Поповкин Артемий.
Б9122-02.03.01 СЦТ.
В-18.

Условия

1. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке, используя аналитические методы.
2. Найти минимальное значение функции, используя методы дихотомии, золотого сечения.
3. Провести сравнение по числу вычислений функции для достижения заданной точности ϵ.
4. Построить график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности ϵ (на одном графике построить зависимости для разных методов).

$$f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$[a, b] = [1, 1.5] \quad \epsilon = 0.05$$

Решение

1. Аналитический метод

$f'(x) = x^6 - 3x^2 + x - 1$
$f'(1) = -2 \qquad f'(1.5) = \frac{329}{64}$
Как видим, знак производной на концах отрезка изменился, поэтому функция имеет как минимум 1 экстремум.

Проведём исследование второй производной функции.
$f''(x) = 6x^5 - 6x + 1$
$f''(1) = 6 - 6 + 1 = 1 \implies x \in [1, 1.5] \to f''(x) \geq 1 > 0$
Таким образом, вторая производная всегда положительна на промежутке $[a, b]$, т. е. функция выпукла на отрезке.

Значит существует лишь одна точка экстремума на промежутке.
Соответственно, функция унимодальна, и поскольку вторая производная выпукла, точка экстремума она является точкой минимума, а максимумом является одна из границ.

Уравнение шестого порядка и выше не решаются аналитическим методом.
Поэтому точку минимума можно найти только численными методами.

Найдем максимальное значение функции на одной из границ отрезка:

$$f(1) = -\frac{19}{14}$$
$$f(1.5) = -\frac{1173}{896}$$

$f(1.5) > f(1)$.
$f(1.5) = -\frac{1173}{896}$ - max

2. Дихотомия и золотое сечение

2.1 Дихотомия

$\min = (1.242578125, -1.7357359604590117)$
Количество вызовов: 10

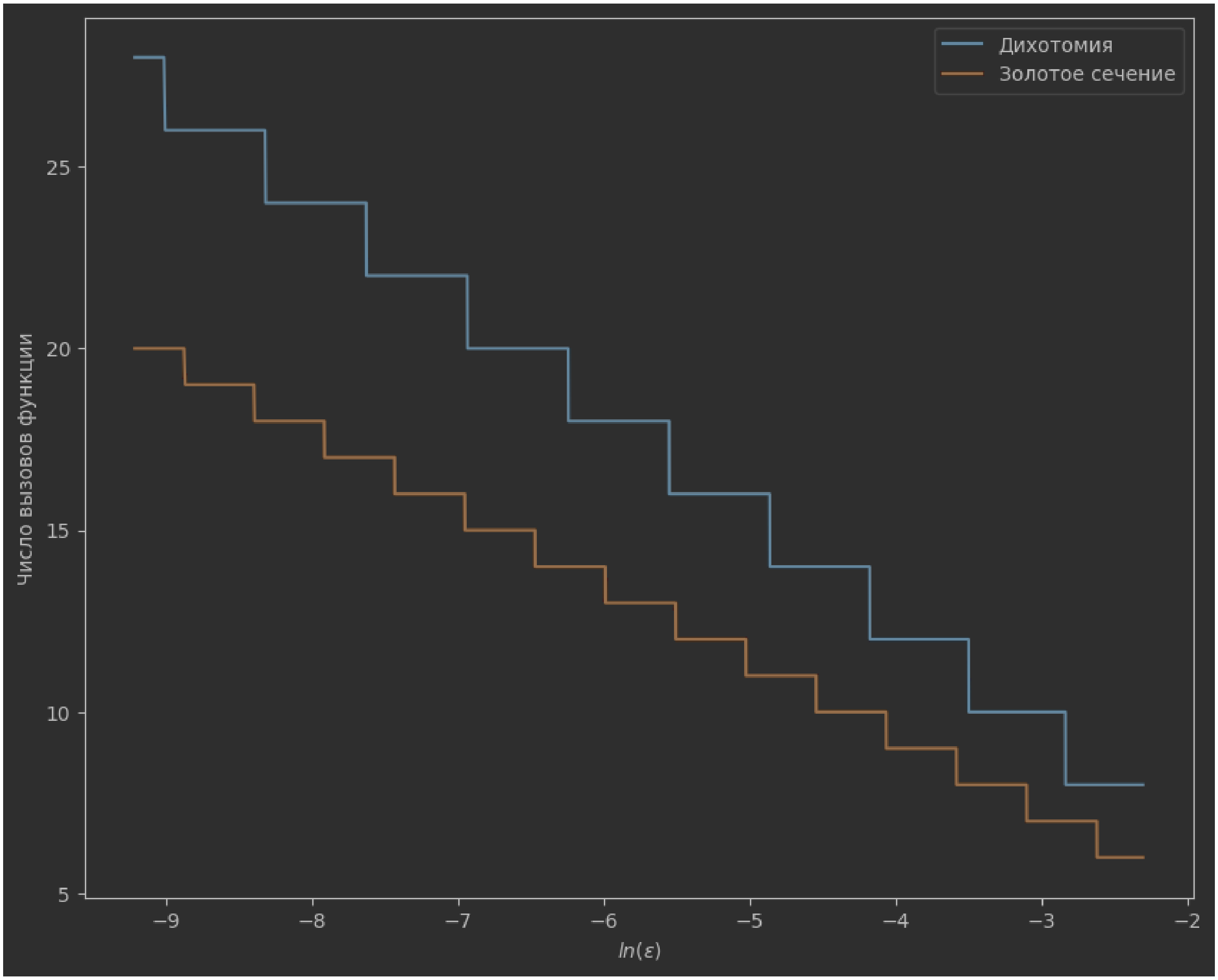
2.2 Золотое сечение

$\min = (1.2864745084375788, -1.754977753148566)$
Количество вызовов: 7

3. Сравнение по числу вычислений функции для достижения заданной точности ϵ

Для одинаково заданной точности ϵ, золотое сечение вызовет функцию меньшее число раз.
При достаточно большом ϵ, золотое сечение будет вызывать большее число раз, чем дихотомия.

4. График зависимости количества вычислений целевой функции от $\ln(\epsilon)$


Дихотомия
Золотое сечение
Число вызовов функции
5
10
15
20
25
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
$ln(\varepsilon)$