Опр

Пусть (X, τ) — топ. пр-во,
$x \in X$ — точка

Мн-во $U_x \in \tau$ (открытое)
наз-ся окрестностью x,
если $x \in U_x$

Пусть $A \subseteq X$ — подмн-во (произвольное)

x назыв. внутренней для $A \Leftrightarrow \exists U_x$ — окр. т. x : $U_x \subseteq A$

x назыв. граничной для $A \Leftrightarrow \forall U_x$ — окр. т. x $U_x \cap A \neq \emptyset$, $U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

x наз. точкой прикосн. $A \Leftrightarrow \forall U_x : U_x \cap A \neq \emptyset$

Опр
interior

Внутренностью $\mathrm{Int}\,A$ мн-ва $A \subseteq X$ топ. пр-ва (X, τ) назыв. мн-во всех внутр. точек

Задача
$\mathrm{Int}\,A$ – это наибольшее открытое мн-во, содержащееся в A

Д-во:

$$\mathrm{Int}\,A = \bigcup_{\substack{x\in A\\ U_x\subseteq A}} U_x = \bigcup_{\substack{U\in\tau\\ U\subseteq A}} U$$

1) открыто

2) $\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\ U\in\tau}} U \subseteq A$ т.к. $\forall U \subseteq A$

3) $\exists\, C \subseteq A,\ C \in \tau$ и значит $C \subseteq \bigcup_{\substack{U\in\tau\\ U\subseteq A}} U$

Задача

$Cl\,A$ (closure) — наименьшее замкнутое мн-во, содержащее A

Опр

x назся предельной для A $\Leftrightarrow \forall U_x \quad U_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Д-во

$Cl\,A = \{x \in X \mid \forall U_x \quad U_x \cap A \neq \emptyset\}$

$\overset{?}{=}$ $\bigcap\limits_{\substack{F\text{-замк.}\\ A \subseteq F}} F$

1) $Cl\,A \subseteq \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F\\ F\text{-зам}}} F$

2) $\bigcap\limits_{\substack{F\text{-замк}\\ A \subseteq F}} F \subseteq Cl\,A$

1) $\exists x : \forall U_x \quad U_x \cap A \neq \emptyset$

Тогда $x \in F \supseteq A$ $\left(\forall F\text{-замк.}, \; A \subseteq F\right)$

т.к. $x \in A$

$\Rightarrow x \in \bigcap F$

2)

если $x \notin \bigcap F$, то $\exists F$-замк. : $F \supseteq A$ и $x \notin F \Rightarrow x \in U = X \setminus F \Rightarrow x$ ~~не~~ со своей окрестностью

Задача

X $\mathbb{R}$ с канон. топол.

1) $\operatorname{Int}[0,1) = (0,1)$ (0 — не внутр. т.к. $\forall (a,b) \ni 0$ $\overbrace{(a,b)\cap[0,1)}^{\ni 0} \neq \varnothing$)

$(0-\delta,\ 0+\varepsilon)$

2) $\operatorname{Int} \mathbb{Q} \overset{?}{=} \varnothing$ / т.к. $\nexists (a,b) \subseteq \mathbb{R}$: $\forall x \in (a,b)$ $x \in \mathbb{Q}$)

пусть (a,b) $b \notin \mathbb{Q}$

$\frac{\sqrt{2}(b-a)}{2} + a$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k : |\beta_k - b| < \varepsilon$

$b - \beta_k < \varepsilon$

$\sqrt{2} * a$ — ирр. если $a \in \mathbb{Q}$, $* \in \{+,-,\cdot\}$

$\beta_n \xrightarrow[\infty]{n}$, $\beta_n = b_0, b_1 \ldots b_n$, $\beta_n < b\ \forall n$

$b - \beta_k < b - a \Rightarrow \exists k : \beta_k - a > 0$

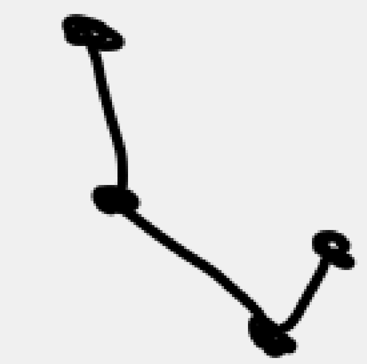
$([b_0, b_1, \ldots b_n])$

$\exists k : \beta_k - a > 0$, при этом $a < b$ $(b-a > 0)$

3) $\operatorname{Int} \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \varnothing$ (т.к. в любом $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $\exists$ рац. число $r \in (a,b)$)

4) $X = \{a, b, c, d\}$

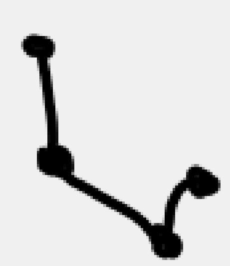
$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}\}$



$\operatorname{Int}\{a, b, d\} = \{a, b\}$

Д/З

1) Найти $\operatorname{Int}(0,1)$ в топ. Зарисского ($X = \mathbb{R}$, τ = всевозможн. дополн. конечных мн-в)

2) в $\mathbb{R}$, с $\tau_{канон.}$: $Cl[0,1]$, $Cl\,\mathbb{Q}$, $Cl(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $Cl\{a\}$ в 

3) Мн-во A замкн. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Fr} A \subseteq A$ граница – frontier