Homework #4

Due: 2024-5-14 00:00 | 1 Questions, 100 Pts

Name: JS

Question 1 (100') (插值). 假设采样点分布在$x_i = 0, 1, 2, \cdots$的整点上，x_i对应的采样值是y_i，试求三阶厄米插值（课件第16页）在Catmull-Rom样条假设（课件第17页）下的基函数，最终应该得到的是如课件第25页所示那样的函数图形。
提示：你可以先代入Catmull-Rom样条假设的条件将插值曲线$f(x)$写为仅包含采样值y_i而不包含m_i的形式，然后思考如果将这一关系转化为$f(x) = \sum B_i y_i$。注意最终得到的基函数是一个分段函数。 ◀

在给定的区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，三阶厄米插值多项式 $f(x)$ 可以表示为：

$$f(t) = h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)m_i(x_{i+1} - x_i) + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)m_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

其中 t 是归一化的参数，$t = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$。
三阶多项式基函数 $h_{jk}(t)$ 定义如下：
$h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$
$h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t$
$h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2$
$h_{11}(t) = t^3 - t^2$
在Catmull-Rom样条中，切线 m_i 由相邻点的函数值确定：

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}$$

$$m_{i+1} = \frac{y_{i+2} - y_i}{2}$$

将上述表达式替换到三阶厄米多项式中，得到：

$$f(t) = h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}(x_{i+1} - x_i) + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)\frac{y_{i+2} - y_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

因为$x_{i+1} - x_i = 1$
我们的目标是将 $f(t)$ 表达为 $f(x) = \sum_j B_j(x)y_j$ 的形式。我们需要展开 $f(t)$ 并整理系数：

$$f(t) = \left(h_{00}(t) - \frac{1}{2}h_{10}(t) + \frac{1}{2}h_{11}(t)\right)y_i + \left(\frac{1}{2}h_{10}(t) + h_{01}(t)\right)y_{i+1} + \frac{1}{2}h_{11}(t)y_{i+2} - \frac{1}{2}h_{10}(t)y_{i-1}$$

所以，我们得到每个 y_j 的基函数 $B_j(x)$ 如下：
- $B_{i-1}(x) = -\frac{1}{2}h_{10}(t)$
- $B_i(x) = h_{00}(t) - \frac{1}{2}h_{10}(t) + \frac{1}{2}h_{11}(t)$
- $B_{i+1}(x) = \frac{1}{2}h_{10}(t) + h_{01}(t)$
- $B_{i+2}(x) = \frac{1}{2}h_{11}(t)$

这些基函数定义了在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的插值行为，并且保证了插值函数的平滑连续性。基函数 $B_j(x)$ 是分段定义的，并且可以直接用于构造整个曲线。这些基函数也可以用来绘制函数图形，展示Catmull-Rom样条的形状。