1 (1.27)

Условие

Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B\left(x_1, r_1\right) \subset B\left(x_2, r_2\right)$ следуют неравенства $r_1 \leq r_2$ и $\|x_1 - x_2\| \leq r_2 - r_1$

Решение

$B\left(x_i, r_i\right) = \{x \in X : \rho\left(x, x_i\right) < r_i\}$
$B\left(x_1, r_1\right) = B_1$
$B\left(x_2, r_2\right) = B_2$

$r_1 \leq r_2$

Предположим противное: $r_1 > r_2$
Тогда $\exists x_k : \rho\left(x_1, x_k\right) \leq r_1 \ \cap \ \rho\left(x_2, x_k\right) > r_2 \implies x_k \in B_1 \cap x_k \notin B_2$
Получили противоречие.

$\|x_1 - x_2\| \leq r_2 - r_1$

Т. к. $B_1 \subset B_2 \implies x_1 \subset B_2 \implies \rho\left(x_2, x_1\right) + r_1 \leq r_2 \implies \rho\left(x_2, x_1\right) \leq r_2 - r_1$

Ч. Т. Д.

2 (5.17б)

Условие

Доказать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

имеет единственное решение $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_p$ для любого $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$ если выполнено условие:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1 \text{ при } p = \infty$$

Решение

Введём оператор $A : l_\infty \to l_\infty$.
$Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$
Такая последовательность будет ограниченна, а значит лежать в l_∞, так как $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$

Докажем, что A - сжимающий оператор.
$\|A\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| = \alpha < 1$
$\implies A$ - сжимающий оператор.

Полагая $y_0 = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty},\ Bx = Ax + y_0$ запишем $Bx = x$
Так как $\rho(Bx, By) = \|Bx - By\| = \|Ax - Ay\| = \rho(Ax, Ay)$ и A - оператор сжатия, то B - тоже оператор сжатия.
$\implies$ по теореме Банаха исходная СЛАУ имеет единственное решения для любого y.

Ч. Т. Д.

3 (10.9)

Условие

Пусть $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds$
Для каких значений p, $1 \leq p \leq \infty$, f является непрерывным функционалом в пространстве $L_p[-1, 1]$?
Найти норму f

Решение

Непрерывность функционала

Функционал непрерывен $\iff$ он ограничен.

Воспользуемся неравенством Гёльдера.
$k = x(s)$
$g = \frac{1}{\sqrt[3]{s}}$
$\left| \int\limits_{-1}^{1} kg ds \right| \leq \|k\|_p \cdot \|g\|_q$
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$q = \frac{p}{p-1}$
Для ограниченности функционала $\iff$ чтобы g принадлежала $L_q[-1, 1]$

Исследуем $\|g\|_q$ на сходимость:

$\|g\|_q = \left(\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{q}{3}} ds\right)^{\frac{1}{q}}$

Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{q}{3}} ds$ сходится при $-\dfrac{q}{3} > -1 \implies q < 3$

$\implies \dfrac{p}{p-1} < 3 \implies p > \dfrac{3}{2}$

Анализируем граничные значения:

$p = \dfrac{3}{2}$

$q = 3$

$\|g\|_3 = \sqrt[3]{\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{3}{3}} ds}$. Интеграл расходится

$\implies g \not\in L_3\left[-1,1\right]$

$\implies$ функционал не ограничен

$p = \infty$

$q = 1$

$\|g\|_1 = 2\dfrac{s^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = 3 < \infty$

$\implies g \in L_1\left[-1,1\right]$

$\implies$ функционал ограничен

Итог:

Функционал непрерывен в пространстве $L_p\left[-1,1\right]$ при $\dfrac{3}{2} < p \leq \infty$

Норма f

$\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in L_p \\ x \neq 0}} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|_p} = \|g\|_{\frac{p-1}{p}}$

При $\dfrac{3}{2} < p < \infty$

$\|g\|_q = \left(\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{q}{3}} ds\right)^{\frac{1}{q}} = \left(2\int\limits_{0}^{1} s^{-\frac{q}{3}} ds\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\dfrac{6}{3-q}\right)^{\frac{1}{q}}$

При подстановке $q = \dfrac{p}{p-1}$ получим:

$\|g\|_q = \left(6\dfrac{p-1}{2p-3}\right)^{\frac{p-1}{p}}$

При $p = \infty$

$\|g\|_1 = 3$

Итог:

$\|f\| = \begin{cases} \left(6\dfrac{p-1}{2p-3}\right)^{\frac{p-1}{p}} & \dfrac{3}{2} < p < \infty \\ 3 & p = \infty \end{cases}$

4 (8.35a)

Условие

Для $x \in L_2[-1,1]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n, n = 0,1,2$, если $x(t) = e^t$

Решение

В $L_2[1,1]$ с $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t) g(t) dt$ многочлен наилучшего приближения $p_n^*(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ функции $x(t)$ определяется условием ортогональности невязки подпространству P_n, $(x - p_n^*, q) = 0 \quad \forall q \in P_n$.
Выбирая базис $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ получаем систему уравнений: $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \left(t^i, t^m\right) = (x, t^m)$ для $m = 0,1,2,\ldots,n$

$$I_m = \int\limits_{-1}^{1} e^t t^m dt$$

$$I_0 = \int\limits_{-1}^{1} e^t dt$$
$$I_0 = e^1 - e^{-1}$$

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} t e^t dt$$
$$I_1 = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ v = e^t & dv = e^t dt \end{vmatrix} = te^t - \int\limits_{-1}^{1} e^t dt = \left(te^t - e^t\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 e^t dt$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ v = e^t & dv = e^t dt \end{vmatrix} = t^2 e^t - \int\limits_{-1}^{1} 2te^t dt = \left[e^t\left(t^2 - 2t + 2\right)\right]\Big|_{-1}^{1} = e - \frac{5}{e}$$

$n = 0$
$p_0^* = a_0$
$a_0(1,1) = (x,1)$
$a_0 \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dt = \int\limits_{-1}^{1} e^t \cdot 1 dt$
$a_0 \cdot 2 = e - \frac{1}{e}$
$a_0 = \frac{e^2 - 1}{2e}$
$p_0^* = \frac{e^2 - 1}{2e}$

$n = 1$
$p_1^* = a_0 + a_1 t$

$$\begin{cases} a_0\left(1,1\right)+a_1\left(t,1\right) & = & \left(x,1\right) \\ a_0\left(1,t\right)+a_1\left(t,t\right) & = & \left(x,t\right) \end{cases}$$

$$(1,1)=\int\limits_{-1}^{1} 1\cdot dt=2$$

$$(t,1)=(1,t)=\int\limits_{-1}^{1} tdt=0$$

$$(t,t)=\int\limits_{-1}^{1} t^2dt=2\int\limits_{0}^{1} t^2dt=\frac{2}{3}$$

$$(x,1)=I_0=e-\frac{1}{e}$$

$$(x,t)=I_1=\frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} a_0\cdot 2+a_1\cdot 0 & = & e-\dfrac{1}{e} \\ a_0\cdot 0+a_1\cdot \dfrac{2}{3} & = & \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 & = & \dfrac{e^2-1}{2e} \\ a_1 & = & \dfrac{3}{e} \end{cases}$$

$$p_1^*=\frac{e^2-1}{2e}+\frac{3}{e}t$$

$n=2$

$$p_2^*=a_0+a_1t+a_2t^2$$

$$\begin{cases} a_0\left(1,1\right)+a_1\left(t,1\right)+a_2\left(t^2,1\right) & = & \left(x,1\right) \\ a_0\left(1,t\right)+a_1\left(t,t\right)+a_2\left(t^2,t\right) & = & \left(x,t\right) \\ a_0\left(1,t^2\right)+a_1\left(t,t^2\right)+a_2\left(t^2,t^2\right) & = & \left(x,t^2\right) \end{cases}$$

$$\left(t^2,1\right)=\left(1,t^2\right)=\int\limits_{-1}^{1} t^2dt=\frac{2}{3}$$

$$\left(t^2,t\right)=\left(t,t^2\right)=\int\limits_{-1}^{1} t^3dt=0$$

$$\left(t^2,t^2\right)=\int\limits_{-1}^{1} t^4dt=\frac{2}{5}$$

$$\left(x,t^2\right)=I_2=e-\frac{5}{e}$$

По $n=1$:

$$(1,1)=2,\quad (t,1)=0,\quad (t,t)=\frac{2}{3},\quad (x,1)=e-\frac{1}{e},\quad (x,t)=\frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} a_0\cdot 2+a_1\cdot 0+a_2\cdot\dfrac{2}{3} & = & e-\dfrac{1}{e} \\ a_0\cdot 0+a_1\cdot\dfrac{2}{3}+a_2\cdot 0 & = & \dfrac{2}{e} \\ a_0\cdot\dfrac{2}{3}+a_1\cdot 0+a_1\cdot\dfrac{2}{5} & = & e-\dfrac{5}{e} \end{cases}$$

$\ldots$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{33-3e^2}{4e} \\ a_1 = \dfrac{3}{e} \\ a_2 = \dfrac{15e^2-105}{4e} \end{cases}$$

$$p_2^*(t) = \frac{33-3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2-105}{4e}t^2$$

Итог:

$$p_0^* = \frac{e^2-1}{2e}$$

$$p_1^* = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}t$$

$$p_2^*(t) = \frac{33-3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2-105}{4e}t^2$$