

1 (1.27)

Условие

Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B(x_1, r_1) \subset B(x_2, r_2)$ следуют неравенства $r_1 \leq r_2$ и $\|x_1 - x_2\| \leq r_2 - r_1$

Решение

$$B(x_i, r_i) = \{x \in X : \rho(x, x_i) < r_i\}$$

$$B(x_1, r_1) = B_1$$

$$B(x_2, r_2) = B_2$$

$$r_1 \leq r_2$$

Предположим противное: $r_1 > r_2$

Тогда $\exists x_k : \rho(x_1, x_k) \leq r_1 \cap \rho(x_2, x_k) > r_2 \implies x_k \in B_1 \cap x_k \notin B_2$

Получили противоречие.

$$\|x_1 - x_2\| \leq r_2 - r_1$$

$$\text{Т. к. } B_1 \subset B_2 \implies x_1 \in B_2 \implies \rho(x_2, x_1) + r_1 \leq r_2 \implies \rho(x_2, x_1) \leq r_2 - r_1$$

Ч. Т. Д.

2 (5.176)

Условие

Доказать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

имеет единственное решение $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_p$ для любого $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$ если выполнено условие:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1 \text{ при } p = \infty$$

Решение

Введём оператор $A : l_\infty \rightarrow l_\infty$.

$$Ax = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Такая последовательность будет ограничена, а значит лежать в l_∞ , так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$$

Докажем, что A - сжимающий оператор.

$$\|A\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| = \alpha < 1$$

$\implies A$ - сжимающий оператор.

Полагая $y_0 = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $Bx = Ax + y_0$ запишем $Bx = x$

Так как $\rho(Bx, By) = \|Bx - By\| = \|Ax - Ay\| = \rho(Ax, Ay)$ и A - оператор сжатия, то B - тоже оператор сжатия.

\implies по теореме Банаха исходная СЛАУ имеет единственное решения для любого y .

Ч. Т. Д.

3 (10.9)

Условие

$$\text{Пусть } f(x) = \int_{-1}^1 \frac{x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds$$

Для каких значений p , $1 \leq p \leq \infty$, f является непрерывным функционалом в пространстве $L_p[-1, 1]$?

Найти норму f

Решение

Непрерывность функционала

Функционал непрерывен \iff он ограничен.

Воспользуемся неравенством Гёльдера.

$$k = x(s)$$

$$g = \frac{1}{\sqrt[3]{s}}$$

$$\left| \int_{-1}^1 k g ds \right| \leq \|k\|_p \cdot \|g\|_q$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$q = \frac{p}{p-1}$$

Для ограниченности функционала \iff чтобы g принадлежала $L_q[-1, 1]$

Исследуем $\|g\|_q$ на сходимость:

$$\|g\|_q = \left(\int_{-1}^1 |s|^{-\frac{q}{3}} ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

Интеграл $\int_{-1}^1 |s|^{-\frac{q}{3}} ds$ сходится при $-\frac{q}{3} > -1 \implies q < 3$

$$\implies \frac{p}{p-1} < 3 \implies p > \frac{3}{2}$$

Анализируем граничные значения:

$$p = \frac{3}{2}$$

$$q = 3$$

$$\|g\|_3 = \sqrt[3]{\int_{-1}^1 |s|^{-\frac{3}{3}} ds}. \text{ Интеграл расходится}$$

$$\implies g \notin L_3[-1, 1]$$

\implies функционал не ограничен

$$p = \infty$$

$$q = 1$$

$$\|g\|_1 = 2 \frac{s^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_0^1 = 3 < \infty$$

$$\implies g \in L_1[-1, 1]$$

\implies функционал ограничен

Итог:

Функционал непрерывен в пространстве $L_p[-1, 1]$ при $\frac{3}{2} < p \leq \infty$

Норма f

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in L_p \\ \|x\|_p \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_p} = \|g\|_{\frac{p-1}{p}}$$

При $\frac{3}{2} < p < \infty$

$$\|g\|_q = \left(\int_{-1}^1 |s|^{-\frac{q}{3}} ds \right)^{\frac{1}{q}} = \left(2 \int_0^1 s^{-\frac{q}{3}} ds \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{6}{3-q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

При подстановке $q = \frac{p}{p-1}$ получим:

$$\|g\|_q = \left(6 \frac{p-1}{2p-3} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

При $p = \infty$

$$\|g\|_1 = 3$$

Итог:

$$\|f\| = \begin{cases} \left(6 \frac{p-1}{2p-3} \right)^{\frac{p-1}{p}} & \frac{3}{2} < p < \infty \\ 3 & p = \infty \end{cases}$$

4 (8.35a)

Условие

Для $x \in L_2[-1, 1]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n, n = 0, 1, 2$, если $x(t) = e^t$

Решение

В $L_2[-1, 1]$ с $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ многочлен наилучшего приближения

$p_n^*(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ является проекцией $x(t)$ на множество P_n .

Выбирая базис $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ получаем систему уравнений: $\sum_{i=0}^n a_i (t^i, t^m) = (x, t^m)$ для $m = 0, 1, 2, \dots, n$

Найдём коэффициенты a_m

$$a_m = I_m = \int_{-1}^1 e^t t^m dt$$

$$I_0 = \int_{-1}^1 e^t dt$$

$$I_0 = e^1 - e^{-1}$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 te^t dt$$

$$I_1 = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ v = e^t & dv = e^t dt \end{matrix} \right| = te^t - \int_{-1}^1 e^t dt = (te^t - e^t) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{e}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 t^2 e^t dt$$

$$I_2 = \left| \begin{matrix} u = t^2 & du = 2t dt \\ v = e^t & dv = e^t dt \end{matrix} \right| = t^2 e^t - \int_{-1}^1 2te^t dt = [e^t (t^2 - 2t + 2)] \Big|_{-1}^1 = e - \frac{5}{e}$$

Нормируем a_m и находим p_n^*

$$n = 0$$

$$p_0^* = a_0$$

$$a_0(1, 1) = (x, 1)$$

$$a_0 \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dt = \int_{-1}^1 e^t \cdot 1 dt$$

$$a_0 \cdot 2 = e - \frac{1}{e}$$

$$a_0 = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$p_0^* = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$n = 1$$

$$p_1^* = a_0 + a_1 t$$

$$\begin{cases} a_0(1, 1) + a_1(t, 1) &= (x, 1) \\ a_0(1, t) + a_1(t, t) &= (x, t) \end{cases}$$

$$(1, 1) = \int_{-1}^1 1 \cdot dt = 2$$

$$(t, 1) = (1, t) = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

$$(t, t) = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$(x, 1) = I_0 = e - \frac{1}{e}$$

$$(x, t) = I_1 = \frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot 2 + a_1 \cdot 0 &= e - \frac{1}{e} \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot \frac{2}{3} &= \frac{2}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{e^2 - 1}{2e} \\ a_1 &= \frac{3}{e} \end{cases}$$

$$p_1^* = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e} t$$

$$n = 2$$

$$p_2^* = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\begin{cases} a_0(1, 1) + a_1(t, 1) + a_2(t^2, 1) &= (x, 1) \\ a_0(1, t) + a_1(t, t) + a_2(t^2, t) &= (x, t) \\ a_0(1, t^2) + a_1(t, t^2) + a_2(t^2, t^2) &= (x, t^2) \end{cases}$$

$$(t^2, 1) = (1, t^2) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$(t^2, t) = (t, t^2) = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$$

$$(t^2, t^2) = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$$

$$(x, t^2) = I_2 = e - \frac{5}{e}$$

По $n = 1$:

$$(1, 1) = 2, \quad (t, 1) = 0, \quad (t, t) = \frac{2}{3}, \quad (x, 1) = e - \frac{1}{e}, \quad (x, t) = \frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot 2 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \frac{2}{3} &= e - \frac{1}{e} \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot \frac{2}{3} + a_2 \cdot 0 &= \frac{2}{e} \\ a_0 \cdot \frac{2}{3} + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \frac{2}{5} &= e - \frac{5}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot \frac{2}{3} + a_2 \cdot 0 &= \frac{2}{e} \\ a_0 \cdot \frac{2}{3} + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \frac{2}{5} &= e - \frac{5}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot \frac{2}{3} + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \frac{2}{5} &= e - \frac{5}{e} \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{33 - 3e^2}{4e} \\ a_1 &= \frac{3}{e} \\ a_2 &= \frac{15e^2 - 105}{4e} \end{cases}$$

$$p_2^*(t) = \frac{33 - 3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2 - 105}{4e}t^2$$

Итог:

$$p_0^* = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$p_1^* = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e}t$$

$$p_2^*(t) = \frac{33 - 3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2 - 105}{4e}t^2$$