№1

Условие

Постройте непрерывную биекцию $f : [0, 1) \to \underset{\text{окружность}}{S}^1$ не являющуюся гомеоморфизмом

Решение

Выкладки

Отображение гомеоморфно, если
1. f - биекция
2. f - непрерывно
3. f^{-1} - непрерывно

Отображение непрерывно тогда, когда прообраз любого открытого в Y множества открыт в X.

Отображение биективно, если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Решение

Для того, чтобы непрерывная биекция не была гомеоморфизмом, необходимо, чтобы f^{-1} не была непрерывной.
Для этого необходимо, чтобы $f^{-1}\left(f^{-1}\left(A | A \in T_X\right)\right) \notin T_Y$.

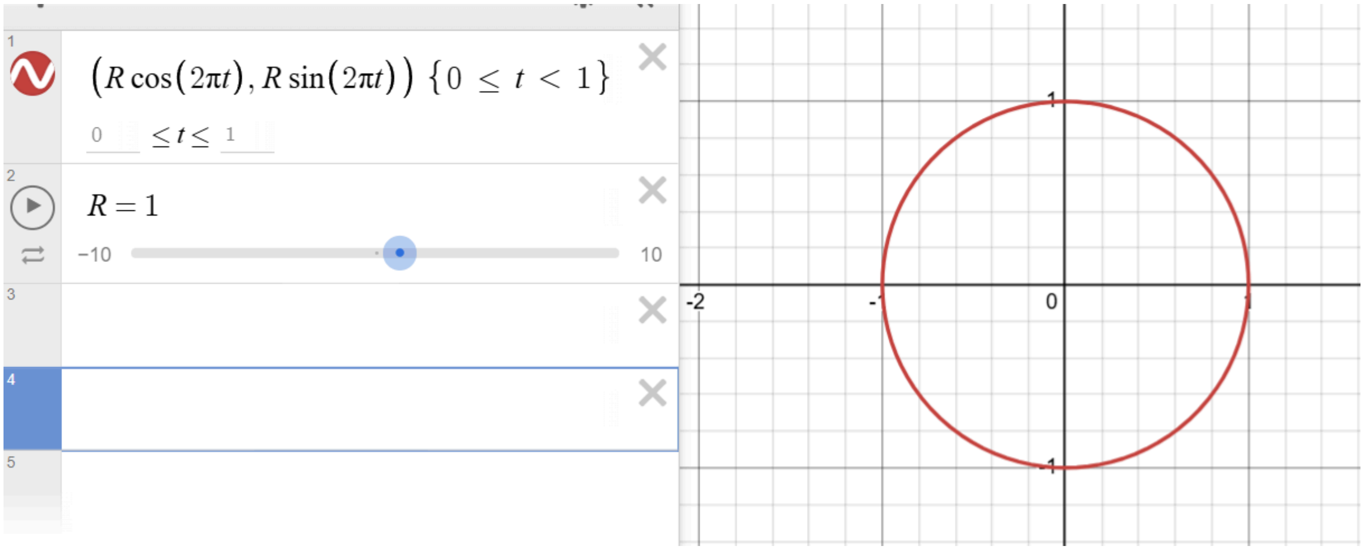
Зададим окружность $f = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t))$
Зададим функцию f^{-1}:

$$f^{-1} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ \frac{\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\right)}{2\pi} + \frac{1}{2} & x < 0 \text{ and } y > 0 \\ \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{2\pi} & x < 0 \text{ and } y \leq 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} & x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} & x = 0 \text{ and } y < 0 \end{cases}$$

Поскольку мы смогли найти для f

Таким образом, мы зададим окружность, где $x \in [0, 1)$ будет отвечать за угол поворота точки $\in [0, 2\pi]$, где 0 будет начинаться с точки $(-1, 0)$

Не умаляя общности, будем считать окружность единичной.



Дополнительно возьмём, что $T_{[0,1)}$ - индуцированная из канонической на $\mathbb{R}$, а T_S - Каноническая топология

Докажем, что f - непрерывна.
Возьмем некоторую дугу U, открытую на окружности.
Для любого элемента из U, найдётся условие из f^{-1}, которому будет соответствовать точка, принадлежащая $[0,1)$
$f^{-1}(U) \in T_{[0,1)}$
Таким образом, f - непрерывно.

Докажем, что f^{-1} - **не** непрерывно
Возьмём отрезок $[0,a) \subset T_{[0,1)}$
Он открыт на топологии $((k,a|k<0) \cap [0,1) = [0,a))$
Дуга с граничной точкой $f(0)$ не открыта, так как дугу можно представить как объединение открытой дуги и $f(0)$, а $f(0)$ не открыта на S по построению.
Следовательно, f^{-1} **не** непрерывно.

Что и требовалось доказать.

№2

Условие

Верно ли, что есть ограничение отображения $f: \ X \to Y$ на любом элементарном покрытии Γ непрерывно, то и само f - непрерывно?

1. $X = [0,2], \ \Gamma = \{[0,1], (1,2]\}$
2. $X = [0,2], \ \Gamma = \{[0,1], [1,2]\}$

3. $X = \mathbb{R},\ \Gamma = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$

Решение

Выкладки

Непрерывность $f : X \to Y$ на элементах покрытия - это непрерывность каждого $f|V$, где V - элемент покрытия, $f|V$ - ограничение f на V, то есть $f|V : V \to Y, f|V(x) = f(x)$ для любых x из V (подмножества X), а каждое V тут подпространство X, то есть на нем есть топология, индуцированная из X
Ограничение отображения - взятие в качестве области определения множество из покрытия

Решение

А дальше я не знаю, у меня лапки (идей нет)