1 (1.27)

Условие

Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B\left(x_1, r_1\right) \subset B\left(x_2, r_2\right)$ следуют неравенства $r_1 \leq r_2$ и $\left\|x_1 - x_2\right\| \leq r_2 - r_1$

Решение

$B\left(x_i, r_i\right) = \{x \in X : \rho\left(x, x_i\right) < r_i\}$
$B\left(x_1, r_1\right) = B_1$
$B\left(x_2, r_2\right) = B_2$

$r_1 \leq r_2$

Предположим противное: $r_1 > r_2$
Тогда $\exists x_k : \rho\left(x_1, x_k\right) \leq r_1 \ \cap \ \rho\left(x_2, x_k\right) > r_2 \implies x_k \in B_1 \cap x_k \notin B_2$
Получили противоречие.

$\left\|x_1 - x_2\right\| \leq r_2 - r_1$

Т. к. $B_1 \subset B_2 \implies x_1 \subset B_2 \implies \rho\left(x_2, x_1\right) + r_1 \leq r_2 \implies \rho\left(x_2, x_1\right) \leq r_2 - r_1$

Ч. Т. Д.

2 (5.17б)

Условие

Доказать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

имеет единственное решение $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_p$ для любого $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$ если выполнено условие:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1 \text{ при } p = \infty$$

Решение

Введём оператор $A : l_\infty \to l_\infty$.
$$Ax = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$$
Такая последовательность будет ограниченна, а значит лежать в l_∞, так как
$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$$

Докажем, что A - сжимающий оператор.
$$\|A\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| = \alpha < 1$$
$\implies$ A - сжимающий оператор.

Полагая $y_0 = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty},\ Bx = Ax + y_0$ запишем $Bx = x$
Так как $\rho\left(Bx, By\right) = \|Bx - By\| = \|Ax - Ay\| = \rho\left(Ax, Ay\right)$ и A - оператор сжатия, то B - тоже оператор сжатия.
$\implies$ по теореме Банаха исходная СЛАУ имеет единственное решения для любого y.

Ч. Т. Д.

3 (10.9)

Условие

Пусть $f\left(x\right) = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x\left(s\right)}{\sqrt[3]{s}} ds$
Для каких значений p, $1 \leq p \leq \infty$, f является непрерывным функционалом в пространстве $L_p\left[-1, 1\right]$?
Найти норму f

Решение

Непрерывность функционала

Функционал непрерывен $\iff$ он ограничен.

Воспользуемся неравенством Гёльдера.
$$k = x\left(s\right)$$
$$g = \frac{1}{\sqrt[3]{s}}$$
$$\left| \int\limits_{-1}^{1} kg ds \right| \leq \|k\|_p \cdot \|g\|_q$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$q = \frac{p}{p-1}$$
Для ограниченности функционала $\iff$ чтобы g принадлежала $L_q\left[-1, 1\right]$

Исследуем $\|g\|_q$ на сходимость:

$\|g\|_q = \left(\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{q}{3}} ds\right)^{\frac{1}{q}}$

Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{q}{3}} ds$ сходится при $-\dfrac{q}{3} > -1 \implies q < 3$

$\implies \dfrac{p}{p-1} < 3 \implies p > \dfrac{3}{2}$

Анализируем граничные значения:

$p = \dfrac{3}{2}$

$q = 3$

$\|g\|_3 = \sqrt[3]{\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{3}{3}} ds}$. Интеграл расходится

$\implies g \not\in L_3\left[-1, 1\right]$

$\implies$ функционал не ограничен

$p = \infty$

$q = 1$

$\|g\|_1 = 2\dfrac{s^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = 3 < \infty$

$\implies g \in L_1\left[-1, 1\right]$

$\implies$ функционал ограничен

Итог:

Функционал непрерывен в пространстве $L_p\left[-1, 1\right]$ при $\dfrac{3}{2} < p \leq \infty$

Норма f

$\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in L_p \\ x \neq 0}} \dfrac{|f(x)|}{||\, x \,||\; p} = \|g\|_{\frac{p-1}{p}}$

При $\dfrac{3}{2} < p < \infty$

$\|g\|_q = \left(\int\limits_{-1}^{1} |s|^{-\frac{q}{3}} ds\right)^{\frac{1}{q}} = \left(2\int\limits_{0}^{1} s^{-\frac{q}{3}} ds\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\dfrac{6}{3-q}\right)^{\frac{1}{q}}$

При подстановке $q = \dfrac{p}{p-1}$ получим:

$\|g\|_q = \left(6\dfrac{p-1}{2p-3}\right)^{\frac{p-1}{p}}$

При $p = \infty$

$\|g\|_1 = 3$

Итог:

$\|f\| = \begin{cases} \left(6\dfrac{p-1}{2p-3}\right)^{\frac{p-1}{p}} & \dfrac{3}{2} < p < \infty \\ 3 & p = \infty \end{cases}$

4 (8.35a)

Условие

Для $x \in L_2\left[-1,1\right]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n, n = 0,1,2$, если $x\left(t\right) = e^t$

Решение

В $L_2\left[-1,1\right]$ с $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f\left(t\right) g\left(t\right) dt$ многочлен наилучшего приближения

$p_n^*\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ является проекцией $x\left(t\right)$ на множество P_n.
Базис $\left\{1, t, t^2, \ldots, t^n\right\}$.

Ортонормируем базис

Используем ортогонализацию Грамма-Шмидта

$$u_0\left(t\right) = 1$$
$$\left\|u_0\right\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} 1^2 dt = 2$$
$$u_1\left(t\right) = t - \frac{t, u_0}{\left\|u_0\right\|^2} u_0$$
$$(t, u_0) = \int\limits_{-1}^{1} t \cdot 1 dt = 0$$
$$\implies u_1\left(t\right) = t$$
$$\left\|u_1\right\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$
$$u_2\left(t\right) = t^2 - \frac{t^2, u_0}{\left\|u_0\right\|^2} u_0 - \frac{\left(t^2, u_1\right)}{\left\|u_1\right\|^2} u_1$$
$$\left(t^2, u_0\right) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot 1 dt = \frac{2}{3}, \quad \left(t^2, u_1\right) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0$$
$$u_2\left(t\right) = t^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - 0 \cdot t = t^2 - \frac{1}{3}$$
$$\left\|u_2\right\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}$$

Получаем ортогональный базис
$$\begin{cases} u_0\left(t\right) &= & 1 \\ u_1\left(t\right) &= & t \\ u_2\left(t\right) &= & t^2 - \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Нормированный базис

$$\begin{cases} u_0(t) &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ u_1(t) &= \dfrac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \\ u_2(t) &= \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье

$$a_m = I_m = (x, u_k) = \int_{-1}^{1} e^t u_k(t) dt$$

$$I_0 = \int_{-1}^{1} e^t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt$$

$$I_0 = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{2}e}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} e^t \cdot t\sqrt{\frac{3}{2}} dt$$

$$I_1 = e^{-1}\sqrt{6}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} e^t \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt$$

$$I_2 = e^{-1} \cdot \frac{\sqrt{10}\left(e^2 - 7\right)}{2}$$

Построим $p_n^*(t)$

$$n = 0$$

$$p_0^*(t) = I_0 u_0(t) = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$n = 1$$

$$p_1^*(t) = I_0 u_0(t) + I_1 u_1(t) = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e}t$$

$$n = 2$$

$$p_2^* = I_0 u_0(t) + I_1 u_1(t) + I_2 u_2(t) = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e}t + e^{-1}\frac{\sqrt{10}\left(e^2 - 7\right)}{e} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{33 - 3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2 - 105}{4e}t^2$$

Итог

$$p_0^*(t) = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$p_1^*(t) = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e}t$$

$$p_2^*(t) = \frac{33 - 3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2 - 105}{4e}t^2$$

4 (8.35a) ~OLD AND WRONG~

Условие

Для $x \in L_2\left[-1, 1\right]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n, n = 0, 1, 2$, если $x\left(t\right) = e^t$

Решение

В $L_2\left[1, 1\right]$ с $\left(f, g\right) = \int\limits_{-1}^{1} f\left(t\right) g\left(t\right) dt$ многочлен наилучшего приближения $p_n^*\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ является проекцией $x\left(t\right)$ на множество P_n.
Выбирая базис $\left\{1, t, t^2, \ldots, t^n\right\}$ получаем систему уравнений: $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \left(t^i, t^m\right) = \left(x, t^m\right)$ для $m = 0, 1, 2, \ldots, n$

Найдём коэффициенты a_m

$a_m = I_m = \int\limits_{-1}^{1} e^t t^m dt$

$I_0 = \int\limits_{-1}^{1} e^t dt$
$I_0 = e^1 - e^{-1}$

$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} te^t dt$
$I_1 = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ v = e^t & dv = e^t dt \end{vmatrix} = te^t - \int\limits_{-1}^{1} e^t dt = \left(te^t - e^t\right)\Big|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{e}$

$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 e^t dt$
$I_2 = \begin{vmatrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ v = e^t & dv = e^t dt \end{vmatrix} = t^2 e^t - \int\limits_{-1}^{1} 2te^t dt = \left[e^t\left(t^2 - 2t + 2\right)\right]\Big|_{-1}^{1} = e - \dfrac{5}{e}$

Нормируем a_m и находим p_n^*

$n = 0$
$p_0^* = a_0$
$a_0\left(1, 1\right) = \left(x, 1\right)$
$a_0 \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dt = \int\limits_{-1}^{1} e^t \cdot 1 dt$
$a_0 \cdot 2 = e - \dfrac{1}{e}$
$a_0 = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$
$p_0^* = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$

$n = 1$

$p_1^* = a_0 + a_1 t$

$$\begin{cases} a_0 (1,1) + a_1 (t,1) & = & (x,1) \\ a_0 (1,t) + a_1 (t,t) & = & (x,t) \end{cases}$$

$$(1,1) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot dt = 2$$

$$(t,1) = (1,t) = \int\limits_{-1}^{1} t dt = 0$$

$$(t,t) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = 2 \int\limits_{0}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$(x,1) = I_0 = e - \frac{1}{e}$$

$$(x,t) = I_1 = \frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot 2 + a_1 \cdot 0 & = & e - \dfrac{1}{e} \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot \dfrac{2}{3} & = & \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 & = & \dfrac{e^2 - 1}{2e} \\ a_1 & = & \dfrac{3}{e} \end{cases}$$

$$p_1^* = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e} t$$

$n = 2$

$p_2^* = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$$\begin{cases} a_0 (1,1) + a_1 (t,1) + a_2 \left(t^2,1\right) & = & (x,1) \\ a_0 (1,t) + a_1 (t,t) + a_2 \left(t^2,t\right) & = & (x,t) \\ a_0 \left(1,t^2\right) + a_1 \left(t,t^2\right) + a_2 \left(t^2,t^2\right) & = & \left(x,t^2\right) \end{cases}$$

$$\left(t^2,1\right) = \left(1,t^2\right) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\left(t^2,t\right) = \left(t,t^2\right) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0$$

$$\left(t^2,t^2\right) = \int\limits_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}$$

$$\left(x,t^2\right) = I_2 = e - \frac{5}{e}$$

По $n = 1$:

$$(1,1) = 2, \quad (t,1) = 0, \quad (t,t) = \frac{2}{3}, \quad (x,1) = e - \frac{1}{e}, \quad (x,t) = \frac{2}{e}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot 2 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \dfrac{2}{3} & = & e - \dfrac{1}{e} \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot \dfrac{2}{3} + a_2 \cdot 0 & = & \dfrac{2}{e} \\ a_0 \cdot \dfrac{2}{3} + a_1 \cdot 0 + a_1 \cdot \dfrac{2}{5} & = & e - \dfrac{5}{e} \end{cases}$$

$\ldots$

$$\begin{cases} a_0 & = & \dfrac{33-3e^2}{4e} \\ a_1 & = & \dfrac{3}{e} \\ a_2 & = & \dfrac{15e^2-105}{4e} \end{cases}$$

$$p_2^*\left(t\right) = \frac{33-3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2-105}{4e}t^2$$

Итог:

$$p_0^* = \frac{e^2-1}{2e}$$

$$p_1^* = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}t$$

$$p_2^*\left(t\right) = \frac{33-3e^2}{4e} + \frac{3}{e}t + \frac{15e^2-105}{4e}t^2$$