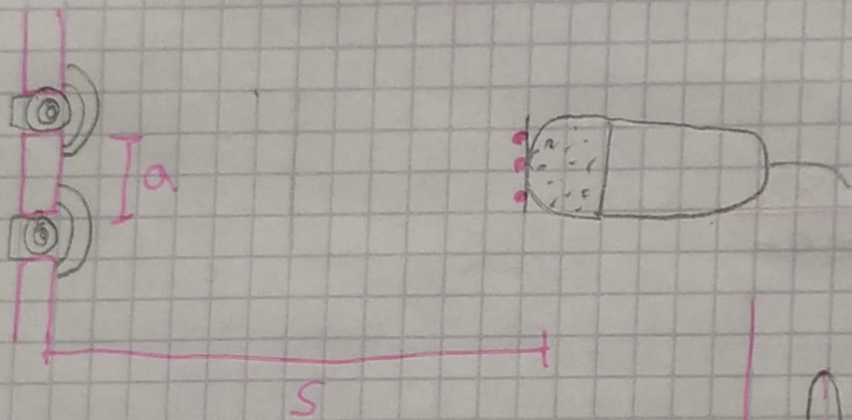
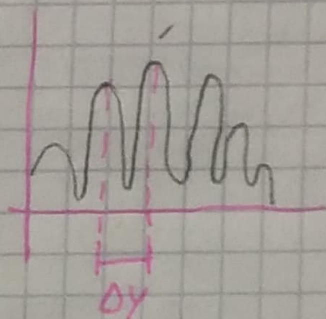
Punto 1

por la forma como se distribuyen los altavoces, podemos aproximar el sistema a uno de difraccion por doble rendija de la siguiente forma:





y sabemos que para estos casos:

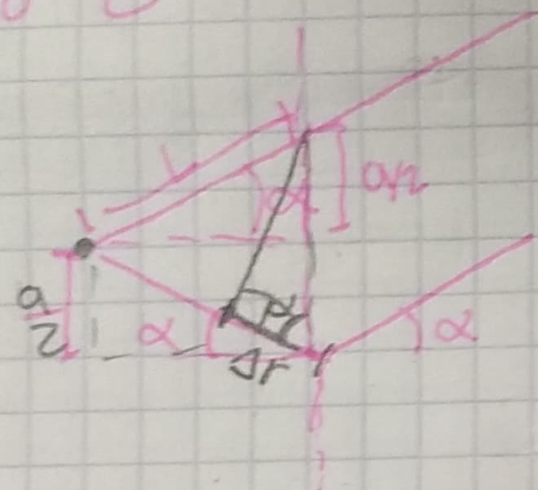
$$\Delta y \approx \frac{S}{a}\lambda \Rightarrow \lambda \approx \frac{a\Delta y}{S} \approx \frac{0{,}15 \cdot 0{,}15\ m^2}{1{,}5\ m} = 0{,}015\ m$$

y para una onda de sonido

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 m}{0{,}015 m s} = 22866\ Hz = \underline{\underline{22{,}9\ kHz}}.$$

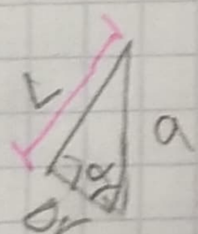
Como dijimos, la situacion se asemeja a la de difraccion de una onda por una doble rendija, esto causa que, dependiendo de la longitud de onda, la distancia entre rendijas y la distancia hasta el punto de medicion, en este caso, las condiciones permitieron la existencia de interferencia destructiva en el centro que llevo la intensidad a casi 0.

Punto 2



$$\Delta r = \frac{\lambda \delta}{2\pi}$$

$$\frac{2\pi \Delta r}{\lambda} = \delta = \frac{2\pi a \cos\alpha}{\lambda}$$



$$\frac{\Delta r}{a} = \cos\alpha \qquad \Delta r = a\cos\alpha$$

$$\frac{L}{a} = \sin\alpha$$

m=1

$$m = L\sin\alpha \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{L}\right) \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{L}\right)$$

Punto 3

a) Sabemos que las condiciones de frontera deben cumplir que, en la interfase:

$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$ $\qquad$ $B_{1\parallel} = B_{2\parallel}$

primero asumamos que el campo electrico esta sobre el plano de incidencia.

el campo electrico que debe ser perpendicular tanto a E como a la direccion del desplazamiento, debe ser de la forma

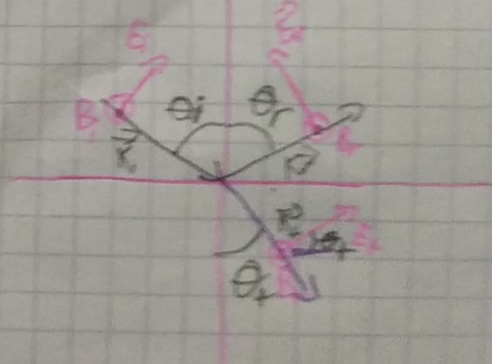
$B_1 = B_i + B_r$ con B_i y B_r los campos de las ondas que

Asi mismo el campo electrico total paralelo a la interfase es $E_1^{\parallel} = E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r$

Siendo asi la

a) $B_i + B_r = B_t$

b) $E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t$



Ademas sabemos que

$B = EV = nE/C$

Por lo que podemos escribir a como

a) $\frac{n_1}{c}(E_i + E_r) = \frac{n_2}{c} E_t$ y como por ley de reflexion $\theta_i = \theta_r$

$\Rightarrow (E_i - E_r)\cos\theta_i = E_t \cos\theta_t$ $\wedge$ $(E_i + E_r) n_1 = E_t n_2$

e igualando E_t llegamos a que:

$$(E_i - E_r)\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = (E_i + E_r)\frac{n_1}{n_2}$$

$$E_i\left(\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} - \frac{n_1}{n_2}\right) = E_r\left(\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} + \frac{n_1}{n_2}\right)$$

y como buscamos la razon entre E_r/E_i despejamos

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} - \frac{n_1}{n_2}}{\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} + \frac{n_1}{n_2}} = \boxed{\frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_t} = \frac{E_r}{E_i}} \quad d)$$

y desde aqui podemos hallar facilmente que

$$\boxed{r_{\parallel} = \left.\frac{E_r}{E_i}\right|_{\parallel} = \frac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}}$$

$$n_i\sin\theta_i = n_t\sin\theta_t$$

$$\boxed{t_{\parallel} = \left.\frac{E_t}{E_i}\right|_{\parallel} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}}$$

para el caso donde el campo electrico es perpendicular al plano de incidencia, obtenemos una expresion muy similar:

e) $E_i + E_r = E_t$

f) $B_r\cos\theta_r - B_i\cos\theta_i = -B_t\cos\theta_t$

y similarmente a lo hecho anteriormente obtenemos que

$$r_{\perp} = \left.\frac{E_r}{E_i}\right|_{\perp} = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_t + n_i\cos\theta_i} \quad y \quad t_{\perp} = \left.\frac{E_t}{E_i}\right|_{\perp} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_t + n_i\cos\theta_i}$$

así, finalmente obtenemos que:

1) $r_\perp = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_t + n_i\cos\theta_i}$

2) $t_\perp = \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_t + n_i\cos\theta_i}$

3) $r_\parallel = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\parallel = \frac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$

4) $t_\parallel = \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\parallel = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$

estas ecuaciones se pueden simplificar usando la ley de Snell, que nos dice que:

5) $n_i\sin\theta_i = n_t\sin\theta_t$

así para la ecuación 1 tenemos:

$$\frac{(n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t)\frac{\sin\theta_t}{n_i}}{(n_t\cos\theta_t + n_i\cos\theta_i)\frac{\sin\theta_t}{n_i}} = \frac{\frac{n_i\cos\theta_i\sin\theta_t}{n_i} - \frac{n_i\sin\theta_i\cos\theta_t\sin\theta_t}{n_i\sin\theta_t}}{\frac{n_i\sin\theta_i\cos\theta_t\sin\theta_t}{n_i\sin\theta_t} + \frac{n_i\cos\theta_i\sin\theta_t}{n_i}}$$

$n_t = \frac{n_i\sin\theta_i}{\sin\theta_t}$

$$= \frac{-(\cos\theta_i\sin\theta_t + \sin\theta_i\cos\theta_t)}{\sin\theta_i\cos\theta_t + \cos\theta_i\sin\theta_t} = \frac{-\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = r_\perp$$

Ahora para la ecuacino 2

$$\frac{\frac{2\cancel{n_i}\cos\theta_i \cdot \sin\theta_t}{\cancel{n_i}}}{\left(\frac{n_t\cos\theta_t}{n_i} + \frac{\cancel{n_i}\cos\theta_i}{\cancel{n_i}}\right)\sin\theta_t} = \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\frac{\cancel{\sin\theta_t}\,\cancel{n_i}\sin\theta_i\cos\theta_t}{\cancel{\sin\theta_t}\,\cancel{n_i}} + \cos\theta_i\sin\theta_t}$$

$$= \frac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = t_\perp$$

Punto 4

Para una onda electromagnetica en un medio, se deben cumplir las ecuaciones de maxwell, en particular:

1) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 2) $\nabla \times B = \mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$

3) $\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla(\rho/\epsilon)$ 4) $\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \mu\left(\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E}{\partial t}\right)}_{\text{Derivacion matematica}}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\mu\left(\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t}\right) = -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \rho \epsilon = \nabla \times \nabla \times E$$

4 3

· A su vez, por propiedades matematicas sabemos que:

5) $\nabla \times (\nabla \times) = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \nabla \cdot E - \nabla^2 E = \mu\left(\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E}{\partial t}\right) - \nabla^2 E$$

5 4

0

$$\Rightarrow \nabla \rho \epsilon = \mu\left(\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E}{\partial t}\right) - \nabla^2 E$$

Para un material sin carga neta

$$\Rightarrow \nabla^2 E - \mu\left(\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0$$

$$\mu\left(\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\nabla^2 E$$ Para un campo E que dependa solo de una componente espacia y una temporal $(E(x,t))$

$$\mu\left(\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t}+\sigma\frac{\partial E}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\Rightarrow \frac{\partial E^2}{\partial x^2}-\mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \quad (6)$$

proponemos una solucion, a la ecuacion de la forma:

$\vec{E}_{(x,t)}=\vec{E}_0 e^{i(kx-wt)}$, Remplazando en la ecuacion (6) obtenemos

$$E_0\frac{\partial}{\partial x}\left(ki e^{i(kx-wt)}\right)-E_0\mu\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-wie^{i(kx-wt)}\right)-\sigma wie^{i(kx-wt)}\right)=0$$

$$\Rightarrow k^2 i^2 \cancel{e^{i(kx-wt)}}-\mu\left(\epsilon w^2 i^2\cancel{e^{i(kx-wt)}}-\sigma wi\cancel{e^{i(kx-wt)}}\right)=0$$

$$\Rightarrow -k^2+\mu\epsilon w^2+\mu\sigma wi=0\Rightarrow k^2=\mu w(w\epsilon+\sigma i)$$

$$\Rightarrow k=\pm\sqrt{\mu w}\sqrt{w\epsilon+\sigma i}=\pm(\alpha+\beta i)$$

$$\Rightarrow k^2=(\mu w)(w\epsilon+\sigma i)=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2=\mu w^2\epsilon+\mu w\sigma i$$

$$\Rightarrow \beta^2-\alpha^2=\mu w^2\epsilon \quad a)$$

$$2\alpha\beta=\mu w\sigma \quad b) \qquad (S1)$$

$$(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2\beta^2-4\alpha^2\alpha^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$$

$$\Rightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2=(\mu w^2\epsilon)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2\Rightarrow\beta^2=\sqrt{(\mu w^2\epsilon)^2+4\alpha^2\beta^2}-\alpha^2$$

ahora usando la ecuacion b) de (S1) obtenemos que

$$\beta^2=\sqrt{(\mu w^2\epsilon)^2+(\mu w\sigma)^2}-\underset{b)}{\beta^2}+\mu w^2\epsilon=\mu w\sqrt{(w\epsilon)^2+\sigma^2}+\mu w^2\epsilon-\beta^2$$

$$\Rightarrow 2\beta^2 = \mu\omega\left(\sqrt{(\omega\epsilon)^2+\sigma^2} + \omega\epsilon\right) = \omega^2\mu\epsilon\left(\sqrt{\frac{(\omega\epsilon)^2+\sigma^2}{(\omega\epsilon)^2}} + 1\right)$$

$$= \omega^2\mu\epsilon\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega\epsilon^2}} + 1\right) = 2\beta^2$$

$$\Rightarrow \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1\right)}$$

Sean $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon' + i\epsilon'' \Rightarrow \epsilon' = \epsilon \wedge \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$

$$\Rightarrow \underbrace{\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1\right]}}_{}$$ $\beta//_2$

Similarmente, regresando un par de pasos tenemos que:

$\beta^2 = \sqrt{\mu\omega^2\epsilon^2 + (\mu\omega\sigma)^2} - \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \sqrt{\mu\omega^2\epsilon^2 + \mu\omega\sigma^2} + \beta^2$

Vemos que ambas ecuaciones difieren en un signo pero la forma es la misma, por lo que si resolvemos para $(-\beta^2)$ obtenemos

$\alpha^2 = \sqrt{\mu\omega^2\epsilon^2 + \mu\omega\sigma^2} - (-\beta^2)$ que tiene la misma forma que la expresion para β^2, Por tanto el resultado debe ser de la forma

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + (-1)\right]} = \underline{\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1\right]} = \alpha}$$

b)

Penetración $= \frac{1}{\alpha}$

Para metales con $\sigma > 200$, tenemos que

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \Rightarrow \text{Penetración} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{10^{10}}{s}\, 2\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{kg\, m\, A}{s^2 A^2 V m}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, s}{89 \cdot 10^{8}\, \pi \sqrt{kg/sAV}} = \frac{5\cdot 10^{-10}\, s}{\sqrt{kg/s\,C/s\,V}} = 5\cdot 10^{-10}\, s \sqrt{\frac{C\, kg\, m^2}{kg\, s^3 A}} = 5\cdot 10^{-10}\, s \sqrt{\frac{C\, m^2}{s^2\, C\, s}}$$

$$= \frac{5\cdot 10^{-10}\, s\, m}{s} = \underline{\underline{5\cdot 10^{-10}\, m}}$$