

№1

Условие

Образ всюду плотного множества при сюръективном непрерывном отображении всюду плотное

Решение

$\forall U \in T_Y \neq \emptyset, \implies f^{-1}(U) \in T_X \neq \emptyset$ и $\forall K$ окрестности точки $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(U) = K$ благодаря сюръекции и непрерывности (были отображены все множества (сюръекция) и все они открыты (непрерывность)))

$$f^{-1}(U) = K \quad f(A) = B$$

Так как $Cl(A) = X \implies K \cap A \neq \emptyset$

$$\implies \forall x \in K \cap A, f(x) \in U \cap B$$

Следовательно, раз $\forall U$ выполняется вышеописанное, то $Cl(B) = Y$

№2

Условие

Непрерывно ли в топологическом пространстве с индуцированной из канонической

топологии на \mathbb{R} отображение $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 3 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}$

Решение

$f : X \rightarrow Y$ - непрерывно \iff прообраз любого открытого в Y множества открыт.

Каноническая топология на \mathbb{R} это топология, базой которой служат открытые круги, т. е.

$$U \in T \iff \begin{cases} U = \emptyset \\ \forall x \in U \quad \exists V : V = \{x | (x - x_0) < \epsilon\} : \quad V \in U \end{cases}$$

Предположим, что $x \in [0, 1)$

Пусть $V_{f(x)}$ - окрестность $f(x)$ на Y .

Предположим, что часть окрестности $K \subset V_{f(x)}$ лежит в другой части отрезка $K \subset [1, 2]$.

Также возьмём $V_{f(x)} \neq Y$.

Тогда, прообраз $f^{-1}(V_{f(x)} \setminus K) \subset U_x$, где U_x - окрестность x на X .

Однако $f^{-1}(K) \cup f^{-1}(V_{f(x)} \setminus K) \not\subset T_X$ по построению (между $f^{-1}(K)$ и $f^{-1}(V_{f(x)} \setminus K)$ будет

некоторое непустое множество, не лежащее ни в одном из вышеописанных множеств)
(Вдобавок, $f^{-1}(K) \cap U_x \neq f^{-1}(K)$).

Следовательно раз прообраз $V_{f(x)}$ не открыт, то, по определению непрерывности, функция не непрерывна.

Р. С. Можно было доказать с помощью примера, взяв $(1.5, 2]$, но я решил расписать в общем случае

Р. Р. С. Ещё можно было пойти через лекционное определение ($f : X \rightarrow Y$ - непрерывные в точке $x_0 \in X \iff \forall V$ - окрестность точки $f(x_0) \exists U$ - окрестность точки $x_0 : f(U) \subset V$)

№3

Условие

Может ли множество быть всюду плотным и нигде не плотным

Решение

Перефразируем условия:

Существует ли $A \in X : Cl(A) = X$ и $Cl(Int(X \setminus A)) = X$

Рассмотрим условия, которые должны выполняться:

$A \neq X$, так как $Cl(Int(X \setminus A)) = Cl(\emptyset) = \emptyset \neq X$

$A \neq \emptyset$, так как $Cl(A) = \emptyset \neq X$

A - не замкнуто, так как иначе $Cl(A) = A \neq X$

A - не открыто, так как иначе $Cl(Int(X \setminus A)) = X \setminus A$

Р. С. 4-е условие было добавлено как теоретическое. Оно не нужно для получения противоречия, но мне было бы интересно узнать, действительно ли $Int(X \setminus A) = X \setminus A$?

Пусть $\exists A \in X : A \neq X, Cl(Int(X \setminus A)) = X$

$A \neq \emptyset \quad A \neq X \quad A \notin T$

Возьмём $\exists U \in T \neq \emptyset : U \subset X \setminus A$, так как иначе $Int(X \setminus A) = \emptyset$ и $Cl(Int(X \setminus A)) = \emptyset \neq X$
 $X \setminus A$ - не пустое

Но тогда $A \subset X \setminus U \implies Cl(A) \subset X \setminus U$ (так как $X \setminus U$ - замкнуто) $\implies Cl(A) \neq X$

Получили противоречие.

Значит не существует множества, удовлетворяющего условиям