1. Проблема собственных значений. Устойчивость

Проблема собственных значений

Полная проблема
Нахождение всех собственных значений и собственных векторов некоторой матрицы
Частичная проблема собственных значений
Нахождение нескольких собственных значений и соответствующих им векторов

Устойчивость

Устойчивость это то, насколько сильно меняются собственные значения и собственные векторы при небольших изменениях в исходной матрице.
A. k. a. Число обусловленности

2. Вариационное описание собственных значений симметрической матрицы

Условия

Пусть $\lambda_i(A) > 0$ и $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$
Пусть $y = U^T x$
$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\left(UDU^T x, x\right)}{(x, x)} = \frac{\left(DU^T x, U^T x\right)}{(U^T x, U^T x)} = \frac{(Dy, y)}{(y, y)}$$
В силу невырожденности U:
$$\min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \min_{y \neq 0} \frac{(Dy, y)}{(y, y)}$$
U - ортогональная матрица, где $u^{(i)}$ - собственный вектор
D - диагональная матрица, где $d^{(i)} = \lambda_i(A)$

Вариационное описание

Отношение Рэлея
$$R(A, x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$
Вариационное описание

$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$

$$\min_{\substack{x \neq 0 \\ (x, u^{(1)})=0 \\ \ldots \\ (x, u^{(i-1)})}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_i(A) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Доказательство

Покажем, что $\min\limits_{y \neq 0} \dfrac{(Dy, y)}{(y, y)} = \lambda_1(A)$, где $\lambda_1 - \min$

$$\frac{(Dy, y)}{(y, y)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\,(A) y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_1\,(A) y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} = \lambda_1(A)$$

Тогда

$$y = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(De_1, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{\lambda_1(A)}{1}$$

Очевидно, что минимальное значение отношения Рэлея достигается при $x = Ue_1$

Добавим условие $\left(x, u^{(1)}\right) = 0$

$$\min_{\substack{x \neq 0 \\ (x, u^{(1)}=0)}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \min_{\substack{y \neq 0 \\ (y, e_1=0)}} \frac{(Dy, y)}{(y, y)}$$

Получим, что $y_1 = 0$. Поэтому для всех y, где $y \neq 0$ и $(y, e_1) = 0$

$$\frac{(De_1, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{\sum\limits_{i=2}^{k} \lambda_i(A) y_i^2}{\sum\limits_{i=2}^{k} y_i^2} \geq \lambda_2(A)$$

И если взять $y = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то получим:

$$\min_{\substack{x \neq 0 \\ (x, u^{(1)}=0)}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \min_{\substack{y \neq 0 \\ (y, e_1=0)}} \frac{(Dy, y)}{(y, y)} = \lambda_2$$

3. Вариационный принцип Куранта-Фишера

Вариационный принцип Куранта-Фишера

$$\max_{R_{n-i+1}} \min_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \lambda_i(A) \quad i=1,2,\dots,n$$

Доказательство

Покажем, что если S_i - подпространство, порождённое собственными векторами $u^{(1)},\dots,u^{(i)}$, то для всех $x\neq 0\in S_i$:
$\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)} \le \lambda_i(A)$

Т. к. $x\in S_i$, то $x=\sum\limits_{j=1}^{i} c_j u^{(j)}$

$$(x,x)=\sum_{j=1}^{i} c_j^2 \quad (Ax,x)=\sum_{j=1}^{i}\lambda_j(A)c_j^2$$
$$\frac{(Ax,x)}{(x,x)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}\lambda_j(A)c_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{i}c_j^2}\le\lambda_i(A)$$

Пусть R_{n-i+1} - подпространство размерности $n-i+1$.
Сумма размерностей R_{n-i+1} и S_i равна $n+1$, т. е. превышает размерность n рассматриваемого пространства.
Следовательно, существует вектор $x_0\neq 0\in R_{n-i+1},S_i$
Следовательно, $\dfrac{(Ax_0,x_0)}{(x_0,x_0)}\le\lambda_i(A)$

Поскольку $x_0\in R_{n-i+1}$, то $\min\limits_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}}\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}\le\lambda_i(A)$

Соответственно, для того, чтобы наше неравенство стало равенством, нужно, чтобы наше подпространство состояло из векторов, ортогональных собственным векторам $u^{(1)},\dots,u^{(i-1)}$.
Итого:
$$\max_{R_{n-i+1}} \min_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \lambda_i(A)$$

4. Два следствия из вариационного принципа Куранта-Фишера

Следствие 1

Пусть $A = A^T,\ B = B^T$
$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$
$\lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \ldots \leq \lambda_n(B)$
И пусть для всех x выполняется:
$(Ax, x) \leq (Bx, x)$
Тогда:
$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$

Доказательство следствия 1

Для всех $x \neq 0$ выполняется: $\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)} \leq \dfrac{(Bx,x)}{(x,x)}$
Следовательно, для любого R_{n-i+1}:
$\min\limits_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}} \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)} \leq \min\limits_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}} \dfrac{(Bx,x)}{(x,x)}$
Очевидно, что:
$\max\limits_{R_{n-i+1}} \min\limits_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}} \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)} \leq \max\limits_{R_{n-i+1}} \min\limits_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R_{n-i+1}}} \dfrac{(Bx,x)}{(x,x)}$
И согласно принципу Куранта-Фишера, это может быть записано в виде:
$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(B)$

Следствие 2

Пусть $A = A^T,\ B = B^T$
$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$
$\lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \ldots \leq \lambda_n(B)$
Тогда
$|\lambda_i(B) - \lambda_i(A)| \leq ||B - A||_2$

Доказательство следствия 2

$C = B - A$
$(Bx, x) = ((A + C)x, x) = (Ax, x) + (Cx, x)$
Оценим $|(Cx, x)|$
$|(Cx, x)| \leq ||Cx||_2 \cdot ||x||_2 \leq ||C||_2 \cdot ||x||_2^2 = (||C||_2 Ex, x)$
Отсюда:
$(-||C||_2 Ex, x) \leq (Cx, x) \leq (||C||_2 Ex, x)$
Следовательно,
$((A - ||C||_2 E)x, x) \leq (Bx, x) \leq ((A + ||C||_2 E)x, x)$
Согласно [следствию 1](#):
$\lambda_i\left(A - ||C||_2 E\right) \leq \lambda_i\left(B\right) \leq \lambda_i\left(A + ||C||_2 E\right)$

Или
$\lambda_i(A) - ||C||_2 \leq \lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + ||C||_2$

5. Метод вращения решения проблем собственных значений. Типичный шаг метода

Для всякой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица U, что
$U^T A U = \Lambda$
, где Λ - диагональная матрица. При этом диагональные элементы матрицы Λ являются собственными значениями, а столбцы матрицы U - собственными векторами матрицы A.
Метод вращений состоит в построении таких ортогональных матриц U_k, что последовательность $A_{k+1} = U_k^T A U_k$ при $k \to \infty$ стремится к диагональной матрице Λ.
Каждая U_k в этом методе представляет собой произведение k матриц вращений, имеющих вид:

$$C_{lm} = \left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & & & & & & & 0 \\
0 & \dots & & & & & & 0 & \\
 & & c & & \dots & & -s & & \\
 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
 & & & & \dots & & & & \\
 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
 & & s & & \dots & & c & & \\
 & 0 & & & & & & \dots & 0 \\
0 & & & & & & & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
- l\text{-ая строка} \\
\\
\\
\\
- m\text{-ая строка} \\
\\
\\
\end{array}$$

Параметры c, s, определяющие матрицу C_{ij}, называются опорными элементами и удовлетворяют равенству $s^2 + c^2 = 1$.
Из этого свойства опорные элементы можно интерпретировать как синус и косинус от определённого угла ϕ: $s = \sin\phi, c = \cos\phi$.
Матрица C_{lm} является ортогональной, так как $C_{lm}^T C_{lm} = C_{lm} C_{lm}^T = E$.

Типичный шаг метода вращений

Находим максимальный по модулю элемент матрицы A вне главной диагонали и зафиксируем его индексы l, m $(l \neq m)$:
$|a_{lm}| = \max\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$

Построим матрицу вращений, пока не определяя конкретные значения опорных элементов.
Положим $B = C_{lm}^T A C_{lm}$, причём данная матрица будет являться симметричной:
$B^T = (C_{lm}^T A C_{lm})^T = C_{lm}^T A^T (C_{lm}^T)^T = C_{lm}^T A C_{lm} = B$

Получим формулы для опорных элементов. Для этого достаточно рассмотреть только верхнюю или нижнюю половину элементов от главной диагонали (т. к. матрица B симметричная).
Обозначим $D = AC_{lm}$.
Тогда $B = C_{lm}^T D$.

Так как у матрицы $C_l m$ отличаются только l-ый и m-ый столбцы от столбцов соответствующей единичной матрицы, то l-ый и m-ый столбцы будут отличатся у матрицы D от столбцов матрицы A.

$$\begin{array}{r} d_{il} = ca_{il} + sa_{im} \\ d_{im} = -sa_{il} + ca_{im} \end{array} \quad i = \overline{1, n}$$

Так как у матрицы C_{lm}^T только l-ая и m-ая строки отличаются от соответствующих строк единичной матрицы, то у матрицы B будут отличатся только l-ая и m-ая строки от соответствующих строк матрицы D:

$$\begin{array}{r} b_{li} = cd_{li} + sd_{mi} \\ b_{mi} = -sd_{li} + cd_{mi} \end{array} \quad i = \overline{1, n}$$

При $i \neq l$ и $i \neq m \quad d_{li} = a_{li}, d_{mi} = a_{mi}$, следовательно

$$\begin{array}{r} b_{li} = ca_{li} + sa_{mi} \\ b_{mi} = -sa_{li} + ca_{mi} \end{array} \quad i = \overline{1, n}, i \neq l, i \neq m$$

При $i = l$ и учитывая, что $a_{lm} = a_{ml}$ получаем:

$$b_{ll} = cd_{ll} + sd_{ml} = c(ca_{ll} + sa_{lm}) + s(ca_{ml} + sa_{mm}) = c^2 a_{ll} + 2sca_{lm} + s^2 a_{mm}$$

При $i = m$ имеем:

$$b_{lm} = cd_{lm} + sd_{mm} = c(-sa_{ll} + ca_{lm}) + s(-sa_{ml} + ca_{mm}) = sc(a_{mm} - a_{ll} + (c^2 - s^2)a_{lm})$$
$$b_{mm} = -sd_{lm} + cd_{mm} = -s(-sa_{ll} + ca_{lm}) + c(-sa_{ml} + ca_{mm}) = s^2 a_{ll} + -2sca_{lm} + c^2 a_{mm}$$

Ввиду симметричности B формулы выше полностью определяют эту матрицу.

Зададим опорные элементы так, чтобы $b_{lm} = 0$. Тогда
$$sc(a_{mm} - a_{ll}) + (c^2 - s^2)a_{lm} = 0$$
Подставив $c = \cos\phi, s = \sin\phi$ получим
$$\sin\phi\cos\phi(a_{mm} - a_{ll}) = -(\cos^2\phi - \sin^2\phi)a_{lm}$$
$$\frac{1}{2}(a_{ll} - a_{mm})\sin 2\phi = a_{lm}\cos 2\phi$$
$$\tan 2\phi = \frac{2a_{lm}}{a_{ll} - a_{mm}} \implies \phi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a_{lm}}{a_{ll} - a_{mm}}\right)$$

Для определённости будем считать $-\frac{\pi}{2} < 2\phi \leq \frac{\pi}{2} \implies -\frac{\pi}{4} < \phi \leq \frac{\pi}{4}$
(и $\phi = \frac{\pi}{4}$ при $a_{ll} = a_{mm}$).

6. Метод вращения решения проблемы собственных значений. Доказательство сходимости метода

Для доказательства сходимости метода потребуется следующее утверждение:

$$\sum_{i\neq j} b_{ij}^2 \le \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \sum_{i\neq j} a_{ij}^2 \tag{1}$$

При умножении на ортогональную матрицу её евклидова норма не меняется, т. е.
$||B||_E = ||C_{lm}^T A C_{lm}||_E = ||A||_E \implies \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$

Перепишем это равенство в виде:
$\sum_{i\neq j} b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i\neq j} a_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2$
$\sum_{i\neq j} b_{ij}^2 - \sum_{i\neq j} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 - \sum_{i=1}^n b_{ii}^2$

Так как все диагональные элементы, кроме b_{ll}, b_{mm}, совпадают с элементами матрицы A, то
$\sum_{i\neq j} b_{ij}^2 - \sum_{i\neq j} a_{ij}^2 = a_{ll}^2 + a_{mm}^2 - b_{ll}^2 - b_{mm}^2 \qquad (2)$

Введём в рассмотрение матрицы
$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{ll} & a_{lm} \\ a_{ml} & a_{mm} \end{pmatrix}, \overline{C} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \overline{B} = \begin{pmatrix} b_{ll} & 0 \\ 0 & b_{mm} \end{pmatrix}$

учитывая формулы для b_{ll}, b_{mm} и $b_{lm} = b_{ml} = 0$. Тогда нетрудно проверить, что $\overline{B} = \overline{C}^T \overline{AC}$.
Так как $\overline{C}$ ортогональна, то
$||\overline{B}||_E = ||\overline{A}||_E \implies a_{ll}^2 + 2a_{lm}^2 + a_{mm}^2 = b_{ll}^2 + b_{mm}^2$

Теперь формула (2) приобретает вид:
$\sum_{i\neq j} b_{ij}^2 - \sum_{i\neq j} a_{ij}^2 = -2a_{lm}^2 \qquad (3)$

Так как $|a_{lm}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}|$, то получаем оценку:

$\sum_{i\neq j} a_{ij}^2 \le \sum_{i\neq j} a_{lm}^2 = n(n-1)a_{lm}^2$

Отсюда $-2a_{lm}^2 \le \dfrac{2}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} a_{ij}$.

Из (3) следует: $\sum_{i\neq j} b_{ij}^2 \le \left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right) \sum_{i\neq j} a_{ij}^2$.

ч. т. д.

Рассмотрим метод вращений в целом.
На первом шаге находим индексы l_1, m_1 максимального по модулю наддиагонального элемента A, строим матрицу вращения $C_1 = C_{l_1 m_1}$ с определёнными выше опорными элементами, и вычисляем матрицу $A_1 = C_1^T A C_1 \quad (4)$.

Пусть в результате выполнения $k-1$ шагов мы получили матрицу A_{k-1}.
Находим наибольший по модулю наддиагональный элемент матрицы A_{k-1} с индексами l_k, m_k, строим матрицу вращения $C_k = C_{l_k m_k}$ и вычисляем $A_k = C_k^T A_{k-1} C_k$.
Выразим A_k через A:
$A_k = C_k^T A_{k-1} C_k = C_k^T C_{k-1}^T A_{k-2} C_{k-1} C_k = \ldots = (C_1 \ldots C_k)^T A (C_1 \ldots C_k)$

Произведение $U_k = C_1 \ldots C_k$ ортогональных матриц ортогонально, потому A_k подобна A, следовательно их собственные значения совпадают. Покажем, что при $k \to \infty$ A_k стремится к диагональной матрице.
Согласно (1) и (4) имеем;
$\sum\limits_{i \neq j} (a_{ij}^{(k)})^2 \leq \left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right) \sum\limits_{i \neq j} (a_{ij}^{(k-1)})^2 \leq \ldots \leq \left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right)^k \sum\limits_{i \neq j} a_{ij}^2$

В силу того, что $\left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right) < 1$ следует $\sum\limits_{i \neq j} (a_{ij}^{(k)})^2 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$
Также это означает, что A_k стремится к диагональной матрице, которую обозначим через Λ. Так как A_k подобна A, то и Λ подобна A, т. е. на диагонали Λ стоят собственные значения A.

7. Метод вращения решения проблемы собственных значений. Оценка точности приближений

Через Λ_k обозначим матрицу из диагональных элементов A_k (все остальные элементы равны нулю), а через ϵ_k обозначим $\epsilon_k = A_k - \Lambda_k$.
Пусть собственные значения матриц A_k и Λ_k пронумерованы в порядке неубывания.
Тогда согласно следствию 2 из вариационного принципа Куранта-Фишера (Следствие 2) имеют место оценки:
$|\lambda_i(A_k) - \lambda_i(\Lambda_k)| \leq ||\epsilon_k||_2 \leq ||\epsilon_k||_E, \quad i = \overline{1, n}$

Но $\lambda_i(A_k) = \lambda_i(A), \lambda_i(\Lambda_k) = a_{ii}^{(k)}$. Следовательно,
$|\lambda_i(A) - a_{ii}^{(k)}| \leq ||\epsilon_k||_E = \sqrt{\sum\limits_{i \neq j} (a_{ij}^{(k)})^2}$

Отсюда следует, что для определения собственных значений с точностью ϵ процесс следует продолжать, пока при некотором k не выполнится неравенство:

$\sum\limits_{i \neq j}(a_{ij}^{(k)})^2 \leq \epsilon^2$.

Так как $U_k^T A U_k = A_k \approx \Lambda_k$, то собственные векторы A приближённо равны столбцам матрицы $U_k = C_1 \dots C_k$. Поэтому для нахождения собственных векторов следует последовательно перемножать матрицы $C_i, i = \overline{1, k}$.

8. Метод вращения решения проблемы собственных значений. Определение опорных элементов

В вопросе 5 опорные элементы определялись как синус и косинус от угла ϕ:
$\tan 2\phi = \dfrac{2a_{lm}}{a_{ll} - a_{mm}}, \quad -\dfrac{\pi}{4} < \phi \leq \dfrac{\pi}{4}$.

На практике такой метод не применяется (из-за вычисления тригонометрических функций через ряд Тейлора, что требует значительных затрат времени). Потому определим c, s так, чтобы не было необходимости вычислять значений таких функций.

Обозначим $x = 2a_{lm}, y = a_{ll} - a_{mm}$. Тогда $\tan 2\phi = \dfrac{x}{y}, \quad -\dfrac{\pi}{4} < \phi \leq \dfrac{\pi}{4}$.
Если $y = 0$, то $\tan 2\phi = \infty$ и, следовательно, $2\phi = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому положим
$c = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, s = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $y \neq 0$. Представим $\tan 2\phi$ в виде

$$\tan 2\pi = \frac{x}{y} = \frac{\dfrac{sign(xy)|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{\overline{s}}{\overline{c}} \tag{1}$$

где $\overline{s} = \dfrac{sign(xy)|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \overline{c} = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Поскольку $\overline{c}^2 + \overline{s}^2 = 1$, то $\overline{c}$ и $\overline{s}$ также можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла: $\overline{c} = \cos\psi, \overline{s} = \sin\psi$.

Из (1) следует, что $\tan 2\phi = \tan\psi$.
Откуда $\psi = 2\phi + k\pi, k = 0, 1, \dots \qquad (2)$

Так как $-\dfrac{\pi}{2} < 2\phi \leq \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos 2\phi \leq 0$. Поскольку $\cos\psi \leq 0$, то в формуле (2) следует оставить только ЧЕТЫРЕ значения k. Таким образом, $\psi = 2\psi + 2\pi k, k = 0, 1, \dots$
а, следовательно $\cos\psi = \cos 2\phi, \sin\psi = \sin 2\phi$

Так как $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 2c^2 - 1, \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi = 2sc$, то мы получим два уравнения:

$2c^2 - 1 = \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2sc = \dfrac{sign(xy)|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Из первого из них получаем $c = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}$,

и второго $s = \dfrac{sign(xy)|x|}{2c\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. QR - алгоритм решения проблемы собственных значений. Формулировка теоремы о сходимости

Пусть матрица A невырожденная, тогда её можно представить в виде $A = QR$, Q - ортогональная, R - верхнетреугольная (невырожденная).

QR-алгоритм состоит из построения последовательности матриц A_k по правилу:

$$\begin{array}{ccc} A = Q_1R_1 & , & A_1 = R_1Q_1, \\ A_1 = Q_2R_2 & , & A_2 = R_2Q_2, \\ \dots & & \dots \\ A_{k-1} = Q_kR_k & , & A_k = R_kQ_k, \\ \dots & & \dots \end{array} \qquad (1)$$

, где все Q_i ортогональны, а R_i невырожденные верхнетреугольные матрицы.

Для всякой матрицы A существует такая невырожденная матрица T, что матрица
$\Lambda = T^{-1}AT \qquad (2)$
имеет нормальную жорданову форму, т. е. Λ является блочно-диагональной матрицей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & & 0 \\ & \mathcal{J}_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}$$

, где каждый диагональный блок $\mathcal{J}_i$ является двухдиагональной матрицей:

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i(A) & 1 & & 0 & 0 \\ & \lambda_i(A) & 1 & & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & & \lambda_i(A) & 1 \\ 0 & 0 & & & \lambda_i(A) \end{pmatrix}$$

причём её диагональные элементы равны одному из собственных значений матрицы A.

Представим матрицу A_k в клеточном виде:

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \dots & A_{1m}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \dots & A_{2m}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{m1}^{(k)} & A_{m2}^{(k)} & \dots & A_{mm}^{(k)} \end{pmatrix}$$

где диагональные клетки $A_{ii}^{(k)}$ квадратные и имеют те же размеры, что и соответствующие диагональные блоки $\mathcal{J}_i$ матрицы Λ.

Утверждение (без доказательства)
При $k \to \infty$ все элементы поддиагональных клеток стремятся к нулю, а элементы всех остальных клеток остаются ограниченными.

Пусть все собственные значения матрицы A вещественные и различны по модулю. Предположим, что они занумерованы в порядке убывания:
$|\lambda_i(A)| > |\lambda_2(A)| > \dots > |\lambda_n(A)| > 0$

Нормальная жорданова форма форма матрицы, все собственные значения которой различны, является диагональной матрицей. Поэтому матрица Λ - диагональная. Предположим, что её диагональные элементы также упорядочены в порядке убывания их модулей, т. е. Λ имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & & & 0 \\ & \lambda_2(A) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \lambda_n(A) \end{pmatrix}$$

Теорема

Пусть все собственные значения невырожденной матрицы A вещественны и различны по модулю, и пусть все главные миноры матрицы T^{-1} из равенства (2) отличны от нуля. Тогда последовательность матриц A_k, определённых по правилу (1), сходится к верхнетреугольной матрице.
(Без доказательства)

Матрицы вида:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ & h_{32} & \dots & h_{3,n-1} & h_{3n} \\ 0 & & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

Называются верхними почти треугольными или верхними матрицами Хессенберга.
Всякую квадратную матрицу можно привести к подобной ей верхней форме Хессенберга.

QR-алгоритм применяют, как правило, к матрице, предварительно приведённой к верхней форме Хессенберга. Связано это с многократным вычислением QR-разложения для матриц. Но QR-разложение матрицы Хессенберга осуществляется за $O(n^2)$ арифметических действий, причём форма Хессенберга инвариантна по отношению к преобразованиям QR-алгоритма (т. е. если A - матрица Хессенберга, то и A_k - матрица Хессенберга).

10. Решение частичной проблемы собственных значений. Метод прямых итераций. Метод обратных итераций

Пусть у вещественной матрицы A все собственные значения вещественны и различны по модулю. Пусть $|\lambda_1(A)|$ - наибольшее по модулю СЗ.

Прямая итерация

Метод

$$x^{(k)} = \frac{Ax^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}$$
$$\lambda_1(A) = \frac{\left(Ax^{(k)}, x^{(k)}\right)}{(x^{(k)}, x^{(k)})} = \frac{(x^{(k)})^T A^{(k)}}{(x^{(k)})^T x^{(k)}}$$

Доказательство

Выберем произвольный вектор $x^{(0)}$ и построим последовательность векторов так, что $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$.
Очевидно, что $x^{(k)} = A^k x^{(0)}$.
Представим:
$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i u^{(i)}$$
Тогда:
$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^{n} c_i u^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i A^k u^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k(A) u^{(i)} =$$
$$= \lambda_1^k(A) \left[c_1 u^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} c_i u^{(i)} \left(\frac{\lambda_i(A)}{\lambda_1(A)} \right)^k \right] = \lambda_1^k(A) \cdot v^{(k)}$$
Так как $\left| \frac{\lambda_i(A)}{\lambda_1(A)} \right| < 1, \lim\limits_{k\to\infty} v^{(k)} = c_1 u^{(1)}$

Пусть $c_1 \neq 0$.
Тогда вектор $c_1 u^{(1)}$ отличается от $u^{(1)}$ только константой и будет собственным вектором, отвечающим наибольшему по модулю собственному значению λ_1.
Вектор $x^{(k)}$ отличается от $v^{(k)}$ лишь множителем $\lambda_k(A)$, тогда $x^{(k)} \rightarrow$ к собственному вектору при $k \rightarrow \infty$

Проблемы возникают из-за переполнений при вычислении вектора $x^{(k)}$.
Для этого будем нормировать вектор:
$\alpha_k = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} \right|$
$x^{(k)} = A \dfrac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}$
Это не нарушит сходимость последовательности к СВ, и более того, так как $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left| \dfrac{x_i^{(k)}}{\alpha_k} \right| = 1$, то $\left| \dfrac{x_i^{(k)}}{\alpha_k} \right| \rightarrow$ к СВ, имеющему наибольшую по модулю компоненту, равную 1.
Таким СВ будет является $\dfrac{u^{(1)}}{\alpha}$, где $\alpha = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left| u_i^{(1)} \right|$
Следовательно:
$\left| \dfrac{x^{(k)}}{\alpha_k} \right| \rightarrow \dfrac{u^{(1)}}{\alpha}$ и $\dfrac{x_i^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}} \rightarrow \dfrac{u^{(1)}}{\alpha}$
Но $A \dfrac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}} \rightarrow A \dfrac{u^{(1)}}{\alpha} = \dfrac{\lambda_k(A) u^{(1)}}{\alpha}$
Но так как $\dfrac{Ax^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}} = x^{(k)}$, тогда $x^{(k)} \rightarrow \lambda(A) \dfrac{u^{(1)}}{\alpha}$
Следовательно α_k стремится к наибольшей по модулю компоненте вектора $\lambda_1(A) \dfrac{u^{(1)}}{\alpha}$, равной $\lambda_1(A)$.
Следовательно, $\alpha_k \rightarrow \lambda_1(A)$

Обратная итерация

Метод

$x^{(k)} = A^{-1} \dfrac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}$
$Ax^{(k)} = \dfrac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}$

Доказательство

Поскольку СЗ обратной матрицы обратны собственным значениям исходной матрицы, а собственные вектора совпадают с собственными векторами исходной матрицы, то последовательной $x^{(k)}$ будет сходиться к СВ исходной матрицы A, отвечающему её наименьшему по модулю значению, при этом $\alpha_k \to \dfrac{1}{\lambda_n(A)} \implies \dfrac{1}{\alpha_k} \to \lambda_k(A)$.

Следовательно, метод обратных итераций позволяет вычислить наименьшее по модулю СЗ исходной матрицы, и отвечающий ему СВ.