# Om koefficienterne for fraktionelle differenser.

Uddybning af afsnit 5.2 i Shumway & Stoffer.

Notat

Esben Høg

6. marts 2017

## 1 Indledning

I [ShuSt] afsnit 5.2 beskrives en lidt indforstået matematik vedrørende koefficienterne i rækkeudviklingen for de fraktionelle differenser, idet man betragter

$$\nabla^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j = (1 - \mathrm{B})^d = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{d}{j} \mathrm{B}^j. \tag{1}$$

I (1) indgår binomialkoefficienter $\binom{d}{j}$ hvor $j > d$ og herved indgår fakultetsfunktionen med negative og/eller ikke-heltallige argumenter. Disse egenskaber er dog veldefinerede, som det fremgår af det følgende.

## 2 Binomialrækker

For $d$ positiv og heltallig gælder en velkendt binomialformel:

$$(x + y)^d = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} x^k y^{d-j}. \tag{2}$$

Denne formel kan skrives

$$(x + y)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} x^k y^{d-j}, \tag{3}$$

hvis det underforstås, at $\binom{d}{j} = 0$ for $d$ heltallig og $j > d$.

En grundlæggende formel (som her tages for givet) fra uendelige rækker er en generalisering af (3), nemlig *den generelle binomialformel*, som viser rækkeudviklingen for potenser som ikke nødvendigvis er positive heltal:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^k y^{\alpha-j}, \tag{4}$$

hvor (4) skal forstås som (3), hvis $\alpha$ er et positivt heltal, hvorimod $\binom{\alpha}{j}$ er defineret på passende måde som vist nedenfor hvis $\alpha$ ikke er heltallig. Endvidere er det forudsat, at $x^2 < y^2$.

Indsættes $x = -\mathrm{B}$, $y = 1$ og $\alpha = d$ fås netop (1).

## 3 Gammafunktionen og generaliserede binomialkoefficienter

Gammafunktionen er formelt defineret som

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{for } x \neq 0, -1, -2, \cdots$$

Det ses let, at $\Gamma(1) = 1$, og det kan vises, at følgende rekursion gælder for alle $x$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{5}$$

Specielt er $\Gamma(x+1) = x!$ for $x$ heltallig og positiv. Man kan ikke finde et pænt lukket udtryk for gammafunktionen, men normalt er den tabelleret[1] i området $0 < x < 1$, hvorefter funktionsværdien i alle andre positive tal kan findes ved rekursionsformlen. For negative (ikke-heltallige) $x$ kan funktionsværdierne fås ved omvendt brug af rekursionsformlen:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{6}$$

Gammafunktionen kan herefter bruges til at definere de *generaliserede binomialkoefficienter*.

Som bekendt er for positive hele tal $d > j$ binomialkoefficienten givet ved

$$\binom{d}{j} = \frac{d!}{j!(d-j)!}.$$

Omskrevet vha. gammafunktionen giver dette

$$\binom{d}{j} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d-j+1)}. \tag{7}$$

[1] Eller der findes algoritmer, der kan beregne funktionsværdierne numerisk

Hvis nu $j$ er positiv og heltallig og $|d| < 1$ så er $j - d > 0$ og rekursionsformlen (5) giver:

$$\begin{aligned}\Gamma(j-d) &= (j-d-1)\Gamma(j-d-1) &\quad (8)\\ &\vdots\\ &= (j-d-1)(j-d-2)\cdots(-d)\Gamma(-d).\end{aligned}$$

Endvidere er $d - j + 1 < 1$, hvorefter den omvendte rekursionsformel (6) giver

$$\begin{aligned}\Gamma(d-j+1) &= \frac{1}{d-j+1}\Gamma(d-j+2)\\ &\vdots\\ &= \frac{1}{d-j+1}\cdot\frac{1}{d-j+2}\cdots\frac{1}{d}\Gamma(d+1)\\ &= (-1)^j\frac{1}{j-d-1}\cdot\frac{1}{j-d-2}\cdots\frac{1}{-d}\Gamma(d+1)\\ &= (-1)^j\frac{\Gamma(d+1)\Gamma(-d)}{\Gamma(j-d)}. &\quad (9)\end{aligned}$$

Det næstsidste lighedstegn fås ved at gange samtlige $j$ brøker med -1 i tællere og nævnere. Det sidste lighedstegn fås af (8). Hermed kan den generaliserede binomialkoefficient skrives (ved indsættelse af (9) i (7))

$$\binom{d}{j} = (-1)^j\frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)j!}. \quad (10)$$

Derfor fås altså (1) udtrykt som

$$\nabla^d = (1-\mathrm{B})^d = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)j!}\mathrm{B}^j, \quad (11)$$

og dette er nøjagtig formel (5.2) i [ShuSt]. Man ser, at

$$(-1)\binom{d}{1} = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(-d)} = \frac{(-d)\Gamma(-d)}{\Gamma(-d)} = -d,$$

og for $j \geq 2$ fås[2] følgende rekursion for koefficienterne

$$\begin{aligned}(-1)^{j+1}\binom{d}{j+1} &= (-1)^{2(j+1)}\frac{\Gamma(j+1-d)}{\Gamma(-d)(j+1)!}\\ &= \frac{j-d}{j+1}\cdot(-1)^{2j}\frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)j!}\\ &= \frac{j-d}{j+1}\cdot(-1)^j\binom{d}{j}. &\quad (12)\end{aligned}$$

[2]Bemærk, at $(-1)^{2(j+1)} = (-1)^{2j} = 1$

Definerer vi $\pi_j(d) = (-1)^j \binom{d}{j}$, har vi altså at formel (12) svarer nøjagtigt til formel (5.7)[3] i [ShuSt]:

$$\pi_{j+1}(d) = \frac{j-d}{j+1}\pi_j(d),$$

hvorefter følgende tabel let kan laves:

| j | $(-1)^j \binom{d}{j}$ |
|---|---|
| 1 | $-d$ |
| 2 | $(-1)^2 \binom{d}{2} = -1/2d(1-d)$ |
| 3 | $(-1)^3 \binom{d}{3} = -1/2d(1-d)(2-d)/3 = -1/6d(1-d)(2-d)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

# Eksempel 1

Model

$$(1-\mathrm{B})^d x_t = w_t \qquad [\mathrm{ARFIMA}(0,d,0)]. \tag{13}$$

For $|d| < \frac{1}{2}$ så er

$$(1 - d\mathrm{B} - \frac{1}{2}d(1-d)\mathrm{B}^3 - \frac{1}{6}d(1-d)(2-d)\mathrm{B}^3 - \cdots)x_t = w_t,$$

dvs.

$$x_t = dx_{t-1} + \frac{1}{2}d(1-d)x_{t-2} + \frac{1}{6}d(1-d)(2-d)x_{t-3} + \cdots + w_t,$$

eller skrevet som AR($\infty$) (idet $(1-\mathrm{B})^d = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \binom{d}{j}\mathrm{B}^j$)

$$\begin{aligned} x_t &= -\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \binom{d}{j} x_{t-j} + w_t \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j(d) x_{t-j} + w_t. \end{aligned}$$

Alternativt kan man skrive processen som en MA($\infty$), jvf. [ShuSt] formel (5.4) og (5.5),

$$\begin{aligned} x_t = (1-\mathrm{B})^{-d} w_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)}\, w_{t-j} \qquad (14) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(d)\, w_{t-j}. \end{aligned}$$

[3] Bemærk, at $\pi_j(d)$,erne er koefficienterne i AR($\infty$) repræsentationen af $x_t$.

## Autokorrelationer

For processen givet i (13), hvor $w_t$ er hvid støj og $|d| < \frac{1}{2}$, kan det vises, at $x_t$ er stationær og invertibel, og at autokorrelationerne er givet ved

$$\rho_k = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)}, \tag{15}$$

jfv. [ShuSt] formel (5.6). Den nemmeste måde at indse formel (15) på er ved at skrive $x_{t-k}$ vha. formel (14), og så beregne $\gamma_k = \mathrm{E}\,(x_t\, x_{t-k})$.

Endvidere er variansen

$$\mathrm{var}(x_t) = \frac{\Gamma(1-2d)}{(\Gamma(1-d))^2}.$$

# Eksempel 2

Model

$$(1-\phi\mathrm{B})(1-\mathrm{B})^d x_t = w_t \qquad [\mathrm{ARFIMA}(1,d,0)]. \tag{16}$$

Vi har

$$(1-\mathrm{B})^d \;=\; 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{d}{j}\mathrm{B}^j,$$

og derfor får vi

$$\begin{aligned}
(1-\phi\mathrm{B})(1-\mathrm{B})^d &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{d}{j}\mathrm{B}^j - \phi\mathrm{B} - \sum_{j=1}^{\infty}\phi(-1)^j\binom{d}{j}\mathrm{B}^{j+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{d}{j}\mathrm{B}^j - \phi\mathrm{B} - \sum_{j=2}^{\infty}\phi(-1)^{j-1}\binom{d}{j-1}\mathrm{B}^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{d}{j}\mathrm{B}^j - \phi\mathrm{B} - \sum_{j=2}^{\infty}\phi(-1)^{j-1}\frac{j}{d-j+2}\binom{d}{j}\mathrm{B}^j \\
&= 1 - (\phi+d)\mathrm{B} - \sum_{j=2}^{\infty}\left[(-1)^j - \phi(-1)^{j-1}\frac{j}{d-j+2}\right]\binom{d}{j}\mathrm{B}^j \\
&= 1 - (\phi+d)\mathrm{B} - (1+\frac{2\phi}{d})\binom{d}{2}\mathrm{B}^2 - \cdots,
\end{aligned}$$

hvorfor

$$(1 - (\phi+d)\mathrm{B} - (1+\frac{2\phi}{d})\binom{d}{2}\mathrm{B}^2 - \cdots)x_t = w_t,$$

eller

$$x_t = (\phi+d)x_{t-1} + (1+\frac{2\phi}{d})\binom{d}{2}x_{t-2} + \cdots + w_t.$$

Også her kan autokorrelationer og varians beregnes, når $|d| < \frac{1}{2}$.