Вариант 17

1

Условие

Определить тип уравнения. Привести уравнение к каноническому виду

$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

Решение

$a = 1 \quad 2b = -2 \quad c = 2 \quad F = 0$
$b^2 - ac = -1 < 0 \implies$ эллиптический тип.

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\ldots)$

Характеристическое уравнение

$dy^2 + 2dxdy + 2dx^2 = 0$

$dy = \left(-1 \pm \sqrt{-1}\right)dx = (-1 \pm i)dx$
$y = (-1+i)x + C_1 \implies \begin{cases} \xi = y + x \\ \eta = -x \end{cases}$

$u_x = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot -1 = u_\eta - u_\xi$
$u_{xx} = u_{\eta\eta} \cdot -1 + u_{\eta\xi} \cdot 1 - u_{\xi\xi} \cdot 1 - u_{\xi\eta} \cdot -1 = -u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} + 2u_{\eta\xi}$
$u_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 0 = u_\xi$
$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot 0 = u_{\xi\xi}$
$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot -1 = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}$

$-u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} + 2u_{\eta\xi} - 2\left(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}\right) + 2\left(u_{\xi\xi}\right) = 0$
$u_{\eta\eta} = -u_{\xi\xi}$

Канонический вид: $u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0$

Ответ

Гиперболический тип.
Канонический вид: $u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0$

2

Условия

Найти решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ при заданных начальных условиях

$u\left(x,0\right) = \dfrac{\sin(x)}{x} = \phi\left(x\right)$

$u_t\left(x,0\right) = \dfrac{x}{1+x^2} = \psi\left(x\right)$

$a = 1$

Решение

Воспользуемся формулой Даламбера

$u\left(x,t\right) = \dfrac{1}{2}\left(\phi\left(x-1\cdot t\right) + \phi\left(x+1\cdot t\right) + \int\limits_{x-1\cdot t}^{x+1\cdot t}\psi\left(z\right)dz\right)$

$\int\limits_{x-t}^{z+t}\dfrac{z}{z^2+1}dz = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+2tx+t^2+1\right) - \ln\left(x^2-2tx+t^2+1\right)\right)$

Ответ

$u\left(x,t\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x-t)}{x-t} + \dfrac{\sin(x+t)}{x+t} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+2tx+t^2+1}{x^2-2tx+t^2+1}\right)\right)$

3

Условие

Используя метод разделения переменных, найти решение однородного волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0$

$u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0$

$u\left(x,0\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{l}x\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{l}x\right)$

$u_t\left(x,0\right) = 0$

Решение

Будем искать частное решение в виде $u\left(x,t\right) = X\left(x\right)\cdot T\left(t\right)$

$XT'' = a^2X''T \implies \dfrac{T''}{a^2T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda^2$

$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X\left(0\right) = 0 \\ X\left(l\right) = 0 \end{cases}$

$X_n = A\sin\left(\lambda x\right) + B\cos\left(\lambda x\right)$

$\begin{cases} X_n\left(0\right) = 0 \\ X_n\left(l\right) = A\sin\left(\lambda l\right) \end{cases} \implies \begin{cases} B = 0 \\ \lambda = \dfrac{\pi n}{l} \end{cases}$

$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$
$T'' + \frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} T = 0$
$T_n(t) = B_n \sin\left(\frac{a\pi n t}{l}\right) + C_n \cos\left(\frac{a\pi n t}{l}\right)$
$u_n(x,t) = \left(\alpha_n \sin\left(\frac{a\pi n}{l} t\right) + \beta_n \cos\left(\frac{a\pi n}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$
$\frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t) = \left(\alpha_n \frac{a\pi n}{l} \cos\left(\frac{a\pi n}{l} t\right) - \beta_n \frac{a\pi n}{l} \sin\left(\frac{a\pi n}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{l} x\right)$
$\beta_n = \begin{cases} 1 & n \in \{1,3\} \\ 0 & n \notin \{1,3\} \end{cases}$
$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{a\pi n}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = 0$
$\alpha_n = 0$

$u(x,t) = \cos\left(\frac{a\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) + \cos\left(\frac{3a\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{l} x\right)$

Ответ

$u(x,t) = \cos\left(\frac{a\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) + \cos\left(\frac{3a\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{l} x\right)$

4

Условие

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0$
при
$f(x,t) = 2x + 1$
$u(0,t) = 1;\ u(1,t) = 2$
$u(x,0) = x + 1$

Решение

Будем искать решение в виде суммы двух $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ так, чтобы:
$a^2 w'' + 2x + 1 = 0$
$w(0) = 1$
$w(1) = 2$

$$w'' = -\frac{2x+1}{a^2}$$
$$w(x) = -\frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^2}{2a^2} + C_1 x + C_2$$
$$\begin{cases} w(0) = C_2 = 1 \\ w(1) = -\frac{5}{6a^2} + C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 1 + \frac{5}{6a^2} \end{cases}$$
$$w(x) = -\frac{2x^3+3x^2}{6a^2} + \left(1 + \frac{5}{6a^2}\right)x + 1$$

$$u_t = v_t + 0$$
$$u_x = v_x - \frac{x^2+x}{a^2} + C_1$$
$$u_{xx} = v_{xx} - \frac{2x+1}{a^2}$$

$$\begin{cases} u_t = v_t = a^2 \cdot \left(v_{xx} - \frac{2x+1}{a^2}\right) + 2x + 1 \\ u(0,t) = v(0,t) + 1 = 1 \\ u(1,t) = v(1,t) - \frac{5}{6a^2} + 1 + \frac{5}{6a^2} + 1 = 2 \\ u(x,0) = v(x,0) - \frac{2x^3+3x^2}{6a^2} + \left(1 + \frac{5}{6a^2}\right)x + 1 = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = \frac{2x^3+3x^2-5x}{6a^2} \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$XT' = a^2 X'' T \implies \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$
$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$
$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda x) + B_n \cos(\lambda x)$$
$$\begin{cases} X(0) = B_n = 0 \\ X(1) = A_n \sin(\lambda) = 0 \end{cases} \implies \lambda = n\pi$$
$$X_n = A_n \sin(n\pi \cdot x)$$

$$T' + a^2 (n\pi)^2 T = 0$$
$$\frac{T'}{T} = -a^2 (n\pi)^2$$
$$\frac{dT}{T} = -a^2 (n\pi)^2 dt$$
$$\ln(T) = -a^2 (n\pi)^2 t + C$$
$$T = \exp(C) \cdot \exp(-a^2 (n\pi)^2 t)$$
$$T_n = C_n \cdot \exp\left(-a^2 (n\pi)^2 t\right)$$

$v_n(x,t) = \alpha_n \sin(n\pi x) \cdot \exp\left(-a^2(n\pi)^2 t\right)$

$v(x,0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) \cdot 1 = \dfrac{2x^3+3x^2-5x}{6a^2}$

Домножим скалярно обе части на $\sin(m\pi x)$

$\int\limits_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

$\int\limits_0^1 \sin(m\pi x)\dfrac{2x^3+3x^2-5x}{6a^2}dx = I$

$I = \dfrac{3\cdot(-1)^m - 1}{\pi^3\, a^2\, m^3}$

$\dfrac{1}{2}\alpha_m = \dfrac{3\cdot(-1)^m - 1}{\pi^3\, a^2\, m^3}$

$\alpha_m = \dfrac{6\cdot(-1)^m - 2}{\pi^3\, a^2\, m^3}$

Ответ

$u(x,t) = -\dfrac{2x^3+3x^2}{6a^2} + \left(1 + \dfrac{5}{6a^2}\right)x + 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{6\cdot(-1)^m - 2}{\pi^3\, a^2\, m^3}\sin(m\pi x) \cdot \exp\left(-a^2(m\pi)^2 t\right)$

5

Условие

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$

Вне круга $r \geq a,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ с граничным условием $u_r(a,\phi) = 7 - \cos^5(\phi)$

Решение

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = 0$$

Будем искать решение в виде $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$

$\dfrac{1}{r}\Phi(rR')' + \dfrac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 \implies \dfrac{r(rR')'}{R} = -\dfrac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$

$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \phi(0) = \Phi(2\pi) \end{cases}$

$\lambda_k = k^2 \quad \Phi_k(\phi) = A_k\cos(k\phi) + B_k\sin(k\phi)$

$r^2R'' + rR' - k^2R = 0$

Ищем $R(r) = r^\mu$

$\mu(\mu-1)r^\mu + \mu r^\mu - k^2 r^\mu = 0$

$\mu^2 = k^2 \implies \mu = \pm k$

Так как решение должно быть ограничено вне круга

$R\left(r\right)=r^{-k}$

$u\left(r,\phi\right)=A_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^{-k}\left(A_k\cos\left(k\phi\right)+B_k\sin\left(k\phi\right)\right)$

$u_r\left(r,\phi\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}-kr^{-k-1}\left(A_k\cos\left(k\phi\right)+B_k\sin\left(k\phi\right)\right)$

$u_r\left(a,\phi\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka^{-k-1}\left(A_k\cos\left(k\phi\right)+B_k\sin\left(k\phi\right)\right)=7-\cos^5\left(\phi\right)=7-\dfrac{10cos(\phi)+5cos(3\phi)+cos(5\phi)}{16}$

Проверка на разрешимость

$\int\limits_0^{2\pi}7-\cos^5\left(\phi\right)d\phi=14\pi\neq0\implies$ задача неразрешима

С $7-$ задача не решается, потому уберём её

$B_k=0\quad\forall k>0$

$a^{-2}A_1=\dfrac{10}{16}\implies A_1=\dfrac{10}{16}a^2\qquad 3a^{-4}A_3=\dfrac{5}{16}\implies A_3=\dfrac{5}{48}a^4\qquad 5a^{-6}A_5=\dfrac{1}{16}\implies A_5=\dfrac{1}{80}a^6$

$A_k=0\quad\forall k\not\in\{1,3,5\}$

Ответ

$u\left(r,\phi\right)=A_0+\dfrac{10}{16}a^2\cos\left(\phi\right)+\dfrac{5}{48}a^4\cos\left(3\phi\right)+\dfrac{1}{80}a^6\cos\left(5\phi\right)$