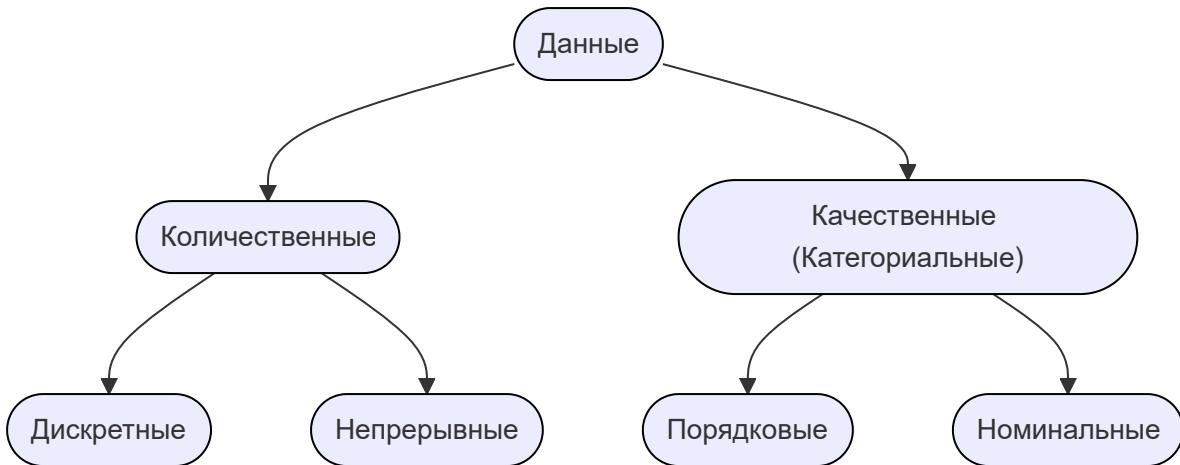


Коллоквиум 1

Тема 1. База

Типы данных



Дискретные

Целые значения.

Обычно результат счёта.

Непрерывные

float / диапазон.

Обычно результат измерения

Порядковые

Их нельзя складывать, но можно упорядочить.

S < M < L < XL < XXL

(Label encoding)

Номинальные

Их нельзя складывать и сравнивать

Бензин ✕ Дизель

(OneHot encoding)

Понятие однородности / неоднородности данных

Бытовое определение

Однородные данные

- Имеют одинаковую природу

Сигнал, звук, изображение, изменение по времени какой-либо величины и т.д.

Неоднородные

- Смесь типов данных (числовые + категориальные)
- Данные из разных источников (разные страны)
- Данные с разным масштабом (сотни тысяч и десятки единиц)

Определение в ML

Однородные данные

- Каждая строка — независимый объект
- Порядок строк не важен (перемешивание не меняет свойства данных)
- Нет временных или пространственных зависимостей
- Все данные из одного распределения

Неоднородные

- Временные зависимости (порядок дней)
- Пространственные зависимости (изображение)
- Групповые зависимости (измерения внутри одного пациента зависимы)
- Разные распределение (данные собраны в разных условиях)

Как бороться с неоднородностью?

- Для временных рядов: Использовать специальные методы валидации (временные разбиения)
- Для пространственных данных: Учитывать пространственные autocorrelation
- Для групповых данных: Использовать групповую валидацию (GroupKFold)
- Для разных распределений: Техники domain adaptation (Перенос знаний с модели на модель)

Методы предобработки данных

Missing data

Пропущенные значения

- Удаление
 - Потеря информации
- Заполнение
 - Числовые: Среднее, медиана, мода
 - Категориальные: мода или категория *Unknown*

Encoding

Перевод категориальных данных в количественные

- **Label Encoding**
 - М, Ж = 0, 1
 - Кодируем каждый признак целым числом
 - Модель может решить, что между числами есть порядок
- **One-Hot encoding**
 - М, Ж = [1, 0], [0, 1]
 - Каждая координата отвечает за конкретное значение. В данном случае первый столбец - *is_M*, второй - *is_Ж*
 - Проклятие размерности
 - При большом количестве категорий матрица становится разреженной и большой, увеличивается риск переобучения

Масштабирование и нормализация

Уменьшение масштаба данных.

- **Стандартизование**
 - $\frac{x - \mu}{\sigma}$
 - Сведение к среднему $\mu = 0$ и стандартному отклонению $\sigma = 1$
- **Min-max**
 - $\frac{x - \min}{\max - \min}$
 - Приведение значений к диапазону [0, 1]
 - Сохраняет исходное распределение

Преобразование признаков

Создание новых признаков из существующих для лучшего описания закономерностей.

- **Полиномиальные признаки**
 - Для учёта нелинейных зависимостей
 - $x^2, x^3, x_1 \cdot x_2$
- **Дискретизация**
 - Перевод непрерывного признака в категориальный / интервальный.
 - возраст → [0-18, 19-65, 66+]
- **Извлечение признаков**
 - **Из дат:** день недели, месяц, является ли выходным
 - **Из текста:** длина, наличие ключевых слов

- **Из взаимодействия признаков:** вычисление значений нового признака из нескольких других по формулам (цена, делённая на площадь, разность между выручкой и расходами и т. д.).

Работа с выбросами

Убиение значений, сильно отклоняющихся от остальных наблюдений.

- **Ящик с усами**

- Берём 25 и 75 перцентиль; отнимаем / прибавляем $1.5 \cdot \text{IQR}$ (интерквартильный размах) (а. к. а. делаем усы); Смотрим, что будет вне границ
 - $\begin{cases} x < Q_1 - 1.5 \cdot \text{IQR} \\ x > Q_3 + 1.5 \cdot \text{IQR} \end{cases}$

- **Z-score** метод (для нормально распределённого признака)

- Признак приводят к стандартному нормальному распределению ($Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$);
- Определяют порог (*threshold*) (обычно 99.7% квантиль, т. е. $threshold = 3$);
- Все значения, выходящие за заданный порог, считаются выбросами
 - $\begin{cases} Z > threshold \\ Z < -threshold \end{cases}$

Можем удалить, заменить на предельное значение или же как-то их преобразовать.

Типы задач, решаемых ИИ

С учителем

Есть размеченные данные. Пытаемся предсказать правильный ответ

Формальная постановка

D - множество пар (x_i, y_i) , где $x_i \in X, y_i \in Y$,

$L(Y, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ - функция ошибки,

$M(\xi, X) \rightarrow Y$ - модель, ξ - вектор параметров модели.

Тогда задача обучения с учителем - задача поиска вектора ξ^* , такого что:

$$L(Y, M(\xi^*, X)) = L(Y, \hat{Y}) \rightarrow \min$$

Задачи:

- Регрессия
- Классификация
 - Бинарная, многоклассовая
- Сегментация

- Разделение изображения на смысловые области
- **Ранжирование**
 - Упорядочивание объектов

Без учителя

Нет размеченных данных. Ищем скрытые структуры

Формальная постановка задачи кластеризации

X - множество объектов.

Пусть функция $\underline{L} : (X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{L} : (X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow \mathbb{R})$ - внутренняя метрика (внешняя метрика).

$M(\xi, X) \rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_n)$ - модель, ξ - вектор параметров модели.

Тогда задача кластеризации - поиск ξ , такого что

$$X_1, X_2, \dots, X_n : \underline{L}(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow \min$$

или

$$X_1, X_2, \dots, X_n : \bar{L}(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow \max$$

Задачи:

- **Кластеризация**
 - Группировка похожих объектов
- **Понижение размерности**
 - Сокращение числа признаков
- **Детекция аномалий**
 - Поиск выбросов
- **Генерация**
 - Создание новых данных (GAN)

С частичным контролем

Мало размеченных данных + много неразмеченных

- Обычно небольшое количество размеченных данных и большое количество неразмеченных.
- Неразмеченные данные помогают понять структуру пространства, а размеченные - определить границы классов

Обучение с подкреплением

Агент учится взаимодействовать со средой и получает "награды" за правильные действия

У среды есть множество всевозможных состояний S .

У агента - множество возможных действий A .

Функция награды за выбранное действие a в состоянии s , из-за которого среда перешла в состояние s' .

Обучение с подкреплением - задача получения агентом максимальной награды.

Формальная постановка задач

- 1. Какие данные есть / могут быть получены?**
- 2. Какой тип величины мы можем прогнозировать на основе данных?**
 1. Определение вида задачи
- 3. Какой характер данных и зависимостей в них?**
 1. Структура данных, зависимости и их характер
- 4. Какие у нас есть ресурсы (технические и человекоресурсы)?**
 1. Время обучения, память, GPU
 2. Эксперты для разметки данных и компетенции команды в ML
 3. Требования к точности и интерпретируемости
 4. Стоимость ошибки (FP, FN)
 1. Лучше, чтобы мы не дали кредит, чем дали и потеряли его.

Пример формальной постановки

Задача: Прогноз оттока клиентов банка

- 1. Данные:**
 - 100K клиентов, 50 признаков (возраст, баланс, количество операций)
 - Есть пропуски в данных о доходе
- 2. Целевая переменная:**
 - Бинарная: ушел/не ушел (классификация)
- 3. Характер данных:**
 - Табличные данные, временные ряды операций
 - Наблюдения независимы (i.i.d.)
 - Признаки: числовые + категориальные
- 4. Ресурсы:**
 - Сервер с 16ГБ RAM
 - Модель должна давать ответ < 1 секунды
 - Важна интерпретируемость (чтобы понимать причины оттока)

Тема 2. Регрессия

Постановка регрессии как задачи оптимизации

Пусть дан датасет (X, y) , где $y \in \mathbb{R}^N$ - вектор целевой переменной, а $X \in \mathbb{R}^{N \times M}$ - матрица M признаков.

Задача состоит в подборе линейной функции, "наилучшим образом" моделирующей линейную зависимость ($y = kx + b$) значения таргета y_i от фичи x_i . Тогда искомая функция будет иметь вид:

$$f(w, x_i) = (w, x_i) = w_0 + w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + \cdots + w_M x_{iM} = \hat{y}_i$$

Формулировку "наилучшим образом" в данном контексте можно выразить например с помощью Евклидовой нормы:

$$L(f, X, y) = \frac{1}{N} \|y - f(w, X)\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - (w, x_k))^2$$

Линейная модель тем "лучше" моделирует зависимость чем меньше значение функционала L , а значит задача сводится нахождении вектора весов w^* , доставляющего минимум функционалу:

$$L_f(w) = \|y - f(w, X)\|^2 \rightarrow \min_w$$

Метрики и функции ошибки задач регрессии

Функция ошибки - функционал, используемый во время процесса оптимизации параметров

Метрика - функция, оценивающая результат, предсказанный моделью

Функции ошибок

1) MSE (Mean Squared Error)

$$\text{MSE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2$$

2) MAE (Mean Absolute Error)

$$\text{MAE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y_k - \hat{y}_k|$$

Метрики качества

Довольно часто MSE и MAE используют как метрики. Однако на их базе существуют еще несколько метрик:

1) RMSE

Квадратный корень MSE

2) Коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}$$

где \bar{y} - среднее обучающей выборки (наилучшее константное предсказание с точки зрения MSE)

3) MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

$$\text{MAPE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{|y_k - \hat{y}_k|}{|y_k|}$$

Интерпретируемость и применимость метрик

Интерпретируемость модели - возможность объяснить её результаты заказчику

1) MSE

Интерпретируемость: метрика не ограничена сверху и возвращает значение на порядок большее, чем в данных, из-за чего её сложнее интерпретировать

Применимость: когда выбросов мало и их нужно сильно штрафовать

2) RMSE

Интерпретируемость: метрика теперь имеет тот же порядок, что и у данных, потому проще оценить разброс

Применимость: аналогична MSE

3) MAE

Интерпретируемость: средняя абсолютная ошибка

Применимость: когда выбросов много (метрика менее им подвержена, производная - константа).

4) R^2

Интерпретируемость: показывает какую долю дисперсии модель смогла предсказать
 $R^2 = 1$ - идеальная модель

$R^2 = 0$ - предсказывает не лучше константного среднего

$R^2 < 0$ - предсказывает хуже чем просто среднее

Применимость: когда хотим сравнить модели на одном и том же наборе данных, желательно вместе с другими метриками.

5) MAPE

Интерпретируемость: средняя ошибка в процентах

Применимость: метрика сильнее штрафует отрицательные величины, данные не должны содержать нули

Вывод аналитического решения задачи линейной регрессии в векторной форме

при дифференцировании первое слагаемое можно сжато

$$X_{n \times k} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{k2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = X\omega$$

Функция потерь

$$L = (X\omega - y)^2 \rightarrow \min$$

Преобразуем функцию потерь

$$L = (X\omega - y)^T(X\omega - y) = (X\omega)^T X\omega - (X\omega)^T y - y^T X\omega + y^T y$$

Используя свойства векторной алгебры получаем тождества

1. $y^T X\omega = (X\omega)^T y = \omega^T X^T y$
2. $(X\omega)^T X\omega = \omega^T X^T X\omega$

С учетом этих свойств, функция потерь принимает вид

$$L = \omega^T X^T X\omega - 2\omega^T X^T y + y^T y$$

Перейдем к решению задачи минимизации. Для этого продифференцируем функцию потерь по вектору весов

$$\frac{dL}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \omega^T X^T X\omega - 2 \frac{d}{d\omega} \omega^T X^T y + \frac{d}{d\omega} y^T y = L_1 - 2L_2 + L_3$$

$$w^T X^T Xw = w^T Aw = (w_1, \dots, w_k) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{11}w_1 + \dots + a_{k1}w_k, \dots, a_{1k}w_1 + \dots + a_{kk}w_k) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} = \\
&= w_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{k1}w_k) + \dots + w_k(a_{1k}w_1 + \dots + a_{kk}w_k) = \sum_{i=1}^k a_{ii}w_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k a_{ij}w_iw_j \\
&\frac{d}{dw_2} \begin{pmatrix} a_{11}w_1^2 & a_{12}w_1w_2 & \dots & a_{1k}w_1w_k \\ a_{21}w_2w_1 & a_{22}w_2^2 & \dots & a_{2k}w_2w_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}w_kw_1 & a_{k2}w_kw_2 & \dots & a_{kk}w_k^2 \end{pmatrix} = 2 \sum_{i=1}^k a_{2i} \cdot w_i
\end{aligned}$$

Получили квадратичную форму с матрицей A .

С учетом этого получаем

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^k a_{i1}w_i \\ 2 \sum_{i=1}^k a_{i2}w_i \\ \vdots \\ 2 \sum_{i=1}^k a_{ik}w_i \end{pmatrix} = 2A\omega = 2X^T X\omega$$

$$\begin{aligned}
w^T X^T y &= (w_1, \dots, w_k) \begin{pmatrix} x_{11}y_1 + \dots + x_{n1}y_n \\ \vdots \\ x_{1k}y_1 + \dots + x_{nk}y_n \end{pmatrix} = \\
&= w_1(x_{11}y_1 + \dots + x_{n1}y_n) + \dots + w_k(x_{1k}y_1 + \dots + x_{nk}y_n)
\end{aligned}$$

Таким образом

$$L_2 = \begin{pmatrix} x_{11}y_1 + \dots + x_{n1}y_n \\ \vdots \\ x_{1k}y_1 + \dots + x_{nk}y_n \end{pmatrix} = X^T y$$

$$L_3 = 0$$

Тривиально (Очевидно)

В конечном счете имеем условие экстремума

$$\frac{dL}{d\omega} = 2X^T X\omega - 2X^T y = 0$$

Находим оптимальный вектор весов

$$2X^T X\omega - 2X^T y = 0$$

$$X^T X\omega = X^T y$$

$$\omega = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Модели применяемые для решения задачи регрессии

1. Линейная регрессия
2. Полиномиальная регрессия
3. Дерево решений
 - Разбиваем пространство признаков на области
4. Случайный лес
 - Ансамбль из деревьев решений (*бэггинг*)
5. Градиентный бустинг
 - Последовательное построение ансамбля, где каждое новое дерево учится на ошибках предыдущих.
6. Нейронная сеть (без функции активации)
 - Линейные слои без нелинейных активаций эквивалентны линейной регрессии.

Внесение нелинейности в линейные модели. Случай использования

Feature Engineering

Идея заключается в интерпретации нелинейного слагаемого как самостоятельной фичи, например:

$$f(w, x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 \ln(x_1) + w_4 x_2^4$$

Мы по приколу ввели несколько нелинейных зависимостей в виде логарифма и четвертой степени, однако относительно весов модель как была линейной, так и осталась.

Увлекаться этим тоже не стоит, ибо есть опаски потерять смысл фичи, а плодить юзлессы хуйню дело не благотворное.

Из полезного сюда же можно отнести преобразование периодических фич на окружность: условно у нас есть время суток, день года и т. д., имеет смысл вытащить значения синуса и косинуса для них. Так модели будет проще воспринимать эту фичу (в частности не будет путаницы между 0 и 24-м часами в сутках).

В целом применять стоит, если зависимость видна явно.

Kernel trick

Идея заключается в переходе к более высокой размерности с помощью некоторого ядра так, чтобы в новом пространстве данные стали линейно разделимыми.

Ядро (Kernel) — это функция, которая для любых двух точек a и b в исходном пространстве возвращает скаляр, равный их скалярному произведению в некотором пространстве признаков $\Phi : K(a, b) = \langle \Phi(a), \Phi(b) \rangle$.

Имеет смысл использовать, если зависимость сложна и на глаз сказать какая она нельзя.

Доп вопросы

Достаточное условие экстремума

Пусть у нас есть функция $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемая, x_0 - стационарная точка, т. е. $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = \vec{0}$.

$H(x)$ - матрица Гессе (матрица вторых производных):

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Тогда точка x_0 - точка минимума, если матрица Гессе в этой точке положительно определённая, и точка максимума, если отрицательно определённая.

По критерию Сильвестра, матрица квадратичной формы положительно определена, если все угловые миноры положительны:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \det H(x_0) > 0$$

и отрицательно определена, если знаки угловых миноров **чертежаются, начиная с отрицательного**:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \det H(x_0) > 0 \text{ (если } n \text{ - чётное)}$$

Тема 3. Классификация

- **TP (True Positive)**: верно предсказанные положительные классы
- **TN (True Negative)**: верно предсказанные отрицательные классы

- **FP (False Positive)**: ложно-положительные (ошибка I рода)
- **FN (False Negative)**: ложно-отрицательные (ошибка II рода)

Метрики (для бинарной и мультиклассификации)

Бинарная

Матрица ошибок

	Predicted negative	Predicted positive
Actual negative	TN	FP
Actual positive	FN	TP

Accuracy

Доля верных предсказаний.

$$\frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

Не подходит, когда имеется дисбаланс классов или разные вероятности предсказания для каждого класса.

Precision

Доля верно предсказанных объектов класса 1 от всех объектов, предсказанных как 1-ый класс. (учитывает ошибку 1-ого рода)

Насколько точно мы способны предсказывать 1-й класс.

$$\frac{TP}{TP + FP}$$

Recall

Доля верно предсказанных объектов класса 1 от всех объектов являющихся 1-м классом (учитывает ошибку второго рода).

Полнота предсказаний 1-го класса.

$$\frac{TP}{TP + FN}$$

F_1 -score

Метрика связывающая точность и полноту, также называемая их средним.

$$\frac{2 \cdot Recall \cdot Precision}{Recall + Precision}$$

В идеальной ситуации стремимся получить $Recall = Precision = 1 \rightarrow F_1 = 1$

Обобщённая формула, если $Precision$ или $Recall$ важнее:

$$F_\beta = (1 + \beta^2) \cdot \frac{Recall \cdot Precision}{Recall + \beta^2 Precision}$$

При $\beta > 1$ важнее $Recall$, при $0 < \beta < 1$ важнее $Precision$.

*Почему в формуле используется гармоническое среднее $Precision$ и $Recall$, а не арифметическое?

Гармоническое среднее гораздо чувствительнее к малым значениям, чем арифметическое.

Пример: имеется сильный дисбаланс классов, и модель ошибается в предсказании редкого положительного класса, потому $Precision \approx 1$, $Recall = 0.01$.

Среднее арифметическое: $\frac{1}{2}(Precision + Recall) = 0.5005$

Среднее гармоническое: $2 \cdot \frac{Recall \cdot Precision}{Recall + Precision} \approx 0.0198$

Среднее арифметическое подвержено влиянию больших значений, а среднее гармоническое - малых, потому такая оценка более справедливая.

Мультиклассовая

- **Macro-average** - равный вес каждому классу
 - Все классы равнозначны
 - Маленькие классы имеют такой же вес, как и большие, следовательно метрика меньше подвержена дисбалансу классов
- **Micro-average** - вес пропорционально размеру класса

Accuracy

Доля верных предсказаний модели (micro-average)

$$\frac{\sum(\hat{y}_i = y_i)}{|S|}$$

Precision

$$Precision_{macro} = \frac{Precision_A + Precision_B + \dots + Precision_N}{N}$$

$$Precision_{micro} = \frac{TP_A + TP_B + \dots + TP_N}{TP_A + FP_A + TP_B + FP_B + \dots + TP_N + FP_N}$$

Recall

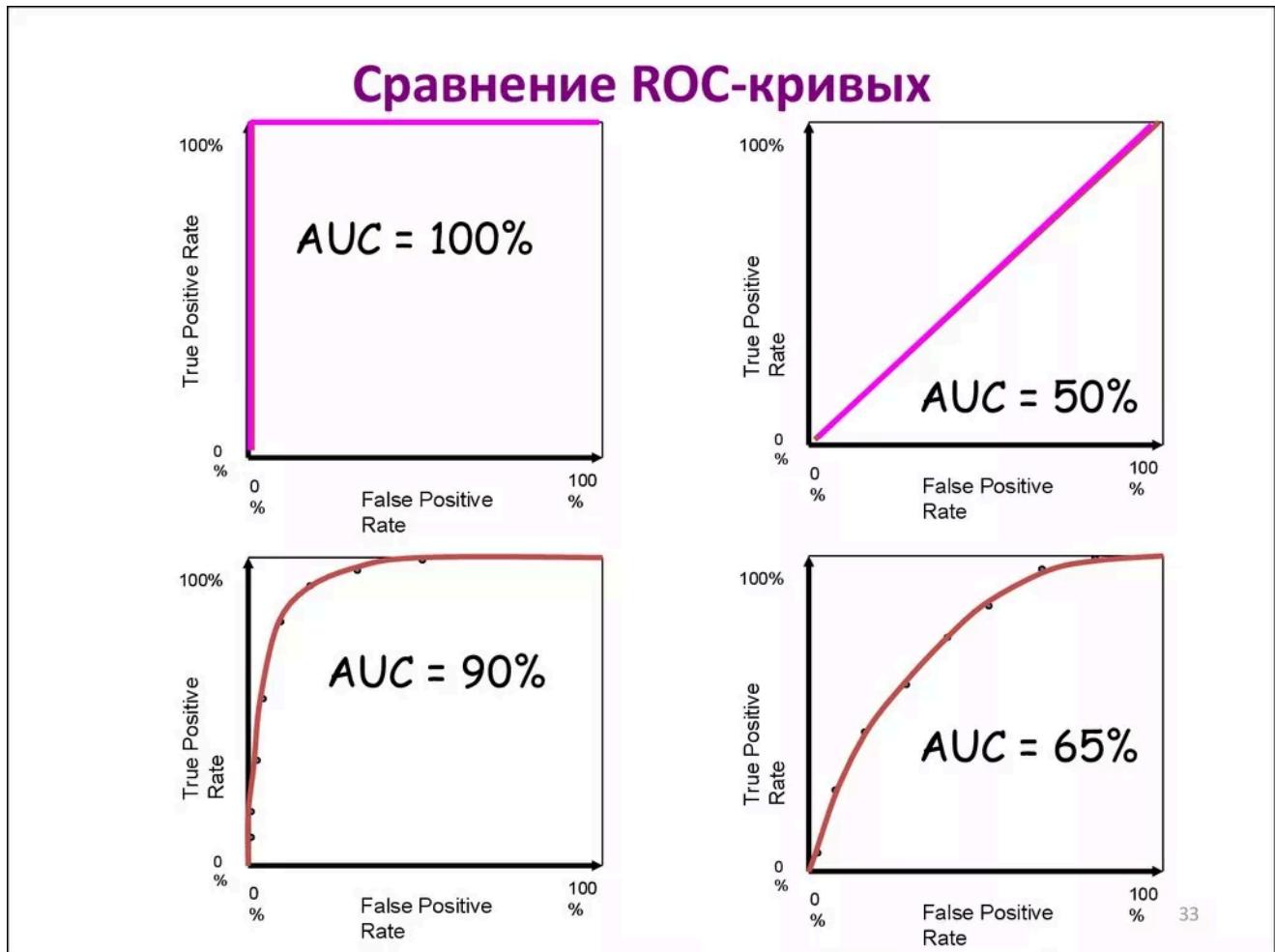
$$Recall_{macro} = \frac{Recall_A + Recall_B + \dots + Recall_N}{N}$$

F1 score

$$F_1(\text{class} = a) = 2 \frac{\text{Precision}(\text{class} = a) \times \text{Recall}(\text{class} = a)}{\text{Precision}(\text{class} = a) + \text{Recall}(\text{class} = a)}$$

ROC AUC

Идея



Reciever Operating Characteristic - кривая ошибок. Показывает компромисс между ТР rate и FP rate

Area Under the Curve - площадь под кривой. Оценка качества бинарного классификатора.

Построение

1. Получаем вероятности положительного класса от модели
2. Сортируем объекты по убыванию вероятности
3. Последовательно меняем порог от 1.0 до 0.0
 1. $p(\text{class} = \text{positive}) > \text{border}$
4. Для каждого порога вычисляем:
 - **TPR** = Recall = $\frac{TP}{TP + FN}$

- $FPR = \frac{FP}{FP + TN}$

5. Строим кривую: FPR (X-axis) vs TPR (Y-axis)

ROC-AUC равен вероятности того, что случайно выбранный положительный объект (из класса "1") будет ранжирован моделью выше (ему будет присвоена более высокая вероятность принадлежности к положительному классу), чем случайно выбранный отрицательный объект (из класса "0").

Сравнение

$AUC = 1.0$ - идеальная модель

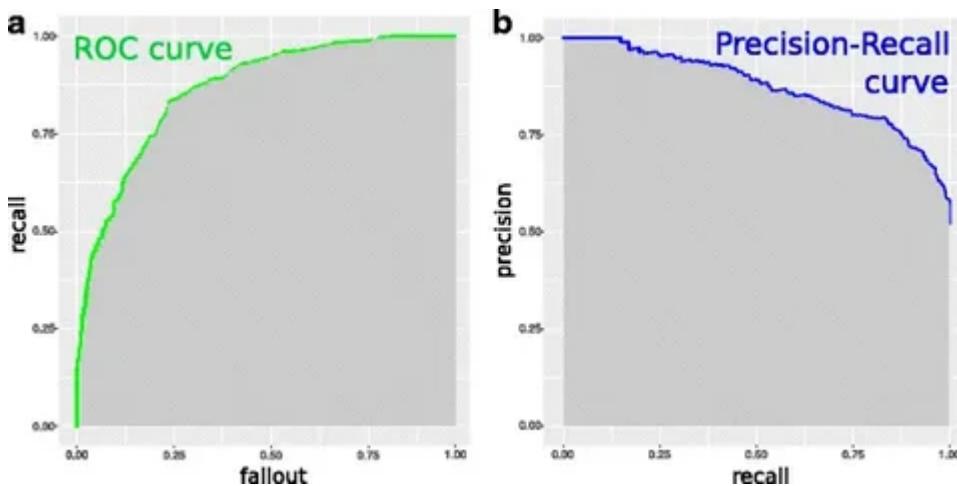
$AUC = 0.5$ - случайное угадывание

$AUC < 0.5$ - хуже случайного угадывания

Ограничения

- Сильный дисбаланс классов → лучше Precision-Recall AUC
- Разная стоимость ошибок FP и FN → нужно выбирать конкретный порог
- Нужен конкретный порог для production системы

Гиперпараметр классификации (подозреваю, что речь про PR AUC)



Идея

PR AUC — это площадь под кривой Precision-Recall, которая показывает компромисс между точностью и полнотой модели.

Ключевое отличие от ROC AUC:

- **ROC AUC** фокусируется на обоих классах одинаково
- **PR AUC** фокусируется в основном на **положительном классе**

Построение

Оси кривой:

- **X-axis: Recall** (полнота) = $\frac{TP}{TP + FN}$
- **Y-axis: Precision** (точность) = $\frac{TP}{TP + FP}$

Процесс построения:

1. Сортируем объекты по убыванию вероятности положительного класса
2. Последовательно меняем порог классификации
3. Для каждого порога вычисляем Precision и Recall
4. Строим кривую по полученным точкам

Примеры выбора метрик для бинарной классификации

1. Медицинская диагностика (обнаружение болезни)

Контекст: Редкое заболевание (1% prevalence)

- **Цель:** Не пропустить ни одного больного
- **Стоимость ошибок:** FN >> FP (лучше ложная тревога, чем пропущенный больной)

Рекомендуемые метрики:

- **Recall** - главный приоритет
- **Specificity** - контроль ложных тревог
- **PR AUC** - оценка качества на положительном классе
- **F2-score** - с весом в пользу Recall

2. Спам-фильтрация email

Контекст: Баланс классов примерно 50/50

- **Цель:** Не пропустить спам, но не потерять важные письма
- **Стоимость ошибок:** FP ≈ FN (потеря важного письма ≈ получение спама)

Рекомендуемые метрики:

- **Precision** - минимизация ложных срабатываний
- **F1-score** - баланс между Precision и Recall
- **ROC AUC** - общее качество классификации
- **Accuracy** - так как классы сбалансированы

Модернизация метрик для задачи мультиклассификации.

Для каждого класса вычисляем метрики, рассматривая его как положительный, а все остальные - как отрицательный.

Примеры выбора метрик для задачи мультиклассификации.

1. Классификация изображений (CIFAR-10, ImageNet)

Контекст: 10-1000 сбалансированных классов

Цель: Высокая общая точность распознавания

Рекомендуемые метрики:

- **Top-1 Accuracy** - основная метрика
- **Top-5 Accuracy** - учитывает близкие классы
- **Macro F1-score** - сбалансированная оценка по всем классам
- **Confusion Matrix** - анализ типичных ошибок (например, "кошка vs собака")

2. Классификация текстов (новостей, отзывов)

Контекст: 5-20 классов, часто несбалансированных

Цель: Точно определять категории контента

Рекомендуемые метрики:

- **Weighted F1-score** - учет дисбаланса классов
- **Macro Precision** - важно для редких категорий
- **Per-class Recall** - убедиться, что все темы охвачены
- **Hamming Loss** - если возможна multi-label классификация

Тема 4. Деревья

<https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/reshayushchiye-derevya>

Построение дерева для классификации (регрессии)

Пусть X — исходное множество объектов обучающей выборки, а X_m — множество объектов, попавших в текущий лист (в самом начале $X_m = X$). Тогда жадный алгоритм можно описать следующим образом:

1. Создаём вершину v .
2. Если выполнен критерий остановки $Stop(X_m)$, то останавливаемся, объявляем эту вершину листом и ставим ей в соответствие ответ $Ans(X_m)$, после чего возвращаем её.
3. Иначе: находим предикат (иногда ещё говорят сплит) $\beta_{j,t}$, который определит наилучшее разбиение текущего множества объектов X_m на две подвыборки X_ℓ и X_r , максимизируя критерий ветвления $Branch(X_m, j, t)$.

4. Для X_ℓ и X_r рекурсивно повторим процедуру.

Критерии останова

В качестве критерия может выступать простое правило:

- Достигнута нужная глубина
- Количество данных, попавших в лист < заданного
- Достигнут желаемый показатель однородности данных в листе
- Улучшение критерия ветвления меньше порога

Можно построить дерево жадно без ограничений, а затем провести *стрижку* (*pruning*), то есть удалить некоторые вершины из дерева так, чтобы итоговое качество упало не сильно, но дерево начало подходить под условия регуляризации.

Это помогает бороться с переобучением.

Критерии разбиения (регрессия / классификация)

Наиболее часто критерий ветвления - это функция, которая оценивает, насколько улучшится некоторая финальная метрика качества дерева в случае, если получившиеся два листа будут терминальными, по сравнению с ситуацией, когда сама исходная вершина — это лист.

Impurity (Хаотичность)

Показатель того, насколько хорошо объекты в листе можно приблизить константным значением

$$H(X_m) = \min_c \frac{1}{|X_m|} \sum_{(x_i, y_i) \in X_m} L(y_i, c)$$

Критерий ветвления примет вид:

$$\text{Branch}(X_m) = H(X_m) - \frac{|X_l|}{|X_m|} \cdot H(X_l) - \frac{|X_r|}{|X_m|} \cdot H(X_r)$$

Перед $H(x_l)$ и $H(x_r)$ именно такие множители, потому что в противном случае модель выбирала бы неинформативные разделения на малое подмножество с, например, элементами одного класса, и большое подмножество без особого изменения пропорций классов объектов.

Почему именно такие веса? Контрпример

Допустим, есть два возможных разбиения одного родительского узла (100 объектов, 50/50 классов, $H=1$, $\text{IG} = H(\text{до разбиения}) - E[H(\text{после разбиения})]$, E - матожидание):

Сценарий А (хорошее разбиение):

- Левый узел: 49 объектов (49 "Да", 0 "Нет"), $H=0$

- Правый узел: 51 объект (1 "Да", 50 "Нет"), $H \approx 0.14$
- Взвешенная энтропия: $(49/100)*0 + (51/100)*0.14 \approx 0.07$
- $IG = 1 - 0.07 = 0.93$ (отлично!)

Сценарий В (плохое разбиение, но создающее один очень чистый маленький узел):

- Левый узел: 5 объектов (5 "Да", 0 "Нет"), $H=0$
- Правый узел: 95 объектов (45 "Да", 50 "Нет"), $H \approx 1.0$
- Без весов (ошибка!):** Среднее было бы $(0 + 1)/2 = 0.5$, $IG=0.5$
- С весами (правильно):** $(5/100)*0 + (95/100)*1 = 0.95$, $IG=0.05$
- Реальный $IG = 0.05$ (мизерный, и это правильно!)

Без коэффициентов дерево выбрало бы сценарий В, что абсурдно: мы создали крошечный чистый узел (5 объектов) ценой почти нулевого улучшения для 95% данных!

MSE

$$H(X_m) = \sum_{(x_i, y_i) \in X_m} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{|X_m|}$$

MAE

$$H(X_m) = \sum_{(x_i, y_i) \in X_m} \frac{|y_i - \text{median}(Y)|}{|X_m|}$$

Misclassification error

$$H(X_m) = \min_{c \in Y} \frac{1}{|X_m|} \sum_{(x_i, y_i) \in X_m} \mathbb{I}[y_i \neq c]$$

Энтропия

$$H(X_m) = - \sum_{k=1}^K \frac{N_k}{|X_m|} \log c_k = - \sum_{k=1}^K p_k \log p_k$$

Измеряет непредсказуемость реализации случайной величины.

Если случайная величина принимает только одно значение, то она абсолютно предсказуема и её энтропия равна 0.

Наибольшего значения энтропия достигает для равномерно распределённой случайной величины — и это отражает тот факт, что среди всех величин с данной областью значений она наиболее «непредсказуема».

Критерий Джини

$$H(X_m) = \sum_{k=1}^K p_k(1 - p_k) = 1 - \sum_{k=1}^K p_k^2$$

Обработка категориальных признаков

Пусть признак x^i принимает значения из множества $C = \{c_1, \dots, c_M\}$.

Тогда при очередном разбиении естественно рассматривать по этому признаку произвольные сплиты вида $C = C_l \sqcup C_r$.

- Число возможных разделений равно $2^{M-1} - 1$.

Для снижения вычислительной сложности ищут способ упорядочить элементы множества C и работать с ними как с числами.

Для некоторых задач такое упорядочение можно построить вполне естественным образом.

Бинарная классификация

Для задачи бинарной классификации значения c_m можно упорядочить по неубыванию доли объектов класса 1.

Регрессия

Для задачи регрессии с функцией потерь MSE значения c_m можно упорядочить по среднему значению таргета в множестве.

Тема 5. Кластеризация

<https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/klasterizaciya>

Постановка задачи

Задача обучения без учителя, целью которой является разбиение множества объектов на группы (кластеры) таким образом, чтобы:

- Объекты внутри одного кластера были **максимально похожи** друг на друга
 - Объекты из разных кластеров были **максимально различны**
- C_i -кластер. Кластеры не пересекаются
- μ_i — центр кластера C_i
- $d(x_i, x_j)$ - мера близости между объектами.

Критерий качества:

- Минимизация внутрикластерного расстояния:

$$\min \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i} d(x, \mu_i)^2$$

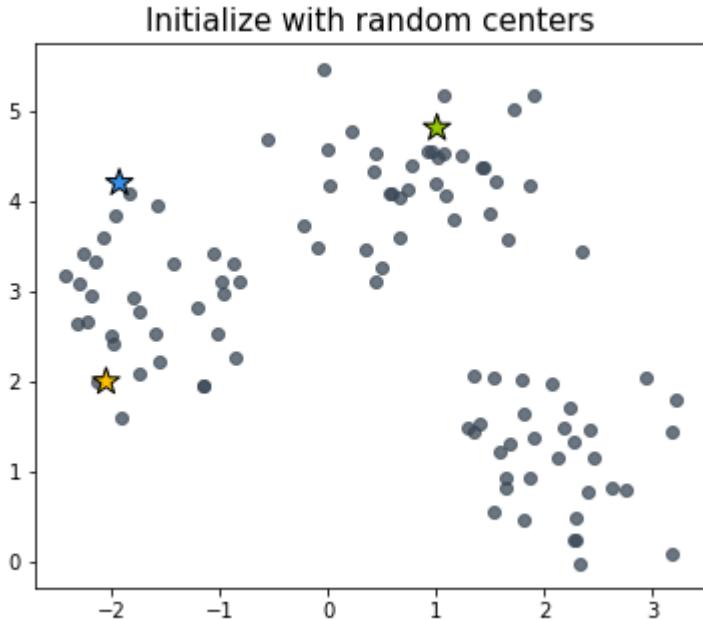
- Максимизация межкластерного расстояния:

$$\max \sum_{i \neq j} d(\mu_i, \mu_j)^2$$

Число кластеров:

- Может быть задано априори (k -means)
- Может определяться автоматически (DBSCAN, иерархическая кластеризация)

K-means



Идея

Разбить данные на **k кластеров** так, чтобы минимизировать внутрикластерную вариацию (сумму квадратов расстояний от точек до центроиды их кластера).

$$V = \sum_{i=1}^N \min_j \|x_i - \mu_j\|^2 \rightarrow \min, \text{ где } x_i - \text{точки}, \mu_j - \text{центроиды}.$$

Алгоритм

Инициализация:

- Выбираем число кластеров k
- Случайно инициализируем **k центроид** (центров кластеров)

Основной цикл:

1. Назначение кластеров (E-step):

- Для каждой точки находим ближайшую центроиду
- Назначаем точку соответствующему кластеру

- $C_i = x_j : \|x_j - \mu_i\|^2 \leq \|x_j - \mu_l\|^2 \forall l$

2. Пересчет центроид (M-step):

- Для каждого кластера вычисляем новую центроиду как среднее всех точек кластера
- $\mu_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x_j \in C_i} x_j$

3. Проверка на критерий остановки

Критерий остановки:

- Максимальное число итераций
- Порог изменения центроид (может требовать много итераций)
- Порог изменения целевой функции (внутрикластерной суммы квадратов)

Потенциальные проблемы

Кучное размещение центров. В этом случае их начальное положение с большой вероятностью окажется далёким от итогового положения центров кластеров.

Улучшения алгоритма

K-means++ (умная инициализация):

1. Первая центроида выбирается случайно
2. Каждая следующая выбирается с вероятностью, пропорциональной квадрату расстояния до ближайшей существующей центроиды
 - $p(s) \cdot \rho(x_{next}, x_1)^2$
 - x_{next} - последующий центр кластера
 - x_1 - центр выбранный на шаге 1
 - $p(s)$ - вероятность выбора точки
 - Чем дальше точка тем выше шанс её взять.
 - Значительно улучшает качество и скорость сходимости

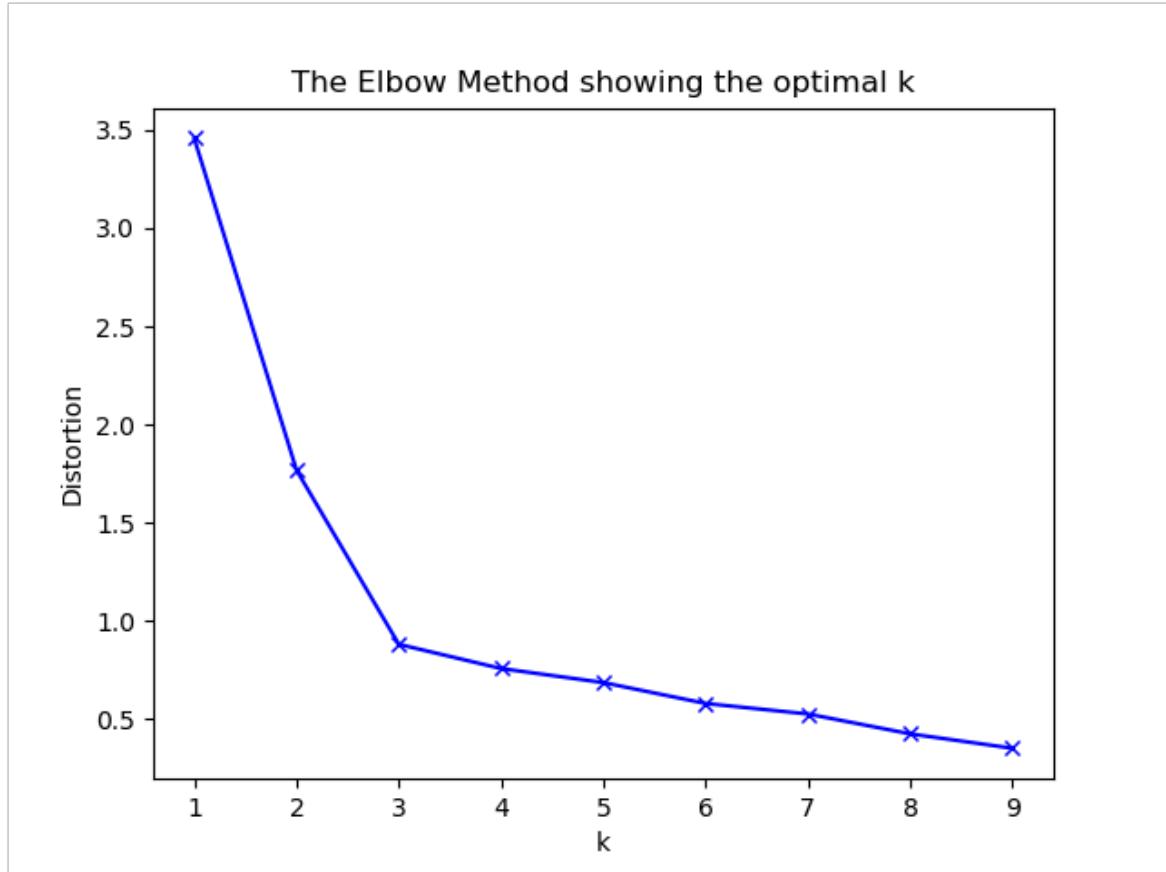
mini-batch K-means

- На каждой итерации выбираем случайную подвыборку (мини-батч) и работаем на ней.
- В случае когда исходная выборка очень велика, переход к пакетной обработке не приводит к большой потере качества, зато значительно ускоряет работу алгоритма.

Определение оптимального k :

- **Elbow method** - ищем "локоть" на графике

- Момент, когда внутрикластерная (сумма квадратов расстояний между объектами и их центроидом) перестаёт резко снижаться

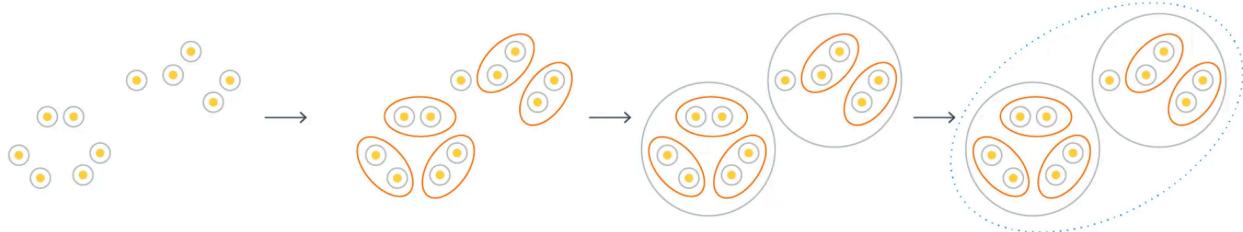


Использование Манхэттенского расстояния вместо Евклидова

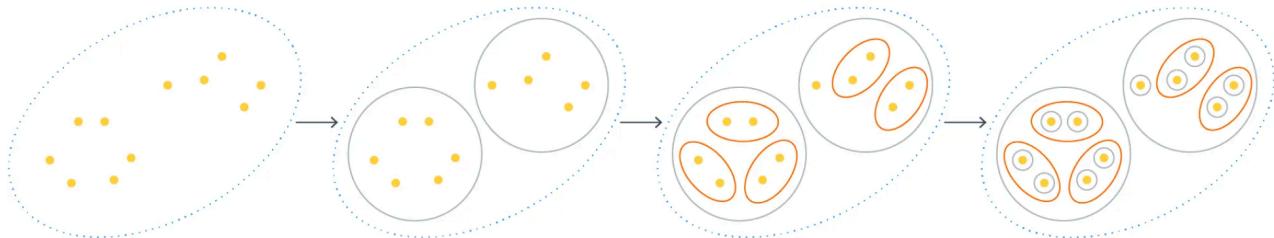
- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- Менее чувствительно к выбросам, следовательно лучше справляется с проклятием размерности;
- Кластеры имеют ромбовидную форму, а не сферическую;
- Если разреженные данные (вычисления быстрее, т. к. не нужно возводить в квадрат и считать корень).

Иерархические агломерационные и дивизионные методы кластеризации

Agglomerative Hierarchical Clustering



Divisive Hierarchical Clustering



Идея

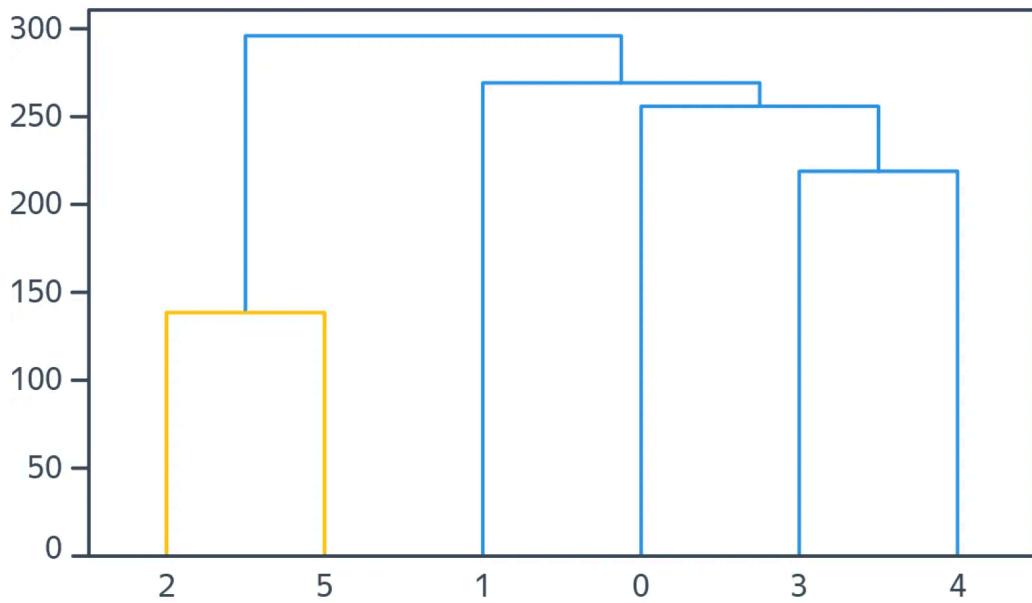
Агломеративные алгоритмы начинают с небольших кластеров (обычно с кластеров, состоящих из одного объекта) и постепенно объединяют их в кластеры побольше.

Дивизионные начинают с больших кластеров (обычно – с одного единственного кластера) и постепенно делят на кластеры поменьше.

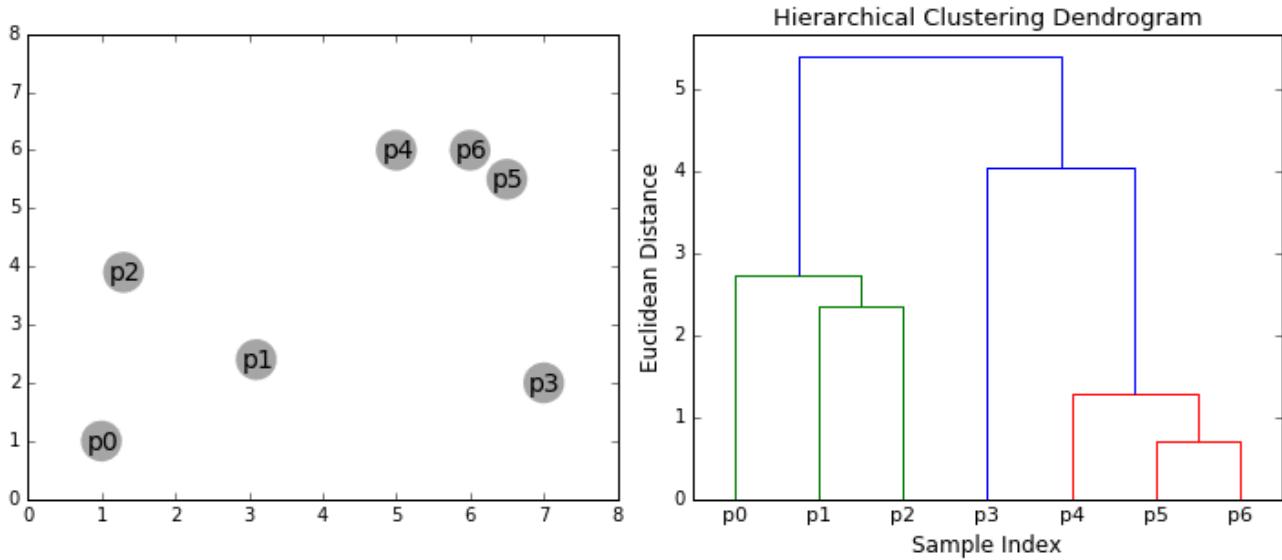
Кластеры могут быть как на одном уровне (плоская структура) так и в иерархии (образуя древовидную структуру)

По мере объединения кластеров, каждой итерации алгоритма соответствует пара объединяемых на этой итерации кластеров, а также расстояние между кластерами в момент слияния. Расстояния с ростом итерации будут только увеличиваться, поэтому

возникает возможность построить следующую схему, называемую **дендrogramмой**:



Пример работы агломеративного алгоритма:



Здесь по горизонтали внизу отмечены объекты кластеризуемой выборки, под горизонтальной осью подписаны номера объектов, а их расположение вдоль оси продиктовано только эстетическими соображениями: нам удобно строить дендрограмму так, чтобы никакие дуги в ней не пересекались. По вертикали отложены расстояния между кластерами в момент слияния. Когда происходит объединение кластеров, состоящих из нескольких объектов, соответствующая этой итерации алгоритма дуга идёт не до конкретных объектов выборки, а до дуги другого кластера.

Метод "локтя" по дендрограмме:

1. Ищем самый длинный вертикальный отрезок, который не пересекается горизонтальными линиями
2. Проводим горизонтальную линию через этот отрезок
3. Число пересекаемых вертикальных линий = число кластеров

Алгоритм

1. Создаём столько кластеров, сколько у нас объектов в выборке, каждый объект — в своём отдельном кластере.
2. Повторяем итеративно слияние двух ближайших кластеров, пока не выполнится [критерий останова](#).

Критерий останова

1. Нужное количество кластеров
2. Сильное изменение расстояния после шага итерации

Подсчёт расстояния

Если обозначить кластеры как U и V , расстояние между ними в этом случае можем вычислять по одной из формул:

$$d_{avg}(U, V) = \frac{1}{|U| \cdot |V|} \sum_{u \in U} \sum_{v \in V} \rho(u, v)$$

$$d_{min}(U, V) = \min_{(u,v) \in U \times V} \rho(u, v)$$

$$d_{max}(U, V) = \max_{(u,v) \in U \times V} \rho(u, v)$$

Метод Уорда (Ward), вычисление улучшения метрики внутрикластерной суммы квадратов после объединения кластеров:

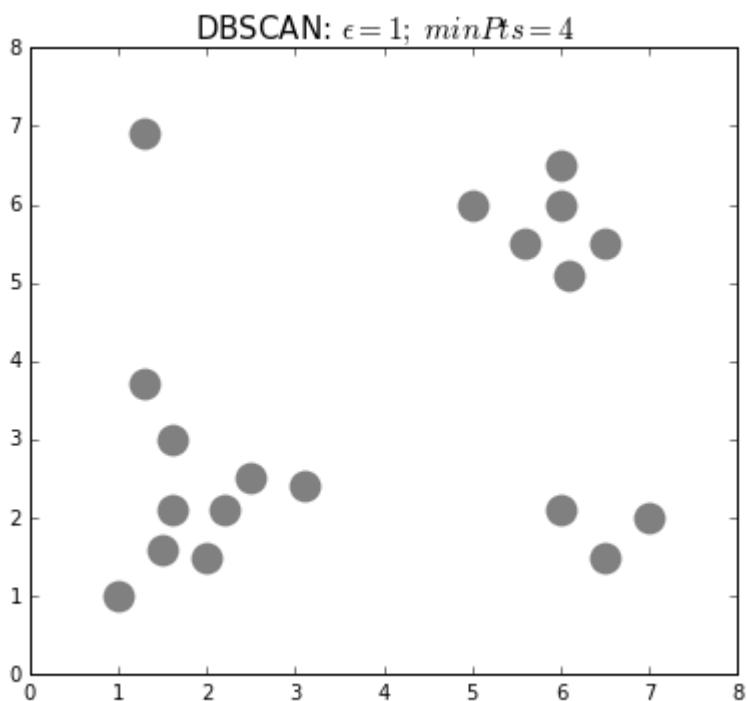
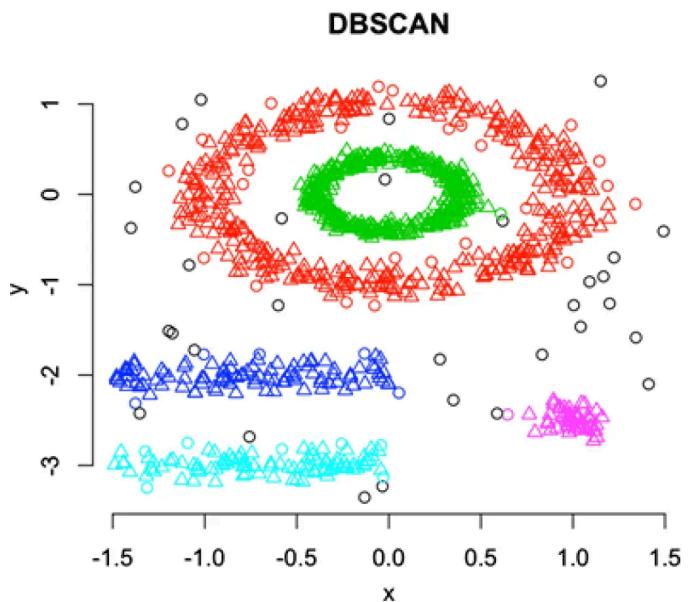
$$d_{ward}(U, V) = \sum_{x \in U \cup V} \|x - \bar{x}\|^2 - \sum_{u \in U} \|u - \bar{U}\|^2 - \sum_{v \in V} \|v - \bar{V}\|^2,$$

где $\bar{x} = \frac{1}{|U \cup V|} \sum_{x \in U \cup V} x$, $\bar{U} = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} u$, $\bar{V} = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} v$

Недостатки:

- **Высокая вычислительная сложность:** $O(n^3)$ для наивной реализации, $O(n^2)$ с оптимизацией
- **Чувствительность к шуму и выбросам**
- **Не отменяет объединения** (ждадный алгоритм)
- **Трудно масштабировать на большие datasets**

DBSCAN



Идея

Выделение связных компонент графа

Параметры:

- ϵ - радиус окрестности
- **min_samples** - минимальное количество точек в ϵ -окрестности

Типы точек:

- **Core point** (ядровая точка):
 - В её ϵ -окрестности находится $\geq min_samples$ точек (включая саму точку)
- **Border point** (пограничная точка):

- Не является core point, но попадает в ϵ -окрестность какой-либо core point
- **Noise point** (шумовая точка):
 - Не является ни core, ни border point

Алгоритм

1. Инициализация:

- Выбираем параметры ϵ и min samples
- Все точки помечаем как не посещённые

2. Основной цикл:

- Для каждой не посещённой точки p :
 - Помечаем p как посещенную
 - Находим всех соседей в ϵ -окрестности: $N = \{q \in X \mid \text{distance}(p, q) \leq \epsilon\}$
 - Если $|N| < \text{min samples} \rightarrow$ помечаем p как **NOISE**
 - Иначе:
 - Создаем новый кластер
 - Добавляем p в кластер
 - Расширяем кластер: добавляем все точки, достижимые из p

Недостатки:

- Чувствителен к параметрам ϵ и min_samples
- Плохо работает с данными разной плотности в одном наборе
- Затруднительно выбирать параметры в высокоразмерных пространствах
- Не детерминирован для border points (могут попасть в разные кластеры)

Выбор параметров

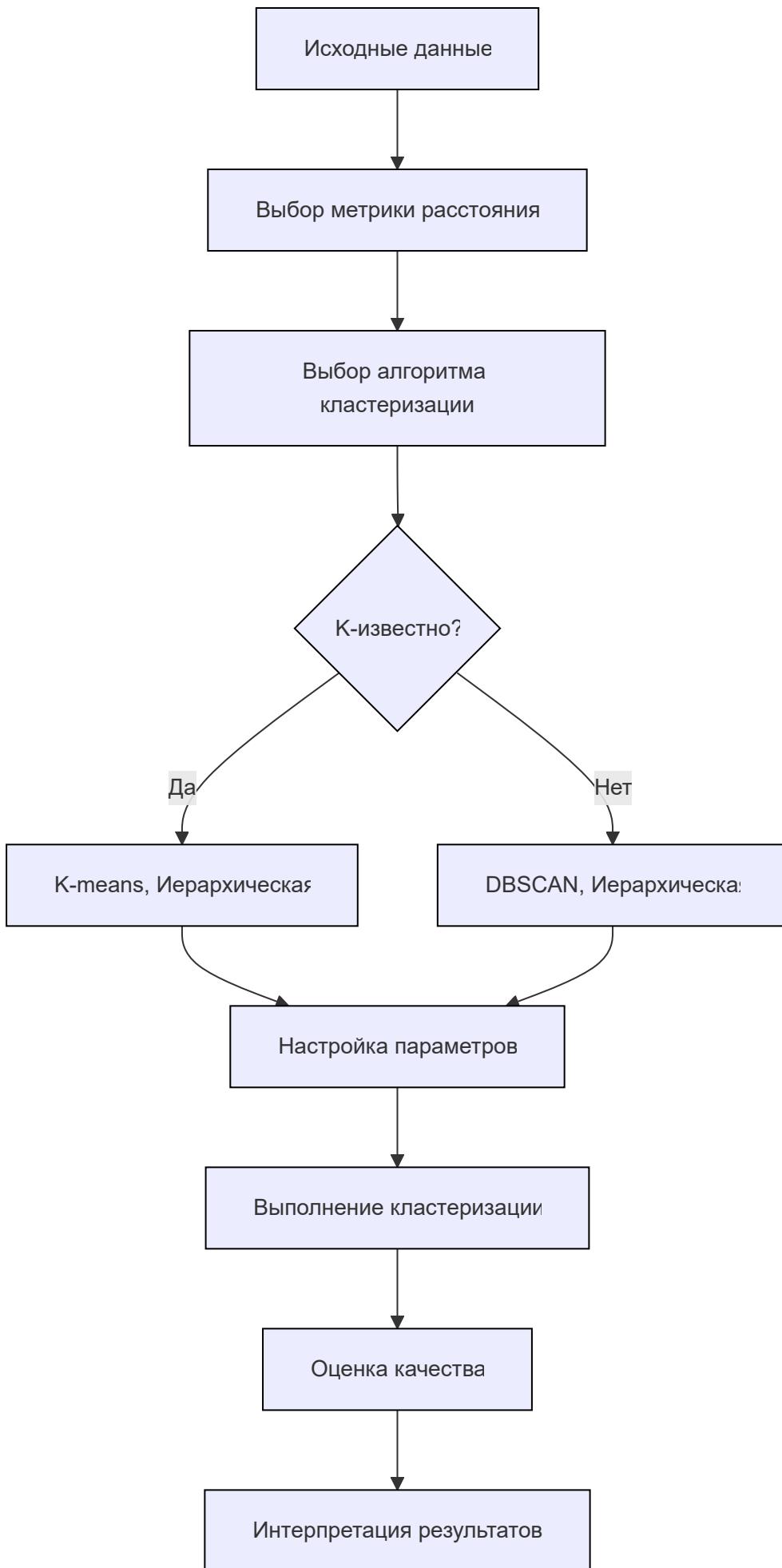
Эвристики для ϵ :

- **K-distance graph**: строим график расстояний до k-го ближайшего соседа ($k = \text{min_samples}$)
- Ищем "локоть" на графике - точка резкого излома

Эвристики для min_samples:

- Обычно выбирают $\text{min_samples} \geq$ размерность данных + 1
- Часто используют $\text{min_samples} = 2 \times$ размерность данных

Алгоритм нахождения кластеров



по ближайшей центроиде

Метрики кластеризации

- Среднее внутрикластерное расстояние.

- Мы хотим его **минимизировать**

$$\bullet F_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \rho(x_i, x_j) \mathbb{I}[a(x_i) = a(x_j)]}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \mathbb{I}[a(x_i) = a(x_j)]}$$

- В случае если у кластеров есть центры μ_k , часто рассматривается аналогичная метрика — средний квадрат внутрикластерного расстояния:

$$\bullet \Phi_0 = \frac{1}{nK} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \rho(\mu_k, x_i)^2 \mathbb{I}[a(x_i) = k]$$

- Среднее межкластерное расстояние

- Мы хотим его **максимизировать**

$$\bullet F_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \rho(x_i, x_j) \mathbb{I}[a(x_i) \neq a(x_j)]}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \mathbb{I}[a(x_i) \neq a(x_j)]}$$

- Silhouette Score

- Показывает насколько в среднем объекты схожи внутри одного кластера и различны с объектами других кластеров.

$$\bullet s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max(a(i), b(i))}$$

- $a(i)$ - среднее расстояние от точки i до точек в её кластере
- $b(i)$ - среднее расстояние от точки i до точек другого ближайшего кластера

- Индекс Дэвиса-Болдина

- Показывает, насколько центры кластеров удалены друг от друга и насколько объекты в кластерах близки к своим центроидам

$$\bullet DB = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{i \neq j} \frac{\sigma_i + \sigma_j}{d(c_i, c_j)}$$

- n - число кластеров

- c_i - центроид кластера i

- σ_i - среднее расстояние точек кластера i до центроида c_i

- Чем меньше метрика, тем лучше качество кластеризации

Метрики кластеризации требующие разметку

Для измерения следующих метрик потребуется разметка выборки. Будем обозначать кластеры, к которым наш алгоритм кластеризации относит каждый объект, буквами $k \in \{1, \dots, K\}$, а классы, к которым объекты отнесены разметкой - буквами $c \in \{1, \dots, C\}$.

Пусть n — общее количество объектов в выборке, n_k — количество объектов в

кластере номер k , m_c — количество объектов в классе номер c , а n_{ck} — количество объектов из класса c в кластере k . Определим следующие величины:

$$H_{class} = - \sum_{c=1}^C \frac{m_c}{n} \log \frac{m_c}{n}$$

$$H_{clust} = - \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{n} \log \frac{n_k}{n}$$

$$H_{class|clust} = - \sum_{c=1}^C \sum_{k=1}^K \frac{n_{ck}}{n} \log \frac{n_{ck}}{n_k}$$

Гомогенность

Показывает "чистоту" кластеров (как много объектов кластера принадлежать истинному классу).

$$\boxed{Homogeneity = 1 - \frac{H_{class|clust}}{H_{class}}}$$

Отношение $\frac{H_{class|clust}}{H_{class}}$ показывает, во сколько раз энтропия распределения классов изменяется при получении информации о принадлежности объекта к кластеру

- Тривиальный способ максимизировать гомогенность кластеризации - выделить каждый объект выборки в отдельный кластер

Полнота

Показывает "полноту" кластеров (как много объектов истинного класса попали в один кластер).

Полнота задаётся аналогично гомогенности, с той лишь разницей, что вводится величина $H_{clust|class}$, симметричная $H_{class|clust}$:

$$\boxed{Completeness = 1 - \frac{H_{clust|class}}{H_{clust}}}$$

Отношение $\frac{H_{clust|class}}{H_{clust}}$ показывает, во сколько раз энтропия распределения меток принадлежности к кластеру изменяется при получении информации о истинных метках объектов

- Тривиальный способ максимизировать полноту кластеризации - объединить всю выборку в один кластер

V-мера

Является аналогом F-меры в задаче классификации

$$V_\beta = \frac{(1 + \beta) \cdot \text{Homogeneity} \cdot \text{Completeness}}{\beta \cdot \text{Homogeneity} + \text{Completeness}}$$

- V -мера комбинирует в себе гомогенность и полноту таким образом, чтобы максимизация итоговой метрики не приводила к тривиальным решениям

Доп вопросы

OPTICS

Идея

Создание графа достижимости при фиксированном значении **min_samples** и для любого возможного радиуса ϵ .

Параметры:

- ϵ_{max} - максимальный рассматриваемый радиус окрестности
- **min_samples** - минимальное количество точек в ϵ -окрестности
- ξ - параметр автоматического определения кластеров

Определения:

core-dist - минимальный радиус ϵ , при котором данная точка считается ядровой.

$$\text{core-dist}_\epsilon(p) = \begin{cases} \text{неопределено} & , |N_\epsilon(p)| < \text{min-samples} \\ \epsilon : |N_\epsilon(p)| = \text{min-samples} & , |N_\epsilon(p)| \geq \text{min-samples} \end{cases}$$

, где $|N_\epsilon(p)|$ - число точек в ϵ -окрестности точки p .

reachability-dist - достижимость точки p относительно ядровой точки c - максимум между $\text{core-dist}(c)$ и расстоянием между этими точками.

$$\text{reachability-dist}_\epsilon(c, p) = \begin{cases} \text{неопределено} & , |N_\epsilon(p)| < \text{min-samples} \\ \max(\text{core-dist}_\epsilon(c), \text{dist}(c, p)) & , |N_\epsilon(p)| \geq \text{min-samples} \end{cases}$$

Алгоритм

1. **Инициализация:** Для всех точек вычисляется **core-distance** (используя **min_samples**). Все помечаются как необработанные.
2. **Обработка:**
 - Берется любая необработанная точка. Если она **ядро** (**core-distance** определено), ее соседи помещаются в **приоритетную очередь**, где приоритет — их **достижимое расстояние** от текущей точки.
 - Из очереди извлекается точка с наименьшим достижимым расстоянием, обрабатывается, и ее соседи добавляются/обновляются в очереди.
3. **Построение порядка:** Точки извлекаются из очереди и записываются в список **в порядке обработки**. Для каждой точки запоминается ее **достижимое расстояние**.

4. Результат: Алгоритм выдает не разметку кластеров, а два упорядоченных массива:

- Порядок обработки точек;
- Достижимые расстояния для каждой точки в этом порядке.

Далее можно кластеризовать ξ -методом, либо через DBSCAN, задав фиксированное ϵ .

ξ -метод

1. Проходимся по порядку обработки точек, начиная с первой.
2. Для каждой точки i проверяем изменение достижимого расстояния r_i, r_j :
 - если $r_i \leq (1 - \xi)r_j$, то точке j присваивается та же метка кластера, что и у точки i ,
 - иначе текущий кластер заканчивается, и точке j присваивается новая метка кластера.
3. Проверка на пересечение
 - Для последовательных пар кластеров (c_i, c_j) ищем точку минимума по достижимым расстояниям на границах $p = \arg \min_{k \in c_i \cup c_j} r_k$
 - Объединяем кластеры, если $r_p \leq (1 - \xi)r_{c_i^{left}}$ и $r_p \leq (1 - \xi)r_{c_j^{right}}$,
где c_i^{left} - точка левой границы кластера c_i ,
 c_j^{right} - точка правой границы кластера c_j .

Отличия OPTICS от DBSCAN

1. DBSCAN - алгоритм для получения фиксированного разбиения на кластеры, OPTICS - алгоритм построения графа достижимости для дальнейшего анализа структуры кластеров.
2. DBSCAN работает для одного фиксированного ϵ и предполагает единую плотность точек, OPTICS позволяет определять кластеры разной плотности.
3. Алгоритмическая сложность DBSCAN и OPTICS с оптимизацией поиска ближайших точек - $O(n \log n)$, но на практике OPTICS медленнее (*на константу, из-за использования очереди с приоритетом*).

HDBSCAN

Идея

Построение иерархии кластеров в зависимости от разных значений ϵ .

При увеличении значения ϵ от 0 до максимального расстояния между точками в датасете, выстраивается такая иерархия:

- при $\epsilon = 0$ каждая точка - отдельный кластер

- с увеличением ϵ начинают появляться пары точек, расстояние между которыми $\leq \epsilon$, и когда таких точек в увеличивающейся ϵ -окрестности становится $\geq \text{min_samples}$, они объединяются в кластеры, как в обычном DBSCAN
- При максимальном имеющем смысл значении ϵ все точки попадают в один кластер

В зависимости от ϵ разное число кластеров, следовательно из такого разбиения можно построить дендограмму.