ИДЗ 1-4

ИДЗ 1 (1.13в)

Условие

$$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \quad y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \quad x, y \in X$$
$$k_0(x,y) : \forall k < k_0(x,y) \quad \xi_k = \eta_k \quad \xi_{k_0(x,y)} \neq \eta_{k_0(x,y)}$$
$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 + \dfrac{1}{k_0(x,y)} & x \neq y \end{cases}$$

Доказать, что

$$\rho(x,y) \neq \rho(y,z) \implies \rho(x,z) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$$

Доказательство

Покажем, что $x \neq z$:
Пусть $x = z \implies \rho(y,z) = \rho(y,x) \neq \rho(x,y)$ - получили противоречие.

Возможны случаи:

1. $x = y \quad y \neq z$
2. $x \neq y \quad y = z$
3. $x \neq y \neq z$

1

$$\max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\} = \max\{0, \rho(y,z)\} = \rho(y,z) = \rho(x,z)$$

2

$$\max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\} = \max\{\rho(x,y), 0\} = \rho(x,y) = \rho(x,z)$$

3

Пусть $k_0(x,y) = k_{xy} \quad k_0(x,z) = k_{xz} \quad k_0(yz) = k_{yz}$

$$x = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k_{xy}}, \ldots, \alpha_{k_{yz}}, \ldots, \alpha_{k_{xz}}, \ldots\}$$
$$y = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k_{xy}}, \ldots, \beta_{k_{yz}}, \ldots, \beta_{k_{xz}}, \ldots\}$$
$$z = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_{k_{xy}}, \ldots, \gamma_{k_{yz}}, \ldots, \gamma_{k_{xz}}, \ldots\}$$

$\rho(x,y) \neq \rho(y,z) \implies k_{xy} \neq k_{yz}$
Для определенности будем считать, что $k_{xy} < k_{yz}$ (в противном случае можно просто поменять местами x и z)

Получаем, что

$$\begin{cases} \forall k < k_{xy} \quad \alpha_k = \beta_k \quad \alpha_{k_{xy}} \neq \beta_{k_{xy}} \\ \forall k < k_{yz} \quad \beta_k = \gamma_k \end{cases}$$

$$k_{xy} < k_{yz} \implies \begin{cases} \forall k < k_{xy} \quad \alpha_k = \beta_k = \gamma_k \\ \gamma_{k_{xy}} = \beta_{k_{xy}} \neq \alpha_{k_{xy}} \end{cases} \implies k_{xy} = k_{xz}$$
$$\implies \rho(x,z) = \rho(x,y)$$

А так как $k_{xy} < k_{yz} \implies \rho(x,y) > \rho(y,z)$ имеет место:

$$\rho(x,z) = \rho(x,y) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$$

ч. т. д.

ИДЗ 2 (5.10)

Условие

$$f : R \to R - \text{дифференцируемая функция}$$
$$(R, \rho) - \text{метрическое пространство}$$
$$\rho(x,y) = |x - y|$$

Доказать, что

$$f - \text{сжатие} \iff \exists \alpha \in [0;1) : |f'(x)| \le \alpha \quad \forall x \in R$$

Доказательство

$(\implies)$
f - сжатие $\implies \exists \alpha \in [0;1) \quad \forall x, y \in X \quad \rho\left(f(x), f(y)\right) \le \alpha \cdot \rho(x,y)$
f - дифференцируема $\implies \forall x, y \in R \quad f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y) \quad \xi \in (x,y)$

$\implies \rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \le \alpha \cdot |x - y| \quad \xi \in (x,y)$
В силу произвольности выбора x и y получаем, что $|f'(x)| \le \alpha$

$(\impliedby)$
$\exists \alpha \in [0;1) : |f'(x)| \le \alpha \quad \forall x \in R$
f - дифференцируема $\implies \forall x, y \in R \quad f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y) \quad \xi \in (x,y)$
$\implies \exists \alpha \in [0;1) : \forall x, y \in R \quad \rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \le \alpha \cdot |x - y| = \alpha \cdot \rho(x,y)$
ч. т. д.

ИДЗ 3 (10.3в)

Условие

$$f : X \to R$$
$$f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(s) \cdot \cos(s) \cdot x(s)\, ds$$
$$\|x\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |x(s)|^p ds \right)^{\dfrac{1}{p}}$$
$$X = L_p\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 < p < +\infty$$

Вычислить

$$\|f\|$$

Решение

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{L_p}=1} \|f(x)\|_R = \sup_{\|x\|_{L_p}=1} |f(x)|$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\|f(x)\|_R = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(s) \cdot \cos(s) \cdot x(s)\ ds \right| \le \|x\|_{L^p} \cdot \| \sin^2(t) \cdot \cos(t) \|_{L^q} =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2p}{p-1}}(s) \cdot \cos^{\frac{p}{p-1}}(s) ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|x\|_{L^p}$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$

При этом, равенство имеет место для функций $x(t)$:

$$x(t) = C \cdot \left(\sin^2(t) \cdot \cos(t)\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \operatorname{sign}\left(\sin^2(t) \cdot \cos(t)\right) = C \cdot \sin^{\frac{2}{p-1}}(t) \cdot \cos(t)^{\frac{1}{p-1}}$$

Таким образом имеем, что $\|f\| = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2p}{p-1}}(s) \cdot \cos^{\frac{p}{p-1}}(s) ds \right)^{\frac{p-1}{p}}$.

ИДЗ 4 (8.26д)

Условие

$$L_2[0;1] = \left\{ f : \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

$$M \subset L_2[0;1] = \left\{ f \in L_2[0;1] : \mu\left(\left\{ t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] : f(t) \ne 0 \right\}\right) = 0 \right\}$$

Найти

$$M^{\perp} = \{ f \in L_2[0;1] : \forall g \in M \quad f \perp g \}$$

Решение

Зафиксируем произвольную $f(t) \in M$.
$g \perp f \iff (f, g) = 0$
$\mu\left(\{t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] : f(t) \ne 0\}\right) = 0 \implies \mu\left(\{t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] : f(t)g(t) \ne 0\}\right) = 0 \implies \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)dt = 0$
$(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(t)g(t)dt = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(t)g(t)dt$

В силу произвольности выбора f $(f,g)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)g(t)dt=0 \iff \mu\left(\left\{t\in\left[\frac{1}{2};1\right]:g(t)\neq 0\right\}\right)=0$

Таким образом получаем, что $M^{\perp}\subset L_2[0;1]=\left\{f\in L_2[0;1]:\mu\left(\left\{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]:f(t)\neq 0\right\}\right)=0\right\}$