

2023B

基于几何分析的多波束测线优化

摘要

针对问题一，建立了**基于正弦定理的覆盖宽度模型**，求解了有坡度角情况下多波束测深的覆盖宽度等问题。根据多波束测深条带的几何性质，首先以水深为 D 时轮船位置为原点**构建空间直角坐标系**，从而确定**水深随坐标变换的解析表达式**。对于覆盖宽度的确定，以轮船位置垂线将测深区域划分为左右两个三角形，从而可利用**正弦定理**等几何性质求解出左半和右半的覆盖宽度，进而确定总的覆盖宽度。有坡度角时重叠率的定义也是本问的关键，基于海底地形平坦时相邻条带之间的重叠率定义，本文建立了**含坡度角时重叠率的推广模型**。最终可求解出测线距中心点不同距离时的海水深度、覆盖宽度、以及与前一条测线的重叠率。

针对问题二，建立了**基于三维空间投影的覆盖宽度模型**，求解出有坡度角和高度角三维空间下多波束测深的覆盖宽度等问题。测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角是本问的难点，对于该问题，可拆分为**测线方向与垂直测线方向**两个角度进行分析。通过分析测线方向的截面可以求解出**水深高度随船只位置的变化**；再通过分析垂直测线方向的截面可以求解出此时船只测量的**新坡度角**。通过分析，问题一为问题二的一种特殊情况，在确定了水深及新坡度角后，即可将问题二转化为问题一进行求解，从而得到此时多波束测深覆盖宽度的表达式。最终可求解出测量船与海域中心点处不同距离、测线方向不同时多波束测深覆盖宽度。

针对问题三，建立了**基于位置递推的覆盖宽度模型**，求解出完全覆盖整个待测海域最少测线数。对于测线排布，考虑三种不同的策略：东西纵向排布，斜向平行排布，南北横向排布。通过分析可知，前两种策略为了完全覆盖海域只能提高重叠率，较大程度上降低了空间利用率；第三种**南北平行排布的策略**恰好能控制相邻测线的覆盖宽度的重叠率在最小边界值，并且每条测线的长度相同，从而大大提高了空间利用率和计算效率。最终通过迭代递推算算法求解出**完全覆盖整个待测海域最少测线数为 34 条，最短测线总长为 68 海里**。

针对问题四，建立了**基于平面分割和拟合的测线布施模型**，求解出测线的总长度、漏测海域百分比等问题。对于海域地形，使用等深线示意图直观显示。等深线分海域近似均匀平行分布，故借助第三问的思路，采取合适的划分手段分解成子问题。使**最小二乘法**求解出二维线性平面方程，给出拟合效果分析。其次构建**实际覆盖率模型**，与理想范围 $0\% - 20\%$ 进行比较，最终求解出**测线长度为 307.2 海里，无漏测海区，超过 20% 覆盖率的测线长度为 23.57 海里**。

关键词：多波束测线布设，正弦定理，最小二乘法

一、问题重述

1.1 问题背景

多波束测深系统是一种高效的海底地形探测技术，通过同时发射和接收多个声波束，利用声波传播时间和声速计算水深，可快速获取高密度的海底地形数据。相比传统单波束测深，它具有覆盖广、效率高、分辨率高的优势，广泛应用于海洋测绘、海底资源勘探、海洋工程及水下目标探测等领域。

然而，海底地形复杂多变，尤其是陡坡、悬崖等剧烈起伏区域，给测量带来显著挑战。在陡峭地形下，声波束的照射区域（波束脚印）易发生变形，回波信号可能因多次反射或遮蔽而失真，导致水深计算误差增大。此外，复杂地形对声速校正、波束指向校准和数据处理算法提出了更高要求，微小的误差可能被放大，影响最终地形模型的精度。

因此，如何优化多波束测深系统在复杂海底地形（特别是大坡度区域）的测量精度，减少信号干扰和数据处理误差，成为海洋探测领域的关键问题。提升其在地形剧烈变化环境下的可靠性，对海洋科学研究、资源开发和工程应用具有重要意义。

1.2 问题描述

- 问题一：**根据题目中示意图所示，在具有一定坡度 α 的海底地形的条件下，建立多波束测深器的覆盖面积 W 和相邻条带覆盖率 η 的数学模型。当开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，侧线中心点海水深度 $D = 70m$ 时，利用建立的模型计算出距中心点不同位置的海水深度、覆盖宽度和与前一条测线的重叠率的指标值。
- 问题二：**根据题目中示意图所示，建立多波束测深器覆盖宽度 W 的数学模型。当开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，侧线中心点海水深度 $D = 120m$ 时，利用建立的模型计算出测线距中心点 8 处不同位置不同测线方向夹角下的覆盖宽度。
- 问题三：**假设一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里、东浅西深的矩形海域，且测线中心点海水深度 $D = 110m$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，开角 $\theta = 120^\circ$ 。设计一组测线，其要求测线长度最短、覆盖整个海域、重叠率在 10% 到 20% 之间。
- 问题四：**根据附件提供的海水深度数据，设计一组测线，其要求尽可能覆盖整个待测海域、相邻条带之间的重叠率尽可能控制在 20% 以下、测线总长度尽可能短。并且求出在该条件下的侧线长度、漏测海区占总待测海域面积的百分比、以及重叠率超过 20% 的长度。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求求解在有坡度角时多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率，其核心挑战在于如何准确分析海底坡度和不同深度对多波束测深的影响。海底坡度角会改变声波传播的几何路径，导致水深分布不均匀，进而影响覆盖宽度的计算；传统平坦地形模型不再适用，需引入坡度因素重构覆盖宽度公式。

思考过程首先聚焦于坡度如何影响局部水深：通过建立空间直角坐标系，将轮船位置作为原点，分析水深随水平距离的变化规律；再将覆盖宽度分解为左右两部分，利用正弦定理等几何特性对覆盖宽度拆分求解，从而避免复杂的函数解析式；并推广重叠率定义以适应坡度场景。

2.2 问题二的分析

问题二为第一问的推广，第一问为测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影平行的情况，本问要求解测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β 时多波束测深的覆盖宽度。其难点在于水深的解析表达更为复杂，其不仅受到坡度的影响，还会受测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角、轮船位置的制约。

思考过程从分解 β 角入手：可将其拆分为沿航迹方向的高度角和垂直航迹方向的坡度角。高度角反映船只行进中地形的升降趋势，坡度角决定声波束在横断面内的不对称传播行为。通过投影原理，将三维问题简化为两个二维分量：沿航迹方向的水深变化和垂直航迹方向的波束畸变，从而将问题二转化为问题一的模型进行分析。

2.3 问题三的分析

问题三的目标是设计最短测线长度以完全覆盖矩形海域，同时满足重叠率约束。难点在于海域地形西深东浅的坡度特性，导致覆盖宽度自西向东递减。若简单采用固定测线间距，可能导致西部重叠过多或东部漏测的问题。

思考过程首先比较不同测线排布策略：东西纵向排布会因宽度变化形成梯形覆盖区，需减小间距来避免漏测，但会牺牲重叠率；斜向平行排布类似，覆盖区呈不规则四边形，效率低下；南北横向排布则产生等宽矩形覆盖区，允许通过调整间距精确控制重叠率。最终决策是选择南北排布策略，因其能最小化重叠率边界，最大化空间利用率。模型通过递推算法优化测线位置：以第一条测线覆盖海域最西端为起点，迭代计算后续测线位置，确保相邻测线的重叠率始终处于最小允许值，最终在满足约束下实现测线总长度最小化。

2.4 问题四的分析

问题四是问题三的推广并且更加贴近现实实际。本文要求针对复杂的海域环境，设计合适的侧线分布，并计算相关长度、占比百分比等问题。难点在于海域情况复杂、分析情况多样，划分方式的不同会显著影响求解难度程度，并且实际覆盖率的计算和测线长度计算也是难点之一。

思考过程借助第三问思路入手：将问题四的复杂海域情况划分后，简化成问题三的单一坡度形式，将问题分解成子问题求解。对每个海域最小二乘法求出二维线性平面方程，固定覆盖率得到测线分布。然后根据测线分布，具体计算出待求解的量。

三、 模型假设

- 假设 1：待测海域里的海水是一种理想化的均匀介质，声波可在其作匀速直线运动传播，不考虑水中杂质或阻挡物对声波传播速度和接收时间的影响。
- 假设 2：测量船换能器在测深时没有上下左右摆动，且每次向海底发射的声波信号路线与海平面垂直。
- 假设 3：测量船只的航速和航向在每一条测线上是恒定的，且每一条测线之间的转向时间可以忽略不计。
- 假设 4：测量船只和多波束探测器之间的相对位置和姿态是固定的，且不受海流、风浪等因素的影响。

四、符号说明

符号	含义	单位
α	坡度	$^{\circ}$
β	测线方向与坡面法向在水平面上投影的夹角	$^{\circ}$
θ	换能器开角	$^{\circ}$
W	覆盖宽度	m
$W_{i,1}$	第 i 个条带前半部分覆盖海底的宽度	m
$W_{i,2}$	第 i 个条带前后部分覆盖海底的宽度	m
D	测线中心点海水深度	m
$D(x_i)$	在 i 处的水深	m
d	两平行测线的距离	m
η	相邻条带的重叠率	/

五、问题一模型的建立与求解

针对第一问，首先结合问题的条件及特点建立了空间直角坐标系，便于后文模型的建立和计算，并计算出水深 D 随行进位置变化的表达式。再利用正弦定理的几何特性分别求出左半以及右半部分的覆盖宽度，最终确定了总覆盖宽度的解析表达式，并给出了有坡度角时覆盖率的推广形式

5.1 问题一模型的构建

5.1.1 空间直角坐标系的构建

根据题目的条件和信息，可以将水深为 D 时轮船的位置作为原点，以轮船行进方向作为 y 轴正方向，垂直行进方向向右作 x 轴正方向，以竖直向下作为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系如下图所示：

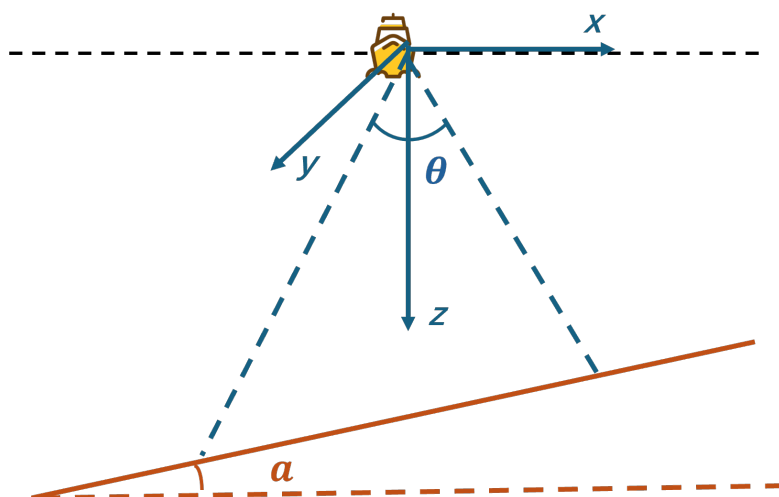


图 1 坐标系建立示意图

5.1.2 基于正弦定理的覆盖宽度模型

对于覆盖宽度的求解，首先可以凭中轴线将大三角形划分为左右两个三角形，依据几何以及三角形性质可得：

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \\ \phi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \end{cases} \quad (1)$$

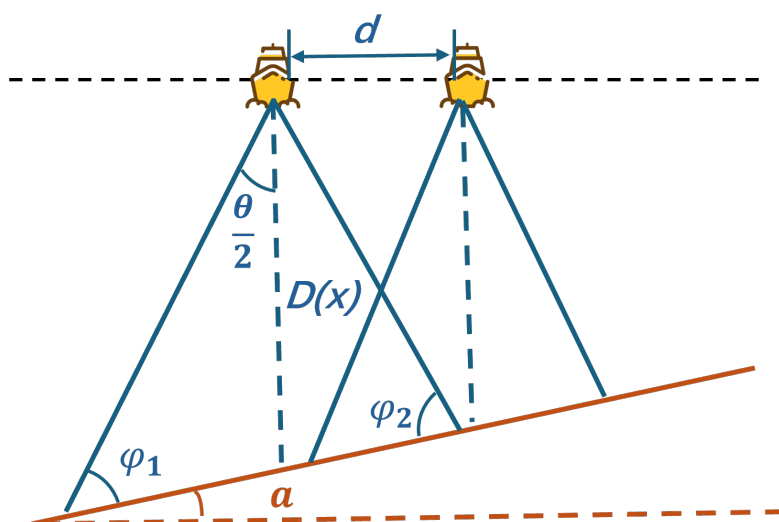


图 2 正弦定理求解示意图

根据前面建立的空间直角坐标系，可以确定海水深度 D 随 x 的表达式：

$$D(x) = D - x \tan \alpha \quad (2)$$

在此基础上, 由于使用函数解析形式求解覆盖宽度较为复杂, 因此采用分析几何性质求解, 分别对左右两个三角形运用正弦定理可以求得左半和右半部分的覆盖宽度:

$$\begin{cases} \frac{W_{i,1}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D(x_i)}{\sin \phi_1} \\ \frac{W_{i,2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D(x_i)}{\sin \phi_2} \end{cases} \quad (3)$$

带入已知量, 最终可求得总覆盖宽度为

$$\begin{aligned} W = W_{i+1,1} + W_{i,2} = & \left[(D - x_{i+1} \tan \alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin (\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \right] \\ & + \left[(D - x_i \tan \alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin (\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

5.1.3 重叠率的推广模型

根据题目信息, 若测线相互平行且海底地形平坦, 则相邻条带之间的重叠率定义为:

$$\eta = 1 - \frac{d}{W} \quad (5)$$

其中 d 为相邻两条测线的间距, W 为条带的覆盖宽度, 若 < 0 , 则表示漏测。为保证测量的便利性和数据的完整性, 相邻条带之间应有 10% 20% 的重叠率。在有坡度时重叠率可如下图所示:

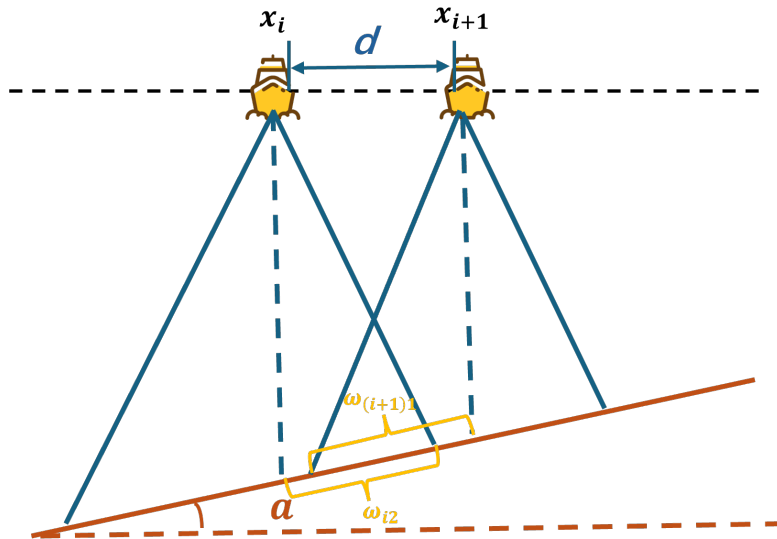


图3 重叠率推广示意图

根据上述模型, 可将平坦地形下的重叠率推广至含有坡度时的情况, 只需把原先的覆盖宽度 W 更换成第 i 条测线的右侧覆盖宽度与第 $i+1$ 条测线左侧覆盖宽度之和, 求

得表达式为:

$$\eta_{i+1} = 1 - \frac{d}{W_{i,2} + W_{i+1,1}} \quad (6)$$

其中 $W_{i,2}$ 为第 i 条测线的右侧覆盖宽度, $W_{i+1,1}$ 为第 $i+1$ 条测线左侧覆盖宽度带入已知量可最终求得在有坡度情况相邻条带之间的重叠率为:

$$\eta_{i+1} = 1 - \frac{d}{\sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[(D - x_{i+1} \tan \alpha) \cdot \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} + (D - x_i \tan \alpha) \cdot \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \right]} \quad (7)$$

5.2 问题一模型的求解

当开角 $\theta = 120^\circ$, 坡度 $\alpha = 1.5^\circ$, 侧线中心点海水深度 $D = 70m$ 时, 利用建立的模型计算出测线距中心点 9 处不同位置下的海水深度、覆盖宽度和与前一条测线的重叠率的指标值的结果如下表:

表 1 不同测线位置的深度、覆盖宽度及重叠率

测线距中心点距离 (m)	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度 (m)	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70.0000	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度 (m)	315.8133	297.6276	279.4418	261.2560	243.0733	224.8845	206.6987	188.5130	170.3272
重叠率 (%)	—	30.5850	25.9085	20.5563	14.3707	7.1405	-1.4233	-11.7271	-24.3612

5.3 结果分析

由表不难发现: 测线距中心点距离从-800 至 800 大海水深度逐渐减小, 并且覆盖宽度随海水深度成正比例关系, 重叠率与覆盖宽度同样成正比例关系。其中海水深度的范围约在 50 90 之间, 但覆盖宽度的范围可从约 170m 变化至 315m, 可见覆盖宽度受海水深度影响变化极大。重叠率的变化范围也较大, 约为-24 30, 可见当测线间距 d 一定时, 重叠率受海水深度影响同样显著。

值得注意的是, 当测线距中心点较远时重叠率变为负值, 这是因为当海水较深时, 多波束换能器延伸的范围更大, 使得相邻覆盖宽度重叠较大; 而当海水较浅时, 相邻覆盖范围较小, 使得相邻可能出现覆盖范围无法相交的情况, 导致覆盖率出现负值。

六、问题二模型的建立与求解

针对问题二, 对于测线方向与坡面法向投影夹角 β , ($\beta \in (0, 360^\circ]$) 的普遍情形, 本部分建立了基于三维空间投影的多波束覆盖宽度数学模型。首先通过向量投影原理将所需的切面属性分解为两个有效分量: 沿测线方向的水深变化率 γ_1 和垂直测线方向的

波束畸变角 γ_2 。在此基础上，建立以测量船为中心的空间直角坐标系：以航迹方向为 y 轴，垂直航迹方向为 x 轴（正西为正），深度方向为 z 轴（垂直向下），推导出任意位置 (x,y) 的水深函数。基于此水深模型和声波传播几何特性，利用第一问所得模型进行求解，最终得到总覆盖宽度的普适解析表达式。

6.1 问题二模型的构建

在测线方向与海底坡面存在夹角 β 的复杂情形下，海底坡度的空间效应可分解为两个关键角度分量： γ_1 表征沿航迹方向的水深变化趋势，反映测量船行进过程中海底地形的升降规律 (后文简称为高度角)； γ_2 描述垂直测线方向的倾斜特性，决定声波束在横断面内的不对称传播行为 (后文简称为坡度角)。现抽取任意一种 β 的取值情况，和一个以测线方向为法向量的平面进行分析。

6.1.1 高度角与坡度角的分析

考虑测线方向与船只航向对探测几何的动态影响, 如下图：

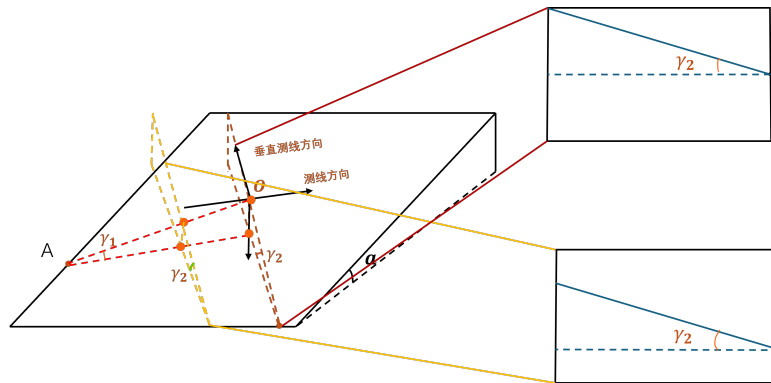


图 4 同一轴线上不同平面比较示意图

需动态计算有效高度角与坡度角，如下：

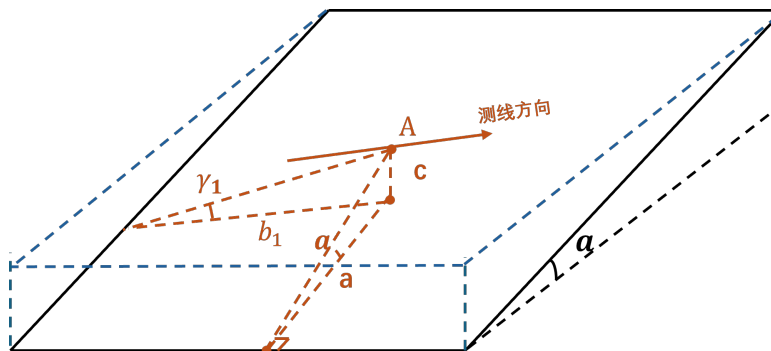


图 5 高度角计算示意图

以各边几何关系构建以下等式构成三元方程组:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{\cos \alpha} = \frac{c_1}{\sin \alpha} \\ \frac{b}{\cos \gamma_1} = \frac{c}{\sin \gamma_1} \\ b_1 = \frac{a_1}{\sin(\beta - \frac{\pi}{2})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan \gamma_1}{\tan \alpha}$$

解得所需的高度角 γ_1 为:

$$\tan \gamma_1 = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan \alpha = -\cos \beta \cdot \tan \alpha \quad (8)$$

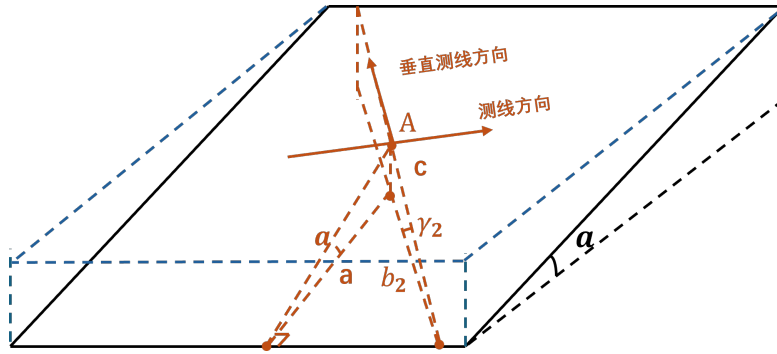


图 6 坡度角计算示意图

以侧线方向为法向量的各个平面也可同理也可用类似关系构建如下等式:

$$\begin{cases} \frac{a_2}{\sin \alpha} = \frac{c_2}{\sin \alpha} \\ \frac{b_2}{\cos \gamma_2} = \frac{c_2}{\sin \gamma_2} \\ b_2 = \frac{a_2}{\cos(\beta - \frac{\pi}{2})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan \gamma_2}{\tan \alpha}$$

解得所需的高度角 γ_2 为:

$$\tan \gamma_2 = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan \alpha = \sin \beta \cdot \tan \alpha \quad (9)$$

6.1.2 基于三维空间投影的覆盖宽度模型

对于该以测线方向为法向量的平面,与坡面几何体相交所得平面,即为船只在当前位置所测海区,现以海洋中心为原点,船只正西向为 x 轴正方向,测线方向为 y 轴正方向,垂直水平面向下为 z 轴正方向建立动态坐标系。

可得船只在当前位置所得海底深度,高度角,坡度等信息如下图。因题目 x 范围为 $[0, 3889.2]$, 故只取该范围进行分析。

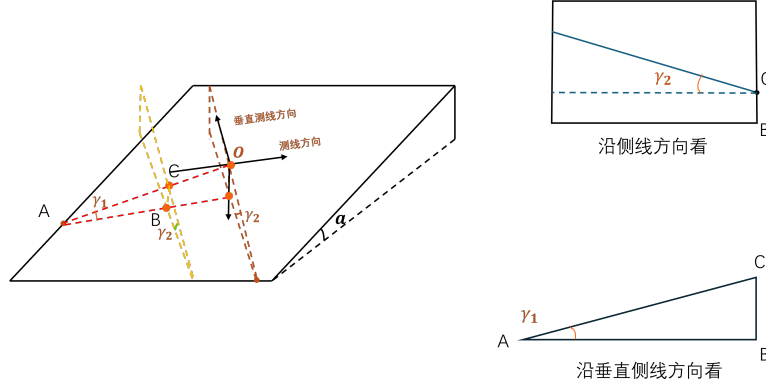


图 7 计算示意图

如沿垂直测线方向看的视图所示, 由计算出的高度角可得:

$$BC = 120 + y_i \tan \gamma_1 \quad (10)$$

如沿测线方向看的视图所示, 由计算出的高度角可得:

$$z_i = BC - x_i \tan \gamma_2 \quad (11)$$

在此坐标系下, 及上文分析可得任意点 (x,y) 处深度函数:

$$z(x, y) = 110 + y \tan \gamma_1 - x \tan \gamma_2$$

其中 $y \tan \gamma_1$ 项为沿航线方向的地形变化, $-x \tan \gamma_2$ 项为垂直航线方向的地形梯度. 由此即可将**问题二简化为问题一由模型一进行求解**。

将各条件代入问题一的模型可得覆盖面积 W_i 为:

$$W = W_{i+1,1} + W_{i,2} = \left[(120 + y_i \tan \gamma_1 - x_{i+1} \tan \gamma_2) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin (\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \gamma_2)} \right] + \left[(120 + y_i \tan \gamma_1 - x_i \tan \gamma_2) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin (\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \gamma_2)} \right] \quad (12)$$

6.2 问题二模型的求解

当开角 $\theta = 120^\circ$, 坡度 $\alpha = 1.5^\circ$, 海域中心点处海水深度 $D = 120m$ 时, 利用建立的模型计算出测量船距海域中心点 8 处不同位置在 8 个测线方向夹角的覆盖宽度 W 的求解结果如下表:

表 2 不同测线夹角下的覆盖宽度 (m)

夹角 (°)	测量船距中心点距离 (海里)							
	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
0	415.6922	466.0911	516.4899	566.8888	617.2876	667.6865	718.0854	768.4842
45	416.1915	451.8717	487.5519	523.2321	558.9123	594.5924	630.2726	665.9528
90	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919
135	416.1915	380.5113	344.8312	309.1510	273.4708	237.7906	202.1104	166.4302
180	415.6922	365.2933	314.8945	264.4956	214.0967	163.6979	113.2990	62.9002
225	416.1915	380.5113	344.8312	309.1510	273.4708	237.7906	202.1104	166.4302
270	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919
315	416.1915	451.8717	487.5519	523.2321	558.9123	594.5924	630.2726	665.9528

6.3 结果分析

依据上表数据可以得到以下结论：当测线方向与坡度方向一致（如 0°）时，覆盖宽度随距离增加持续扩大；当测线方向与坡度垂直（如 90°/270°）时，覆盖宽度保持恒定不变；当测线方向与坡度相反（180°）时，覆盖宽度随距离增加急剧缩小，将该表的数据可视化如下：

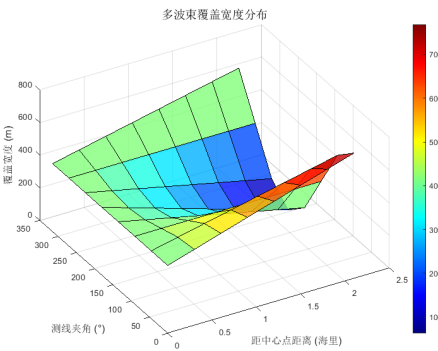


图 8 覆盖宽度随距离和夹角三维曲面图

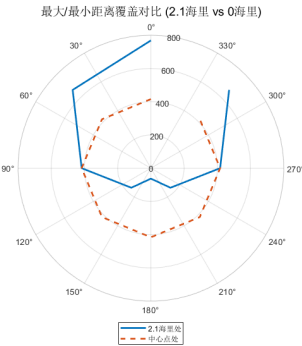


图 9 距中心最近及最远覆盖对比图

这些规律揭示了海底坡度对测量效率的关键影响，也表明在实际的测量中为了提高效率, 测量船应优先沿坡度下行方向, 即深度较深处布设测线，可提升约 84% 的覆盖效率；而在坡度上行方向，即深度较浅处需加密测线防止漏测。

七、 问题三模型的建立与求解

针对问题三，首先分析三种不同测线排布策略的效率高低，最终确定了南北平行测线排布的效率 and 利用率最高。针对南北平行排布的策略，建立了基于位置递推的覆盖宽

度模型，由于南北排布时单条测线长度彼此相同，因而将原问题转化为单目标优化问题。以测线数量为目标函数，以重叠率、位置坐标为约束条件，最终求解出最短测线数目，从而确定最短测线长度。

7.1 问题三模型的建立

7.1.1 不同测线排布策略的分析

测线的排布作为测量海水深度的重要方略，其显著影响了多波束换能器测量的效率和重叠效率，为了求解最短的测线长度，测线排布的策略是求解本文的关键。

根据矩形测量海域的特性，测线的排布策略可以大致分为三种：南北平行分布，东西平行分布，斜向平行分布。以下将对三种策略分别进行分析：

(1) 策略一：测线东西纵向排布

已知船只处于矩形海域内, 海域西深东浅, 坡度角恒定, 多波束换能器的开角为常量。因而多波束换能器在海水深度大的地方覆盖区域大，反之较小，故作图如下：

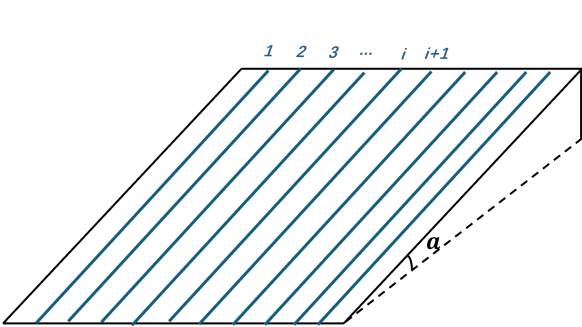


图 10 测线东西平行分布示意图

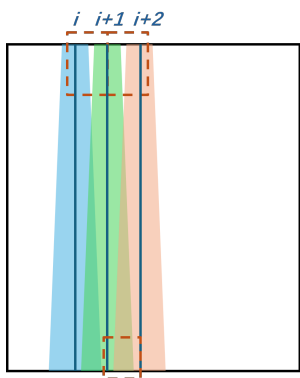


图 11 覆盖区域示意图

由图可知，该种策略所形成的覆盖区域从东到西呈现等腰梯形，为了使得较浅处不出现漏测的情况影响测量质量，只能减小相邻测线的间距，但这一行为也使得重叠率显著提高。根据常识易得，为了减小排线长度，应在满足重叠率较小时完成所有区域面积的测量，此时的空间利用率和测量效率最高。综上讨论，东西纵向排布策略效率较低，且极可能导致重叠率超过百分之二十的限制。

(2) 策略二：测线斜向平行排布

同理可做出测线斜向平行分布时的策略图和覆盖区域图如下：

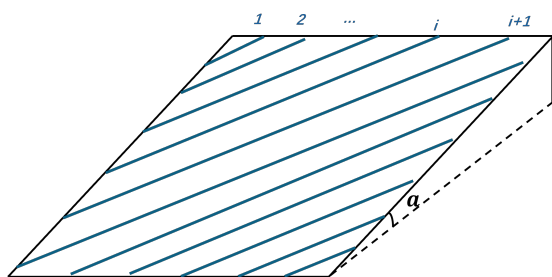


图 12 测线斜向平行分布示意图

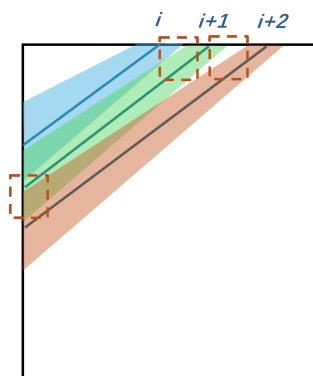


图 13 覆盖区域示意图

由图所示，该策略所形成的覆盖区域沿斜向呈现东窄西宽的四边形。与东西平行分布的策略相似，为了使得较浅处不出现漏测的情况影响测量质量，只能减小相邻测线的间距提高重叠率，使得排布策略效率较低，且极可能导致重叠率超过百分之二十的限制。

(3) 策略三：测线南北横向排布

根据覆盖宽度随深度变化的关系，可以作出该策略下的覆盖区域图：

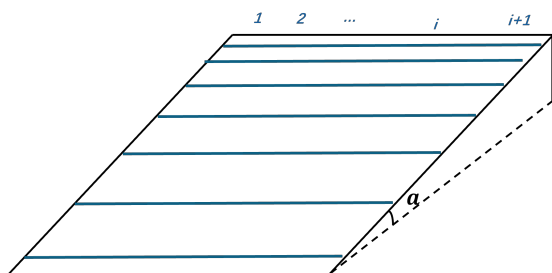


图 14 测线南北平行分布示意图

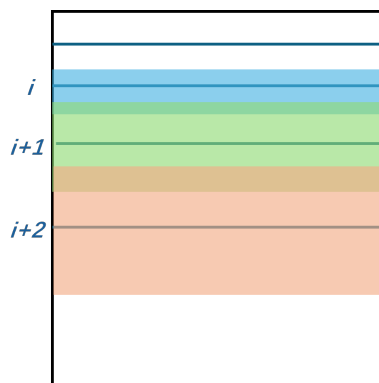


图 15 覆盖区域示意图

如图所示，该策略形成的覆盖区域为南北等宽的矩形，且自东向西矩形的宽度逐渐减小。该特殊的覆盖区域使得可以通过控制相邻测线间的间距，让覆盖率始终保持在最小的边界上，从而极大的提高了测量效率和空间利用率。除此之外，该策略不会出现前两种策略一样的漏测或部分区域重叠率极大的情况。

结合以上三种策略的分析可知，不同策略的利用效率不同，有的策略为了使得相邻测线间不空缺，只能损失重叠率，而策略三可以恰好保证相邻测线的重叠率相同并始终处于最小边界，因此本文采用南北平行排布的策略进行分析建模。

7.1.2 基于位置递推的覆盖宽度模型

自西向东规划测线，则根据前文的模型，对于第 i 条测线有如下表达式成立：

$$\begin{cases} D_i = D - x_i \tan \alpha \\ W_{i,1} = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \varphi_1} \\ W_{i,2} = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \varphi_2} \end{cases}$$

为了建立关于 x_i 的递推模型，首先应确定第一条测线 x_1 的位置。为了能充分提高利用率，应使得第一条测线覆盖范围的左端恰好位于矩形海域的最西边，因此可联立以下式子：

$$\begin{cases} x_1 - W_{1,1} \cos \alpha = -2 \\ D_1 = D - x_1 \tan \alpha \end{cases}$$

最终求解出 x_1 的值为：

$$x_1 = \frac{D \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2} - 2 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \sin \alpha \sin \frac{\theta}{2}} \quad (13)$$

下面对第 i 和第 $i+1$ 条测线进行分析，根据前文得到的有坡度角时重叠率的推广形式：

$$\eta_{i+1} = 1 - \frac{d}{W_{i,2} + W_{i+1,1}} \quad (14)$$

将已知量带入可得到关于 x_i 和 x_{i+1} 的表达式如下

$$\eta_{i+1} = 1 - \frac{d \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{(D - x_i \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi_1 + (D - x_{i+1} \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi_2} \quad (15)$$

其中 $d = x_{i+1} - x_i$ ，整理可得到递推表达式为：

$$x_{i+1} = \frac{\frac{D (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}{\tan \alpha \cdot \sin \varphi_2} + x_i \left(\frac{\sin \varphi_1}{\tan \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot (1 - \eta_{i+1})} - \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \right)}{1 + \frac{\sin \varphi_1}{\tan \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot (1 - \eta_{i+1})}} \quad (16)$$

7.2 问题三模型的求解

依据以上建立的模型可设计算法过程如下：

其中基于模型的特殊性，可令所有测线的重叠率均处于最小边界状态，即 $\eta_{i+1} = 10\%$ 。边界条件为第 $i+1$ 条测线右侧的覆盖宽度的横坐标应不小于矩形海域边界的位置，即：

$$x_{i+1} + W_{i+1,2} \cos \alpha \geq 2 \quad (17)$$

步骤 基于贪心算法的迭代递推求解

- 1 参数定义与单位换算，角度转弧度
 - 2 初始化第 1 条测线位置 x_1
 - 3 使用递推公式，基于上一个测线位置 x_i ，利用几何约束与重叠要求，迭代生成下一条测线位置 x_{i+1}
 - 4 当新测线位置超过测区边界时，终止测线布设
-

根据以上算法最终可求解出恰好完全覆盖整个待测海域时的**测线数目为 34 根**，即**最短测线长度为 68 海里**，此时相邻测线重叠率都为 10%。根据计算得出每条测线的横坐标，将每条测线位置可视化如下：

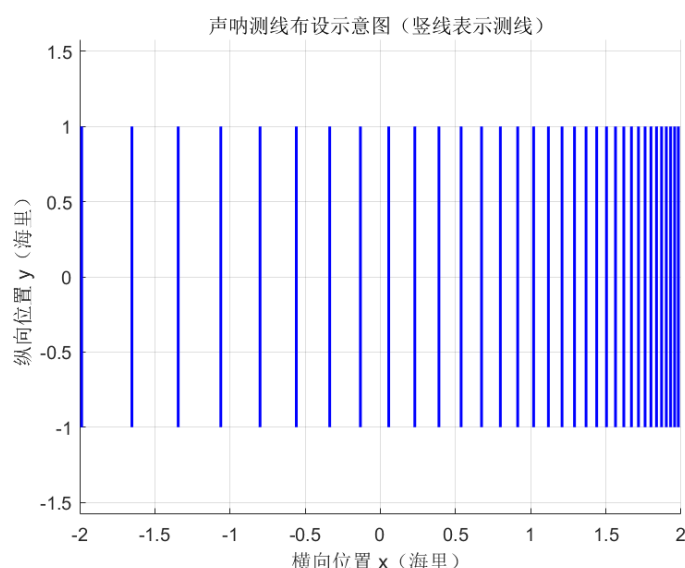


图 16 测线位置排布图

八、问题四模型的建立与求解

针对问题四，建立了基于平面分割和拟合的测线布施模型，通过划分区域并区域平面拟合的方式，将问题转化为第三问的模型从而求解测线总长、漏测海区占比等指标。对于海域地形图，首先绘制该海域的等深线图，随后根据地形的特征将其划分为若干近似于均匀坡面的区域，并通过拟合平面将其转换为理想坡面进行计算，其中地形特殊的区域采用单独分析。

8.1 问题四模型的建立

8.1.1 海域地形的处理和分析

根据海水深度数据，可以通过插值方法绘制出等深线示意图，从而便于观察与问题的分析，具体示意图如下：

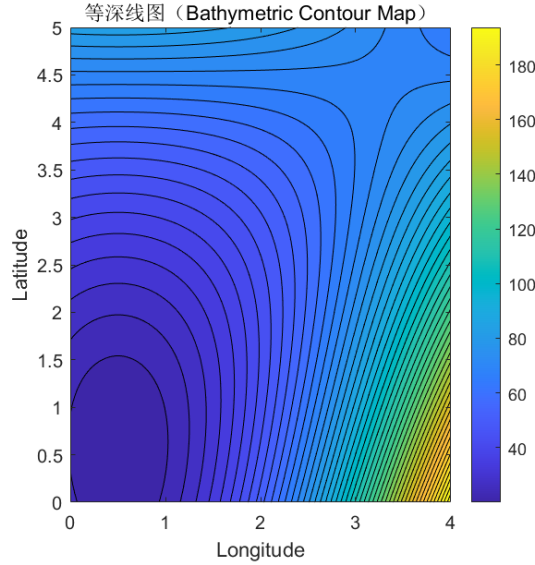


图 17 等深线示意图

对于问题四海域的处理，采取问题三的思路，沿等深线方向排布侧线能取得最好的效果，即最短的测线总长度以及较低的重叠率。再使用图的切分并进行平面拟合的方法，将问题分解成多个便于解决的子问题。对于每一个被切分的局部部分，再进行分析具体设计排布测线，并通过拟合平面获得的坡度角调整测线，具体设计测线的间距和排布。

8.1.2 基于平面分割和拟合的测线布施模型

设拟合平面方程为 $Z = aX + bY + c$ ，有法线为 $(a, b, -1)$ ，水平面的法向量为 $(0, 0, 1)$ ，由向量内积的公式

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

可得坡度角为：

$$\cos \alpha = \frac{(a, b, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}$$

将拟合平面法向量投影至水平面上得向量 $(a, b, 0)$ ，再将其投影到海坡上，可得坡面上任意一条航线的向量。对于该向量的计算，考虑利用投影三角形的性质和向量 $(a, b, 0)$ ，

可得同一航线上任意一点的向量为 $(a, b, \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{a^2 + b^2})$, 代入上文计算出的 α 可得:

$$(a, b, \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1}) \quad (18)$$

由此向量表达式可写出在坡面上任意沿法向量在水平面投影直线上的航线的参数方程为:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = ax_0 + by_0 + c + \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1} \cdot t \end{cases} \quad (19)$$

其中 x_0, y_0 为该航线所经过的某定点。

观察所得等深图, 按其等深线分布情况进行划分, 即与相邻等深线较平行的等深线划分在一起, 坡度较小的区域划分在一起, 最终依照等深线示意图将图形拆分成如下形式, 并标注海域 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII:

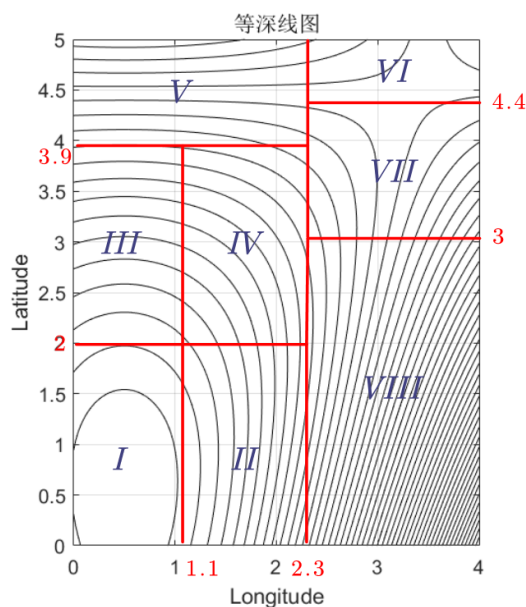


图 18 等深线划分示意图

根据以上的区域划分和平面拟合, 即可对每个平面单独计算测线总长、漏测海区占比等指标。

8.1.3 平面拟合效果分析

令拟合平面理论重叠率为 10%, 通过拟合平面的两个角, 算出测线的分布。然后计算出实际重叠率的范围。再通过其算出漏测海区百分比与重叠率超过 20% 的长度。

表 3 各区域平面拟合结果

区域编号	x 范围	y 范围	拟合平面 $z = ax + by + c$	R^2	坡度角 α
1	[0.0, 1.1]	[0.0, 2.0]	$0.000518x + 0.001523y + 0.010636$	0.58044	0.09215°
2	[1.1, 2.3]	[0.0, 2.0]	$0.014527x - 0.000989y - 0.002453$	0.94826	0.83421°
3	[0.0, 1.1]	[2.0, 3.9]	$0.000229x + 0.008295y - 0.002622$	0.98642	0.47545°
4	[1.1, 2.3]	[2.0, 3.9]	$0.006410x + 0.005783y - 0.002081$	0.94116	0.49464°
5	[0.0, 2.3]	[3.9, 5.0]	$0.000090x + 0.012194y - 0.016358$	0.98061	0.69866°
6	[2.3, 4.0]	[0.0, 3.0]	$0.027579x - 0.009169y - 0.021623$	0.93156	1.66473°
7	[2.3, 4.0]	[3.0, 4.4]	$0.007287x - 0.001528y + 0.021521$	0.78903	0.42657°
8	[2.3, 4.0]	[4.4, 5.0]	$-0.001937x + 0.001945y + 0.035781$	0.61886	0.15727°

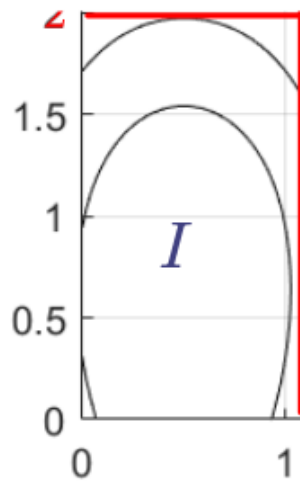


图 19 海域 I 示意图

对于海域 I，从表中可以看出拟合平面的拟合精度并不高，但根据计算出坡度角为 0.09215° 。因为坡度角非常小，这个坡很缓，所以可近似看作理想坡面。

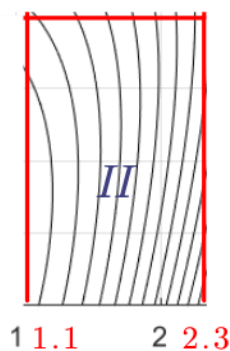


图 20 海域 II 示意图

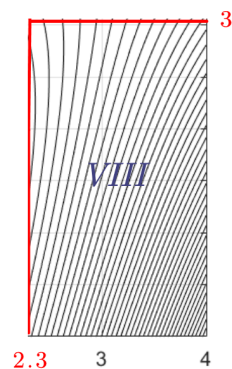


图 21 海域 VIII 示意图

对于海域 II、III、IV、V、VIII，其等深线排列整齐，排列方向大致相同，且相邻等深线间距相差较小，拟合效果较好。因此都近似选择与等深线平行的测线进行测量。

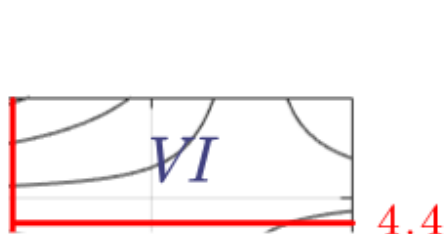


图 22 海域 VI 示意图

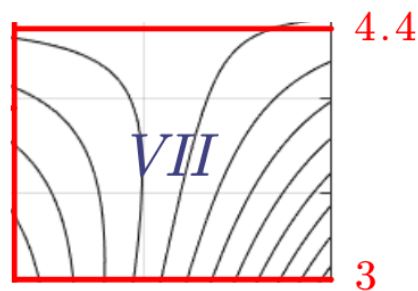


图 23 海域 VII 示意图

对于海域 VI、VII，虽然其中海域 VI 的等深线并不规律，但由于坡度角较小，最终拟合效果尚可。因此同样采用与等深线平行的测线进行测量。

8.1.4 实际覆盖率模型构建

因以上计算均基于拟合平面，现还需定义实际重合率，对于两条实际测线，取两条线上的最近点对间的距离作为 d ， w 取该点对形成的直线所得，此为实际重叠率。实际重叠率示意图如下：

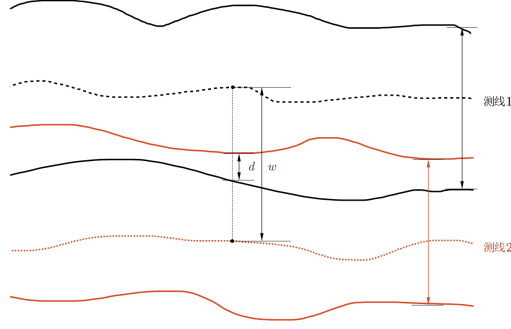


图 24 等深线划分示意图

实际覆盖率的表达式和第一问的推广模型类似，为：

$$\eta_{j+1} = 1 - \frac{d}{W_{j,2} + W_{j+1,1}} \quad (20)$$

其中

$$W_{j,2} = \frac{D_j \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \varphi_2} \quad (21)$$

$$W_{j+1,1} = \frac{D_{j+1} \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \varphi_1} \quad (22)$$

对于实际覆盖率的计算，仿照第三问分海域分别计算测线的 d 和 W ，从而得到对应的重叠率，并与理想范围 0% – 20% 进行比较，其中小于 0% 的部分即是漏测，超过 20% 的部分需要计算测线长度。

8.2 问题四模型的求解

将不同海域部分的测线结果相加，得到共 612 条测线，计算得到测线长度为 307.2 海里，超过 20% 覆盖率的测线长度为 23.57 海里。问题四结果详见附录表格。

九、模型的评价与改进

9.1 模型的优点

1. 建立的基于正弦定理的覆盖宽度模型和三维空间投影模型利用几何性质，将复杂地形分解为高度角与坡度角分量，显著降低计算复杂度，适用于不同坡度的海域场景；
2. 对于第二问，将三维问题拆解成二维平面，从而能套用问题一的模型进行分析，提高了模型的可重用性，降低了建模的复杂度；
3. 测线南北平行排布的策略显著降低了求解的复杂度，并且保证重叠率始终处于最低临界值，提高了空间利用率和测量效率。

9.2 模型的不足

1. 在第三问的求解中未考虑船只调头等因素对于测量范围和测线长度的影响，以及其他测线排布策略的效率；
2. 未考虑复杂海水环境如温度分层、洋流作用对于声波传递的干扰和信息接收。
3. 对于问题四只能大致将地形图拆分成几个部分，利用前文的模型进行近似求解，结果可能精准性较差。

9.3 模型改进

对于不同的排线策略，只采用了文字进行分析判断，后续可以考虑采用量化的形式对几个策略的测量效率进行分析，并可以考虑更多不同的测线排布策略。此外本文的模型只考虑了主测线间隔和布设，而未考虑检查线的布设方案。事实上，布设检查线可以有效地增大测量质量和测量效率。因而可以将检查线也考虑进模型中，所得的结果能与现实情况更加吻合。

参考文献

- [1] 付勇先. 海底地形的多波束测深数据预处理及三维建模方法研究 [D]. 中国地质大学 (北京), 2016.
- [2] 史磊. 单波束测深系统与浅水多波束测深系统在水下地形测量中的对比分析 [J]. 黑龙江水利科技, 2018, 46(05): 32-34. DOI: 10.14122/j.cnki.hskj.2018.05.010
- [3] 常友渠, 肖贵元, 曾敏. 贪心算法的探讨与研究 [J]. 重庆电力高等专科学校学报, 2008, 13(3): 40-42.
- [4] 刘经南, 曾文宪, 徐培亮. 整体最小二乘估计的研究进展 [J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2013, 38(5): 505-512.

附录 A 问题一

```
1 function [h, w, t, t_str] = calculate_overlap_rate(D, y, alpha_deg, theta_deg)
2     % 将输入的角度转换为弧度
3     alpha = deg2rad(alpha_deg);
4     theta = deg2rad(theta_deg);
5
6     % 计算海水深度 h
7     h = D - y * tan(alpha);
8
9     % 计算覆盖宽度 w
10    w = (D - y * tan(alpha)) * (1 / cos(alpha + theta / 2) + 1 / cos(alpha - theta / 2)) * sin(theta / 2);
11
12    % 初始化重叠率数组
13    t = NaN(size(w));
14
15    % 计算重叠率 t
16    for i = 2:length(w)
17        % 计算相邻测线位置的差值
18        delta_y = abs(y(i) - y(i-1)); % 使用绝对值计算相邻测线的距离
19
20        term1 = h(i) * sin(theta / 2) / cos(alpha - theta / 2);
21        term2 = (h(i) - delta_y * tan(alpha)) * sin(theta / 2) / cos(alpha + theta / 2);
22        t(i) = (1 - delta_y / (term1 + term2)) * 100;
23    end
24
25    % 转换重叠率 NaN 为 '-' (用于文本显示)
26    t_str = strings(size(t));
27    for i = 1:length(t)
28        if isnan(t(i))
29            t_str(i) = '-';
30        else
31            t_str(i) = sprintf('%.4f', t(i));
32        end
33    end
34    end
```



```

35 % 输出计算结果
36 fprintf('测线距中心点处的距离/m:\n');
37 disp(y);
38
39 fprintf('海水深度/m:\n');
40 disp(h);
41
42 fprintf('覆盖宽度/m:\n');
43 disp(w);
44
45 fprintf('与前一条测线的重叠率/%:\n');
46 disp(t_str);
47 end
48
49 % 输入参数
50 D = 70; % 海水深度
51 y = [-800 -600 -400 -200 0 200 400 600 800]; % 测线位置
52 alpha_deg = 1.5; % 坡度角, 单位: 度
53 theta_deg = 120; % 开角, 单位: 度
54
55 % 调用函数计算
56 [h, w, t, t_str] = calculate_overlap_rate(D, y, alpha_deg, theta_deg);

```

附录 B 问题二

```

1
2 D = 120; % 海水深度 (米)
3
4 % 测线位置 (单位: 海里)
5 y_nm = [0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1];
6 y = y_nm * 1852; % 转换为米
7
8 % 初始坡度角和开角
9 alpha0_deg = 1.5;
10 theta_deg = 120;
11
12 % 转为弧度
13 alpha0 = deg2rad(alpha0_deg);
14 theta = deg2rad(theta_deg);
15
16 % 方向角 beta (单位: 度)
17 beta_deg = [0 45 90 135 180 225 270 315];
18
19 % 初始化二维矩阵 (行: y, 列: )
20 W = zeros(length(y), length(beta_deg)); % 覆盖宽度
21 H = zeros(length(y), length(beta_deg)); % 水深
22
23 % 二维循环计算 W(i,j) = w(y, )
24 for i = 1 : length(y)
25     for j = 1 : length(beta_deg)
26         beta = deg2rad(beta_deg(j));
27         x_rad = atan(-cos(beta) * tan(alpha0));
28         h = D - y(i) * tan(x_rad);

```

```

29     x_rad = atan2(tan(alpha0) * sin(beta), 1);
30     w = h * (1 / cos(x_rad + theta / 2) + 1 / cos(x_rad - theta / 2)) * sin(theta / 2);
31     H(i, j) = h;
32     W(i, j) = w;
33     end
34 end
35
36 W_swapped = W';
37 H_swapped = H';
38
39 % 打印标题
40 fprintf('=== 覆盖宽度 w(beta, y) 表 (单位: 米, 保留4位小数) ===\n');
41
42 % 打印列标题 (y)
43 fprintf('%10s', ''); % 左上角空位
44 for i = 1:length(y_nm)
45     fprintf('%12s', sprintf('y=%.1fNM', y_nm(i)));
46 end
47 fprintf('\n');
48
49 % 打印每一行 (beta 对应的行)
50 for j = 1:length(beta_deg)
51     fprintf('%10s', sprintf('Beta_%d', beta_deg(j)));
52     for i = 1:length(y_nm)
53         fprintf('%12.4f', W_swapped(j, i)); % 保留4位小数
54     end
55     fprintf('\n');
56 end

```

附录 C 问题三

```

1
2 % 参数
3 D = 110; % 海水深度 (米)
4 D_nm = D / 1852;
5 alpha_deg = 1.5; % 坡度角 (度)
6 theta_deg = 120; % 开角 (度)
7 target_overlap = 0.10; % 目标重叠率 (10%)
8 x_limit_nm = 2; % 最大范围 (海里)
9
10 % 弧度转换
11 alpha = deg2rad(alpha_deg);
12 theta = deg2rad(theta_deg);
13 phi1 = pi/2 - theta/2 - alpha;
14 phi2 = pi/2 - theta/2 + alpha;
15
16 % 初始化测线位置数组
17 x_list = [];
18
19 % 第一个测线位置 (靠边界)
20 numerator_x1 = (D_nm * cos(alpha) * sin(theta / 2)) - 2 * sin(phi1);
21 denominator_x1 = sin(phi1) - sin(alpha) * sin(theta / 2);
22 x1 = numerator_x1 / denominator_x1;

```

```

23 x_list(1) = x1;
24
25 % 迭代计算后续测线位置
26
27 max_iter = 100; % 防止死循环
28
29 i = 1;
30 while i <= max_iter
31     % 当前测线位置
32     xi = x_list(i);
33
34     % 计算下一条测线位置
35     % 计算中间项
36     numerator_part1 = D_nm * (sin(phi1) + sin(phi2)) / (tan(alpha) * sin(phi2));
37
38     coeff = sin(phi1) / (tan(alpha) * sin(theta / 2) * (1 - target_overlap));
39     subtract = sin(phi1) / sin(phi2);
40
41     numerator = numerator_part1 + xi * (coeff - subtract);
42     denominator = 1 + coeff;
43
44     % 递推下一条测线位置
45     xi_next = numerator / denominator;
46
47
48     % 判断是否超过最大范围
49     if xi_next > x_limit_nm
50         break;
51     end
52
53     % 存入结果
54     x_list(i+1) = xi_next;
55     i = i + 1;
56 end
57
58 % 输出
59 fprintf('共生成 %d 条测线, 单位: 海里\n', length(x_list));
60 disp('每条测线位置 (单位: 海里) :');
61 disp(x_list);
62
63 % ===== 绘制测线竖线图 =====
64 figure;
65 hold on;
66
67 % 坐标范围
68 xlim([-2, 2]);
69 ylim([-1, 1]);
70
71 % 绘制每条测线 (单位为海里, 竖线)
72 for i = 1:length(x_list)
73     x = x_list(i); % 单位: 海里
74     line([x x], [-1, 1], 'Color', 'b', 'LineWidth', 1.5); % 蓝色竖线
75 end
76
77 % 标注图形
78 xlabel('横向位置 x (海里)');

```

```

79 ylabel('纵向位置 y (海里) ');
80 title('声呐测线布设示意图 (竖线表示测线) ');
81 grid on;
82 axis equal;
83
84 % 将测线位置加 2 海里偏移, 并转换为米
85 x_offset_nm = 2; % 海里偏移量
86 x_list_shifted_nm = x_list + x_offset_nm; % 加偏移 (单位: 海里)
87 x_list_shifted_m = x_list_shifted_nm * 1852; % 转换为米
88
89 % 输出结果
90 fprintf('\n每条测线位置 (单位: 米) :\n');
91 for i = 1:length(x_list_shifted_m)
92     fprintf('第 %d 条测线位置: %.4f 米\n', i, x_list_shifted_m(i));
93 end

```

附录 D 问题四

4.1 有色等深线图

```

1
2 % 读取数据
3 data = xlsread('附件.xlsx');
4
5 % 提取坐标向量
6 x = data(1, 2:end); % 第一行, 第2列到最后列, 是x坐标 (横向)
7 y = data(2:end, 1); % 第二行到最后行, 第1列, 是y坐标 (纵向)
8
9 % 提取深度矩阵 z
10 z = data(2:end, 2:end); % 去掉第一行和第一列的纯z值矩阵
11
12 % 构造原始网格
13 [X, Y] = meshgrid(x, y);
14
15 % 目标插值网格 (更细致)
16 [xi, yi] = meshgrid(linspace(min(x), max(x), 200), linspace(min(y), max(y), 200));
17
18 % 插值 (注意用 meshgrid 格式)
19 zi = griddata(X, Y, z, xi, yi, 'cubic');
20
21 % 绘图
22 figure;
23 contourf(xi, yi, zi, 50); % 填色等高线
24 colorbar;
25 hold on;
26 contour(xi, yi, zi, 50, 'k'); % 黑色轮廓线
27 xlabel('Longitude');
28 ylabel('Latitude');
29 title('等深线图 (Bathymetric Contour Map) ');
30 axis equal;

```

4.2 无色等深线图

```
1
2 data = xlsread('附件.xlsx');
3
4 % 提取坐标向量
5 x = data(1, 2:end);
6 y = data(2:end, 1);
7 z = data(2:end, 2:end);
8
9 % 构造原始网格
10 [X, Y] = meshgrid(x, y);
11
12 % 插值网格
13 [xi, yi] = meshgrid(linspace(min(x), max(x), 200), ...
14                     linspace(min(y), max(y), 200));
15 zi = griddata(X, Y, z, xi, yi, 'cubic');
16
17 % 绘图：只画等深线，不填色
18 figure;
19 contour(xi, yi, zi, 50, 'k'); % 黑色等深线
20 xlabel('Longitude');
21 ylabel('Latitude');
22 title('等深线图');
23 axis equal;
24 grid on;
```

4.3 根据范围获得拟合平面方程

```
1
2 clc;clear;
3 % 1. 读取数据
4 data = xlsread('附件.xlsx');
5
6 % 提取坐标向量
7 x = data(1, 2:end); % 横坐标向量
8 y = data(2:end, 1); % 纵坐标向量
9 z_nm = data(2:end, 2:end); % 深度矩阵
10 z = z_nm/1852;
11
12 % 构造原始网格
13 [X, Y] = meshgrid(x, y);
14
15 % 2. 插值生成更细网格
16 [xi, yi] = meshgrid(linspace(min(x), max(x), 200), ...
17                     linspace(min(y), max(y), 200));
18 zi = griddata(X, Y, z, xi, yi, 'cubic');
19
20 % 3. 绘制等深线图
21 figure;
22 contourf(xi, yi, zi, 50); % 填色等深线
23 colorbar;
24 hold on;
```

```

25 contour(xi, yi, zi, 50, 'k'); % 黑色轮廓线
26 xlabel('Longitude');
27 ylabel('Latitude');
28 title('等深线图及拟合平面叠加');
29 axis equal;
30
31 % 4. 指定拟合区域 (手动指定)
32 x_range = [0, 1.1]; % x 范围 (可根据具体坐标调整)
33 y_range = [0, 2]; % y 范围
34
35 % 画出矩形边界
36 rectangle('Position', [x_range(1), y_range(1), ...
37                     diff(x_range), diff(y_range)], ...
38           'EdgeColor', 'r', 'LineWidth', 2);
39
40 % 5. 提取该区域内的插值点
41 X_vec = xi(:);
42 Y_vec = yi(:);
43 Z_vec = zi(:);
44
45 in_region = X_vec >= x_range(1) & X_vec <= x_range(2) & ...
46           Y_vec >= y_range(1) & Y_vec <= y_range(2);
47
48 x_fit = X_vec(in_region);
49 y_fit = Y_vec(in_region);
50 z_fit = Z_vec(in_region);
51
52 % 6. 最小二乘平面拟合  $z = a*x + b*y + c$ 
53 A = [x_fit, y_fit, ones(size(x_fit))];
54 coeff = A \ z_fit;
55 a = coeff(1); b = coeff(2); c = coeff(3);
56
57 fprintf('拟合平面方程:  $z = %.4f * x + %.4f * y + %.4f$ \n', a, b, c);
58
59 % 7. 构造拟合平面网格
60 [xp, yp] = meshgrid(linspace(x_range(1), x_range(2), 20), ...
61                    linspace(y_range(1), y_range(2), 20));
62 zp = a * xp + b * yp + c;
63
64 % 8. 绘制拟合平面叠加
65 mesh(xp, yp, zp); % 绘制拟合平面
66 colormap winter
67 alpha(0.5) % 设置透明度

```

4.4 将所有拟合平面方程求解出

```

1
2 clc; clear;
3
4 data = xlsread('附件.xlsx');
5
6 % 提取坐标向量
7 x = data(1, 2:end); % 横坐标 (单位: 海里)
8 y = data(2:end, 1); % 纵坐标 (单位: 海里)

```

```

9  z_nm = data(2:end, 2:end);          % 深度 (单位: 米)
10 z = z_nm / 1852;                    % 转换为海里
11
12 % 构造原始网格
13 [X, Y] = meshgrid(x, y);
14
15 [xi, yi] = meshgrid(linspace(min(x), max(x), 200), ...
16                     linspace(min(y), max(y), 200));
17 zi = griddata(X, Y, z, xi, yi, 'cubic');
18
19 figure;
20 contour(xi, yi, zi, 50, 'k'); hold on;
21 xlabel('Longitude (NM)');
22 ylabel('Latitude (NM)');
23 title('批量平面拟合与等深线叠加');
24 axis equal;
25 view(3);
26 colormap(parula);
27
28
29 regions = [
30     0, 1.1, 0, 2;
31     1.1, 2.3, 0, 2;
32     0, 1.1, 2, 3.9;
33     1.1, 2.3, 2, 3.9;
34     0, 2.3, 3.9, 5;
35     2.3, 4, 0, 3;
36     2.3, 4, 3, 4.4;
37     2.3, 4, 4.4, 5;
38 ];
39
40 for k = 1:size(regions, 1)
41     x_range = regions(k, 1:2);
42     y_range = regions(k, 3:4);
43
44     % 提取该区域内的点
45     X_vec = xi(:); Y_vec = yi(:); Z_vec = zi(:);
46     in_region = X_vec >= x_range(1) & X_vec <= x_range(2) & ...
47                 Y_vec >= y_range(1) & Y_vec <= y_range(2);
48
49     x_fit = X_vec(in_region);
50     y_fit = Y_vec(in_region);
51     z_fit = Z_vec(in_region);
52
53     % 删除 NaN 数据
54     valid = ~isnan(z_fit);
55     x_fit = x_fit(valid);
56     y_fit = y_fit(valid);
57     z_fit = z_fit(valid);
58
59     if isempty(z_fit)
60         fprintf('区域 %d 无有效数据, 跳过.\n', k);
61         continue;
62     end
63
64     % 平面拟合: z = ax + by + c

```

```

65 A = [x_fit, y_fit, ones(size(x_fit))];
66 coeff = A \ z_fit; % 求解最小二乘法的系数
67 a = coeff(1); b = coeff(2); c = coeff(3);
68
69 % 预测值 (拟合面上的 z)
70 z_pred = A * coeff; % 根据拟合系数得到的拟合平面值
71
72 % 残差: 实际值与拟合值之间的差距
73 residual = z_fit - z_pred;
74
75 % 计算均方误差 (MSE)
76 mse = mean(residual.^2); % 平均平方误差
77 rmse = sqrt(mse); % 均方根误差
78
79 % 计算决定系数 R²
80 z_mean = mean(z_fit); % 实际值的平均值
81 ss_total = sum((z_fit - z_mean).^2); % 总平方和
82 ss_res = sum(residual.^2); % 残差平方和
83 R2 = 1 - ss_res / ss_total; % 决定系数 R²
84
85 % 计算坡度角 (cos = 1 / sqrt(a² + b² + 1))
86 slope_angle = acos(1 / sqrt(a² + b² + 1)); % 坡度角 (弧度)
87 slope_angle_deg = rad2deg(slope_angle); % 转为度数
88
89 % 输出拟合信息
90 fprintf('区域 %d: x  [%.1f, %.1f], y  [%.1f, %.1f]\n', ...
91         k, x_range(1), x_range(2), y_range(1), y_range(2));
92 fprintf('拟合平面: z = %.6f * x + %.6f * y + %.6f\n', a, b, c);
93 fprintf('拟合精度: RMSE = %.5f, R² = %.5f\n', rmse, R2);
94 fprintf('坡度角: %.5f°\n\n', slope_angle_deg);
95
96 % 可视化拟合平面
97 [xp, yp] = meshgrid(linspace(x_range(1), x_range(2), 20), ...
98                     linspace(y_range(1), y_range(2), 20));
99 zp = a * xp + b * yp + c;
100
101 h = mesh(xp, yp, zp); % 绘制平面网格
102 set(h, 'FaceAlpha', 0.4); % 设置透明度
103 rectangle('Position', [x_range(1), y_range(1), ...
104                       diff(x_range), diff(y_range)], ...
105           'EdgeColor', 'r', 'LineWidth', 1);
106 end

```

4.5 解得测线数量长度及覆盖范围

```

1
2 clc; clear;
3
4 data = xlsread('附件.xlsx');
5
6 % 提取坐标向量
7 x = data(1, 2:end); % 横坐标 (单位: 海里)
8 y = data(2:end, 1); % 纵坐标 (单位: 海里)
9 z_nm = data(2:end, 2:end); % 深度 (单位: 米)

```



```

10 z = z_nm / 1852; % 转换为海里
11
12 % 原始网格
13 [X, Y] = meshgrid(x, y);
14
15 [xi, yi] = meshgrid(linspace(min(x), max(x), 200), ...
16                     linspace(min(y), max(y), 200));
17 zi = griddata(X, Y, z, xi, yi, 'cubic');
18
19 figure;
20 contour(xi, yi, zi, 50, 'k'); hold on;
21 xlabel('Longitude (NM)');
22 ylabel('Latitude (NM)');
23 title('批量平面拟合与等深线叠加');
24 axis equal;
25 view(3);
26 colormap(parula);
27
28
29 regions = [
30     0, 1.1, 0, 2;
31     1.1, 2.3, 0, 2;
32     0, 1.1, 2, 3.9;
33     1.1, 2.3, 2, 3.9;
34     0, 2.3, 3.9, 5;
35     2.3, 4, 0, 3;
36     2.3, 4, 3, 4.4;
37     2.3, 4, 4.4, 5;
38 ];
39
40
41 for k = 1:size(regions, 1)
42     x_range = regions(k, 1:2);
43     y_range = regions(k, 3:4);
44
45     % 提取该区域内的点
46     X_vec = xi(:); Y_vec = yi(:); Z_vec = zi(:);
47     in_region = X_vec >= x_range(1) & X_vec <= x_range(2) & ...
48                 Y_vec >= y_range(1) & Y_vec <= y_range(2);
49
50     x_fit = X_vec(in_region);
51     y_fit = Y_vec(in_region);
52     z_fit = Z_vec(in_region);
53
54     % 删除 NaN 数据
55     valid = ~isnan(z_fit);
56     x_fit = x_fit(valid);
57     y_fit = y_fit(valid);
58     z_fit = z_fit(valid);
59
60     if isempty(z_fit)
61         fprintf('区域 %d 无有效数据, 跳过.\n', k);
62         continue;
63     end
64
65     % ===== 平面拟合: z = ax + by + c =====

```

```

66 A = [x_fit, y_fit, ones(size(x_fit))];
67 coeff = A \ z_fit;
68 a = coeff(1); b = coeff(2); c = coeff(3);
69
70 % ===== 坡度角计算 =====
71 slope_angle = acos(1 / sqrt(a^2 + b^2 + 1)); % 弧度
72 slope_angle_deg = rad2deg(slope_angle);
73
74 % 输出信息
75 fprintf('区域 %d: x  [%.1f, %.1f], y  [%.1f, %.1f]\n', ...
76         k, x_range(1), x_range(2), y_range(1), y_range(2));
77 fprintf('拟合平面: z = %.6f * x + %.6f * y + %.6f\n', a, b, c);
78 fprintf('坡度角: %.5f°\n\n', slope_angle_deg);
79
80 % ===== 可视化拟合平面 =====
81 [xp, yp] = meshgrid(linspace(x_range(1), x_range(2), 20), ...
82                     linspace(y_range(1), y_range(2), 20));
83 zp = a * xp + b * yp + c;
84 h = mesh(xp, yp, zp);
85 set(h, 'FaceAlpha', 0.4);
86 rectangle('Position', [x_range(1), y_range(1), ...
87                       diff(x_range), diff(y_range)], ...
88           'EdgeColor', 'r', 'LineWidth', 1);
89
90 % ===== 测线布设 =====
91 x_center = mean(x_range); % 中心位置
92 D = mean(z_fit) * 1852; % 平均深度 (米)
93 D_nm = D / 1852; % 海里
94 theta_deg = 120;
95 target_overlap = 0.10;
96 theta = deg2rad(theta_deg);
97 phi1 = pi/2 - theta/2 - slope_angle;
98 phi2 = pi/2 - theta/2 + slope_angle;
99
100 % 测线间距 Δx 计算 (起始间距)
101 numerator_x1 = (D_nm * cos(slope_angle) * sin(theta / 2)) - 2 * sin(phi1);
102 denominator_x1 = sin(phi1) - sin(slope_angle) * sin(theta / 2);
103 delta_x = numerator_x1 / denominator_x1;
104
105 % ===== 向右递推 =====
106 x_right = x_center;
107 x_right_list = x_right;
108
109 for i = 1:100
110     numerator_part1 = D_nm * (sin(phi1) + sin(phi2)) / (tan(slope_angle) * sin(phi2));
111     coeff = sin(phi1) / (tan(slope_angle) * sin(theta / 2) * (1 - target_overlap));
112     subtract = sin(phi1) / sin(phi2);
113     numerator = numerator_part1 + x_right_list(end) * (coeff - subtract);
114     denominator = 1 + coeff;
115     x_next = numerator / denominator;
116
117     if x_next > x_range(2)
118         break;
119     end
120     x_right_list(end+1) = x_next;
121 end

```

```

122
123 % ===== 向左递推 (对称) =====
124 x_left_list = 2 * x_center - x_right_list(2:end);
125 x_list = sort([x_left_list, x_right_list]);
126
127 % ===== 输出测线位置 =====
128 fprintf('区域 %d 共生成 %d 条测线 (中心对称), 单位: 海里\n', k, length(x_list));
129 disp(x_list);
130 end

```