

Ejercicio 1: Aproximación y Análisis de Errores en $\sin(\pi/8)$

Utilizando las herramientas aprendidas en clases, realiza una aproximación de $\sin(\pi/8)$ asumiendo que no tienes acceso a una calculadora o software avanzado. Usa una aproximación simple para π y realiza el análisis de errores utilizando la siguiente relación:

$$\text{Error Total} = \hat{f}(\hat{x}) - f(x)$$

Luego, emplea el truco matemático estándar de sumar y restar la misma cantidad para obtener:

$$\text{Error Total} = (\hat{f}(\hat{x}) - f(\hat{x})) + (f(\hat{x}) - f(x))$$

De esta manera, se puede definir:

$$\text{Error Total} = \text{Error computacional} + \text{Error de datos propagados}$$

Calcula y analiza estos errores para comprender cómo afectan la precisión de la aproximación.

Ejercicio 2 : Derivadas Numéricas mediante Expansión en Serie de Taylor

Mediante la expansión en serie de Taylor, realiza las siguientes tareas:

- Demuestra la expresión para la **derivada centrada** de una función $f(x)$ y analiza su error correspondiente.
- Demuestra la expresión para la **derivada adelantada** de $f(x)$ y analiza su error correspondiente.
- Demuestra la expresión para la **derivada retrasada** de $f(x)$ y analiza su error correspondiente.
- Calcula el **valor óptimo de h** para minimizar el error en cada una de las derivadas anteriores y compara los resultados obtenidos.

Ejercicio 3: Comparación de Métodos para Diferentes Funciones

Objetivo: Comparar la precisión de los métodos de derivación numérica para diferentes tipos de funciones.

a) **Instrucciones:**

- Implementa las siguientes funciones: $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$ (en $x > 0$), y $f(x) = x^2$.
- Calcula las derivadas numéricas usando los tres métodos para cada función.
- Grafica todas las derivadas y compara con las derivadas exactas de cada función.

b) **Preguntas:**

- ¿Qué función resulta más difícil de derivar numéricamente?
- ¿Qué observaciones puedes hacer acerca de la precisión de cada método en función del tipo de función?