

# Вопросы

## 1. Основные типы интегральных уравнений (ИУ). Достоинства моделей с интегральными уравнениями.

$$g(x)y(x) + \lambda \int_a^b k(x, s)y(s)ds = f(x)$$

$g(x) = 0$  - Первого рода

$g(x) \neq 0$  - Второго рода

$g(x) = 0 \quad x \in X_0 \subset X$  - Третьего рода

$b = const$  - Уравнения Фредгольма

$b = x$  - Уравнения Вольтерра

### Достоинства

- Есть задачи, которые описываются только интегральными уравнениями
- Позволяет понизить размерность
- Меньше ограничения на решения

## 2. Подходы к построению методов решений (прямые, итерационные методы решения интегральных уравнений).

$$A_1 y = f$$

$$y - A_2 y = f$$

$$y \in Y \quad f \in F$$

$A_1, A_2$  — операторы, действ. в банаховом пространстве

$A_1^{-1}$  - неограничен  $\implies$  задача некорректна относительно  $f$

### Прямые методы

*Прямые методы* состоят в сведении решаемых уравнений к более простым, путем аппроксимации операторов или искомых решений либо тем и другим путем одновременно. В результате мы переходим от бесконечномерного пространства к конечномерному, получаем СЛАУ и решаем её.

### Итерационные методы

*Итерационные методы* – последовательных приближений, простой итерации и так далее, при условии  $\|A_2\| < 1$ , посредством выражения

$$y_{k+1} = A_2 y_k + f \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 3. Метод квадратур решения уравнения Вольтерра II рода.

$$y(x) + \int_a^x k(x, s)y(s)ds = f(x)$$

$$y(x_i) + \int_a^{x_i} k(x_i, s)y(s)ds = f(x_i) \quad i = \overline{1, n}$$

Фан факт ю

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i \phi(x_i)$$

---

$$y_i + \sum_{j=1}^i A_j k_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_j k_{ij} y_j + (1 + A_i k_{ii}) y_i = f_i \quad i = \overline{1, n}$$

$$y_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_j k_{ij} y_j}{1 + A_i k_{ii}}$$

Ограничения:  $k(x, s), f(x) \in C$

### 4. Методы решения уравнения Фредгольма II рода (общая характеристика).

- При замене непрерывного оператора конечными суммами мы приходим к системам общего вида

Ограничение

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x, s) dx ds \leq B^2$$

### 5. Метод квадратур решения уравнения Фредгольма II рода.

$$x_i \in [a, b]$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j k_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{1, n}$$

## 6. Метод вырожденных ядер решения уравнения Фредгольма II рода.

Вырожденное ядро

$$k(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s) y(s) ds = f(x)$$

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds = f(x)$$

$$C_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) C_i$$

$$f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m C_i \alpha_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) \left( f(s) + \lambda \sum_{j=1}^m \alpha_j(s) C_j \right) ds = f(x)$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \left( C_i - \int_a^b \beta_i(s) \left( f(s) + \lambda \sum_{j=1}^m \alpha_j(s) C_j \right) ds \right) = 0$$

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^m C_j \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) ds = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds$$

$$a_{ij} = \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) ds$$

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds$$

$$C_j - \lambda \sum_{i=1}^m a_{ij} C_j = f_i \quad i = \overline{1, m}$$

## 7. Проекционные методы (наименьших квадратов, Бубнова-Галеркина).

$$\tilde{y} = \Phi(x, c) \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

## Основная идея

Сделать невязку маленькой.

$$\epsilon(x) = y(x) - \lambda \int_a^b k(x, s)y(s)ds - f(x)$$

## Метод наименьших квадратов

$$J = \int_a^b \epsilon^2(x, c)dx \rightarrow \min$$

Переходим к дискретному пространству.

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

### Замечание

Матрица системы симметрична и положительно определена

## Метод Бубнова-Галёркина

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

$$\int_a^b \epsilon(x, c) \phi_i(x) dx = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

### Замечание

Матрица системы не обладает особыми свойствами

## 8. Методы решения уравнений Вольтерра I рода (общие замечания).

И тут мне стало похуй, хавайте, что дают

Задача решения уравнения Вольтерра I рода является в определенном смысле промежуточной между задачами решения уравнений Вольтерра II рода и Фредгольма I рода. Если задача решения уравнения Вольтерра II рода является корректной и эффективно решается классическими методами (квадратур, итераций и так далее), а задача решения уравнения Фредгольма I рода является некорректной в любых «разумных» функциональных пространствах и решается специальными методами (регуляризации, квазирешений и другими), то задача решения уравнения Вольтерра I рода может быть корректной или некорректной в зависимости от того, в каких пространствах она рассматривается и каким методом решается.

Не изучая подробно этот вопрос, отметим только, что, если

$$y(s) \in C[a, b] \quad f(x) \in C^1[a, b] \quad k(x, s) \in C^1[a, b] \times [a, b]$$

$$\|f\|_{C^1} \leq K_1 \quad \|k(x, s)\|_{C^1} \leq K_2$$

то уравнение имеет непрерывное и единственное решение  $y(x) \in C[a, b]$

## 9. Преобразование уравнения Вольтерра I рода к уравнению Вольтерра II рода (1 способ).

Способ 1 (Дифференцирование по x)

$$k(x, x)y(x) + \int_a^x k'_x(x, s)y(s)ds = f'(x)$$

$$k(x, x) \neq 0$$

Иначе дифференцируй повторно, лол.

## 10. Преобразование уравнения Вольтерра I рода к уравнению Вольтерра II рода (2 способ).

Способ 2 (Интегрирование по частям)

$$\int_a^x y(s)ds = Y(x) \quad |u = K(x, s) \quad dv = y(s)ds| \quad K(x, x)Y(x) - \int_a^x Y(s)K'_s(x, s)ds = f(x)$$

$$K(x, x) \neq 0 \quad y(s) = \frac{dY(s)}{ds}$$

## 11. Причины неустойчивости решения уравнения Фредгольма I рода.

$A^{-1}$  - не непрерывен  $\implies$  Устойчивость нарушается

**Пример**

Метод квадратур, формула трапеций

Получаем пилообразное решение

Амплитуда растет при  $h \rightarrow 0$

Из 4 теоремы Фредгольма известно, что наименьшее по модулю СЗ оператора = 0

При дискретизации с малым  $n$  спектр искажается, матрица не вырождена, решение есть, но излишне сглажено.

При  $h \rightarrow 0$  спектр стремится к истинному, матрица к вырожденной, число обусловленности  $\rightarrow \infty$

## 12. Понятие корректности по Тихонову.

Корректность по Тихонову

1. априори известно, что решение  $y$  существует и принадлежит некоторому заданному множеству, или *множеству корректности*  $M$ ,  $y \in M$ ;
2. решение единственно в классе функций, принадлежащих  $M$ ;
3. бесконечно малым вариациям  $f$ , не выводящим решение  $y$  за пределы  $M$ , соответствуют бесконечно малые вариации решения  $y$ .

Отличие условной корректности от классического заключается во введении множества корректности, существенно сужающего класс возможных решений.

### 13. Определение регуляризирующего оператора.

$$R(f, \alpha) :$$

1.  $R$  определен  $\forall \tilde{f}_\delta \in F \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0 \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0$
2.  $\exists \alpha = \alpha(\delta) \quad \epsilon > 0 \quad \delta(\epsilon) : \rho_F(\tilde{f}_\delta, \tilde{f}) \leq \delta(\epsilon) \implies \rho_Y(\bar{y}, \tilde{y}_\alpha) \leq \epsilon$   
 $\delta \rightarrow 0 \implies \epsilon \rightarrow 0 \quad \alpha \rightarrow 0$

### 14. Понятие точного решения, псевдорешения, нормального решения.

Точное решение

$$y_0 : Ay_0 = f$$

Псевдо решение  $y$

$$\|Ay - f\| \rightarrow \min$$

$$y \in Y_1$$

Нормальное решение

$$\|y\|_Y \rightarrow \min$$

### 15. Функционал Тихонова.

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\Omega[y]$$

$$\Omega[y] = \|y\|_Y^2$$

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = (\tilde{A}y - \tilde{f}, \tilde{A}y - \tilde{f}) + \alpha(y, y) =$$

$$= (\tilde{A}y, \tilde{A}y) - 2(\tilde{A}y, \tilde{f}) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = ((\tilde{A}^T \tilde{A} + E\alpha)y, y) - 2(\tilde{A}^T \tilde{f}, y) + (\tilde{f}, \tilde{f})$$

$$(\alpha E + \tilde{A}^T \tilde{A})y = \tilde{A}^T \tilde{f}$$

### 16. Решение задачи минимизации функционала Тихонова.

$$\tilde{A}y = \tilde{f}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] &= (\tilde{A}y - \tilde{f}, \tilde{A}y - \tilde{f}) + \alpha(y, y) = \\
&= (\tilde{A}y, \tilde{A}y) - 2(\tilde{A}y, \tilde{f}) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = ((\tilde{A}^* \tilde{A} + E\alpha)y, y) - 2(\tilde{A}^* \tilde{f}, y) + (\tilde{f}, \tilde{f}) \\
&(\alpha E + \tilde{A}^T \tilde{A})y = \tilde{A}^T \tilde{f}
\end{aligned}$$

## 17. Определение параметра регуляризации по невязке.

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta$$

$$\|Ay_\alpha - f_\delta\|_F = \delta$$

Выбираем последовательность  $\alpha_k = \alpha_0 \cdot q^k \quad q > 0$

$$\Phi_{\alpha_k}[y, f_\delta] \rightarrow \min$$

$$\alpha_{k_0} : \|Ay_{\alpha_k} - f_\delta\| = \delta$$

## 18. Метод подбора решения некорректно поставленных задач.

$M \subset Y$  - множество возможных решений

$$\forall y \in M \quad \text{находим } Ay$$

$$y_0 : \rho_F(Ay_0, f) = \inf_{y \in M} \rho_F(Ay, f)$$

Вопрос

$$\rho_Y(y_n, y^*) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Топологическая лемма

$$g : Y \rightarrow F$$

$$F_0 = g(Y_0) \quad Y_0 \subset Y$$

$$g - \text{непрерывно и биективно} \implies g^{-1} - \text{непрерывно}$$