Сокращённая версия

1 . Сущность МММ. Математическая модель гравитационного поля. Стационарные процессы. Уравнение Лапласа.

Сущность МММ

МММ используется для вывода мат. модели и исследования не реального процесса или явления, а некоторого идеального их аналога.

Модель должна сохранять основные черты рассматриваемого процесса / явления.
В то же время, модель должна быть достаточно проста, чтобы ее было возможно исследовать существующими мат. методами.

Можно выделить следующие этапы построения:

1. Выбираются величины $u, v, \ldots$, характеризующие процесс / явление
   - Обычно они зависят от точек x в области D, в которой рассматривается процесс / явление, и времени t
2. На основе законов, которым подчиняется идеальный процесс, выводится система мат. соотношений относительно величин $u, v, \ldots$ - **мат. модель рассматриваемого процесса**
   - Соотношения задаются дифференциальными, интегральными, функциональными, разностными или иными уравнениями / неравенствами
3. Вводятся дополнительные условия, характеризующие процесс
   - Это обусловлено возможностью существования бесчисленного множества решений
   - Для дифф. уравнений это *начальные* или *граничные* условия
   - **Задача мат. физики** - совокупность мат. модели и дополнительных условий
4. Исследуется *корректность* указанной задачи
   - Устанавливают условия на исходные данные, при которых решение существует, единственно и устойчиво
5. Находится решение
   - С использованием аналитических или численных математических методов
6. На основе анализа свойств полученного решения делаются выводы о свойствах изучаемого процесса

Математическая модель гравитационного поля

Закон всемирного тяготения
Между любыми двумя телами в пространстве действует сила притяжения прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

Закон дальнодействия Лапласа
Наличие любого притягивающего (с положительной массой) тела влечёт за собой возникновение во всём пространстве некоторой субстанции, интенсивность $u(x)$ которой в точке пространства $\overline{x}_0$ определяется формулой:

$$u\left(\overline{x}\right) = \gamma \frac{m}{\left|\overline{x} - \overline{x}_0\right|}$$

$$\text{Гравитационная постоянная:} \quad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

Сила притяжения заданного тела к телу единичной массы в заданной точке:

$$f = \nabla u$$

f - сила тяготения
u - потенциал поля тяготения (гравитационный потенциал)
При этом поле тяготения называют *гравитационным полем*

Для гравитационного поля справедлив *принцип суперпозиции*

Принцип суперпозиции
Сила, создаваемая несколькими источниками $(x_1, m_1), \ldots, (x_n, m_n)$ равна сумме сил, создаваемых каждым из источников.

$$u(x) = \gamma \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{|x - x_j|}$$

Уравнение Лапласа

Важным вкладом Лапласа является изучение свойств тяготения с помощью уравнения, которому удовлетворяет его потенциал u.

Положим $r_i(x) = |x - x_i|$
Рассмотрим слагаемое из суммы $u_i = \gamma \frac{m_i}{r_i}$ и вычислим его вторые производные по x

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r_i} \implies \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\gamma m_i \frac{1}{\left(x - x_i\right)\left|x - x_i\right|} = -\gamma m_i \frac{x - x_i}{r_i^3}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \gamma m_i \left(-\frac{1}{r_i^3} + 3\frac{(x - x_i)^2}{r_i^5} \right)$$

Сложив и просуммировав получаем уравнение Лапласа в области $R \backslash \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ (без массы от точек с массами)

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u = 0$$

На практике, масса не сосредоточена в точке, поэтому отдельный интерес представляет формула для указанного объемного распределения масс.

Разобьем область Ω на элементарные подобласти Ω_i с объемами ΔV_i
Будем считать, что в каждом из них сосредоточена масса $\Delta V_i \rho(x_i)$
x_i - средняя точка подобласти Ω_i
Таким образом можно приближенно представить потенциал следующим образом

$$u(x_0) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho(x_i)\Delta V_i}{|x_0 - x_i|}$$

Перейдя к пределу, получим точную формулу

$$u(x_0) = \gamma \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(x)dx}{|x - x_0|}$$

Можно показать, что при $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$ потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -\gamma 4\pi \rho(x)$$

2. Математическая модель распространения тепла в изолированном твердом теле. Уравнение теплопроводности.

Диффузионный процесс

Среда занимает область D. Через Ω обозначим произвольную ограниченную подобласть D.
Для математического описания процесса распространения тепла вводят вектор $q(x, t)$ потока тепла.
Физический смысл вектора q состоит в том, что с его помощью можно определить количество Q_1 тепла, вносимого в область тепла за время от t_1 до t_2 в подобласть Ω из остальной части $\Omega_e = D \backslash \Omega$.

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Gamma} q \cdot n dS$$

- *Нормаль n внешняя*

Закон Фурье

$$q = -k\nabla T$$

k - коэффициент теплопроводности

Однородная среда
Среда, свойства которой не изменяются при перемещении от одной точки пространства к другой

Изотропная среда
Среда, свойства которой одинаковы во всех направлениях

Замечание 1
Среда называется *анизотропной* в противном случае

Замечание 2
Для изотропной среды k - скалярная величина

Формула Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_{\Gamma} v \cdot n \, dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} v \, dx$$

Подставим и преобразуем

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Gamma} q \cdot n \, dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Gamma} k\nabla T \cdot n \, dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla T) \, dx$$

Конвекционный процесс

В области Ω распределены источники тепла объемной плотностью F
Тогда тепло, выделяемое ими за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется следующим образом

$$Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} F \, dx$$

Общее количество тепла

$T_1(x)$ - температура в точке x в момент времени t_1
$T_2(x)$ - температура в точке x в момент времени t_2

Тогда количество тепла, необходимое на это изменение температур, в силу законов термодинамики, задается формулой

$$Q = \int\limits_{\Omega} \rho c(T_2 - T_1)\, dx$$

ρ - плотность среды в точке
c - коэффициент удельной теплоёмкость при постоянном давлении

Преобразуем

$$Q = \int\limits_{\Omega} \rho c(T_2 - T_1)\, dx = \int\limits_{\Omega} \rho c \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dx$$

Модель распространения тепла в изолированном твердом теле

В силу фундаментального закона сохранения тепла для области Ω выполняется
$Q = Q_1 + Q_2$
Получаем *уравнение баланса тепла*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(k \nabla T)\, dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} F\, dx$$

Преобразуем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla T) - F \right) dx = 0$$

Предположим, что подынтегральная функция непрерывна в области D. В силу произвольности $\Omega \implies$ подынтегральная функция равна нулю в области D (т. е. общее тепло в изолированной среде D не изменилось).

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = F + \operatorname{div}(k \nabla T)$$

Получили искомую математическую модель, описывающую процесс распространения тепла в области D.

Уравнение теплопроводности

В частном случае, если ρ, c, k являются константами, то есть среда однородна, получаем так называемое уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_t = a^2 \Delta T + f$$
$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho c}} \quad f = \frac{F}{\rho c}$$

- *Уравнения параболического типа*

Для выделения единственного решения накладываются дополнительные условия.

1. Если $\Omega = \mathbb{R}^3$
   Тогда задаётся начальное условие (задача Коши)
   $T|_{t=0} = T_0(x) \quad \forall x \in \Omega$
2. Иначе $\Omega \subset R^3$
   В этом случае задается краевые условия вида (начально-краевая задача)
   $\alpha T + \beta \dfrac{\partial T}{\partial n} = g \quad \forall x \in \Gamma$

Виды граничных условий

1. $u|_\Gamma = g$ - условие Дирихле (первого рода)
   - Задает температуру на границе
2. $\dfrac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = g$ - условие Неймана (второго рода)
   - Задает поток тепла на границе
3. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + au\right)|_\Gamma = g$ - условие Робена (третьего рода)
   - Теплообмен со внешней средой, температура которой известна

3. Математическая модель распространения звуковых волн. Волновое уравнение. Уравнение Гельмгольца.

Уравнение распространения звуковых волн в вязкой среде

Звуковые волны в жидкости - малые гидродинамические возмущения.

Область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ занята жидкостью. В качестве основы выберем следующую гидродинамическую модель:

$$\rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u = 0 \quad (1)$$
$$\rho u_t + \rho(u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \rho f \quad (2)$$
$$p = P(\rho) \quad (3)$$

u - скорость

p - давление

ρ - плотность

f - массовая плотность внешних сил
$P(\rho)$ - заданная функция плотности ρ

$(u \cdot \nabla)u = \nabla u \cdot u$ 👾

Рассмотрим случай, когда жидкость находится в покое ($u = 0$) и $f = 0$

$$\begin{array}{ccc} \rho_t = 0 & & \rho = \rho_0(x) \\ \nabla p = 0 & \implies & p = p_0(t) \\ p = P(\rho) & & p = P(\rho) \implies \rho_0 = const,\ p_0 = const \end{array}$$

Добавим малые возмущения к данному равновесию:

$$u = u'$$
$$\rho = \rho' + \rho_0$$
$$p = p' + p_0$$

Подставим эти соотношения в $(1-2)$:

$$\rho'_t + u' \cdot \nabla\rho' + (\rho_0 + \rho')\operatorname{div} u' = 0$$
$$(\rho_0 + \rho')u'_t + (\rho_0 + \rho')(u' \cdot \nabla)u' = -\nabla p'$$

Отбросим величины 2 порядка малости:

$$\rho'_t + \rho_0 \operatorname{div} u' = 0 \quad (1a)$$
$$\rho_0 u'_t = -\nabla p' \qquad (2a)$$

Разложим функцию $P(\rho)$ вокруг точки ρ_0:

$$p = P(\rho_0) + P_\rho(\rho_0)(\rho - \rho_0) + O((\rho - \rho_0)^2) \approx p_0 + P_\rho(\rho_0)\rho'$$

Так как плотность растет с увеличением давления, можем заключить, что P_ρ существенно положительна. Поэтому положим $P_\rho(\rho_0) = c^2$
Получаем, что $p' = c^2\rho'$.
Подставив, приходим к модели распространения звуковых волн в жидкости:

$$p_t + \rho_0 c^2 \operatorname{div} u = 0$$
$$\rho_0 u_t = -\nabla p$$

- *Штрихи убрали для удобства*

Рассмотрим случай, когда в среде есть внешние силы ϵf
Положим

$$u = \epsilon u'$$
$$\rho = \epsilon\rho' + \rho_0$$
$$p = \epsilon p' + p_0$$

Подставим в $(1-3)$:

$$\epsilon\rho'_t + \epsilon^2 u'\nabla\rho' + \epsilon(\epsilon\rho' + \rho_0)\operatorname{div} u' = 0$$
$$\epsilon(\epsilon\rho' + \rho_0)u'_t + \epsilon^2(\epsilon\rho' + \rho_0)(u\cdot\nabla)u = -\epsilon\nabla p' + (\epsilon\rho' + \rho_0)\epsilon f$$

Отбросим слагаемые 2 порядка малости:

$$\epsilon\rho'_t + \epsilon\rho_0 \operatorname{div} u' = 0$$
$$\epsilon\rho_0 u'_t = -\epsilon\nabla p' + \rho_0\epsilon f$$

Из разложения $P\left(\rho\right)$ получим: $p'\epsilon = P_\rho\left(\rho_0\right)\rho'\epsilon$
Получили модель с учетом внешних сил:

$$p_t + \rho_0 c^2 \operatorname{div} u = 0 \quad (4)$$
$$\rho_0 u_t = -\nabla p + \rho_0 f \quad (5)$$

- *Штрихи убрали для удобства*

Итого
Получили систему из трех скалярных уравнений, полученную с помощью линеаризации модели $(1-3)$. Линеаризация валидна, так как рассматриваются малые возмущения.
Данная система и называется моделью распространения звука в жидкости (модель линейной гидроакустики)
u - колебательная скорость частиц
p - звуковое давление
ρ - звуковая плотность

Волновое уравнение

Удобнее работать с одним уравнением. Поэтому применим к (4) $\dfrac{\partial}{\partial t}$, а к (5) оператор $c^2 \operatorname{div}$
:

$$p_{tt} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} u_t = 0$$
$$\rho_0 c^2 \operatorname{div} u_t = -c^2\Delta p + \rho_0 c^2 \operatorname{div} f$$

Вычтем одно из другого:

$$p_{tt} = c^2\Delta p + F \qquad F = -\rho_0 c^2 \operatorname{div} f$$

Данное уравнение описывает процесс распространения волн и называется *волновым уравнением*

Для выделения единственного решения необходимо добавить начально краевые условия:

$$p(x,0)=p_1(x)\quad p_t(x,0)=p_2(x)$$
$$\left(ap+b\frac{\partial p}{\partial x}\right)|_\Gamma=g$$

Уравнения относительно других величин
ХЗ надо ли это

Уравнение Гельмгольца

Важный класс решений - гармонические звуковые волны. Для них основные характеристики определяются формулами

$$f(x,t)=F(x)e^{-i\omega t}\quad u(x,t)=v(x)e^{-i\omega t}\quad p(x,t)=P(x)e^{-i\omega t}$$

Подставим в $(4-5)$

$$-\omega Pie^{-i\omega t}+\rho_0c^2e^{-i\omega t}\operatorname{div}v=0$$
$$-\rho_0v\omega ie^{-i\omega t}=-e^{-i\omega t}\nabla P+\rho_0Fe^{-i\omega t}$$

$$P=\frac{\rho_0c^2}{\omega i}\operatorname{div}v\quad(6)$$
$$v=\frac{1}{\rho_0\omega i}(\nabla P-\rho_0F)\quad(7)$$

Получили *модель гармонического звукового процесса*

Применим к (7) оператор $-\dfrac{\rho_0c^2}{\omega i}\operatorname{div}$ и вычтем из (6)

$$P=\frac{\rho_0c^2}{\omega i}\operatorname{div}v$$
$$-\frac{\rho_0c^2}{\omega i}\operatorname{div}v=\frac{c^2}{\omega^2}\operatorname{div}(\nabla P-\rho_0F)$$
$$\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\operatorname{div}(\nabla P)+P=\rho_0\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\operatorname{div}(F)$$

Получаем *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta P+k^2P=-f$$
$$k=\frac{\omega}{c}\quad f=-\rho_0\operatorname{div}F$$

Тут еще куча инфы, я шатал с. 59

4. Математические модели электромагнитного поля. Уравнения Максвелла (5).

Рассматриваем область Ω, заполненную жидкостью или газом.
Электромагнитное поле, с математической точки зрения - это набор величин

1. $E(D)$ - вектор напряженности(индукции) электрического поля
2. $H(B)$ - вектор напряженности(индукции) магнитного поля
3. J - вектор плотности электрического тока
4. ρ_e - плотность электрических зарядов
   которые удовлетворяют некоторой системе уравнений.

Уравнения Максвелла

$$\begin{gathered}\operatorname{div} D = \rho_e \quad (1)\\ \operatorname{div} B = 0 \quad (2)\\ \operatorname{rot} E = -B_t \quad (3)\\ \operatorname{rot} H = D_t + J \quad (4)\end{gathered}$$

(1) - следствие закона Кулона
(2) - факт отсутствия магнитных зарядов, как источника магнитного поля
(3) - следствие закона электромагнитной индукции Фарадея
(4) - следствие закона Био-Савара ($\operatorname{rot} H = J$).

Данная система абсолютно точно описывает электромагнитные процессы в любой среде, но не является замкнутой.
Для замыкания добавляют *материальные уравнения*, характеризующие среду:

$$\begin{gathered}D = \epsilon\epsilon_0 E \qquad (5.1)\\ B = \mu\mu_0 H \qquad (5.2)\\ J = \sigma E + J^{ct} \quad (5.3)\end{gathered}$$

ϵ_0, μ_0 - электрическая и магнитная постоянные
ϵ, μ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости
σ - удельная проводимость среды
J^{ct} - заданная функция плотности токов, происходящих от действия внешних сил

Покажем, что из уравнений Максвелла следует, что в некоторых средах электромагнитное поле распространяется в виде волн.

Подставим в (4) вместо J уравнение (5.3):

$$\operatorname{rot} H = D_t + \sigma E + J^{ct}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = \operatorname{rot} D_t + \operatorname{rot}(\sigma E) + \operatorname{rot} J^{ct}$$

Предположим, что среда однородная и $\epsilon = const, \mu = const, \sigma = const$. В этом случае последнее уравнение с учётом (3) и $(5.1 - 5.2)$ следует:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} H = \epsilon\epsilon_0 \operatorname{rot} E_t - \sigma B_t + \operatorname{rot} J^{ct}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} H = \epsilon\epsilon_0 \operatorname{rot} E_t - \sigma\mu\mu_0 H_t + \operatorname{rot} J^{ct}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} H = -\epsilon\epsilon_0 B_{tt} - \sigma\mu\mu_0 H_t + \operatorname{rot} J^{ct}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} H = -\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 H_{tt} - \sigma\mu\mu_0 H_t + \operatorname{rot} J^{ct}$$

Последнее уравнение можно записать в виде $(\operatorname{grad}\operatorname{div} u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u + \operatorname{rot}\operatorname{rot} u)$:

$$\Delta H = \sigma\mu\mu_0 H_t + \frac{1}{a^2} H_{tt} - \operatorname{rot} J^{ct} \qquad (6)$$

где $a^2 = \dfrac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$.

Если среда является непроводящей ($\sigma = 0$ или очень мала), то можно пренебречь слагаемым σE по сравнению с D_t. Тогда отбрасывая слагаемые с множителем σ, получаем:

$$H_{tt} = a^2 \Delta H + \tilde{F}_1$$

где $F_1 = a^2 \operatorname{rot} J^{ct}$ - объёмный источник поля.
Полученное уравнение - волновое.

Если среда обладает большой проводимостью ($\sigma >> 1$), так что можно пренебречь слагаемым D_t по сравнению с σE, то

$$H_t = c^2 \Delta H + \tilde{F}_1$$

где $\tilde{F}_1 = \dfrac{1}{\sigma\mu\mu_0} \operatorname{rot} J^{ct}$ - плотность объёмных источников поля,
$c^2 = \dfrac{1}{\sigma\mu\mu_0}$ - коэффициент диффузии.
Получили параболическое уравнение диффузии (уравнение теплопроводности).

5. Корректно и некорректно поставленные задачи. Задача Коши для уравнения Лапласа.

Задача мат. физики

$$Lu = f \quad u \in U \quad f \in F \quad L - \text{дифференциальный оператор}$$

Корректность

Задача нахождения решения уравнения $Lu = f$ корректно поставлена, если

1. Решение $u \in U$ существует $\forall f \in F$
2. Решение единственно в классе функций U

3. $u \in U$ непрерывно зависит от f, в том смысле, что малым изменениям f соответствуют малые изменения решения u

Замечание
Часто L - линейный оператор.
Для линейного оператора единственность $u \in U$ эквивалентно обратимости оператора, что эквивалентно доказательству того, что уравнение $Lu = 0$ имеет только тривиальное решение.
Аналогично, устойчивость сводится к доказательству устойчивости тривиального решения.

Пример корректной задачи

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Пример некорректной задачи (пример Адамара)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$u|_{y=0} = \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \psi(x)$$

$$\Omega = R \times [0, b]$$

$$(1) \quad \phi(x) = 0 \quad \psi(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

Покажем, что решение имеет вид: $u_1(x, y) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sin nx \cdot \sinh ny$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\sin nx \cdot \sinh ny$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \sin nx \cdot \sinh ny$$

$$(2) \quad \phi(x) = \psi(x) = 0$$

Единственное решение $u_2(x, y) = 0$

$$u_2(x, y) = 0$$

$$\|u_2 - u_1\| = \sup_{(x,y) \in \Omega} \left| \frac{1}{n^2} \sin nx \sinh ny \right| = \left| \frac{1}{n^2} \sinh nb \right| \to \infty \quad n \to \infty$$

$$\|\psi_2 - \psi_1\| = \sup_{x \in R} \left| \frac{1}{n} \sin nx \right| = \frac{1}{n} \to 0 \quad n \to \infty$$

Увеличивая n мы можем бесконечно приближать правые части, то решения будут бесконечно отдаляться друг от друга $\implies$ решение не устойчиво $\implies$ задача не корректна.

Ценность некорректных задач
Обратные задачи, как правило, являются некорректными, но при этом важными задачами

Корректность по Тихонову

1. Априори известно, что решение y существует и принадлежит некоторому заданному множеству, или *множеству корректности* M, $y \in M$;
2. Решение единственно в классе функций, принадлежащих M;
3. Бесконечно малым вариациям исходных данных, не выводящим решение за пределы M, соответствуют бесконечно малые вариации решения.

Отличие условной корректности от классического заключается во введении множества корректности, существенно сужающего класс возможных решений.

6. Типы уравнений второго порядка. Формулировка теоремы Коши-Ковалевской.

1) Дифференциальное уравнение в частных производных
$u : \Omega \to \mathbb{R}, \ \ \Omega \subset \mathbb{R}^n$
Выражение вида:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_2} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0$$

2) Порядок уравнения ВЧП
Порядок старшей частной производной

Рассматривать будем уравнения второго порядка, т.е.:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

Причем, F явно зависит хотя бы от одной частной производной второго порядка

3) Квазилинейное уравнение
Уравнение вида:

$$A(\dots)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\dots)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(\dots)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(\dots) = 0$$

$(\dots) = \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

4) Линейное уравнение

Уравнение вида:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u = 0$$

5) Уравнение Пуассона

$\Delta u = -f$

Моделирует распределение гравитационного, электростатического потенциалов в пространстве, стационарные процессы переноса тепла и диффузии и др

Является ***эллиптическим$^$****

6) Уравнение теплопроводности

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$

Моделирует нестационарные процессы переноса тепла и диффузии вещества

Является ***параболическим$^$****

7) Волновое уравнение

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \Delta u + f$

Моделирует распространение в однородных средах звуковых и электромагнитных волн, разнородные колебания тел в идеальных условиях

Является ***гиперболическим$^$****

8) Уравнение Гельмгольца

$\Delta u + k^2 u = -f$

моделирует гармонические волновые процессы

Внесём ясность в значение $*$

$$\lhd \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overline{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(\overline{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \qquad (*)$$

Сумма слева по сути есть квадратичная форма. Составим ее вид в некоторой фиксированной точке $\overline{x_0} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overline{x_0})t_i t_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 t_i t_j$$

Тогда из курса линала знаем, что матрицу $((a_{ij}^0))$ выше описанной квадратичной формы можно диагонализировать, т.е. привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\xi_i$$

После замены, вид квадратичной формы будет следующим:

$$\sum_{i=1}^{m} \pm\xi_i^2, \;\; 1 \le m \le n$$

Тогда преобразование $\xi_k = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ki}x_i$ приведет уравнение $(*)$ к виду (не сказал бы):

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(\overline{x})\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \ldots = 0 \qquad (**)$$

причем

$$\tilde{a}_{ij}(\overline{x_0}) = \begin{cases} \pm 1, & i = j \le m \\ 0, & i \ne j, \textit{ или } i = j > m \end{cases}$$

Вся эта хуета нужна была для следующего набора определений:

9) Эллиптическое уравнение в точке x_0
В уравнении $(**)$ при $x = x_0$ $\;\tilde{a}_{ii}(\overline{x_0}) = 1 \;\; i = \overline{1,n}$ и $\tilde{a}_{ij}(\overline{x_0}) = 1 \;\; i \ne j$

10) Гиперболическое уравнение в точке x_0
В уравнении $(**)$ при $x = x_0$ все $\tilde{a}_{ii}(\overline{x_0})$ имеют один знак, кроме одного, имеющего противоположный $(m = n)$

11) Ультрагиперболическое
Тоже самое, только больше одного положительного и отрицательного коэффициента $(m = n)$

12) Параболическое в широком смысле (че широкий чтоли?)
В уравнении $(**)$ при $x = x_0$ имеются нулевые $\tilde{a}_{ii}(\overline{x_0})$

13) Параболическое в узком смысле (че узкий чтоли?)
тоже самое, только нулевой лишь один

14) Условие эллиптичности уравнения
Ур-е $(*)$ - эллиптическое $\iff$ $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overline{x})t_i t_j \ge \alpha(\overline{x})\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 \;\;\forall x \in \Omega, \;\; (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

где α - положительная в Ω функция

15) Равномерно эллиптическое уравнение

$$\exists \alpha, \beta > 0: \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overline{x}) t_i t_j \le \beta \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \ \ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

16) Условие гиперболичности

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\overline{x}, t) t_i t_j \ge \alpha(\overline{x}, t) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \ \ \forall (x, t) \in D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1, \ \ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

равномерно гиперболическое аналогично опр 15), за исключением того что a зависят от времени

а че с параболичностью я не ебу

17) Функция аналитическая в x_0

Если её можно разложить в степенной ряд в окрестности x_0

18) Нормальная система дифуров

Система N дифуров с N неизвестными функциями $u_1, u_2, \ldots, u_N$ вида:

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i \left(x, t, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n} u_j(x,t)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right), \ \ i, j = \overline{1, N} \qquad (***)$$

есть нормальная относительно t, если Φ_i не содержат производных порядка выше k_i и производных по t порядка выше $k_i - 1$ так что:

$\alpha_0 + \ldots + \alpha_n \le k_i$

$\alpha_0 \le k_i - 1$

19) Теорема Коши-Ковалевской

Пусть задана задача Коши, состоящая из $(***)$ и начальным условиям при $t = t_0$:

$$\left. \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = \overline{0, k_i - 1}, \quad i = \overline{1, N}$$

и если все функции φ_{ik} аналитичны в окрестности точки

$\left(x_0, t_0, \ldots, \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \varphi_{j\alpha_0}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|_{x=x_0}, \ldots \right)$,

то задача Коши имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки (x_0, t_0), притом единственное в классе аналитических функций

7. Общее решение уравнения колебания струны. Первая формула Даламбера. Задача Коши для уравнения

колебания струны. Вторая формула Даламбера. Понятие плоской волны. Физический смысл решения. ~

Общее решение уравнения колебания струны. Первая формула Даламбера

Одномерное волновое уравнение

Будем рассматривать плоскость $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad a = const$$

- Описывает, например, колебания бесконечной однородной струны

Формула классического решения (Первая формула Даламбера)

Введем новые независимые переменные $\xi = x - at, \eta = x + at$ и зависимую $U : U(\xi, \eta) = u(x, y)$
Уравнение примет вид $U_{\xi\eta} = 0$
Проинтегрируя по η получим $U_\xi = w(\xi)$. Теперь проинтегрируем по ξ

$$U(\xi, \eta) = \int w(\xi) d\xi + \theta_2(\eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$$

Вернемся к старым координатам

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (1)$$

Получили, что функция $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ является решением на плоскости $\mathbb{R}^2 \iff$ в каждой точке $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ справедливо представление (1), где $\theta_1, \theta_2 \in C^2(\mathbb{R})$.

Задача Коши для уравнения колебания струны. Вторая формула Даламбера

Задача Коши

Отыщем классическое решение на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ из класса $C^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, и удовлетворяющую следующим начальным условиям

$$u|_{t=0} = \phi(x) \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

- ϕ - начальное отклонение
- ψ - начальный импульс

Вторая формула Даламбера

Подберем функции θ_1, θ_2 из начальных условий. Подставим (1) в (2).

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \phi(x)$$
$$-a[\theta_1'(x) + a\theta_2'(x)] = \psi(x)$$

Проинтегрируем второе уравнение получим

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(z)dz + C$$

Получаем, что

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz + \frac{C}{2}$$
$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz - \frac{C}{2}$$

И, подставив в (1) имеем

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz \quad (x,t) \in R_+^2$$

$$u \in C^2 \iff \phi \in C^2 \quad \psi \in C^1$$

Замечание

Так как $\phi(x) = \psi(x) = 0 \implies u(x,t) = 0$, то, в силу линейности, решение задачи единственно.

Решение неоднородной задачи

Представим, что неоднородных задач не существует

P.S. С. 173

Понятие плоской волны. Физический смысл решения

8. Задача Коши для трехмерного волнового уравнения. Формула Кирхгофа (a) . Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Формула Пуассона (b) .

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \qquad \text{в } \mathbb{R}_+^4 = \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$$

$$u|_{t=0} = \phi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \phi_1(x), \quad x = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Предположим $\phi_0 \in C^3(\mathbb{R}^3), \phi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$.
Пусть $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ - произвольная точка. $B_{at}(x)$ (или $S_{at}(x)$) - шар (или сфера) радиуса $r = at$ с центром в точке x; $y = (\xi, \eta, \zeta)$ - переменная точка сферы $S_{at}(x)$.

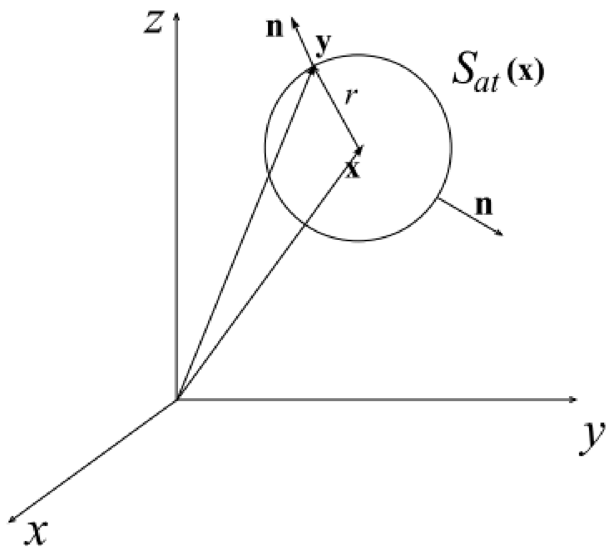


Рис.3.1

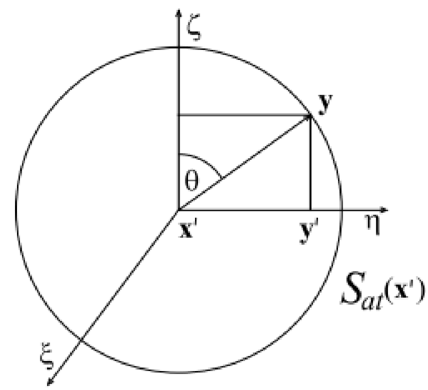


Рис.3.2

Покажем, что $\forall \phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}(x)} \frac{\phi(y)}{r} d\sigma_r = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} \phi(\xi, \eta, \zeta) d\sigma_r,\ y = (\xi, \eta, \zeta)$$

где $r = at,\ d\sigma_r$ - элемент площади сферы $S_{at}(x)$, и интеграл является решением волнового уравнения.
Представим $\forall y \in S_{at}(x)$ в виде

$$y = x + at\vec{n}(y) \text{ или } \xi = x + \alpha at,\ \ \eta = y + \beta at,\ \ \zeta = z + \gamma at,$$
$$\vec{n}(y) = (\alpha(y), \beta(y), \gamma(y))$$

где $\vec{n}(y)$ - единичный вектор внешней нормали к сфере $S_{at}(x)$ в точке y, направляющие косинусы которого равны $\alpha = \cos\psi \sin\theta$, $\beta = \sin\psi \sin\theta$, $\gamma = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi)$ - угловые координаты точки в сферической системе координат с центром в x. Для единичной сферы $S_1(0)$ и её элементом площади $d\sigma_1$ выполняется $d\sigma_r = r^2 d\sigma_1,\ d\sigma_1 = \sin\theta d\theta d\psi$. С учётом этого делаем замену:

$$S_{at} \equiv S_r \ni y \to \vec{n}(y) = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_1, \quad d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 = (at)^2 d\sigma_1$$

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \phi(y) d\sigma_1 = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \phi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) d\sigma_1$$

Следовательно, $u \in C^l(\mathbb{R}^4)$, если $\phi \in C^l(\mathbb{R}^3),\ l = 1, 2, \ldots$
Дифференцируя дважды под знаком интеграла, имеем

$$\Delta u(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{S_1}(\phi_{\xi\xi}(y)+\phi_{\eta\eta}(y)+\phi_{\zeta\zeta}(y))d\sigma_1 = \frac{t}{4\pi}\int_{S_1}\Delta\phi(y)d\sigma_1$$

где $y = x + at\vec{n}$. Делая обратную замену:

$$\Delta u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)}\Delta\phi(y)|_{y=x+at\vec{n}}d\sigma_r$$

Дифференцируя по t получим

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\phi(y)d\sigma_1 + \frac{at}{4\pi}\int_{S_1}\big(\nabla\phi(y)\cdot\vec{n}(y)\big)d\sigma_1$$

Учитывая равенство для $u(x,t)$ и делая обратную замену:

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t)}{t} + \frac{1}{4\pi at}\int_{S_{at}(x)}(\nabla\phi(y)\cdot\vec{n}(y))d\sigma_r$$

Применяем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_{S_{at}(x)}(\nabla\phi(y)\cdot\vec{n}(y))d\sigma_r = \int_{B_{at}(x)}\operatorname{div}(\nabla\phi(y))d\xi d\eta d\zeta = \int_{B_{at}(x)}\Delta\phi(y)d\xi d\eta d\zeta = I(x,t)$$

Тогда

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t)}{t} + \frac{I(x,t)}{4\pi at}$$

Дифференцируя по t получим:

$$u_{tt}(x,t) = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at}\right) - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at}I_t = \frac{1}{4\pi at}I_t(x,t)$$

Нетрудно заметить, что

$$I_t(x,t) = a\int_{S_{at}(x)}\Delta\phi(y)|_{y=x+at\vec{n}}d\sigma_r$$

В самом деле, переходя в интеграле по шару $B_{at}(x)$ к сферическим координатам (ρ,θ,ψ) с центром в x, полагая $y = x + \rho\vec{n}$, где $0 \le \rho < at$ имеем:

$$I(x,t) = \int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\phi(y)\rho^2\sin\theta\, d\theta d\psi d\rho$$

Дифференцируем по t и переходим к единичной сфере S_1 и сфере $S_{at}(x)$:

$$I_t(x,t) = a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\phi(y)a^2t^2\sin\theta\, d\theta d\psi = a^3t^2\int_{S_1}\Delta\phi(y)d\sigma_1 = a\int_{S_{at}(x)}\Delta\phi d\sigma_r$$

где $y = x + at\vec{n}$. Следовательно

$$u_{tt}(x,t) = \frac{a}{4\pi}\int_{S_{at}(x)} \frac{\Delta\phi(y)}{r}\Big|_{y=x+at\vec{n}} d\sigma_r$$

Подставляем полученные выражения для u_{tt} и Δu в исходное уравнение и получаем, что $\forall\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ интегральное представление функции удовлетворяет волновому уравнению и начальным условиям $u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = \phi(x)$.

Если u решение волнового уравнения с начальными условиями выше, то в силу однородности функция $v = u_t$ также является решением с начальными условиями:

$$v|_{t=0} = \phi(x), \quad v_t|_{t=0} = u_{tt}|_{t=0} = a^2\Delta u|_{t=0} = 0$$

Взяв в качестве ϕ в случае u функцию ϕ_1, а в случае начальных условий для v функцию ϕ_0 и сложив решения, получим искомое решение волнового уравнения и исходными начальными условиями:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{at}(x)} \frac{\phi_0(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\sigma_r + \int_{S_{at}(x)} \frac{\phi_1(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\sigma_r\right)$$

Формула выше - **формула Кирхгофа**.

Решение задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Формула Пуассона

Предположим ϕ_0 и ϕ_1 не зависят от z, тогда и решение, определяемое формулой Кирхгофа, не будет зависеть от z. Тогда при $x = x' = (x, y, 0)$ она будет решением двумерной задачи Коши:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{в } \mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$$
$$u|_{t=0} = \phi_0(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \phi_1(x,y)$$

Так как нет зависимости от z, то центр сферы $S_{at}(x)$ можно взять в точке $x' = (x, y, 0)$. В таком случае части сферы над и под этой плоскостью можно проектировать на неё в виде круга $\Sigma_{at} = \Sigma_{at}(x')$ с центром в x' радиуса at.

Пусть $y \in S_{at}(x')$ - переменная точка сферы, $y' = (\xi, \eta, 0)$ - проекция y на плоскость $\mathbb{R}^2$. Элемент площади поверхности сферы $S_{at}(x')$ с центром в y и отвечающий ему элемент площади $d\xi d\eta$ плоскости в точке y' связаны соотношением:

$$d\xi d\eta = \cos\theta \, d\sigma_r$$

где θ - угол между радиус-вектором y и осью ζ. Ясно, что

$$\cos\theta = \frac{|y-y'|}{|y-x'|} = \frac{\sqrt{|y-x'|^2 - |y'-x'|^2}}{|y-x'|} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}$$

Аналогичные соотношения справедливы для нижней полусферы.
Подставляем два равенства выше в формулу Кирхгофа, учитывая, что на круг $\Sigma_{at}(x')$ проецируются две полусферы $S_{at}(x')$, приходим к следующей формуле:

$$u(x',t) = u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_{at}(x')}\frac{\phi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \int_{\Sigma_{at}(x')}\frac{\phi_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-}}\right.$$

Формула выше - **формула Пуассона**.

9. Применение метода Фурье для уравнения свободных колебаний струны.

Рассматриваем дифур:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

Где a - скорость распространения волн по струне, φ_0 - начальное отклонение, φ_1 - начальная скорость колебания точек струны.

Искать решение будем в виде функционального ряда. Для этого представим частные решения, удовлетворяющие дифуру и граничным условиям в виде произведения:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставим это в дифур, получим:

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

Предполагая, что частные решения нулю тождественно не равны, имеем право растащить переменные следующим образом:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Две функции разных переменных могут быть друг другу равны тогда и только тогда, когда они равны тождественно константе (доказывается легко, достаточно продифференцировать по x и по t)

Тогда имеет место система равенств $\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$
(константа так обозначена удобства ради)

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (\mathbb{x}) \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 & (\mathbb{t}) \end{cases}$$

Подставим $X(x)T(t)$ в граничные условия, получим:

$$X(0)T(t) = 0, \qquad X(l)T(t) = 0$$

В силу предположения о том, что частное решение не равно нулю тождественно, понимаем, что занулять $T(t)$ смысла не имеет, а значит $X(0) = X(l) = 0$

Таким образом мы перешли к задаче нахождения такого λ, при котором дифур $(\mathbb{x})$ имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям на X, т.е. решаем задачу Штурма-Лиувилля. Составим её:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Необходимо рассмотреть 3 случая: $\lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$

$\lambda < 0$

В этом случае λ можно представить в виде $-\mu^2$

$X'' - \mu^2 X = 0$
$X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$
$X(0) = X(l) = A + B = Ae^{\mu l} + Be^{-\mu l} = 0$

Равенство поссибл только при $A = B = 0$, но это означает тривиальное решение, что нас не устраивает

$\lambda = 0$

$X'' = 0 \implies X(x) = Ax + B$
$X(0) = X(l) = B = Al + B = 0$

Собственно аналогично

$\lambda > 0$

Запишем λ в виде μ^2

$X'' + \mu^2 X = 0$
$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$

$X(0) = \alpha + \beta \cdot 0 = A = 0$
$\implies X(x) = \beta \sin(\mu x)$

$X(l) = \beta \sin(\mu l) = 0$

Тут есть два стула:

1. сказать, что $\beta = 0$ и получить тривиальное решение, что нас опять не устроит
2. рассмотреть нули синуса

$\sin \mu l = 0$, $\mu_k l = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
т.е. $\mu_k = \dfrac{\pi k}{l} \implies \lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2,\ k \in \mathbb{Z}$

Вообще говоря при $k = 0$ решение тривиальное, и $\lambda_k = \lambda_{-k}$, потому интересовать нас будут только $k \in \mathbb{N}$

Оказывается в этом случае у нас бесконечное количество нетривиальных решенийх, причем каждое соответствует своему целому k

Тогда $X_k(x) = \beta_k \sin\left(\dfrac{\pi k x}{l}\right)$

Задача $(\mathbb{t})$

спонсор замечательных обозначений - Eden Lichmer

Зная чему равны λ_k мы можем решить и задачу $(\mathbb{t})$, но расписывать её я не буду, потому что второй курс дифуры

Решение будет иметь вид $T_k(t) = C_k \cos\left(\dfrac{\pi k a t}{l}\right) + S_k \sin\left(\dfrac{\pi k a t}{l}\right)$

Общий вид решения и отыскание констант

Теперь можем записать общий вид частного решения:

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l}\right) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

$A_k = C_k \beta_k$ $B_k = S_k \beta_k$ (только нам это нигде не пригодится, прост имейте ввиду)

Запишем решение дифура в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l}\right) \sin\frac{\pi k x}{l} = (*)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{l} \left(-A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} + B_k \cos\frac{\pi k a t}{l}\right) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

Ну заебись, теперь юзая начальные условия получаем:

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi kx}{l}, \qquad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi ka}{l} B_k \sin\frac{\pi kx}{l}$$

Получили ряды Фурье для исходных данных. Юзая теорию рядов Фурье, которой у нас не было, находим неизвестные константы:

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \qquad B_k = \frac{2}{\pi ka}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ собирается решение исходного дифура, воть)

10. Обоснование метода Фурье для уравнения свободных колебаний струны. Метод Фурье для вынужденных колебаний струны (с подвижными границами).

Обоснование метода Фурье

Возможность применения метода Фурье для решения задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

основывается на следующем.

Теорема 1.
Если функция ϕ_0 дважды непрерывно-дифференцируема на интервале $[0,l]$, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям:

$$\phi_0(0) = \phi_0(l) = 0, \quad \phi_0''(0) = \phi_0''(l) = 0$$

а функция ϕ_1 непрерывно-дифференцируема на $[0,l]$, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям:

$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0$$

то функция u, определяемая рядом $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\pi kat}{l} + B_k\sin\frac{\pi kat}{l}\right)\sin\frac{\pi kx}{l}$, имеет непрерывные производные второго порядка в замкнутой области $\overline{Q}_T$ и удовлетворяет заданному уравнению в каждой точке, граничным и начальным условиям. При этом возможно почленное дифференцирование ряда $u(x,t)$ по x и t дважды и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{Q}_T$.

Доказательство

Интегрируя по частям трижды выражения для коэффициентов ряда

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx, \qquad B_k = \frac{2}{\pi k a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$$

и учитывая начальные условия, получим:

$$A_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{B_k^{(3)}}{k^3}, \quad B_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{A_k^{(2)}}{ak^3}$$

где

$$B_k^{(3)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0'''(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx, \quad A_k^{(2)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1''(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$$

Нетрудно заметить, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k^{(2)}|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_k^{(3)}|}{k}$$

сходятся. Применяя неравенство Коши, имеем:

$$\frac{|A_k^{(2)}|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \left|A_k^{(2)}\right|^2\right), \quad \frac{|B_k^{(3)}|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \left|B_k^{(3)}\right|^2\right)$$

Ряды сходятся, потому что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ сходится и ряды из квадратов коэффициентов сходящегося ряда Фурье тоже сходятся.

Подставим новое равенство для коэффициентов в ряд:

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(B_k^{(3)}\cos\frac{\pi k a t}{l} + \frac{1}{a}A_k^{(2)}\sin\frac{\pi k a t}{l}\right)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

Этот ряд мажорируется в области $\overline{Q}_t$ рядом:

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(|B_k^{(3)}| + \frac{1}{a}|A_k^{(2)}|\right)$$

который сходится. Следовательно, исходный ряд для $u(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}_t$.
Аналогично и ряды, полученные почленным дифференцированием, мажорируются сходящимися в $\overline{Q}_t$ числовыми рядами, а следовательно сходятся равномерно.

Применение метода Фурье для решения уравнений с вынужденными колебаниями струны и неподвижными границами

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

Будем искать решение в виде суммы $u = v + w$.
Здесь v - решение неоднородного уравнения:

$$\begin{gathered} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) \\ v(0,t) = v(l,t) = v(x,0) = v_t(x,0) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

а w - решение однородного уравнения

$$\begin{gathered} w_{tt} = a^2 w_{xx} \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \phi_0(x), \quad w_t(x,0) = \phi_1(x) \end{gathered} \tag{2}$$

Решение задачи (2) методом Фурье известно, потому достаточно найти решение v задачи (1). Ищем решение по методу Фурье в виде:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{3}$$

Подставляем (3) в (1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x,t) \tag{4}$$

где $\omega_k = \dfrac{k\pi a}{l}$.
Предположим, что функцию f можно разложить в ряд Фурье по синусам:

$$\begin{gathered} f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \\ f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{gathered} \tag{5}$$

Приравнивая (4) к (5) получаем:

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Чтобы однозначно определить T_k, зададим нулевые начальные условия $T_k(0) = T_k'(0) = 0$.
Решение (6) имеет вид

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_0^l f_k(\tau)\sin(\omega_k(t-\tau))d\tau$$

$$T_k(t) = \frac{2}{l\omega_k}\int_0^l \left(\sin(\omega_k(t-\tau))\int\limits_0^l f(x,\tau)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right)d\tau$$

Подставляя в (3) получим решение задачи (1).

Уравнения с вынужденными колебаниями струны и подвижными границами

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u(l,t) = g_2(t) \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

Сведём решение задачи выше к решению задачи с однородными краевыми условиями. Вводим вспомогательную функцию, удовлетворяющую граничным условиям:

$$(x,t) = g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t))\frac{x}{l}$$
$$w(0,t) = g_1(t), w(l,t) = g_2(t)$$

Ищем решение в виде $u = v + w$. Тогда

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \phi_0(x) - g_1(0) - (g_2(0) - g_1(0))\frac{x}{l} = \overline{\phi}_0(x)$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = \phi_1(x) - g_1'(0) - (g_2'(0) - g_1'(0))\frac{x}{l} = \overline{\phi}_1(x)$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \overline{f}(x,t)$$
$$\overline{f}(x,t) = f(x,t) - g_1''(t) - (g_2''(t) - g_1''(t))\frac{x}{l}$$

и нахождение функции v - задача с неподвижными границами, решение которой известно.

11. Принцип максимума для параболического уравнения. Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи.

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ; $Q_T = \Omega \times (0, T]$;
$\Omega_0 = \Omega \times \{t = 0\}, 0 < T < \infty$.

$$u_t = a^2 \Delta u$$
$$u|_\Gamma = g(x,t)$$
$$u|_{t=0} = \phi(x)$$

Принцип максимума для однородного параболического уравнения

Функция $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности в Q_T принимает максимальное и минимальное значение либо на $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T]$, либо на $\overline{\Omega} \times \{t = 0\}$.

Доказательство

Достаточно доказать для случая максимума.

Пусть $M = \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_T} u(x,t), \quad m = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Sigma}_T\cup\overline{\Omega}_0} u(x,t)$.

Очевидно $M \geq m$. Осталось показать, что $M = m$.

Предположим противное, $\exists u$ решение уравнения теплопроводности, для которого $M > m$.

В силу непрерывности на $\overline{Q}_T$ существует по крайней мере одна точка $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$, такая что $u(x_0, t_0) = M$. Введём функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{6d^2}|x - x_0|^2$$

где d - диаметр области Ω. На $\overline{\Sigma}_T$ и $\overline{\Omega}_0$ имеем:

$$v(x,t) \leq m + \frac{M-m}{6} = \frac{M}{6} + \frac{5m}{6} < M$$

Кроме того $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$.

Тогда максимум функции v достигается в некоторой точке $(x_1, t_1) \in Q_T, x_1 \notin \Gamma$. Поскольку это точка максимума, то в ней выполняются неравенства

$$\nabla v = 0, v_{xx} \leq 0, v_{yy} \leq 0, v_{zz} \leq 0, v_t \geq 0$$

Следовательно

$$v_t - a^2 \Delta v \geq 0$$

С другой стороны $\forall (x,t) \in Q_T$ имеем:

$$v_t - a^2 \Delta v = u_t - a^2 \Delta u - a^2 \frac{M-m}{d^2} = -a^2 \frac{M-m}{d^2} < 0$$

Противоречие. Следовательно $M = m$.

Следствие 1

Решение u, отвечающее нулевым данным $g = 0, \phi = 0$ тождественно равно нулю в $\overline{Q}_T$.

Из принципа максимума, макс. и мин. значения на $\overline{\Sigma}_T$ и $\overline{\Omega}_0$ и равны нулю $\implies u \equiv 0$.

Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности

Единственность

Предположим противное, что существует два решения u_1, u_2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ тоже удовлетворяет уравнению, но с нулевыми граничными и начальными условиями. Тогда из следствия 1 $u \equiv 0$ в Q_T и $u_1 = u_2$.

Устойчивость

Пусть разность $g_1 - g_2$ граничных функций и $\phi_1 - \phi_2$ начальных функций не превосходят по модулю числа $\epsilon > 0 : |g_1 - g_2| \le \epsilon$ на $\Gamma \times [0, T]$, $|\phi_1 - \phi_2| \le \epsilon$ в $\overline{\Omega}$ при $t = 0$.
Обозначим через u_1 решение задачи, отвечающее паре (g_1, ϕ_1). Тогда разность $u = u_1 - u_2$ обоих решений как решение однородного уравнения с граничной функцией $g_1 - g_2$ и начальной функцией $\phi_1 - \phi_2$ удовлетворяет согласно принципу максимума условию $|u| \le \epsilon$
.

12. Понятие гармонической функции. Сингулярное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$. ~

Понятие гармонической функции

Гармоническая функция в области Ω
Функция u - гармоническая в Ω, если она дважды непрерывна дифференцируема в каждой точке области и удовлетворяет уравнению (2).

Гармоническая функция во внешности Ω_e
Функция u называется гармонической во внешности Ω_e, если она дважды непрерывна дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2) в каждой точке Ω_e. И, так же,
$|u(x)| \le C|x|^{2-n} \quad (3)$

Сингулярное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$

Важную роль играют решения уравнения Лапласа, зависящие только от координаты r или ρ, то есть обладающие сферической или цилиндрической симметрией.

Сферический случай

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u_r\right) = 0 \implies r^2 u_r = C_1$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r^2}, \quad u\left(r\right) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Сингулярное решение в R^3

$$E_3(x,y) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

- $u\left(r\right) = E_3\left(r\right) = \dfrac{1}{4\pi r}$ - удовлетворяют условию гармоничности всюду, кроме $r = 0$

Фундаментальное решение
Сумма сингулярного решения и гармонической функции

Сингулярное решение оператора Лапласа в R^3 с центром в точке y

$$E_3(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$$

Цилиндрический случай
Общее решение уравнение Лапласа, зависящее только от ρ имеет вид

$$u(x) = U(\rho) = C_1 \ln\frac{1}{\rho} + C_2$$

Так как $\rho = |\overline{x}| = \sqrt{x^2+y^2} \implies$ решение не зависит от z. И при $C_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $C_2 = 0$ имеем *сингулярное решение в* R^2

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$$

Сингулярное решение оператора Лапласа в R^2 с центром в точке y

$$E_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}$$

- Гармоническая в любом ограниченном открытом множестве $\Omega \subset R^2$, не содержащем точку y.

Сингулярное решение оператора Лапласа в R^n с центром в точке y

$$E_n(x,y) = \frac{1}{\omega_n \cdot |x-y|^{n-2}} \quad n \geq 3$$

$\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ - площадь единичной сферы в R^n

13. Основные свойства гармонических функций. Принцип максимума для гармонических функций.

Для случая одной переменной общим решением уравнения $u'' = 0$ является линейная функция $u(x) = C_1 x + C_2$. Отсюда вытекают следующие свойства:

1. Если принять за направление внешней нормали n к границе отрезка $[a, b]$ на оси x в точке b направление этого отрезка, а в точке a - противоположное ему, то для любой линейной функции сумма значений первых производных по направлению n в концах отрезка равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a) + \frac{\partial u}{\partial n}(b) = -u_x(a) + u_x(b) = 0$$

2. Функция u линейная (гармоническая) в (a, b), бесконечно дифференцируема и аналитична внутри (a, b) ($u \in C^\infty(a, b)$).
3. Для линейной (a, b) функции u её значение в центре $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ любого интервала $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ равно среднему значению функции u на $[\alpha, \beta]$, а также среднему арифметическому значений функции u на концах интервала $[\alpha, \beta]$, т. е.

$$u\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_\alpha^\beta u(x) dx = \frac{u(\alpha) + u(\beta)}{2}$$

4. Линейная на (a, b) функция не может принимать своё наибольшее или наименьшее значение внутри интервала (a, b), кроме случаев, когда $u = const$.
5. Линейная на (a, b) функция, непрерывная на $[a, b]$, однозначно определяется своими значениями в концах $x = a, x = b$ этого интервала.

Эти свойства распространяются и на гармонические функции в $\mathbb{R}^n$.

Основные свойства гармонических функций в $\mathbb{R}^n$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ произвольное открытое связное множество с границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Omega_e = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$. Для конкретности, рассмотрим случай $\mathbb{R}^3$.

Теорема 1.
Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей Γ. Если $u \in C^1(\overline{\Omega})$ - гармоническая в области Ω функция, то

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

Доказательство
Применяем формулу Грина ($v=1$): $\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0$

Теорема 2.
Функция u, гармоническая в области Ω, имеет производные всех порядков в Ω, т. е. $u \in C^\infty(\Omega)$. Любая производная от гармонической в Ω функции является гармонической функцией.

Доказательство
Возьмём произвольную точку x_0 внутри Ω и окружим её гладкой поверхностью $\Gamma' \subset \Omega$. Так как u гармонична в Ω, то гармонична и внутри Γ', а также дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы Γ'. Применяя формулу интегрального представления гармонических функций для области внутри Γ' имеем:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma'}\left(\frac{1}{|x-x_0|}\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - u(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-x_0|}\right)d\sigma_x$$

(где n_x, σ_x - обозначение взаимодействия только по первой координате вектора, т. е. n_x - нормаль в направлении оси x, $d\sigma_x$ - малый фрагмент поверхности, изменяемый по x, но неизменяемый по остальным координатам).

Так как $x_0 \notin \Gamma'$, то функция $\dfrac{1}{|x-x_0|}$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка, следовательно, правую часть можно дифференцировать под знаком интеграла по координатам x_0, y_0, z_0 сколько угодно раз, что справедливо и для левой части. Следовательно, функция u бесконечно дифференцируема.
Второе утверждение - следствие **первого** и линейности оператора Лапласа. лол

Теорема 3 (о среднем значении).
Если функция u гармонична в области Ω, то в любой точке $x_0 \in \Omega$ справедлива формула среднего значения:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\Gamma_a} u(x) d\sigma \qquad (1)$$

где Γ_a - сфера радиуса a с центром в точке x_0, лежащая в Ω.

Другая формулировка. Значение гармонической в области Ω функции в произвольной точке $x_0 \in \Omega$ равно среднему значению этой функции на любой сфере Γ_a радиуса a с центром в x_0, если сфера Γ_a целиком содержится в области гармоничности функции u.

Доказательство
Применим формулу интегрального представления гармонических функций к шару $B_a = B_a(x_0)$ радиуса a с центром в $x_0 \in \Omega$ с границей Γ_a. Тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_a} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \frac{\partial u}{\partial n_x}(x) - u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|x - x_0|} \right) d\sigma$$

Учитывая теорему 1 и тот факт, что $|x - x_0| = a$ на Γ_a имеем

$$\int_{\Gamma_a} u_n d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{a^2} \text{ на } \Gamma_a.$$

Тогда, полагая $a = \rho$ формула преобразуется в следующий вид

$$4\pi\rho^2 u(x_0) = \int_{\Gamma_\rho} u(x) d\sigma$$

Проинтегрируем по ρ от 0 до a:

$$\frac{4}{3} a^3 u(x_0) = \int_0^a \int_{\Gamma_\rho} u(x) d\sigma d\rho = \int_{B_a} u(x) dx$$

или

$$u(x_0) = \frac{1}{V_a} \int_{B_a} u(x) dx, \quad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3$$

Получилась формула среднего значения функции в шаре.

Принцип максимума для гармонических функций

функция u, гармоническая внутри ограниченной области Ω, не может достигать своего максимального и минимального значения внутри Ω, кроме случая $u \equiv const$.

Доказательство
Предположим, что функция u принимает своё максимальное значение u_0 в некоторой внутренней точке x_0 области Ω, так что

$$u_0 = \max_{x \in \Omega} u(x) = u(x_0) \geq u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

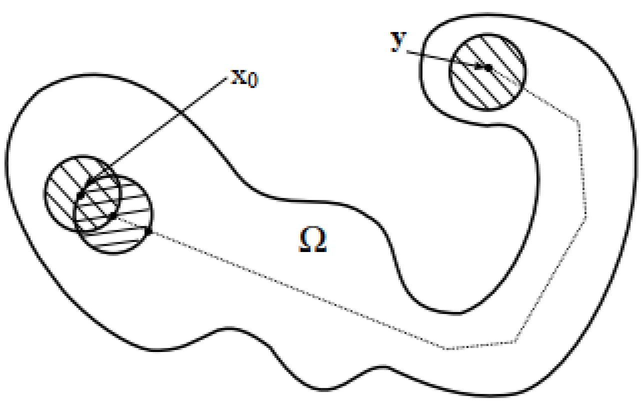
Окружим точку x_0 сферой $\Gamma_a \subset \Omega$ и применим к функции u формулу среднего значения. Получим:

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u(x) d\sigma \leq \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u_0 d\sigma = u_0$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке $x \in \Gamma_a$ выполняется $u(x) < u(x_0)$, то в силу непрерывности функции u на Γ_a в формуле выше было бы строгое неравенство, что противоречит $u(x_0) = u_0$, следовательно
$u(x) = u(x_0)$.

Из произвольности радиуса a следует $u \equiv const$ внутри и на границе всякого шара с центром в $x_0 \in \Omega$.

Покажем, что $u(x) = u_0$ всюду в Ω.
Пусть $\forall y \in \Omega$. Соединим x_0 с y ломаной линией l, лежащей внутри Ω (это возможно, потому что Ω - область). Пусть d - наименьшее расстояние от l до границы Γ области Ω.
В силу доказанного выше $u(x)$ равна постоянной u_0 в шаре с центром в x_0 и радиуса $\frac{d}{2}$.
Пусть x_1 - крайняя точка пересечения l с границей шара $\implies u(x_1) = u_0$ и $u(x) = u_0$ в шаре с центром x_1 радиуса $\frac{d}{2}$. Также и для x_k точек выполняется $u(x_k) = u_0$ и $u(x) = u_0$ в шаре с центром в x_k. После конечного числа шагов вся линия l будет покрыта шарами, y окажется внутри некоторого шара, откуда будет следовать $u(y) = u_0$.
Следовательно, если $u \not\equiv const$, то её максимальное значение не может достигаться внутри Ω. Для минимума аналогично.



14. Теоремы о единственности и устойчивости решений третьей краевой задачи для уравнения Пуассона.

Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^3$
$\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma \in C^1$
Ω_e - внешность Ω
$f \in C(\Omega)$ либо $f \in C(\Omega_e)$
$g \in C(\Gamma)$
$\overline{n}$ - единичный вектор внешней нормали к Γ
$\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$

Опишем какие вщ типы краевых задач есть:

1) Внутренняя задача Дирихле
$\begin{cases} \Delta u = -f \\ u|_\Gamma = g \end{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

2) Внешняя задача Дирихле
$$\begin{cases} \Delta u = -f \\ u|_\Gamma = g \\ u(\overline{x}) = o(1),\ |\overline{x}| \to \infty \end{cases} \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

3) Внутренняя задача Неймана
$$\begin{cases} \Delta u = -f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = g \end{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

4) Внешняя задача Неймана
$$\begin{cases} \Delta u = -f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = g \\ u(\overline{x}) = o(1),\ |\overline{x}| \to \infty \end{cases} \qquad u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$$

Особый акцент сделаем в этом пункте на задачи Робена (третья краевая)

5) Внутренняя задача Робена
$$\begin{cases} \Delta u = -f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + au\Big|_\Gamma = g \end{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

6) Внешняя задача Робена
$$\begin{cases} \Delta u = -f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + au\Big|_\Gamma = g \\ u(\overline{x}) = o(1),\ |\overline{x}| \to \infty \end{cases} \qquad u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$$

Существуют еще смешанные типы, это когда граница бьётся на несколько кусков, и на каждом задаётся свой тип условия. Такими извращениями мы заниматься не будем. Ну не будем же?...

Теорема 1. Единственность решения задачи 5

Если $a \in C(\Gamma):\ a|_\Gamma \geq 0$ и $\int_\Gamma a d\sigma > 0$, тогда решение $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ задачи 5 единственно

Доказательство:
Предположим противное, что решение не единственно, т.е. существуют u_1 и u_2, удовлетворяющие поставленной задаче.

Пусть $u = u_2 - u_1$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial n} + au = 0$ на Γ
Применим формулу Грина для $v = u$:

$$\int_\Omega u \Delta u dx = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx$$

Беря во внимание граничное условие и гармоничность u имеем:

$$\int_\Gamma au^2 d\sigma + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$$

Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда они оба 0
Т.е. $|\nabla u| = 0$ в Ω а значит $u = u_0 = \text{const}$

$$u_0^2 \int_\Gamma a d\sigma = 0$$

Что в силу $\int_\Gamma a d\sigma > 0$ возможно только когда $u_0 = 0$
Т.е. $u_1 = u_2$
Чтд

Теорема 2. Единственность решения задачи 6

Если $a \in C(\Gamma) : \ a|_\Gamma \geq 0$, тогда решение $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ задачи 6 единственно, когда Ω_e - связное множество

Доказательство:
Предположим противное, решений снова два, т.е. u_1 и u_2. Пусть $u = u_1 - u_2$
Обозначим через B_R шар большого радиуса R с границей Γ_R , содержащий область Ω внутри себя

Введем ограниченную область $\Omega_R = \Omega_e \cap B_R$

“Pasted image 20250626165508.png” не может быть найдена.

Дрочите

Применим формулу Грина в Ω_R при $u = u_2 - u_1, \ v = u$:

$$\int_{\Omega_R} u \Delta u dx = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int_{\Gamma_R} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u dx$$

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int_{\Gamma_R} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

Применяя оценки для функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа имеем, что $|\nabla u|^2 = O\left(\frac{1}{|\overline{x}|^4}\right)$, в то время как объём растёт с кубической скоростью. Значит при $R \to \infty$ получаем несобственный сходящийся интеграл $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 dx$
В то же время $\left.\frac{u \partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = O\left(\frac{1}{R^3}\right)$, в то время как площадь поверхности шара растёт с квадратичной скоростью

Значит получаем предельное равенство:

$$\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

Т.к. u_1 и u_2 удовлетворяют граничным условиям задачи 6, то u удовлетворяет условию $\frac{\partial u}{\partial n} + au = 0$ на Γ. Тогда получаем:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma} au^2 d\sigma = 0$$

из чего по аналогии с предыдущей теоремой следует что $u_1 = u_2$
Чтд

Устойчивость

какая устойчивость?

15. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в круге и вне круга методом Фурье. Формула Пуассона решения краевой задачи для уравнения Лапласа в круге и вне круга. ~

Пусть $\Omega = \Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$ - круг радиуса a, $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, $\Gamma_a = \partial\Omega_a$.
Рассмотрим две задачи: внутреннюю

$$\begin{gathered} \Delta u = 0 \\ u = g \quad \text{на } \Gamma_a \end{gathered}$$

и внешнюю. Последняя заключается в нахождении решения u в области Ω_e с условием на бесконечности

$$u(x, y) = O(1) \quad \text{при } (x^2 + y^2) \to \infty$$

Перейдём в полярные координаты:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u_\rho) + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} = 0$$

Будем искать частные решения в виде произведения:

$$u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$$

Подставляем в уравнение и разделяем переменные

$$\frac{\rho(\rho R')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

$$\rho(\rho R')' - \lambda R = 0 \quad \text{в } (0, a)$$
$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \quad \text{в } (0, 2\pi)$$

В силу однозначности решения функция Φ должна быть 2π периодична по ϕ: $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$.
Задача для Φ - спектральная, и её решение имеет вид

$$\lambda_k = k^2, \quad \Phi_k(\phi) = a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Подставим λ_k в уравнение для R и получим уравнение Эйлера:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0$$

Его решение при $k > 0$ будет искать в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя и сокращая на ρ^μ получаем

$$\mu^2 = k^2 \implies \mu \pm k$$

Получаем два линейно независимых решения ρ^k и ρ^{-k}. При $k = 0$ независимыми решениями являются функции 1 и $\ln \rho$.
Так как искомое решение должно быть ограничено в круге Ω для внутренней задачи, и в Ω_e для внешней, то стоит брать следующие множители для задачи 1:

$$R_0(\rho) = 1, \quad R_k(\rho) = \rho^k, \quad k \geq 1$$

и для задачи 2:

$$R_0(\rho) = 1, \quad R_k(\rho) = \rho^{-k}, \quad k \geq 1$$

Следовательно, решения задачи 1 имеют вид

$$u(\rho, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi)$$

для задачи 2:

$$u(\rho, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi)$$

Определим коэффициенты. Воспользуемся граничным условием

$$u(a, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi) = g(\phi)$$

Предположим $g \in C^0[0, 2\pi], g(0) = g(2\pi)$, значит её можно разложить в ряд Фурье:

$$g(\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\phi + \beta_k \sin k\phi)$$

где коэффициенты определяются как

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)d\psi,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\cos k\psi\, d\psi,\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\sin k\psi\, d\psi$$

В итоге

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad a_k = \frac{\alpha_k}{a^k}, \quad b_k = \frac{\beta_k}{a^k}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Получаем решение задачи 1 в виде ряда:

$$u(\rho, \phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k (\alpha_k \cos k\phi + \beta_k \sin k\phi)$$

аналогично для задачи 2:

$$u(\rho, \phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^k (\alpha_k \cos k\phi + \beta_k \sin k\phi)$$

Формула Пуассона решения краевой задачи для уравнения Лапласа в круге и вне круга

Подставляя в решение формулы для коэффициентов разложения функции g получим

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k (\cos k\psi \cos k\phi + \sin k\psi \sin k\phi)\right)d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k \cos(k(\phi - \psi))\right)d\psi$$

Предполагая, что $t = \dfrac{\rho}{a} < 1$ и используя формулу суммы геометрической прогрессии преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos(k(\phi - \psi)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} t^k (e^{ik(\phi-\psi)} + e^{-ik(\phi-\psi)}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (te^{i(\phi-\psi)})^k + (te^{-i(\phi-\psi)})^k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{te^{i(\phi-\psi)}}{1 - te^{i(\phi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\phi-\psi)}}{1 - te^{-i(\phi-\psi)}}\right) =$$

пропускаем страшную дробь и получаем

$$\frac{1}{2}\frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\phi - \psi) + t^2}, \qquad |t| < 1$$

Перепишем формулу для решения:

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\phi - \psi) + \rho^2} g(\psi) d\psi$$

Формула выше - **формула Пуассона**, выражение

$$k(\rho, \phi; a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\phi - \psi) + \rho^2}$$

ядро Пуассона. Оно определено при $a \neq \rho$, причём $k(\rho, \phi; a, \psi) > 0$ при $\rho < a$, и $k(\rho, \phi; a, \psi) < 0$ при $\rho > a$.

Полная версия (включает в себя сокращённую)

1. Математическая модель колебаний струны и мембраны. Волновое уравнение.

2. Диффузионная математическая модель переноса вещества.

3. Математические модели переноса вирусов.

4. Математические модели движения жидкостей.

5. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения. Устойчивость решения задачи Коши. Обобщенное решение.

6. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на вещественной полуоси с граничным условием Дирихле (a) или условием Неймана (b).

7. Применение метода Фурье для одномерного уравнения с переменными коэффициентами.

8. Применение метода Фурье для двумерного волнового уравнения. Колебания прямоугольной мембраны.

9. Применение метода Фурье для уравнения колебаний круглой мембраны. Цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля.

10 . Решение первой краевой задачи для одномерного однородного уравнения теплопроводности методом Фурье. Обоснование метода Фурье.

11. Постановка задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Единственность и устойчивость решения.

12. Элементы теории потенциала (объемного, простого и двойного слоев).

13. Элементы теории интегральных уравнений. Альтернатива Фредгольма. Сущность метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) . Сведение внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа к граничному интегрального уравнению.