$S(X)$ - множество всех подмножеств в множестве X

Топологическое пространство 1.1.1

Топологическое пространство

Пусть X - множество.

Множество T подмножеств в множестве X называется **топологией** на X, а пара (X, T) - топологическим пространством, если

1. $\emptyset, X \in T$
2. $\{U_i \in T | i \in J\}$, то $(U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n) \in T$
3. $\forall U_1, U_2 \in T$; $U_1 \cap U_2 \in T$

Свойства

$U \in T \equiv U - T$ - открытое подмножество X

$A \subset X$ - замкнутое $\iff X - A \in T$

Объединение

$A = \bigcup\limits_{i \in J} A_i \iff x \in A \iff \exists i_0 \in J : x \in A_{i_0}$

Пересечение

$x \in \cap A_i \iff \forall i \; x \in A_i$

Открытое множество

Множество, лежащее в топологии

Замкнутое множество

F замкнуто в (X, T)

$\exists U \in T : \; F = X \backslash U$

Замкнутое множество является дополнением к открытому

Примеры

№1

X - произвольное множество

$T_0 = \{\emptyset, X\}$

Тогда T_0 - топология на X

№2

$T_1 = S(X)$ - Топология на X

№3

$X = R \equiv$ множество всех вещественных чисел

Определим $T \subset S(R)$ так $U \in T_e \iff \forall x \in U, \exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon; x + \epsilon) \in U$

$U \subset R$; $U_i \in T_e$

$U = \underset{i \in J}{\cup} U_i$, $U \in T_e$

$x \in U \implies \exists i_0 \in T_e : x \in U_{i_0}$

$U = U_0 \cap U_1 \implies \exists \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 : (x - \epsilon_1; x + \epsilon_1) \in U_1, (x - \epsilon_2; x + \epsilon_2) \in U_2 \implies$

$\implies \epsilon = min(\epsilon_1, \epsilon_2), (x - \epsilon, x + \epsilon) \in U$

Утверждение 1

$a \in R \implies \{a\} \subset R$ - замкнутое и не открытое множество

Доказательство

Сначала докажем, что $\{a\}$ - замкнутое множество, т. е., что

$R - \{a\}$ - открытое множество

$R - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$

$\exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon; x + \epsilon) \subset (-\infty, a)$

Положим $\epsilon = |x - a|$

Тогда $(x - \epsilon; x + \epsilon) \subset (-\infty; a)$

$U \in T \iff \forall x \in U \exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon; x + \epsilon) \subset U$

Утверждение 2

Пересечения открытых множеств может не быть открытым

Доказательство

Докажем, что в точке пространства (R, T_e),

т. е. на вещественной прямой

$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$

$\{0\} \subset (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$

Метрические пространства 1.1.2

[Нормы векторов]

Метрика

$d : X \times X \to R$ - метрика, если

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
3. $d(x, y) \geq 0$

$d(x,y)=0 \iff x=y$
(X,d) - метрическое пространство

Примеры

№1

Эйлерова метрика
$d(x,y)=|x-y|$

№2

$X=R^n$
$x \in R^n \iff x=\left(x^1,\ldots,x^n\right)$
$y \in R^n, y=(y^1,\ldots,y^n)$
$x+y=(x^1+y^1,\ldots,x^n+y^n); \quad \alpha\cdot=(\alpha x^1,\ldots,\alpha x^n)$
$(x,y)=x^1y^1+\ldots+x^ny^n$
$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2}$

Теорема 1
Определим $d(x,y)=|x-y|$ в пространстве R^n и тогда $d: R^n \times R^n \to R$ - метрика
Доказательство
1. Симметричность
Очевидна
2. Не отрицательность
Через $d(x,y)=|x-y|=\sqrt{\ldots}=|y-x|=d(y,x)$
$|x-y|=0 \iff \sqrt{\ldots}=0 \iff x^i=y^i$
3. Неравенство $\triangle$
Имеется неравенство Коши-Бунковского-Шварца (КБШ)
$|(x,y)| \leq |x|\cdot|y|$
Поэтому, $d(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z| \leq |x-y|+|y-z|=d(x,y)+d(y,z)$

Определение шаров и сфер в метрическом пространстве 1.1.3

Замкнутый шар
(X,d) - метрическое пространство
$\overline{B}(a,r)=\{x \in X: d(x,a) \leq r\}$ - шар с границей, радиуса r с центром в точке a

Открытый шар
$B(a,r)=\{x \in X | d(x,a) < r\}$ - шар без границы, радиуса r с центром в точке a

Сфера

$S(a, r) = \{x \in X | d(x, a) = r\}$ - сфера радиуса r с центром в точке a

Теорема о метрической топологии (1.1.4)

Пусть (X, d) - метрическое пространство.

$T_d \subset S(X)$

$U \in T_d \iff \forall a \in U \exists \epsilon_a > 0: \ B(a, \epsilon_a) \subset U$. Тогда (X, T_d)- топологическое пространство

Доказательство

По (T_{d_2})

$U_i \in T_d, \ U = \bigcup\limits_{i \in J} U_i$

Если $a \in U$, то $\exists i_0 \in J; \ a \in U_{i_0}$

Так как $U_{i_0} \in T_d$, то $\exists \epsilon > 0$

$B(a, \epsilon) \subset U_{i_0} \to B(a, \epsilon) \subset U$

По (T_{d_3})

$U = U_1 \cap U_2$

Если $a \in U$, то $a \in U_1, \ a \in U_2$, так как $U_1, U_2 \in T_d$, то

$\exists \epsilon_1 > 0: \ B(a_1, \epsilon_1) \subset U_1, \ \exists \epsilon_2 > 0: \ B(a_1, \epsilon_2) \subset U_2.$

Положим, $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$

$B(a_{1,\epsilon}) \subset B(a_1, \epsilon_1) \subset U_1 \quad B(a_1 \epsilon) \subset U_2 \implies B(a_1, \epsilon) \subset U_1 \cap U_2 = U$

- [ ] Исправить индексы

Утверждение

Пусть (X, d) - метрическое пространство.

Тогда $B(a, r) \in T_d$, то есть является открытым множеством

$\overline{B}(a, r)$ - замкнутое множество, т. е. $X, \overline{B}(a, r) \in T_d$

$S(a, r)$ - замкнутое множество, т. е. $(X, S(a, r)) \in T_d$

- [ ] Уточнить, нет ли тут пересечения X и B

Определение окрестностей, внутренних точек, точек прикосновения 1.1.5

Внутренняя точка a множества A

Пусть (X, T) - топологические пространства.

$A \subset X$

$a \in A$

$a \iff \exists U \in T: \ a \in U \subseteq A$

A - окрестность точки a

Точка прикосновения a к B

$\iff$ любая окрестность точки a имеет $\neq \emptyset$ пересечение с B

Предельная точка a множества B

$\iff$ Любая окрестность точки a содержит хотя бы 1 точку множества B, отличную от a т. е. $(A \cap B) \backslash \{a\} \neq \emptyset$

Граничная точка A

$\iff$ a является точкой прикосновения одновременно множества A и $X \backslash A$

Пример

$A = [1, 2) \cup \{3\} \subset R \equiv X$ на R - метрическая топология

1. $a \in R$ - внутренняя точка $A \iff a \in (1, 2)$

2.

1. является предельной точкой A; $\epsilon \in A$

2. $\not\in A$, 2 - предельная точка множества A (и значит точка прикосновения)

3. $\in A$ - точка прикосновения, но не предельная точка

3. $a = \frac{3}{2}$ является предельной точкой, но является граничной точкой

$a = 1,\ a = 2,\ a = 3$ - граничные точки

Теорема 1.1.6

Пусть X, T - топологическое пространство.

$A \subset X$

1. 1
   1. x - точка прикосновения $A \iff x$ не является внутренней точкой множества $X \backslash A$
   2. x - внутренняя точка $A \iff x$ не является точкой прикосновения множества $X \backslash A$
2. 2
   1. Пересечение конечного числа окрестностей точки $a \in X$ является областью a
   2. Если A - окрестность $a \quad B \supset A$, то B - окрестность точки a
3. Если $U \in T$, то есть U - открытое множество, то U - окрестность каждой своей точки
4. Каждая точка прикосновения замкнутого множества $C \subset X$, принадлежит C

Доказательство

1. 1
   1. ($\implies$) Докажем, что $\forall U \in T$ не существует цепочки $x \in U \subset X \backslash A$
      В с. д., если $x \in U \subset X \backslash A$, то $x \in U$. $U \cap A = \emptyset$, так как U - окрестность точки
   2.
2. 2

    1. Пусть A_1, A_2 - окрестности точки a.
       Тогда $\exists U_1, U_2 \in T$:
       $a \in U_1 \subset A_1$ $a \in U_2 \subset A_2 \implies a \in U_1 \cap U_2 \subset A_1 \cap A_2$ и т. о. $U_1 \cap U_2 = U \in T$, а
       $a \in U \subset A_1 \cap A_2 \implies A_1 \cap A_2$ - окрестность a ??
    2. Так как A - окрестность, то $a \in U \subset A$
       U - ???? $\implies a \in U \subset A \subset B$, т. е. $a \in U \subset B \implies B$ - открытое
3. Если $U \in T$, то ?? $a \in U \subset U$???, что U - окрестность каждой своей точки a

- [ ] Дописать доказательство

Внутренность A 1.1.7
Пусть (X, T) - топологическое пространство $A \subset X$
Множество всех внутренних точек множества A.
Обозначается как $Int_x A$
Множество всех точек прикосновения A называется замыканием A и обозначается как $Cl_X A$

Теорема 1.1.8
Пусть (X, T) - топологическое пространство
$A \subset X$
1. 1
1. x - точка прикосновения $A \iff x$ не является внутренней точкой $X \backslash A$
2. x - внутренняя точка $A \iff x$ не является точкой прикосновения $X \backslash A$
2. 2
1. Пересечение конечного числа окрестностей точки x является окрестностью точки x
2. Если A - окрестность точки x, $B \supset A$, то B - окрестность точки x
3. Если $U \in T$, то есть U - окрестность, то U является окрестностью каждой своей точки

Теорема 1.1.9
1. Замыкание множества $A \subset X$, где X - топологическое пространство, совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A и таким образом, замыкание $Cl_X A$ является замкнутым множеством
2. Внутренность $Int_X A$ множества A совпадает с объединением всех открытых подмножеств множества множества A и таким образом является открытым подмножеством A