

№1

Условие

Постройте непрерывную биекцию $f : [0, 1) \rightarrow S^1$ не являющуюся гомеоморфизмом окружность

Решение

Выкладки

Отображение гомеоморфно, если

1. f - биекция
2. f - непрерывно
3. f^{-1} - непрерывно

Отображение непрерывно тогда, когда прообраз любого открытого в Y множества открыт в X .

Отображение биективно, если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Решение

Для того, чтобы непрерывная биекция не была гомеоморфизмом, необходимо, чтобы f^{-1} не была непрерывной.

Для этого необходимо, чтобы $f^{-1}(f^{-1}(A) | A \in T_X) \not\subset T_Y$.

Зададим функцию $f = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t))$, где $t = x | x \in [0, 1)$

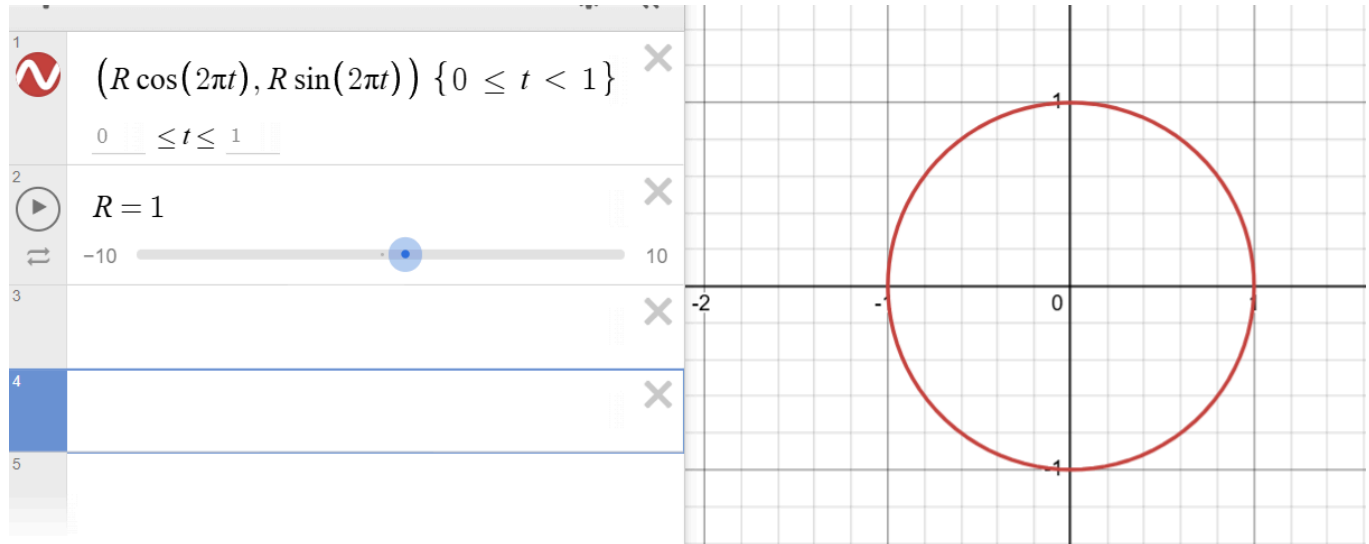
Зададим функцию f^{-1} :

$$f^{-1} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ \frac{(\arctan(\frac{y}{x}) + \pi)}{2\pi} + \frac{1}{2} & x < 0 \text{ and } y > 0 \\ \frac{\arctan(\frac{y}{x})}{2\pi} & x < 0 \text{ and } y \leq 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} & x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} & x = 0 \text{ and } y < 0 \end{cases}$$

Таким образом, мы зададим окружность, где $x \in [0, 1)$ будет отвечать за угол поворота точки и где 0 будет начинаться с точки $(-1, 0)$

Поскольку мы смогли найти для f обратную, функцию, то сама функция f является биективной.

Не умаляя общности, будем считать окружность единичной.



Дополнительно возьмём, что $T_{[0,1]}$ - индуцированная из канонической на \mathbb{R} , а T_S - Каноническая топология

Докажем, что f - непрерывна.

Возьмем некоторую дугу U , открытую на окружности.

Для любого элемента из U , найдётся условие из f^{-1} , которому будет соответствовать точка, принадлежащая $[0, 1)$

$$f^{-1}(U) \in T_{[0,1]}$$

Таким образом, f - непрерывно.

Докажем, что f^{-1} - **не** непрерывно

Возьмём отрезок $[0, a) \subset T_{[0,1]}$

Он открыт на топологии $((k, a | k < 0) \cap [0, 1) = [0, a))$

Дуга с граничной точкой $f(0)$ не открыта, так как дугу можно представить как объединение открытой дуги и $f(0)$, а $f(0)$ не открыта на S по построению.

Следовательно, f^{-1} **не** непрерывно.

Что и требовалось доказать.

№2

Условие

Верно ли, что есть ограничение отображения $f : X \rightarrow Y$ на любом элементарном покрытии Γ непрерывно, то и само f - непрерывно?

1. $X = [0, 2]$, $\Gamma = \{[0, 1], (1, 2]\}$
2. $X = [0, 2]$, $\Gamma = \{[0, 1], [1, 2]\}$

3. $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

Решение

Выкладки

Непрерывность $f : X \rightarrow Y$ на элементах покрытия - это непрерывность каждого $f|V$, где V - элемент покрытия, $f|V$ - ограничение f на V , то есть $f|V : V \rightarrow Y$, $f|V(x) = f(x)$ для любых x из V (подмножества X), а каждое V тут подпространство X , то есть на нем есть топология, индуцированная из X

Ограничение отображения - взятие в качестве области определения множество из покрытия

Решение

А дальше я не знаю, у меня лапки (идей нет)