# Homework #1

Due: 2024-4-16 00:00 | 7 Questions, 100 Pts

Name: JS

**Question 1 (16') (向量空间).**

a. 证明：由ii可得，$[C_1]$中的$\forall c_1$和$[C_2]$中的$\forall c_2$，其对人眼的色觉刺激相同，他们进行色光混合时$c_1 \oplus c_2$和其对应的等价类 $C_1 \oplus C_2$得到的混合后结果相同，所以$c_1 \oplus c_2 \in [C_1 \oplus C_2]$，加法是良定义的。

b. 证明：根据定义，$\alpha \odot c$是将$c$的功率谱乘以$\alpha$得到的色光。由格拉斯曼定律iii可知，功率谱的变化不影响色光的色相和饱和度，且$L_V(\alpha \odot c)$与$L_V([\alpha \odot C])$二者亮度也相等所以$\alpha \odot c \in [\alpha \odot C]$，需要考虑$\alpha < 0$时的意义为在混合光中去除这一种光，因此数乘是良定义的。

c. 证明：线性空间要满足如下性质：

1. $\forall [C_1], [C_2] \in \{[C]\}$ 都有 $[C_1] + [C_2] = [C_2] + [C_1]$ 因此该空间满足交换性。
2. $\forall [C_1], [C_2], [C_3] \in \{[C]\}$和$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$都有 $([C_1] + [C_2]) + [C_3] = [C_1] + ([C_2] + [C_3])$和 $(\alpha\beta) \cdot [C_1] = \alpha(\beta \cdot [C_1])$ 因此该空间满足结合性。
3. $\exists [0] \in \{[C]\}$，这里$[0]$代表的没有光源的情况,使得对$\forall [C_1] \in \{[C]\}$有$[C] + [0] = [C]$ 因此存在加法单位元。
4. $\forall [C] \in \{[C]\}$都 $\exists [W] = (-1) \cdot [C]$，使得$[C] + [W] = [0]$，则对任意$[C]$都存在其加法逆元。
5. $\forall [C] \in \{[C]\}$有 $1 \cdot [C] = [C]$，说明存在乘法单位元。
6. $\forall [C_1], [C_2] \in \{[C]\}$ 和 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$都有$\alpha \cdot ([C_1] + [C_2]) = \alpha \cdot [C_1] + \alpha \cdot [C_2]$ 和$(\alpha + \beta) \cdot ([C_1] = \alpha \cdot [C_1] + \beta \cdot [C_1]$，表面该空间具有分配性质。综合以上六条性质，可说明$\{[C]\}$为线性空间。

d. 证明：根据Abney定律有$L_V([C_1] + [C_2]) = L_V([C_1]) + L_V([C_2])$ 且由于改变功率谱不改变光的其他特征，有$L_V(\alpha \cdot [C]) = \alpha \cdot L_V([C])$ 综上，其满足线性算子的基本性质，其为线性映射。

◀

**Question 2 (20') (矩阵特征值).**

a. 由$\lambda \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \lambda^k \boldsymbol{\alpha}$，

则$f(\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha} = c_k \mathbf{A}^k \boldsymbol{\alpha} + c_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + c_1 \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + c_0 \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}$

$= c_k \lambda^k \boldsymbol{\alpha} + c_{k-1}\lambda^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + c_1 \lambda \boldsymbol{\alpha} + c_0 \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}$

$= f(\lambda)\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，得证。

b. 由a可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，则 $f(\mathbf{A})$ 有特征值为 $\{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\}$，又因为$f(\mathbf{A})$为$n \times n$ 的矩阵，因此其至多有n个特征值，得证。

c. $e^{\mathbf{X^T}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{X^T})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{X}^k)^{\mathbf{T}} = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{X}^k)^{\mathbf{T}} = (e^{\mathbf{X}})^{\mathbf{T}}$ 因此得证。

d. 任何方阵都可以相似于一个 Jordan 矩阵，因此我们可以假设 $\mathbf{B}$ 相似于一个 Jordan 矩阵 $\mathbf{J}$，即 $\mathbf{B} = \mathbf{PJP^{-1}}$，其中 $\mathbf{P}$ 是可逆矩阵。

$\det\left(e^{\mathbf{B}}\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{PJP}^{-1})^k}{k!}\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{PJ^kP}^{-1}}{k!}\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{J}^k}{k!}\right) = \det\left(e^{\mathbf{J}}\right)$
现在，我们来计算 $\det\left(e^{\mathbf{J}}\right)$。由于 $\mathbf{J}$ 是 Jordan 标准形，$e^{\mathbf{J}}$ 也是 Jordan 标准形，对角线上的元素是 $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值。
所以，$\det\left(e^{\mathbf{J}}\right) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}(\mathbf{B})}$ 得证。

e. 由题 $\mathbf{P} = -\mathbf{G}^2 = (\boldsymbol{ba}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{ab}^{\mathbf{T}})(\boldsymbol{ab}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{ba}^{\mathbf{T}})$
$= \boldsymbol{ab^T ba^T} - \boldsymbol{ab^T ab^T} - \boldsymbol{ba^T ba^T} + \boldsymbol{ba^T ab^T}$

f. $\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{e}^{\mathbf{G}\theta} = \mathbf{I} * \cos(\theta) + \mathbf{G} * \sin(\theta)$ , 且因为$\det(\mathbf{R}(\theta)) = \mathbf{1}$, $\quad \mathbf{R}(\theta)^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{I}$，因此为旋转矩阵。

◀

**Question 3 (11') (矩阵范数).**
a. 要证明运算 $\|\cdot\|_p$ 构成 $R^n$ 上的一个范数，即$L^p$ 范数，需要验证以下三个性质：
首先验证非负性：

对于任意的 $x \in R^n$，$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$。由于每一项都是非负的，所以整个求和也是非负的，然后开方也是非负的。因此，$\|x\|_p \geq 0$。

当且仅当所有的 $|x_i|^p$ 都为 0 时，$\|x\|_p = 0$。这意味着对于每一个 $i$，$|x_i|^p = 0$，从而 $|x_i| = 0$，因此 $x = 0$。

接下来验证齐次性：
对于任意的 $x \in R^n$ 和 $\alpha \in R$，

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |\alpha|^p |x_i|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(|\alpha|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \\
&= |\alpha| \|x\|_p
\end{aligned}$$

这证明了齐次性。
最后验证三角不等式：由Minkowski 不等式
对于任意的 $x, y \in R^n$， $\|x+y\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{1/p}$
因此，$\|\cdot\|_p$ 构成了 $R^n$ 上的一个范数，即$L^p$ 范数。

b.

i. $\|A\|_{i1} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$，当$p=1$；
$\|A\|_{i2} = \sigma_{max}(A)$，当$p=2$；
$\|A\|_{i\infty} = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$，当$p=\infty$；

ii. 要证明定义的运算构成了 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个范数，需要验证它满足范数的三个基本性质：非负性、齐次性和三角不等式。

非负性：对于任意矩阵 $A$，$\|A\|_{ip}$ 应该是非负的。显然，对于任何非零的向量 $x$，$\frac{\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \geq 0$，因此 $\|A\|_{ip} \geq 0$。当且仅当 $A = 0$ 时，$\|A\|_{ip} = 0$，因为只有当 $A = 0$ 时，对于任意非零向量 $x$，$\|Ax\| = 0$。

齐次性：对于任意标量 $\alpha$，矩阵 $A$，$\|\alpha A\|_{ip} = |\alpha|\|A\|_{ip}$。这个性质容易验证，因为标量乘法可以移至范数内部。

三角不等式：当 $p = 1$ 时，我们有：

$$\|A\|_{i1} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

这意味着矩阵 $A$ 的每一列的绝对值之和的最大值。同理，$\|B\|_{i1}$ 也表示矩阵 $B$ 的每一列的绝对值之和的最大值。由于绝对值的不等式性质，我们有：

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| + \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}|$$

因此：

$$\|A + B\|_{i1} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |(A + B)_{ij}| \leq \|A\|_{i1} + \|B\|_{i1}$$

这证明了 $p = 1$ 时的三角不等式。

当 $p = 2$ 时，我们有：

$$\|A\|_{i2} = \sigma_{\max}(A)$$

这表示矩阵 $A$ 的最大奇异值。同理，$\|B\|_{i2}$ 表示矩阵 $B$ 的最大奇异值。根据奇异值的性质，我们有：

$$\sigma_{\max}(A + B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B)$$

因此：

$$\|A + B\|_{i2} = \sigma_{\max}(A + B) \leq \|A\|_{i2} + \|B\|_{i2}$$

这证明了 $p = 2$ 时的三角不等式。

当 $p = \infty$ 时，我们有：

$$\|A\|_{i\infty} = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

这表示矩阵 $A$ 的每一行的绝对值之和的最大值。同理，$\|B\|_{i\infty}$ 表示矩阵 $B$ 的每一行的绝对值之和的最大值。由于绝对值的不等式性质，我们有：

$$\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$$

因此：

$$\|A + B\|_{i\infty} \leq \|A\|_{i\infty} + \|B\|_{i\infty}$$

这证明了 $p = \infty$ 时的三角不等式。

因此，针对 $p=1,2,\infty$，我们都证明了三角不等式成立。以上满足范数定义，得证。

c. $p=1$时 $\|\mathbf{A}\|_{s1}=\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}}\sigma_i$，当$p=2$时 $\|\mathbf{A}\|_{s2}=(\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}}\sigma_i^2)^{1/2}$。

d. 现在我们来证明 $p=2$ 的情况下，Schatten 范数与逐元素范数等价。这意味着对于任意矩阵 $A$，有：

$$\|A\|_{s2}=\|A\|_{e2}$$

首先，考虑矩阵的奇异值分解：

$$A=U\Sigma V^H$$

其中，$U$ 和 $V$ 分别是 $m\times m$ 和 $n\times n$ 的酉矩阵，且酉矩阵的Frobenius 范数为1, 范数$\Sigma$ 是一个对角矩阵，其对角线上的元素是 $A$ 的奇异值。
那么，$A$ 的 Frobenius 范数是：

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\|U\Sigma V^H\|_F=\|U\|_F\|\Sigma\|_F\|V^H\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2}$$

其中 $k=\min(m,n)$ 是 $A$ 的奇异值个数。
由于 Frobenius 范数是逐元素范数的特例，我们已经知道 $\|A\|_{e2}=\|A\|_F$。
而 Schatten 范数 $\|A\|_{s2}$ 是奇异值的平方和的平方根，即 $(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2)^{1/2}$，与 Frobenius 范数 $\|A\|_F$ 相同。
因此，$p=2$ 的情况下，Schatten 范数与逐元素范数是等价的, 得证。

◀

**Question 4 (16') (度量张量).**
为了在任意曲线坐标系中进行矢量微积分，我们定义任意局部坐标点 $(x^1,x^2,x^3)$ 处当局部坐标有微小的增量时，矢径 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与坐标的微分 $\mathrm{d}x^i(i=1,2,3)$ 之间的关系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i,$$

中的

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial x}{\partial x^i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial x^i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial x^i}\boldsymbol{k}\quad (i=1,2,3)$$

为协变基或者自然局部基矢量，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为笛卡尔坐标。
以球坐标为例，$(x^1,x^2,x^3)=(r,\theta,\phi)$，对应于笛卡尔坐标

$$(x,y,z)=(x^1\sin x^2\cos x^3,x^1\sin x^2\sin x^3,x^1\cos x^2).$$

a (4') 请给出球坐标下的协变基相对于笛卡尔坐标系的表达式。

a. 协变基向量在球坐标系下的表达式为：
$\boldsymbol{g}_1=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{r}\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{j}-\boldsymbol{r}\sin\theta\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{g}_3=-\boldsymbol{r}\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{j}$ 其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为笛卡尔坐标。

b. 所以，在球坐标系下，逆变基向量相对于笛卡尔坐标系的表达式为：
$g^1 = \sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$
$g^2 = \frac{1}{r}(\cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k})$
$g^3 = \frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})$

c. 我们需要计算矢径的长度的变化，即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。根据给定的关系 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i$，我们有：

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 &= (\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i)\cdot(\boldsymbol{g}_j\mathrm{d}x^j)\\ &= \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.\end{aligned}$$

$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = \mathrm{d}r^i\mathrm{d}r_i$ 中的 $\mathrm{d}r^i\mathrm{d}r_i$ 可以表示为：

$$\mathrm{d}r^i\mathrm{d}r_i = (\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^j})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

d. 两个矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 之间夹角的余弦可以表示为它们的点乘除以它们的长度的乘积：夹角的表达式为

$$\cos\psi = \frac{g_{ij}r_1^ir_2^j}{\sqrt{g_{ij}r_1^ir_1^j}\sqrt{g_{ij}r_2^ir_2^j}}.$$

◀

**Question 5 (10') (矩阵求导).**
a. 给定方程：

$$d\hat{r}\cdot d\hat{r} - dr\cdot dr = 2\epsilon_{ij}dx^idx^j$$

其中 $d\hat{r} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial x^i}dx^i$ 和 $dr = \frac{\partial r}{\partial x^i}dx^i$。
将它们代入方程，我们得到：

$$\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial x^i}dx^i\right)\cdot\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial x^j}dx^j\right) - \left(\frac{\partial r}{\partial x^i}dx^i\right)\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}dx^j\right) = 2\epsilon_{ij}dx^idx^j$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\hat{r}}{\partial x^j} - \frac{\partial r}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^j} = 2\epsilon_{ij}$$

这表明 $\epsilon_{ij}$ 是对称的，因为 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$。
b. $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1^*$,
$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}\big((\mathcal{J}_1^*)^2 - \mathcal{J}_2^*\big)$,
$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{6}(\mathcal{J}_1^*)^3 - \frac{1}{2}\mathcal{J}_1^*\mathcal{J}_2^* + \frac{1}{3}\mathcal{J}_3^*$,
c. $\mathcal{J}_1^* = \mathcal{J}_1$
$\mathcal{J}_2^* = (\mathcal{J}_1)^2 - 2\mathcal{J}_2$
$\mathcal{J}_3^* = (\mathcal{J}_1)^3 - 3\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 + 3\mathcal{J}_3$
d.应力张量 $\sigma$ 的矢量表达式为： $\sigma = a_0J_1^*I + a_1(\epsilon - \epsilon^T)$
弹性刚度张量 $C$ 的表达式为： $C = a_0I\otimes I + a_1(I - I^T)$
e. $\frac{d\sigma_{eq}}{d\sigma} = \frac{4(\sigma_{eq}-1)}{9\sigma_{eq}^3}$

◀

**Question 6 (18') (矢量恒等式证明).**

a.

向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 可以用 Levi-Civita 符号表示为 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$。

使用 Levi-Civita 符号表示 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$:

$$[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}]_i = \epsilon_{ilm} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_l c_m = \epsilon_{ilm} \epsilon_{ljk} a_j b_k c_m$$

因为

$\epsilon_{ilm}\epsilon_{ljk} = \delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj}$,

其中 $\delta_{ij}$ 是 Kronecker delta，它等于 1 当 $i = j$ 且等于 0 当 $i \neq j$。

将其代入上述表达式，我们得到：

$$[\epsilon_{ilm}\epsilon_{ljk} a_j b_k c_m] = (\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj}) a_j b_k c_m$$

这将化简为：

$$= a_i b_k c_k - a_k b_i c_k$$

因此命题成立。

b. 因为

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$$

然后，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 的叉乘可以表示为：

$$(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_i = \epsilon_{ilm} a_l (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_m$$

将 $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_m$ 替换为 Levi-Civita 符号的表达式，我们得到：

$$= \epsilon_{ilm} a_l (\epsilon_{mnk} b_n c_k)$$

接下来，使用 Levi-Civita 符号的乘积展开公式：

$$= (\delta_{in}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{ln}) a_l b_n c_k$$

因此得证

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

这个过程展示了如何使用 Levi-Civita 符号和向量代数的基本性质来证明向量叉乘的一个重要公式。

c.

d. 向量叉乘 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的第 $i$ 个分量可以用 Levi-Civita 符号 $\epsilon_{ijk}$ 表示为：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

同样地，$\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ 的第 $i$ 个分量是：

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{d})_i = \epsilon_{ilm} c_l d_m$$

接下来，我们利用点乘的定义，将 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ 表达为：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\epsilon_{ijk}a_jb_k)(\epsilon_{ilm}c_ld_m)$$

根据 Levi-Civita 符号的性质，$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$，其中 $\delta_{ij}$ 是 Kronecker delta。将 Levi-Civita 符号的性质代入上述表达式并简化，我们得到：

$$(\epsilon_{ijk}a_jb_k)(\epsilon_{ilm}c_ld_m) = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})a_jb_kc_ld_m$$

进一步展开并重新排列上述表达式，我们可以证明原始的等式。

◀

**Question 7 (9') (矢量对偶张量).**

a. 给定矢量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，对偶张量 $\Omega$ 是一个二阶反对称张量，可以表示为：

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

考虑任意矢量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$，我们有：

$$\boldsymbol{\Omega\cdot u} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3u_2 + \omega_2u_3 \\ \omega_3u_1 - \omega_1u_3 \\ -\omega_2u_1 + \omega_1u_2 \end{pmatrix}$$

使用叉乘的定义，我们可以计算 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$：

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u} = (\omega_2u_3 - \omega_3u_2, \omega_3u_1 - \omega_1u_3, \omega_1u_2 - \omega_2u_1)$$

得证。

b. 对于给定的向量 $\boldsymbol{\omega}$，与其对偶的二阶反对称张量 $\Omega$ 可以通过 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量来定义，即：

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega^k$$

这里 $\epsilon_{ijk}$ 是 Levi-Civita 符号，$\omega^k$ 是向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量。

根据反对称张量的性质，我们可以将 $\Omega$ 表达为与 $\boldsymbol{\omega}$ 相关的点乘形式。由于 $\epsilon_{ijk}$ 是反对称的，并且 $\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega^k$，这意味着 $\Omega$ 可以通过 $\epsilon_{ijk}$ 和 $\omega^k$ 的乘积来构建，反映了 $\boldsymbol{\omega}$ 与每个坐标轴的叉乘关系。因此，我们有：

$$\Omega = -\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

这里的负号是由叉乘的方向和 Levi-Civita 符号的性质决定的。

同时，由于 $\epsilon_{ijk}$ 和 $\omega^k$ 均为反对称，我们也可以写作：

$$\Omega = -\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$$

c. 如果矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，那么存在标量 $\lambda$ 使得 $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{\omega}$。

根据 a 有 $\Omega \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$。将 $\boldsymbol{v}$ 表达为 $\lambda\boldsymbol{\omega}$，我们得到：

$$\Omega \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\lambda\boldsymbol{\omega})$$

由于任何矢量与其自身的叉乘都是零向量，得到：

$$\Omega \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

◀