# №1

# Условие

Найти кривизну и кручение

1. Окружности
2. Винтовой линии
3. $\overline{\gamma}(t) = \left(t - \sin(t), 1 - \cos(t), 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \quad t = \pi$

# Решение

## Выкладки

Кривизна:
$$k(t) = \frac{\left|\left[\overline{\gamma}', \overline{\gamma}''\right]\right|}{|\gamma'|^3}$$
Кручение:
$$\Xi(t) = \frac{\left(\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'', \overline{\gamma}'''\right)}{\left|\left[\overline{\gamma}', \overline{\gamma}''\right]\right|^2}$$

## 1

$\overline{\gamma} = (r\cos(t), r\sin(t), c)$
$\gamma' = (-r\sin(t), r\cos(t), 0)$
$\gamma'' = (-r\cos(t), -r\sin(t), 0)$
$[\gamma', \gamma''] = \left(0, 0, r^2\right)$
$|[\gamma', \gamma'']| = r^2$
$|\gamma'| = r$

$$k(t) = \frac{|[\gamma', \gamma'']|}{|\gamma'|^3} = \frac{1}{r}$$

А кручения не будет)
(Его не существует у двумерной фигуры)

## 2

$\gamma = [r\cos(t), r\sin(t), ht]$
$\gamma' = [-r\sin(t), r\cos(t), h]$

$\gamma'' = [-r\cos(t), -r\sin(t), 0]$
$\gamma''' = [r\sin(t), -r\cos(t), 0]$

$[\gamma', \gamma''] = \left(hr\sin(t), -hr\cos(t), r^2\right)$
$|[\gamma', \gamma'']| = r\sqrt{h^2 + r^2}$
$|\gamma'| = \sqrt{r^2 + h^2}$
$\left(\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'', \overline{\gamma}'''\right) = hr^2$

$$k(t) = \frac{|[\gamma', \gamma'']|}{|\gamma'|^3} = \frac{r}{r^2 + h^2}$$
$$\Xi = \frac{\left(\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'', \overline{\gamma}'''\right)}{\left|[\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'']\right|^2} = \frac{h}{h^2 + r^2}$$

### 3

$\overline{\gamma}(t) = \left(t - \sin(t), 1 - \cos(t), 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \quad t = \pi$
$\gamma(t)' = \left(1 - \cos(t), \sin(t), 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$
$\gamma(t)'' = \left(\sin(t), \cos(t), -\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$
$\gamma(t)''' = \left(\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

$\gamma(\pi) = (\pi, 1 + 1, 0)$
$\gamma(\pi)' = (2, 0, 0)$
$\gamma(\pi)'' = (0, 1, -1)$
$\gamma(\pi)''' = (1, 0, 0)$

$[\gamma', \gamma''] = (0, 2, 2)$
$|[\gamma', \gamma'']| = 2\sqrt{2}$
$|\gamma'| = 2$
$\left(\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'', \overline{\gamma}'''\right) = 0$

$$k(t) = \frac{|[\gamma', \gamma'']|}{|\gamma'|^3} = 2^{-\frac{3}{2}}$$
$$\Xi = \frac{\left(\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'', \overline{\gamma}'''\right)}{\left|[\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'']\right|^2} = 0$$

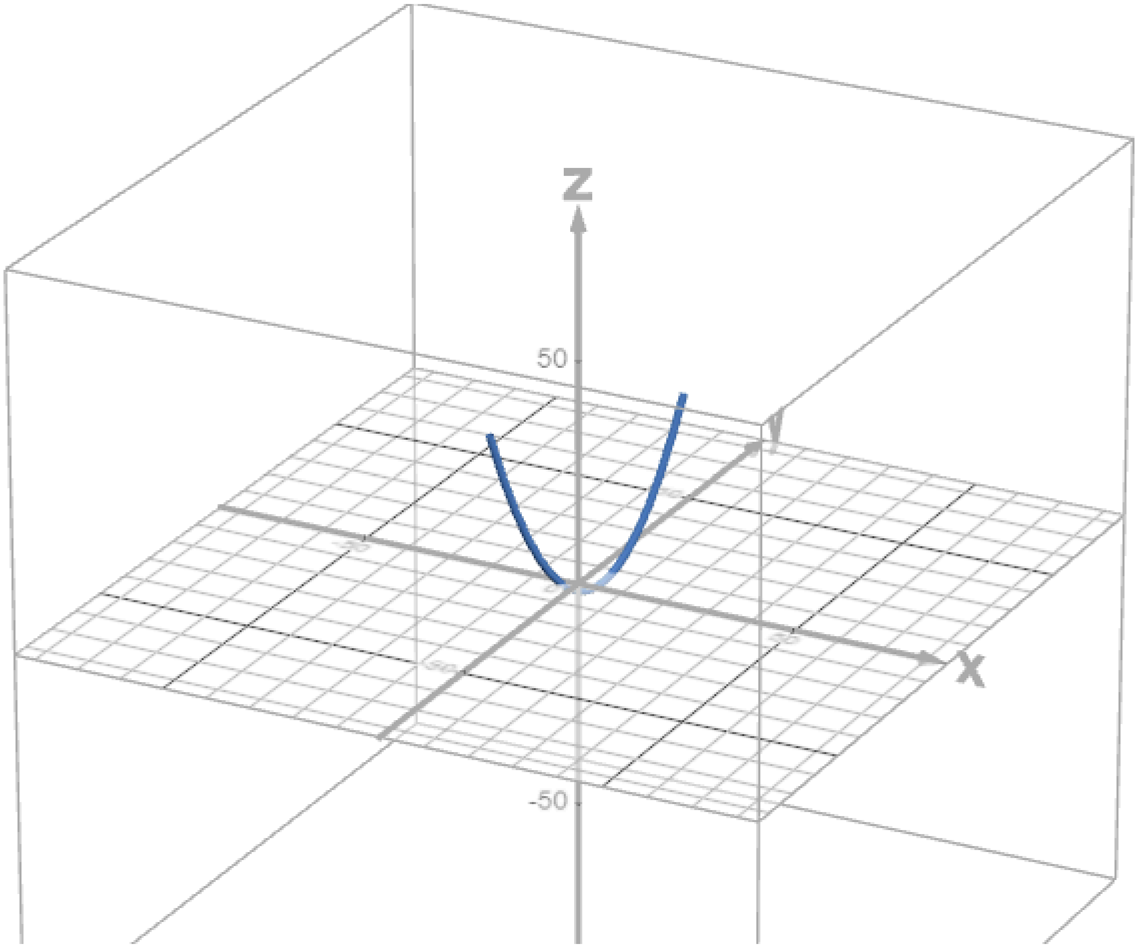
# №2

## Условие

Доказать, что кривая плоская
$\overline{\gamma}(t) = \left(2t, 3t + 4, t^2 - 3\right)$
Найти плоскость, в которой лежит эта кривая.

# Решение

Кривая имеет вид:




## Проверка плоскости кривой

Кривая плоская, если её кручение = 0 ИЛИ если нормаль к соприкасающейся плоскости постоянная

## Способ через нормаль к соприкасающейся |bad|

**Найдём базис Френе**

$\overline{\gamma}(t) = \big(2t, 3t+4, t^2-3\big)$

$\gamma'(t) = (2, 3, 2t)$

$$\overline{v} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \left(\frac{2}{\sqrt{4t^2+13}}, \frac{3}{\sqrt{4t^2+13}}, \frac{2t}{\sqrt{4t^2+13}}\right)$$

$$v' = \left(-\frac{8t}{(4t^2+13)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{12t}{(4t^2+13)^{\frac{3}{2}}}, \frac{26}{(4t^2+13)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$|v'| = \frac{26}{4t^2\sqrt{13}+13^{\frac{3}{2}}}$$

Конечно, можно и дальше пробовать считать это всё, но я не вижу смысла.

### Способ через кручение

$\overline{\gamma}(t) = \left(2t, 3t+4, t^2-3\right)$
$\overline{\gamma}'(t) = (2, 3, 2t)$
$\overline{\gamma}''(t) = (0, 0, 2)$
$\overline{\gamma}'''(t) = (0, 0, 0)$

Смешанное произведение даст нам 0, поэтому не вижу смысла дальше считать.

В числителе будет ноль, а это значит, что $\Xi = \dfrac{\left(\overline{\gamma}', \overline{\gamma}'', \overline{\gamma}'''\right)}{\left|\left[\overline{\gamma}', \overline{\gamma}''\right]\right|^2} = 0$

## Нахождение соприкасающейся плоскости

Построим плоскость по 3-м точкам $t \in [-1, 0, 1]$
$\gamma(-1) = (-2, 1, -2)$
$\gamma\,(0) = (0, 4, -3)$
$\gamma\,(1) = (2, 7, -2)$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**Ответ:**

$3x - 2y + 8 = 0$