Топология. База

Топология T
Множество подмножеств из из множества X
Критерии:
1. $\emptyset, X \in T$
2. $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k \in T \quad (V_i \in T)$
3. $U_1 \cap U_2 \in T \quad (U_i \in T)$
Открытое множество
Открыто на топологии
Замкнутое множество
Дополнение к открытому $(\emptyset, X)$
Покрытие X
Набор C подмножеств $X \iff \bigcup\limits_{U \in C} U = X$

База топологии
Такое $B = \{V_i | i \in I\}$, из объединения которых можно составить T_X
Предбаза топологии
Такое $W = \{W_i | i \in J\}$, пересечение которых даст базу.
Критерии базы
1. Σ - база, T - топология на X
$\iff \forall U \in T \quad \forall x \in U \quad \exists V_x \in \Sigma : \quad x \in V_x \subseteq U$
$\Sigma = \{B_i | i \in I\}$
2. Σ является базой некоторой топологии на $X \iff$
1. X представляется в виде объединения элементов Σ
2. $\forall U, V \in \Sigma \quad U \cap V = \bigcup\limits_{i \in I} B$
1. Пересечение элементов базы = объединение элементов базы

Метрики и границы

Толщина / грубость
$\sqsupset X$ - множество.
T_1, T_2 - топологии на X
T_1 тоньше T_2
T_2 грубее T_1
$\iff T_2 \subseteq T_1$
Метрика
$d : X \times X \to R$ - метрика, если
1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
3. $d(x, y) \geq 0$
$d(x, y) = 0 \iff x = y$
(X, d) - метрическое пространство
Метрическая топология (порождённая метрика)
$\sqsupset (X, \rho)$ - метрическое пространство
Множество всех $B(x, \epsilon)$, т. е. $\Sigma = \{B(x, \epsilon) | x \in X, \epsilon > 0 \in \mathbb{R}\}$
является базой некоторой канонической для R^n топологии
Метризуемое топологическое пространство
$\sqsupset (X, T)$ - топологическое пространство, если $\exists \rho : X \times X \to \mathbb{R}$ - метрика,
такое, что $T_\rho = T$ (T_ρ - топологическое, порождённое ρ)

Подпространство + индуцированная топология
$\sqsupset (X, T)$ - топологическое пространство.
$A \subseteq X$ - произвольное подмножество.
Через T_A обозначим совокупность $\{A \cap U | U \in T\}$
и (A, T_A) называют **подпространством топологического пространства** (X, T)
и T_A называют **индуцированной топологией** (на A из (X, T))

Каноническая топология
$U^2 \in T^2 \iff \begin{cases} U^2 = \emptyset \\ \forall (x,y) \in U^2 \quad \exists V^2 : V^2 = \left\{(x,y) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \epsilon\right\} : \quad V^2 \in U^2 \end{cases}$

Окрестность x
$x \in U_x$
Внутренняя для A
$\exists U_x : \ U_x \subseteq A$
Граничная для A
$\forall U_x : \ U_x \cap A \neq \emptyset, \ U_x \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$
Точка прикосновения для A
$\forall U_x : \ U_x \cap A \neq \emptyset$
Предельная точка для A
$\forall U_x : \ U_x \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$
Внутренность $Int(A)$
Множество всех внутренних точек. Наибольшее открытое множество в A
Замыкание $Cl(A)$
Множество всех точек прикосновения. Наименьшее замкнутое множество, содержащее A

Плотность, и Отображения

Плотность
Пусть $A, B \subseteq X, \ (X, T)$
1. A плотно в $B \iff Cl(A) \subseteq B$
2. A всюду плотно $\iff Cl(A) = X$

Определение не плотности
$A \subseteq (X, T)$, если $Int\,(X, A)$ (внешность) всюду плотна
Т . е. $Cl\,(Int(X \backslash A)) = X$
Тождественное отображение
$id_x : \ X \to X, \quad id(x) = x$
Отображение вложения
Если $A \subseteq X$, то $\exists in_A : \ A \to X, \quad in_A(a) = a$
Обратное отображение
$g : \ Y \to X$ называется обратным к $f : \ X \to Y \iff fog = id_Y, \ gof = id_X$
Непрерывное отображение
$\sqsupset X, Y$ - топологическое пространство
$\forall V \in T_Y \ f^{-1}(V) \in T_X$

Гомеоморфизм
Отображение $f : \ X \to Y$, если
1. f - биекция
2. f - непрерывно
3. f^{-1} - непрерывно

В этом случае X, Y называются гомеоморфными и обозначаются $\simeq$