Коллок 3

1. Определение устойчивости разностной схемы.

$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = f.$
A- дифференциальный оператор по пространственным переменным

$\phi|_{t=0} = g$

$\phi^{j+1} = T\phi^j + \tau S f^j$ - разностная схема

$\phi^0 = g$

Разностная схема устойчива, если
$\exists \{C_i\}_{i=1}^2 > 0, \text{независящих от } h, j: \ \forall h, \forall j \quad \|\phi^j\|_{\Phi_h} \leq C_1 \|f^j\|_{F_h} + C_2 \|g\|_{G_h}$

2. Доказательство неравенства $\left\|(E + \sigma A)^{-1}\right\| \leq 1$.

Пусть $A \geq 0$ (неотрицательно определённый), $\sigma \geq 0$.

Так как норма подчинённая, то
$\left\|(E + \sigma A)^{-1}\right\| = \sup\limits_{\phi} \frac{\left\|(E + \sigma A)^{-1}\phi\right\|}{\|\phi\|} = \max\limits_{\phi} \sqrt{\frac{[(E + \sigma A)^{-1}\phi, (E + \sigma A)^{-1}\phi]}{[\phi, \phi]}}$

Пусть $\psi = (E + \sigma A)^{-1}\phi \implies \phi = (E + \sigma A)\psi$

$\left\|(E + \sigma A)^{-1}\right\| = \max\limits_{\psi} \sqrt{\frac{[\psi, \psi]}{[(E + \sigma A)\psi, (E + \sigma A)\psi]}} = \max\limits_{\psi} \sqrt{\frac{(\psi, \psi)}{(\psi, \psi) + 2\sigma(A\psi, \psi) + \sigma^2(A\psi, A\psi)}}$
Т. к. $A \geq 0$ и $\sigma \geq 0$, то каждое слагаемое в числителе и знаменателе ≥ 0
$\implies$ числитель $\geq$ знаменателя $\implies \max\limits_{\phi} \sqrt{\frac{\cdots}{\cdots}} \leq 1$
$\implies \left\|(E + \sigma A)^{-1}\right\| \leq 1$

Ч. Т. Д.

3. Доказательство леммы Келлога.

Формулировка

Пусть $A \geq 0$, $\sigma \geq 0$.

$||(E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}|| \leq 1$

Доказательство

$T = (E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}$

$$||T||^2 = \max_{\phi} \frac{(T\phi, T\phi)}{(\phi, \phi)} = \max_{\phi} \frac{\left[(E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}\phi, (E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}\phi\right]}{[\phi, \phi]}$$

Пусть $\psi = (E + \sigma A)^{-1}\phi$.

$$||T||^2 = \max_{\phi} \frac{[(E - \sigma A)\psi, (E - \sigma A)\psi]}{[(E + \sigma A)\psi, (E + \sigma A)\psi]} = \frac{(\psi, \psi) - 2\sigma(A\psi, \psi) + \sigma^2(A\psi, A\psi)}{(\psi, \psi) + 2\sigma(A\psi, \psi) + \sigma^2(A\psi, A\psi)} \leq 1$$

(т. к. всё положительно)

$\implies \|T\| \leq 1$

Ч. Т. Д.

4. Схема Кранка-Николсон.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = 0, \qquad \phi|_{t=0} = g \qquad \Omega \times \Omega_t$$

Пусть A - аппроксимация дифференциального оператора и является матрицей, ϕ - сеточная функция.

$$\frac{\phi^{j+1} - \phi^j}{\tau} + A\frac{\phi^{j+1} + \phi^j}{2} = 0 \qquad O(\tau^2) \qquad [t_j, t_{j+1}]$$

$\phi^0 = g$

Также, если $[t_j, t_{j+1}] \longrightarrow [t_j, t_{j+\frac{1}{2}}] \cup [t_{j+\frac{1}{2}}, t_{j+1}]$, то

$\dfrac{\phi^{j+\frac{1}{2}} - \phi^j}{\frac{\tau}{2}} + A\phi^j = 0$ - явная схема $O(\tau)$

$\dfrac{\phi^{j+1} - \phi^{j+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} + A\phi^{j+1} = 0$ - неявная схема $O(\tau)$

5. Доказательство устойчивости схемы Кранка-Николсон для однородного уравнения.

Пусть A зависит от времени.

$$\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\phi^{j+1} = \left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\phi^j$$
$$\phi^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\phi^j$$
$$||\phi^{j+1}|| = \left|\left|\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\right|\right| \cdot ||\phi^j||$$

$\phi^{j+1} = T\phi^j \implies ||\phi^{j+1}|| \leq ||T|| \cdot ||\phi^j||$

По лемме Келлога $||T|| \leq 1$.

Следовательно, $||\phi^{j+1}|| \leq ||\phi^j||$ и схема устойчива.

Фан факт: если $(A\phi, \phi) = 0$, то $||\phi^{j+1}|| = ||\phi^j||$.

Для применения леммы Келлога нужно доказать коммутативность операторов.
Лемма. $\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right) = \left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}$

Доказательство v1
Домножим обе части с обеих сторон на $\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)$
$\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right) = \left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\left(E - \frac{\tau}{2}A\right) = E - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 A^2$
Ч. Т. Д.

Доказательство v2
$\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1} = E$
Умножаем слева на $\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)$:
$\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1} = \left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)$
Матрицы посередине коммутируют ($\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right) = \left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)$):
$\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1} = \left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)$
$\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1} = \left(E + \frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}A\right)$
Ч. Т. Д.

6. Доказательство устойчивости схемы Кранка-Николсон для неоднородного уравнения.

Пусть $\Lambda^j = A^{j+\frac{1}{2}}; \dfrac{A^j + A^{j+\frac{1}{2}}}{2}; A^j + \dfrac{\tau}{2}A_t^j$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = f \qquad \phi|_{t=0} = g$$

$$\frac{\phi^{j+1} - \phi^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{\phi^{j+1} + \phi^j}{2} = f^j, \qquad f^j = f(t_{j+\frac{1}{2}})$$

$T^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)$
$S^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}$
$\phi^{j+1} = T^j\phi^j + \tau S^j f^j$

$\|T^j\| \le 1$ (по лемме Келлога) $\implies \|T^j\phi^j\| \le \|\phi^j\|$
$\|S^j\| \le 1$ (см. вопрос 2) $\implies \|S^j f^j\| \le \|f^j\|$

$$\|\phi^{j+1}\| = \|T^j\phi^j + \tau S^j f^j\| \le \|T^j\phi^j\| + \tau\|S^j f^j\| \le \|\phi^j\| + \tau\|f^j\| \le \|g\| + \tau \cdot j \cdot \sup_i \|f^i\|$$

7. Порядок аппроксимации схемы Кранка-Николсон для однородного уравнения.

A не зависит от t

Разложение Тейлора точного решения:

$\phi^{j+1} = \phi^j + \tau(\phi^j)' + \frac{\tau^2}{2}(\phi^j)'' + O\left(\tau^3\right)$

Приведём равенство выше к виду разностной схемы (отнимем ϕ^j, поделим на τ, прибавим $A\phi$):

$L_\tau \phi = \frac{1}{\tau}\left[\tau(\phi^j)' + \frac{\tau^2}{2}\left(\phi^j\right)'' + O\left(\tau^3\right)\right] + \frac{A}{2}\left[2\phi^j + \tau(\phi^j)' + \frac{\tau^2}{2}(\phi^j)'' + O\left(\tau^3\right)\right] =$
$= (\phi^j)' + \frac{\tau}{2}(\phi^j)'' + O\left(\tau^2\right) + A\phi + \frac{\tau}{2}A(\phi^j)' + O\left(\tau^2\right)$
$\phi' = -A\phi$
$\phi'' = -A\phi' = A^2\phi$
$\implies L_\tau \phi = O\left(\tau^2\right)$

A зависит от t

$L\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi$

(ϕ) - проекция точного решения на сетку

$(L_\tau \phi)^j = \frac{(\phi)^{j+1} - (\phi)^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{(\phi)^{j+1} + (\phi)^j}{2}$

$||(L_\tau \phi)||_{C_\tau} = \max_{t_j} ||(L_\tau \phi)^j||$

$(\phi)^{j+1} = (\phi)^j + \tau(\phi_t')^j + \frac{\tau^2}{2}(\phi_{tt}'')^j + O(\tau^3)$

$\phi_t' = -A\phi$
$\phi_{tt}'' = -A_t\phi - A\phi_t' = A^2\phi - A_t\phi$

$(\phi)^{j+1} = (\phi)^j - \tau A^j(\phi)^j + \frac{\tau^2}{2}((A^j)^2(\phi)^j - (A_t)^j(\phi)^j) + O(\tau^3)$

$||L_\tau \phi|| = \left|\left|-A^j(\phi)^j + \frac{\tau}{2}((A^j)^2(\phi)^j - (A_t)^j(\phi)^j) + O(\tau^2) + \Lambda^j\left((\phi)^j - \frac{\tau}{2}A^j(\phi)^j + O(\tau^2)\right)\right|\right| =$
$= \left|\left|\Lambda^j(\phi)^j + A^j(\phi)^j + \frac{\tau}{2}((A^j)^2 - (A_t)^j - \Lambda^j A^j)(\phi)^j + O(\tau^2)\right|\right|$

Аппроксимация Λ^j	Порядок
$\Lambda^j = A^j$ (левый конец)	$O\left(\tau\right)$
$\Lambda^j = A^{j+\frac{1}{2}}$ (центр)	$O\left(\tau^2\right)$
$\Lambda^j = A^j + \frac{\tau}{2}A_t^j$ (разложение Тейлора)	$O\left(\tau^2\right)$

8. Доказательство аппроксимации метода покомпонентного расщепления.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = f \qquad \phi|_{t=0} = g$$

$A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ - положительно полуопределённые

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_{j+\frac{1}{2}}) \qquad [t_j, t_{j+1}]$$

$$\phi^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\phi^j$$
$$T^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)$$

Так как $\frac{b_0}{1-q} = b_0 + b_0 q + d_0 q^2 + \ldots$, то разложим в ряд Тейлора:
$$\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)^{-1} = E - \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_\alpha^j)^2 + \ldots$$

$$T^j = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_2^j)^2 + \ldots\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1^j)^2 + \ldots\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right) =$$
$$= E - \frac{\tau}{2}\left(2\Lambda_2^j + 2\Lambda_1^j\right) + \frac{\tau^2}{4}\left(2(\Lambda_2^j)^2 + 2(\Lambda_1^j)^2 + 4\Lambda_2^j\Lambda_1^j\right) + O(\tau^3)$$

$$T^j = E - \tau\left(\Lambda_2^j + \Lambda_1^j\right) + \frac{\tau^2}{2}\left((\Lambda_2^j)^2 + (\Lambda_1^j)^2 + 2\Lambda_2^j\Lambda_1^j\right) + O(\tau^3)$$

Для схемы Кранка-Николсон:
$T^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right) = E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda^j)^2 + O(\tau^3)$, где $\Lambda^j = \Lambda_1^j + \Lambda_2^j$

Если $\Lambda_1^j\Lambda_2^j = \Lambda_2^j\Lambda_1^j$, то схема имеет второй порядок аппроксимации, иначе первый.

Способ вычисления:
$$\xi^{j+\frac{1}{4}} = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\phi^j$$
$$\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\xi^{j+\frac{2}{4}} = \xi^{j+\frac{1}{4}}$$
$$\xi^{j+\frac{3}{4}} = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\xi^{j+\frac{2}{4}}$$
$$\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\phi^{j+1} = \xi^{j+\frac{3}{4}}$$

9. Доказательство устойчивости метода покомпонентного расщепления.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A\phi = f \qquad \phi|_{t=0} = g$$

$A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ - положительно полуопределённые

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_{j+\frac{1}{2}}) \qquad [t_j, t_{j+1}]$$

$$\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}}-\phi^j}{\tau}+\Lambda_1^j\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}}+\phi^j}{2}=0$$
$$\frac{\phi^{j+1}-\phi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\Lambda_2^j\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}}+\phi^{j+1}}{2}=0$$

$$\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)\phi^{j+\frac{\alpha}{2}}=\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)\phi^{j+\frac{\alpha-1}{2}}$$

$$\phi^{j+\frac{1}{2}}=\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\phi^j$$
$$\phi^{j+1}=\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\phi^{j+\frac{1}{2}}\implies$$
$$\implies\phi^{j+1}=\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\phi^j$$

$$T^j=\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)$$
Разделив оператор на 2 части и применив лемму Келлога получим
$||T||\leq 1\implies||\phi^{j+1}||\leq||\phi^j||$ при $\frac{\tau}{2}||\Lambda_1^j||<1$ и $\frac{\tau}{2}||\Lambda_2^j||<1$.

10. Метод двуциклического покомпонентного расщепления для однородной задачи.

Рассматриваем отрезки $[t_{j-1},t_j]$ и $[t_j,t_{j+1}]$:

На отрезке $[t_{j-1},t_j]$**:**
$$\frac{\phi^{j-\frac{1}{2}}-\phi^{j-1}}{\tau}+\Lambda_1^j\frac{\phi^{j-\frac{1}{2}}+\phi^{j-1}}{2}=0$$
$$\frac{\phi^{j}-\phi^{j-\frac{1}{2}}}{\tau}+\Lambda_2^j\frac{\phi^{j-\frac{1}{2}}+\phi^{j}}{2}=0$$

На отрезке $[t_j,t_{j+1}]$**:**
$$\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}}-\phi^j}{\tau}+\Lambda_2^j\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}}+\phi^j}{2}=0$$
$$\frac{\phi^{j+1}-\phi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\Lambda_1^j\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}}+\phi^{j+1}}{2}=0$$

$$T^j=\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\cdot$$
$$\cdot\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E+\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)=$$
$$=E-2\tau\Lambda^j+\frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda^j)^2+O(\tau^3)$$

$\Lambda^j=\Lambda_1^j+\Lambda_2^j$ и коммутативность операторов не требуется.

11. Метод стабилизации для однородной задачи, аппроксимация.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+A\phi=0$$
$$A=A_1+A_2,\quad A_1\geq 0,A_2\geq 0$$

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\frac{\phi^{j+1}-\phi^j}{\tau}+A\phi^j=0$$

$$\phi^0=g$$

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A_1+\frac{\tau}{2}A_1+\frac{\tau^2}{4}A_1A_2\right)\frac{\phi^{j+1}-\phi^j}{\tau}+A\phi^j=0$$
$$\left(E+\frac{\tau^2}{4}A_1A_2\right)\frac{\phi^{j+1}-\phi^j}{\tau}+A\frac{\phi^{j+1}-\phi^j}{2}+A\phi^j=0$$
$$\left(E+\frac{\tau^2}{4}A_1A_2\right)\frac{\phi^{j+1}-\phi^j}{\tau}+A\frac{\phi^{j+1}+\phi^j}{2}=0$$ - схема Кранка-Николсон

Следовательно, порядок аппроксимации $O(\tau^2)$.

12. Устойчивость метода стабилизации.

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^{j+1}-\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j+\tau A\phi^j=0$$

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^{j+1}-\left(E+\frac{\tau}{2}A_1+\frac{\tau}{2}A_2+\frac{\tau^2}{4}A_1A_2-\tau A\right)\phi^j=0$$

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^{j+1}-\left(E-\frac{\tau}{2}A_1-\frac{\tau}{2}A_2+\frac{\tau^2}{4}A_1A_2\right)\phi^j=0$$

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^{j+1}-\left(E-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E-\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j=0$$

$$\phi^{j+1}=\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E-\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j$$

Пусть $\psi^j=\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j$

$$\psi^{j+1}=\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\psi^j$$

По лемме Келлога $||\psi^{j+1}||\le||\psi^j||$.

$$\left|\left|\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^{j+1}\right|\right|\le\left|\left|\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j\right|\right|$$

$$\left|\left|\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j\right|\right|=\left(\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j,\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(E+\frac{\tau}{2}A_2^*\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)\phi^j,\phi^j\right)^{\frac{1}{2}}$$

A^* - сопряжение оператора A.

$A_2\ge0, E>0 \implies E+\frac{\tau}{2}A_2>0$ и $C_2=\left(E+\frac{\tau}{2}A_2^*\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right)>0$

Пусть $(C_2,\phi^j,\phi^j)^{\frac{1}{2}}=||\phi^j||_{C_2}$ - норма, порождённая оператором C_2.

Следовательно, $||\phi^{j+1}||_{C_2}\le||\phi^j||_{C_2}$.

13. Метод предиктор-корректор.

Рассматривается отрезок $[t_j, t_{j+1}]$

$$\frac{\phi^{j+\frac{1}{4}} - \phi^j}{\frac{\tau}{2}} + A_1 \phi^{j+\frac{1}{4}} = 0$$

$$\frac{\phi^{j+\frac{1}{2}} - \phi^{j+\frac{1}{4}}}{\frac{\tau}{2}} + A_2 \phi^{j+\frac{1}{2}} = 0$$

Неявные схемы устойчивы и их порядок аппроксимации $O(\tau)$.

$\dfrac{\phi^{j+1} - \phi^j}{\tau} + A\phi^{j+\frac{1}{2}} = 0$ - явная схема, порядок аппроксимации $O(\tau^2)$.

$\phi^0 = g$

Если неявная схема абсолютно устойчива, то и явная абсолютно устойчива и имеет $O(\tau^2)$ аппроксимацию.
Если $A = \Delta$ (оператор Лапласа), то схема абсолютно неустойчива.