№1

Условие

Образ всюду плотного множества при сюръективном непрерывном отображении всюду плотное

Решение

$f: \ X \to Y$ - непрерывно и сюръективно.
Из этого следует, что $\forall U \in T_Y \neq \emptyset, \implies f^{-1}(U) \in T_X \neq \emptyset$
$f^{-1}(U) = K \quad f(A) = B$

Рассмотрим два свойства:

1. $K \cap A \neq \emptyset$, так как в противном случае $X \backslash K$ - замкнуто, и $A \in X \backslash K \implies Cl(A) \neq X$
2. $\forall x \in K \cap A \implies x \in A, \quad x \in K \implies f(x) \in B, \quad x \in f\left(K\right) \subset U \implies f(x) \in B \cap U$

Из свойств 1,2 получаем, что $B \cap U \neq \emptyset \implies B \not\subset Y \backslash U$ - замкнутое
Тогда имеем, что любое замкнутое на T_Y множество, кроме $Y = Y \backslash \emptyset$ не содержит B
Следовательно, единственное замкнутое множество, содержащее B есть Y
$\implies Cl\left(B\right) = Y \implies B = f(A)$ - всюду плотен

№2

Условие

Непрерывно ли в топологическом пространстве с индуцированной из канонической топологии на $\mathbb{R}$ отображение $f: \ [0,2] \to [0,2] \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 3 - x, & x \in [1,2] \end{cases}$

Решение

$f: \ X \to Y$ - непрерывно $\iff$ прообраз любого открытого в Y множества открыт.

Каноническая топология на $\mathbb{R}$ это топология, базой которой служат открытые круги, т. е.
$U \in T \iff \begin{cases} U = \emptyset \\ \forall x \in U \quad \exists V : V = \{x | (x - x_0) < \epsilon\} : \quad V \in U \end{cases}$

Предположим, что $x \in [0,1)$
Пусть $V_{f(x)}$ - окрестность $f(x)$ на Y.
Предположим, что часть окрестности $K \subset V_{f(x)}$ лежит в другой части отрезка $K \subset [1,2]$.

Также возьмём $V_{f(x)} \neq Y$.
Тогда, прообраз $f^{-1}\left(V_{f(x)} \backslash K\right) \subset U_x$, где U_x - окрестность x на X.
Однако $f^{-1}(K) \cup f^{-1}\left(V_{f(x)} \backslash K\right) \not\in T_X$ по построению (между $f^{-1}(K)$ и $f^{-1}\left(V_{f(x)} \backslash K\right)$ будет некоторое непустое множество, не лежащее ни в одном из вышеописанных множеств) (Вдобавок, $f^{-1}(K) \cap U_x \neq f^{-1}(K)$).

Следовательно раз прообраз $V_{f(x)}$ не открыт, то, по определению непрерывности, функция не непрерывна.

P. S. Можно было доказать с помощью примера, взяв (1.5, 2], но я решил расписать в общем случае
P. P. S. Ещё можно было пойти через лекционное определение ($f: X \to Y$ - непрерывные в точке $x_0 \in X \iff \forall V$ - окрестность точки $f(x_0)$ $\exists U$ - окрестность точки x_0 : $f(U) \subset V$)

№3

Условие

Может ли множество быть всюду плотным и нигде не плотным

Решение

Перефразируем условия:
Существует ли $A \in X: \ Cl(A) = X$ и $Cl\left(Int(X \backslash A)\right) = X$

Рассмотрим условия, которые должны выполняться:
$A \neq X$, так как $Cl(Int(X \backslash A)) = Cl(\emptyset) = \emptyset \neq X$
$A \neq \emptyset$, так как $Cl(A) = \emptyset \neq X$
A - не замкнуто, так как иначе $Cl(A) = A \neq X$
A - не открыто, так как иначе $Cl(Int(X \backslash A)) = X \backslash A$
P. S. 4-е условие было добавлено как теоретическое. Оно не нужно для получения противоречия, но мне было бы интересно узнать, действительно ли $Int(X \backslash A) = X \backslash A$?
$X \backslash A \not\in T$, так как иначе $Cl\left(Int(X \backslash A)\right) = Cl(X \backslash A) = X \backslash A$

Пусть $\exists A \in X: \ A = X, \ Cl\left(Int(X \backslash A)\right) = X$
$A \neq \emptyset \quad A \neq X \quad X \backslash A \not\in T$

Пусть $\exists U \in T \neq \emptyset: \ U \subset X \backslash A$, так как иначе $Int\left(X \backslash A\right) = \emptyset$ и $Cl(Int(X \backslash A)) = \emptyset \neq X$
$X \backslash A$ *- не пустое*
Но тогда $A \subset X \backslash U \implies Cl(A) \subset X \backslash U$ (так как $X \backslash U$ - замкнуто) $\implies Cl(A) \neq X$

Получили противоречие.

Значит не существует множества, удовлетворяющего условиям