

Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal

Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

28 de junio de 2011

Índice

17.1. Núcleo de una transformación lineal	1
17.2. El núcleo de una matriz y la tecnología	6
17.3. Inyectividad de transformaciones lineales	6
17.4. El Rango de una transformación	7
17.5. Suprayectividad de transformaciones lineales	10
17.6. Núcleo e Imagen son subespacios	11
17.7. Nulidad y Rango de una Transformación	12
17.8. SEL a través del kernel y el rango	14
17.9. Ejemplo clave	14

17.1. Núcleo de una transformación lineal

Definición 17.1

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. El *núcleo* T es el subconjunto formado por todos los vectores en V que se mapean a cero en W .

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in W\}$$

Ejemplo 17.1

Indique cuáles opciones contienen un vector en el núcleo de la transformación de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^3 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 3z \\ -23x - 15y - 18z \\ -5x - 3y - 3z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)'$
2. $\mathbf{v}_2 = (12, -28, 8)'$
3. $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)'$
4. $\mathbf{v}_4 = (3, -7, 2)'$
5. $\mathbf{v}_5 = (2, -4, -4)'$
6. $\mathbf{v}_6 = (9, -18, -15)'$

Solución

Antes de pasar a la verificación, es conveniente observar que es posible encontrar una matriz \mathbf{A} tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Es decir, aplicar T a un vector \mathbf{x} es equivalente a multiplicar por una cierta matriz \mathbf{A} al vector \mathbf{x} .

Empecemos con la dimensión de \mathbf{A} : como \mathbf{A} se multiplica por la izquierda de \mathbf{x} y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ entonces el número de columnas de \mathbf{A} es 3. Por otro lado, como el resultado $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ es un vector de \mathbf{R}^3 , entonces el número de renglones de \mathbf{A} es 3. Si requerimos que

$$\begin{bmatrix} -2x + 3z \\ -23x - 15y - 18z \\ -5x - 3y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ - & - & - \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

No es difícil ver

$$\begin{bmatrix} -2x + 3z \\ -23x - 15y - 18z \\ -5x - 3y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

El vector \mathbf{v}_1 está en el núcleo de T debido a que

$$T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

El vector \mathbf{v}_2 está en el núcleo de T debido a que

$$T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -28 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

El vector \mathbf{v}_3 no está en el núcleo de T debido a que

$$T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

El vector \mathbf{v}_4 está en el núcleo de T debido a que

$$T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{A}\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

El vector \mathbf{v}_5 no está en el núcleo de T debido a que

$$T(\mathbf{v}_5) = \mathbf{A}\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 86 \\ 14 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

El vector \mathbf{v}_6 no está en el núcleo de T debido a que

$$T(\mathbf{v}_6) = \mathbf{A}\mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -23 & -15 & -18 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ -333 \\ -54 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \blacksquare$$

Ejemplo 17.2

Determine el núcleo de la transformación de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^3 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 3z \\ -23x - 15y - 18z \\ -5x - 3y - 3z \end{bmatrix}$$

Solución

Un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)'$ pertenece al núcleo de T si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, es decir si:

$$T((a, b, c)') = \begin{bmatrix} -2a + 3c \\ -23a - 15b - 18c \\ -5a - 3b - 3c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ (en } \mathbf{R}^3 \text{)}$$

Por lo tanto, para pertenecer al núcleo debe cumplirse

$$\begin{aligned} -2a + 3c &= 0 \\ -23a - 15b - 18c &= 0 \\ -5a - 3b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

Reduciendo tenemos:

$$\begin{aligned} a - 3/2 c &= 0 \\ b + 7/2 c &= 0 \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 c \\ -7/2 c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3/2 \\ -7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que el núcleo de T en este caso es un espacio generado:

$$\text{Ker}(T) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Además, la dimensión de $\text{Ker}(T)$ es 1, lo cual coincide con el número de columnas sin pivote en la reducida de \mathbf{A} (La matriz que define a la transformación T). Geométricamente en \mathbf{R}^3 este generado corresponde a la línea que pasa por el origen y con vector de dirección $(3/2, -7/2, 1)'$ que es:

$$\frac{x}{3/2} = \frac{y}{-7/2} = \frac{z}{1} \blacksquare$$

Ejemplo 17.3

Determine el núcleo de la transformación de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^2 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix}$$

Solución

Un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)'$ pertenece al núcleo de T si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, es decir si:

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a + b + c \\ 2a + 2b + 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ (en } \mathbf{R}^2 \text{)}$$

Por lo tanto, para pertenecer al núcleo debe cumplirse

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 2a + 2b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Reduciendo tenemos:

$$a + b + c = 0$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b - c \\ b \\ c \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, que el núcleo de T en este caso es un espacio generado:

$$\text{Ker}(T) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Además, la dimensión de $\text{Ker}(T)$ es 2, lo cual corresponde al número de columnas sin pivote de la reducida de la matriz que define a T . Geométricamente, en \mathbf{R}^3 este generado corresponde a un plano que pasa por el origen y con vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1)'$ que es:

$$1x + 1y + 1z = x + y + z = 0 \blacksquare$$

Ejemplo 17.4

Determine el núcleo de $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y + z \end{bmatrix}$$

Solución

Sabemos que $\text{Ker}(T)$ es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v} = \langle x, y, z \rangle'$ de \mathbf{R}^3 tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (en \mathbf{R}^2):

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x - z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Cuya solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De ahí que,

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ -z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vemos que la dimensión de $\text{Ker}(T)$ es 1, lo cual corresponde al número de columnas sin pivote en la matriz que define a T . Geométricamente, en \mathbf{R}^3 esto corresponde a la recta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \blacksquare$$

Ejemplo 17.5

Determine el núcleo de $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y + z \\ x - y \end{bmatrix}$$

Solución

Sabemos que $\text{Ker}(T)$ es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v} = \langle x, y, z \rangle'$ de \mathbf{R}^3 tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (en \mathbf{R}^3):

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x - z \\ y + z \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema tiene solución única y es $\mathbf{0}$. Por tanto,

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$$

Ejemplo 17.6

Indique la opción que describe adecuadamente al conjunto

$$\mathcal{B} = \{\langle 0, 0, 3, 2 \rangle', \langle 0, 1, 0, 0 \rangle'\}$$

respecto al núcleo de la transformación de \mathbf{R}^4 en \mathbf{R}^4 definida como

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3w - 2z \\ 3w - 2z \\ 12w - 8z \\ 15w - 10z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

- ☐ A Es base para el núcleo.
- ☐ B Está en el núcleo; pero no es LI ni no lo genera.
- ☐ C Genera al núcleo pero no es LI.
- ☐ D Está en el núcleo; es LI pero no lo genera.
- ☐ E No es comparable con el núcleo.

Solución

Determinemos el núcleo de T :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 15 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Por lo tanto, los vectores del núcleo tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\text{Ker}(T) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comparemos ahora $\text{Gen}\{\mathcal{B}\}$ con $\text{Ker}(T)$:

a) ¿ $\text{Gen}\{\mathcal{B}\} \subseteq \text{Ker}(T)$?

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Concluimos que sí: $\text{Gen}\{\mathcal{B}\} \subseteq \text{Ker}(T)$.

b) ¿ $\text{Ker}(T) \subseteq \text{Gen}\{\mathcal{B}\}$?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Concluimos que no: $\text{Ker}(T) \not\subseteq \text{Gen}\{\mathcal{B}\}$. De estos cálculos (los que llevan \mathcal{B} primero) también se deduce que: c) \mathcal{B} es linealmente independiente. Por lo tanto, la opción correcta es D:

- está contenido en el núcleo (a)
- no genera al núcleo (b); y
- \mathcal{B} es li (c) ■

17.2. El núcleo de una matriz y la tecnología

Prácticamente la totalidad de los sistemas computacionales que manejan matrices vienen acompañados de funciones para manejar el kernel de una matriz. En el caso de Maple la instrucción **nullspace(A)** entrega una base para el núcleo de la transformación lineal $T(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \mathbf{X}$. Desafortunadamente, para la TI Voyage 200 no aparece un comando similar.

17.3. Inyectividad de transformaciones lineales

Una pregunta importante sobre funciones es si una función dada es inyectiva, o también dicho 1 a 1. Recuerde que una función es inyectiva si no hay dos elementos diferentes del dominio que tienen la misma evaluación. Es decir, es f es inyectiva si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. Este concepto en las funciones lineales en espacios vectoriales tiene un comportamiento simple: $f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Es decir:

Teorema

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. T es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Note que en los ejemplos anteriores, sólo la última función fue inyectiva.

Notas

En resumen:

- Para ver si un vector está en el núcleo de una transformación lineal se debe aplicar la transformación. El vector \mathbf{x} está en el núcleo de T si y sólo si $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
- Determinar el núcleo de una transformación lineal equivale a encontrar la solución general de un SEL homogéneo.
- Para determinar el núcleo de una transformación, debe encontrar la matriz que define a la transformación lineal y resolver $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$. Hay dos alternativas: el sistema tiene solución única o el sistema tienen infinitas soluciones. En el caso de infinitas soluciones, la fórmula general muestra al núcleo como un espacio generado donde el número columnas sin pivote es la dimensión del núcleo como subespacio. En caso de tener solución única, el núcleo de T es el conjunto formado por el vector cero.
- Para determinar si una transformación lineal es inyectiva, todas las columnas de la reducida de la matriz que define a la transformación lineal deben de tener pivote.

17.4. El Rango de una transformación

Definición 17.2

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. El *rango* o *imagen* de T es el conjunto de todas las imágenes de T en W .

$$R(T) = \{\mathbf{w} \in W | \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para algún } \mathbf{v} \in V\}$$

Es decir, el rango es el subconjunto de W formado por aquellos vectores que provienen de algún vector de V .

Ejemplo 17.7

Indique cuáles opciones contienen un vector en la imagen de la transformación de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^3 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y + z \\ 8x + 12y + 6z \\ -4x - 2y - 4z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)'$
2. $\mathbf{v}_2 = (2, 8, -4)'$
3. $\mathbf{v}_3 = (-23, -52, 6)'$
4. $\mathbf{v}_4 = (5, 12, -2)'$
5. $\mathbf{v}_5 = (-3, 1, -1)'$

Solución

El vector $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)'$ de \mathbf{R}^3 está en la imagen de T si existe un vector $(a, b, c)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((a, b, c)') = \mathbf{v}_1$.

Es decir, si es consistente el sistema

$$\begin{aligned} 2a + 5b + c &= 0 \\ 8a + 12b + 6c &= 0 \\ -4a - 2b - 4c &= 0 \end{aligned}$$

Pero este sistema por ser homogéneo es consistente. Por tanto el vector \mathbf{v}_1 **sí** está en la imagen de T .

El vector $\mathbf{v}_2 = (2, 8, -4)'$ de \mathbf{R}^3 está en la imagen de T si existe un vector $(a, b, c)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((a, b, c)') =$

\mathbf{v}_2 . Es decir, si es consistente el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + 5b + c &= 2 \\ 8a + 12b + 6c &= 8 \\ -4a - 2b - 4c &= -4 \end{aligned}$$

Al reducir la matriz aumentada se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/8 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

por ser consistente el sistema, el vector \mathbf{v}_2 **sí** está en la imagen de T .

El vector $\mathbf{v}_3 = (-23, -52, 6)'$ de \mathbf{R}^3 está en la imagen de T si existe un vector $(a, b, c)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((a, b, c)') = \mathbf{v}_3$. Es decir, si es consistente el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + 5b + c &= -23 \\ 8a + 12b + 6c &= -52 \\ -4a - 2b - 4c &= 6 \end{aligned}$$

Al reducir la matriz aumentada se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/8 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

por ser consistente el sistema, el vector \mathbf{v}_3 **sí** está en la imagen de T .

El vector $\mathbf{v}_4 = (5, 12, -2)'$ de \mathbf{R}^3 está en la imagen de T si existe un vector $(a, b, c)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((a, b, c)') = \mathbf{v}_4$ es decir si es consistente el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + 5b + c &= 5 \\ 8a + 12b + 6c &= 12 \\ -4a - 2b - 4c &= -2 \end{aligned}$$

Al reducir la matriz aumentada se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/8 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

por ser consistente el sistema, el vector \mathbf{v}_4 **sí** está en la imagen de T .

El vector $\mathbf{v}_5 = (-3, 1, -1)'$ de \mathbf{R}^3 está en la imagen de T si existe un vector $(a, b, c)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((a, b, c)') = \mathbf{v}_5$ es decir si es consistente el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + 5b + c &= -3 \\ 8a + 12b + 6c &= 1 \\ -4a - 2b - 4c &= -1 \end{aligned}$$

Al reducir la matriz aumentada se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/8 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

por ser inconsistente el sistema, el vector \mathbf{v}_5 **no** está en la imagen de T ■

Ejemplo 17.8

Determine la imagen de la transformación lineal de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^3 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y + z \\ 8x + 12y + 6z \\ -4x - 2y - 4z \end{bmatrix}$$

Solución

El vector $\mathbf{v}_1 = (a, b, c)'$ de \mathbf{R}^3 está en la imagen de T si existe un vector $(x, y, z)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((x, y, z)') = \mathbf{v}_1'$ es decir si es consistente el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= a \\ 8x + 12y + 6z &= b \\ -4x - 2y - 4z &= c \end{aligned}$$

Al formar la matriz aumentada y escalonar se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & a \\ 0 & -8 & 2 & -4a + b \\ 0 & 0 & 0 & -2a + b + c \end{array} \right]$$

Por tanto, $(a, b, c)'$ está en la imagen de T ssi el sistema anterior es consistente ssi $-2a + b + c = 0$. Esto ocurrirá si y sólo si $a = 1/2b + 1/2c$. Es decir, $(a, b, c)'$ está en la imagen de T si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2b + 1/2c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$R(T) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Geoméricamente, $R(T)$ es el plano $2a - b - c = 0$ (o $2x - y - z = 0$) en \mathbf{R}^3 ■

Ejemplo 17.9

Determine la imagen de la transformación lineal de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^4 definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + 2z \\ x - y \\ -2x + y - z \\ x - y \end{bmatrix}$$

Solución

El vector $\mathbf{v} = (a, b, c, d)'$ de \mathbf{R}^4 está en la imagen de T si existe un vector $(x, y, z)'$ en \mathbf{R}^3 tal que $T((x, y, z)') = \mathbf{v}'$. Es decir, si es consistente el sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x - y &= b \\ -2x + y - z &= c \\ x - y &= c \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -2 & 1 & -1 & c \\ 1 & -1 & 0 & d \end{array} \right]$$

En este ejemplo ilustraremos el uso de una técnica más eficiente que la usada en el problema anterior. La idea es que manejaremos sólo los coeficientes de a , b , c y d . De esta manera una expresión en estas variables la podemos representar por medio de un vector renglón con cuatro componentes. Así

$$\begin{array}{lll} 2a + 3b - c + 8d & \text{se representa por} & (2, 3, -1, 8) \\ a & \text{se representa por} & (1, 0, 0, 0) \\ 3a - 3b - 3d & \text{se representa por} & (3, -3, 0, -3) \\ c & \text{se representa por} & (0, 0, 1, 0) \end{array}$$

Con esta idea, el sistema cuya matriz nos interesa revisar nos queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{-1} \end{array} \right]$$

Por tanto, la matriz aumentada representa un sistema consistente si y sólo si

$$\begin{array}{lcl} \textcolor{red}{a} & = & \textcolor{red}{-2c - 3d} \\ \textcolor{blue}{b} & = & \textcolor{blue}{d} \end{array}$$

Resumiendo, $(a, b, c, d)'$ está en la imagen de T si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para c y d escalares. Por tanto

$$R(T) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \blacksquare$$

Nota

Observe que tanto $\text{Ker}(T)$ como $R(T)$ de una transformación lineal T son conjuntos no vacíos

$$T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

implica que

- $\mathbf{0}_V \in \text{Ker}(T)$ y
- $\mathbf{0}_W \in R(T)$.

17.5. Suprayectividad de transformaciones lineales

Una pregunta importante sobre funciones es si una función dada es suprayectiva, o también dicho sobre. Recuerde que una función es suprayectiva si para todo elemento en el codominio hay un elemento en el dominio que bajo la función se transforma en él. Es decir, es f es suprayectiva si y sólo si $f(x) = a$ es consistente para todo a en el codominio de f . en espacios vectoriales tiene un comportamiento simple:

Teorema

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$$

un conjunto generador para V . T es suprayectiva si y sólo si $\text{Gen}(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_m)) = W$.

No que lo anterior implica que:

Si T es suprayectiva, entonces $\dim(V) \geq \dim(W)$.

En particular, si por ejemplo $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ es lineal, entonces T no puede ser sobre!

Notas

En resumen:

- Para ver si un vector está en la imagen de una transformación lineal se debe ver si un sistema es consistente.
- Para determinar el rango de una transformación, debe encontrar la matriz que define a la transformación lineal y reducir $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$. Si todo renglón tiene pivote la función es suprayectiva. Es decir, todo vector del codominio es imagen de un vector en el dominio. Si hay renglones sin pivote en la parte izquierda se debe forzar la consistencia igualando a cero los elementos en la parte derecha de la reducida. El rango entonces queda como un espacio generado, el cual es precisamente el espacio generado por las columnas. Su dimensión será el número de pivotes en la reducida de la matriz \mathbf{A} .
- Para determinar si una transformación lineal es suprayectiva, todos los renglones en la reducida de \mathbf{A} deben de tener pivotes.

17.6. Núcleo e Imagen son subespacios

La propiedad fundamental del núcleo y del contradominio es que ambos son espacios vectoriales:

Teorema

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

- $\text{Ker}(T)$ es un subespacio de V .
- $\text{R}(T)$ es un subespacio de W .

Demostración

El núcleo de T es subespacio

Sean \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 elementos del núcleo de T y c un escalar cualquiera. Así $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} = T(\mathbf{v}_2)$, y por tanto:

$$T(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) = c_1 \mathbf{0} + c_2 \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

probando que $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ está también en el núcleo de T . Lo cual a su vez prueba que el núcleo de T es un subespacio de V .

La imagen de T es subespacio

Sean \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 elementos de la imagen de T y c un escalar cualquiera. Así $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ y $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ para algunos \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 en V , y por tanto:

$$T(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) = c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2$$

probando que $c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2$ es imagen de $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ y por consiguiente $c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2$ está también en la imagen de T . Lo cual a su vez prueba que la imagen de T es un subespacio de W ■

17.7. Nulidad y Rango de una Transformación

Debido al resultado anterior el núcleo y la imagen de una transformación lineal son espacios vectoriales. Como espacios vectoriales, ellos tienen una dimensión asociada. Estas dimensiones tienen nombre específicos:

Definición 17.3

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- La *nulidad de T* es la dimensión de $\text{Ker}(T)$.
- El *rango de T* es la dimensión de $\text{R}(T)$.

El siguiente resultado permite calcular fácilmente la nulidad y el rango de una transformación matricial.

Teorema

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Suponga que T corresponde a la transformación matricial asociada a \mathbf{A} . Entonces:

- $\text{Ker}(T) = \text{V}(\mathbf{A}) = \text{Espacio nulo de } \mathbf{A}$
- $\text{R}(T) = \text{C}(\mathbf{A}) = \text{Espacio generado por las columnas de } \mathbf{A}$
- $\text{Nulidad}(T) = \text{Nulidad}(\mathbf{A}) = \text{Número de columnas sin pivote en } \mathbf{A} \text{ reducida.}$
- $\text{Rango}(T) = \text{Rango}(\mathbf{A}) = \text{Número de columnas con pivote en } \mathbf{A} \text{ reducida.}$

Note que el resultado anterior indica que para cualquier transformación lineal $T : V \rightarrow W$,

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{R}(T)) \\ \dim(\text{R}(T)) &\leq \dim(W) \end{aligned} \tag{1}$$

Así por ejemplo:

$T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ lineal no puede ser inyectiva pues

$$4 = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{R}(T)) \leq \dim(\text{Ker}(T)) + 3$$

por tanto, $\dim(\text{Ker}(T)) \geq 1$ probando que $\text{Ker}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

$T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^8$ lineal no puede ser sobre pues

$$4 = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{R}(T))$$

por tanto, $\dim(\text{R}(T)) \leq 4$ probando que $\text{R}(T) \neq \mathbf{R}^8$

Ejemplo 17.10

Calcule las bases para el núcleo y la imagen y determine la nulidad y el rango de

$$T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3, T((x, y, z, w)') = (x + 3z, y - 2z, w)'$$

Solución

De acuerdo con el teorema previo, basta expresar a T como transformación matricial y obtener las bases para las columnas y el espacio nulo de su matriz estándar \mathbf{A} . \mathbf{A} se expresa con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ya está en forma escalonada reducida por operaciones de renglón, los vectores $\{(1, 0, 0)', (0, 1, 0)', (0, 0, 1)'\}$ forman una base para $\text{Col}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(T) = \mathbf{R}^3$. Por otra parte, $\{(-3, 2, 1, 0)'\}$ es una base para $V(\mathbf{A}) = \text{Ker}(T)$. De modo que el rango de T es 3 y la nulidad es 1.

$$\text{Ker}(T) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ sólo tiene la solución trivial}$$

y

$$\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}^m \Leftrightarrow \text{las columnas de } \mathbf{A} \text{ generan a } \mathbf{R}^m \blacksquare$$

Ejemplo 17.11

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(-2x - 1)y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 4x$$

pensando el lado izquierdo de la ecuación como una transformación lineal de \mathcal{P}_2 en \mathcal{P}_3 .

Solución

Definamos T de \mathcal{P}_2 en \mathcal{P}_3 por

$$\begin{aligned} T(p(x) = ax^2 + bx + c) &= (-2x - 1)p'(x) + 2p(x) \\ &= -2ax^2 - 2ax - b + 2c \end{aligned}$$

Viendo los polinomios como vectores tenemos que la transformación anterior queda:

$$T \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b + 2c \\ -2a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

El problema de resolver la ED se transforma encontrar un $p(x)$ que cumpla: $T(p(x)) = 4x^2 + 4x$. Es decir, en encontrar $(c, b, a)'$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formando la aumentada y reduciendo tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como el sistema es consistente, la primera conclusión es que **sí** existe solución en \mathcal{P}_2 . También vemos que hay infinitas soluciones las cuales podemos calcular:

$$\left. \begin{array}{l} c - 1/2b = 0 \\ a = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 1/2b \\ b = b \\ a = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2b \\ b \\ -2 \end{pmatrix}$$

Y separando vectores

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución general de la ED en \mathcal{P}_2 queda:

$$y(x) = -2x^2 + b(1/2 + x), \quad b \text{ escalar libre } \blacksquare$$

17.8. SEL a través del kernel y el rango

Veamos ahora el análisis de un SEL a la luz de los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal. Supongamos que estamos resolviendo el SEL $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si definimos la transformación lineal $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$, entonces

- El sistema será consistente si y sólo si el vector \mathbf{b} pertenece a la imagen de T .
- Si el SEL es consistente, entonces: el sistema tendrá solución única si y sólo si el núcleo de T se reduce al vector cero.
- Si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son dos soluciones, entonces $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ pertenece al núcleo de T . Por tanto: Si el sistema tiene soluciones infinitas, entonces la solución general tiene la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1 \mathbf{z}_1 + \cdots + c_k \mathbf{z}_k$$

donde \mathbf{x}_p es una solución particular y $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ constituyen un conjunto generador para el núcleo.

17.9. Ejemplo clave

Ejemplo 17.12

Suponga que usted es maestro de álgebra lineal y le ha pedido a sus alumnos que resuelvan el SEL:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 10 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -15 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 13 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analice las siguientes soluciones dadas por sus alumnos:

José dice que la solución general es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución particular de José es $\mathbf{j}_p = \langle 3, -1, 1, 0, 0, 0 \rangle'$ y el generador de las soluciones al sistema homogéneo es:

$$\mathbf{j}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Revisemos sus respuestas:

- ¿Es \mathbf{j}_p solución al sistema original?

Por conveniencia hacemos: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_p - \mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_p - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 13 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -13 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como no da el vector cero, concluimos que la solución particular dada por José no lo es.

- ¿La fórmula para el sistema homogéneo genera todas las soluciones al sistema homogéneo asociado?

Por conveniencia, con los vectores en \mathbf{j}_h formamos una matriz que representamos también por \mathbf{j}_h y realizamos el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_h$; como obtenemos una matriz de ceros, concluimos que en la solución de José la fórmula efectivamente da soluciones al sistema homogéneo. La pregunta que cabe ahora es si acaso las da todas. Cuando aplicamos rref a \mathbf{A} vemos que tiene 3 columnas sin pivote, por tanto, la dimensión del espacio nulo de \mathbf{A} es 3. Como al aplicar rref a la matriz \mathbf{j}_h tiene tres pivotes, concluimos que el conjunto \mathbf{j}_h es linealmente independiente, está dentro del núcleo y tiene tres elementos; por tanto, debe ser base para el núcleo. Por tanto, en la fórmula de José la parte asociada a la solución a la homogénea es adecuada.

María dice que la solución general es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -10 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La solución particular de María es $\mathbf{m}_p = \langle 7, 0, -7, 2, 1, 0 \rangle'$ y el generador de las soluciones al sistema homogéneo es:

$$\mathbf{m}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -10 \\ 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Revisemos sus respuestas:

- ¿Es \mathbf{m}_p solución al sistema original?

Por conveniencia hacemos: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_p - \mathbf{b}$: como sí da el vector cero, concluimos que la solución particular dada por María sí lo es.

- ¿La fórmula para el sistema homogéneo genera todas las soluciones al sistema homogéneo asociado?

Por conveniencia, con los vectores en \mathbf{m}_h formamos una matriz que representamos también por \mathbf{m}_h y realizamos el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_h$; como obtenemos una matriz de ceros, concluimos que en la solución de María la fórmula efectivamente da soluciones al sistema homogéneo. La pregunta que cabe ahora es si acaso las da todas. Cuando aplicamos rref a \mathbf{A} vemos que tiene 3 columnas sin pivote, por tanto, la dimensión del espacio nulo de \mathbf{A} es 3. Como al aplicar rref a la matriz \mathbf{m}_h tiene dos pivotes, concluimos que el conjunto \mathbf{m}_h es linealmente dependiente y está dentro del núcleo; por tanto, no puede ser base para el núcleo. Por tanto, en la fórmula de María la parte asociada a la solución a la homogénea es incompleta.

- Resumiendo; la fórmula de María no genera todas las soluciones al sistema.

Luis dice que la solución general es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución particular de Luis es $\mathbf{l}_p = \langle -3, 0, 8, -3, 1, 0 \rangle'$ y el generador de las soluciones al sistema homogéneo es:

$$\mathbf{l}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Revisemos sus respuestas:

- ¿Es \mathbf{l}_p solución al sistema original?
Por conveniencia hacemos: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{l}_p - \mathbf{b}$: como sí da el vector cero, concluimos que la solución particular dada por Luis sí lo es.
- ¿La fórmula para el sistema homogéneo genera todas las soluciones al sistema homogéneo asociado?
Por conveniencia, con los vectores en \mathbf{l}_h formamos una matriz que representamos también por \mathbf{l}_h y realizamos el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{l}_h$;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{l}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

como obtenemos una matriz con dos primeras columnas de ceros y una tercera que no es de ceros, concluimos que en la solución de Luis la fórmula da algunas soluciones al sistema homogéneo (las que tienen $c_3 = 0$) pero también da otros vectores que no son solución (los que tienen $c_3 \neq 0$). Por tanto, la solución de Luis es parcialmente correcta y parcialmente incorrecta.

Carolina dice que la solución general es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La solución particular de Carolina es $\mathbf{c}_p = \langle 3, 0, -1, 0, 1, 0 \rangle'$ y el generador de las soluciones al sistema homogéneo es:

$$\mathbf{c}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Revisemos sus respuestas:

- ¿Es \mathbf{c}_p solución al sistema original?
 Por conveniencia hacemos: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}_p - \mathbf{b}$: como sí da el vector cero, concluimos que la solución particular dada por Carolina sí lo es.
- ¿La fórmula para el sistema homogéneo genera todas las soluciones al sistema homogéneo asociado?
 Por conveniencia, con los vectores en \mathbf{c}_h formamos una matriz que representamos también por \mathbf{c}_h y realizamos el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}_h$; obtenemos una matriz con cuatro columnas de ceros. Esto nos indica que la fórmula correspondiente a sistema homogéneo entrega soluciones al sistema homogéneo. Por otro lado, al aplicar rref a \mathbf{c}_h obtenemos tres pivotes y una columna sin pivote. Así el espacio generado en la fórmula de Carolina correspondiente a las soluciones a la homogénea tiene dimensión 3, lo que iguala la dimensión 3 previamente calculada. Esto nos lleva a concluir que se generan todas las soluciones a la homogénea. Que se tenga una columna sin pivote indica que el vector que entró en tal columna es redundante en la solución dada por Carolina.
- Resumiendo; la fórmula de Carolina es correcta al generar todas las soluciones al sistema de ecuaciones, aunque el último vector puede omitirse sin pérdida.