# 1. Двухслойные итерационные методы. Погрешность. Невязка. Матрица перехода. Асимптотическая скорость сходимости.

**Итерационные методы**

Методы, задающие последовательность векторов $x^{(k)}: \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$

$x^*$ - решение

**Канонический вид двухслойного итерационного метода**

$B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + Ax^{(k)} = f$

$f = Ax^*$

*Другая запись*

$Bx^{(k+1)} = (B - \tau_k A)x^{(k)} + \tau f$

*Замечание*

При $\tau_k = \tau\ \forall k$ метод называется **стационарным**

**Двухслойность**

Означает, что функция зависит только от $x^{(k)}$ и не зависит от остальных приближений к решению.

**Погрешность**

Разница между $k$-ой итерацией и точным решением

$z^{(k)} = x^{(k)} - x^*$

**Невязка**

$r^{(k)} = Ax^{(k)} - f$

**Матрица перехода**

$S = E - \tau B^{-1}A$

**Вывод**

$B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = f$

$B\dfrac{x^{(k+1)} - x^* - (x^{(k)} - x^*)}{\tau} + Ax^{(k)} - Ax^* = 0$

$B\dfrac{z^{(k+1)} - z^{(k)}}{\tau} + Az^{(k)} = 0$

$Bz^{(k+1)} - Bz^{(k)} = -\tau Az^{(k)}$

$z^{(k+1)} = (E - \tau B^{-1}A)z^{(k)}$

$z^{(k+1)} = Sz^{(k)}$

**Асимптотическая скорость сходимости**

$R = -\ln \|S\|$

**Вывод**

Найдем $k$ удовлетворяющий неравенству $\|x^{(k)}\| \leq \dfrac{1}{e}\|x^{(0)}\|$

Так как $z^{(k)} = S^k z^{(0)}$, то для этого достаточно $\|S\|^k \leq \dfrac{1}{e} \iff k \ln \|S\| \leq -1$

Так как $\|S\| < 1 \implies k \geq \dfrac{1}{-\ln \|S\|}$

# 2. Критерий сходимости двухслойного итерационного процесса.

**Критерий сходимости**

Итерационный процесс сходится при любом начальном приближении $\iff |\lambda_i(S)| < 1 \; \forall i$

**Доказательство**

$(\implies)$

Итерационный процесс сходится при любом начальном приближении

Предположим, что $\exists \lambda_i(S) : |\lambda_i| \geq 1$

Пусть этому сз соответствует собственный вектор $u$

Тогда возьмем $x^{(0)} = x^* + u$

$z^{(0)} = u$

$z^{(k)} = S^k z^{(0)} = S^k u = \lambda_i^k u$

$\|z^{(k)}\| = \|\lambda_i^k u\| = |\lambda_i|^k \|u\| \quad u \neq \theta$

$\lim\limits_{k \to \infty} \|z^{(k)}\| \neq 0$

Получили противоречие

$(\impliedby)$

Чтобы получить доказательство необходимости позвоните на номер 8 423 439 85 47 и попросите там

На номер так никто не позвонил...

# 3. Достаточное условие сходимости двухслойного итерационного процесса.

**Достаточное условие сходимости**

Итерационный процесс сходится при любом начальном приближении $\impliedby$

$\exists$ матричная норма, согласованная с некоторой векторной: $\|S\| < 1$

**Доказательство**

Пусть $\|S\| < 1$

$u-$ собственный вектор для $\lambda$

$|\lambda| \cdot \|u\| = \|\lambda \cdot u\| = \|S \cdot u\|$

В силу согласованности $\|S \cdot u\| \leq \|S\| \cdot \|u\|$

$|\lambda| \leq \|S\| < 1$

Тогда выполняется критерий сходимости двухслойного итерационного процесса

# 4. Метод простой итерации. (Для симметрической, положительно определенной матрицы). Оптимальный шаг.

**Метод простой итерации**

Двухслойный итерационный стационарный метод при $B = E$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau(Ax^{(k)} - f)$

**Матрица перехода:**

$S = E - \tau A$

**Оптимальный шаг**

$\tau_0 = \dfrac{2}{\alpha + \beta}$

**Доказательство**

Найдем оптимальный $\tau_0 = argmax(R) = argmax(-\ln \|S\|) = argmin(\|S\|)$

Пусть $A = A^T > 0$ тогда все $\lambda_i > 0 \in \mathbb{R}$

$\alpha = \min(\lambda_i) \quad \beta = \max(\lambda_i)$

Будем использовать $\|S\|_2 = \max \lambda_i(S)$

$\lambda_i(S) = 1 - \tau\lambda_i(A)$

Рассмотрим функцию $f(\tau, \lambda) = |1 - \tau\lambda|$

$\max\limits_{\alpha \leq \lambda \leq \beta} f(\tau, \lambda) = \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta))$

Очевидно, что

$\max\limits_{1 \leq i \leq n} f(\tau, \lambda_i) \leq \max\limits_{\alpha \leq \lambda \leq \beta} f(\tau, \lambda)$ и

$\max\limits_{1 \leq i \leq n} f(\tau, \lambda_i) \geq \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta))$

$\implies \|S\|_2 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} f(\tau, \lambda_i) = \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta))$

Покажем, что $\tau_0 = \dfrac{2}{\alpha + \beta}$

$1 - \tau_0\alpha = \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} > 0$

$1 - \tau_0\beta = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} < 0$

$\|S\|_2 = \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$

Пусть $\tau < \tau_0$

$1 - \tau\alpha > 1 - \tau_0\alpha = \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$

$\max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta)) \geq f(\tau, \alpha) = |1 - \tau\alpha| > \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$

$\|S\|_2 > \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}$

Следовательно, по асимптотической скорости сходимости, это не оптимальный шаг

Аналогично для $\tau > \tau_0$

**Асимптотическая скорость сходимости**

$R = -\ln\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}$

# 5. Метод Якоби. Теорема Адамара.

**Метод Якоби**

Двухслойный итерационный стационарный метод при $B = D$

$A = A_L + D + A_U \quad D = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

$\tau = 1$

$Dx^{(k+1)} - Dx^{(k)} + (A_L + D + A_U)x^{(k)} = f$

$Dx^{(k+1)} = f - (A_L + A_U)x^{(k)}$

**Скалярный вид:**

$a_{ii}x_i^{(k+1)} = f_i - \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}$

**Матрица перехода:**

$S = E - D^{-1}A = E - D^{-1}(A_L + D + A_U) = -D^{-1}(A_L + A_U)$

**Строгое условие Адамара**

$|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

**Теорема Адамара**

Матрица со строгим условием Адамара не вырождена

**Доказательство**

Пусть $\det A = 0$

Тогда $Ax = 0$ - имеет ненулевое решение

Пусть $|x_k| = \max x_i > 0$

Возьмём $k$-е уравнение системы $Ax = 0$

$a_{kk}x_k + \sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j = 0$

$a_{kk}x_k = -\sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j$

$|a_{kk}||x_k| \leq \sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum\limits_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|$

$|a_{kk}| \leq \sum\limits_{j=1\neq k}^{n} |a_{kj}|$

Получили противоречие.

ч. т. д.

# 6. Метод Якоби. Теорема Гершгорина.

**Метод Якоби**

Двухслойный итерационный стационарный метод при $B = D$

$A = A_L + D + A_U \quad D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$\tau = 1$

$Dx^{(k+1)} - Dx^{(k)} + (A_L + D + A_U)x^{(k)} = f$

$Dx^{(k+1)} = f - (A_L + A_U)x^{(k)}$

**Скалярный вид:**

$a_{ii}x_i^{(k+1)} = f_i - \sum\limits_{j=1, i \neq j}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}$

**Матрица перехода:**

$S = E - D^{-1}A = E - D^{-1}(A_L + D + A_U) = -D^{-1}(A_L + A_U)$

**Теорема Гершгорина**

$\forall \lambda(A) \quad |\lambda - a_{ii}| \leq \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$

**Доказательство**

$A - \lambda E$ - вырожденная матрица.

Следовательно, по теореме Адамара $\exists k : |a_{kk} - \lambda| \leq \sum\limits_{j=1, j \neq k}^{n} |a_{kj}|$

P. S. В модуле разницы можно переставлять местами числа

# 7. Метод Якоби. Достаточное условие сходимости.

**Метод Якоби**

Двухслойный итерационный стационарный метод при $B = D$

$A = A_L + D + A_U \quad D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$\tau = 1$

$Dx^{(k+1)} - Dx^{(k)} + (A_L + D + A_U)x^{(k)} = f$

$Dx^{(k+1)} = f - (A_L + A_U)x^{(k)}$

**Скалярный вид:**

$a_{ii}x_i^{(k+1)} = f_i - \sum\limits_{j=1, i \neq j}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}$

**Матрица перехода:**

$S = E - D^{-1}A = E - D^{-1}(A_L + D + A_U) = -D^{-1}(A_L + A_U)$

**Достаточное условие сходимости**

Если для матрицы $A$ выполняется строгое условие Адамара, то метод Якоби сходится при любом начальном приближении

**Доказательство**

По [теореме Гершгорина](#) $|\lambda(S)| = |\lambda(S) - 0| \leq \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \leq \frac{|a_{ii}|}{|a_{ii}|} = 1$

Выполняется критерий сходимости

# 8. Метод Зейделя (метод полной релаксации). Достаточное условие сходимости.

**Метод Зейделя**

Называется методом полной релаксации, из-за обнуления $i$-й компоненты невязки.

Двухслойный итерационный стационарный метод при $B = A_L + D$

$A = A_L + D + A_U \quad D = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

$\tau = 1$

$(A_L + D)x^{(k+1)} - (A_L + D)x^{(k)} + (A_L + D + A_U)x^{(k)} = f$

$Dx^{(k+1)} = f - A_U x^{(k)} - A_L x^{(k+1)}$

**Скалярный вид:**

$a_{ii} x_i^{(k+1)} = f_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}$

**Матрица перехода:**

$S = E - (A_L + D)^{-1} A = E - (A_L + D)^{-1}(A_L + D + A_U) = -(A_L + D)^{-1} A_U$

**Критерий сходимости**

Из критерия сходимости итерационного процесса не сложно показать, что метод сходится при любом начальном приближении $\iff |\lambda| < 1 \ \forall \lambda$ и $\det(\lambda(A_L + D) + A_U) = 0$

**Вывод**

$\det\left(S - \lambda E\right) = 0$

$\det\left(-(A_L + D)^{-1} A_U - \lambda E\right) = 0$

$\det\left(-(A_L + D)^{-1}\left(A_U + \lambda\left(A_L + D\right)\right)\right) = 0$

$\det\left(-(A_L + D)^{-1}\right) \cdot \det\left(A_U + \lambda\left(A_L + D\right)\right) = 0$

Так как $\det\left(-(A_L + D)^{-1}\right) \neq 0$, то:

$\det\left(A_U + \lambda\left(A_L + D\right)\right) = 0$

**Достаточное условие сходимости**

Если для матрицы $A$ выполняется строгое условие Адамара, то метод Зейделя сходится при любом начальном приближении

**Доказательство**

Если матрица вырожденная, то существует строка $k$, в которой условие Адамара не выполняется.

$\det(\lambda(A_L + D) + A_U) = 0 \implies \exists k : |\lambda||a_{kk}| = |\lambda a_{kk}| \leq \sum\limits_{j=1}^{k-1} |\lambda||a_{kj}| + \sum\limits_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|$

$|\lambda|\left(|a_{kk}|-\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|\right)\leq\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|$

Также по условию знаем, что $|a_{kk}|>\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|+\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}| \implies |a_{kk}|-\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|>\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|$

Получаем оценку $|\lambda|<1$

Выполняется критерий сходимости

# 9. Метод последовательной верхней релаксации. Матрица перехода.

**Метод последовательной верхней релаксации**

В отличие от метода Зейделя, будет проводиться не обнуление невязки $r_i$, а лишь уменьшения $|r_i|$, по сравнению с $|t_i|$

$t_z \quad z=\left(x_1^{(k+1)},\dots,x_{i-1}^{(k+1)},x_i^{(k+1)},x_{i+1}^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)$

$r_y \quad y=\left(x_1^{(k+1)},\dots,x_{i-1}^{(k+1)},x_i^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)$

Пусть $|r_i|=|t_i-\alpha a_{ii}|<|t_i|$, где $\alpha=x_i^{(k)}-x_i^{(k+1)}$

$\left|\alpha-\frac{t_i}{a_{ii}}\right|<\left|\frac{t_i}{a_{ii}}\right|$

Если $\frac{t_i}{a_{ii}}>0$, то $0<\alpha<2\frac{t_i}{a_{ii}}$.

Если $\frac{t_i}{a_{ii}}<0$, то $0>\alpha>2\frac{t_i}{a_{ii}}$

Выразим $\alpha=\omega\frac{t_i}{a_{ii}}$, где $\omega\in(0,2)$

**Тогда** $r_i=t_i-a_{ii}\omega\frac{t_i}{a_{ii}}=t_i\,(1-\omega)$

Как видим, будет происходить уменьшение компоненты невязки $|r_i|<|t_i|$

При $\omega=1,\ r_i=0$

При $0<\omega<1$ - верхний метод

При $1<\omega<2$ - нижний метод

При подстановке в расчётные формулы для $r_i$ получаем: $B=D+\omega A_L \quad \tau=\omega$

**Скалярный вид:**

$x_i^{(k+1)}=\left[\omega f_i-\omega\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\omega\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+(1-\omega)x_i^{(k)}a_{ii}\right]\frac{1}{a_{ii}}$

**Каноническая форма:**

$(D+\omega A_L)\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\omega}+Ax^{(k)}=f$

**Матрица перехода:**

$S=E-\omega\,(D+\omega A_L)$

**Достаточное условие сходимости**

Для симметричных, положительно определённых матриц метод сходится, если $\omega\in(0,2)$

# 10. Метод наискорейшего градиентного спуска.

**Метод наискорейшего градиентного спуска**

Есть метод градиентного спуска, где $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \delta_k \nabla F(x^{(k)})$

**Условия:**

Возьмём $\delta_k$ из условия минимума:

$F\left(x^{(k+1)}\right) = F\left(x^{(k)} - \delta_k \nabla F(x^{(k)})\right)$

Пусть функция $F(y) = (Ay, y) - 2\left(f, y\right)$

где $A = A^T > 0$ и $A$ - вещественная.

$F(y) = \left(A\left(y - x^*\right), y - x^*\right) - \left(Ax^*, x^*\right)$

$F(y) = \left(A\left(y - x^*\right), y - x^*\right) - \left(Ax^*, x^*\right) =$

$= (Ay, y) - (Ax^*, y) - (Ay, x^*) + (Ax^*, x^*) - (Ax^*, x^*) = (Ay, y) - 2\left(Ax^*, y\right)$

Если $y = x^*$:

$F(x^*) = -\left(Ax^*, x^*\right)$

Если $y \neq x^*$:

$F(y) > F(x^*)$

Распишем $\nabla F$:

$F = \sum\limits_{i=1}^{n} (Ay_i)y_i - 2\sum\limits_{i=1}^{n} f_i y_i$

$\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} y_i y_j - 2\sum\limits_{i=1}^{n} f_i y_i$

$\nabla F = 2\left(Ay - f\right)$

$y^{(k+1)} = y^{(k)} - 2\delta_k\left(Ay^{(k)} - f\right)$

Пусть $\Delta_k = 2\delta_k$

$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \Delta_k\left(Ay^{(k)} - f\right)$

Пусть $\phi(\Delta_k) = F(y^{(k+1)})$

Вычислим $\phi'(\Delta_k) = 0$

$\phi'(\Delta_k) = \left[\left(Ay^{(k+1)}, y^{(k+1)}\right) - 2\left(f, x^{(k+1)}\right)\right]' = 0$

$\left(A\dfrac{dy^{(k+1)}}{d\Delta_k}, y^{(k+1)}\right) + \left(Ay^{(k+1)}, \dfrac{dy^{(k+1)}}{d\Delta_k}\right) - 2\left(f, \dfrac{dy^{(k+1)}}{d\Delta_k}\right) = 2\left(Ay^{(k+1)} - f, \dfrac{dy^{(k+1)}}{d\Delta_k}\right) = 0$

$\dfrac{dy^{(k+1)}}{d\Delta_k} = -\left(Ay^{(k)} - f\right)$

*По* $y^{(k+1)} = y^{(k)} - \Delta_k\left(Ay^{(k)} - f\right)$

$-2\left(Ay^{(k+1)} - f, Ay^{(k)} - f\right) = 0$

$\left(Ay^{(k)} - f - \Delta_k A\left(Ay^{(k)} - f\right), Ay^{(k)} - f\right) = 0$

$\left(Ay^{(k)} - f, Ay^{(k)} - f\right) - \left(Ay^{(k)} - f, \Delta_k A\left(Ay^{(k)} - f\right)\right) = 0$

Вытаскиваем $\Delta_k$, откуда получаем:

$$\Delta_k = \frac{\left(Ay^{(k)} - f, Ay^{(k)} - f\right)}{\left(A\left(Ay^{(k)} - f\right), Ay^{(k)} - f\right)}$$

Вопросы, связанные со сходимостью. Теорема такая:

$$F_0(y) := F(y) + (Ax^*, x^*) = (A(y - x^*), y - x^*)$$

$$z^{(k)} = x^{(k)} - x^*$$

$$F_0\big(x^{(k)}\big) = \big(Ax^{(k)}, z^{(k)}\big)$$

Теорема:

$$F_0\big(x^{(k)}\big) \le \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}\right)^{2n} F_0\big(x^{(0)}\big)$$

$$\alpha = \min_i \lambda_i(A) \qquad \beta = \max_i \lambda_i(A)$$

*P. S. На картинке ошибка, но мне лень всё перепечатывать xD*