Задача

Доказать, что Σ является базой канонической топологии на $\mathbb{R}^2$.
Каноническая топология на $\mathbb{R}^2$ это топология, базой которой служат открытые круги, т. е.
$U^2 \in T^2 \iff \begin{cases} U^2 = \emptyset \\ \forall (x,y) \in U^2 \quad \exists V^2 : V^2 = \left\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \epsilon\right\} : \quad V^2 \in U^2 \end{cases}$

№1

Условие

Σ^2 - все открытые круги $B^2((x_0,y_0),\epsilon) = \left\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \epsilon\right\}$

Решение

Для того, чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2, необходимо, чтобы
$\forall U^2 \in T^2 \quad \forall x(x_i,y_i) \in U^2 \quad \exists B^2((x_i,y_i),\epsilon) \in \Sigma^2 : \quad x \in B^2 \subseteq U^2$

По условию, $\Sigma^2 = \left\{B_i^2|i \in I\right\}, \text{где } B^2 = \left\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \epsilon\right\}$, видим, что Σ^2 принадлежит топологии и является набором множеств открытых кругов.

Необходимо, чтобы любая точка круга $U^2((x_0,y_0)^2,\epsilon_0)$ могла быть "окружена" кругом $B^2((x_1,y_1),\epsilon_1)$. Найдём такой круг, который будет иметь своим центром эту точку.

Пусть длина $\rho = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$. (Евклидова метрика).

Для любой точки (x_1,y_1) можно выписать следующее уравнение:
$(x\ -\ x_1)^2\ +\ (y\ -\ y_1)^2\ < (e_{ps} -\ \rho)^2$

Для любого круга U^2 из топологии мы сможем найти такой же круг из Σ^2, который будет иметь в центре точку x и радиус ϵ.

№2

Условие

Σ^∞ - все открытые квадраты $k((x_0,y_0),\epsilon) = \{(x,y)|\max\{(x-x_0),(y-y_0)\} < \epsilon\}$

Решение

Для того, чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2, необходимо, чтобы $\forall U^2 \in T^2 \quad \forall x(x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists k^2((x_i, y_i), \epsilon): \quad x \in k^2 \subseteq U^2$.

Необходимо, чтобы любая точка круга $U^2((x_0, y_0)^2, \epsilon_0)$ могла быть "окружена" квадратом $k^2((x_1, y_1), \epsilon_1)$. Найдём такой квадрат, который будет иметь своим центром эту точку.

Пусть длина $\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. (Евклидова метрика).

Тогда для любой точки (x_1, y_1) можно выписать следующее уравнение:
$\max\left(|x \; - \; x_1|, \; |y \; - \; y_1|\right) \; < \; \frac{(e_{ps} \; - \; \rho)}{\sqrt{2}}$.
Тем самым, для любой точки из U^2 найдётся такой квадрат, который будет описывать эту точку.

Ч. Т. Д.

№3

Условие

Σ^1 - все открытые квадраты $k'((x_0)) = \{(x, y)||x - x_0| + |y - y_0| < \epsilon\}$

Решение

Для того, чтобы Σ^2 была базой канонической топологии T^2, необходимо, чтобы $\forall U^2 \in T^2 \quad \forall x(x_i, y_i) \in U^2 \quad \exists k'^2((x_i, y_i), \epsilon): \quad x \in k'^2 \subseteq U^2$.

Необходимо, чтобы любая точка круга $U^2((x_0, y_0)^2, \epsilon_0)$ могла быть "окружена" квадратом $k^2((x_1, y_1), \epsilon_1)$. Найдём такой квадрат, который будет иметь своим центром эту точку.

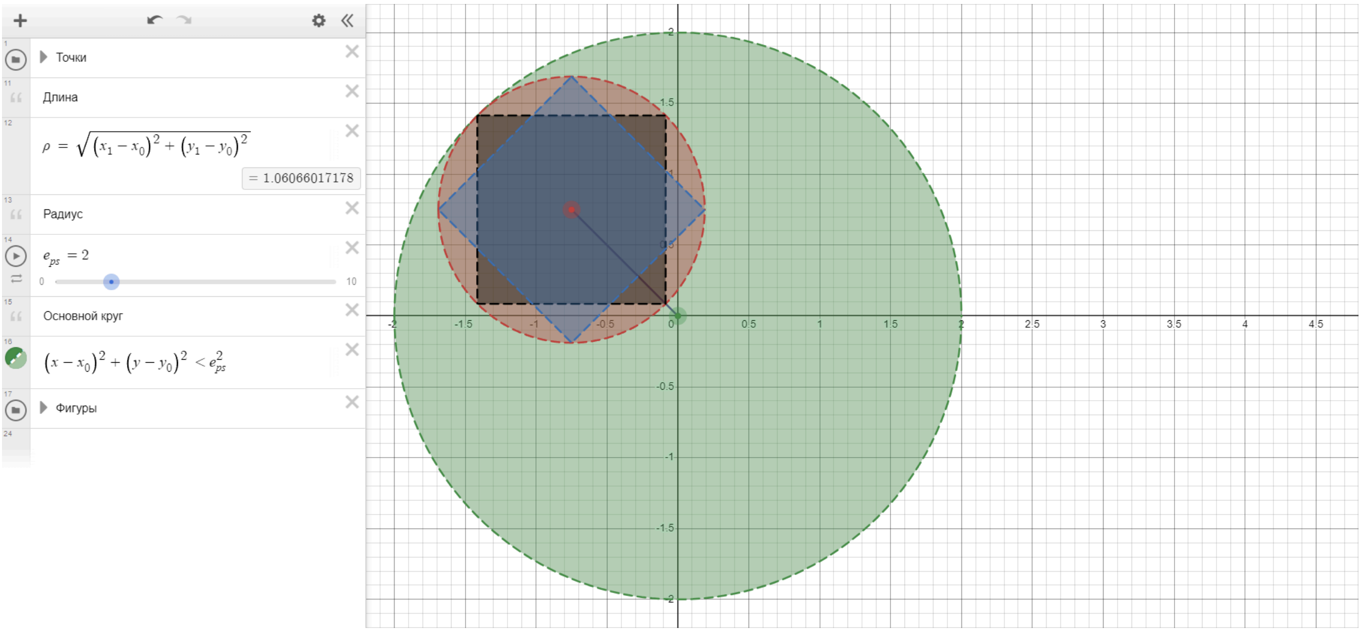
Пусть длина $\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. (Евклидова метрика).

Тогда для любой точки (x_1, y_1) можно выписать следующее уравнение:
$|x \; - \; x_1| \; + \; |y \; - \; y_1| \; < \; (e_{ps} \; - \; \rho)$.
Тем самым, для любой точки из U^2 найдётся такой квадрат, который будет описывать эту точку.

Ч. Т. Д.

Подтверждающий графический материал

https://www.desmos.com/calculator/gyrcd44u74



Как мы видим, любую точку из множества U^2 топологии можно окружить любой из вышеописанных фигур.