ИДЗ 1-4

ИДЗ 1 (1.13в)

Условие

$$egin{align} x &= \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \quad y = \{\eta_k\}_{k=1}^\infty \quad x,y \in X \ k_0(x,y) : orall k < k_0(x,y) \quad \xi_k = \eta_k \quad \xi_{k_0(x,y)}
eq \eta_{k_0(x,y)} \
ho(x,y) &= egin{cases} 0 \quad x &= y \ 1 + \dfrac{1}{k_0(x,y)} \quad x
eq y \end{cases}$$

Доказать, что

$$ho(x,y)
eq
ho(y,z) \implies
ho(x,z) = \max\{
ho(x,y),
ho(y,z)\}$$

Доказательство

Покажем, что $x \neq z$:

Пусть $x=z \implies
ho(y,z)=
ho(y,x)
eq
ho(x,y)$ - получили противоречие.

Возможны случаи:

1.
$$x = y \quad y \neq z$$

2.
$$x \neq y$$
 $y = z$

3.
$$x \neq y \neq z$$

1

$$\max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\} = \max\{0, \rho(y,z)\} = \rho(y,z) = \rho(x,z)$$

2

$$\max\{\rho(x,y),\rho(y,z)\}=\max\{\rho(x,y),0\}=\rho(x,y)=\rho(x,z)$$

3

Пусть
$$k_0(x,y)=k_{xy}$$
 $k_0(x,z)=k_{xz}$ $k_0(yz)=k_{yz}$
$$x=\{\alpha_0,\dots,\alpha_{k_{xy}},\dots,\alpha_{k_{yz}},\dots,\alpha_{k_{xz}},\dots\}$$

$$y=\{\beta_0,\dots,\beta_{k_{xy}},\dots,\beta_{k_{yz}},\dots,\beta_{k_{xz}},\dots\}$$

$$z=\{\gamma_0,\dots,\gamma_{k_{xy}},\dots,\gamma_{k_{xz}},\dots,\gamma_{k_{xz}},\dots\}$$

$$ho(x,y)
eq
ho(y,z) \implies k_{xy}
eq k_{yz}$$

Для определенности будем считать, что $k_{xy} < k_{yz}$ (в противном случае можно просто поменять местами x и z)

Получаем, что

$$\begin{cases} \forall k < k_{xy} & \alpha_k = \beta_k & \alpha_{k_{xy}} \neq \beta_{k_{xy}} \\ \forall k < k_{yz} & \beta_k = \gamma_k \end{cases}$$

$$egin{aligned} k_{xy} < k_{yz} \implies egin{cases} orall k < k_{xy} & lpha_k = eta_k = \gamma_k \ \gamma_{k_{xy}} = eta_{k_{xy}}
eq lpha_{k_{xy}} = lpha_{k_{xy}} & \Longrightarrow k_{xy} = k_{xz} \end{aligned}$$
 $\Longrightarrow
ho(x,z) =
ho(x,y)$

А так как $k_{xy} < k_{yz} \implies
ho(x,y) >
ho(y,z)$ имеет место:

$$\rho(x,z) = \rho(x,y) = \max\{\rho(x,y),\rho(y,z)\}$$

Ч. Т. Д.

ИДЗ 2 (5.10)

Условие

$$f:R o R$$
 — дифференцируемая функция $(R,
ho)$ — метрическое пространство $ho(x,y)=|x-y|$

Доказать, что

$$f$$
 – сжатие $\iff \exists lpha \in [0;1): |f'(x)| \leq lpha \quad orall x \in R$

Доказательство

$$(\Longrightarrow)$$
 f - сжатие $\Longrightarrow\exists \alpha\in[0;1) \quad \forall x,y\in X \quad \rho\left(f(x),f(y)\right)\leq\alpha\cdot\rho(x,y)$ f - дифференцируема $\Longrightarrow\forall x,y\in R\quad f(x)-f(y)=f'(\xi)\cdot(x-y)\quad \xi\in(x,y)$ $\Longrightarrow\rho(f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\leq\alpha\cdot|x-y|\quad \xi\in(x,y)$ В силу произвольности выбора x и y получаем, что $|f'(x)|\leq\alpha$
$$(\Longleftrightarrow)$$
 $\exists\alpha\in[0;1):|f'(x)|\leq\alpha\quad \forall x\in R$ f - дифференцируема $\Longrightarrow\forall x,y\in R\quad f(x)-f(y)=f'(\xi)\cdot(x-y)\quad \xi\in(x,y)$ $\Longrightarrow\exists\alpha\in[0;1):\forall x,y\in R\quad \rho(f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\leq\alpha\cdot|x-y|=\alpha\cdot\rho(x,y)$

ИДЗ 3 (10.3в)

Условие

Ч. Т. Д.

$$f: X o K$$
 $f(x) = \int\limits_0^{rac{\pi}{2}} \sin^2(s) \cdot \cos(s) \cdot x(s) \ ds$ $\|x\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^{rac{\pi}{2}} |x(s)|^p ds
ight)^{rac{1}{p}}$ $X = L_p\left[0;rac{\pi}{2}
ight] \quad 1$

Решение

$$\|f\|=\sup_{\|x\|_{L_p}=1}\|f(x)\|_R=\sup_{\|x\|_{L_p}=1}|f(x)|$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\|f(x)\|_R = \left|\int\limits_0^{rac{\pi}{2}} \sin^2(s) \cdot \cos(s) \cdot x(s) \; ds
ight| \leq \|x\|_{L^p} \cdot \|\sin^2(t) \cdot \cos(t)\|_{L^q} = \ = \left(\int\limits_0^{rac{\pi}{2}} \sin^{rac{2p}{p-1}}(s) \cdot \cos^{rac{p}{p-1}}(s) ds
ight)^{rac{p-1}{p}} \cdot \|x\|_{L^p}$$

где
$$q=rac{p}{p-1}$$

При этом, равенство имеет место для функций x(t):

$$x(t) = C \cdot \left(\sin^2(t) \cdot \cos(t)\right)^{rac{1}{p-1}} \cdot \mathrm{sign}\left(\sin^2(t) \cdot \cos(t)
ight) = C \cdot \sin^{rac{2}{p-1}}(t) \cdot \cos(t)^{rac{1}{p-1}}$$

Таким образом имеем, что
$$\|f\|=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2p}{p-1}}(s)\cdot\cos^{\frac{p}{p-1}}(s)ds
ight)^{\frac{p-1}{p}}.$$

ИДЗ 4 (8.26д)

Условие

$$egin{align} L_2[0;1]&=\left\{f:\int\limits_0^1|f(t)|^2dt<\infty
ight\}\ &(f,g)=\int\limits_0^1f(t)g(t)dt\ &M\subset L_2[0;1]=\left\{f\in L_2[0;1]:\mu\left(\left\{t\in\left[0;rac{1}{2}
ight]:f(t)
eq 0
ight\}
ight)=0
ight\} \end{aligned}$$

Найти

$$M^\perp = \{f \in L_2[0;1] : orall g \in M \quad f \perp g\}$$

Решение

Зафиксируем произвольную $f(t) \in M.$

$$egin{aligned} g \perp f &\iff (f,g) = 0 \ \mu\left(\left\{t \in \left[0;rac{1}{2}
ight]: f(t)
eq 0
ight\}
ight) = 0 &\iff \mu\left(\left\{t \in \left[0;rac{1}{2}
ight]: f(t) g(t)
eq 0
ight\}
ight) = 0 &\iff \int\limits_0^{rac{1}{2}} f(t) g(t) dt = 0 \ (f,g) = \int\limits_0^1 f(t) g(t) dt = \int\limits_0^{rac{1}{2}} f(t) g(t) dt = \int\limits_{rac{1}{2}}^1 f(t) g(t) dt = \int\limits_{rac{1}{2}}^1 f(t) g(t) dt = \int\limits_0^1 f(t) g(t) dt = 0 \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора $f\left(f,g
ight)=\int\limits_{rac{1}{2}}^1f(t)g(t)dt=0\iff \mu\left(\left\{t\in\left[rac{1}{2};1
ight]:g(t)
eq 0
ight\}
ight)=0$ Таким образом получаем, что $M^\perp\subset L_2[0;1]=\left\{f\in L_2[0;1]:\mu\left(\left\{x\in\left[rac{1}{2};1
ight]:f(t)
eq 0
ight\}
ight)=0
ight\}$