clase pasada → Modelos continuos

↳ Ec. Diferencial → Analítica / → Numérica

Numérica ↓ Analizar numéricamente

→ * Campo de Velocidades * (diagrama de fase)

→ solución numérica

¿ puntos críticos ?

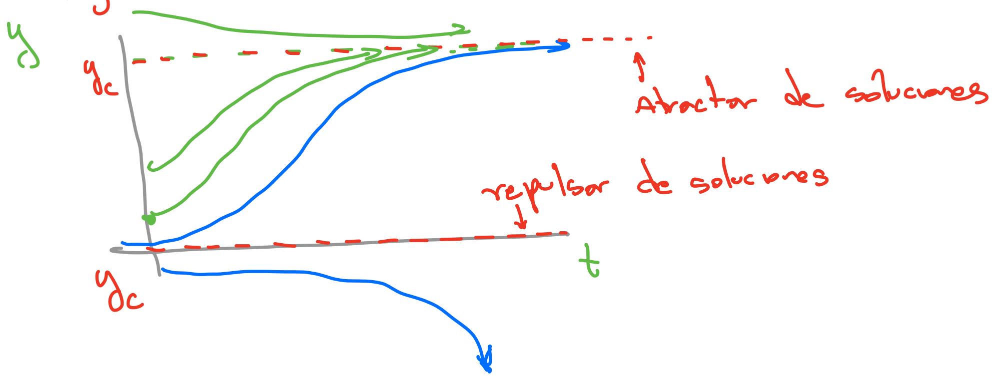
$$\underbrace{\frac{dy}{dt} = F(y,t)}_{\text{modelo continuo}} \longrightarrow$$

pto crítico

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y_c = f(t)}}$$

donde la solución no cambia

modelo logístico



¿Atractor? ¿repulsor?

¿ Como saber la naturaleza de un punto crítico de un modelo ?

↓ (Respuesta: encontrar ↓)

Campo de Velocidades . diagrama de fase.

Ejemplo : Encuentre los puntos criticos y su naturaleza, del siguiente
(Lotka-Volterra) modelo de depredador - presa que describe la
~1700 dinamica de dos poblaciones que interactuan entre si.

Modelo acoplado (2x2)

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \overbrace{\alpha P}^{\text{presas sin interacción}} - \beta \underbrace{PD}_{\text{Interacción}} \\[2em] \dfrac{dD}{dt} = -\gamma D + \delta PD \end{cases}$$

Donde
- t es el tiempo
- P es la poblacion de ciertas presas (conejos)
- D " " " " depredadores (Lobos)

parametros →

- α : Tasa de creciento de presas
- β : Tasa de muertes de presas por depredador
- γ : Tasa de crecimiento de depredadores
- δ : Tasa de crecimiento de depredadores en funcion de las presas.

Sol

1) puntos criticos : $\Rightarrow$ $\dfrac{dP}{dt} = 0$ y $\dfrac{dD}{dt} = 0$

Trato a P y D como variables! → $\alpha P - \beta PD = 0$ $\qquad$ $-\gamma D + \delta PD = 0$

$P(\alpha - \beta D) = 0$ $\qquad$ $D(-\gamma + \delta P) = 0$

$P = 0$ $\qquad$ $D = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $\qquad$ $D = 0$ $\qquad$ $P = \dfrac{\gamma}{\delta}$

Puntos críticos

"parejas posibles"

$\cdot\ (\underset{P}{\_\_}, \underset{D}{\_\_})\ \cdot$ $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{c} P \quad D \\ (0, 0) \checkmark \\ \left(0, \frac{\alpha}{\beta}\right) \times \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right) \times \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \checkmark \end{array} \Bigg\} \text{ 4 posibles puntos críticos ?}$$

↓ probemos que sí son puntos críticos

Test

$P(\alpha - \beta D) = 0 \qquad D(-\gamma + \beta P) = 0$

$\underset{P\ D}{(0,0)}$:

$$\underbrace{0(\alpha - \beta 0)}_{0} = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$$

$$\underbrace{0(-\gamma + \beta 0)}_{0} = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$$

$\left(0, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

$$0\left(\alpha - \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\left(-\gamma + \underbrace{\beta 0}_{0}\right) = 0 \qquad \frac{\alpha(-\gamma)}{\beta} \neq 0$$

$\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$: ---> ejercicio : NO

$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

$$\underset{P}{\frac{\gamma}{\delta}}\left(\underbrace{\alpha - \beta\left(\underset{D}{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}_{0}\right) = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\left(\underbrace{-\gamma + \beta\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)}_{0}\right) = 0 \qquad 0 = 0 \checkmark$$

Conclusión

$$\left.\begin{array}{c} (0,0) \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \end{array}\right\} \text{ puntos críticos !}$$

2) ¿Son los punt. críticos atractores o repulsores?

↓

Usar el campo de velocidades

Idea clave

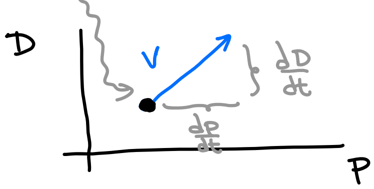
1) Definir un vector de cambio (velocidad) que de cuenta de los cambios de las cantidades del sistema

2) En cada punto del dominio del sistema evaluar el vector velocidad $\Longrightarrow$ Así se construye un campo.

sol

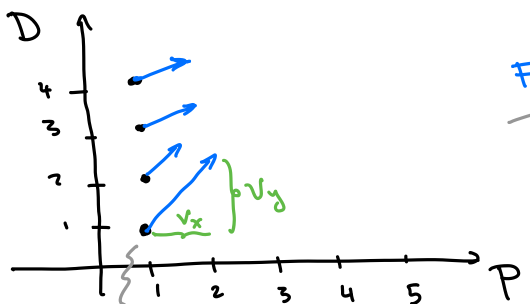
1) Definamos el vector de cambio como

posiciones $(P, D) \longrightarrow$ $\boxed{V = \left(\frac{dP}{dt}, \frac{dD}{dt}\right)}$

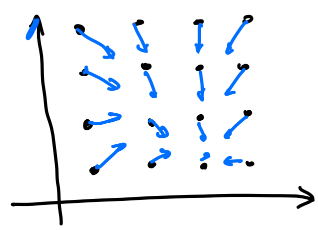


nos dirá hacia donde se mueve el punto que describe las dos poblaciones

2) El campo de velocidades se define como la evaluación del vector velocidad en todos los posibles puntos que toman las variables del modelo



Finalmente



$$V = \left(\frac{dP}{dt}, \frac{dD}{dt}\right)\Bigg|_{(1,1)} = \left(P\alpha - \beta P D, -\gamma D + \delta P D\right)$$

$$= \left((1)\alpha - \beta(1)(1), -\gamma(1) + \delta(1)(1)\right)$$

$$= (\underbrace{V_x}, \underbrace{V_y})$$

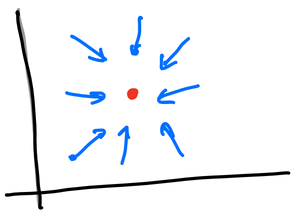
números!

Comentario

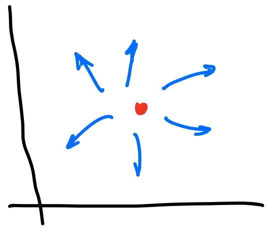
Al final despues de hacer el campo de velocidades se obtendria que:

a) los ptos criticos que atraen las flechas seran atractores de soluciones

b) " " " repelen " " " repulsores



atractores



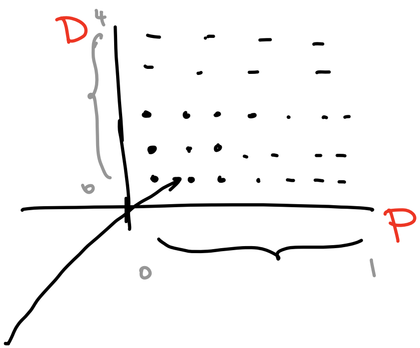
repulsores

Programa

$P = (0, 0.1, 0.2, \ldots, 1)$

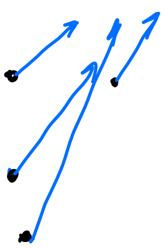
$D = (0, 0.2, \ldots, 4)$

$\rightarrow P \times D = \{ (0,0), (0,0.2) \ldots$



meshgrid

Aclaracion



$$v = (v_x, v_y) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{v_x}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_y}{\|\vec{v}\|} \right) \checkmark$$