Определение отображения 1.2.1

Пусть X, Y - топологические пространства.

$f: \ X \to Y$ - непрерывные в точке $x_0 \in X \iff \forall V$ - окрестность точки $f(x_0)$ $\exists U$ - окрестность точки x_0 : $f(U) \subset V$

Определение непрерывности

$f: \ X \to Y$ - непрерывна $\iff \forall x_0 \in X, \ f$ - непрерывна в x_0

Функция называется непрерывной, если она непрерывна в каждой точки $x_0 \in X$

Лемма 1.2.2

Пусть $f: \ X \to Y$ - отображение топологического пространства

1. f - непрерывна в x_0
2. $\forall V$ - окрестности $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ является окрестностью x_0
3. $\forall A \subset X$, из того, что x_0 является точкой прикосновения A следует, что $f(x_0)$ является точкой прикосновения множества $f(A)$

Доказательство

Пусть $f: \ X \to Y$ - отображение множества $A \subset X, \ B \subset Y$

$f(A) \subset Y$: образ A при отображении f $f(A) \overset{def}{=} \{f)x\}$

- [ ] Дописать доказательство (Спросить у Дины)

Задача

Доказать следствие свойства:

Пусть $f: \ X \to Y$ - отображение множеств

$A, \ A_i \, (i \in J)$ - подмножества X

$B, \ B_i \, (i \in J)$ - подмножества Y

1. 1
1. $f(\underset{i \in J}{\cup} A_i) = \underset{i \in J}{\cup} f(A_i)$
2. $f\left(\underset{i \in J}{\cap} A_i\right) \subset \cap f(A_i)_i$
3. $f(X \backslash A) \supset f(X) \backslash f(A)$

2. 2
1. $f^{-1}(\underset{i \in J}{\cup} B_i) = \underset{i \in J}{\cup} f^{-1}(B_i)$
2. $f^{-1}(\underset{i \in J}{\cap} B_i) = \cap f^{-1}(B_i)$
3. $f^{-1}\left(Y \underset{i \in J}{\setminus} B_i\right) = \cap f^{-1}(B_i)$

3. 3
1. $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$
2. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$

Доказательство леммы 1.2.2

$(1) \implies (2)$

Пусть V - окрестность $f(x_0)$.

Тогда по (1) $\exists V$ - окрестность точки $x_0: \ f(U) \subset V$.

Тогда $U \subset f^{-1}(V)$

В с.у., если $x \in U$, то $f(x_0) \in V \implies x_0 \in f^{-1}(V)$

Так как U - окрестность точки x_0, то по

- [ ] Дописать

Теорема 1.2.3 (об условии эквивалентной непрерывности)

Следуя условиям эквивалентности для $f: \ X \to Y$

1. f - непрерывно
2. $\forall V \subset Y$ - открытое множество, $f^{-1}(V)$ - открытое
3. $\forall B \subset Y$ - замкнутое, $f^{-1}(B) \subset X$ - замкнутое

Доказательство

$(1) \implies (2)$

Пусть $x_0 \in f^{-1}(V)$ - произвольное

Тогда $f(x_0) \in V$, и V - открытая точка, то V - открытая точка $f(x_0)$

$f^{-1}(V)$ - окрестность точки x_0

Таким образом, $f^{-1}(V)$ является окрестностью каждой своей точки $\overset{\text{л. 1.2.4}}{\implies}$ $f^{-1}(V)$ - открытое множество.

$(2) \implies (1)$

Пусть $x_0 \in X$.

V - окрестность точки $f(x_0) \implies \exists V': \ f(x_0) \in V' \subset V$

V' - открыто

$\implies x_0 \in A^{-1}(V') \subset A^{-1}(V)$

Так как V' - открыто, то $f^{-1}(V')$ - открыто $\implies f^{-1}(V)$ - открытая точка $x_0 \overset{1.2.2}{\implies} f$ - непрерывна в точке x_0

$(2) \iff (3)$

Получается из окрестности замкнутого множества и того факта, что $f^{-1}(Y \backslash C) = X \backslash f^{-1}(C)$

$f: \ (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$

f неизвестна в точке $x_0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x: |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$

Теорема 1.2.4

Пусть $(X, d_X), \ (Y, d_Y)$ - метрические пространства

$T_1 = T_{d_x}; \ T_2 = T_{d_y}$ - метрические топологии на X

$f: \ X \to Y$ - отображение

$x_0 \in X$

f - непрерывна в точке $x_0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \ d_X(x, x_0) < \delta$, то $d_Y\left(f(x), f(x_0)\right) < \epsilon$

$d_X\left(x_1; x_2\right) = (x_1 - x_2)$

$d_Y\left(y_1; y_2\right) = (y_1 - y_2)$

Доказательство

$(\implies)$

Пусть $\epsilon > 0$

$V = B(f(x_0), \epsilon)$

V - открытое множество

По определению непрерывной функции в точке, $\exists U$ - открытое в точке $x_0 : \ f(U) \subset V$

$\overset{\text{по определению}}{\implies} \exists \delta > 0 : \ B(x_0, \delta) \subset U$, то есть $f(B(x_0, \delta)) \subset V$, то есть

$\forall x \in B(x_0, \delta), \ f(x) \in B\left(f(x_0), \epsilon\right)$

То есть $\forall x : \ d_X\left(x_0, x\right) < \delta, \ d_Y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$

Определение 1.2.5

Пусть (X, T) топологическое пространство.

$B \subset T$. Множество B называется базой, топологии

$T \iff \forall U \in T, \forall x \in U \ \exists V \in B : \ x \in V \subset U$

Теорема 1.2.6

Пусть (X, d) - метрическое пространство.

T_d - метрическая топология на X.

$B \subset T_d : \ U \in B \iff \exists x \in X, \ \exists n > 0$ - целое.

$U = B\left(x, \frac{1}{n}\right)$

Тогда B - база T_d

Доказательство

Пусть $U \in T$

Тогда $\forall a \in U \ \exists \epsilon \geq 0$

$B(a, \epsilon) \subset U$.

По свойствам вещественных чисел, $\exists n$ - натуральное, $\frac{1}{n} < \epsilon$, такое, что

$B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset B(a, \epsilon) \subset U$

$\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$

Теорема 1.2.7

Пусть (X, T) - топологическое пространство

$B \subset T$. Следовательно по условию эквивалентности,

1. B - база T
2. $\forall U \in T \ \exists \left\{V_i \in B | i \in J\right\} : \ \underset{i \in J}{\cup} V_i = U$

Доказательство

$(1) \implies (2)$

Пусть $U \in T$
Тогда, по определению базы, $\forall x \in U,\ \exists V_x \in B:\ x \in V_x \subset U$
Убедимся, что $U = \underset{x \in U}{\cup} V_x$
$V_x \subset U$, то $\cup V_x \subset U$
Наоборот, если $y \in U$, то $y \in V_y \subset U \implies y \in \cup V_x$
$(2) \implies (1)$
Пусть $U \in T,\ x \in U$
По $(2), \exists \{V_i \in B | i \in J\} : \cup V_i = U$, то $x \in \cup V_i \implies i_0 \in J:\ x \in V_{i_0}$
...

Определение 1.2.8
(X, T) - топологическое пространство
$PB \subset T$ называется предбазой T
$\iff \{W_1 \cap \ldots \cap W_k | W_i \in PB, k \in Z_{\geq 0}\}$
Образуют базу T

Теорема 1.2.9
Пусть $f:\ X \to Y$ - отображение топологического пространства.
PB - предбаза топологии пространства Y.
Тогда если $\forall w \in PB$, $f^{-1}(W) \subset X$ - открыто, то f - непрерывное отображение.
В частности, если $f:\ X \to R$ - отображение, и $\forall a \in R$, множества $\{x \in X | f(x) < a\}$ и $\{x \in X | f(x) > a\}$ открыты, то f - непрерывно в каждой точке X
Доказательство
Воспользуемся теоремой 1.2.3, и для этого докажем, что $\forall V \subset Y$ - открытое множество $f^{-1}(V)$ является открытым.
Обозначим совокупность всех множеств вида $W_1 \cap a \ldots \cap W_k$, где $W_i \in PB$.
По условию, $f^{-1}(W_k)$ - открытое множество
$\implies f^{-1}(W_1 \cap \ldots \cap W_k) = f^{-1}(W_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(W_k)$ - открыто.
Поэтому $V = \cap V_i$, где $V_i \in B$
$f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup V_i) = \cup f^{-1}(V_i)$.
По доказанному, $f^{-1}(V_i)$ - открытое множество $\implies f^{-1}(V)$ - открыто, как объединение открытых
"В частности"
Докажем сначала, что $PB\left(\{(-\infty, a), (a, +\infty) | a \in R\}\right)$ - предбаза топологии множества вещественных чисел R
Пусть $B = W_1 \cap \ldots \cap W_k$, где $W_i \in PB$
Легко видеть, что пересечение двух открытых интервалов $(\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ снова являются открытым интервалом.
С другой стороны, $\forall \alpha_1, \beta_1,\ \ (\alpha, \beta) = (-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty +)$
Таким образом, B совпадает с множеством всех открытых интервалов прямой
Пусть $U \subset R$ - открыто.

Тогда $\forall x \in U \exists \epsilon > 0: \ (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U$
Но $(x-\epsilon, x+\epsilon) \in B$
Таким образом, PB - предбаза топологии R, поэтому основная часть теоремы 1.2.9 для доказательства непрерывности f достаточно установить, что $f^{-1}(-\infty, a)$ и $f^{-1}(b, +\infty)$ - открытые множества.
По определению
$f^{-1} \ x \in f^{-1}(-\infty, a) \iff f(x) \in (-\infty, a) \iff -\infty < f(x) < a \iff f(x) < a$
$x \in f^{-1}(a, \infty) \iff a < f(x) < \infty \iff a < f(x)$
Таким образом, $f^{-1}(-\infty, a) = \{x \in X | f(x) < a\}$ - открытое по условию,
$f^{-1}(a, \infty) = \{x \in X | f(x) > a\}$ - открыто по условию $\implies f$ - непрерывно

Теорема 1.2.10 (о задании топологии предбазой)
Пусть X - множество.
ρ - произвольное множество подмножеств множества X
Тогда $\exists!$ топология на множестве X, такое, что ρ является предбазой топологии T

Теорема 1.2.11
Пусть X - множество.
B - некоторое множество подмножества X, такое, что
1. $\cup\{V | V \in B\} = X$
2. $\forall V_1, V_2 \in B, V_1 \cap V_2 \in B$
Тогда $\exists! T$ - топология на $X: \ B$ - база T

Утверждение
$f: \ X \to \mathbb{R}$ - неизвестная функция.
X - топологическое пространство.
Предположим, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} \{X \in X | f(x) < \alpha\} & \text{открыто} \\ \{x \in X | f(x) > \alpha\} & \text{открыто} \end{cases} \implies f$ - непрерывное в каждой точке $x_0 \in X$
Доказательство
Из определения предбазы и свойств полного прообраза следует, что если $f: \ X \to Y$ - отображение топологического пространства и PB - предбаза Y, то из условия, что $f^{-1}(W) \subset X$ - открыто $\forall W \in PB$, следует, что f - непрерывно в каждой точке X

В данном случае заметим, что $\begin{cases} \{X \in X | f(x) < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha) \\ \{x \in X | f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, \infty) \end{cases}$.
Покажем, что $PB = \{(-\infty, \alpha), (\alpha, \infty) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ - является предбазой $\mathbb{R}$. B с. д., заметим, что $(\infty, \alpha) \cap (B, \infty) = (\beta, \alpha)$, если $\beta < \alpha$
$\beta = B$

Теорема
Пусто PB - предбаза Y
$f: X \to Y$

Если $\forall w \in PB \quad f^{-1}(w) \subset X-$ открыт, то $f-$ непрерывное отображение

Доказательство

Это тоже было

Лучше посмотрите на код на python

2. Кривые и поверхности

2.1 Кривые и вектор-функции

2.1.1 Параметризованная кривая в (X, T)

$\gamma : A \to X-$ непрерывное отражение $\quad A \subset R-$ множество без дырок

Если $A = [\alpha, \beta]$, и $\gamma : \ [\alpha, \beta] \to X$ - кривая, то $\gamma(\alpha) \in X$ называется началом γ, $\gamma(\beta)$ - концом γ

$x \in X$ лежит на кривой $\equiv \gamma$ проходит через точку $x \iff \exists t_0 \in [\alpha, \beta] : \gamma(t_0) = x$

Наша кривая является отображением из t, и имеет скорость (за 1/2 доходит до середины, а за 1/3 до конца отрезка)

2.1.2 Координатные функции

V - векторное (линейное) пространство, $f : A \to V$ - отображение.

$\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ - базис V, $f(x) = f^1(x)\overline{a}_1 + \ldots + f^n(x)\overline{a}_n$.

Функции $f^1, \ldots, f^n : A \to \mathbb{R}$ называются **координатными функциями** отображения $\overline{f}$

Функции $f : A \to V$, если V - векторное пространство, называются **вектор-функция**

$\overline{a} = \alpha^1\overline{a}_1 + \ldots + \alpha^n \cdot \overline{a}_n$

2.1.3 Утверждение

$\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\}$ - базис векторного пространства V.

Каждая вектор функция $\overline{f} : \ A \to V$ однозначно задаёт набор своих координатных функций $f^1, \ldots, f^n : A \to \mathbb{R}$, т. с. таких, что $\overline{f}(x) = f^1(x)\overline{a}_1 + \ldots + f^n(x)\overline{a}_n$.

Наоборот, любой набор $g^1, \ldots, g^n : A \to \mathbb{R}$ однозначно определяет отображение $g : A \to V : g^1, \ldots, g^n$ - координатные функции g

Доказательство

$\forall x \in A, \ f(x) \in V$, и по определению базиса, $f(x) \in \alpha^1\overline{a}_1 + \ldots + \alpha^n\overline{a}_n$, где числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ определены для данных x однозначно.

Таким образом, $\forall x \in A \forall i \in 1, \ldots, n$ задано единственное число α^i, которое обозначим $f^i(n)$.

Наоборот, если $g^i : A \to \mathbb{R}$ - функции, то полагая $\overline{g}(x) = g^1(x)\overline{a}_1 + \ldots + g^n(x)\overline{a}_n$, получаем вектор функцию $\overline{g} : \ A \to V$, координатными функциями которой являются $g^1, .., g^n$

2.1.4 Определение

Пусть $\overline{\gamma}(t)$ - ? вектор функция

$$\overline{a}=\overline{\gamma}(t_0) \iff \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{|\overline{\gamma}(t)-\overline{\gamma}(t_0)-\overline{a}(t-t_0)|}{t-t_0}=0 \\ \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\overline{\gamma}(t)-\overline{\gamma}(t_0)}{t-t_0}=\overline{a} \end{cases}$$

Таким образом, $\overline{a}=\overline{\gamma}'(t_0) \iff \overline{\gamma}(t)\overset{def}{=}\overline{\gamma}(t_0)+\overline{a}(t-t_0)+\overline{\epsilon}(t)(t-t_0)$, где $\lim\limits_{t\to t_0}(\overline{\epsilon}(t))=0$

2.1.5 Определение

Пусть $\gamma:[\alpha,\beta]\to X$ кривая, l - прямая, проходящая через точку $A=\gamma(t_0)$

l называют касательной к γ в тчк. A, если $\lim\limits_{t\to t_0}(\phi(t))=0$, где $\phi(t)$ - угол между l и секущей, проходящей через A и $\gamma(t)$, иначе говоря $\iff \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{h(t)}{|A\gamma(t)|}=0$

2.1.6 Теорема

Пусть $\overline{\gamma}$ - вектор функция, задающую кривую $\gamma:[\alpha,\beta]\to X$

$A=\gamma(t_0)$. Тогда, если $\overline{\gamma}'(t_0)\neq\overline{0}$, то кривая, проходящая через точку $A=\gamma(t_0)$ с направлением вектора $\overline{a}=\overline{\gamma}'(t_0)$, является касательной к кривой γ в точке A

2.1.6 Доказательство

Пусть O - начало координат в X, так что $\forall C,D\in X,\quad \overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}$. В частности $\overline{A\gamma(t)}=\overline{\gamma}(t)-\overline{OA}$.

И так как $A=\gamma(t_0)$, то $\overline{A\gamma}(t)=\overline{\gamma}(t)-\overline{\gamma}(t_0)$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{h(t)}{|\overline{\gamma}(t)-\overline{\gamma}(t_0)|}=0$$

Из геометрии известно, что расстояние от точки $\gamma(t)$ до прямой l проходит через точку A с направлением вектора $\overline{a}$.

Находится так:

$$h(t)^2=|A\gamma(t)|^2-\frac{\left(\overline{a},\overline{A\gamma(t)}\right)}{|a|^2}=|\overline{\gamma}(t)-\overline{\gamma}(t_0)|^2-\frac{(\overline{a},\gamma(t)-\gamma(t_0))}{|a|^2}$$

Имеем $\overline{a}=\gamma'(t_0)$, т. е. $\gamma(t)=\gamma(t_0)+\overline{a}\,(t-t_0)+\epsilon(t)\,(t-t_0)$, где $\lim\limits_{t\to t_0}\epsilon(t)=0$

$\gamma(t)-\gamma(t_0)=(\overline{a}+\overline{\epsilon}(t))\,(t-t_0)\to$

$$h(t)^2=\frac{(\overline{a}+\overline{\epsilon}(t))^2|t-t_0|^2|a|^2-(\overline{a},\overline{a}+\overline{\epsilon}(t))^2(t-t_0)^2}{|a|^2} \implies \frac{h(t)^2}{|\overline{\gamma}(t)-\overline{\gamma}(t_0)|}=\frac{(t-t_0)^2\left(|\overline{a}+\overline{\epsilon}(t)|^2|a|^2\right.}{|\overline{a}+\overline{\epsilon}(t)|^2(t}$$

$=\dfrac{|\overline{a}+\overline{\epsilon}(t)|^2|a|^2-(a,\overline{a}+\overline{\epsilon}(t))^2}{|\overline{a}+\overline{\epsilon}(t)|^2} \implies$ переходя к пределу при $t\to t_0$ и учитывая, что $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{\epsilon}(t)=0$, то $\dfrac{|a|^2|a|^2-(a,a)^2}{|\overline{a}|^2}=0$

2.1.7 Утверждение

Пусть $\overline{\gamma}:[\alpha,\beta]\to V$ - вектор функция, где V - линейное пространство.

1. 1

1. Если $f : [\alpha, \beta] \to R$ - вещественная функция, если $\exists f'(t_0)$ и $\overline{\gamma}'(t_0)$, то
$(fg)'(t_0) = f'(t_0) \cdot \overline{\gamma}(t_0) + f(t_0) \cdot \overline{\gamma}'(t_0)$
2. Если $\overline{u}, \overline{v} : [\alpha, \beta] \to V$ - вектор функции, и $\exists \overline{u}'(t_0), \overline{v}'(t_0)$, то
$(\overline{u}, \overline{v})'(t_0) = \left(\overline{u}(t_0), \overline{v}'(t_0)\right) + (u'(t_0), \overline{v}(t_0))$
3. Если V - 3-х мерное пространство, то $[\overline{u}, \overline{v}]'(t_0) = \left[\overline{u}'(t_0), \overline{v}(t_0)\right] + \left[\overline{u}(t_0), \overline{v}'(t_0)\right]$
2. Если $\gamma, \delta \in R, \overline{u}, \overline{v}$ - вектор-функции, то $(\gamma\overline{u} + \delta\overline{v})'(t_0) = \gamma\overline{u}'(t_0) + \delta\overline{v}'(t_0)$
3. Если $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n\}$ - базис V и $\overline{\gamma}(t) = \gamma'(t)\overline{a_1} + \ldots + \gamma^n(t)\overline{a}_n$, то
$\gamma'(t_0) = \left(\gamma^1\right)'(t_0)\overline{a_1} + \ldots + (\gamma^n)'(t_0)\overline{a}_n$
4. Если $p_i \, [\gamma, \delta] \to R$ - вещественная функция, $p(t) \in [\alpha, \beta]$, то $(\overline{\gamma}_o p)'(t_0) = p'(t_0) \cdot \overline{\gamma}'(p(t_0))$

2.1.8 Определение

Пусть $\overline{f} : [\alpha, \beta] \to V$ - вектор функция. $\overline{F} : [\alpha, \beta] \to V$ называют **первообразной** для $\overline{f}$, если $\overline{F}$ - непрерывна, и $\forall t \in (\alpha, \beta)$
$\overline{F}'(t) = \overline{f}(t)$

2.1.9 Теоремы

Пусть $\overline{f} : [\alpha, \beta] \to V$ - непрерывная вектор функция
1. Если $\overline{F}$ и $\overline{G}$ - первообразные функции $\overline{f}$, то $\overline{F} - \overline{G}$ - константа, то есть $\overline{F}(t) - \overline{G}(t)$ не зависит от t
2. Если $\overline{F}$ - первообразная $\overline{f}$, G - первообразная $\overline{g}$, $\gamma, \delta \in R$, то $\alpha\overline{F} + \beta\overline{G}$ - первообразные $\alpha\overline{f} + \beta\overline{g}$
3. 3
1. $H \cdot \overline{F}$ - первообразная $h \cdot \overline{F} + H + \overline{f}$, где $h : [\alpha, \beta] \to R$, H - первообразная h
2. Если $\overline{F}$ - первообразная $\overline{f}, \overline{G}$ - первообразная $\overline{g}$, то $\left(\overline{F}, \overline{G}\right)$- это первообразная $\left(\overline{f}, \overline{G}\right) + \left(\overline{F}, \overline{g}\right)$
3. $\left[\overline{F}, \overline{G}\right]$ - первообразные $\left[\overline{f}, \overline{G}\right] + \left[\overline{F}, \overline{g}\right]$
4. Если $p : [\gamma, \delta] \to R, p(t) \in [\alpha, \beta]$, то $\overline{F}_o p$ - это первообразная функции $\overline{F}' - (p(t)) \cdot p'(t)$
5. Если $F'(t)$ - первообразная $f'(t)$, $\overline{f} : \overline{f}(t) = f'(t)\overline{a}1 + \ldots + f^n(t)\overline{a}_n$, то покоординатное интегрирование валидно

2.1.10 Определение

Пусть $\overline{h} : [\alpha, \beta] \to V$ - вектор функция.
$\overline{H} : [\alpha, \beta] \to V$ - ёё первообразная
$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{h}(t)dt = \overline{H}(\beta) - \overline{H}(\alpha)$ называется интегралом от α до β функции $\overline{h}$

2.1.11 Свойства интеграла

1. Если $\overline{h}$ неизвестная функция, то интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{h}(t)dt$ существует и однозначно определён
2. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\gamma\overline{h}_1(t) + \delta\overline{h}_2(t)\right)dt = \gamma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{h}_1(t)dt + \delta \int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{h}_2(t)dt$

3. Если $\overline{h}(t) = h^1(t)\overline{a}_1 + \ldots + \overline{h}^n\overline{a}_n$, где $\left\{\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^n\right\}$ - базис V, то
$\int\limits_\alpha^\beta \overline{h}(t)dt = \left(\int\limits_\alpha^\beta h^1(t)dt\right)\overline{a}_1 + \ldots + \left(\int\limits_\alpha^\beta h^n(t)dt\right)\overline{a}_n$

Доказательство

1. Пусть $\overline{h}(t) = h^1(t)\overline{a}_1 + \ldots + h^n(t)\overline{a}^n$
Если $\overline{h}$ - непрерывна, то $h^1, \ldots, h^n : [\alpha, \beta] \to R$ - непрерывны, $\implies$
$\exists H^1, \ldots, H^n : [\alpha, \beta] \to R$ - первообразная $h^1, \ldots, h^n$
По 2.1.9, $\overline{H} = H^1\overline{a}_1 + \ldots + H^n\overline{a}_n$ - первообразная ?
По определению интеграла, $\exists \overline{H}(\beta) - \overline{H}(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta$?
@tyferse, допиши, пж
2. По 2.19

Лекция 2.2 Кривизна, кручение и формы Френе

2.2.1 Теорема

Пусть γ - кривая, задаваемая вектором Френе и $\overline{\gamma} : (\alpha, \beta] \to V$.
Пусть $\gamma'(t)$ непрерывна. $\forall t \in (\alpha, \beta)$ Тогда данная кривая задаётся равенством:
$l\left(\gamma\right) = \int\limits_\alpha^\beta \left|\overline{\gamma}'(t)\right|dt$

2.2.2 Определение

Пусть $\gamma(t)$ - кривая. $\tilde{\gamma}(\tau)$ называется естественной параметризацией кривой γ, если $\exists$ функция $\tau(t)$, такая, что $\tilde{\gamma}(\tau(t)) = \overline{\gamma}(t)$, и $\left|\tilde{\gamma_\tau'}\right| = 1 \forall \tau$, т. е. если $|\tilde{\gamma}_\tau'| = 1 \forall \tau$, и $\exists t(\tau)$ - такая же функция, что $\gamma\left(t(\tau)\right) = \tilde{\gamma}(\tau)$

2.2.3 Теорема

Пусть $\overline{\gamma}(t)$ - вектор функция, задающая кривую γ.
$\overline{\tilde{\gamma}}$ - её естественная параметризация, такая, что $\overline{\tilde{\gamma}}(\tau) = \overline{\gamma}(t(\tau))$ и $\overline{\gamma}(t) = \overline{\tilde{\gamma}}(\tau(t))$, то
1. $\tau_t' = |\gamma_t'|$
2. $\overline{\tilde{\gamma}_t'} = \dfrac{\gamma_t'}{|\gamma_t'|}$

$\tilde{\gamma}(\tau)$ называется естественной параметризацией
$\alpha \le \delta < \epsilon \le \beta$
$\tau\left(\delta\right) = a,\ \tau\left(\epsilon\right) = b$
что $\overline{\gamma}\left(\tau(t)\right) = \overline{\gamma}(t)$, и то $\int\limits_\delta^\epsilon \left|\overline{\gamma}'(t)\right|dt = b - a$.

Иначе говоря, если $\tilde{\gamma}(\tau)$ - естественная параметризация кривой, то $\int\limits_a^b \left|\overline{\tilde{\gamma}}(\tau)\right|d\tau = \tau\left(\epsilon\right) - \tau\left(\delta\right)$

Доказательство

@tyferse

2.2.4 Теорема

Пусть $\overline{\gamma}(t)$ $\overline{\gamma} : [\alpha, \beta] \to V$- непрерывно дифференцируемый вектор, задающий кривую γ, такой, что $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$

Тогда $\exists$ естественная параметризация кривой $\overline{\gamma}$, а именно $\tau(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} |\gamma'(y)| dy$ является непрерывно дифференцируемой, строго возрастающей функцией $\tau : [\alpha, \beta] \to [0, d]$, где $d = l\left(\gamma\right) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\overline{\gamma}'(t)\right| dt$ так что у неё существует обратная $\phi : [0, d] \to [\alpha, \beta]$, так что $\phi\left(\tau\left(t\right)\right) = t,\ \tau\left(\phi\left(x\right)\right) = x \quad \forall x \in [0, d]$, и тогда $\overline{\tilde{\gamma}}\left(\tau\right) \overset{\text{опр}}{=} \overline{\gamma}\left(\phi\left(\tau\right)\right)$ является естественной параметризацией $\overline{\gamma}$

Доказательство

@tyferse