

Задача

Доказать, что Σ является базой канонической топологии на \mathbb{R}^2 .

Каноническая топология на \mathbb{R}^2 это топология, базой которой служат открытые круги, т. е.

$$U^2 \in T^2 \iff \begin{cases} U^2 = \emptyset \\ \forall (x, y) \in U^2 \quad \exists V^2 : V^2 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\} : \quad V^2 \in U^2 \end{cases}$$

№1

Условие

Σ^2 - все открытые круги $B^2((x_0, y_0), \epsilon) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\}$

Решение

Для того, чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2 , необходимо, чтобы

$$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall x(x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists B^2((x_i, y_i), \epsilon) \in \Sigma^2 : \quad x \in B^2 \subseteq U^2$$

По условию, $\Sigma^2 = \{B_i^2 | i \in I\}$, где $B^2 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\}$, видим, что Σ^2 принадлежит топологии и является набором множеств открытых кругов.

Соответственно, для любого круга из U^2 сможем найти такой же круг из Σ^2 , который будет иметь в центре точку (x, y) и радиус ϵ .

№2

Условие

Σ^∞ - все открытые квадраты $k((x_0, y_0), \epsilon) = \{(x, y) | \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \epsilon\}$

Решение

Для того, чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2 , необходимо, чтобы

$$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall x(x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists k^2((x_i, y_i), \epsilon) : \quad x \in k^2 \subseteq U^2.$$

Необходимо, чтобы любая точка из любого круга $U^2((x_0, y_0), \epsilon_0)$ могла быть "окружена" квадратом $k^2((x_1, y_1), \epsilon_1)$.

Рассмотрим общий случай, когда нет гарантии, что круг имеет своим центром точку (x_1, y_1) .

Найдём такой квадрат, который будет иметь своим центром эту точку.

Пусть длина $\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. (Евклидова метрика).

Тогда для любой точки (x_1, y_1) можно выписать следующее уравнение:

$$\max(|x - x_1|, |y - y_1|) < \frac{(\epsilon_0 - \rho)}{\sqrt{2}}.$$

Тем самым, для любой точки из U^2 найдётся такой квадрат, который будет описывать эту точку.

Ч. Т. Д.

№3

Условие

Σ^1 - все открытые квадраты $k'((x_0)) = \{(x, y) | |x - x_0| + |y - y_0| < \epsilon\}$

Решение

Для того, чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2 , необходимо, чтобы

$$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall x(x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists k'^2((x_i, y_i), \epsilon) : \quad x \in k'^2 \subseteq U^2.$$

Необходимо, чтобы любая точка из любого круга $U^2((x_0, y_0), \epsilon_0)$ могла быть "окружена" квадратом $k'^2((x_1, y_1), \epsilon_1)$.

Рассмотрим общий случай, когда нет гарантии, что круг имеет своим центром точку (x_1, y_1) .

Найдём такой квадрат, который будет иметь своим центром эту точку.

Пусть длина $\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. (Евклидова метрика).

Тогда для любой точки (x_1, y_1) можно выписать следующее уравнение:

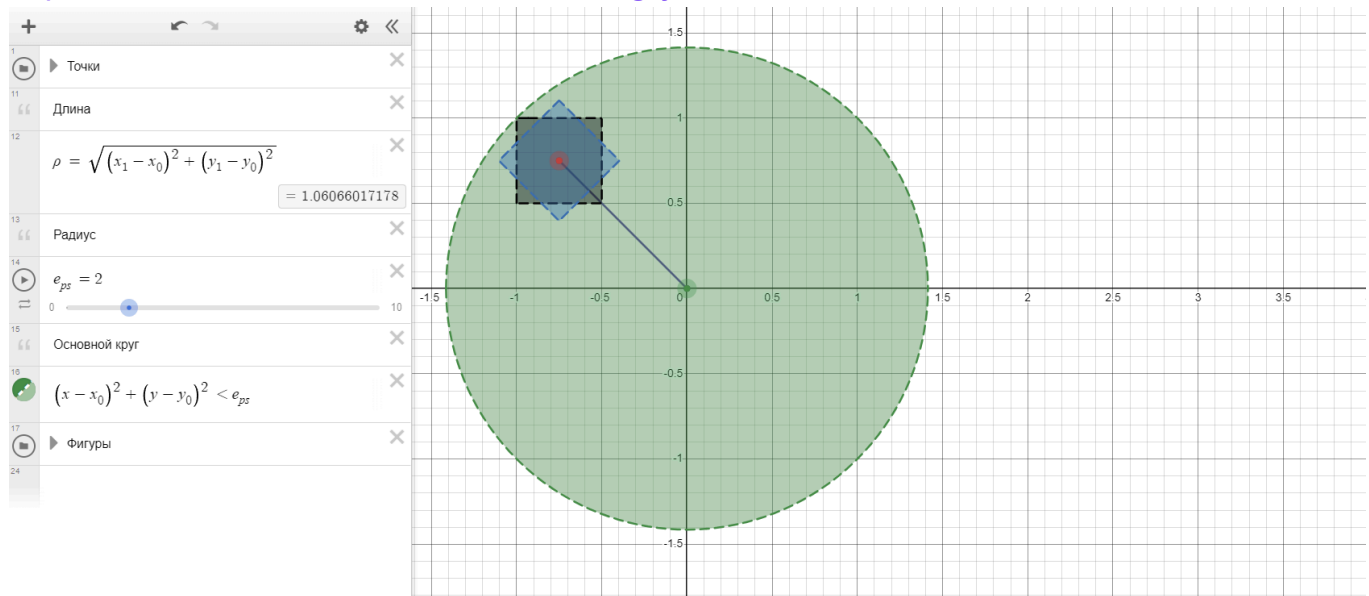
$$|x - x_1| + |y - y_1| < (\epsilon_0 - \rho).$$

Тем самым, для любой точки из U^2 найдётся такой квадрат, который будет описывать эту точку.

Ч. Т. Д.

Подтверждающий графический материал

<https://www.desmos.com/calculator/nh69sl5gvj>



Как мы видим, любую точку из множества U^2 топологии можно окружить любой из вышеописанных фигур.