



Universidad Nacional de Tres de Febrero - Ingeniería de Sonido

Circuitos Electrónicos II

Profesor: Ing. Norberto Caudet

Ayudante: Juan M. Maxit

Unidad 6: Filtros analógicos

Filtros pasivos de 1° orden

Filtro pasa bajos (RC)

Uno de los ejemplos más sencillos lo constituye el circuito RC de primer orden mostrado en la **Figura 1**, donde el voltaje de la fuente $v_s(t)$ es la entrada y $v_c(t)$ la salida del sistema.

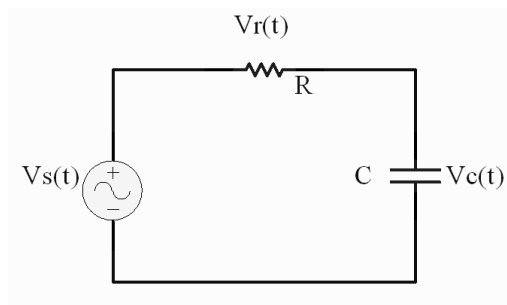


Figura 1: Esquema del circuito del filtro pasa bajos.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff se obtiene:

$$v_s(t) = v_R(t) + v_c(t) = i(t)R + v_c(t)$$

siendo:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

entonces:

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Luego, reemplazando obtenemos:

$$v_s(t) = R C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

De esta manera, los voltajes de entrada y salida quedan relacionados por medio de la ecuación diferencial anterior. Para determinar la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, observamos que por definición, con el voltaje de entrada $v_s(t) = e^{j\omega t}$, debemos tener en la salida $v_c(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$. Si sustituimos esta expresión en la ecuación anterior obtenemos:

$$e^{j\omega t} = R C \frac{d [H(j\omega) e^{j\omega t}]}{dt} + H(j\omega) e^{j\omega t}$$

derivando,

$$e^{j\omega t} = R C j\omega H(j\omega) e^{j\omega t} + H(j\omega) e^{j\omega t}$$

trabajando la expresión se obtiene:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC j\omega} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC \omega)^2}}$$

Se puede observar que para frecuencias cercanas a $\omega = 0$, $|H(j\omega)| \approx 1$ (0dB), mientras que para valores grandes de ω , $|H(j\omega)|$ disminuye. Particularmente para el valor de $\omega_c = 1/RC$, toma el valor $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$, es decir, una atenuación de 3 dB. Esta es la frecuencia de corte del filtro ω_c .

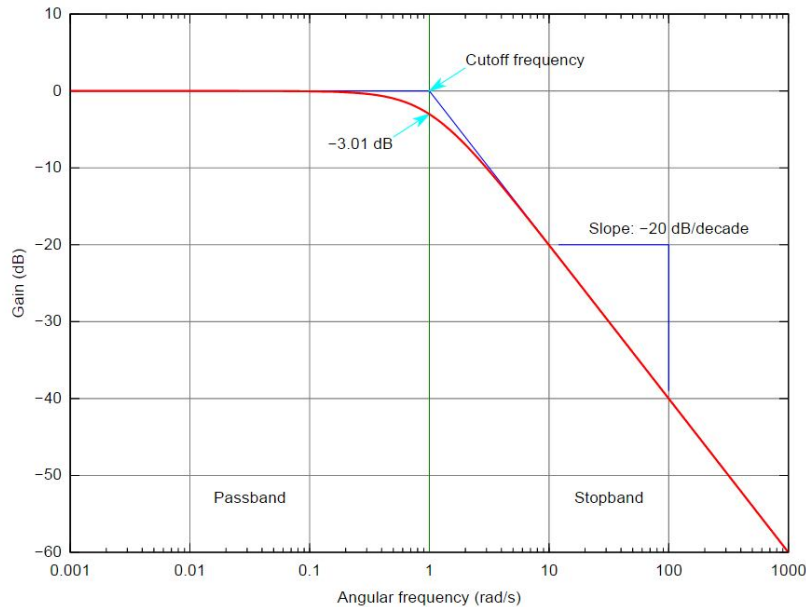


Figura 2: Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro RC pasa bajos

Como se muestra en la **Figura 2** la pendiente de caída del filtro de primer orden es -6dB/octava, que es equivalente a -20 dB/década.

En la **Figura 3** se muestra la respuesta de fase del filtro, donde en la frecuencia de corte ($1/RC$) la salida atrasa $45^\circ = \pi/4$ con respecto a la entrada, esto sucede ya que la magnitud $|X_c| = R$. A medida que $|X_c|$ crece con respecto a R la diferencia de fase entre entrada y salida se aproxima a cero. Por el contrario, cuando $|X_c|$ decrece la diferencia de fase entre entrada y salida se aproxima a $-90^\circ = -\pi/2$.

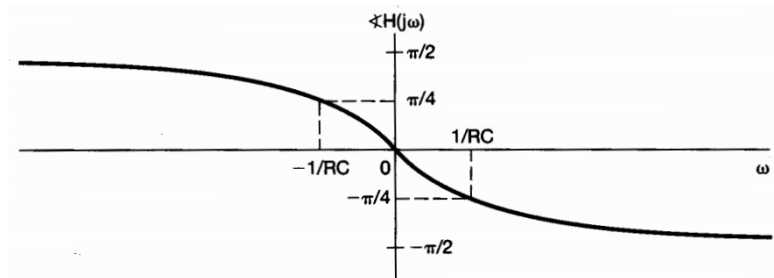


Figura 3: Gráfica de fase de la respuesta en frecuencia del filtro RC pasa bajos

La expresión que describe este fenómeno es la siguiente:

$$\tan(-\phi) = RC \omega \rightarrow \phi = -\arctan(RC \omega)$$

Filtro pasa altos (RC)

El circuito utiliza los mismos componentes que en el caso anterior, pero la salida es el voltaje a través del resistor R ($v_R(t)$) como se muestra en la **Figura 4**. El voltaje de la fuente es $v_g(t)$ y es la entrada.

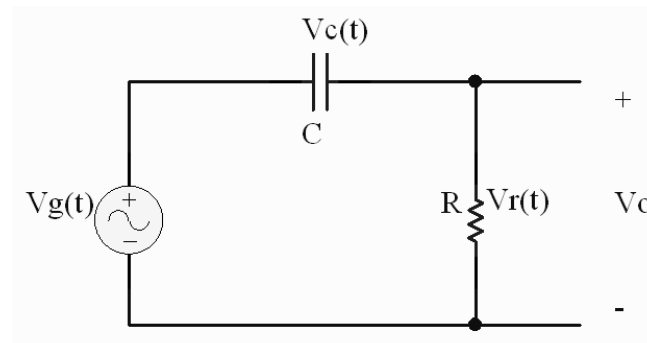


Figura 4: Esquema del circuito del filtro pasa altos de 1º orden

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff se obtiene:

$$v_g(t) = v_R(t) + v_c(t) = i(t) \left[R - j \frac{1}{\omega C} \right]$$

La ganancia del circuito entonces queda de la siguiente manera:

$$G(j\omega) = \frac{v_R(t)}{v_g(t)} = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\omega RC})^2}}$$

La frecuencia de corte del filtro es la misma que en el caso anterior, o sea: $\omega_c = 1/RC$, con la cual se obtiene un $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$.

En la **Figura 5(b)** se muestra la respuesta de fase del filtro, donde en la frecuencia de corte la salida adelanta $45^\circ = \pi/4$ con respecto a la entrada, esto sucede ya que la magnitud $R = |X_c|$. A medida que $|X_c|$ decrece con respecto a R , la diferencia de fase entre entrada y salida se aproxima a cero. Por el contrario, cuando $|X_c|$ crece la diferencia de fase entre entrada y salida se aproxima a $90^\circ = \pi/2$.

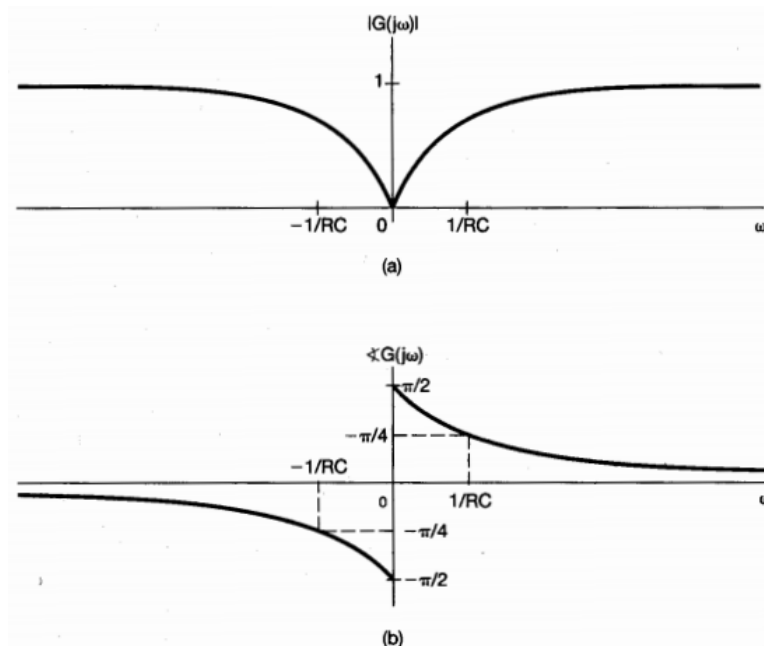


Figura 5: Gráficas de (a) magnitud y (b) fase de la respuesta en frecuencia del filtro

La expresión que describe este fenómeno es la siguiente:

$$\tan(\phi) = \frac{1}{\omega RC} \rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Filtros de 2° orden

Los filtros de segundo orden se caracterizan por tener una pendiente de atenuación de 12 dB/octava, que es equivalente a 40 dB/década. La configuración

del circuito en todos los casos contiene una bobina y un condensador como se muestra en la **Figura 9**.

La ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes para un sistema de segundo orden es:

$$w_n^2 x(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\varepsilon w_n \frac{dy(t)}{dt} + w_n^2 y(t)$$

Donde $x(t)$ es la entrada del sistema, $y(t)$ la salida, ε es la *razón de amortiguamiento* y w_n es la *frecuencia natural sin amortiguamiento* del sistema. Además para sistemas de segundo orden $2\varepsilon = 1/Q$ donde Q es el *factor de calidad* del filtro.

La ecuación general de la respuesta en frecuencia de los sistemas de segundo orden es la siguiente:

$$H(jw) = \frac{w_n^2}{(jw)^2 + 2\varepsilon w_n(jw) + w_n^2} \rightarrow H(jw) = \frac{1}{\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{jw}{w_n}\right) + 1}$$

La transformada de Laplace de la respuesta al impulso es:

$$H(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\varepsilon w_n s + w_n^2} = \frac{w_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)}$$

en donde $s = \sigma + jw$ y

$$c_1 = -\varepsilon w_n + w_n \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

$$c_2 = -\varepsilon w_n - w_n \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Entonces los polos del sistema quedan determinados por ε . Si $\varepsilon > 1$ ($Q < 0,5$) hay dos polos reales distintos ya que el argumento de la raíz es positivo y el sistema queda *sobreamortiguado*. En la **Figura 6 (a)** se puede observar que en esencia es un producto de dos términos de primer orden, donde $|H(jw)|$ decrece en la medida que $|w|$ aumenta, ya que la longitud del vector polo crece (la longitud del vector polo está directamente relacionada con el recíproco de $|H(jw)|$ y adquiere un valor mínimo en $w=0$). Luego se hará un análisis más detallado para hacer el diagrama de Bode.

En la **Figura 6 (b)** se muestra el caso de que $\varepsilon \gg 1$, donde se ve que a medida que incrementa ε un polo se acerca al eje jw , lo que indica que un término de la respuesta al impulso decae más lentamente. En cambio, el otro se aleja en el semiplano izquierdo, indicando que un término de la respuesta al impulso decae

más rápido. Para frecuencias bajas (tiempos grandes) el término que domina la respuesta del sistema es el polo más cercano al eje $j\omega$ ya que su longitud y ángulo es más susceptible a variaciones de ω que el otro.

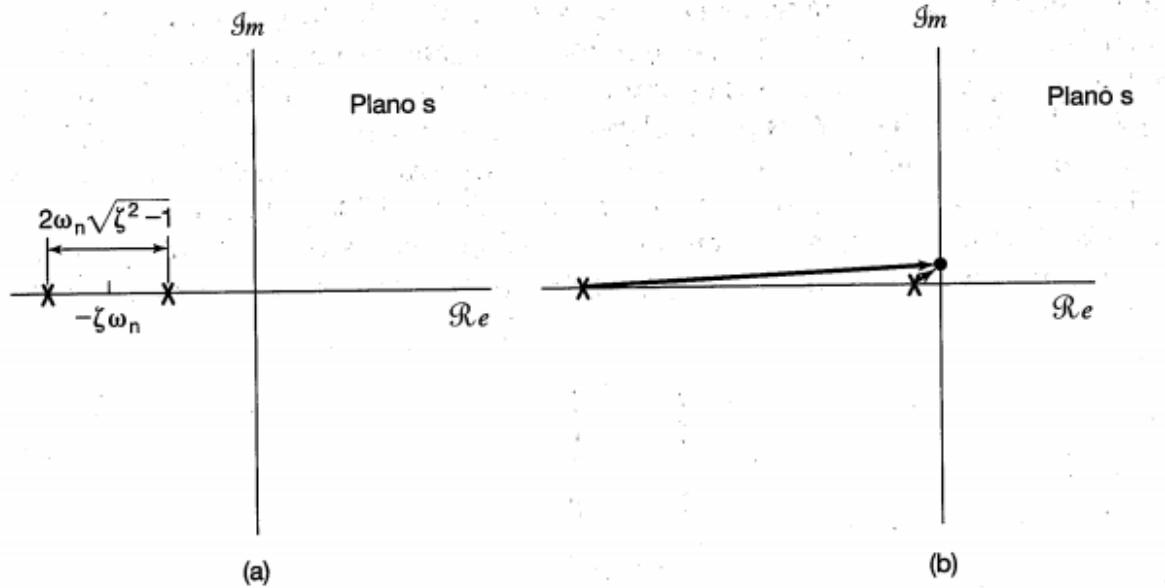


Figura 6: (a) Diagrama de polos del sistema para $\varepsilon > 1$ (b) vectores polo cuando $\varepsilon \gg 1$

Si $0 < \varepsilon < 1$ ($Q > 0,5$) hay dos polos complejos conjugados $-\varepsilon\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$ y $-\varepsilon\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Esto quiere decir que el sistema tiene una respuesta al impulso del tipo *sinusoidal amortiguada exponencialmente*, por lo tanto es un sistema *subamortiguado*. El polo dominante es el que está en el segundo cuadrante (ver **Figura 7(a)**), es por eso que el análisis se realizará sin considerar su conjugado. El vector polo tiene un mínimo cuando $\omega = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$ es por esto que hay un pico en la respuesta en frecuencia en la vecindad la misma. Además, por debajo y por encima hay dos frecuencias, $\omega = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2} \pm \varepsilon\omega_n$, en las cuales el vector se incrementa por un factor de $\sqrt{2}$ a partir de su mínimo en $\omega = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Esto quiere decir que el parámetro ε controla la agudeza y el ancho de este pico. Esto se puede observar en la **Figura 7(b)**.

Cuando ω_n varía con un ε fijo, solo cambia la escala de frecuencia del análisis anterior, pero manteniendo ω_n constante, las características del sistema cambian a medida que se modifica ε . Debido a que $\varepsilon = \cos \theta$ los polos se mueven en un círculo de radio ω_n y cuando $\varepsilon = 0$ los polos están sobre el eje imaginario, y el sistema es *oscilatorio sin amortiguamiento*. Conforme ε se incrementa de 0 a 1, los dos polos son complejos, quedando en el semiplano izquierdo.

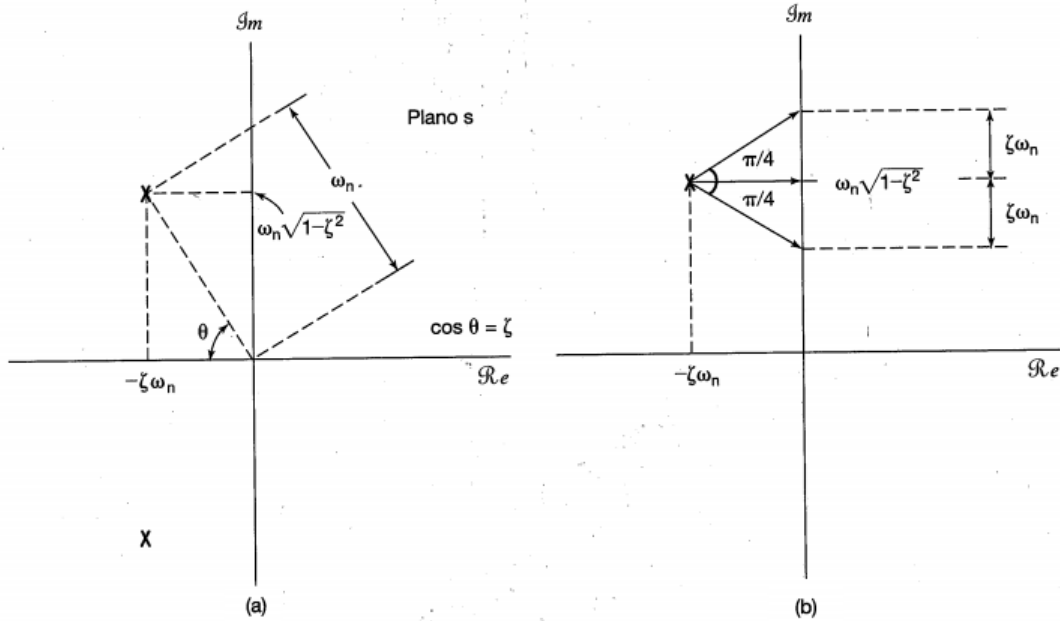


Figura 7: (a) Diagrama de polos del sistema para $0 < \varepsilon < 1$ (b) vectores polo para $w = w_n \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ y $w = w_n \sqrt{1 - \varepsilon^2} \pm \varepsilon w_n$

En el caso particular de que $\varepsilon = 1$ ($Q=0,5$), $c_1 = c_2 = -w_n$ lo que genera un polo doble como se muestra en la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{w_n^2}{(s - w_n)^2}$$

Este caso se lo considera como *críticamente amortiguado* o de *amortiguamiento crítico*.

Ahora bien, analizaremos cómo graficar el diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia de estos sistemas. Para el caso de la magnitud, la expresión específica que describe este fenómeno es la siguiente:

$$20 \log |H(jw)| = -10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right]^2 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{w}{w_n} \right)^2 \right\}$$

En la magnitud (logarítmica) de la respuesta en frecuencia de estos sistemas, como en los de primer orden, la escala de frecuencias logarítmica conduce a dos asíntotas de aproximación en alta y en baja frecuencia. Por lo tanto a partir de la expresión anterior, se desprende que

$$20 \log |H(jw)| \cong \begin{cases} 0, & \text{para } w \ll w_n \\ -40 \log w + 40 \log w_n & \text{para } w \gg w_n \end{cases}$$

Se puede observar que para alta frecuencia hay una asíntota con una pendiente de -40 dB/década o -12 dB/octava y para baja frecuencia hay una asíntota en 0dB. La unión de estas dos está en w_n , por este motivo se le conoce como la frecuencia de corte, en este tipo de sistema. Esta gráfica se muestra en la **Figura 8(a)**. También se puede ver como varía la respuesta del sistema alrededor de w_n a partir de variar el parámetro ε , haciendo al filtro más resonante o con mayor amortiguamiento.

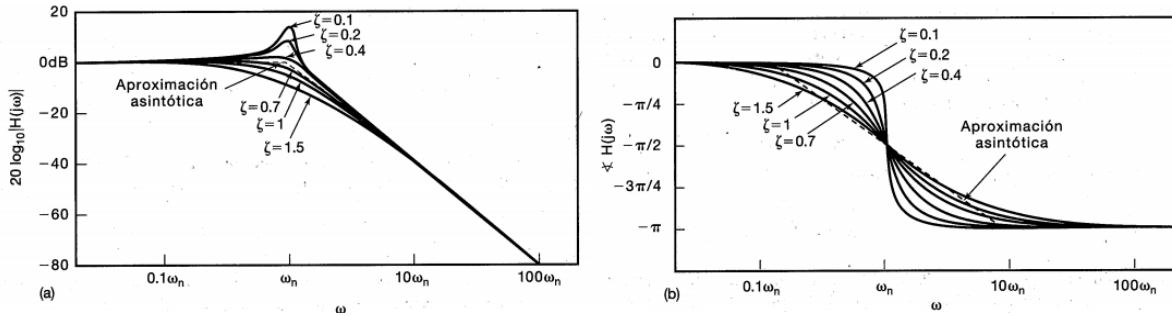


Figura 8: Diagrama de (a) Magnitud y (b) Fase de la respuesta en frecuencia para distintos valores de ε

Con respecto a la variación de fase que se muestra en la **Figura 8(b)**, también se pueden observar asíntotas de aproximación, pero en este caso son tres, las cuales están representadas con línea punteada.

$$\phi = -\arctan\left(\frac{2\varepsilon\left(\frac{w}{w_n}\right)}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right)$$

y las asíntotas de aproximación

$$\phi \cong \begin{cases} 0, & \text{para } w \leq 0,1w_n \\ -\frac{\pi}{2} \left[\log\left(\frac{w}{w_n}\right) + 1 \right], & \text{para } 0,1w_n \leq w \leq 10w_n \\ -\pi, & \text{para } w \geq 10w_n \end{cases}$$

La aproximación y el valor exacto son iguales en $w = w_n$, el cual es $\phi = -\pi/2$. Las asíntotas no dependen de el valor de ε , es por esto que para frecuencias cercanas a w_n , hay que graficar teniendo en cuenta a este, utilizando la expresión que nos devuelve el valor exacto de la fase.

Filtro RLC – Pasa bajos

En la figura se puede ver el circuito RLC serie, dónde el voltaje de salida V_o es la diferencia de potencial en los extremos del capacitor C .

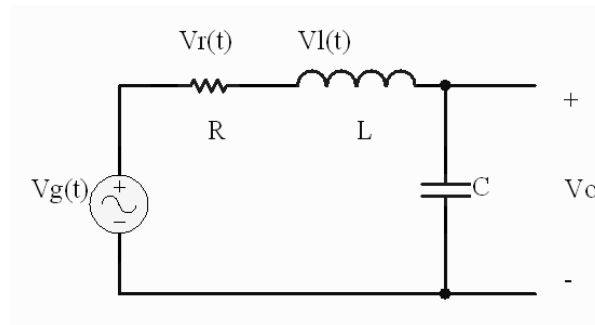


Figura 9: Esquema del circuito del filtro pasa bajos de 2° orden

Si analizamos la corriente en la malla, obtenemos las siguientes expresiones:

$$i(t) = C \frac{dV_o(t)}{dt}$$

$$V_g(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_o(t)$$

Reemplazando $i(t)$,

$$V_g(t) = RC \frac{dV_o(t)}{dt} + LC \frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + V_o(t)$$

Siendo $i(t)$ la corriente que atraviesa el circuito.

Dividiendo los términos por LC , queda la siguiente ecuación diferencial de segundo orden la cual rige el comportamiento del circuito:

$$\frac{V_g(t)}{LC} = \frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_o(t)}{dt} + \frac{V_o(t)}{LC}$$

Comparando la expresión anterior con la general de este tipo de sistemas, podemos ver los valores de los parámetros del filtro:

$$2\varepsilon = \frac{1}{Q} = \frac{R}{L}; \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Filtro RLC -Pasa banda

En la figura se puede ver el esquema del circuito RLC pasa banda, donde la salida V_o es la diferencia de potencial en la resistencia R .

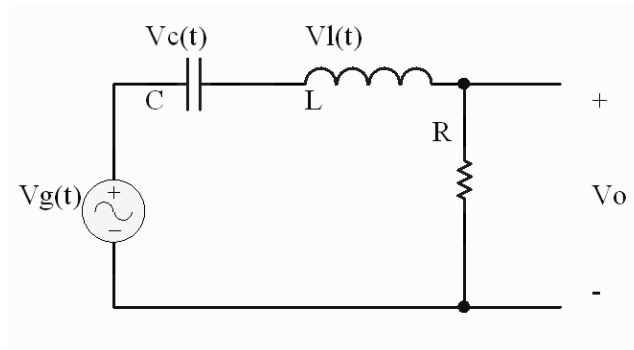


Figura 10: Esquema del circuito del filtro pasa banda

Analizando el circuito se obtiene:

$$i(t)R = V_o(t)$$

$$V_g(t) = i(t) \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

$$G(j\omega) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{R}{\left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2 \right]}}$$

Se observa que para frecuencias bajas y para valores elevados, la ganancia se anula, es decir, se atenúan considerablemente las frecuencias bajas y altas. Sin embargo existe un punto máximo en la curva que corresponde a la frecuencia de resonancia del circuito. A esta frecuencia la tensión de entrada $V_o(t)$ y la intensidad $i(t)$ están en fase, es decir, se anulan las impedancias reactivas del circuito.

La frecuencia de resonancia es la misma que en el caso anterior es decir:

$$\omega_n L = \frac{1}{\omega_n C} \rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Busco las frecuencias de corte:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w_c L}{R} - \frac{1}{w_c R C}\right)^2}} \rightarrow 2 = 1 + \left(\frac{w_c L}{R} - \frac{1}{w_c R C}\right)^2 \rightarrow 1 = \left(\frac{w_c^2 R C L - R}{R^2 w_c C}\right)$$

$$w_c^2 R C L - R^2 w_c C - R = 0 \rightarrow w_c^2 - \frac{R}{L} w_c - \frac{1}{L C} = 0$$

La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones posibles para w_c

$$w_{c1} = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} ; \quad w_{c2} = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

Nótese que $w_{c1} \cdot w_{c2} = w_n^2$.

Estas son las frecuencias que definen el ancho de banda del filtro y por lo tanto el Q del mismo:

$$\Delta w = w_{c1} - w_{c2} = \frac{R}{L}$$

El factor de calidad Q de un filtro pasa banda resonante es una medida de cuán selectivo es el filtro, y se define como:

$$Q = \frac{w_n}{\Delta w} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

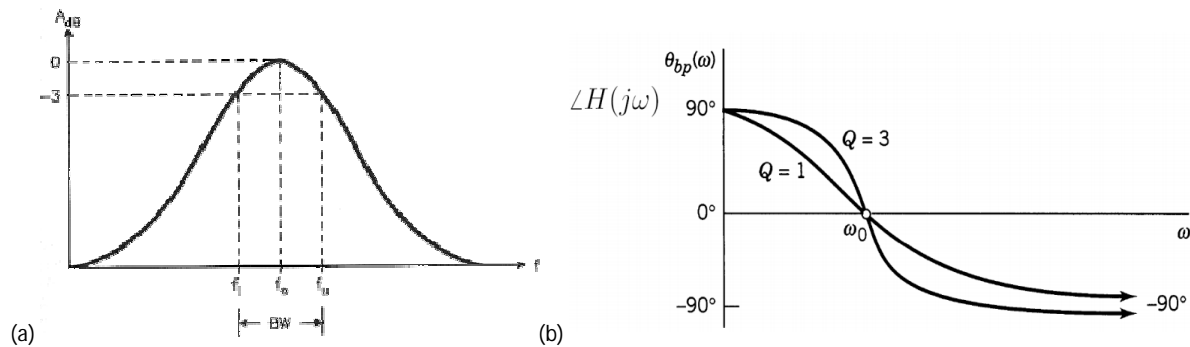


Figura 11: Diagrama de (a) Magnitud y (b) Fase de la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda.

La fase del filtro queda determinada por la siguiente expresión:

Funciones de Aproximación

En los filtros análogos, las especificaciones están dadas por rangos de valores. Se tienen cinco parámetros basados en las características de atenuación, como se observa en la **Figura 12**.

- Máxima atenuación en la banda de paso (A_{PB})
- Ripple de la banda de paso o Ancho de ripple (RW)
- Mínima atenuación de la banda de rechazo (A_{SB})
- Frecuencia de esquina de la banda de paso (ω_{PB})
- Frecuencia de esquina de la banda de rechazo (ω_{SB})

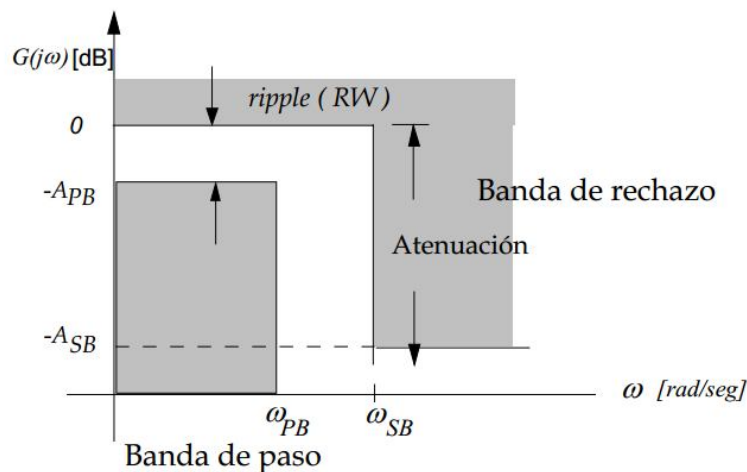


Figura 12: Ventana de diseño para un filtro pasa bajos

Se puede ver en la figura que en la *banda de paso* el filtro no atenúa considerablemente a la señal de entrada, produciendo un posible *Ripple* en la respuesta. En la *Banda de transición* el filtro efectivamente comienza a actuar (luego de la frecuencia de corte), y la banda de rechazo es donde ya se considera que la señal tiene una amplitud despreciable para la utilidad que se quiere aplicar el filtro.

Para distintas especificaciones existen numerosas funciones que satisfacen las respuestas de ganancia o fase, luego se debe considerar los objetivos de prestación y costo para reducir este número de funciones a una. Un método para obtener H es usar funciones prototipos (también llamadas funciones de aproximación), tales como, *Chebyshev* (equal-ripple), *Butterworth* (máximamente plana) y *elípticos*. Estas funciones permiten determinar $H(s)$ mediante una aproximación en el

dominio de la frecuencia, para esto $|H(jw)|$ se aproxima a la característica de un filtro pasa bajos ideal de acuerdo a un criterio de error predeterminado.

Butterworth

Este filtro tiene una respuesta plana en la banda de paso (llamada máximamente plana), a expensas de la respuesta en la región transición, la cual es de 20 dB/Década o 6dB/Octava por polo. El módulo de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajos, para ganancia G , y frecuencia de corte w_c es la siguiente:

$$|H(jw)| = \frac{G}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^{2n}}}$$

Donde $n = 1, 2, \dots, k$. es el orden. La **Figura 13** indica respuestas de este filtro para distintos n .

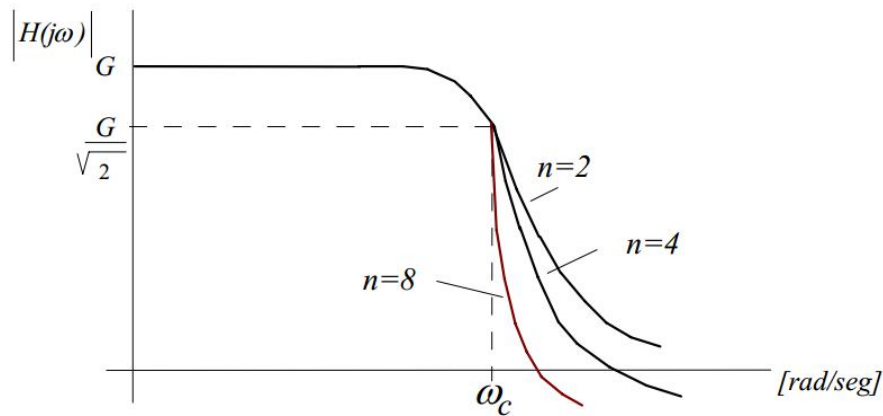


Figura 13: Respuesta del Filtro Butterworth.

Para ganancia unitaria y una frecuencia $w = w_c$, se tiene que $|H(jw)| \cong 1/\sqrt{2}$ y para $w \gg w_c$, $|H(jw)| \cong 1/w^n$. Si se ve la respuesta en dB, se obtiene que $|H(jw)| \cong -20n \log(w)$. Como se mencionó antes la repuesta del filtro den la banda de transición es de $-20n$ dB/Década, donde n es el orden del filtro (cantidad de polos). Con $G = 1$ y $w_c = 1$, haciendo $s = jw$, entonces $w = s/j$, reemplazando se tiene la función de transferencia de la siguiente forma:

$$|H(jw)|^2 = \frac{G}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

Así, los polos para $k = 1, 2, \dots, n$, estarán dados por:

$$s_k = e^{\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}}$$

Entonces en el denominador de la función de transferencia van quedando diferentes polinomios dependiendo del grado del filtro, esto se puede observar en la **Tabla 1**:

Tabla 1: Polinomios de Butterworth en forma factorizada

n	Polinomios de Butterworth
1	$s + 1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7653s + 1)(s^2 + 1.8477s + 1)$
5	$(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)(s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s^2 + 1.9318s + 1)$

Se puede ver que al crecer el orden del filtro, siempre se pueden expresar como multiplicaciones de polinomios de grado 2

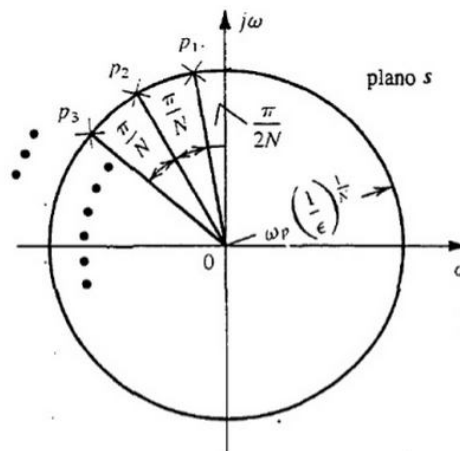


Figura 14: Diagrama de polos para el filtro butterworth

Chebyshev

Hay dos tipos de filtros Chebyshev. El Tipo I tiene una ondulación (ripple) en la banda de paso y El Tipo II tiene una ripple en la banda de atenuación. Mientras mayor es el orden, mayor es la pendiente en la región de transición, pero mayor es el ripple y el número de ondulaciones.

La respuesta en frecuencia del Tipo I está dada por la siguiente expresión:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{G}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

donde, $\varepsilon^2 = 10^{r/10} - 1$

$T_n^2(\omega)$ son los polinomios de Chebyshev de orden n

r es el ripple en dB

Los polinomios de Chebyshev se pueden observar en la **Tabla 2**.

Tabla 2: Polinomios de Chebyshev

n	$T_n(\omega)$
0	1
1	ω
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$
6	$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$
7	$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$
8	$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$
9	$256\omega^9 - 576\omega^7 + 432\omega^5 - 120\omega^3 + 9\omega$
10	$512\omega^{10} - 1280\omega^8 + 1120\omega^6 - 400\omega^4 + 50\omega^2 + 1$

En la **Figura 15** se pueden ver las respuestas típicas de los filtros pasa bajos de Chebyshev Tipo I y Tipo II

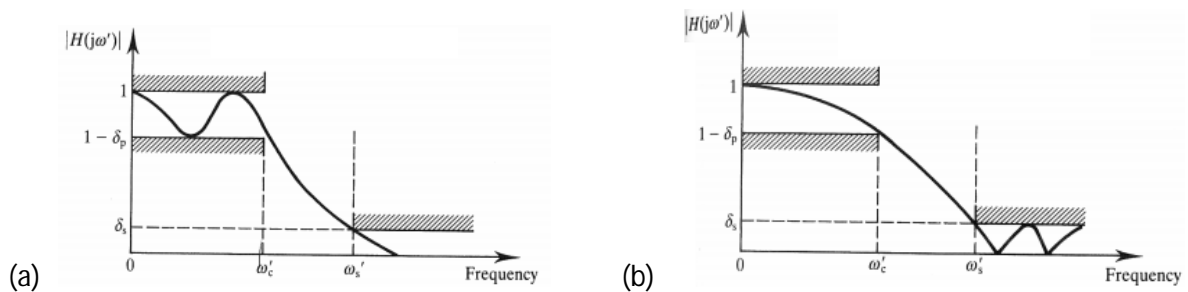


Figura 15: Respuesta del Filtro Chebyshev de (a) Tipo I y (b) Tipo II

En la **Figura 16** se puede ver el mapeo de polos de un filtro Chebyshev de 3° orden, en donde se comparan diferentes ripples en la banda de paso.

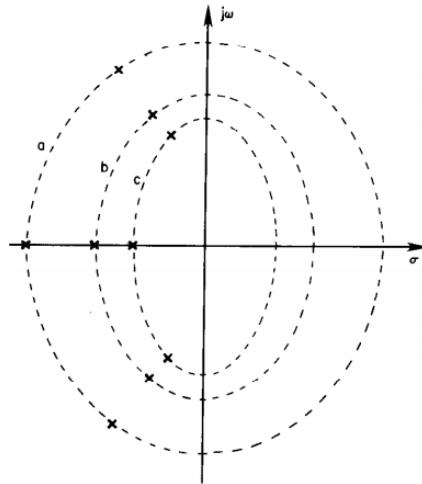


Figura 16: Diagrama de polos de filtro de tercer orden chebyshev con (a) 0,01 dB, (b) 0,1 dB, (c) 0,5 dB de ripple.

Filtros Activos de 1° orden

Los circuitos activos dan la posibilidad de generar un filtro donde se puede amplificar la señal. Para poder realizar esto hay que agregar a la configuración un componente activo, como por ejemplo un amplificador operacional. Como se ve en la **Figura 17** estas configuraciones se pueden lograr fácilmente anteponiendo un filtro pasivo a un operacional con una ganancia determinada (casos (a), (b) y (c)). En cambio en el caso (d), al tener una realimentación que depende de una reactancia capacitiva (X_c) entonces la ganancia del operacional en esa configuración es $G = \frac{R||X_c}{R_1}$. De esta forma vemos que al bajar la frecuencia la ganancia del operacional queda limitada por $G = \frac{R}{R_1}$, en cambio en alta frecuencia $X_c \rightarrow 0$, por lo que hace $G \rightarrow 0$.

La utilización de un operacional a la salida del filtro nos garantiza que si agregamos una etapa posterior a esta configuración, no vamos a estar "cargando" al filtro, ya que la salida de un amplificador operacional es lo suficientemente baja para que la transferencia de tensión sea óptima.

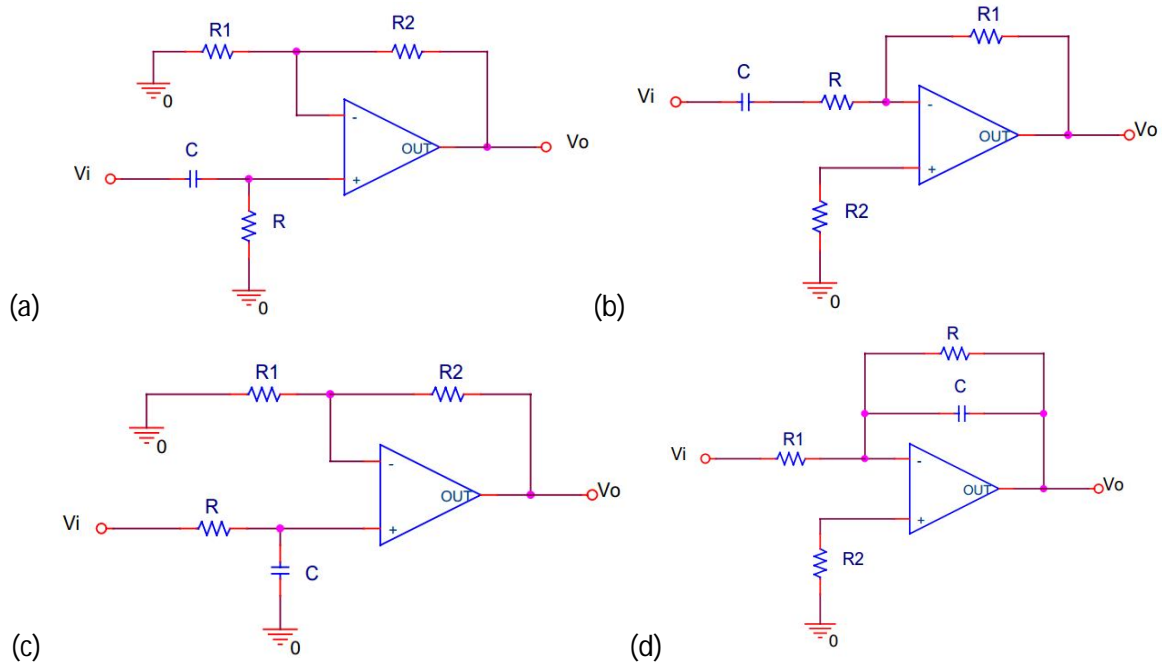


Figura 17: Circuito del filtro activo (a) Pasa altos no-inversor (b) Pasa altos inversor (c) Pasa bajos no-inversor (d) Pasa bajos inversor

Filtros Activos de segundo orden

Sallen-Key

Primero analizaremos la estructura general del Sallen-Key para comprender cómo es el funcionamiento del circuito. En la **Figura 18** se puede ver el esquema del circuito.

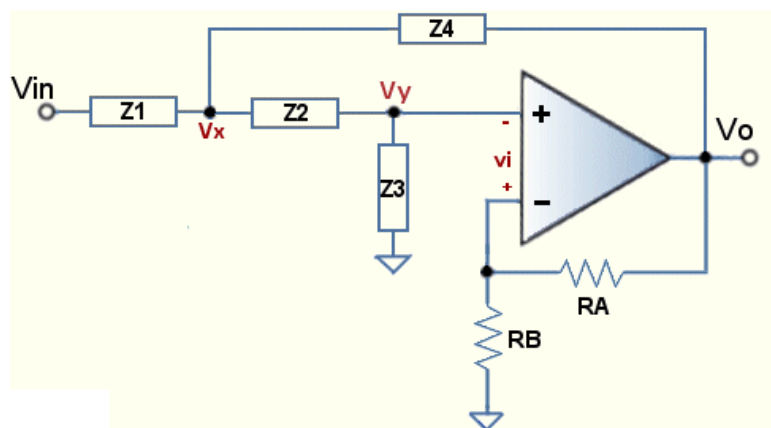


Figura 18: Esquema del circuito del filtro Sallen-Key

En el nodo V_x el voltaje depende de del divisor resistivo formado por Z_1 y Z_4 :

$$V_x = V_i \frac{Z_4}{Z_4 + Z_1} + V_o \frac{Z_1}{Z_4 + Z_1} \quad ; \quad V_o = K V_y \quad y \quad K = 1 + \frac{R_A}{R_B}$$

donde K es la ganancia del sistema y V_o y V_i la salida y la entrada respectivamente.

$$V_y = V_x \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \rightarrow V_o = K V_x \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \quad y \quad Z_x = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4}$$

donde Z_x es la impedancia que ve el circuito en el nodo V_x .
Entonces reemplazando V_x tenemos,

$$V_o = K \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \left(V_i \frac{Z_4}{Z_4 + Z_1} + V_o \frac{Z_1}{Z_4 + Z_1} \right)$$

$$V_o = K V_o \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \frac{Z_1}{Z_4 + Z_1} + K V_i \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \frac{Z_4}{Z_4 + Z_1}$$

pasando un término y sacando factor común V_o

$$V_o \left(1 - \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \frac{Z_1}{Z_4 + Z_1} \right) = K V_i \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \frac{Z_4}{Z_4 + Z_1}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{K Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \frac{Z_4}{Z_4 + Z_1}}{1 - \frac{Z_3}{Z_x + Z_2 + Z_3} \frac{Z_1}{Z_4 + Z_1}} = \frac{K Z_3 Z_4}{(Z_x + Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_1) - K Z_3 Z_1}$$

reemplazando Z_x y haciendo distributiva

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K Z_3 Z_4}{\left(\frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + Z_2 + Z_3 \right) (Z_4 + Z_1) - K Z_3 Z_1} = \frac{K Z_3 Z_4}{[Z_1 Z_4 + Z_2(Z_1 + Z_4) + Z_3(Z_4 + Z_1)] - K Z_3 Z_1}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K Z_3 Z_4}{[Z_1 Z_4 + Z_2 Z_1 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 + Z_4 Z_1] - K Z_3 Z_1} = \frac{K}{\frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + 1 + \frac{Z_1}{Z_4} - K \frac{Z_1}{Z_4}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_4} (1 - K) + 1}$$

De esta forma, llegamos a la expresión de la transferencia del filtro Sallen-Key genérico, en donde la misma va a cambiar dependiendo de los componentes que se utilicen (pasa bajos, pasa altos, etc.)

Por ejemplo en la **Figura 19** se ve el circuito de un Filtro pasa bajos (2°orden), que analizaremos a continuación.

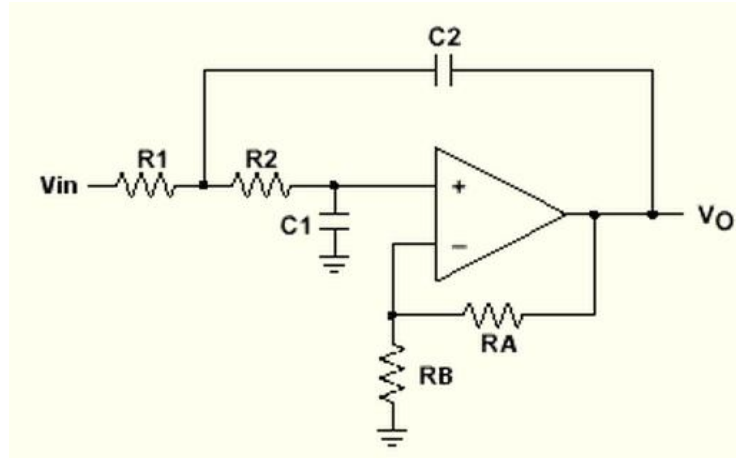


Figura 19: Esquema del circuito del filtro Sallen-Key pasa bajos.

En este caso tenemos que $Z_1=R_1$; $Z_2=R_2$; $Z_3=X_{C1}$; $Z_4=X_{C2}$. Si esto lo reemplazamos en la fórmula anterior, obtenemos la transferencia del circuito pasa bajos (K es la ganancia del circuito inversor).

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{K}{(j\omega)^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega [R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1 - K)] + 1}$$

Dividiendo denominador y numerador por $R_1 R_2 C_1 C_2$ me y suponiendo $K=1$

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(j\omega)^2 + j\omega \left[\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Si la comparamos con la ecuación general de sistemas de segundo orden (página 5) vemos que:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \text{ y } Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{C_1 (R_1 + R_2)}$$

Filtro pasa altos

Simplemente cambiando la ubicación del resistor y el capacitor, obtenemos un filtro pasa altos de 2° orden, como se muestra en la **Figura 20**.

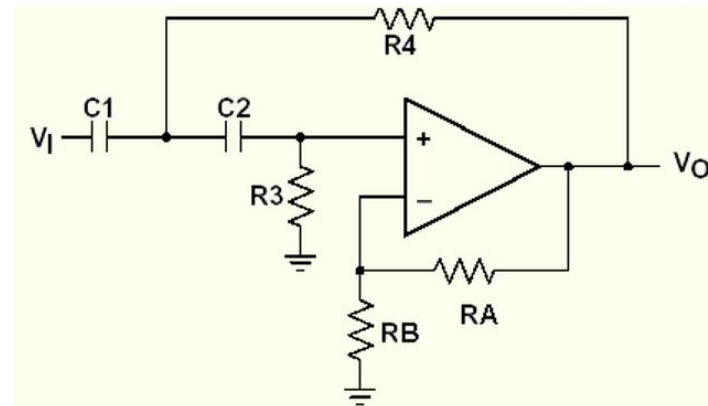


Figura 20: Esquema del circuito del filtro Sallen-Key pasa altos.

Siguiendo el criterio anterior se obtiene que la respuesta de este filtro es la siguiente:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{K (j\omega)^2}{(j\omega)^2 + j\omega[C_2 R_4 + C_1 R_4 + C_2 R_3(1 - K)] + \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2}}$$

Y si se compara con la ecuación general de sistemas de segundo orden (página 5) vemos que con $K=1$:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_2} \quad y \quad Q = \frac{\sqrt{R_3 R_4 C_1 C_2}}{R_4(C_1 + C_2)}$$

Filtro Pasa Banda

Se puede observar en la **Figura 21** que el circuito contiene un pasa bajos y un pasa altos pasivo de primer orden, resultando ser en su combinación un circuito pasa banda.

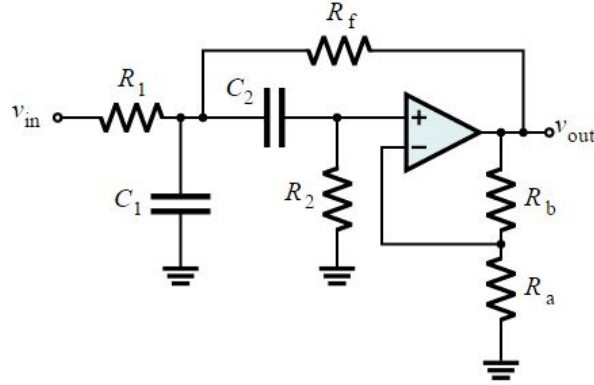


Figura 21: Esquema del circuito del filtro Sallen-Key pasa banda.

De esta forma, la función de transferencia del filtro queda dada por:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{K \frac{(j\omega)}{R_1 C_1}}{(j\omega)^2 + j\omega \left[\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} - \frac{1-K}{R_f C_1} \right] + \frac{R_1 + R_f}{R_1 R_2 R_f C_1 C_2}}$$

Resultando ser la frecuencia central y el Q del circuito:

$$\omega_n^2 = \frac{R_1 + R_f}{R_1 R_2 R_f C_1 C_2} \text{ y } Q = \frac{\sqrt{(R_1 + R_f) R_1 R_2 R_f C_1 C_2}}{R_1 R_f (C_1 + C_2) + R_2 C_2 \left(R_f - \frac{R_b}{R_a} R_1 \right)}$$

Filtro elimina banda

En la **Figura 22** se observa el circuito de un filtro activo elimina banda. Este circuito es similar al pasa banda, es por esto que haremos una análisis conceptual del mismo.

La configuración del amplificador operacional es básicamente un diferencial. En la rama inversora se encuentra un filtro pasa banda, y en la rama no-inversora ingresa la misma señal que en la entrada del filtro. Entonces, en la zona que el filtro atenúa, la señal es amplificada ya que hay una diferencia entre la señales de entrada + y - (modo diferencial). En cambio, en la zona donde el filtro tiene ganancia unitaria la señal ingresa en forma idéntica en las dos ramas (modo común) lo que provoca una gran atenuación en toda esa zona del espectro. La R_b se

recomienda que sea variable para poder darle un "ajuste fino" al diferencial y conseguir una máxima atenuación en modo común.

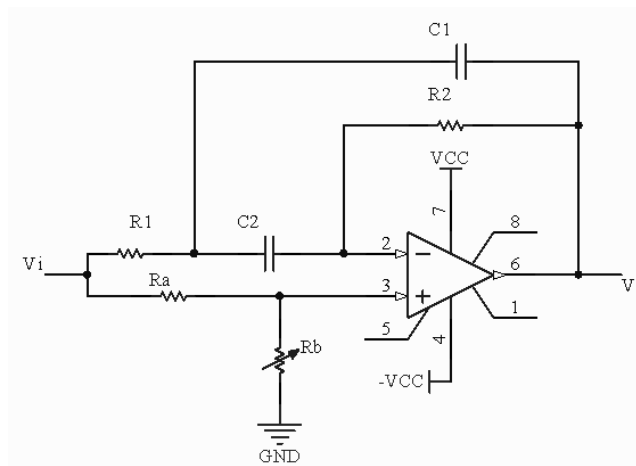


Figura 22: Esquema del circuito del filtro elimina banda.

Ejemplos de diseño

Filtro elimina banda

Para el filtro anteriormente mencionado se detallan los pasos para el diseño del mismo:

- 1- Elegir un valor de $C_1 = C_2 = C$ conveniente. Pensar en valores de capacitores que no superen 220 nF (no conviene usar electrolíticos) ni inferiores a 1nF (no conviene usar cerámicos).
- 2- Calcular R_2 con: $R_2 = \frac{2}{BW C}$, donde BW es el ancho de banda.
- 3- Calcular R_1 con: $R_1 = \frac{R_2}{4Q^2}$
- 4- Elegir un R_a conveniente tal como 1K Ω (dependiendo de la aplicación)
- 5- Calcular R_b con $R_b = 2Q^2 R_a$

Entonces, para un filtro con parámetros de diseño $f_o=400\text{Hz}$ y $Q=5$ tenemos:

- 1- Si $C = 0,01\mu\text{F}$ y $\omega_o=2,52 \text{ k rad/s}$ entonces: $BW = \omega_o/Q \approx 500 \text{ rad/s}$
- 2- Reemplazando los valores en la formula queda $R_2 = 400 \text{ K}\Omega$
- 3- Reemplazando, se obtiene $R_1 = 4 \text{ K}\Omega$.
- 4- si elijo $R_a = 1 \text{ K}\Omega$ obtengo $R_b = 50 \text{ K}\Omega$.

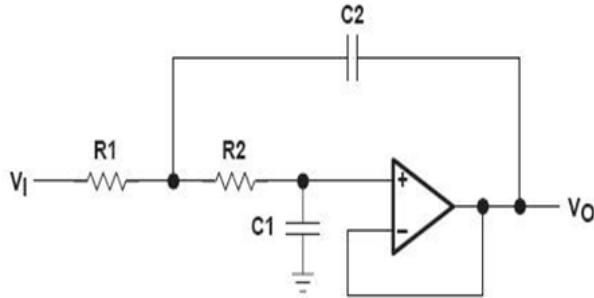
Para llevarlo a un caso real hay que utilizar valores normalizados (comerciales) de resistores, y luego recalculer el filtro para ver la f_o y el Q . En este caso los valores comerciales más próximos son: $R_2 = 390\text{ K}\Omega$, $R_1 = 3,9\text{ K}\Omega$ y R_b , al ser un preset se puede ajustar al valor exacto (se puede utilizar por ejemplo una resistencia de $27\text{ K}\Omega$ en serie con un preset de $50\text{ K}\Omega$).

Filtro Pasa bajos

Circuito Sallen-Key pasa bajos:

$$FSF \cdot f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C_1 \sqrt{mn}} \text{ y } Q = \frac{\sqrt{mn}}{m + 1}$$

donde FSF es el Factor de escala de frecuencia, Q el factor de calidad, $m=R_1/R_2$ y $n=C_2/C_1$



Instrucciones de diseño:

- 1 - La impedancia de entrada para la zona de corte tiende a ser R_1 por lo tanto debe determinarse un orden de magnitud adecuado (por ejemplo 10K)
- 2 - Pensar en valores de capacitores que no superen 220 nF (no conviene usar electrolíticos) ni inferiores a 1 nF (no conviene usar cerámicos).
- 3 - Mediante la **Tabla 3**, definir los valores de m y n de acuerdo al Q que se necesite.
- 4 - Conociendo la frecuencia, m , n y R_1 determinar los valores de: R_2 y C_1
- 5 - Los valores a utilizar (normalizados) serán los más próximos a los calculados, así que se deberá recalculer el filtro para los mismos.

De la misma forma que en el caso anterior, hay que recalculer nuevamente los parámetros de diseño resultantes, ya que los valores calculados en general difieren de los comerciales. Igualmente, utilizando la **Tabla 3** nos aseguramos de que los resultados de R y C van a ser cercanos a valores estandarizados.

Tabla 3: Tabla de $0,5 < Q < 4,53$ que resultan valores de R y C cercanos a los valores normalizados.

Bessel			Butterworth			Chebyshev-1			Chebyshev-2			Chebyshev-3		
m	n	Q	m	n	Q	m	n	Q	m	n	Q	m	n	Q
0,82	1,0	0,50	0,39	2,2	0,67	0,39	3,3	0,82	0,47	4,7	1,01	0,47	6,8	1,22
0,47	1,2	0,51	0,47	2,2	0,69	0,47	3,3	0,85	0,56	4,7	1,04	0,56	6,8	1,25
0,56	1,2	0,53	0,56	2,2	0,71	0,56	3,3	0,87	0,68	4,7	1,06	0,68	6,8	1,28
1,00	1,2	0,55	0,68	2,2	0,73	0,68	3,3	0,89	0,82	4,7	1,08	0,82	6,8	1,30
0,47	1,5	0,57	1,00	2,2	0,74	1,00	3,3	0,91	1,00	4,7	1,08	1,00	6,8	1,30
0,56	1,5	0,59	0,47	2,7	0,77	0,47	3,9	0,92	0,47	5,6	1,10	0,47	8,2	1,34
0,68	1,5	0,60	0,56	2,7	0,79	0,56	3,9	0,95	0,56	5,6	1,14	0,56	8,2	1,37
0,47	1,8	0,63	0,68	2,7	0,81	0,68	3,9	0,97	0,68	5,6	1,16	0,68	8,2	1,41
0,56	1,8	0,64	0,82	2,7	0,82	0,82	3,9	0,98	0,82	5,6	1,18	0,82	8,2	1,42
0,68	1,8	0,66	1,00	2,7	0,82	1,00	3,9	0,99	1,00	5,6	1,18	1,00	8,2	1,43

High Q			High Q			High Q			High Q			High Q		
m	n	Q	m	n	Q	m	n	Q	m	n	Q	m	n	Q
0,39	10,0	1,42	0,39	22,0	2,11	0,39	33,0	2,58	0,47	47,0	3,20	0,47	68,0	3,85
0,47	12,0	1,62	0,47	22,0	2,19	0,47	33,0	2,68	0,56	47,0	3,29	0,56	68,0	3,96
0,56	12,0	1,66	0,56	22,0	2,25	0,56	33,0	2,76	0,68	47,0	3,37	0,68	68,0	4,05
1,00	12,0	1,73	0,68	22,0	2,30	0,68	33,0	2,82	0,82	47,0	3,41	0,82	68,0	4,10
0,47	15,0	1,81	1,00	22,0	2,35	1,00	33,0	2,87	1,00	47,0	3,43	1,00	68,0	4,12
0,56	15,0	1,86	0,47	27,0	2,42	0,47	39,0	2,91	0,47	56,0	3,49	0,47	82,0	4,22
0,68	15,0	1,90	0,56	27,0	2,49	0,56	39,0	3,00	0,56	56,0	3,59	0,56	82,0	4,34
0,47	18,0	1,98	0,68	27,0	2,55	0,68	39,0	3,07	0,68	56,0	3,67	0,68	82,0	4,44
0,56	18,0	2,04	0,82	27,0	2,59	0,82	39,0	3,11	0,82	56,0	3,72	0,82	82,0	4,51
0,68	18,0	2,08	1,00	27,0	2,60	1,00	39,0	3,12	1,00	56,0	3,74	1,00	82,0	4,53