Vedr. [ShuSt] opgave 5.5: Bevis for formel (5.33)

Vi skal vise formel (5.33), at ligningen

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t$$

er ensbetydende med

$$\nabla x_t = \gamma x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \psi_j \nabla x_{t-j} + w_t, \tag{1}$$

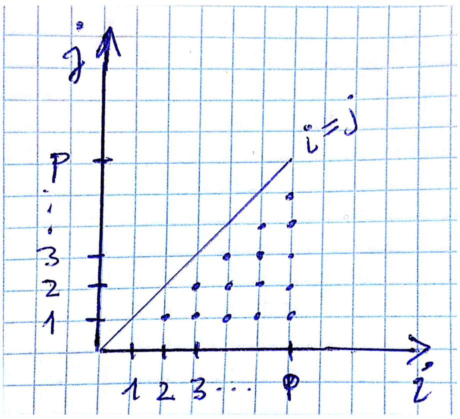
hvor $\gamma = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p - 1$ og $\psi_j = -\sum_{i=j+1}^{p} \phi_i$. (Bemærk, at der er en slem trykfejl i formlen for ψ_j i bogen lige under formel (5.33). Det rigtige udtryk er det der står her.)

Dette er udgangspunktet for det såkaldte ADF (Augmented Dickey-Fuller) test for unit root.

En måde at bevise formel (5.33) i bogen er ved at bytte om på rækkefølgen af summeringsindex i en dobbeltsum: Først bemærkes at de følgende to dobbeltsummer er ens:

$$\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=j+1}^{p} (\cdots) = \sum_{i=2}^{p} \sum_{j=1}^{i-1} (\cdots). \tag{2}$$

Dette ses nemt ved at betragte nedenstående figur, hvor det let ses, at de markerede punkter angiver de punkter (i, j) man skal summe over, og det er så ligegyldigt i hvilken rækkefølge mellem i og j, man summer over disse. Dette beviser formel (2).



Skriv nu formel (1) som

$$x_t - x_{t-1} = \gamma x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \underbrace{\left[-\sum_{i=j+1}^{p} \phi_i \right]}_{\psi_j} (x_{t-j} - x_{t-j-1}) + w_t.$$

eller

$$x_t = (\gamma + 1) x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=j+1}^{p} \phi_i (x_{t-j} - x_{t-j-1}) + w_t. \tag{3}$$

Ved at bruge resultatet i (2) fås at dette er lig med

$$
\begin{aligned}
x_t &= (\gamma+1)x_{t-1} - \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{i-1}\phi_i(x_{t-j}-x_{t-j-1}) + w_t \\
&= (\gamma+1)x_{t-1} - \sum_{i=2}^{p}\phi_i \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{i-1}(x_{t-j}-x_{t-j-1})\right]}_{x_{t-1}-x_{t-i}} + w_t \\
&= (\gamma+1)x_{t-1} - \sum_{i=2}^{p}\phi_i(x_{t-1}-x_{t-i}) + w_t \\
&= (\gamma+1)x_{t-1} - \left[\sum_{i=2}^{p}\phi_i\right]x_{t-1} + \sum_{i=2}^{p}\phi_i x_{t-i} + w_t \\
&= \underbrace{\left[\gamma+1-\sum_{i=2}^{p}\phi_i\right]}_{\phi_1} x_{t-1} + \sum_{i=2}^{p}\phi_i x_{t-i} + w_t \\
&= \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + w_t.
\end{aligned}
$$

Altså har vi vist, at formel (5.33) i [ShuSt] gælder.