1. Основные типы интегральных уравнений (ИУ). Достоинства моделей с интегральными уравнениями.

$$g(x)y(x) + \lambda \int_a^b k(x,s)y(s)ds = f(x)$$

$g(x) = 0$ - Первого рода
$g(x) \neq 0$ - Второго рода
$g(x) = 0 \quad x \in X_0 \subset X$ - Третьего рода

$b = const$ - Уравнения Фредгольма
$b = x$ - Уравнения Вольтерра

Достоинства

- Есть задачи, которые описываются только интегральными уравнениями
- Позволяет понизить размерность
- Меньше ограничения на решения

2. Подходы к построению методов решений (прямые, итерационные методы решения интегральных уравнений).

$$A_1 y = f$$

$$y - A_2 y = f$$

$$y \in Y \quad f \in F$$

$$A_1, A_2 - \text{операторы, действ. в банаховом пространстве}$$

A_1^{-1} - неограничен $\implies$ задача некорректна относительно f
Прямые методы
Прямые методы состоят в сведении решаемых уравнений к более простым, путем аппроксимации операторов или искомых решений либо и тем и другим путем одновременно. В результате мы переходим от бесконечномерного пространства к конечномерному, получаем СЛАУ и решаем её.

Итерационные методы
Итерационные методы – последовательных приближений, простой итерации и так далее, при условии $\|A_2\| < 1$, посредством выражения $y_{k+1} = A_2 y_k + f \quad k = 0, 1, 2, \dots$

3. Метод квадратур решения уравнения Вольтерра II рода.

$$y(x) + \int\limits_a^x k(x,s)y(s)ds = f(x)$$

$$y(x_i) + \int\limits_a^{x_i} k(x_i,s)y(s)ds = f(x_i) \quad i = \overline{1,n}$$

Фан факт ю

$$\int\limits_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i \phi(x_i)$$

$$y_i + \sum_{j=1}^i A_j k_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_j k_{ij} y_j + (1 + A_i k_{ii}) y_i = f_i \quad i = \overline{1,n}$$

$$y_i = \frac{f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} A_j k_{ij} y_j}{1 + A_i k_{ii}}$$

Ограничения: $k(x,s), f(x) \in C$

4. Методы решения уравнения Фредгольма II рода (общая характеристика).

- При замене непрерывного оператора конечными суммами мы приходим к системам общего вида

Ограничение

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,s)dxds \leq B^2 < \infty$$

$$B = \|K\| = \int\limits_a^b \int\limits_a^b k^2(x,s)dxds$$

5. Метод квадратур решения уравнения Фредгольма II рода.

$$x_i \in [a,b]$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j k_{ij} y_j = f_i \quad i = \overline{1, n}$$

В данном случае нельзя выразить y_i из суммы т. к. матрица не треугольная.

6. Метод вырожденных ядер решения уравнения Фредгольма II рода.

Вырожденное ядро

$$k(x, s) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(s)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(s) y(s) ds = f(x)$$

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds = f(x)$$

$$C_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) C_i$$

$$f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i \alpha_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) \left(f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(s) C_j \right) ds = f(x)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \left(C_i - \int_a^b \beta_i(s) \left(f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(s) C_j \right) ds \right) = 0$$

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} C_j \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) ds = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds$$

$$a_{ij} = \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) ds$$

$$f_i = \int_a^b \beta_j(s) f(s) ds$$

$$C_j - \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{ij} C_j = f_i \quad i = \overline{1, m}$$

7. Проекционные методы (наименьших квадратов, Бубнова-Галеркина).

$\tilde{y} = \Phi\left(x, c\right) \qquad c = \left(c_1, c_2, \dots, c_n\right)$
$\tilde{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \phi_i\left(x\right)$

Основная идея

Сделать невязку маленькой.

$$\epsilon(x, c) = \tilde{y}(x) - \lambda \int\limits_a^b k(x, s)\tilde{y}(s) ds - f(x)$$

Метод наименьших квадратов

Идея: Минимизировать интеграл от квадрата невязки.

$$J = \int\limits_a^b \epsilon^2(x, c) dx \to \min_c$$

Переходим к дискретному пространству.

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

Замечание

Матрица системы симметрична и положительно определена

Метод Бубнова-Галёркина

Идея: Невязка ортогональна подпространству базисных функций.

$\tilde{y}\left(x\right) = f\left(x\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \phi_i\left(x\right)$

$$(\epsilon, \phi_j) = \int\limits_a^b \epsilon(x, c)\phi_i(x) dx = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

Замечание

Матрица системы не обладает особыми свойствами

8. Методы решения уравнений Вольтерра I рода (общие замечания).

И тут мне стало похуй, хавайте, что дают

Задача решения уравнения Вольтерра I рода является в определенном смысле промежуточной между задачами решения уравнений Вольтерра II рода и Фредгольма I

рода.
Если задача решения уравнения Вольтерра II рода является корректной и эффективно решается классическими методами (квадратур, итераций и так далее), а задача решения уравнения Фредгольма I рода является некорректной в любых «разумных» функциональных пространствах и решается специальными методами (регуляризации, квазирешений и другими), то задача решения уравнения Вольтерра I рода может быть корректной или некорректной в зависимости от того, в каких пространствах она рассматривается и каким методом решается.
Не изучая подробно этот вопрос, отметим только, что, **если выполнены условия гладкости**

$$\begin{cases} y\left(s\right) \in C\left[a,b\right] \\ f\left(x\right) \in C^1\left[a,b\right] \\ k\left(x,s\right) \in C^1\left(\left[a,b\right]\times\left[a,b\right]\right) \end{cases}$$

и существуют константы

$$\|f\|_{C^1} \leq K_1 \quad \|k(x,s)\|_{C^1} \leq K_2$$

то уравнение имеет **единственное непрерывное решение** $y(x) \in C[a,b]$

9. Преобразование уравнения Вольтерра I рода к уравнению Вольтерра II рода (1 способ).

Способ 1 (Дифференцирование обеих частей по x)

$$k(x,x)y(x) + \int_a^x k'_x(x,s)y(s)ds = f'(x)$$

$$k(x,x) \neq 0$$

Иначе дифференцируй повторно, лол.

10. Преобразование уравнения Вольтерра I рода к уравнению Вольтерра II рода (2 способ).

Способ 2 (Интегрирование по частям)

$$\int\limits_a^x k\left(x,s\right)y\left(s\right)ds = \left| \begin{matrix} u = k\left(x,s\right) & dv = y\left(s\right)ds \\ du = \dfrac{\partial k\left(x,s\right)}{\partial s}ds & v = Y\left(s\right) \end{matrix} \right| = k\left(x,x\right)Y\left(x\right) - \int\limits_a^x Y\left(s\right)k'_s\left(x,s\right)ds = f(x)$$

$$k\left(x,x\right) \neq 0 \qquad y\left(s\right) = \frac{dY\left(s\right)}{ds} \qquad Y\left(a\right) = 0$$

11. Причины неустойчивости решения уравнения Фредгольма I рода.

A^{-1} - не непрерывен $\implies$ Устойчивость нарушается

Пример
Метод квадратур, формула трапеций
Получаем пилообразное решение
Амплитуда растет при $h \to 0$

Из 4 теоремы Фредгольма известно, что наименьшее по модулю СЗ оператора $= 0$
При дискретизации с малым n спектр искажается, матрица не вырождена, решение есть, но излишне сглажено.
При $h \to 0$ спектр стремится к истинному, матрица к вырожденной, число обусловленности $\to \infty$

12. Понятие корректности по Тихонову.

Корректность по Тихонову

1. Априори известно, что решение y существует и принадлежит некоторому заданному множеству, или *множеству корректности* M, $y \in M$;
2. Решение единственно в классе функций, принадлежащих M;
3. Бесконечно малым вариациям f, не выводящим решение y за пределы M, соответствуют бесконечно малые вариации решения y.

Отличие условной корректности от классического заключается во введении множества корректности, существенно сужающего класс возможных решений.

13. Определение регуляризирующего оператора.

Оператор $R(f, \alpha)$ называется регуляризующим для уравнения $Ay = f$ если :

1. R определен $\forall \tilde{f}_\delta \in F \quad 0 \le \delta \le \delta_0 \quad 0 \le \alpha \le \alpha_0$
2. $\exists \alpha = \alpha(\delta): \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0: \quad \rho_F\left(\tilde{f}_\delta, \overline{f}\right) \le \delta(\epsilon) \implies \rho_Y(\tilde{y}_\alpha \overline{y}) \le \epsilon$
   $\delta \to 0 \implies \epsilon \to 0 \quad \alpha \to 0$
   $\tilde{y}_\alpha = R\left(\tilde{f}_\delta, \alpha(\delta)\right)$

14. Понятие точного решения, псевдорешения, нормального решения.

Точное решение

Функция y_0, удовлетворяющая уравнению:

$$Ay_0 = f$$

Псевдорешение

Функция y, минимизирующая невязку в заданном множестве $Y_1 \subseteq Y$:

$$\left\|Ay - \tilde{f}\right\| \to \min_{y \in Y_1}$$

$$y \in Y_1$$

Нормальное решение

Среди всех псевдорешений выбирается решение с минимальной нормой:

$$\|y\|_Y \to \min \qquad \text{при условии} \left\|Ay - \tilde{f}\right\| = \min$$

15. Функционал Тихонова.

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\Omega[y]$$

$$\Omega[y] = \|y\|_Y^2 \qquad \tilde{A}y = \tilde{f}$$

16. Решение задачи минимизации функционала Тихонова.

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = (\tilde{A}y - \tilde{f}, \tilde{A}y - \tilde{f}) + \alpha(y, y) =$$

$$= (\tilde{A}y, \tilde{A}y) - 2(\tilde{A}y, \tilde{f}) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = ((\tilde{A}^T\tilde{A} + E\alpha)y, y) - 2(\tilde{A}^T\tilde{f}, y) + (\tilde{f}, \tilde{f})$$

$$\nabla_y \Phi_\alpha = 2\left(\tilde{A}^T\tilde{A} + \alpha E\right)y - 2A^T\tilde{f}$$

$$\nabla_y \Phi_\alpha = 0 \qquad (\alpha E + \tilde{A}^T\tilde{A})y = \tilde{A}^T\tilde{f}$$

17. Определение параметра регуляризации по невязке.

$$\|f - f_\delta\| \le \delta$$

$$\|Ay_\alpha - f_\delta\|_F = \delta$$

Выбираем последовательность $\alpha_k = \alpha_0 \cdot q^k \quad q > 0$

$$\Phi_{\alpha_k}[y, f_\delta] \to \min$$

$$\alpha_{k_0} : \|Ay_{\alpha_k} - f_\delta\| = \delta$$

18. Метод подбора решения некорректно поставленных задач.

$M \subset Y$ - множество возможных решений

$$\forall y \in M \subset Y \quad \text{находим } Ay$$

$$y_0 : \rho_F(Ay_0, f) = \inf_{y \in M} \rho_F(Ay, f)$$

Вопрос о сходимости

$$\rho_Y(y_n, y^*) \to 0 \quad n \to \infty$$

Обоснование сходимости

$$g : Y \to F$$

$$F_0 = g(Y_0) \quad Y_0 \subset Y$$

$$g - \text{непрерывно и биективно} \implies g^{-1} - \text{непрерывно}$$