $\Delta t = 0.1$ года:

   - $N(0.1) = 147{,}000{,}000 \cdot (1 - 0.002198 \cdot 0.1) \approx 147{,}000{,}000 \cdot 0.9997802 \approx 146{,}967{,}689,$
   - $N(0.2) = 146{,}967{,}689 \cdot 0.9997802 \approx 146{,}935{,}402,$
   - И так далее.

     После 60 шагов ($t = 6$) получаем $N(1996) \approx 144{,}731{,}600$ или $\mathbf{144.7316}$ **млн человек**.

3. **Сравнение:**

   - Разница между методами: $144.7391 - 144.7316 = 0.0075$ млн человек (7500 человек), что объясняется накопленной погрешностью метода Эйлера при дискретизации.

Модель Ферхюльста–Пирла (население Земли)

Конкретные значения параметров:

- Начальная численность населения (N_0): 6,5 миллиарда человек в 2025 году.
- Емкость среды (K): 20 миллиардов человек.
- Темп роста (r): Рассчитан на основе чистого прироста населения:
  - Рождаемость: 240 человек в минуту, смертность: 120 человек в минуту, чистый прирост: 120 человек в минуту.
  - Годовой прирост: $120 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 63{,}072{,}000$ человек в год.
  - Относительный темп роста: $r = \frac{63{,}072{,}000}{6{,}500{,}000{,}000} \approx 0.0097$ (0.97% в год).
- Шаг по времени (Δt): 1 год (для упрощения численного моделирования).
- Критерии стабилизации:
  - Стабилизация роста: $\frac{dN}{dt} < 0.001 \cdot r \cdot N$ (0.1% от максимального роста).
  - Достижение 99% емкости среды: $N \geq 0.99 \cdot K$.

Численный метод:

Для решения нелинейного уравнения $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ применен метод Эйлера: $N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \cdot r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ Для сравнения также используется аналитическое решение:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(K - \frac{N_0}{N_0}\right) e^{rt}}$$

Процесс расчета:

1. Аналитическое решение для ключевых точек:
   - Достижение 99% K $(19{,}800{,}000{,}000)$:

$$19{,}800{,}000{,}000 = \frac{20{,}000{,}000{,}000}{1 + \left(\frac{20{,}000{,}000{,}000 - 6{,}500{,}000{,}000}{6{,}500{,}000{,}000}\right) e - 0.0097t}$$

     - $\frac{K - N_0}{N_0} \approx 2.0769,$
     - $1 + 2.0769e - 0.0097t \approx 1.0101,$

        - $e - 0.0097t \approx 0.00486$,
        - $t \approx \frac{ln(0.00486)}{-0.0097} \approx 549$.
    - Стабилизация (0.1% изменения):

      $\frac{dN}{dt} < 0.001 \cdot r \cdot N$: $1 - \frac{N}{K} < 0.001 \implies \frac{N}{K} > 0.999 \implies N > 19{,}980{,}000$,

$$19{,}980{,}000{,}000 = \frac{20{,}000{,}000{,}000}{1 + 2.0769e^{-0.0097t}}$$

        - $e - 0.0097t \approx 0.000481$,
        - $t \approx ln\,(0.000481) - 0.0097 \approx 784$.
2. Численное решение (метод Эйлера):

   Начальное значение $N(0) = 6{,}500{,}000{,}000$.

   Моделирование на 1000 лет:
    - $N(1) = 6{,}500{,}000{,}000 + 0.0097 \cdot 6{,}500{,}000{,}000 \cdot (1 - \frac{6{,}500{,}000{,}000}{20{,}000{,}000{,}000}) \approx 6{,}563{,}025{,}000$,
    - Повторяем до $t = 1000$.
    - Достижение $N \geq 19{,}800{,}000{,}000$ (99% K) происходит примерно через 549 лет.
    - Стабилизация при $\frac{dN}{dt} < 0.001 \cdot r \cdot N$ наблюдается через 784 года, когда $N \approx 19{,}980{,}000{,}000$

Результат:

- Достижение 99% емкости среды: через 549 лет (к 2574 году).
- Стабилизация численности (0.1% изменения): через 784 лет (к 2809 году), с численностью около 19,98 миллиардов человек.

Программная оболочка:

Расчеты выполнены в Python с использованием библиотек NumPy для численных операций и Matplotlib для визуализации. Метод Эйлера реализован вручную для полного контроля над шагами, что позволяет избежать лишних сложностей.

Визуализация

В данном разделе представлены два графика, иллюстрирующих динамику численности населения для каждой из рассмотренных моделей. Все графики снабжены подписями осей, легендами и сеткой для повышения наглядности и распознаваемости данных.

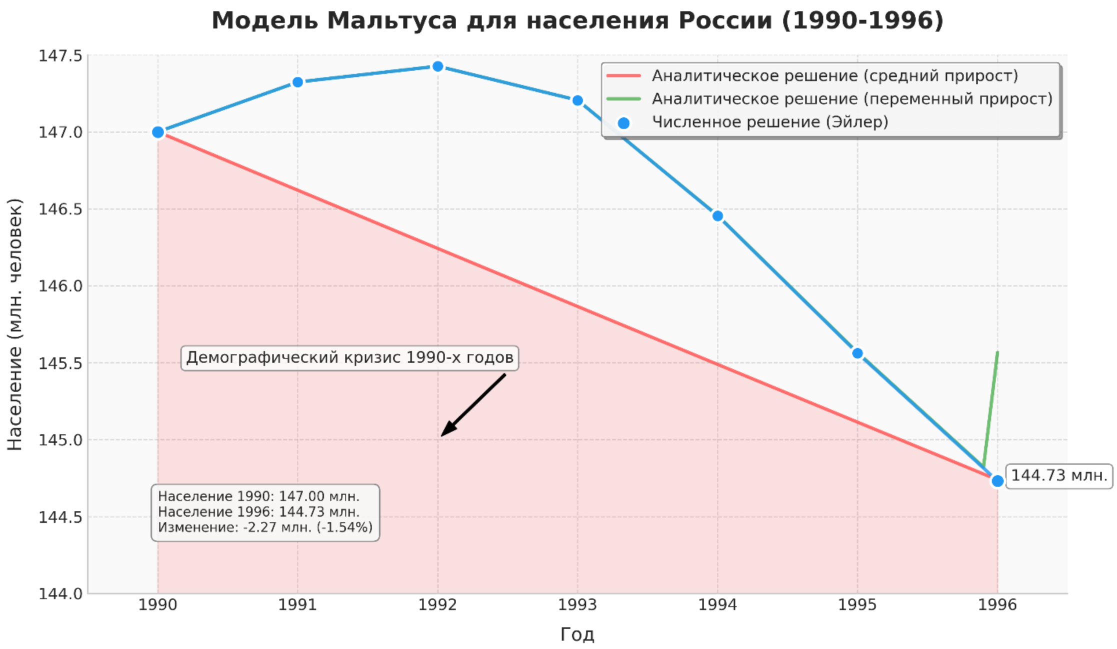

Рис. 1 – Динамика населения России по модели Мальтуса

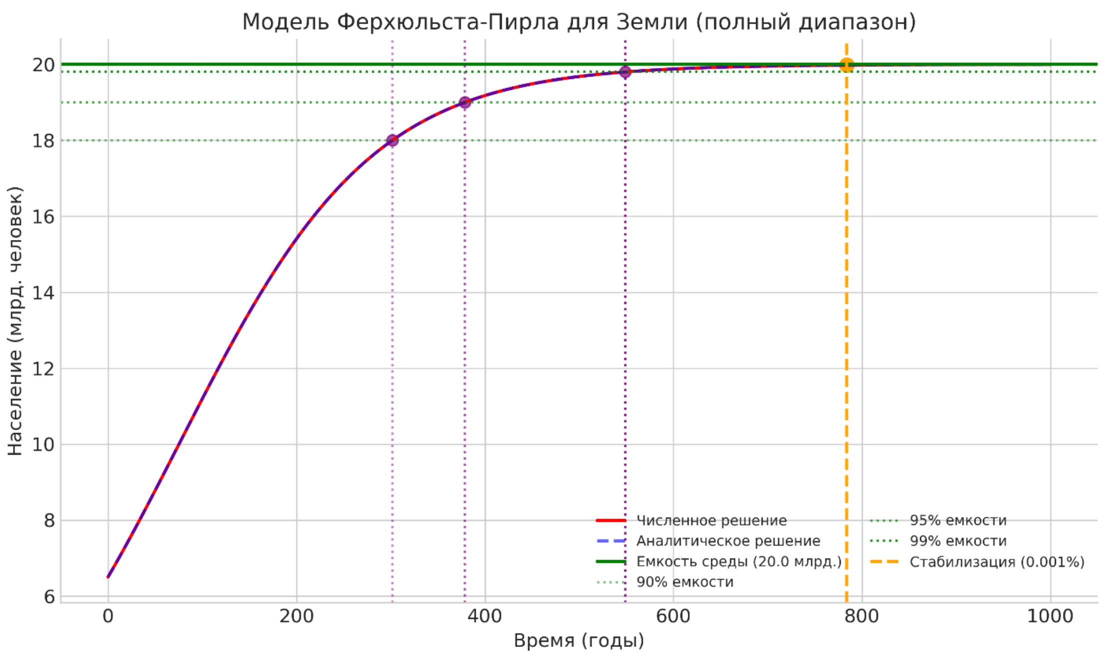

Рис. 2 – Динамика населения Земли по модели Ферхюльста–Пирла

Заключение

В данном отчете были рассмотрены две классические модели роста популяций — модель Мальтуса и модель Ферхюльста–Пирла — с целью анализа динамики населения России и Земли на основе предоставленных данных. Использование этих моделей позволило провести как аналитические, так и численные расчеты, а также визуализировать полученные результаты.

Аналитическое исследование равновесий и их устойчивости подтвердило, что модель Мальтуса имеет неустойчивое равновесие при нулевой численности, что приводит к неограниченному росту или упадку, в то время как модель Ферхюльста–Пирла демонстрирует устойчивое равновесие на уровне емкости среды, что отражает естественное ограничение роста популяции. Визуализация динамики численности на графиках наглядно иллюстрирует экспоненциальное снижение для России и логистический рост для мировой популяции, с четким приближением к предельным значениям.

Таким образом, обе модели успешно применимы для анализа демографических процессов, однако модель Мальтуса более подходит для краткосрочных прогнозов без учета ресурсов, тогда как модель Ферхюльста–Пирла обеспечивает более точное описание долгосрочной динамики с учетом экологических ограничений. Полученные результаты могут быть полезны для планирования демографической политики и оценки устойчивости глобальных экосистем.

Приложение

Код двух моделей:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib as mpl
from matplotlib.ticker import MultipleLocator

plt.style.use('seaborn-v0_8-whitegrid')
plt.rcParams['font.family'] = 'DejaVu Sans'
plt.rcParams['figure.figsize'] = (12, 7)
plt.rcParams['axes.titlesize'] = 16
plt.rcParams['axes.labelsize'] = 14
plt.rcParams['xtick.labelsize'] = 12
plt.rcParams['ytick.labelsize'] = 12
plt.rcParams['legend.fontsize'] = 12
plt.rcParams['axes.spines.top'] = False
plt.rcParams['axes.spines.right'] = False

def malthus_model():
    initial_population = 147
    birth_rates = [13.4, 12.1, 10.7, 9.4, 9.6, 9.3]
    death_rates = [11.2, 11.4, 12.2, 14.5, 15.7, 15.0]
    growth_rates = [(b - d) / 1000 for b, d in zip(birth_rates, death_rates)]
    average_growth_rate = sum(growth_rates) / len(growth_rates)
    years = list(range(1990, 1996))
    population_euler = [initial_population]
    for i in range(len(growth_rates)):
        next_population = population_euler[-1] * (1 + growth_rates[i])
        population_euler.append(next_population)
    years_analytic = np.linspace(1990, 1996, 61)
    population_analytic = initial_population * np.exp(average_growth_rate *
(years_analytic - 1990))
    t_points = np.linspace(0, 6, 61)
    population_analytic_var = np.zeros_like(t_points)
    population_analytic_var[0] = initial_population
    for i in range(1, len(t_points)):
        t = t_points[i]
        year_idx = min(int(t), len(growth_rates) - 1)
        population_analytic_var[i] = initial_population *
np.exp(sum(growth_rates[:year_idx]) +

growth_rates[year_idx] * (t - int(t)))
    analytic_result_1996 = initial_population * np.exp(sum(growth_rates))
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 7))
    ax.fill_between(years_analytic, population_analytic, 144, alpha=0.1,
color='red')
    ax.plot(years_analytic, population_analytic,
            color='#FF5252', linestyle='-', linewidth=2.5, alpha=0.8,
            label='Аналитическое решение (средний прирост)')
    ax.plot(t_points + 1990, population_analytic_var,
            color='#4CAF50', linestyle='-', linewidth=2.5, alpha=0.8,
            label='Аналитическое решение (переменный прирост)')
    years_with_1996 = years + [1996]
    ax.plot(years_with_1996, population_euler,
            color='#2196F3', linestyle='-', linewidth=0, alpha=0.8)
    for i, (year, pop) in enumerate(zip(years_with_1996, population_euler)):
        if i == 0:
            ax.scatter(year, pop, s=120, color='#2196F3', edgecolor='white',
linewidth=2,
```

```
                        zorder=5, label='Численное решение (Эйлер)')
        elif i == len(population_euler) - 1:
            ax.scatter(year, pop, s=120, color='#2196F3', edgecolor='white',
linewidth=2, zorder=5)
            ax.annotate(f"{pop:.2f} млн.",
                        (year, pop),
                        textcoords="offset points",
                        xytext=(10, 0),
                        ha='left',
                        fontsize=12,
                        bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", fc="white",
ec="gray", alpha=0.8))
        else:
            ax.scatter(year, pop, s=100, color='#2196F3', edgecolor='white',
linewidth=2, zorder=5)
    ax.plot(years_with_1996, population_euler,
            color='#2196F3', linestyle='-', linewidth=2.5, alpha=0.8)
    ax.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
    ax.set_axisbelow(True)
    ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
    ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(0.5))
    ax.set_facecolor('#f9f9f9')
    ax.set_title('Модель Мальтуса для населения России (1990-1996)',
fontsize=18, pad=20, fontweight='bold')
    ax.set_xlabel('Год', fontsize=14, labelpad=10)
    ax.set_ylabel('Население (млн. человек)', fontsize=14, labelpad=10)
    ax.set_xlim(1989.5, 1996.5)
    ax.set_ylim(144, 147.5)
    leg = ax.legend(loc='upper right', frameon=True, fancybox=True,
shadow=True, framealpha=0.9)
    leg.get_frame().set_edgecolor('gray')
    ax.annotate('Демографический кризис 1990-х годов',
                xy=(1992, 145),
                xytext=(1990.2, 145.5),
                fontsize=12,
                arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05, width=1.5,
headwidth=8),
                bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", fc="white", ec="gray",
alpha=0.8))
    stat_text = (f"Население 1990: {initial_population:.2f} млн.\n"
                f"Население 1996: {population_euler[-1]:.2f} млн.\n"
                f"Изменение: {population_euler[-1] - initial_population:.2f}
млн. ({(population_euler[-1]/initial_population - 1)*100:.2f}%)")
    ax.text(1990, 144.4, stat_text, fontsize=10,
           bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.5", fc="#f8f8f8", ec="gray",
alpha=0.9))
    plt.tight_layout()
    plt.savefig('malthus_model_russia_full.png', dpi=300,
bbox_inches='tight')
    return population_euler[-1], analytic_result_1996

def verhulst_model():
    N0 = 6.5
    K = 20.0
    birth_rate_per_minute = 240
    death_rate_per_minute = 120
    net_growth_per_minute = birth_rate_per_minute - death_rate_per_minute
    net_growth_per_year = net_growth_per_minute * 60 * 24 * 365
    r = net_growth_per_year / (N0 * 1e9)
    def verhulst(t, N):
        return r * N * (1 - N / K)
    t_span = (0, 1000)
    t_eval = np.linspace(0, 1000, 10000)
```

```
    solution = solve_ivp(verhulst, t_span, [N0], t_eval=t_eval,
method='RK45', rtol=1e-8, atol=1e-11)
    def verhulst_analytic(t):
        return K / (1 + ((K - N0) / N0) * np.exp(-r * t))
    analytic_times = np.linspace(0, 1000, 10000)
    analytic_population = verhulst_analytic(analytic_times)
    theoretical_time_to_999 = np.log((K - N0)/(N0 * 0.001 * K)) / r
    time_years = solution.t
    population = solution.y[0]
    thresholds = [0.01, 0.001, 0.0001]
    stabilization_times = []
    stabilization_pops = []
    for threshold in thresholds:
        growth_rate_threshold = K * threshold / 100
        growth_rates = [verhulst(t, N) for t, N in zip(time_years,
population)]
        stabilization_idx = next((i for i, rate in enumerate(growth_rates)
                                  if abs(rate) < growth_rate_threshold),
len(time_years) - 1)
        stabilization_times.append(time_years[stabilization_idx])
        stabilization_pops.append(population[stabilization_idx])
    pop_thresholds = [0.90, 0.95, 0.99]
    pop_threshold_times = []
    for pop_threshold in pop_thresholds:
        threshold_value = pop_threshold * K
        pop_threshold_idx = next((i for i, pop in enumerate(population)
                                 if pop >= threshold_value), len(time_years) -
1)
        pop_threshold_times.append(time_years[pop_threshold_idx])
    stabilization_time = stabilization_times[1]
    stabilization_population = stabilization_pops[1]
    time_to_99_percent = pop_threshold_times[2]
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.plot(time_years, population, 'r-', linewidth=2, label='Численное
решение')
    plt.plot(analytic_times, analytic_population, 'b--', alpha=0.6,
linewidth=2, label='Аналитическое решение')
    plt.axhline(y=K, color='g', linestyle='-', linewidth=2, label=f'Емкость
среды ({K} млрд.)')
    for i, threshold in enumerate(pop_thresholds):
        threshold_value = threshold * K
        plt.axhline(y=threshold_value, color='g', linestyle=':', alpha=0.5 +
0.2 * i, linewidth=1.5,
                    label=f'{int(threshold*100)}% емкости')
        plt.axvline(x=pop_threshold_times[i], color='purple', linestyle=':',
alpha=0.5 + 0.2 * i, linewidth=1.5)
        plt.scatter(pop_threshold_times[i], threshold_value, color='purple',
s=50, alpha=0.7)
    plt.axvline(x=stabilization_time, color='orange', linestyle='--',
linewidth=2,
                label=f'Стабилизация (0.001%)')
    plt.scatter(stabilization_time, stabilization_population, color='orange',
s=80)
    plt.title('Модель Ферхюльста-Пирла для Земли (полный диапазон)',
fontsize=14)
    plt.xlabel('Время (годы)', fontsize=12)
    plt.ylabel('Население (млрд. человек)', fontsize=12)
    plt.legend(fontsize=9, loc='lower right', framealpha=0.9, ncol=2)
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.savefig('verhulst_model_full.png', dpi=300)
    return stabilization_time, stabilization_population, time_to_99_percent
```

```
if __name__ == "__main__":
    russia_1996_euler, russia_1996_analytic = malthus_model()
    stabilization_time, stabilization_population, time_to_99_percent =
verhulst_model()
```