$$X = \{a, b, c\}$$

$$\Delta = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$\Sigma_\Delta = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$$

$$\tau_{\Sigma_\Delta} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$$

Опр

] X - мн-во, τ_1, τ_2 - топ. на X

Тогда будем говорить, что τ_1 тоньше τ_2 def или τ_2 грубее τ_1 $\iff \tau_2 \subseteq \tau_1$

Пример

$\tau_{\text{антид.}} \subseteq \tau_{\text{дискр.}}$

$\tau_{\text{антид.}} \subseteq \tau \subseteq \tau_{\text{дискр.}}$ $\forall \tau$ топ. на X

Задача

$\mathbb{R}$, $\tau_{\text{канон}}$, τ',

где τ' - всевозможные дополнения конечных мн-в.

Кто грубее?

] $U \in \tau'$, т.е. $U = \mathbb{R} \setminus V$, где V - конечн, $V = \{a_1 \dots a_n\}$,

тогда $U = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \dots \cup (a_n, +\infty)$

$(a,b) \in \tau_{\text{канон}}$

$$(-\infty, a) = \bigcup_{\substack{i=a \\ i \in \mathbb{N}}}^{\infty} (-i, a)$$

$$(a, +\infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (a, i)$$

$\Downarrow$

U - открыто в $\tau_{\text{канон.}}$

$\Rightarrow U \in \tau_{\text{кан.}}$

$\boxed{\tau' \subseteq \tau_{\text{канон.}}} \Rightarrow \tau'$ - грубее $\tau_{\text{кан.}}$

$U = (a,b)$: $U = \mathbb{R} \setminus V$

$\exists\, U \in \tau_{\text{кан.}}$ тогда $\nexists\, V$ - конеч. потому что $V = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

Опр

Базы Σ_1 и Σ_2
назыв. эквивалентными,
когда $\tau_{\Sigma_1} = \tau_{\Sigma_2}$
(порождают одну топологию)

Задача (Опр)

Пусть (X, ρ) – метр. пр-во
Мн-во всех $B(x, \varepsilon)$, т.е. $\Sigma = \{B(x,\varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}\}$
является базой некоторой топологии (канонической для $\mathbb{R}^n$, например)
и называется метрической топологией (или порожд. метрикой)

Опр

Пусть (X, τ) — топ. пр-во

если $\exists \rho: X \times X \to \mathbb{R}$ — метрика,

такое, что $\tau_\rho = \tau$ (τ_ρ — топол., порожд. ρ),

то (X, τ) назыв. *метризуемой*

Задача

$\rho: X \times X \to \mathbb{R}: \quad (x, y) \longmapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Какие τ_ρ получается?

$x \cdot \quad y \quad z$

$\rho(x, z) \overset{?}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, z)$

если 0, то очевидн.

если $\rho(x, z) = 1$, то $x \neq z$

$B(x, 0) = \varnothing \quad (B(x, 0) = \{x' \in X \mid \rho(x, x') < 0\})$

$B(x, 1) = \{x\}$

$B(x, 2) = X$

$\Longrightarrow \tau_\rho$ — дискретная

Задача

(X,ρ) — метр. пр-во.

Замкнутый шар замкнут в τ_ρ

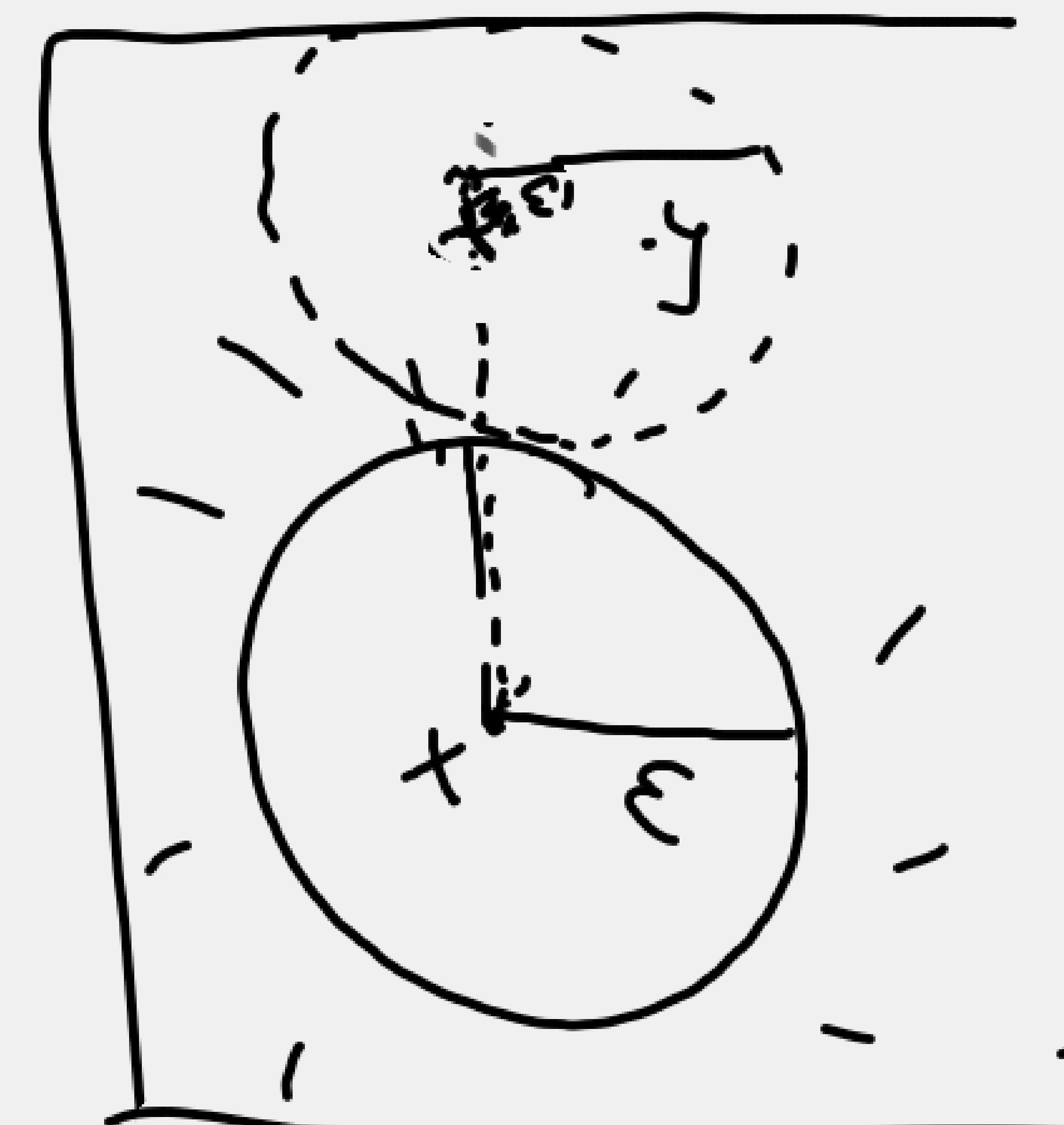
Замк. шар $:= \overline{B}(x,\varepsilon) = \{x'\in X \mid \rho(x,x')\leq\varepsilon\} = \overbrace{\{x'\in X \mid \rho(x,x')<\varepsilon\}}^{B(x,\varepsilon)} \cup \overbrace{\{x'\in X \mid \rho(x,x')=\varepsilon\}}^{\text{сфера } S(x,\varepsilon)}$

$$\triangleleft\ X\setminus\overline{B} = \{x'\in X : \rho(x',x) > \varepsilon\}$$

(? открыто $\Leftrightarrow \forall x'\in X\ \exists \underline{\varepsilon'>0} : \overbrace{B(x',\varepsilon')}^{B'} \subseteq X\setminus\overline{B}$

$\exists\ \varepsilon' = \rho(x,x') - \varepsilon > 0$ (т.к. $x'\in X\setminus\overline{B}$)

$\forall y\in B' \Rightarrow \rho(y,x') < \varepsilon' = \rho(x,x') - \varepsilon \Rightarrow \underline{\rho(x,x')} - \underline{\rho(y,x')} > \varepsilon$



Нужно показ. что $\underline{\rho(x,y) > \varepsilon}$

$$\rho(x,x') < \rho(x,y) + \rho(y,x')$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon < \rho(x,x') - \rho(y,x') \leq \underline{\rho(x,y)}$$

$\blacksquare$

Задача (микро)

Сфера замкнута в (X, ρ) с τ_ρ

$$S(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) = \varepsilon\}$$

$$X \setminus S(x;\varepsilon) = \underbrace{\underbrace{B(x;\varepsilon)}_{\substack{\{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\} \\ \text{открыто}}} \cup \underbrace{\left(X \setminus \overline{B}(x;\varepsilon)\right)}_{\substack{\{y \in X \mid \rho(x,y) > \varepsilon\} \\ \text{открыто}}}}_{\text{открыто}}$$

$\Rightarrow S(x,\varepsilon)$ – замк.

Задачи

Антидискр. пр-во, состоящее более чем из одной точки неметризуемо

$\exists\ X = \{a, b\},\ \tau = \{\varnothing, \{a,b\}\}$

$\Pi\ \exists\ \rho : X \times X \to \mathbb{R}$ — метрика : $\tau_\rho = \tau$

Тогда $B(a, \rho(a,b)) = \{a\}$ ↯

Если $X : |X| > 1,\ \tau = \{\varnothing, X\}$

то $\Pi\ \exists\ \rho : \Rightarrow B(x, \min\limits_{y \in X \setminus \{x\}} \{\rho(x,y)\})$

$= \{x\}$ ↯

Подпространства топ. пр-в

Опр

$\rceil\ (X,\tau)$ — т. п., $A \subseteq X$ — произв. подм.

через τ_A обознач.

совокупность $\{A \cap U \mid U \in \tau\}$

τ_A явл. топологией (?)

и (A, τ_A) называ. подпр. эти топ. пр-ва (X, τ)

и τ_A называется индуцированной топологией (на A из (X, τ))

Задача

τ_A — индуцир. топология
(если (X,τ) — топ. пр-во), $A \subseteq X$

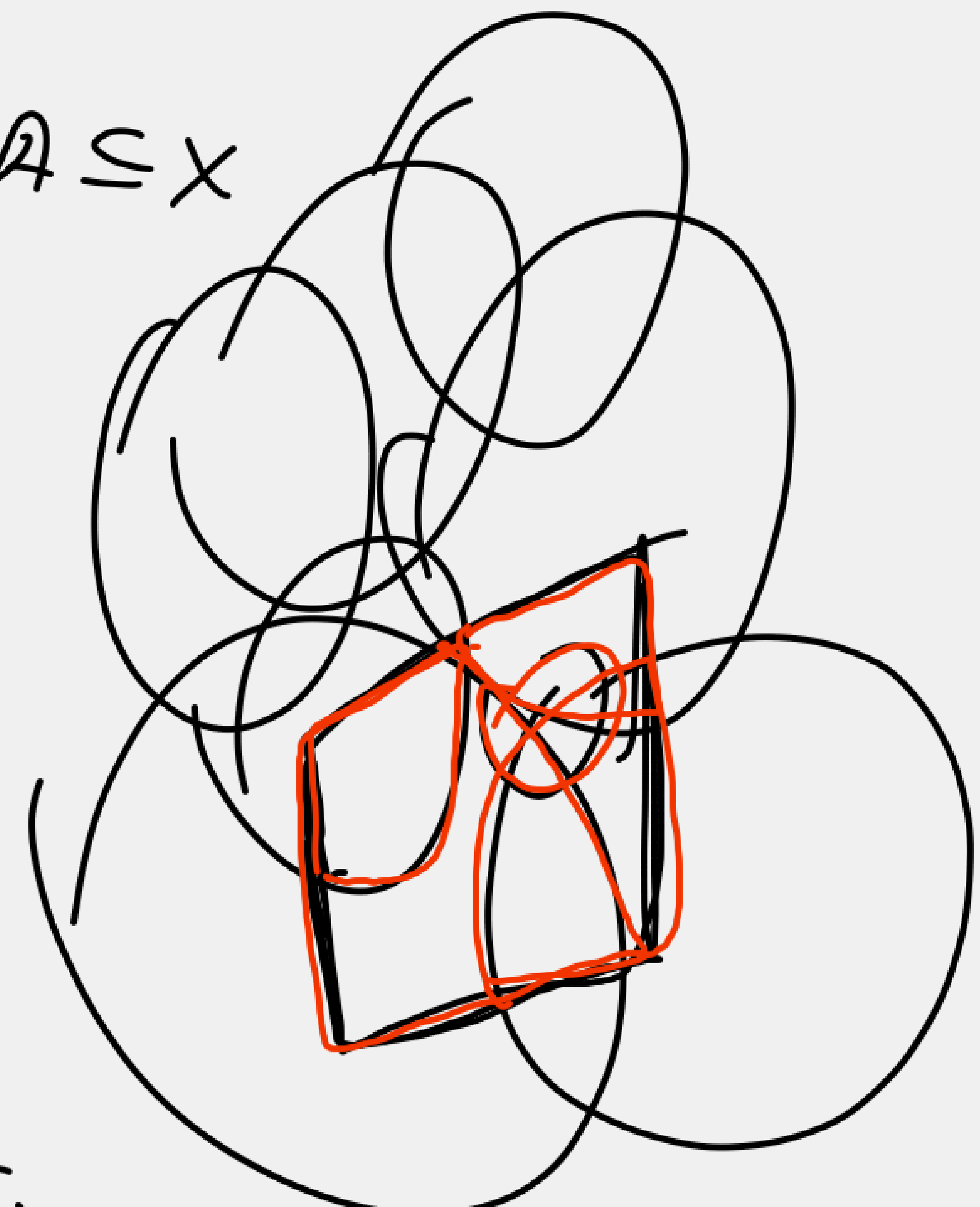
$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$

1) $\emptyset = \emptyset \cap A \in \tau_A$

$A = X \cap A \in \tau_A$

2) $\bigcup\limits_{i\in I}(U \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup\limits_{i\in I} U\right)}_{\in\tau} \cap A \in \tau_A$

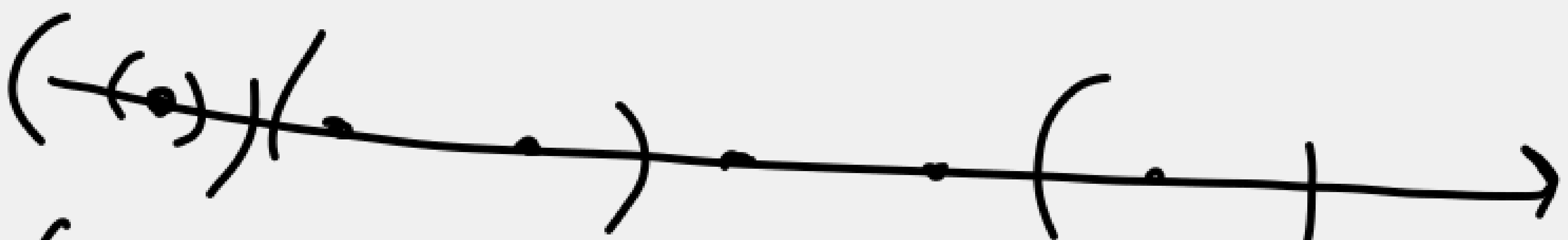
3) $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \underbrace{(U \cap V)}_{\in\tau} \cap A \in \tau_A$



$$\tau_{\to} = \{(a, +\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$$

Примеры:

Какая топология индуцируется в $\mathbb{N}$ из $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, \tau_{\text{канон}})$?



$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, (n-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) \in \tau_{\text{канон.}} : \underbrace{(n-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) \cap \mathbb{N}}_{\in\, \tau_{\mathbb{N}}} = \{n\}$$

$\Rightarrow \tau_{\mathbb{N}} =$ дискретная на $\mathbb{N}$

Д13

1) Найти пример и доказать, что мн-ва открытые в подпространстве не обязат. открытые во всём пространстве.

2) Док-ть

F замк. в подпр. $A \subseteq X$

$\Longleftrightarrow$ $F = A \cap E$, где E - замк. в X