Homework #2

Due: 2024-4-30 00:00 | 4 Questions, 100 Pts

Name: JS

Question 1 (20') (欧拉角表示). 试证明内旋效果等价于颠倒顺序后的外旋效果（课件第29页）。具体地，试证明按照 $x-y'-z''$ 依次转动 α,β,γ 的内旋效果与按照 $z-y-x$ 依次转动 γ,β,α 的外旋效果等价。

证明：在内旋时$R_{y'}$等价于先将绕R_x旋转后的新坐标系旋转R_x^{-1}为基坐标系，然后再进行旋转，最后恢复为新坐标系即

$$R_{y'}=R_x^{-1}R_yR_x$$

同理可得$R_{z''}=(R_xR_{y'})^{-1}R_zR_xR_{y'}$，综上，我们有：

$$R_xR_{y'}R_{z''}=R_xR_x^{-1}R_yR_x(R_xR_{y'})^{-1}R_zR_xR_{y'}$$

$$=R_zR_yR_x$$

因此得证。

◀

Question 2 (20') (轴角表示、四元数表示). 试证明轴角表示下的相对旋转插值（课件第 37 页）与四元数表示的 Slerp 插值（课件第 52 页）等价。具体来说，你需要推导出两种插值方法在t时刻的旋转轴$\boldsymbol{u}_t$和旋转角度θ_t是相同的，从而得到二者的旋转矩阵$\mathbf{R}_t$相同。

证明：在轴角表示中，一个旋转可以表示为绕一个单位旋转轴$\mathbf{u}$旋转θ度。给定两个旋转$\mathbf{R}_0$和$\mathbf{R}_1$，它们的差异可以通过旋转$\Delta\mathbf{R}=\mathbf{R}_1\mathbf{R}_0^T$来表示，然后将$\Delta\mathbf{R}$转换为轴角表示$(\mathbf{u},\Delta\theta)$。通过固定旋转轴$\mathbf{u}$，可以通过对旋转角度$\Delta\theta$进行线性插值来实现旋转的插值，即：

$$\theta_t=t(\Delta\theta)$$

四元数是一种表示空间旋转的方法，它避免了万向锁问题并且可以很方便地用于插值。对于两个旋转四元数q_1和q_0，它们之间的Slerp插值定义为：

$$q_t=\frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta}q_0+\frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta}q_1$$

$$q_t=(\frac{1}{2}\cos t\theta,\frac{1}{2}\sin t\theta\mathbf{u})$$

其中，θ是q_1和q_2之间的夹角，可以通过它们的点积计算得到。

可知轴角和四元数的插值过程中的旋转角度都是$t\theta$, 并且轴角表示中的旋转轴$\mathbf{u}$直接转换为四元数表示时，成为四元数旋转部分的方向，而Slerp插值保持两个四元数旋转部分方向的一致性。因此，插值过程中旋转轴不变。

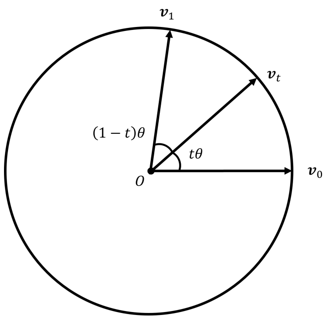
综上得证.

◀

Question 3 (20') (四元数表示). 试证明四元数的Slerp公式（课件第52页）。具体地，已知如下图所示，四元数 v_0 与 v_1 的夹角为 θ，我们希望用 v_0 和 v_1 线性插值出四元数 v_t，即：

$$v_t = \alpha v_0 + \beta v_1$$

使得 v_0 与 v_t 的夹角为 $t\theta$，请证明 $\alpha = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}, \beta = \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$。



证明：对$v_t = \alpha v_0 + \beta v_1$两边同时乘以$v_0$得到$v_0 \cdot v_1 = \alpha v_0 \cdot v_0 + \beta v_0 \cdot v_1$，对该式两边同取cos 可得

$$\cos(t\theta) = \alpha + \beta\cos\theta$$

对$v_t = \alpha v_0 + \beta v_1$两边同时乘以$v_1$同理可得

$$\cos((1-t)\theta) = \alpha\cos\theta + \beta$$

为了求解α 和 β, 从第一个式子

$$\alpha = \cos(t\theta) - \beta\cos\theta$$

将 α 带入第二个式子:

$$\cos((1-t)\theta) = (\cos(t\theta) - \beta\cos\theta)\cos\theta + \beta$$

化简求 β, 得到:

$$\beta = \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$$

将 β 带回求 α, 得到:

$$\alpha = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}$$

◀