Опр

Пусть $A, B \subseteq X$, (X, τ)

Говорят, что

1) A плотно в B $\iff$ $\operatorname{Cl} A \supseteq B$

2) A всюду плотно $\iff$ $\operatorname{Cl} A = X$

Пример

1) X всюду плотно $(X \subseteq X)$

2) $\mathbb{Q}$ всюду плотно (в $\mathbb{R}$)

Задача

A всюду плотно в (X, τ) $\Leftrightarrow$ $\forall U \neq \emptyset \in \tau \quad A \cap U \neq \emptyset$

$\Rightarrow$

$$x \in Cl(A) \Leftrightarrow \forall U_x \quad U_x \cap A \neq \emptyset$$

$$Cl(A) = X$$

$$\forall U \neq \emptyset \in \tau \ \exists x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in X$$

$\Big(\forall \underset{\neq \emptyset,\ \in\tau}{U} \in X = ClA \Rightarrow \forall_{x \in U}$ $\underline{x \text{ – точк. прикосн. } A}$ $\Rightarrow U$ – окр. x $\Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\Big)$

$\forall x \in X \ \forall U_x \in \tau \ \ U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ — т. прикосн. $\Rightarrow x \in Cl\,A \Rightarrow$

$\Rightarrow Cl(A) = X$

Задача

(X, τ) — дискрет. пр-во, $\tau = S(X)$

$\Leftrightarrow \exists!\, A \subseteq X :$ A всюду плотно в (X, τ)

$\Rightarrow$ $\exists A = X \subseteq X : \mathrm{Cl}\, X = X$. Покажем $!$ть

Пусть $C \subseteq X : \underline{\mathrm{Cl}\, C = X} = \mathrm{Cl}\, X$

если $C \neq X$, то $\exists x_0 \in \mathrm{Cl}\, X$, $x_0 \notin \mathrm{Cl}\, C$ ↯

$\Leftarrow$ | $\forall A \subseteq X$ если $\mathrm{Cl}\, A = X$, то $A = X$

$\{x\} \subseteq X$ П $\{x\} \notin \tau$ $\Rightarrow$ $X \setminus \{x\}$ — всюду плотно $\neq X$ ↯

не замк. $\mathrm{Cl}(X \setminus \{x\}) = X \Rightarrow X \setminus \{x\} = X$

Опр

Мн.во $A \subseteq (X, \tau)$
назовём <u>нигде не плотным</u>,
если $\operatorname{Int}(X \setminus A)$ (внешность)
всюду плотна, т.е $\operatorname{Cl} \operatorname{Int}(X \setminus A) = X$

Функция f из мн-ва A в мн-во B

- это тройка (A, B, Γ_f),

где $\Gamma_f \subseteq A \times B$ такое, что

$\forall a \in A \ \exists! \, b \in B : (a, b) \in \Gamma_f$

A, B. B^A — ф-ии из A в B

$|B^A| = ?$, если $|A| = a$, $|B| = b$

$|B^{\varnothing}| = 1$ $\quad (\varnothing, B, \Gamma_f = \varnothing)$ $\quad \left| \, |\varnothing^{A \neq \varnothing}| = 0 \, \right|$ $\quad |\varnothing^{\varnothing}| = 1$

$\ast$

$\operatorname{Im} f$, где $f: A \to B$, $B \supseteq C$.

$\operatorname{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\} = f(A)$

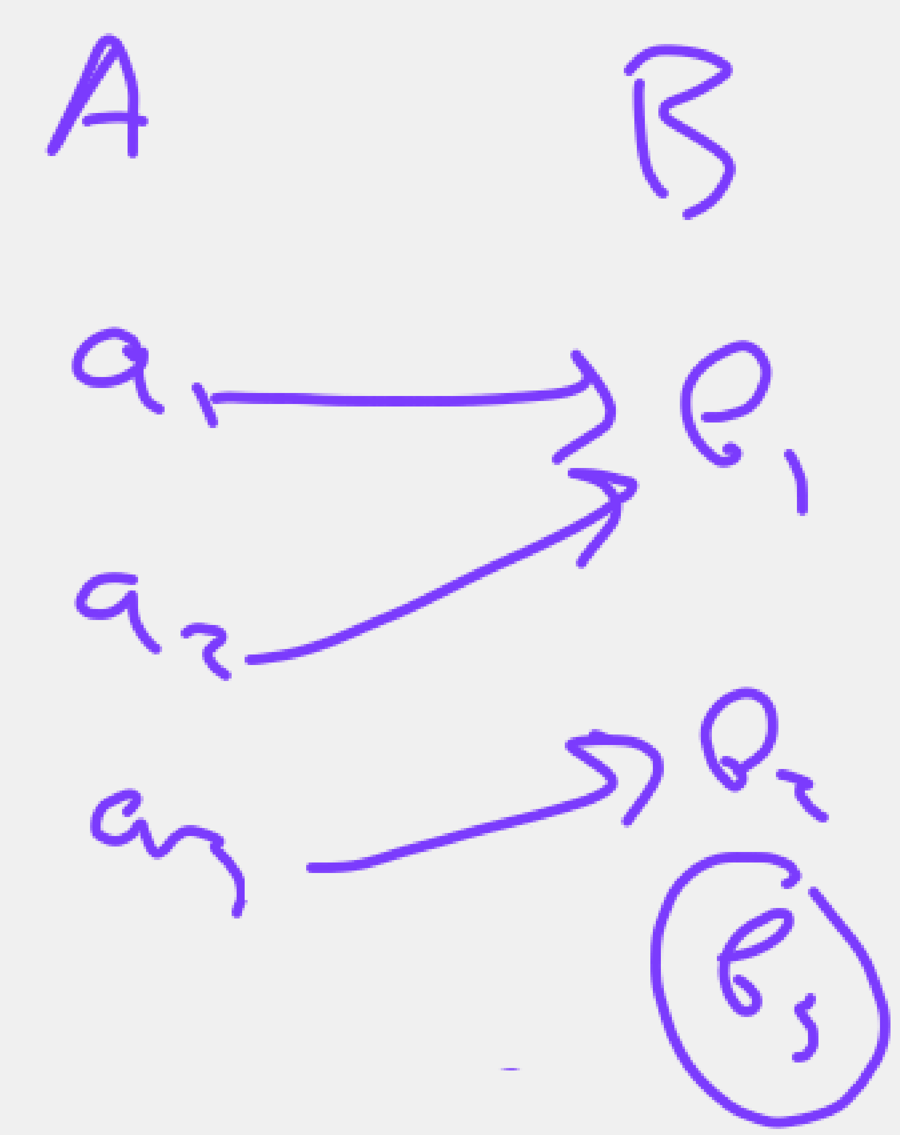
$\underbrace{f^{-1}(C)}_{\text{прообраз}} = \{a \in A \mid f(a) \in C\}$

Задача

$f(f^{-1}(B)) \stackrel{?}{=} B$

неверно в общем случае

но $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ (= если f-сюр)



$f^{-1}(B) = A$

$f(f^{-1}(B)) = \{b_1, b_2\}$

Опр

$id_X : X \to X$, $id(x) = x$

— тожд. отобр.

если $A \subseteq X$, то $\exists\, in_A : A \to X$,

$in_A(a) = a$

$g : Y \to X$ наз. обратным к $f : X \to Y$,

$\Leftrightarrow f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$

Опр (2)

$\exists X, Y$ — топ. пр-ва,

$f : X \to Y$ — непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз любого открытого в Y мн-ва открыт

$\forall V \in \tau_Y \; f^{-1}(V) \in \tau_X$

Примери

1) id_X — непр. $id_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$

2) $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$

$\forall V \in \tau_2 \quad id_X^{-1}(V) = V \in \tau_1$

(т.е $id_X : \tau_1 \to \tau_2$ — непр. когда τ_2 грубее τ_1)

3) $\exists$ X — дискр. пр-во, Y — произв. т.п

$f : X \to Y$ кога непрекъснато?

$(\forall V \in \tau_Y \quad f^{-1}(V) \in \tau_X)$

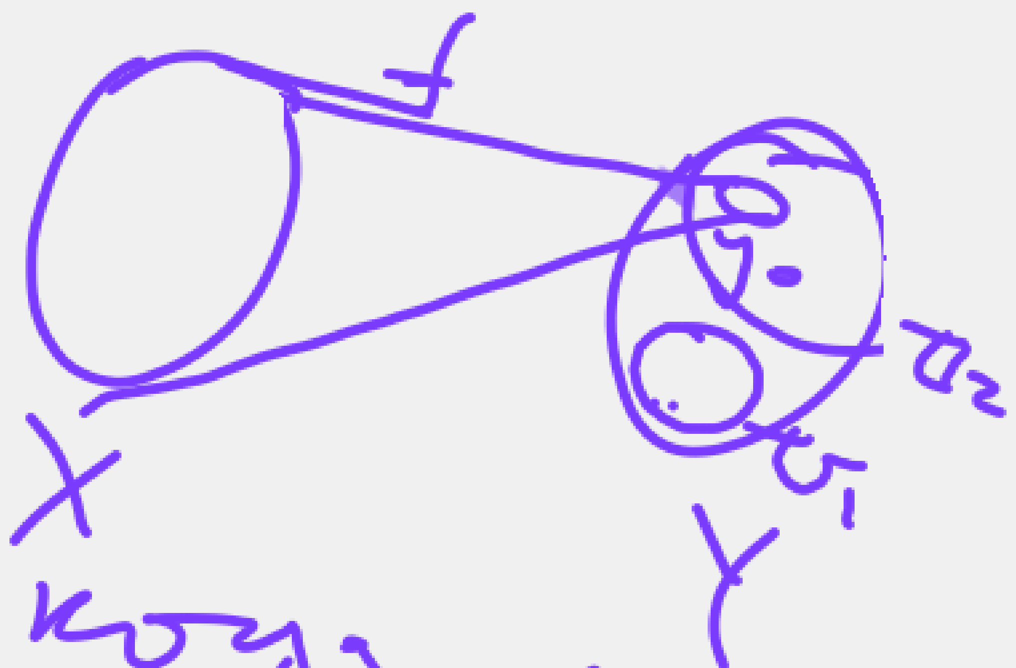
$g : Y \to X$ — кога непр.?

$\forall V \subseteq X \quad f^{-1}(V) \in \tau_Y$

4) $\exists$ X — антидискр., Y — произв.

$f: X \to Y$ — когда непр.?

$\forall V \in \tau_Y \quad f^{-1}(V) \in \tau_X = \{\varnothing, X\}$



например когда f — пост. отобр., т.е. $f(x) = y_0 \ \forall x \in X$

$g: Y \to X$ — когда непр.? —— всегда.

1) $g^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau_Y$ — всегда.

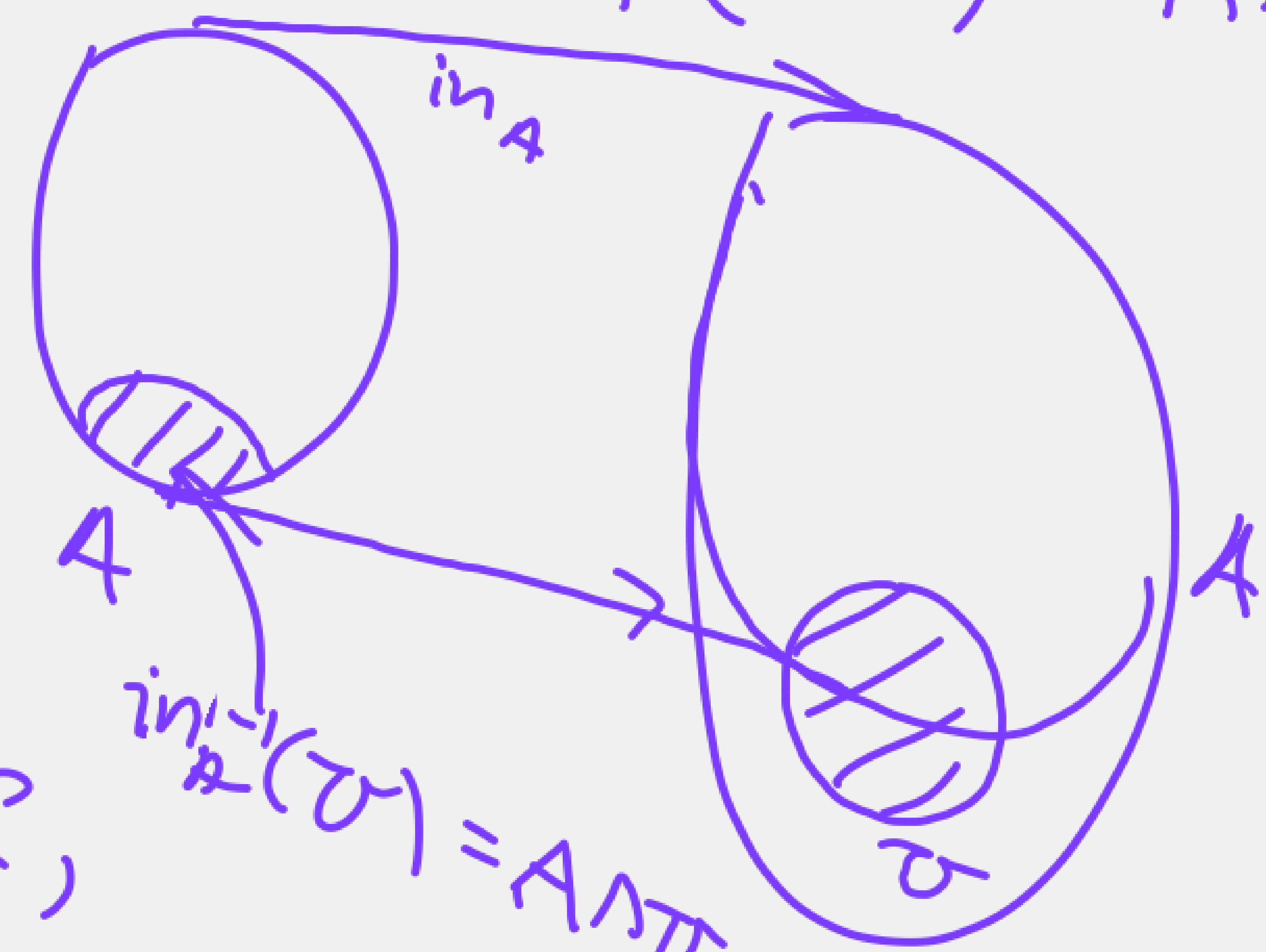
2) $\underbrace{g^{-1}(X)}_{= Y} \in \tau_Y$ — всег.

5) $A \subseteq X \Rightarrow \underline{in_A} : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ — непр

$\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$

$\forall U \in \tau \quad in_A^{-1}(U) = A \cap U \in \tau_A$

X



X

6) если

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

непр.

, то $g \circ f : A \to C$ — непр.

g — непр. т.е. $\forall V \in \tau_C \; g^{-1}(V) \in \tau_B$ | f — непр $\forall W \in \tau_B \; f^{-1}(W) \in \tau_A \Rightarrow$

$\forall V \in \tau_C \; (g \circ f)^{-1}(V) = \{a \in A \mid (g \circ f)(a) \in V\} = \{a \in A \mid g(f(a)) \in V\} = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_A$

Д/З

1) Образ всюду плотного мн-ва при сюръект. непр. отобр. всюду плотен

2) Непрерывно ли в т.п. с топологией, индуцир. канонич. топ. на ℝ отобр. $f: [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 3-x, & x \in [1,2] \end{cases}$ почему?

3) Может ли мн-во быть одновременно всюду плотным и нигде не плотным?