1

Задание

Определить тип уравнения. Привести уравнение к каноническому виду.

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0$$

Решение

$$a = 1 \quad 2b = -4 \quad c = 3 \quad F = -2u_x + 6u_y$$

$$b^2 - ac = 1 > 0 \implies \text{гиперболический тип}$$

Характеристическое уравнение

$$dy^2 + 4dxdy + 3dx^2 = 0$$

$$dy = -2dx \pm dx$$

$$\implies \begin{cases} \xi = y + 3x = C_1 \\ \eta = y + x = C_2 \end{cases}$$

$$u(\xi, \eta)_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$$
$$u(\xi, \eta)_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y$$

$$u_x = 3u_\xi + u_\eta$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = 3(3u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 9u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Подставим и упростим

$$9u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 12u_{\xi\xi} - 16u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta} + 3u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta} + 4u_\eta = 0$$

$$-6u_{\xi\eta} + 4u_\eta = 0$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{2}{3}u_\eta$$

Ответ: Гиперболический тип; $u_{\xi\eta} = \dfrac{2}{3}u_\eta$

2

Задание

Найти решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ при заданных начальных условиях $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$.

$$u(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2} = \phi(x)$$
$$u_t(x, 0) = \sin x = \psi(x)$$

Решение

Воспользуемся формулой Даламбера

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi(x-at)+\phi(x+at)+\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz\right)$$

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin z\,dz=\cos z\,\Big|_{x-at}^{x+at}=\cos(x+at)-\cos(x-at)$$

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-at}{1+(x-at)^2}+\frac{x+at}{1+(x+at)^2}+\cos(x+at)-\cos(x-at)\right)$$

3

Задание

Используя метод разделения переменных, найти решение однородного волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0$ при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{gathered}u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=0\\ u_t(x,0)=1\end{gathered}$$

Решение

Будем искать решение в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$

$$XT''=a^2X''T \implies \frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

$$\begin{cases}X''+\lambda^2X=0\\ X(0)=0\\ X(l)=0\end{cases}$$

$$X_n(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)$$

$$\begin{cases}X_n(0)=0 \implies B=0\\ X_n(l)=A\sin(\lambda l)=0 \implies \lambda=\dfrac{\pi n}{l}\end{cases}$$

$$X_n(x)=A_n\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$T''+\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}T=0$$

$$T_n(t)=B_n\sin\frac{a\pi n t}{l}+C_n\cos\frac{a\pi n t}{l}$$

$$u_n(x,t)=\left(\alpha_n\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)+\beta_n\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)=\left(\alpha_n\frac{a\pi n}{l}\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)-\beta_n\frac{a\pi n}{l}\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=0 \implies \beta_n=0$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{a\pi n}{l}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=1$$

Домножим обе части на ортогональную функцию $\sin\left(\dfrac{\pi m}{l}x\right)$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{l}{2} & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)dx = -\frac{l}{\pi m}\left[\cos\left(\frac{\pi m}{l}x\right)\right]_0^l = \frac{l\,(1-\cos(\pi m))}{\pi m} = \frac{l\,(1-(-1)^m)}{\pi m}$$

$$\alpha_m \frac{l}{2}\frac{a\pi m}{l} = \frac{l\,(1-(-1)^m)}{\pi m}$$

$$\alpha_m = \frac{2l\,(1-(-1)^m)}{a(\pi m)^2}$$

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2l\,(1-(-1)^m)}{a(\pi m)^2} \sin\left(\frac{a\pi m}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$$

Ссылка на численную проверку решения

4

Задание

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0$ при:

$$\begin{gathered} f(x,t) = x + 2 \\ u_x(0,t) = 1 \quad u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x - 1 \end{gathered}$$

Решение

Будем искать решение в виде суммы двух $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$. Так, что бы

$$\begin{gathered} a^2 w'' + x + 2 = 0 \\ w'(0) = 1 \\ w(1) = 0 \end{gathered}$$

$$w(x) = -\frac{x^3}{6a^2} - \frac{x^2}{a^2} + C_1 x + C_2$$

$$w'(x) = -\frac{x^2}{2a^2} - \frac{2x}{a^2} + C_1$$

$$\begin{cases} w'(0) = C_1 = 1 \\ w(1) = -\dfrac{1}{6a^2} - \dfrac{1}{a^2} + 1 + C_2 = 0 \implies C_2 = \dfrac{7}{6a^2} - 1 \end{cases}$$

$$w(x) = -\frac{x^3}{6a^2} - \frac{x^2}{a^2} + x + \frac{7}{6a^2} - 1$$

Перейдем к задаче на v

$$x - 1 = u(x,0) = v(x,0) + w(x) \implies v(x,0) = x - 1 - w(x)$$

$$v(x,0) = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{7}{6a^2}$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,t) = 0 \quad v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = \dfrac{x^3}{6a^2} + \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{7}{6a^2} \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $v(x,t) = X(x)T(t)$

$$XT' = a^2 X'' T \implies \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda x) + B_n \cos(\lambda x)$$

$$X_n'(x) = \lambda A_n \cos(\lambda x) - \lambda B_n \sin(\lambda x)$$

$$\begin{cases} X_n'(0) = A_n = 0 \\ X_n(1) = B_n \cos(\lambda) = 0 \implies \lambda = \dfrac{(2n+1)\pi}{2} \end{cases}$$

$$X_n(x) = B_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right)$$

$$T' + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 T = 0$$

$$T_n(t) = C_n \exp\left(-\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2}\right)^2 t\right)$$

$$v_n(x,t) = \alpha_n \exp\left(-\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right)$$

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \exp\left(-\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right)$$

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right) = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{7}{6a^2}$$

Домножим обе части на $\cos\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2} x\right)$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2} x\right) dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & m = n \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^3}{6a^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{7}{6a^2}\right) \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2} x\right) dx = I$$

$$I = \frac{16 - 24(2m+1)\pi(-1)^m}{a^2(2m+1)^4\pi^4}$$

Из полученного имеем, что

$$\alpha_n = \frac{32 - 48(2m+1)\pi(-1)^m}{a^2(2m+1)^4\pi^4}$$

Ответ:

$$u(x,t) = -\frac{x^3}{6a^2} - \frac{x^2}{a^2} + x + \frac{7}{6a^2} - 1 +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{32-48(2m+1)\pi(-1)^m}{a^2(2m+1)^4\pi^4}\exp\left(-\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2}\right)^2 t\right)\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}x\right)$$

Ссылка на численную проверку решения

5

Задание

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ внутри круга $0 \le r \le a, 0 \le \phi \le 2\pi$, с граничным условием $u_r(a,\phi) = 4\sin^3\phi$

Решение

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = 0$$

Будем искать решение в виде $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$

$$\frac{1}{r}\Phi(rR')' + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \implies \frac{r(rR')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

$$\begin{cases}\Phi'' + \lambda\Phi = 0\\ \Phi(0) = \Phi(2\pi)\end{cases}$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \Phi_k(\phi) = A_k\cos k\phi + B_k\sin k\phi$$

$$r^2R'' + rR' - k^2R = 0$$

Ищем $R(r) = r^\mu$

$$\mu(\mu-1)r^\mu + \mu r^\mu - k^2r^\mu = 0$$

$$\mu^2 = k^2 \implies \mu = \pm k$$

Так как решение должно быть ограничено в круге

$$R(r) = r^k$$

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\left(A_k\cos k\phi + B_k\sin k\phi\right)$$

$$u_r(r,\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1}\left(A_k\cos k\phi + B_k\sin k\phi\right)$$

$$u_r(a,\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} ka^{k-1}\left(A_k\cos k\phi + B_k\sin k\phi\right) = 4\sin^3\phi = 3\sin\phi - \sin 3\phi$$

$$A_k = 0 \qquad \forall k > 0$$

$$B_1 = 3 \quad 3a^2B_3 = -1 \implies B_3 = -\frac{1}{3a^2}$$

$$B_k = 0 \quad \forall k \notin \{1,3\}$$

Ответ:

$$u(r,\phi) = A_0 + 3r\sin\phi - \frac{r^3}{3a^2}\sin 3\phi$$