Clase pasada : Regresion lineal

Clase de hoy : Interpolacion → Lagrange ✓ → La de este curso!

→ splines ✓

→ Neville ✓

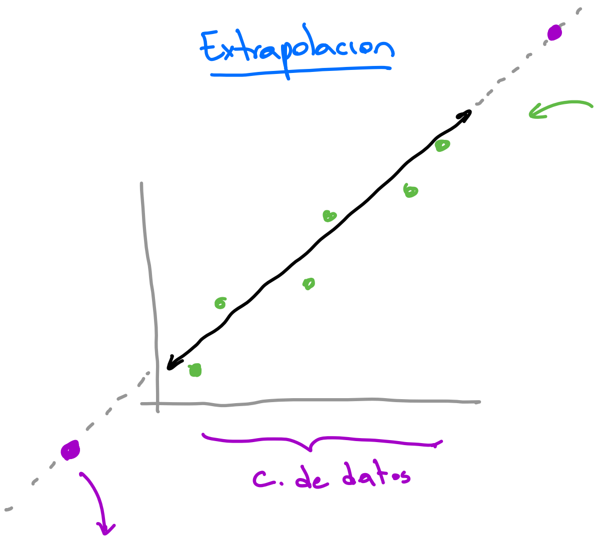
→ Fourier ✓

→ chebyshev ✓

⋮

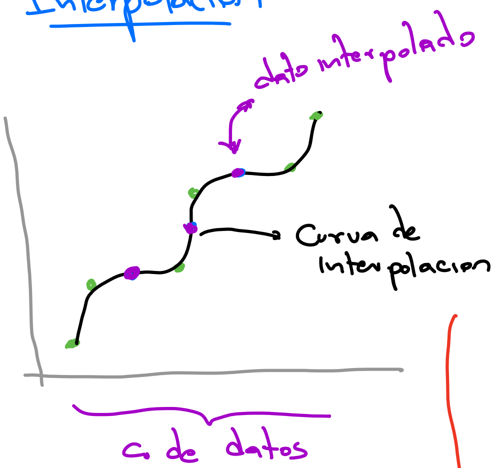
Idea clave

Extrapolacion



← datos →

Interpolacion



Predecir Afuera del Conjunto de datos

Metodo Lagrange (~ 1780)

Sean un conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$. Entonces queremos encontrar un polinomio $P(x)$ tal que

$$\boxed{P(x_i) = y_i}$$

1) Nota: $P(x)$ se llamara polinomio interpolante

$$\left(P(x) = \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \right)$$

2) $P(x)$ existe por T. Weierstrass

¿Como encontrar ese polinomio?

Sea $L_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$, entonces el polinomio interpolante se calcula como

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i}$$

Propiedades

1) $L_i(x_i) = ?$

2) $L_i(x_j) = ?$

Entender las formulas

$$\cdot\ L_j(\underline{\underline{x}}) = \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{n} \frac{(\underline{\underline{x}} - x_i)}{(x_j - x_i)} = \frac{(\underline{\underline{x}} - x_0)(\underline{\underline{x}} - x_1) \ldots\ldots}{\underbrace{(x_j - x_0)}_{\#} \underbrace{(x_j - x_1)}_{\#} \ldots\ldots}$$

$j = $ fijo

$$\underbrace{\{(x_i, y_i)\}}_{\text{Datos}}$$

Entonces, por cada j tendre un polinomio $L_j(x)$ de grado $\underline{\underline{n}}$

Finalmente

$$\boxed{P(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)\, y_j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{propiedad} \quad \cdot\, L_j(x_j) = 1 \\ \qquad\qquad\quad\;\; \cdot\, L_j(x_i) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad (i \neq j) \end{array} \right\} \Rightarrow P(x_j) = y_j$$

Ejemplo (complemento notebook)

$$\underbrace{\underset{(x_1,\, y_1)}{(-1, 1)}}_{L_1}, \quad \underbrace{\underset{(x_2,\, y_2)}{(0, 0)}}_{L_2}, \quad \underbrace{\underset{(x_3,\, y_3)}{(1, 1)}}_{L_3}$$

$$\left(L_j = \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \right)$$

$$L_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - \overset{x_2}{(0)})(x - \overset{x_3}{(1)})}{(\underset{x_1}{-1} - \underset{x_2}{(0)})(\underset{x_1}{-1} - \underset{x_3}{(1)})}$$

$$= \frac{x \cdot (x-1)}{-1 \cdot (-2)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

polinomio de grado 2

$$L_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} =$$

$$L_3 = \ /$$

Finalmente

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\, y_j$$

$$= L_1(x) \cdot \underbrace{y_1}_{\#} + L_2(x)\, \underbrace{y_2}_{\#} + L_3(x)\, \underbrace{y_3}_{\#}$$