Модель Лоренца

В высокогорном альпийском заповеднике экологи изучают динамику двух видов полевок:
• Полевка снежная (Chionomys nivalis) — специализируется на семенах высокогорных злаков
• Полевка обыкновенная (Microtus arvalis) — питается более разнообразной растительностью
Оба вида конкурируют за пространство и частично за пищевые ресурсы. Требуется определить, могут ли виды устойчиво сосуществовать в долгосрочной перспективе.

Известные данные

1. Скорость роста популяций без конкуренции:
   - Полевка снежная: $r_1 = 0.8$ (в год)
   - Полевка обыкновенная: $r_2 = 1.2$ (в год)
2. Вместимость среды (особей/км²):
   - Для снежной полевки: $K_1 = 400$
   - Для обыкновенной полевки: $K_2 = 600$
3. Коэффициенты конкурентного воздействия:
   - $\alpha = 0.6$ — влияние одной особи обыкновенной полевки на снежную
   - $\beta = 0.4$ — влияние одной особи снежной полевки на обыкновенную

Требуется

1. Найти точку равновесия сосуществования
2. Проверить условия устойчивого сосуществования
3. Определить, к каким численностям придут популяции
4. Проанализировать биологический смысл результата

Решение

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x \left(1 - \dfrac{x}{K_1}\right) - \alpha x y \\ \dot{y} = r_2 y \left(1 - \dfrac{y}{K_2}\right) - \beta x y \end{cases}$$

Тривиальные

$x = y = 0$

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} r_1-\dfrac{2r_1x}{K_1}-\alpha y-\lambda & -\alpha x \\ -\beta y & r_2-\dfrac{2r_2y}{K_2}-\beta x-\lambda \end{pmatrix}=(r_1-\lambda)(r_2-\lambda)=0$$

Неустойчивый узел.

Нетривиальные

$$\begin{cases} x=\dfrac{r_2\left(\dfrac{r_1}{K_2}-\alpha\right)}{\dfrac{r_1r_2}{K_1K_2}-\alpha\beta} \\ y=\dfrac{r_1\left(\dfrac{r_2}{K_1}-\beta\right)}{\dfrac{r_1r_2}{K_1K_2}-\alpha\beta} \end{cases}$$

$x_1=2.99 \quad y_1=1.32$
$x_2=0 \quad y_2=K_2=600$
$x_3=K_1=400 \quad y_3=0$

1-я точка
$=\lambda^2+\dfrac{15081}{25000}\lambda-\dfrac{295268391}{312500000}$
$\lambda_1>0$
$\lambda_2<0$

Седло

2-я точка
$=\lambda^2+\dfrac{1802}{5}\lambda+\dfrac{10776}{25}$
$\lambda_1<0$
$\lambda_2<0$

устойчивый узел

3-я точка
$=-\lambda^2-162\lambda-\dfrac{3224}{25}$
$\lambda_1<0$
$\lambda_2<0$

Устойчивый узел

Выводы

Популяции придут либо к $x_2=0 \quad y_2=K_2=600$ либо к $x_3=K_1=400 \quad y_3=0$
Стабильность возможна, только лишь когда одна из популяций вымрет.