AALBORG UNIVERSITET

Tidsrækkeanalyse – Slides 9

Ege Rubak
(baseret på Slides af Esben Høg)

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Laggede regressionsmodeller og transfermodeller

Betragt en lagged regressionsmodel på formen

$$y_t = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \beta_h x_{t-h} + v_t,$$

hvor x_t er en observeret input tidsrække, y_t er en observeret output tidsrække og v_t er en stationær støj-proces.
En sådan model er nyttig i forbindelse med

- Identifikation af den (bedste lineære) relation mellem de to tidsrækker.
- Forecast af en tidsrække ud fra en anden tidsrække (vi vil typisk kræve, at $\beta_h = 0$ for $h < 0$).
- I *SOI and recruitment* eksemplet i [ShuSt] kan det være man ønsker at identificere, hvordan værdier af recruitment series (antal nye fisk) er relateret til *Southern Oscillation Index*.
- Eller vi ønsker måske at forecaste fremtidige værdier af af recruitment fra SOI.

Laggede regressionsmodeller (fortsat)

- Multiple, simultant stationære, tidsrækker i tidsdomænet: Et vigtigt redskab her er krydskovariansfunktionen (eller krydskorrelationsfunktionen CCF).
- Lagged regression i tidsdomænet: Modellér inputtidsrækken, uddrag den "hvide" tidsrække der driver den ("*prewhitening*"), regressér med den transformerede output tidsrække.

Krydskovarianser

- Husk at autokovariansfunktionen af en stationær tidsrække $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ er

$$\gamma_x(h) = \mathrm{E}\left[(x_{t+h} - \mu_x)(x_t - \mu_x)\right].$$

- Krydskovariansfunktionen mellem to simultant stationære processer, $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ og $\{y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, er

$$\gamma_{xy}(h) = \mathrm{E}\left[(x_{t+h} - \mu_x)(y_t - \mu_y)\right].$$

(simultant stationære vil sige, at de begge har konstante middelværdier, autokovarianser, der kun afhænger af lag h, og krydskovrianser der kun afhænger af lag h).

Krydskorrelationen

- Krydskorrelationsfunktionen CCF mellem to simultant stationære processer $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ og $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ er

$$\rho_{xy}(h) = \frac{\gamma_{xy}(h)}{\sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}}.$$

  Bemærk at $\rho_{xy}(h) = \rho_{yx}(-h)$, men $\rho_{xy}(h) \neq \rho_{xy}(-h)$.

- Eksempel: Antag, at $y_t = \beta x_{t-\ell} + w_t$, for $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ stationær og ukorreleret med $\{w_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, og w_t hvid støj. Så er $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ og $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ simultant stationære med $\mu_y = \beta\mu_x$, og

$$\gamma_{xy}(h) = \beta\gamma_x(h+\ell).$$

- Hvis $\ell > 0$, siger man på engelsk, at x_t *leads* y_t.
- Hvis $\ell < 0$, siger man på engelsk, at x_t *lags* y_t.

Sample krydskovariansen og sample CCF

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-h}(x_{t+h} - \bar{x})(y_t - \bar{y}),$$

for $h \geq 0$ (og $\hat{\gamma}_{xy}(h) = \hat{\gamma}_{yx}(-h)$ for $h < 0$).

Sample CCF er

$$\hat{\rho}_{xy}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_x(0)\hat{\gamma}_y(0)}}.$$

Sample krydskovariansen og sample CCF (fortsat)

- Hvis en af $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eller $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ er hvid støj, så vil

$$\hat{\rho}_{xy}(h) \xrightarrow{\mathsf{F}} N(0, 1/\sqrt{n}).$$

- Man kan kigge efter *peaks* i sample CCF for at identificere en *lead* eller *lag* relation. (husk at ACF af inputtidsrækken *peaker* ved $h = 0$)
- Eksempel: CCF af SOI og recruitment (Figur 1.16 side 31 i [ShuSt]) har et *peak* ved $h = -6$, som indikerer at recruitment til tid t har den stærkeste korrelation med SOI til tid $t - 6$. Altså, SOI *leads* recruitment (på 6 måneder).

Lagget regression i tidsdomænet

- Antag vi ønsker at tilpasse en lagged regressionsmodel af formen

$$y_t = \alpha(B)x_t + \eta_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_{t-j} + \eta_t,$$

  hvor x_t er en observeret input tidsrække, y_t er en observeret output tidsrække, og η_t er en stationær støjproces, ukorreleret med $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.
- En tilgang, som stammer fra Box & Jenkins, er at tilpasse ARIMA modeller for x_t og η_t, og så finde en simpel rational repræsentation for $\alpha(B)$.

Lagget regression i tidsdomænet

$$y_t = \alpha(\mathrm{B})x_t + \eta_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_{t-j} + \eta_t.$$

For eksempel:

$$x_t = \frac{\theta_x(\mathrm{B})}{\phi_x(\mathrm{B})} w_t,$$

$$\eta_t = \frac{\theta_\eta(\mathrm{B})}{\phi_\eta(\mathrm{B})} z_t,$$

$$\alpha(\mathrm{B}) = \frac{\delta(\mathrm{B})}{\omega(\mathrm{B})} \mathrm{B}^d.$$

Hvor de to hvide støjeprocesser er antaget uafhængige. Bemærk, at forsinkelsen B^d betyder at y_t *lags* x_t med d tidsenheder.

Lagget regression i tidsdomænet

Hvordan vælger vi alle disse parametre?

1. Tilpas $\theta_x(\mathrm{B}), \phi_x(\mathrm{B})$ for at modellere inputtidsrækken x_t.
2. *Prewhiten* inputtidsrækken ved at anvende den inverse operator $\phi_x(\mathrm{B})/\theta_x(\mathrm{B})$:

$$\tilde{y}_t = \frac{\phi_x(\mathrm{B})}{\theta_x(\mathrm{B})} y_t = \alpha(\mathrm{B}) w_t + \frac{\phi_x(\mathrm{B})}{\theta_x(\mathrm{B})} \eta_t.$$

3. Beregn krydskorrelationerne mellem $\tilde{y}_t$ med w_t,

$$\gamma_{\tilde{y},w}(h) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j w_{t+h-j} w_t \right) = \sigma_w^2 \alpha_h,$$

   for at få en indikation af opførslen af $\alpha(\mathrm{B})$, f.eks. hvilken forsinkelse der måtte være.
4. Estimér koefficienterne af $\alpha(\mathrm{B})$ og tilpas derved en ARMA model for støjserien η_t.

Lagget regression i tidsdomænet

- Hvorfor *prewhitene*?
- *Prewhiten* trinnet inverterer det lineære filter $x_t = \theta_x(\mathrm{B})/\phi_x(\mathrm{B}) w_t$. Så er den laggede regression herefter mellem den transformerede y_t og en hvid støj w_t. Det gør det nemmere at bestemme passende lags.
- For eksempel i SOI/recruitment tidsrækkerne, behandler vi SOI som input, estimerer en AR(1) model, *prewhitener* denne (dvs. beregner den inverse af vores AR(1) operator, og anvender det på SOI tidsrækken), og betragter dernæst krydskorrelationerne mellem den transformerede recruitment tidsrække og den *prewhitenede* SOI.
- Dette viser en stor *peak* ved lag -5 (svarende til at SOI tidsrækken *leader* recruitment tidsrækken. Eksemplerne 5.8 og 5.9 i [ShuSt] betragter dernæst $\alpha(\mathrm{B}) = \mathrm{B}^5/(1 - \omega_1 \mathrm{B})$.

Lagget regression i tidsdomænet

- Denne sekventielle estimationsprocedure,

$$\begin{aligned} \phi_x, \theta_x \ &\text{dernæst } \alpha \\ &\text{dernæst } \phi_\eta, \theta_\eta \end{aligned}$$

  er selvfølgelig noget *ad hoc*, men det har vist sig at være en udmærket metode.
- State space modeller giver en alternativ metode. De er også velegnede til vektor-tidsrækker, både input og output.

Ikke-stationære tidsrækker og spuriøs regression

Motivation: Regression med ikke-stationaritet.

- Hvad sker der med egenskaberne for OLS, hvis variablene er ikke-stationære?
- Betragt to tilsyneladende ikke-relaterede variable:
  - CONS: Dansk privat forbrug i 1995 priser.
  - BIRD: Antal ynglende skarver (en fugleart) i Danmark.
- Og betragt en statisk regressionsmodel

$$\log(\text{CONS}_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(\text{BIRD}_t) + w_t.$$

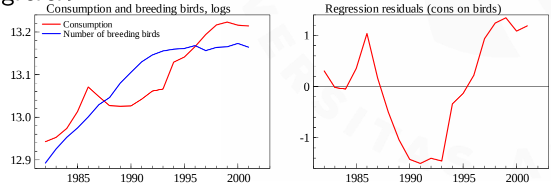
  Vi ville forvente (eller håbe), at $\hat{\beta}_1 \approx 0$ og $R^2 \approx 0$.
- Anvendes OLS på årlige data 1982-2001 fås følgende resultat

$$\log(\text{CONS}_t) = \underset{(80.90)}{12.145} + \underset{(6.30)}{0.095} \log(\text{BIRD}_t) + \hat{w}_t,$$

  med $R^2 = 0.688$, og hvor tallene i parentes er t-teststørrelser.
- Det ligner en fornuftig model. Men det er komplet nonsens: Spuriøs regression.

Spuriøs regression kontra kointegration

- Variablene er ikke-stationære.
- Residualerne $\hat{w}_t$ er ikke-stationære, og standardresultater for OLS holder ikke.
- Generelt: Regressionsmodeller for ikke-stationære variable giver spuriøse resultater. Den eneste undtagelse er, hvis modellen eliminerer den stokastiske trend i residualerne (altså eliminerer ikke-stationariteten) og producerer stationære residualer: Kointegration.
- For ikke-stationære variable skal man således tænke i kointegration. Det er kun relevant at bruge regressionsoutputtet, hvis variablene kointegrerer.



```
# RCode 4.1 Spurious regression
library(lmtest)
set.seed(123456)
e1 <- rnorm(500)
e2 <- rnorm(500)
trd <- 1:500
y1 <- 0.8*trd + cumsum(e1)
y2 <- 0.6*trd + cumsum(e2)
sr.reg <- lm(y1 ~ y2)
sr.dw <- dwtest(sr.reg)$statistic
```

Definition af kointegration

- Lad $x_t = (x_{1t}\ x_{2t})^\top$ være to I(1) tidsrækker, dvs. de indeholder stokastiske trends:

$$x_{1t} = \sum_{i=1}^{t} w_{1i} + \text{ startværdier } + \text{ stationær proces}$$

$$x_{2t} = \sum_{i=1}^{t} w_{2i} + \text{ startværdier } + \text{ stationær proces.}$$

- Generelt vil en lineær kombination af x_{1t} og x_{2t} også indeholde en random walk. Definér $\beta = (1\ -\beta_2)^\top$ og betragt linearkombinationen:

$$z_t = \beta^\top x_t = (1\ -\beta_2)\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = x_{1t} - \beta_2 x_{2t}$$

$$= \sum_{i=1}^{t} w_{1i} - \beta_2 \sum_{i=1}^{t} w_{2i} + \text{ startværdier } + \text{ stationær proces.}$$

Kointegration

- Vigtig undtagelse: Hvis der eksisterer en β, sådan at z_t er stationær. Vi siger, at x_{1t} og x_{2t} kointegrerer med kointegrationsvektor β.
- Kointegration opstår, hvis de stokastiske trends i x_{1t} og x_{2t} er de samme, så de udligner hinanden, $\sum_{i=1}^{t} w_{1i} = \beta_2 \sum_{i=1}^{t} w_{2i}$. Dette kaldes en *common trend*.
- Man kan tænke på en ligning der eliminerer de random walks x_{1t} og x_{2t}:

$$x_{1t} = \mu + \beta_2 x_{2t} + w_t.$$

Hvis w_t er I(0), så er $\beta = (1 \quad -\beta_2)^\top$ en kointegrerende vektor.

Kointegration

- Den kointegrerende vektor er kun entydig (unik) op til en konstant faktor. Hvis $\beta^\top x_t \sim I(0)$, så gælder det også for $c\beta^\top x_t$, for $c \neq 0$. Vi kan derfor vælge en normalisering

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

- Kointegration kan let udvides til flere tidsrækker (eller flere variable): Variablene i $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})^\top$ kointegrerer, hvis

$$z_t = \beta^\top x_t = x_{1t} - \beta_2 x_{2t} - \cdots - \beta_p x_{pt} \sim I(0).$$

Kointegration og økonomisk ligevægt

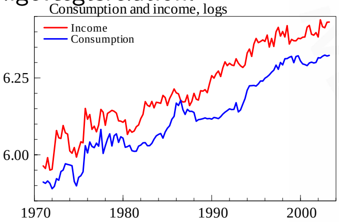
- Betragt en regressionsmodel for to I(1) variable x_{1t} og x_{2t} givet ved
$$x_{1t} = \mu + \beta_2 x_{2t} + w_t. \tag{1}$$
- Hvis x_{1t} og x_{2t} kointegrerer med kointegrationsvektor $(1, -\beta_2)$, så er afvigelsen
$$w_t = x_{1t} - \mu - \beta_2 x_{2t}$$
en stationær proces med middelværdi nul. x_{1t} og x_{2t} ko-varierer og $w_t \sim I(0)$. Man kan tænke på (1) som definerende en ligevægt mellem x_{1t} og x_{2t}.
- Hvis x_{1t} og x_{2t} ikke kointegrerer, så er afvigelsen w_t en I(1) proces. Og der er ingen naturlig fortolkning af (1) som en ligevægtsrelation.

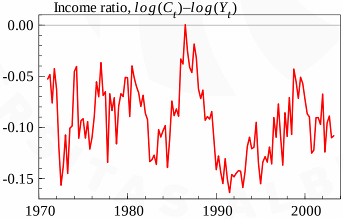
Empirisk eksempel: Forbrug og indkomst

- Tidsrækker for log forbrug, C_t, og log indkomst, Y_t, er typisk I(1). Definer en vektor $x_t = (C_t \;\; Y_t)^\top$.
- Forbrug og indkomst er kointegrerede med kointegrationsvektor $\beta = (1 \;\; -1)^\top$, hvis (log-) forbrug-indkomst ratioen

$$z_t = \beta^\top x_t = (1 \;\; -1) \begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = C_t - Y_t,$$

er en stationær proces. Forbrugs-indkomst ratioen er en ligevægtsrelation.





Hvordan bliver ligevægten vedvarende?

- Der må være en slags kræfter der trækker x_{1t} eller x_{2t} mod ligevægten.
- En berømt repræsentationssætning (Clive Granger, 1983): x_{1t} og x_{2t} kointegrerer hvis og kun hvis der eksisterer en fejlkorrektionsmodel for enten x_{1t}, x_{2t} eller begge.
- Et eksempel: Lad $z_t = x_{1t} - \beta_2 x_{2t}$ være en stationær relation mellem I(1) tidsrækker. Så eksisterer der en stationær ARMA model for z_t. Antag for simpelheds skyld en AR(2):

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + w_t, \quad \phi(1) = 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0.$$

Hvordan bliver ligevægten vedvarende? (fortsat)

Ovenstående er ækvivalent med

$$
\begin{aligned}
x_{1t} - \beta_2 x_{2t} &= \phi_1(x_{1,t-1} - \beta_2 x_{2,t-1}) + \phi_2(x_{1,t-2} - \beta_2 x_{2,t-2}) + w_t \\
x_{1t} &= \beta_2 x_{2t} + \phi_1 x_{1,t-1} - \phi_1 \beta_2 x_{2,t-1} + \phi_2 x_{1,t-2} - \phi_2 \beta_2 x_{2,t-2} + w_t.
\end{aligned}
$$

eller

$$
\nabla x_{1t} = \beta_2 \nabla x_{2t} + \phi_2 \beta_2 \nabla x_{2,t-1} - \phi_2 \nabla x_{1,t-1} - (1 - \phi_1 - \phi_2)\{x_{1,t-1} - \beta_2 x_{2,t-1}\} + w_t.
$$

Dette er fejlkorrektionsmodellen i en nøddeskal.

Mere om kointegration

Kointegration er en systemegenskab. Begge tidsrækker kan fejlkorrigere, f.eks.

$$\nabla x_{1t} = \delta_1 + \Gamma_{11}\nabla x_{1,t-1} + \Gamma_{12}\nabla x_{2,t-1} + \alpha_1(x_{1,t-1} - \beta_2 x_{2,t-1}) + w_{1t},$$
$$\nabla x_{2t} = \delta_2 + \Gamma_{21}\nabla x_{1,t-1} + \Gamma_{22}\nabla x_{2,t-1} + \alpha_2(x_{1,t-1} - \beta_2 x_{2,t-1}) + w_{2t}.$$

Jvf. også Pfaffs notation side 77, formel (4.5a) og (4.5b).

Mere om kointegration

Modellen kan skrives som en såkaldt vektor fejlkorrektionsmodel,

$$\begin{pmatrix} \nabla x_{1t} \\ \nabla x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla x_{1,t-1} \\ \nabla x_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (x_{1,t-1} - \beta_2 x_{2,t-1}) + \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{t2} \end{pmatrix},$$

eller simpelthen

$$\nabla x_t = \delta + \Gamma \nabla x_{t-1} + \alpha \beta^\top x_{t-1} + w_t.$$

- Bemærk, at $\beta^\top x_{t-1} = x_{1,t-1} - \beta_2 x_{2,t-1}$ optræder i begge ligninger.
- For at x_{1t} fejlkorrigerer, så skal $\alpha_1 < 0$, og for at x_{2t} fejlkorrigerer, så skal $\alpha_2 > 0$.

OLS regression med kointegrerede tidsrækker

- I kointegrationstilfældet eksisterer der en β_2 sådan at fejlleddet w_t i

$$x_{1t} = \mu + \beta_2 x_{2t} + w_t \tag{2}$$

  er stationær.
- OLS anvendt på (2) giver konsistente resultater, sådan at $\hat{\beta}_2 \to \beta_2$ for $n \to \infty$.
- Beklageligvis så viser det sig, at $\hat{\beta}_2$ ikke generelt er asymptotisk normalfordelt, så vi kan bruge (2) til estimation, ikke til test.

Test for kointegration: Engle-Grangers 2-step metode (Også beskrevet i [Pfaff] side 76-78)

Step 1

- Tjek at alle individuelle tidsrækker er I(1). For simpelheds skyld antager vi her, at der kun er to tidsrækker i systemet, x_{1t} og x_{2t}. I [Pfaff] beskriver han det med flere tidsrækker.
- Estimér så en regression med én af tidsrækkerne som respons og den anden som forklarende variabel, f.eks.

$$x_{1t} = \mu + \beta_2 x_{2t} + w_t. \tag{3}$$

  Gem residualerne i tidsrækken $\hat{w}_t$.
- Test vha. Dickey-Fuller test om disse residualer $\hat{w}_t$ er I(1) eller I(0). Hvis $\hat{w}_t$ er I(0) så kointegrerer de oprindelige tidsrækker, og gå så til trin 2 for at estimere en fejlkorrektionsmodel (ECM).
- Hvis $\hat{w}_t$ er I(1), så estimér en model der kun indeholder 1. differenser af de oprindelige tidsrækker, altså en model der kun estimerer kortsigts-sammenhænge. En ECM er så ikke relevant.

Test for kointegration: Engle-Grangers 2-step metode (fortsat)

Step 2

- Brug step 1 residualerne fra forrige periode som en variabel i fejlkorrektionsmodellen:

$$\nabla x_{1t} = \psi_0 + \psi_1 \nabla x_{2t} + \lambda \hat{w}_{t-1} + v_t, \tag{4}$$

hvor $\hat{w}_{t-1} = x_{1,t-1} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_2 x_{2,t-1}$.

- I formel (4) indgår både en kortsigts-sammenhæng og en langsigts-sammenhæng.
- Værdien af koefficienten λ bestemmer hastigheden af tilpasningen (fejlkorrektionen), og den skal altid være negativ. Ellers vil systemet divergere fra dets langsigts ligevægt.
- Bemærk i øvrigt, at hvis $\hat{w}_{t-1}$ i formel (4) erstattes med w_{t-1}, så bliver $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = \beta_2$, $\lambda = -1$ og $v_t = w_t$, idet (4) så simpelthen bliver

$$\nabla x_{1t} = \beta_2 \nabla x_{2t} - (x_{1,t-1} - \mu - \beta_2 x_{2,t-1}) + w_t.$$

For en implementering af Engle-Grangers metode, se R kode 4.2 side 77 i [Pfaff]

Test for kointegration: Engle-Grangers 2-step metode (fortsat)

- Bemærk:
  1. Residualerne $\hat{w}_t$ har middelværdi nul. Ingen deterministiske led i DF regressionen.
  2. Kritiske værdier for $t_{\gamma=0}$ afhænger dog stadig af eventuelle deterministiske regressorer i (3) (f.eks. lineær trend).
  3. Det faktum, at $\hat{\beta}_2$ er estimeret ændrer også på de kritiske værdier. OLS minimerer variansen af $\hat{w}_t$. Skal se så "stationær ud som muligt", kritiske værdier afhænger af antal regressorer.
  4. De kritiske værdier der skal bruges ved DF test for om residualerne er I(1) [altså har unit root] er givet i tabellen på næste slide.

Kritiske værdier for Engle-Granger test for ingen kointegration

Antal variable i ligningen	Sample size	Kritisk værdi 1%	5%	10%
2	50	-4.32	-3.67	-3.28
	100	-4.07	-3.37	-3.03
	200	-4.00	-3.37	-3.02
3	50	-4.84	-4.11	-3.73
	100	-4.45	-3.93	-3.59
	200	-4.35	-3.78	-3.47
4	50	-4.94	-4.35	-4.02
	100	-4.75	-4.22	-3.89
	200	-4.70	-4.18	-3.89
5	50	-5.41	-4.76	-4.42
	100	-5.18	-4.58	-4.26
	200	-5.02	-4.48	-4.18

Kilde:Engle & Yoo (1987): Forecasting and testing in cointegrated systems, *Journal of Econometrics* 35, side 143-159.

```
#RCode4.2 Engle-Granger procedure with generated data
set.seed(123456)
e1 <- rnorm(100)
e2 <- rnorm(100)
y1 <- cumsum(e1)
y2 <- 0.6*y1+e2
lr.reg <- lm(y2 ~ y1)
error <- residuals(lr.reg)
error.lagged <- error[-c(99,100)]
dy1 <- diff(y1)
dy2 <- diff(y2)
diff.dat <- data.frame(embed(cbind(dy1,dy2),2))
colnames(diff.dat) <- c('dy1','dy2','dy1.1','dy2.1')
ecm.reg <- lm(dy2 ~ error.lagged + dy1.1 + dy2.1,
              data = diff.dat)
```

Opsummering: Engle-Granger analyse

1. Test individuelle variable, f.eks. x_{1t} og x_{2t} for *unit roots*.
2. Kør en statisk kointegrationsregression

$$x_{1t} = \mu + \beta_2 x_{2t} + w_t.$$

   Bemærk, at t-teststørrelser her kan ikke bruges til inferens.

3. Test for ingen kointegration ved at teste for en *unit root* i residualerne $\hat{w}_t$.
4. Hvis kointegration ikke forkastes estimeres en dynamisk (ECM) model som

$$\nabla x_{1t} = \psi_0 + \psi_1 \nabla x_{2t} + \lambda \hat{w}_{t-1} + v_t.$$

   Alle led er stationære. Inferens i den model er standard.