Вопросы

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение, его порядок.

Уравнение вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,\ y = y(x)$ - ОДУ n-ого порядка.
ОДУ является разрешённым относительно $y^{(n)}$, если $y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$.
$y = y\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ - **общее решение**.

2. Задача Коши, краевая задача, формулировки.

Пусть $x \in [a, b]$.
Задача **Коши**, если заданы начальные условия: $y(a) = y_0,\ y'(a) = y'_0,\ \ \ldots,\ y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}$.
Краевая задача, если заданы условия на обоих концах:

$$\begin{gathered}\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2\end{gathered}$$

Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, то условия **Дирихле**.
Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$, то условия **Неймана**.
Иначе - **смешанные** граничные условия.

3. Решение задачи Коши методом Эйлера.

Берём и считаем линиями производные.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \ldots$$

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y) + O(h^2)$$

4. Неявная формула Адамса второго порядка точности.

$$y' = f(x, y) \qquad [x, x+h]$$

$$y\left(x+h\right) = y(x) + \int\limits_x^{x+h} y'(t) dt$$

Применяем вместо интеграла формулу площади трапеций:

$$y\left(x+h\right) = y\left(x\right) + \frac{h}{2}\left(y'\left(x\right) + y'\left(x+h\right)\right) + O\left(h^3\right)$$

$$y\left(x+h\right)=y\left(x\right)+\frac{h}{2}\left(f\left(x,y\right)+f\left(x+h,y\left(x+h\right)\right)\right)+O\left(h^3\right)$$

5. Метод Эйлера с пересчетом.

$$\begin{cases} y^*=y(x)+hf(x,y) \\ y\left(x+h\right)=y\left(x\right)+\dfrac{h}{2}\left(f(x,y)+f\left(x+h,y^*\right)\right) \end{cases}$$

6. Семейство методов Рунге-Кутта (принцип построения).

$$\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_q$$

$$p_1,\dots,p_q$$

$$\beta_{ij}\quad 0<i<j\le q$$

$$\begin{cases} k_1\left(h\right)=h\cdot f\left(x,y\right) \\ k_2\left(h\right)=h\cdot f\left(x+\alpha_2 h,y+\beta_{2,1}k_1\left(h\right)\right) \\ \dots \\ k_q(h)=h\cdot f(x+\alpha_q h,y+\beta_{q,1}\cdot k_1(h)+\ldots+\beta_{q,q-1}\cdot k_{q-1}(h)) \end{cases}$$

$$y\left(x+h\right)\sim z\left(h\right)=y\left(x\right)+\sum_{i=1}^{q}p_i k_{i(h)}$$

$$\phi(h)=y(x+h)-z(h)$$

Пусть:

$$\begin{cases} \phi(0)=0 \\ \phi'(0)=0 \\ \dots \\ \phi^{(s)}(0)=0 \\ \phi^{(s+1)}(0)\neq 0 \end{cases}$$

$$\phi(h)=\sum_{i=0}^{s}\frac{\phi^{(i)}}{i!}\cdot h^i+\frac{\phi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!}\cdot h^{s+1}$$

$$\phi(h)=O\left(h^{(s+1)}\right)$$

- Пример:

$$q=1$$

$$\begin{cases} \phi\left(h\right)=y\left(x+h\right)-y\left(x\right)-p_1k_1\left(h\right)\quad \phi(0)=0 \\ \phi'\left(h\right)=y'(x+h)-p_1f(x,y)\quad \phi'(0)=f(x,y)\cdot(1-p_1)=0\implies p_1=1 \\ \phi''(h)=y''(x+h)\quad y''(x)\neq 0 \end{cases}$$

7. Метод Рунге-Кутта третьего порядка.

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf\left(x + h, y - k_1 + 2k_2\right)$$

8. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x, y), \qquad k_2 = hf\left(x + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{k_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf\left(x + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf\left(x + h, y + k_3\right).$$

9. Оценка точности метода Рунге-Кутта.

$$R_n = y_n - y(x_n)$$

$$|R_n| \le e^{MX} \cdot (Ch^q X + N\epsilon + |R_0|)$$

ϵ - наибольшая ошибка округления

X - длина отрезка (области определения)

$C = const$

$M = \sup |f'_y(x, y)|$

$n \le N$

10. Сетка, узлы сетки, сеточные функции, сеточные нормы.

Дана задача $\begin{cases} Lu = f(x), & x \in G \\ lu = \mu(x), & x \in \Gamma \end{cases} \overline{G} = G + \Gamma$

В одномерном случае, сетка (с граничными точками) $\overline{\omega}_h = \{x_k = kh, k = \overline{0, N}, hN = 1\}$ - набор точек из области определения, заданные с шагом h, x_k - узлы сетки.

$y_n = y_n(x_k), x_k \in \overline{\omega}_h$ - сеточная функция (значения функции в точках сетки). u_h - проекция точного решения на сетку $\iff u_h = u(\overline{\omega}_h)$.

Сеточные нормы:

1. $||y_h||_C = \max\limits_{x \in \overline{\omega}_h} |y_h(x)|$
2. $||y_h||_{L^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N-1} y_h^2 h}$
3. Также обозначают в зависимости от включения граничных точек

1. $[|y_h|| = \sum\limits_{i=0}^{N-1}, \quad ||y_h|] = \sum\limits_{i=1}^{N}, \quad [|y_h|] = \sum\limits_{i=1}^{N-1}$

11. Разностная аппроксимация, шаблон.

$Ш(x, h)$ - шаблон, множество узлов сетки, на которое строится разностная аппроксимация.

Разностная аппроксимация: $L_h u_h = \sum\limits_{\xi \in Ш(x,h)} A_h(x, \xi) u_h(\xi)$.

Пример: $y''(x) = \dfrac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$ - разностная аппроксимация;
$(x-h, x, x+h)$ - трёхточечный шаблон.

12. Погрешность разностной аппроксимации.

$z_h = y_h - u_h$ - погрешность разностной схемы (разность точного и численного).

$\psi_h = L_h z_h$ - погрешность уравнения.

$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ - погрешность аппроксимации.

13. Разностная схема, порядок аппроксимации.

$\begin{cases} Lu = f(x) \\ lu = \mu(x) \end{cases} \longmapsto \begin{cases} L_h y_h = \phi_h(x) \\ l_h y_h = \chi_h(x) \end{cases}$ - разностная схема

Порядок аппроксимации m, если $||\psi_h|| = O(h^m)$.

14. Устойчивость разностной схемы, корректность.

Устойчивость, если для достаточно малых h выполняется:
$||y_h||_{(h_1)} \leq M_1 ||\phi_h||_{(h_2)} + M_2 ||\chi_h||_{(h_3)}$
(здесь $(h_1), (h_2), (h_3)$ - разные нормы).

Корректность: существование, единственность решения и непрерывность (малым изменениям входных данных соответствуют малые изменения решения).

15. Погрешность разностной схемы, сходимость.

$z_h = y_h - u_h$ - погрешность разностной схемы.

Если $||z_h||_{(h_1)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$, то выполняется сходимость.

16. Разностная аппроксимация первой, второй производной.

Для первой производной:

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = L_h^+ u \qquad O(h)$$
$$\frac{u(x)-u(x-h)}{h} = L_h^- u \qquad O(h)$$
$$L_h^0 u = \tfrac{1}{2}\left(L_h^+ + L_h^-\right) = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = \qquad O(h^2)$$

$$\sigma\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + (1-\sigma)\frac{u(x+2h)-u(x+h)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x) + O(h^2)$$

При $\sigma = \dfrac{3}{2}$ аппроксимация $u'(x)$:

$$\frac{-u(x+2h)+4u(x+h)-3u(x)}{2h} = u'(x) + O(h^2)$$

Для второй производной:

$$u'' = \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2)$$

17. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [0,1]$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = \gamma_2$$

18. Разностная аппроксимация краевой задачи для о.д.у. второго порядка.

Подставляя разностные аппроксимации первой и второй производной порядка 2, получаем:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} + p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \qquad i = \overline{1, N-1}$$

(y_{i+1}, y_i, y_{i-1}) - шаблон.

Для нахождения y_i решаем СЛАУ.

При $\beta_{1,2} = 0$ и $\alpha_{1,2} \neq 0$, то $y(0) = \gamma_1, y(1) = \gamma_2$.

При $\beta_{1,2} \neq 0$ и $\alpha_{1,2} \neq 0$, подставляя разностную аппроксимацию, получим

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 \frac{y(h) - y(0)}{h} = \gamma_1; \quad \alpha_2 y(1) + \beta_2 \frac{y(1) - y(1-h)}{h} = \gamma_2.$$

19. Примеры уравнений с частными производными, краевые, начальные условия.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - гиперболическое уравнение

$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0$ - параболическое уравнение

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ - уравнение Пуассона (если $f(x, y) = 0$, то уравнение Лапласа).

20. Разностные схемы (явная, неявная) для одномерного уравнения теплопроводности, погрешность аппроксимации, её порядок.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$U(x, 0) = \phi(x), \;\; U(0, t) = \psi_1(t), \;\; U(1, t) = \psi_2(t)$$

$x_i = ih, \;\; i = \overline{0, N}$
$t_j = j\tau$

$U(x_i, t_j) = U_i^j$, верхний индекс - время, нижний(е) - пространство.

$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$ - разностная схема (явная)

Преобразуем разностную схему:

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i+1}^j + (1 - 2\lambda) u_i^j + \lambda u_{i-1}^j, \qquad \lambda = \frac{a\tau}{h^2}$$

$((i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i, j+1))$ - шаблон

В разностной схеме у правой части заменим j на $j+1$, получим:

$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$ - разностная схема (неявная)

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda) u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = -u_i^j, \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$\delta u = \max\limits_{i,j} |\delta u_i^j|$, где $\delta u_i^j = U_i^j - u_i^j$ - погрешность решения.

Пусть $\delta_h = U_h - u_h$, тогда погрешность аппроксимации - $R_h = L_h \delta_h$.

Порядок аппроксимации $O\left(\tau + h^2 + \dfrac{\tau}{h^2}\right)$ (для явной схемы).

21. Условная, абсолютная аппроксимация и устойчивость.

$R_h = L_h \delta_h = L_h U_h - L_h u_h = L_h U_h - f_h$

$R = \max\limits_{\overline{g}_h} R_h$, где $\overline{g}_h$ - сеточное пространство с границей.

$\lim\limits_{\substack{\tau \to 0 \\ h \to 0}} ||R|| = 0$ - аппроксимация.

Если порядок аппроксимации $O\left(\tau + h^2 + \dfrac{\tau}{h^2}\right)$ (для явной схемы), то она выполняется только если $\tau \to 0$ стремится быстрее, чем $h^2 \to 0$, следовательно, **условная аппроксимация**.

Если аппроксимация выполняется независимо от входных данных, то она **абсолютная**.

Устойчивость (для явной схемы) выполняется при $\lambda = \dfrac{a\tau}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$:
$\max\limits_i |u_i^{j+1}| \leq |\lambda + (1 - 2\lambda) + \lambda| \cdot \max\limits_i |u_i^j| = \max |u_i^j|$

Для неявной схемы: $|1 + 2\lambda| - |\lambda| - |\lambda| = 1 \implies$ абсолютная устойчивость (и аппроксимация).

22. Разностные схемы для одномерного волнового уравнения (явная, неявная), порядок аппроксимации, устойчивость.

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$, (если $f(x,t) = 0$, то уравнение свободных колебаний)

$U|_{t=0} = U(x,0) = \phi(x), \quad U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \quad \dfrac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$

$\dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + f_i$ - явная разностная схема.

Пусть $\lambda = \dfrac{a^2\tau^2}{h^2}$.

$$u_j^{j+1} = 2(1-\lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} + \tau^2 f_i$$

$$u_i^0 = \phi(x_i)$$

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i) \implies u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i)$$

Следовательно, порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Получить второй порядок аппроксимации по τ можно так:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\x=x_i}} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big|_{\substack{t=0\\x=x_i}} + O(\tau^2)$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\x=x_i}} = \psi(x_i)$, $U(x_i, 0) = \phi(x_i) \implies \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big|_{\substack{t=0\\x=x_i}} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Big|_{x=x_i}$, то

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i) + \frac{a^2\tau^2}{2}\phi''(x_i) + O(\tau^2)$$

Схема устойчива при $\frac{a\tau}{h} < 1$.

Для вывода неявной схемы также для правой части заменим j на $j+1$:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + f_i$$

$$\lambda u_{i+1}^{j+1} - (1+2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i-1}^{j+1} = -2u_i^j + u_i^{j-1} - \tau^2 f_i$$

Или схема методом Кранка-Николсон:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2}\right)$$

Обе схемы имеют порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.

23. Разностные схемы для двумерного уравнения теплопроводности (явная, неявная), порядок аппроксимации, устойчивость.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad U(x,y,0) = \phi(x,y), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le t \le T$$

$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{l^2}$ - разностная схема (явная)

$$x_i = ih \quad y_j = jl \quad t_k = k\tau, \quad u_{i,j}^0 = \phi(x_i, y_j)$$

$$u_{i,j}^{k+1} = (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)u_{i,j}^k + \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k)$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau}{h^2}, \;\; \lambda_2 = \frac{\tau}{l^2}$$

Порядок аппроксимации $O(\tau + h^2 + l^2)$.

Схема устойчива, если $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = \dfrac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{h^2} + \dfrac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{l^2}$ - разностная схема (неявная)

$$\lambda_1(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}) - (1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2)u_{i,j}^{k+1} + \lambda_2(u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}) = -u_{i,j}^k$$

24. Разностная схема для двумерного уравнения Лапласа, порядок аппроксимации, идея метода установления, итерационные методы решения.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad U|_\Gamma = \phi(x, y)$$

$\dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$ - разностная схема

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

Получаем блочно-диагональную матрицу СЛАУ. Решаем итерационный методом для решения СЛАУ (например, метод Якоби).

Метод установления:
добавляем фиктивное время и решаем уравнение теплопроводности методом расщепления:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad V \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} U, \quad V|_{t=0} = 0$$