1. Формулировка задачи вариационного исчисления.

Рассмотрим *простейший* функционал

$$J(u) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \pi(x, u, u')dx$$

Пусть $u(x_0) = u_0 \quad u(x_1) = u_1$
Найдем условие, при котором функционал имеет экстремум.
Пусть $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$

$$u_\alpha = u(x) + \alpha\eta(x)$$

$$J(u_\alpha) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \pi(x, u + \alpha\eta, u' + \alpha\eta')dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_1} \pi(x, u, u')dx + \alpha \int\limits_{x_0}^{x_1} (\eta\pi_u + \eta'\pi_{u'})dx$$

$$\delta J(u) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (\eta\pi_u + \eta'\pi_{u'})dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \eta \cdot \left(\pi_u - \frac{d}{dx}\pi_{u'}\right)dx = 0$$

Берём функционал по минимуму (здесь и в дальнейшем) (*просто поверьте на слово и не задавайте вопросов про экстремум* 👾).

$$J(u) = J_{\min} \iff \delta J(u) = 0 \iff \pi_u - \frac{d}{dx}\pi_{u'} = 0 \ \ (\text{т. к.}\, \forall\eta(x))$$

2. Уравнение Эйлера.

Уравнение, получающееся при сведении задачи минимизации функционала к дифференциальной

$$\pi_u - \frac{d}{dx}\pi_{u'} = 0$$

Двумерный случай

$$\pi_u - \frac{\partial}{\partial x}\pi_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\pi_{u_y} = 0$$

Для функционала $J = \iint\limits_D \pi(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$

3. Первая, вторая краевые задачи.

$$J(u)=\int\limits_a^b\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2+ku^2-2fu\right)dx$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+ku=f$$

$$u_a=u_b=0$$

$$J(u)=\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right)dxdy$$

$$\Delta u=-f$$

$$u|_{\Gamma}=0$$

4. Эквивалентность задач вариационного исчисления и нахождения решения операторного уравнения $Lu=f$ (доказательство).

$A:\Phi(A)\to H$ - положительный и самосопряженный оператор
$Cl\,\Phi(A)=H$
$f\in H$

$$Lu=f \iff J(u)=(Lu,u)-2(f,u)\to\min$$

$(\implies)$
$Lu_0=f$
$u_0\overset{?}{-}\min$
$v_\alpha=u_0+\alpha\eta\quad \eta\in H$
$J(v_\alpha)=(L(u_0+\alpha\eta),u_0+\alpha\eta)-2(f,u_0+\alpha\eta)=\ldots=J(u_0)+\alpha^2(L\eta,\eta)\geq J(u_0)$
чтд

$(\impliedby)$
$\inf J(u)=J(u_0)\implies J(u_0)\leq J(u_0+\alpha\eta)$
$\implies 2\alpha(Lu_0-f,\eta)+\alpha^2(L\eta,\eta)\geq 0$
$\implies \forall\eta\in H\quad (Lu_0-f,\eta)=0\implies Lu_0=f$
чтд

5. Одномерное пространство Соболева, норма в этом пространстве.

$$\overset{0}{W}{}_2^1[a,b]=\left\{u(x):u(a)=u(b)=0\quad \int\limits_a^b(u'(t))^2dt<\infty\right\}$$

$$\|u\|_W = \left(\int\limits_a^b \left(u^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

6. Двумерное пространство Соболева, норма в этом пространстве.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ - функции, с суммируемыми в квадрате производными в области Ω и равными нулю на ее границе

$$\|u\|_W = \left(\iint\limits_{\Omega} \left(u^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right) dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

7. Формулировка метода Ритца.

Цель - найти функцию $u \in H_A$, доставляющую экстремум функционалу

$$J(u) = (Au, u) - 2(f, u)$$

Для этого построим минимизирующую последовательность $u_n : \lim\limits_{n \to \infty} J(u_n) = \inf J(u)$

Классическая формулировка

Выберем последовательность ϕ_i, удовлетворяющую следующим правилам:

1. $\forall \phi_i \in H_A$
2. $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ - линейно независимы $\forall n$
3. $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ - полна в H_A

   Тогда $u_n = \sum\limits_{i=1}^n a_i \cdot \phi_i$

Обобщенная формулировка

Выберем полную последовательность $V_i \subset H_A$ конченых подпространств энергетического пространства.

Пусть $\{\phi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ - базис V_n. Тогда $\forall u_n \in V_n \quad u_n = \sum\limits_{i=1}^n a_i \cdot \phi_i^{(n)}$

Общее замечание

a_i подбираются из условия минимума функционала.

Остальное см. ниже

8. Система Ритца, свойства её матрицы.

Из обобщенной формулировки метода Ритца имеем $\forall u_n \in V_n \quad u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \cdot \phi_i^{(n)}$

Подставляя в наш функционал получаем

$$J(u_n) = \sum_{i,p=1}^{n} \left(A\phi_i^{(n)}, \phi_p^{(n)}\right) a_i^{(n)} a_p^{(n)} - 2\sum_{p=1}^{n} \left(\phi_p^{(n)}, f\right) \cdot a_p^{(n)}$$

- Преобразования попущены, кому надо может подставить и проверить 👾

Так как $a_i^{(n)}$ выбираются из условия минимума имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_i^{(n)}} = \sum_{p=1}^{n} \left(A\phi_p^{(n)}, \phi_i^{(n)}\right) a_p^{(n)} - \left(\phi_i^{(n)}, f\right) = 0$$

Получили систему вида

$$\sum_{p=1}^{n} \left(A\phi_p^{(n)}, \phi_i^{(n)}\right) a_p^{(n)} = \left(\phi_i^{(n)}, f\right) \quad i = \overline{1, n}$$

- Эта система носит название системы Ритца

Свойства

1. Матрица системы симметрична
2. Матрица системы не вырождены
   aka матрица Грамма для системы линейно независимых функций
3. Больше я не нашел 👾

9. Формулировка метода Галеркина (галерке привет).

Запишем уравнение в слабой форме (форме Галеркина)

$$(Au, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_A$$

Выбираем последовательность конечных подпространств $\{V_n \subset H_A\}$ с базисами $\phi_i^{(n)}\ i = \overline{1, n}$

Приближение строится в форме $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \cdot \phi_i^{(n)}$

Теперь будем подбирать $a_i^{(n)}$ из условия ортогональности "невязки"
$(Au_n - f, \phi_i) = 0 \quad i = \overline{1, n}$

Замечание
При условии самосопряженности получаем систему Ритца

10. Свойства конечных элементов в МКЭ.

Дефолтное разбиение множествами ненулевой меры 👾

- На каждой подобласти V_n функции являются многочленами степени не выше заданной
- Должен существовать хотя бы один базис из финитных функций

11. МКЭ для решения первой краевой задачи. ~

Принципиальное отличие метода конечных элементов лежит в принципе построения базисных функций

Финитная функция
Функция, отличная от нуля лишь на малой подобласти

$$T_n(\overline{\Omega}) - \text{конечное разбиение}$$

Одномерный пример

$u \in \overset{0}{W}{}_2^1[a;b] \quad J(u) = \inf J(v)$
$J(v) = \int\limits_a^b (v')^2 dx - 2\int\limits_a^b fv dx$
$\Delta : x_i = a + ih \quad i = \overline{0, N}$
Возьмем линейные сплайны.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1+t & t \in [-1, 0] \\ 1-t & t \in [0, 1] \\ 0 & t \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$\phi_i^{(N-1)} = \phi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$V_{N-1}$$

$$u_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \phi_i^{(N-1)}(x)$$

$$v_i = u_{N-1}(x_i)$$

$$\left(A\phi_i^{(N-1)}, \phi_p^{(N-1)}\right) = \begin{cases} \frac{2}{h} & i = p \\ -\frac{1}{h} & i = p \pm 1 \\ 0 & |i - p| > 1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{h}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) = hg_i \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$g_i = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\phi_i^{(N-1)}(x)dx$$

12. Базис из функций с минимальными носителями в одномерном пространстве.

Отображение тент 😍

$$\phi_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\dfrac{x - x_{i+1}}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \quad x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

13. Условия коллокации, узлы коллокации, количество и их расположение.

$$L[y(x)] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \quad x \in [a, b]$$
$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

Введем сетку $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
Ищем решение в виде кубического сплайна $S(x) \in C^2[a, b]$ на Δ
Требуем, что бы сплайн удовлетворял дифференциальному уравнению в точках ξ_k (узлах коллокации):
$L[S(\xi_k)] = r(\xi_k) \quad k = \overline{0, N}$ - **условия коллокации**
Особенности расположения ξ_k

1. На одном подотрезке нельзя выбирать более трех узлов
2. У коэффициентов не должно быть особенностей в углах

14. Сплайн-разностная схема (условия коллокации, этапы поиска u_i, M_i).

$$L[y(x)] = y''(x) + q(x)y(x) = r(x) \quad x \in [a, b]$$
$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

Пусть $\xi_k = x_k \quad k = \overline{0, N}$
$S(x_i) = u_i \quad S''(x_i) = M_i$
Сплайн определяется формулой:

$$S(x) = u_i(1-t) + u_{i+1}t - \frac{h_i^2}{2} t(1-t)\left((2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right) \quad x \in [x_i; x_{i+1}]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Из условия коллокации имеем $M_i + q_i u_i = r_i$
Запишем уравнения для моментов сплайна

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad i = \overline{1, N}$$

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \quad \lambda_i = 1 - \mu_i$$

Выразив $M_i = r_i - q_i u_i$ и подставив в уравнение, получим систему относительно u_i
Добавим граничные условия получим замкнутую систему

Замечание

$$S'(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left((2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}\right)$$

15. Формулировка теоремы о погрешности решения.

Пусть

1. $p(x) \equiv 0$
2. $\beta_1 \leq 0 \quad \beta_2, \alpha_i \geq 0 \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0 \quad i = 1, 2$
3. $q(x) \leq q < 0$
4. $h_{i-1}^2 \max\left(|q_{i-1}|, |q_i|\right) \leq 6 \quad i = 1, \ldots, N$
5. $y(x) \in C^2 W_{\Delta,\infty}^4 [a, b]$

   Тогда

   $$\|S(x) - y(x)\|_C = O(\overline{h}^2)$$

   P.S. Расшифровка $y(x) \in C^2 W_{\Delta,\infty}^4 [a, b]$
   $y(x) \in C^2[a; b]$
   $y(x) \in W_\infty^4 [x_i; x_{i+1}] \quad i = \overline{0; N-1}$

P.P.S.
С днем конченых условий вас

16. Использование B-сплайнов в МСК.

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i(x)$$

$$B_i(x) = \frac{1}{6}\begin{cases} 0 \quad x < x_{i-2} \\ t^3 \quad x_{i-2} \le x < x_{i-1} \\ 1 + 3t + 3t^3(1-t) \quad x_{i-1} \le x < x_i \\ 1 + 3(1-t) + 3t(1-t)^2 \quad x_i \le x < x_{i+1} \\ (1-t)^3 \quad x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ 0 \quad x \ge x_{i+2} \end{cases}$$

Для замыкания системы добавляем к сетке по 3 дополнительные точки справа и слева

$$\sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i''(x) + p(x)\sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i'(x) + q(x)\sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i(x) = r(x)$$

$$\sum_{i=-1}^{N+1} b_i \left(B_i''(x) + p(x)B_i'(x) + q(x)B_i(x)\right) = r(x)$$

$$\sum_{i=-1}^{N+1} b_i L[B_i(x)] = r(x)$$

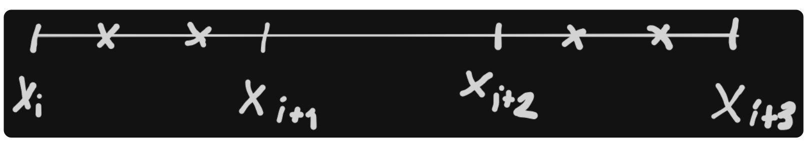
Пусть $x_i = \xi_i$

$$b_{i-1}L[B_{i-1}(x_i)] + b_i L[B_i(x_i)] + b_{i+1}L[B_{i+1}(x_i)] = r_i \quad i = \overline{0, N}$$

Добавляем граничные условия

$$\alpha_1 S(x_0) + b_1 S'(x_0) = \gamma_1$$

17. Схемы повышенной точности, основные свойства схем МСК. ~



$$\Delta : N = 2n + 1$$

$$\xi_{2i} = x_{2i} + t_{2i} \cdot h_{2i}$$

$$\xi_{2i+1} = x_{2i} + t_{2i+1} \cdot h_{2i}$$

$$0 \le t_{2i} \le t_{2i+1} \le 1$$

Пример для равномерной сетки

$$\xi_{2i} = x_{2i} + \nu h$$

$$\xi_{2i+1} = x_{2i} - \nu h$$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$