№1

Условие

Найти $Int(0,1)$ в топологии Зарисского

$X = \mathbb{R}$

$T =$ всевозможные дополнения конечных множеств, или пустое

Решение

$A = \mathbb{R} \backslash (-\infty, 0] \cup [1; +\infty]$

Предположим противное, что $\exists U_x \in A : U_x \in Int(A) : U_x = \mathbb{R} \backslash V$, такое, что V - конечное.

$V = \mathbb{R} \backslash U_x$

$\mathbb{R} \backslash A \subset V$

$V \supset \mathbb{R} \backslash A = (-\infty, 0] \cup [1; +\infty]$

Следовательно V - бесконечное.

Получили противоречие.

Следовательно, $Int(0,1) = \emptyset$

№2

Условие

В $\mathbb{R}$, с $T_{\text{каноним}} : Cl\,[0,1], Cl\mathbb{Q}, Cl(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}), \quad Cl\{a\}$ в ξ

$\xi :$

$X = \{a, b, c, d\}$

$T_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}\}$

Решение

Множество всех точек прикосновения A называется замыканием A и обозначается как $Cl_X A$

$Cl(A) = \{x \in X | \forall U_x \; U_x \cap A \neq \emptyset\}$

$Cl(A) = \cap F_i : \; F_i$ - замкнуто и $F_i \supset A$

Каноническая топология на $\mathbb{R}$ это топология, базой которой служат открытые круги, т. е.

$$U \in T \iff \begin{cases} U = \emptyset \\ \forall x \in U \quad \exists V : V = \{x | x - x_0 < \epsilon\} : \quad V \in U \end{cases}$$

$Cl\left([0,1]\right)$

$\mathbb{R}\backslash A = (-\infty, 0) \cup (1; +\infty]$ - открытое
$\implies [0,1]$ - замкнуто, и является наименьшим замкнутым множеством, содержащим A

$Cl\left([0,1]\right) = [0,1]$

$Cl\left(\mathbb{Q}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall U_x$ в ней существуют рациональные точки
Следовательно, любая точка $\mathbb{R}$ - точка прикосновения $\mathbb{Q}$

$Cl\left(\mathbb{Q}\right) = \mathbb{R}$

$Cl(\mathbb{R})$

$\forall x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\ \forall U_x$ в ней существуют рациональные точки.

Следовательно, любая точка $\mathbb{R}R$ - точка прикосновения $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

$Cl(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

$Cl(\{a\})$

$\{a, c, d\} = X\backslash\{d\}$

$Cl\left(\{a\}\right) = \{a, c, d\}$

№3

Условие

Множество A замкнуто $\iff$ граница $A \subseteq A$

Решение

Граница $A = \partial A$
$(\implies)$
A - замкнуто $\implies X\backslash A \in T \implies \forall x \in X\backslash A\ \exists U_x = X\backslash A : U_x \cap A = \emptyset$
$\implies x$ - не граничная для $A\ \forall x \in X\backslash A \implies \partial A \subseteq A$

$(\impliedby)$
$\partial A \subseteq A \implies \exists x \in A : \forall U_x\ \ U_x \cap A \neq \emptyset\ U_x \cap V \neq \emptyset,\ V = X\backslash A$
Так как $\partial A \not\subseteq V$, то $\forall x \in V\ \exists U_x \subseteq V$, то есть $U_x \cap A = \emptyset$

Следовательно, $Cl(A) = A$

Так как Cl - замкнуто, то и A - замкнуто