Условие

Вывести уравнение для соприкасающихся окружностей для кривой с произвольной параметризацией, в частности нужно получить уравнения для плоской кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Решение

Выкладки

$$k(t) = \frac{|r'(t), r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$
$$u(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$
$$n(t) = \frac{u'(t)}{|u'(t)|}$$

Решение

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$
$$r(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$$
$$r'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$
$$r''(t) = (-R\cos(t), -R\sin(t))$$
$$k(t) = \frac{\left|R^2\right|}{R^3} = \frac{1}{R}$$
$$R = \frac{1}{k(t)}$$

Найдём вектор нормали:

$$u(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$
$$n(t) = \frac{u'(t)}{|u'(t)|}$$
$$R = \frac{1}{k(t)} = \left|\frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}\right|$$

Уравнение соприкасающейся окружности равно сумме векторов кривой в точке (γ), отрицательного вектора нормали (так как она направлена в сторону от кривой), умноженного на радиус $(-Rn)$ и координату точки окружности с радиусом R (r). Следовательно, $R(t, \phi) = \gamma(t) - Rn(t) + r(\phi) = \gamma(t) - \frac{1}{k(t)}n(t) + \frac{1}{k(t)}(\cos(\phi), \sin(\phi))$