№1

Условие

Доказать, что открытые множества, введённые в доказательстве бесконечности $\mathbb{P}$ образуют топологию на $\mathbb{Z}$

$N_{a,b} = \{a + nb | n \in \mathbb{Z}, b > 0\}$

$U \in T \iff \begin{cases} U = \emptyset \\ \forall a \in U \ \exists b > 0 \in \mathbb{Z} : \ N_{a,b} \subseteq U \end{cases}$

Решение

Для того, чтобы множество было топологией, оно должно обладать следующими свойствами:

$\emptyset, \mathbb{Z} \in T$

По построению, U может являться $\emptyset$.

Также $\forall a \in U \ \exists b = 1 > 0 \in \mathbb{Z} : U \equiv \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \implies \mathbb{Z} \in T$

Если $\{U_i \in T | i \in J\}$, то $(U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n) \in T$

$U = \cup U_i \implies \forall a \in U \ \exists U_i : a \in U_i$

$U_i \in T \implies \exists b > 0 \in \mathbb{Z} : N_{a,b} \subset U_i \subset U \implies N_{a,b} \subset U$

Итого:

$\forall a \in U \ \exists b > 0 \in \mathbb{Z} : \ N_{a,b} \subseteq U \implies U \in T$

$\forall U_1, U_2 \in T ; U_1 \cap U_2 \in T$

$U = \cap U_i$

$\forall a = a_1 = a_2 \in U \ \exists b = \prod_{i=1}^{2} b_i > 0 \in \mathbb{Z} : \ N_{a,b} \subset U_i \implies N_{a,b} \subseteq U \implies U \in T$

$\{a + b \cdot k \cdot n\} \subset \{a + b \cdot n\}$

Ч. Т. Д

№2

Условие

Доказать, что набор $\mathfrak{S}$ открытых множеств является базой для
$T \iff \forall U \in T \quad \forall x \in U \quad \exists V \in \mathfrak{S}: \ x \in V \subseteq U$

Решение

Вспомним определение базы топологии B
Набор $B = \{V_i | i \in I\}$
$B = \{V_i\} : \forall U \in T \implies \exists I \subset \mathbb{N} : U = \cup V_i$

($\implies$) :
Докажем, что если $\mathfrak{S}$ - база, то выполняется условие
$\mathfrak{S}$ - база топологии $\implies \forall U \in T \quad U = \underset{i \in I}{\cup} V_i \quad V_i \in \mathfrak{S}$
$U = \cup V_i \implies \forall x \in U \ \exists V_i : x \in V_i$
$\implies \forall x \in U \ \exists V_i \in \mathfrak{S}: \ x \in V_i \subset U$

($\impliedby$) :
Из условия получаем, что $\exists I \subset \mathbb{N}: \ V_i \subset U, \quad i \in I$
$\implies \forall U \in T \ \exists I \subset \mathbb{N}: \quad U = \cup V_i$
Следовательно $\mathfrak{S} = \{V_i\}$ - база.