№1

Условие

Постройте непрерывную биекцию $f : [0,1) \to \underset{\text{окружность}}{S}^1$ не являющуюся гомеоморфизмом

Решение

Выкладки

Отображение гомеоморфно, если
1. f - биекция
2. f - непрерывно
3. f^{-1} - непрерывно

Отображение непрерывно тогда, когда прообраз любого открытого в Y множества открыт в X.

Отображение биективно, если оно инъективно и сюръективно одновременно.

Решение

Для того, чтобы непрерывная биекция не была гомеоморфизмом, необходимо, чтобы f^{-1} не была непрерывной.
Для этого необходимо, чтобы $f^{-1}\left(f^{-1}\left(A|A \in T_X\right)\right) \cancel{\not\in} T_Y$.

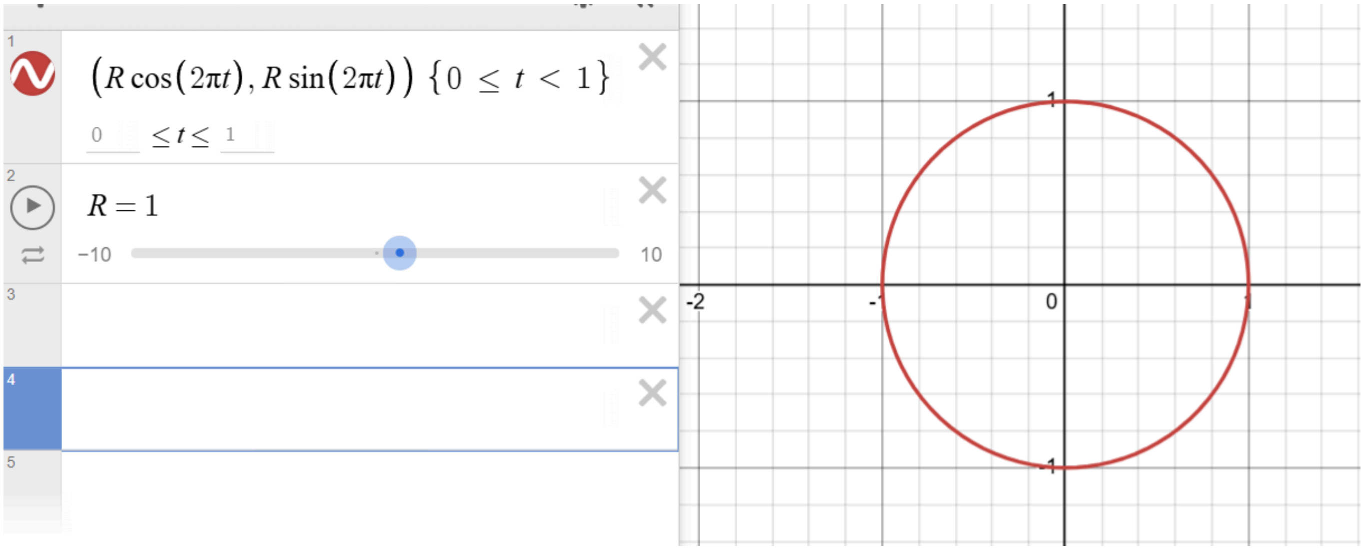
Зададим функцию $f = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t))$, где $t = x|x \in [0,1)$
Зададим функцию f^{-1}:

$$f^{-1} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ \frac{\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi\right)}{2\pi} + \frac{1}{2} & x < 0 \text{ and } y > 0 \\ \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{2\pi} & x < 0 \text{ and } y \leq 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} & x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} & x = 0 \text{ and } y < 0 \end{cases}$$

Таким образом, мы зададим окружность, где $x \in [0,1)$ будет отвечать за угол поворота точки и где 0 будет начинаться с точки $(-1,0)$

Поскольку мы смогли найти для f обратную, функцию, то сама функция f является биективной.

Не умаляя общности, будем считать окружность единичной.



Дополнительно возьмём, что $T_{[0,1)}$ - индуцированная из канонической на $\mathbb{R}$, а T_S - Каноническая топология

Докажем, что f - непрерывна.
Возьмем некоторую дугу U, открытую на окружности.
Для любого элемента из U, найдётся условие из f^{-1}, которому будет соответствовать точка, принадлежащая $[0, 1)$
$f^{-1}(U) \in T_{[0,1)}$
Таким образом, f - непрерывно.

Докажем, что f^{-1} - **не** непрерывно
Возьмём отрезок $[0, a) \subset T_{[0,1)}$
Он открыт на топологии $((k, a|k < 0) \cap [0, 1) = [0, a))$
Дуга с граничной точкой $f(0)$ не открыта, так как дугу можно представить как объединение открытой дуги и $f(0)$, а $f(0)$ не открыта на S по построению.
Следовательно, f^{-1} **не** непрерывно.

Что и требовалось доказать.

№2

Условие

Верно ли, что есть ограничение отображения $f:\ X \to Y$ на любом элементарном покрытии Γ непрерывно, то и само f - непрерывно?

1. $X = [0, 2],\ \Gamma = \{[0, 1], (1, 2]\}$
2. $X = [0, 2],\ \Gamma = \{[0, 1], [1, 2]\}$

3. $X=\mathbb{R},\ \Gamma=\{\mathbb{Q},\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$

Решение

Выкладки

Непрерывность $f:X\to Y$ на элементах покрытия - это непрерывность каждого $f|V$, где V - элемент покрытия, $f|V$ - ограничение f на V, то есть $f|V:V\to Y, f|V(x)=f(x)$ для любых x из V (подмножества X), а каждое V тут подпространство X, то есть на нем есть топология, индуцированная из X
Ограничение отображения - взятие в качестве области определения множество из покрытия

Покрытие - Множество элементов, объединение которых даст нам нужное множество.

Решение

$\Gamma=\{V_i\} \quad \underset{i\in I}{\cup} V_i=X$

$B\in T_Y \quad f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B \quad x\in X\}=A$
Берём прообразы открытого на Y B в каждом из элементов покрытия на индуцированной из X топологии.
$f|V_i^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B \quad x\in V_i\}=A_i\in T_{X_{V_i}}$
В прообразе урезанной B будет лежать урезанное A. И объединение урезанных прообразов A_i даст нам нормальный прообраз A
$A_i=A\cap V_i$
$A=\bigcup\limits_{i\in I} A\cap V_i=\bigcup\limits_{i\in I} A_i$

Мы свели задачу к исследованию вопроса

$\forall A\in X \quad A_i=A\cap V_i\ i\in I \quad A_i\in T_{X_{V_i}} \overset{?}{\Longleftrightarrow} A\in T_X$
То есть нам надо показать, что A - открыто на T_X

Используя определение непрерывности через замкнутость (прообраз любого замкнутого замкнут) получим второе достаточное условие:

$Y\backslash B\in T_Y \quad f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B \quad x\in X\}=A$
$f|V_i^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B \quad x\in V_i\}=A_i \quad V_i\backslash A_i\in T_{X_{V_i}}$
$A_i=A\cap V_i$
$A=\bigcup\limits_{i\in I} A\cap V_i=\bigcup\limits_{i\in I} A_i$

Первое достаточное условие непрерывности f

Если $\forall A\in X \quad A_i=A\cap V_i\ i\in I \quad V_i\backslash A_i\in T_{X_{V_i}} \Longleftrightarrow X\backslash A\in T_X$, то $f-$ непрерывна.

Получим утверждение:

Утверждение

Если $X\backslash V_i \in T_X\ i \in I$ и покрытие конечно, то $f-$ непрерывна

Доказательство

$(\implies)$

$A_i = A \cap V_i$

$V_i\backslash A_i \in T_{X_{V_i}} \implies A_i = V_i\backslash(V_i\backslash A_i) = V_i\backslash(U \cap V_i) = V_i \cap (X\backslash U) \quad U \in T_X \implies V_i\backslash A_i \in T_X$

$A = \bigcup\limits_{i \in I} A \cap V_i = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ - конечное объединение замкнутых

$\implies X\backslash A \in T_X$

$(\impliedby)$

$X\backslash A \in T_X \implies V_i \cap A = A_i -$ замкнуто

Из второго достаточного условия $f-$ непрерывна

Доказательство

T_X - индуцированная из канонической на $\mathbb{R}$ в X

1

Зададим $Y = X$ и $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0,1] \\ x, & x \in (1,2] \end{cases}$

$f|V_2 = \text{in} : V_2 \to X$ - непрерывна

$f|V_1 : V_1 \to X$ - непрерывна

$f : X \to X$ - не непрерывна

$\left[0, \frac{1}{2}\right) \in T_X$, но $f^{-1}([0; 0.5)) = (0.5; 1] \notin T_X$

Значит в общем случае $f : X \to Y$ **не непрерывна**

2

f - **непрерывна** из утверждения.

3

$\forall U \not\in \{\emptyset, \mathbb{Q}\} \quad U \in T_{\mathbb{Q}} \quad U = V \cap \mathbb{Q}$

$V = (\min(U) - \epsilon_1; \max(U) + \epsilon_2)$

$\forall \epsilon_1, \epsilon_2 V \cap \mathbb{Q} \neq U$

Аналогично для $T_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$

Тогда $T_{\mathbb{Q}}, T_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} -$ антидискретные топологии

Значит $\forall B \in Y \quad f|\mathbb{Q}^{-1}(B) \in \{\emptyset, \mathbb{Q}\} \quad f|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}^{-1}(B) \in \{\emptyset, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$

Тогда $f^{-1}(B) \in \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

Но $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \notin T_{\mathbb{R}}$

Значит в общем случае $f-$ **не непрерывна**