Homework #7

Due: 2024-6-25 00:00 | 5 Questions, 100 Pts

Name: JS

Question 1 (42') (矢量微分恒等式).

(a) $\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \varphi(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\varphi)\mathbf{v}$
使用乘积法则，我们有

$$\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \nabla\left(\begin{pmatrix}\varphi v_x\\ \varphi v_y\\ \varphi v_z\end{pmatrix}\right).$$

分量为

$$\partial_i(\varphi v_j) = \varphi\partial_i v_j + v_j\partial_i\varphi.$$

所以

$$\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \varphi(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\varphi)\mathbf{v}.$$

(b) $\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$
我们首先计算标量场 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 的梯度：

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \nabla(u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z).$$

对每一项使用乘积法则：

$$\nabla(u_xv_x) = v_x\nabla u_x + u_x\nabla v_x,$$
$$\nabla(u_yv_y) = v_y\nabla u_y + u_y\nabla v_y,$$
$$\nabla(u_zv_z) = v_z\nabla u_z + u_z\nabla v_z.$$

将这些项加在一起：

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}.$$

(c) $(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})\times\mathbf{a} = [\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v}]\cdot\mathbf{a}$
使用矢量分析的恒等式，我们有

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})\times\mathbf{a} = (\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{a}.$$

同时我们知道

$$(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{a} = \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\mathbf{v}).$$

在这里，$\mathbf{a}$ 是常量矢量，所以 $\nabla\mathbf{a} = 0$，因此

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{a}) = \mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}.$$

(d) $\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u})$
从 (b) 项可以得出

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}).$$

我们知道

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}.$$

合并后得到结论。

(e) $\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v})$

使用矢量三重积公式和乘积法则，我们有

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}.$$

(f) 若 $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}=0$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}=0$，则 $\mathbf{u}$ 为调和函数，即 $\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}=0$

因为 $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}=0$，所以 $\mathbf{u}$ 是无旋场，因此存在标量势函数 φ 使得 $\mathbf{u}=\nabla\varphi$。而 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}=0$ 意味着

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = 0,$$

即 φ 是调和函数。因此 $\mathbf{u}$ 也是调和函数，满足

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} = 0.$$

◀

Question 2 (18') (亥姆霍兹分解).

a (9') 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，试证明必存在向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使得 $\mathbf{A}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$.

b (9') 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，试证明必存在标量势函数 ϕ 使得 $\mathbf{A}=\nabla\phi$.

(a) 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，试证明必存在向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使得 $\mathbf{A}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$

根据矢量分析中的亥姆霍兹分解定理（Helmholtz Decomposition Theorem），任何光滑的、衰减为零的矢量场 $\mathbf{A}$ 可以分解为旋度为零的部分和无散部分。具体来说，如果 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，则可以写成某个矢量势 $\boldsymbol{\psi}$ 的旋度形式，即

$$\mathbf{A} = \nabla\times\boldsymbol{\psi}.$$

我们将来证明这个结果。首先考虑一个矢量场 $\mathbf{A}$，并假设存在一个向量势 $\boldsymbol{\psi}$ 满足

$$\mathbf{A} = \nabla\times\boldsymbol{\psi}.$$

对于任何矢量场 $\mathbf{A}$ 和向量势 $\boldsymbol{\psi}$，我们有

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\psi}) = 0,$$

因为任何旋度的散度都为零。因此，如果 $\mathbf{A}$ 能写成某个向量势的旋度形式，那么它必然满足 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$。

另一方面，如果 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，则可以构造一个向量势 $\boldsymbol{\psi}$，使得 $\mathbf{A}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$。这在数学上是可以证明的，通过解如下的泊松方程（Poisson's equation）：

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = -\nabla\times\mathbf{A}.$$

因此，如果 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，那么必定存在一个向量势 $\boldsymbol{\psi}$，使得 $\mathbf{A}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$。
(b) 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，试证明必存在标量势函数 ϕ 使得 $\mathbf{A}=\nabla\phi$
根据矢量分析中的亥姆霍兹分解定理，任何光滑的、衰减为零的矢量场 $\mathbf{A}$ 可以分解为旋度为零的部分和无散部分。具体来说，如果 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，则可以写成某个标量势函数 ϕ 的梯度形式，即

$$\mathbf{A}=\nabla\phi.$$

我们将来证明这个结果。首先考虑一个矢量场 $\mathbf{A}$，并假设存在一个标量势 ϕ 满足

$$\mathbf{A}=\nabla\phi.$$

对于任何矢量场 $\mathbf{A}$ 和标量势 ϕ，我们有

$$\nabla\times(\nabla\phi)=0,$$

因为任何梯度的旋度都为零。因此，如果 $\mathbf{A}$ 能写成某个标量势的梯度形式，那么它必然满足 $\nabla\times\mathbf{A}=0$。
另一方面，如果 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，则可以构造一个标量势 ϕ，使得 $\mathbf{A}=\nabla\phi$。这在数学上是可以证明的，通过解如下的泊松方程：

$$\nabla^2\phi=-\nabla\cdot\mathbf{A}.$$

因此，如果 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，那么必定存在一个标量势 ϕ，使得 $\mathbf{A}=\nabla\phi$。

◀

Question 3 (15') (外积).

(a) 请验证对于任意的 $\alpha,\beta\in V^*$，满足 $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$
为了验证这个性质，我们利用外积的定义及其性质。设 $\alpha,\beta\in V^*$ 是 V^* 中的1-形式，我们需要证明

$$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha.$$

考虑外积的定义，根据外积的斜对称性：

$$(\alpha\wedge\beta)(v_1,v_2)=\alpha(v_1)\beta(v_2)-\alpha(v_2)\beta(v_1).$$

交换 α 和 β，我们有：

$$(\beta\wedge\alpha)(v_1,v_2)=\beta(v_1)\alpha(v_2)-\beta(v_2)\alpha(v_1).$$

注意到：

$$(\beta\wedge\alpha)(v_1,v_2)=\alpha(v_2)\beta(v_1)-\alpha(v_1)\beta(v_2)=-(\alpha(v_1)\beta(v_2)-\alpha(v_2)\beta(v_1)).$$

因此：

$$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha.$$

(b) 更一般地，对于 $\sigma\in\bigwedge^k V^*$，$\omega\in\bigwedge^l V^*$，满足 $\sigma\wedge\omega=(-1)^{kl}\omega\wedge\sigma$
我们将证明外积的这个性质通过归纳法和斜对称性。

设 $\sigma \in \bigwedge^k V^*$ 是一个 k-形式，$\omega \in \bigwedge^l V^*$ 是一个 l-形式。我们希望证明

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \sigma.$$

首先，对于 $k=1$ 和 $l=1$ 的情况，即 $\sigma = \alpha \in V^*$，$\omega = \beta \in V^*$，根据 (a) 的结论：

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha,$$

这即是

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{1 \cdot 1} \beta \wedge \alpha.$$

接下来，假设对于 k-形式和 l-形式已经成立，即对于 $\sigma \in \bigwedge^k V^*$，$\omega \in \bigwedge^l V^*$，满足

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \sigma.$$

现在考虑 $\sigma \in \bigwedge^{k+1} V^*$ 和 $\omega \in \bigwedge^l V^*$，设

$$\sigma = \alpha \wedge \tau,$$

其中 $\alpha \in V^*$ 是 1-形式，$\tau \in \bigwedge^k V^*$。
那么

$$\sigma \wedge \omega = (\alpha \wedge \tau) \wedge \omega = \alpha \wedge (\tau \wedge \omega).$$

根据归纳假设，我们有

$$\tau \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \tau.$$

因此

$$\sigma \wedge \omega = \alpha \wedge (\tau \wedge \omega) = \alpha \wedge ((-1)^{kl} \omega \wedge \tau).$$

利用外积的结合律和斜对称性，我们得到

$$\alpha \wedge ((-1)^{kl} \omega \wedge \tau) = (-1)^{kl} (\alpha \wedge \omega) \wedge \tau = (-1)^{kl} (-1)^l \omega \wedge (\alpha \wedge \tau).$$

因此，我们有

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{kl+l} \omega \wedge \sigma = (-1)^{(k+1)l} \omega \wedge \sigma.$$

这完成了归纳步骤，因此对于所有 k 和 l，我们有

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \sigma.$$

由于外积运算的定义，我们可以对 1-形式做外积来得到 k-形式。对于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$，可以得到 k-形式 $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)$ 为

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \alpha_1(\boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \alpha_k(\boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix}.$$

c (5') 选取 $(\mathbb{R}^4)^*$ 中的基底为 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}t$.对于 2-形式 $\alpha = u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$ 与 1-形式 $\beta = w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z$，计算 $\alpha \wedge \beta$ 与 $\alpha \wedge \alpha$.

我们需要计算2-形式 α 和1-形式 β 的外积 $\alpha \wedge \beta$ 和 $\alpha \wedge \alpha$。
首先给出形式的具体表达式：

$$\alpha = u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\,,$$

$$\beta = w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z\,.$$

(c1) 计算 $\alpha \wedge \beta$
我们需要计算

$$\alpha \wedge \beta = (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \wedge (w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z)\,.$$

展开这个表达式：

$$\alpha \wedge \beta = u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge (w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z) + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge (w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z) + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge (w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z).$$

每一项分别计算：

$$u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge w_2\,\mathrm{d}y = 0,$$

因为 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$。

$$u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge w_3\,\mathrm{d}z = u_{12}w_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,.$$

$$u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge w_2\,\mathrm{d}y = 0,$$

因为 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$。

$$u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge w_3\,\mathrm{d}z = u_{24}w_3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z\,.$$

$$u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge w_2\,\mathrm{d}y = u_{34}w_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y = -u_{34}w_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t\,.$$

$$u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge w_3\,\mathrm{d}z = 0,$$

因为 $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$。
将非零项加在一起：

$$\alpha \wedge \beta = u_{12}w_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + u_{24}w_3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z - u_{34}w_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t\,.$$

整理各项顺序，注意到 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$，我们得到：

$$\alpha \wedge \beta = u_{12}w_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + u_{24}w_3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + u_{34}w_2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\,.$$

进一步整理，我们得到：

$$\alpha \wedge \beta = u_{12}w_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (u_{24}w_3 + u_{34}w_2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\,.$$

(c2) 计算 $\alpha \wedge \alpha$
我们需要计算

$$\alpha \wedge \alpha = (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \wedge (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t)\,.$$

展开这个表达式：

$$\alpha \wedge \alpha = u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) + u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge (u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t) + u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge (u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t)$$
$$+u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge (u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t) + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge (u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t)$$
$$+u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge (u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge (u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t) + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge (u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t).$$

每一项分别计算：

$$u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0,$$

因为 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = 0$。

$$u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t = 0,$$

因为 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$。

$$u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t = u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\,.$$

$$u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0,$$

因为 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$。

$$u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t \wedge u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t = 0,$$

因为 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$。

$$u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge\ ddt \wedge u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t = 0,$$

因为 $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t = 0$。

$$u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\,.$$

$$u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t = 0,$$

因为 $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t = 0$。

$$u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \wedge u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t = 0,$$

因为 $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$。
将非零项加在一起：

$$\alpha \wedge \alpha = u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t - u_{12}u_{34}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t = 0.$$

所以

1. $\alpha \wedge \beta = u_{12}w_3 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (u_{24}w_3 + u_{34}w_2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$。
2. $\alpha \wedge \alpha = 0$。 ◀

Question 4 (9') (内积).
使用 Leibniz 规则与三维空间中对应的矢量形式，验证以下结论

a (4') $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

b (5') $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$.

(a) 验证 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
我们利用向量代数中的矢量恒等式来证明这个结论。
考虑向量三重积的恒等式：

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

这个恒等式是向量代数中的基本恒等式之一，称为矢量三重积公式。这可以通过以下方式来证明：
首先，我们使用向量 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 表示为：

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.$$

根据叉乘的定义，$\boldsymbol{d}$ 是垂直于 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的向量。
然后，考虑向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d}$，根据叉乘的几何意义，结果是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的向量。利用叉乘和点乘的分配律和交换律，我们有：

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

根据叉乘的分配律，我们有：

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

因此，我们证明了 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$。
(b) 验证 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$
我们使用叉乘和点乘的恒等式来证明这个结论。
考虑向量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$，我们需要证明

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}).$$

根据向量代数中的恒等式，两个向量的叉乘的点积可以表示为行列式的形式：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \det \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

计算行列式：

$$\det \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

因此，

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}).$$

◀

Question 5 (16') (外微分).
选取 $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为三维空间中的标量场，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为三维空间中的矢量场。请根据以上知识证明：

a (4') $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})$.

b (4') $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \boldsymbol{a} + f\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}$.

c (4') $\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{a} + f\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}$.

d (4') $\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{\nabla} g) = \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g$.

(a) 证明 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})$
利用题目中给出的外微分和内积的定义，我们来证明这个结论。
首先，我们知道，对于一个矢量场 $\boldsymbol{v}$：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \star \mathrm{d} \star \boldsymbol{v}^\flat \,.$$

考虑 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，可以写成2-形式：

$$\star(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^\flat = i_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} \det \,.$$

然后，我们有：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \det = \mathrm{d} \star (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^\flat \,.$$

利用Leibniz规则，我们有：

$$\star(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^\flat = (\star\boldsymbol{a}^\flat) \wedge \boldsymbol{b}^\flat - \boldsymbol{a}^\flat \wedge (\star\boldsymbol{b}^\flat).$$

所以：

$$\mathrm{d} \star (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^\flat = \mathrm{d}(\star\boldsymbol{a}^\flat) \wedge \boldsymbol{b}^\flat - \mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat \wedge (\star\boldsymbol{b}^\flat) \,.$$

利用Leibniz规则再展开：

$$\mathrm{d}(\star\boldsymbol{a}^\flat) \wedge \boldsymbol{b}^\flat = (\mathrm{d} \star \boldsymbol{a}^\flat) \wedge \boldsymbol{b}^\flat - (\star\boldsymbol{a}^\flat) \wedge (\mathrm{d}\boldsymbol{b}^\flat),$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat \wedge (\star\boldsymbol{b}^\flat) = (\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat) \wedge (\star\boldsymbol{b}^\flat) - \boldsymbol{a}^\flat \wedge (\mathrm{d} \star \boldsymbol{b}^\flat).$$

于是：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \det = (\mathrm{d} \star \boldsymbol{a}^\flat) \wedge \boldsymbol{b}^\flat - (\star\boldsymbol{a}^\flat) \wedge (\mathrm{d}\boldsymbol{b}^\flat) - (\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat) \wedge (\star\boldsymbol{b}^\flat) + \boldsymbol{a}^\flat \wedge (\mathrm{d} \star \boldsymbol{b}^\flat).$$

将这些项组合，我们得到：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \det = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a})^\flat \wedge \boldsymbol{b}^\flat - \boldsymbol{a}^\flat \wedge (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})^\flat.$$

取点积，我们有：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}).$$

(b) 证明 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \boldsymbol{a} + f\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}$
利用Leibniz规则和外微分的定义，我们有：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{a}) \det = \mathrm{d} \star (f\boldsymbol{a})^\flat = \mathrm{d}f(\star\boldsymbol{a}^\flat) \,.$$

利用Leibniz规则：

$$\mathrm{d}f(\star\boldsymbol{a}^\flat) = (\mathrm{d}f)\wedge(\star\boldsymbol{a}^\flat) + f\,\mathrm{d}(\star\boldsymbol{a}^\flat)\,.$$

所以：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})\,\det = (\mathrm{d}f)\wedge(\star\boldsymbol{a}^\flat) + f\,\mathrm{d}(\star\boldsymbol{a}^\flat)\,.$$

考虑到 $\mathrm{d}f = (\boldsymbol{\nabla}f)^\flat$ 和 $\mathrm{d}(\star\boldsymbol{a}^\flat) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\,\det$，我们得到：

$$(\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{a})\,\det + f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\,\det = (\boldsymbol{\nabla}\cdot f\boldsymbol{a})\,\det\,.$$

于是：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{a} + f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}.$$

(c) 证明 $\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{a} + f\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}$
利用Leibniz规则和外微分的定义，我们有：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})^\flat = \star\mathrm{d}(f\boldsymbol{a})^\flat = \star\,\mathrm{d}f\boldsymbol{a}^\flat\,.$$

利用Leibniz规则：

$$\mathrm{d}f\boldsymbol{a}^\flat = (\mathrm{d}f)\wedge\boldsymbol{a}^\flat + f\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat\,.$$

所以：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})^\flat = \star\Big((\mathrm{d}f)\wedge\boldsymbol{a}^\flat + f\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat\Big)\,.$$

考虑到 $\mathrm{d}f = (\boldsymbol{\nabla}f)^\flat$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}^\flat = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^\flat$，我们得到：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})^\flat = \star\Big((\boldsymbol{\nabla}f)^\flat\wedge\boldsymbol{a}^\flat + f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^\flat\Big)\,.$$

利用 $\star(\boldsymbol{\nabla}f)^\flat\wedge\boldsymbol{a}^\flat = (\boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{a})^\flat$ 和 $\star f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^\flat = f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^\flat$，我们得到：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})^\flat = (\boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{a})^\flat + f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^\flat.$$

因此：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{a} + f\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}.$$

(d) 证明 $\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{\nabla}g) = \boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{\nabla}g$
利用Leibniz规则和外微分的定义，我们有：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{\nabla}g)^\flat = \star\mathrm{d}(f\boldsymbol{\nabla}g)^\flat = \star\,\mathrm{d}f(\mathrm{d}g)\,.$$

利用Leibniz规则：

$$\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g = (\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}g + f\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}g\,.$$

注意到 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}g = 0$，所以：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{\nabla}g)^\flat = \star((\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}g)\,.$$

考虑到 $\mathrm{d}f = (\boldsymbol{\nabla}f)^\flat$ 和 $\mathrm{d}g = (\boldsymbol{\nabla}g)^\flat$，我们得到：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{\nabla}g)^\flat = \star\Big((\boldsymbol{\nabla}f)^\flat\wedge(\boldsymbol{\nabla}g)^\flat\Big)\,.$$

利用 $\star((\boldsymbol{\nabla} f)^\flat \wedge (\boldsymbol{\nabla} g)^\flat) = (\boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g)^\flat$，我们得到：

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{\nabla} g)^\flat = (\boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g)^\flat.$$

因此：

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{\nabla} g) = \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g.$$

◀