Homework #5

Due: 2024-5-28 00:00 | 1 Questions, 100 Pts

Name: JS

Question 1 (100') (梳状函数). 如课件26-28页所示，梳状函数被定义为：

$$C_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

1. 试证明周期为T的梳状函数的傅里叶变换是周期为$\frac{2\pi}{T}$的梳状函数，即：

$$\mathcal{F}(C_T(t)) = \frac{1}{T} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega).$$

解：因为$C_T(t)$在积分区域内只在零点有值，其傅里叶级数为$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C_T(t) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}$，又因此有

$$C_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{i\frac{2n\pi}{T}t}$$

因为在计算积分时，只有当 $\omega = \frac{2\pi}{T}n$ 时，被积函数 $e^{i\omega t}$ 才不为零。对于每个频率 $\frac{2\pi}{T}n$，积分的结果是 $e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$ 乘以梳状函数在该频率处的值，即 $C_{\frac{2\pi}{T}}\left(\frac{2\pi}{T}n\right)$。将每个频率的贡献相加，得到$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$ ，因为$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$且$\mathcal{F}(f) = F(\omega)$，因此$\mathcal{F}(C_T(t)) = \frac{1}{T} C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$，得证。

2. 试证明任意函数$F(\omega)$卷积梳状函数$C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$等价于将$F(\omega)$每隔$\frac{2\pi}{T}$平移复制一份后再叠加。

考虑 $F(\omega)$ 和 $C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$ 的卷积：

$$(F * C_{\frac{2\pi}{T}})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega - \omega') d\omega'$$

将 $C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$ 的表达式代入上式：

$$(F * C_{\frac{2\pi}{T}})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega' - n\frac{2\pi}{T}) \right) d\omega'$$

根据狄拉克 δ 函数的筛选性质，上述积分仅在 $\omega' = \omega - n\frac{2\pi}{T}$ 时不为零，因此我们可以将积分表达式重写为：

$$(F * C_{\frac{2\pi}{T}})(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\frac{2\pi}{T})$$

这表明卷积操作实际上是将 $F(\omega)$ 每隔 $\frac{2\pi}{T}$ 进行平移复制，然后将所有的平移副本叠加起来。

因此，我们证明了任意函数 $F(\omega)$ 与梳状函数 $C_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$ 的卷积等价于将 $F(\omega)$ 每隔 $\frac{2\pi}{T}$ 平移复制一份后再叠加。

◀