Universidad de Valladolid

Escuela Técnica Superior
de Ingenieros de Telecomunicación

Tema 3:
Realce - Filtros de Difusión

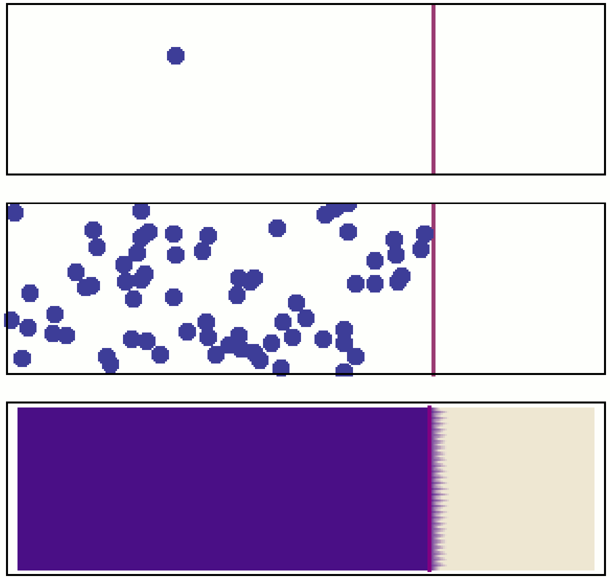
Tratamiento Discreto de Señales I

Ecuación de Difusión

- Los procesos de difusión son procesos físicos en los que se equilibran las diferencias de concentración de una especie medible (calor, masa, intensidad de una imagen…) sin crear o destruir dicha especie.
- Este equilibrio se puede describir a través de la primera ley de Fick:

$$F = -D\nabla u$$

- Donde F es el flujo que compensa la variación de la especie u, y D es el llamado “Tensor de Difusión”.
- D es una matriz definida positiva que, según sus valores puede definir varios tipos de difusión:
  - 1.- Difusión isótropa
  - 2.- Difusión anisótropa



Ecuación de Difusión

- La observación de que la difusión no crea especie sino que sólo la transforma se puede describir a través de la ecuación de continuidad (segunda ley de Fick):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -divF$$

- Cuando hay mucha concentración de especie en un lugar y poca en otro, el flujo apunta en la dirección donde menos especie hay.

- Cuanto mayor sea la variación espacial del flujo, más especie se desplaza en la dirección en la que compensa el flujo.

Ecuación de Difusión

- Si relacionamos la primera y la segunda ley de Fick obtenemos llamada ecuación de difusión o ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(D\nabla u)$$

- Esta ecuación aparece en fenómenos físicos como la difusión del calor.

- En el contexto de imagen, podemos entender la “especie” como los niveles de intensidad de la imagen y podemos hacer que se difundan siguiendo este modelo físico para nuestro propósito.

Ecuación de Difusión no homogénea

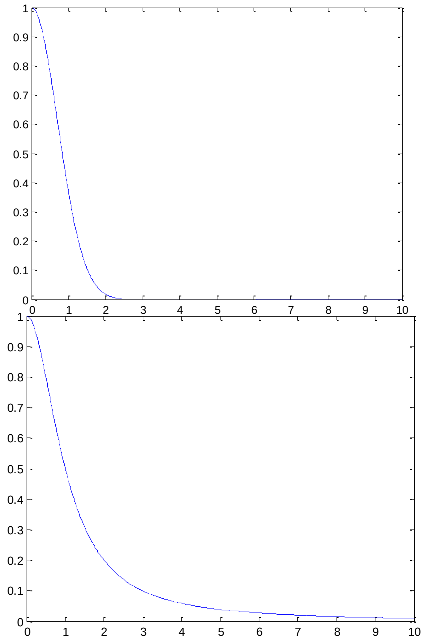
- Cuando hablamos de un coeficiente de difusión c(x,y) que varía con la posición, nos referimos a una ecuación de difusión no homogénea.

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = div(c(x,y,t)\nabla u(x,y,t))$$

- En el capo de imagen médica se suele emplear una función relacionada con el módulo del gradiente $c(x,y) = f(\|\nabla u(x,y)\|)$

$$c(x,y,t) = \exp(-(\|\nabla u(x,y,t)\|/K)^2)$$

$$c(x,y,t) = \frac{1}{1+(\|\nabla u(x,y,t)/K\|)^2}$$



Filtro de Perona-Malik

- Podemos desarrollar la ecuación de difusión no homogénea:

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = div(c(x,y,t)\nabla I(x,y,t)) =$$

$$\nabla c(x,y,t)\nabla I(x,y,t) + c(x,y,t)\Delta I(x,y,t)$$

- ¿Cómo lo implementamos? → Discretizar Ecuación Diferencial

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} \approx \frac{I(x,y,t+\Delta t) - I(x,y,t)}{\Delta t}$$

Filtro de Perona-Malik

- ¿Cómo implementamos esto? → Discretizar Ecuación Diferencial

$$I(x,y,t+\Delta t) \approx I(x,y,t) + \Delta t \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t}$$
$$\approx I_t + \Delta t(\Phi_E - \Phi_W + \Phi_N - \Phi_S)$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\Delta x^2}\left[c(x+\frac{\Delta x}{2},y,t)(I(x+\Delta x,y,t) - I(x,y,t))\right]$$
$$\Phi_W = \frac{1}{\Delta x^2}\left[c(x-\frac{\Delta x}{2},y,t)(I(x,y,t) - I(x-\Delta x,y,t))\right]$$
$$\Phi_N = \frac{1}{\Delta y^2}\left[c(x,y+\frac{\Delta y}{2},t)(I(x,y+\Delta y,t) - I(x,y,t))\right]$$
$$\Phi_S = \frac{1}{\Delta y^2}\left[c(x,y-\frac{\Delta y}{2},t)(I(x,y,t) - I(x,y-\Delta y,t))\right]$$

Filtro de Perona-Malik

- Como c(x,y,t) es una función del gradiente, debemos calcular la versión discreta del mismo:

P1	P2	P3
P4	**P5**	P6
P7	P8	P9

$$\|\nabla I(x+\frac{\Delta x}{2},y)\| = \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}(P_6-P_5)^2+\frac{1}{\Delta y^2}(\frac{P_9-P_3}{2})^2}$$

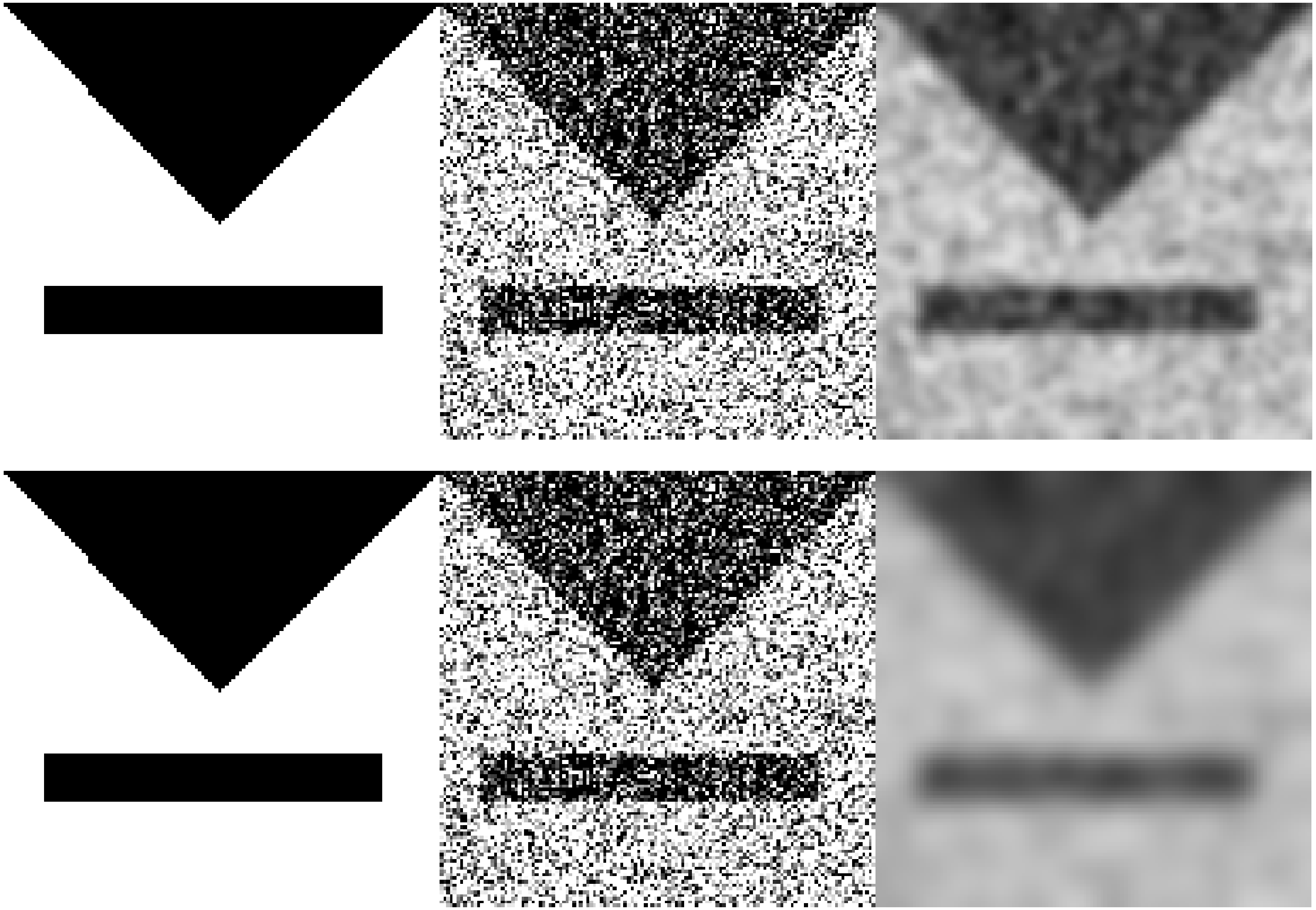
$$\|\nabla I(x-\frac{\Delta x}{2},y)\| = \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}(P_5-P_4)^2+\frac{1}{\Delta y^2}(\frac{P_7-P_1}{2})^2}$$

$$\|\nabla I(x,y+\frac{\Delta y}{2})\| = \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}(\frac{P_9-P_7}{2})^2+\frac{1}{\Delta y^2}(P_8-P_5)^2}$$

$$\|\nabla I(x,y-\frac{\Delta y}{2})\| = \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}(\frac{P_3-P_1}{2})^2+\frac{1}{\Delta y^2}(P_5-P_2)^2}$$

Filtro de Perona-Malik

- Ejemplo:



Filtro de difusión anisótropa

- ¿Qué pasa cuando el coeficiente de difusión es una matriz?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(D\nabla u)$$

- El tensor de difusión describe la difusividad de la especie en cada dirección.
- En imagen se suele determinar el tensor de difusión dependiente de la propia imagen, como se hace con el coeficiente de difusión.

- ¿Cómo? →**Tensor de Estructura**:

$$T = (\nabla I)(\nabla I)^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial x}\frac{\partial I}{\partial y} \\ \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial y}\frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

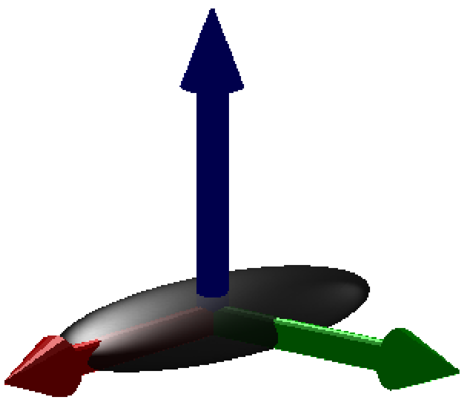
Filtro de difusión anisótropa

- Interpretación del tensor de estructura

$$T = \Sigma D \Sigma^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Elliptical Representation of Structure Tensor



- El máximo autovalor está asociado al autovector en la dirección del máximo gradiente.

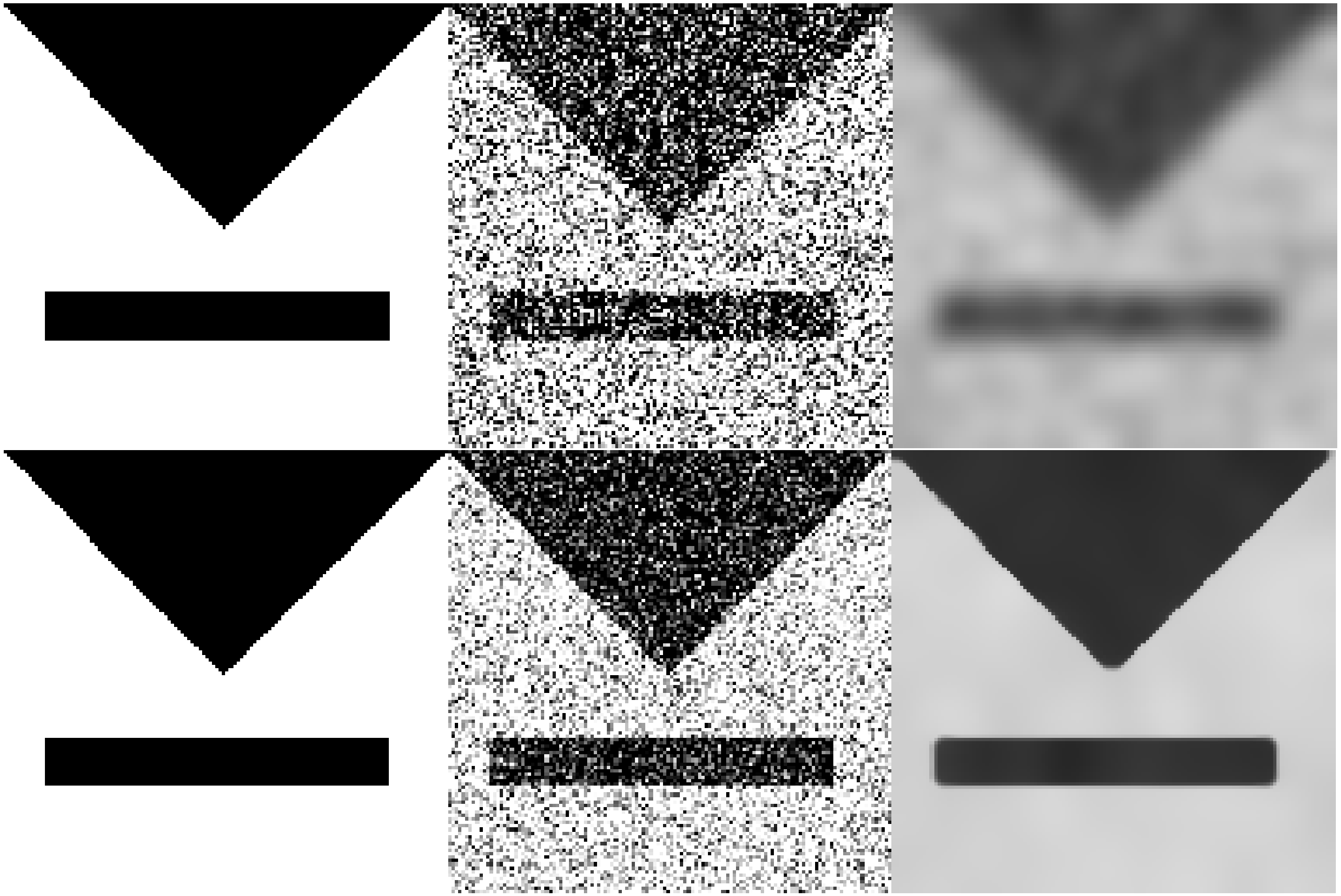
- Existen Varias opciones:

$\lambda_1 >> \lambda_2$ Dirección predominante

$\lambda_1 \approx \lambda_2$ No hay dirección predominante

Filtro de difusión anisótropa

- Podemos orientar la difusión en la dirección indicada por el tensor de difusión. Donde los autovalores se pueden escoger teniendo en cuenta estimaciones del ruido de la imagen u otras características.



Filtro de difusión anisótropa

- Problemas de los filtros anisótropos:
  - Según la implementación pueden ser inestables (implementar con precaución).
  - Introducen un sesgo en el filtrado.
  - Hay que definir muy bien las zonas donde no se ha de filtrar. Los coeficientes de difusión en cada dirección han de estar bien definidos.
  - Se debe prevenir la antidifusión (la matriz de difusión ha de ser necesariamente definida positiva).

¿IDEAS PARA MEJORARLOS?