Задача 1

Найти ур-я нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей, кривой заданной пар-ки: $\vec{r}(t) = (e^{t}, e^{2t}, e^{4t})$

при $t_0 = 0$.

$\{\vec{v}, \vec{n}, \vec{b}\}$: $\vec{v}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$, $\vec{n}(t) = \dfrac{\vec{v}\,'(t)}{|\vec{v}\,'(t)|}$,

$\vec{b}(t) = \dfrac{[\vec{v}(t), \vec{n}(t)]}{|[\vec{v}(t), \vec{n}(t)]|}$

Репер Френе $(O,$ базис $\{e_1, e_2, e_3\})$

б. Френе

$$\vec{V}(t) = \frac{(e^{t}, 2e^{2t}, 4e^{4t})}{\sqrt{e^{2t}+4e^{4t}+16e^{8t}}}\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

$$\vec{N}(t) = \frac{(e^{t}, 4e^{2t}, 16e^{t})}{\sqrt{e^{4t}+16e^{8t}+256e^{16t}}}\Bigg|_{t_0} = \left(\frac{4}{\sqrt{273}}, \frac{4}{\sqrt{273}}, \frac{16}{\sqrt{273}}\right)$$

$$\vec{B} = [\vec{V}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 16 \end{vmatrix} = (16, -12, 2)$$

$(x-1) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0$ // нормальная пл-ть

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

// ур. пл-ти, прох. через точку с р.-вект. $\vec{r}_0$ и с напр. в-ми $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-16) - (y-1)(12) + (z-1)(-2) = 0$$ // соприкас.

$$(x-1) + 4(y-1) + 16(z-1) = 0$$ // спрямл.

Задача 2

$a>0$

Найти кривизну и кручение кривой $\vec{\gamma}(t)=(t\cos t, t\sin t, at)$

$$k(t)=\frac{|[\vec{\gamma}'_{(t)}, \vec{\gamma}''_{(t)}]|}{|\vec{\gamma}'_{(t)}|^3}$$

$$\varkappa(t)=\frac{(\vec{\gamma}'_{(t)}\ \vec{\gamma}''_{(t)},\ \vec{\gamma}'''_{(t)})}{|[\vec{\gamma}'_{(t)}\ \vec{\gamma}''_{(t)}]|^2}$$

$[\gamma',$

$2\cos^2 t - t\sin t\,\cancel{t\cos}$

$\gamma'_t=(\underline{\cos t - t\sin t}, \underline{\sin t + t\cos t}, a)$

$\gamma''_t=(-\sin t - \sin t - t\cos t, \cos t + \cos t - t\sin t, 0)$

$(-\underline{2\sin t - t\cos t}, \underline{2\cos - t\sin t}, 0)$

$-a(\underline{2\cos t} - \underline{t}$

$\shortparallel$

$\gamma'''_t(-2\cos t - \cos t + t\sin t, -2\sin t - \sin t - t\cos t, 0)$

$(-3\cos t + t\sin t, -3\sin t - t\cos t, 0)$

$-3at\sin t\cos t +$

$+6a\cos^2 t - 2a t$

$at^2\sin^2 t + 6a$

$a(t\sin t-2\cos t)\quad -a(2\sin t+\cos t\,t)$

$\gamma'''=(at\sin t-2a\cos t,-2a\sin t-at\cos t,2+t^2)$

$|\gamma'|$

$\cos t-\cancel{2t\sin t\cos t}+t^2\sin^2 t+2\sin^2 t+\cancel{t\cos t\sin t}+\cancel{2t\cos t\sin t}+t^2\cos^2 t$

$=\sqrt{1+}$

$(\gamma',\gamma'',\gamma''')=($

t

$\sin t)(-3\cos t+t\sin t)$

$-a(2\sin t+t\cos t)$

$(-3\sin t-t\cos t)=-a(6\sin^2 t-3t\sin t\cos t$

$+3t\sin t\cos t-t^2\cos^2 t$

$\frac{2t+3t}{5t}$

$at^3\sin^2 t$

$\sin t\cos t$

$\cos^2 t-5at\sin t\cos t$

$-a(6t\sin t\cos t+t^2$

$=-a(t^2+6)$

$[\gamma',\gamma$

$\sqrt{a^2(4\cos}$

$=\sqrt{}$

$$|| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + a^2}$$

$$\cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t + a^2 =$$

$$\sqrt{a^2 + t^2}$$

$$y'']|| = \sqrt{a^2(2\cos t - t\sin t)^2 + a^2(2\sin t + t\cos t)^2 + t^4 + 2t^2 + 4}$$

$$\sqrt{\cos^2 t - \cancel{4t\cos t\sin t} + t^2\sin^2 t) + a^2(4\sin^2 t + \cancel{4t\sin t\cos t} + t^2\cos^2 t) + t^4 + 2t^2 + 4} =$$

$$\sqrt{4a^2 + a^2t^2 + t^4 + 2t^2 + 4} = \int \frac{\sqrt{t^4 + t^2(a^2+2) + 4a^2 + 4}}{\sqrt{1 + a^2 + t^2}^3}$$

ДЗ:

① Найти кривизну и кручение

1) окружности

2) винтовой линии

3) $\vec{r}(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2}\right)$ в $t = \pi$

② Д-ть, что кривая плоская

$\vec{r}(t) = (2t, 3t + 4, t^2 - 3)$

Найти плоскость, в кот. лежит эта кривая.