# №1

## Условие

Найти примеры и доказать, что множества, открытые в подпространстве не обязательно будут открыты в объемлющем их пространстве.

## Решение

Вспомним определение подпространства:
$\sqsupset$ $(X, T)$ - топологическое пространство.
$A \subseteq X$ - произвольное подмножество.
Через $T_A$ обозначим совокупность $\{A \cap U | U \in T\}$
и $(A, T_A)$ называют **подпространством топологического пространства** $(X, T)$
и $T_A$ называют **индуцированной топологией** (на $A$ из $(X, T)$)

$X = \{1, 2, 3\}$
$T_X = \{\{1, 2, 3\}, \{3\}, \emptyset\}$

$A = \{1, 2\}$
$A \in X$
$T_A = \{\{1, 2\}, \emptyset\}$
$\{1, 2\} \cancel{\not\subseteq} T_X$

Ч. Т. Д.

В более строгом формате:
Пусть $(X, T)$ - топологическое пространство.
Пусть $A \subseteq X$, но $A \cancel{\not\subseteq} T_A$
Тогда $(A \cap U | U \equiv X) \cancel{\not\subseteq} T_X$.

Ч. Т. Д.

# №2

## Условие

Доказать, что $F$ замкнуто в подпространстве $A \subseteq X \iff F = A \cap E$, где $E$ - замкнуто в $X$

# Решение

( $\implies$ )

$F$ - замкнуто в $A$, т. е. $\exists L \in T_A : F = A \backslash L$

При этом $L = A \cap U | U \in T_X$ (по свойствам подпространства)

$F = A \backslash (A \cap U) = A \cap (X \backslash U) = A \cap E$, где $E = X \backslash U$

$U \in T_X \implies E$ - замкнуто в $T_X$.

$A \backslash (A \cap U) = A \cap (X \backslash U)$

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ and } x \in B\}$

$A \backslash B = \left\{x | x \in A \text{ and } x \cancel{\in} B\right\}$

$A \subseteq X \equiv x \in A \implies x \in X$

$A \backslash \left(A \cap B\right) = \left\{x | x \in A, x \cancel{\in} \left(A \text{ and } B\right)\right\} = \left\{x | x \in A, x \cancel{\in} B\right\}$

$A \cap \left(X \backslash U\right) = \left\{x | x \in A, x \cancel{\in} \left(X \text{ and } B\right)\right\} = \left\{x | x \in A, x \cancel{\in} B\right\}$

( $\impliedby$ )

$F = A \cap E$, где $E$ - замкнуто в $T_X$ и является дополнением к $U$

Для того, чтобы $F$ было замкнутым, необходимо, чтобы $F = A \backslash L, L \in T_A$

$F = A \cap E = A \cap \left(X \backslash U\right) = A \backslash \left(A \cap U\right) = A \backslash L$

$L = A \cap U$ и является элементом подпространства по построению.

Следовательно, поскольку $F$ является дополнением к открытому на подпространстве множеству, оно является закрытым.

Ч. Т. Д.