

## Implementación de Filtros

El proceso de diseño de filtros consiste en encontrar una función de transferencia que cumpla las especificaciones dadas.

Una vez conseguida, tenemos que implementar un circuito electrónico cuya función de transferencia sea precisamente ésta.

A la hora de implementar el filtro podemos elegir entre filtros activos o filtros pasivos. Esta elección dependerá de la aplicación en cuestión.

- Ventajas e Inconvenientes de los filtros activos frente a los pasivos:

Ventajas:

Posibilidad de obtener impedancia de entrada elevada e impedancia de salida baja.

Posibilidad de conexión en cascada.

Eliminación de las bobinas. o Posibilidad de integración.

Fabricación barata.

Posibilidad de amplificación.

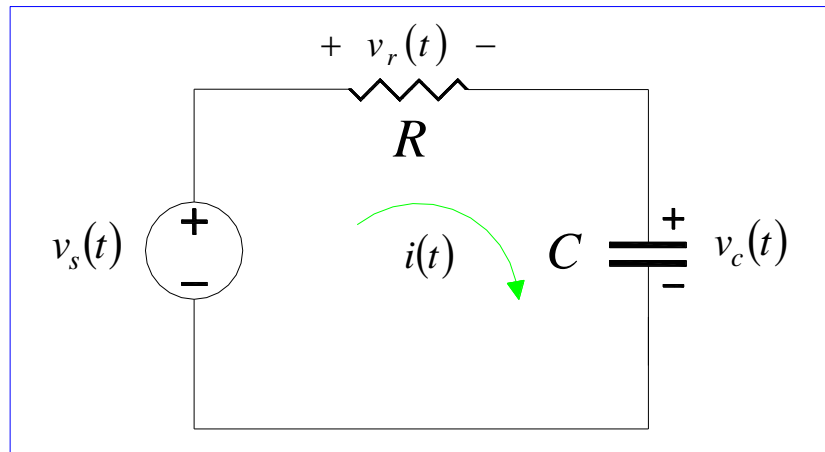
Inconvenientes:

Necesidad de una fuente de alimentación, normalmente simétrica.

Limitación de la tensión de salida a la tensión de saturación de los operacionales.

Limitación de uso a frecuencias por debajo de la de corte del amplificador (Aplicaciones de Audio).

## Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, en todo momento debe cumplirse que:

$$v_s(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

$$v_s(t) = i(t)R + v_C(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\therefore i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Reemplazando tenemos que el voltaje de salida está relacionado con el de entrada a través de la ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$v_s(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Para determinar su respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  aplicamos la transformada de Fourier, para una señal de entrada

$$v_s(t) = e^{j\omega t}$$

Debemos tener:

$$v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

Si sustituimos en la expresión anterior obtenemos:

$$e^{j\omega t} = RC \frac{d}{dt} [H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t},$$

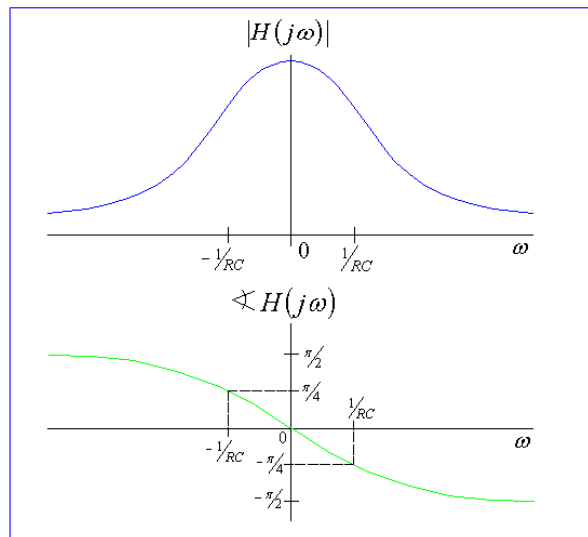
$$o \quad e^{j\omega t} = RCj\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t},$$

De lo cual se deduce directamente que

$$H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + RCj\omega} e^{j\omega t}$$

$$o \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

El módulo y la fase de la respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  para este ejemplo se muestran en la figura siguiente:



Para dar una idea inicial de los compromisos involucrados en el diseño de filtros, consideraremos el comportamiento en el dominio del tiempo del circuito.

**En particular, la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación:**

$$v_s(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace tenemos:

$$V_s(s) = sRCV_c(s) + V_c(s)$$

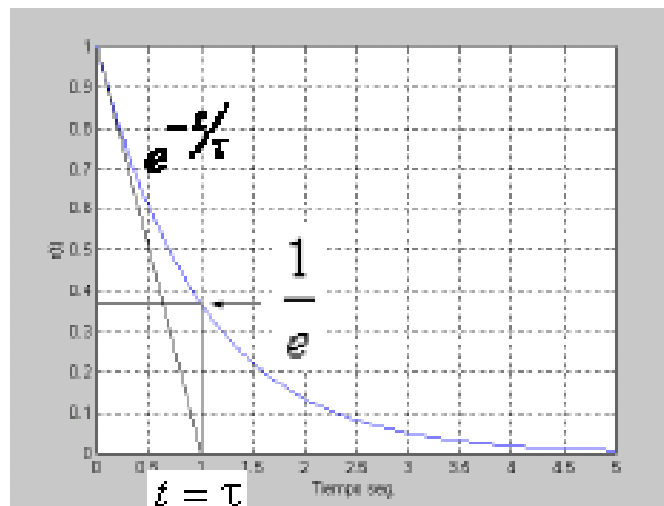
$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_c(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Haciendo

$$\tau = RC$$

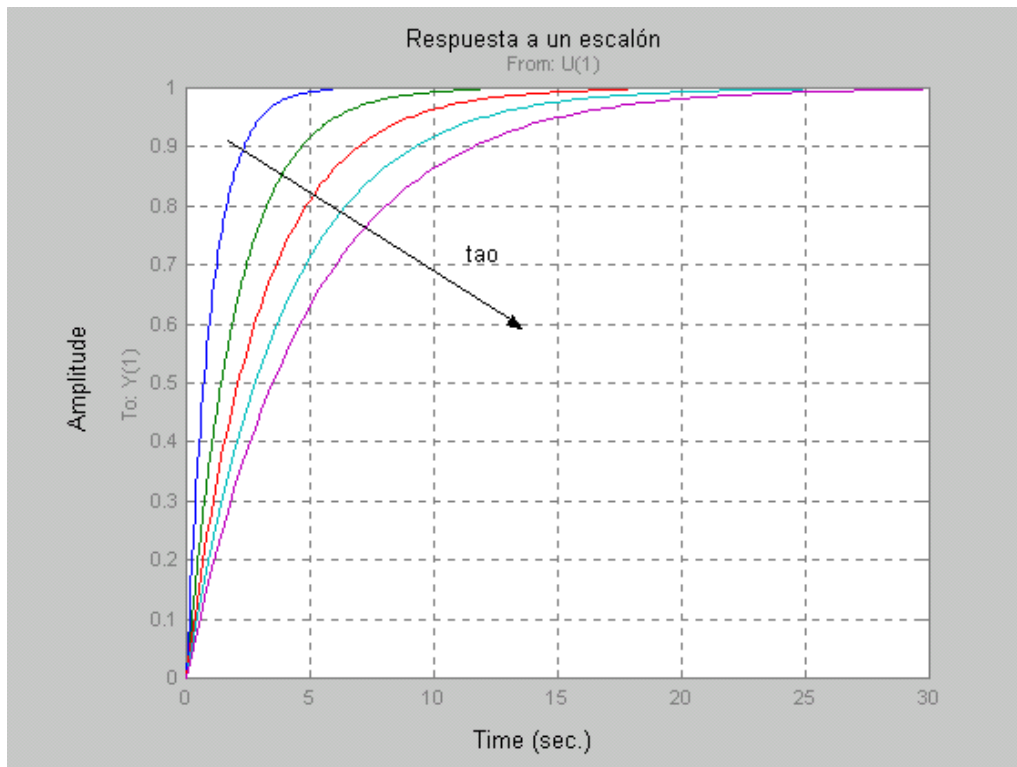
Antitransformando:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$



La respuesta al escalón

$$s(t) = \left[ 1 - e^{-t/RC} \right] u(t)$$



Al comparar las figuras de Respuesta en Frecuencia con las de Respuesta Temporal vemos un compromiso fundamental.

Si queremos que el filtro deje pasar frecuencias muy bajas, del gráfico de respuesta en frecuencia vemos que  $1/RC$  debe ser muy pequeño o  $RC$  debe ser muy grande.

Por otro lado, de la respuesta en el tiempo vemos que si  $RC$  es grande, entonces a la respuesta al escalón le tomará más tiempo en alcanzar el valor final.

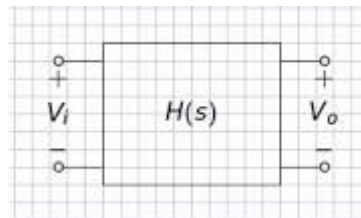
## Diseño de filtros analógicos

- Conocer los distintos tipos de filtros y sus características.
- Calcular la función de transferencia, ceros y polos de cualquier filtro.
- Dibujar diagramas de Bode a partir de la función de transferencia
- Diseñar filtros conforme a unas especificaciones dadas.

### Función de transferencia

- Un filtro es un sistema que atenúa la amplitud de las señales aplicadas a su entrada en función de la frecuencia.
- La función de transferencia describe la relación entre la señal de salida y la de entrada.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$



- Para señales senoidales en régimen permanente  $s = j\omega$

$$H(j\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

La función de transferencia se puede descomponer en módulo y fase.

- Se suele hablar de la atenuación del filtro en lugar de la amplitud:

$$\alpha(\omega) = -20 \log(|H(\omega)|)$$

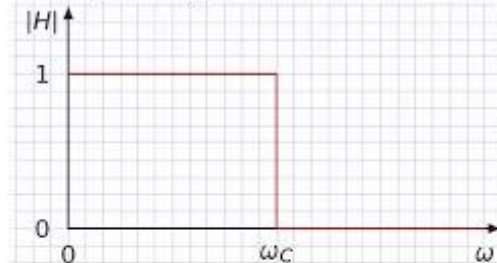
## Tipos de filtros

### Según el tipo de componentes

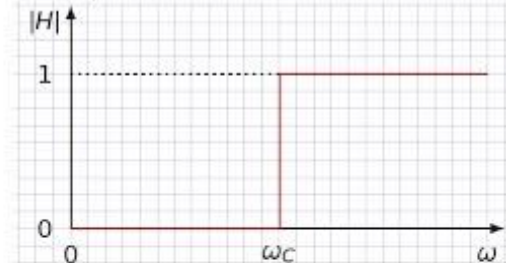
- Los filtros pasivos están constituidos por resistencias, bobinas y condensadores únicamente.
- Los filtros activos hacen uso de amplificadores operacionales. Evitan el uso de bobinas.

### Según las bandas filtradas

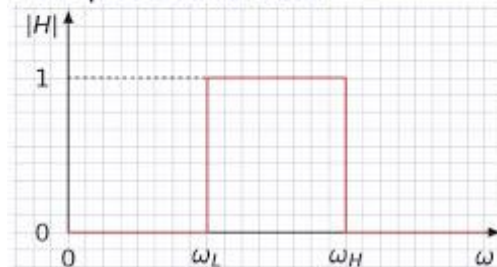
Filtro paso-bajo ideal



Filtro paso-alto ideal



Filtro paso-banda ideal



Filtro rechaza-banda ideal



## Diagrama de Bode

### Descomposición de la función de transferencia en suma de factores

- La función de transferencia se puede escribir como cociente de dos polinomios de coeficientes reales:

$$H(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$
$$= K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)}$$

$z_1, \dots, z_n$ : **ceros** de la función de transferencia

$p_1, \dots, p_m$ : **polos** de la función de transferencia

- Para señales senoidales en régimen permanente podemos escribir la función de transferencia como el producto de módulos y fases:

$$H(j\omega) = \frac{\prod_{i=0}^n N_i(j\omega)}{\prod_{k=0}^m D_k(j\omega)} = \frac{\prod_{i=0}^n |N_i(\omega)| e^{j\phi_i(\omega)}}{\prod_{k=0}^m |D_k(\omega)| e^{j\phi_k(\omega)}} = |H(\omega)| e^{j\Phi(\omega)}$$

- El diagrama de Bode es la representación asintótica del módulo y la fase de la función de transferencia.

- Módulo

$$|H(\omega)| = \frac{\prod_{i=0}^n |N_i(\omega)|}{\prod_{k=0}^m |D_k(\omega)|}$$

Aplicando logaritmos se puede representar el módulo como suma y diferencia de factores:

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log |H(\omega)| = \sum_{i=0}^n 20 \log |N_i(\omega)| - \sum_{k=0}^m 20 \log |D_k(\omega)|$$

- La fase se escribe directamente como suma y diferencia de factores:

$$\Phi(\omega) = \sum_{i=0}^n \phi_i(\omega) - \sum_{k=0}^m \phi_k(\omega)$$

- Los términos positivos provienen de los ceros, los negativos de los polos.
- El diagrama de Bode se puede representar como superposición de diagramas de módulo y fase de los factores  $N_i(\omega)$  y  $D_k(\omega)$ .

### Representación de módulo y fase

Los términos  $N_i(j\omega)$  y  $D_k(j\omega)$  siempre tendrán una de estas formas:

- Constante real pura. Nos da la ganancia del filtro.

$$K$$

- Término imaginario puro. Corresponde a un cero o un polo a frecuencia cero.

$$j\omega$$

- Término binómico. Polos o ceros reales.

$$1 + \frac{j\omega}{\omega_0}$$

- Término cuadrático. Polos o ceros complejos conjugados.

$$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + 1$$



### Diagrama de Bode de una constante real

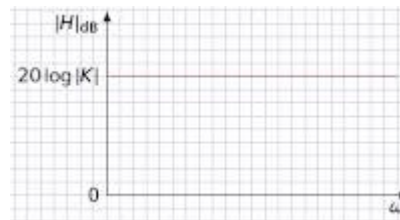
$$H(j\omega) = K$$

#### Módulo

$$|H|_{dB} = 20 \log |K| = \text{cte.}$$

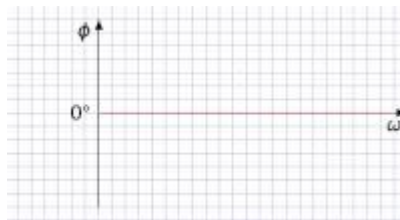
Si  $|K| > 1$  el filtro amplifica.

Si  $|K| < 1$  el filtro atenúa.



#### Fase

$$\begin{cases} \text{Si } K > 0 \Rightarrow \phi(K) = 0^\circ \\ \text{Si } K < 0 \Rightarrow \phi(K) = 180^\circ \end{cases}$$



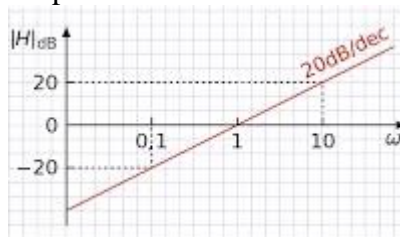
### Diagrama de Bode de un cero en el origen

$$H(j\omega) = j\omega$$

#### Módulo

$$|H|_{dB} = 20 \log |\omega|$$

Recta de pendiente 20dB/dec que pasa por 0dB en  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$



#### Fase

$$\phi(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$



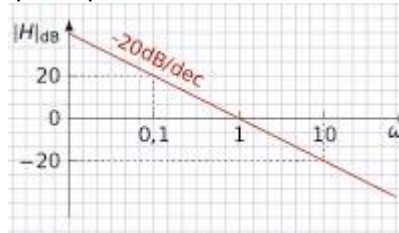
### Diagrama de Bode de un polo en el origen

$$H(j\omega) = 1/j\omega$$

#### Módulo

$$|H|_{dB} = -20 \log |\omega|$$

Recta de pendiente -20dB/dec que pasa por 0dB en  $\omega = 1s^{-1}$



#### Fase

$$\phi(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



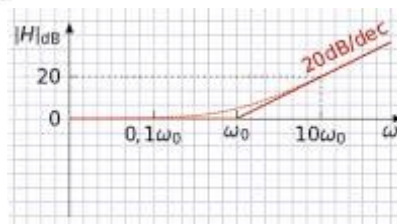
### Diagrama de Bode de un cero a frecuencia $\omega_0$

$$H(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_0$$

#### Módulo

$$|H|_{dB} = 20 \log (1 + \omega^2/\omega_0^2)^{1/2}$$

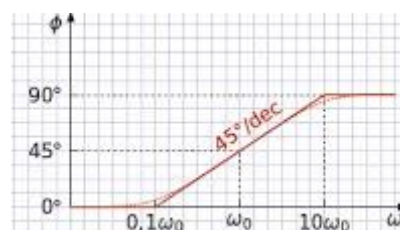
$$\begin{cases} \text{Si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 0 \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 3dB \\ \text{Si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 20 \log \omega/\omega_0 \end{cases}$$



#### Fase

$$\phi(j\omega) = \arctan \omega/\omega_0$$

$$\begin{cases} \text{Si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \phi \approx 0 \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \Rightarrow \phi = \pi/4 \\ \text{Si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \phi \approx \pi/2 \end{cases}$$



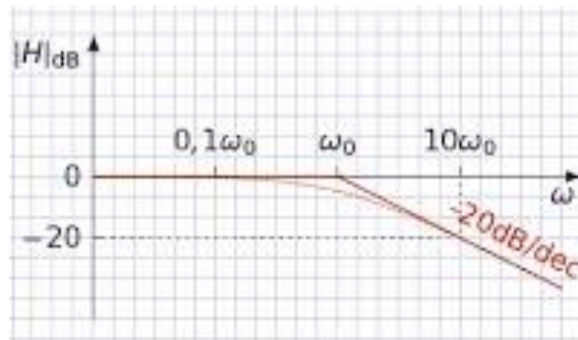
## Diagrama de Bode de un polo a frecuencia $\omega_0$

$$H(j\omega) = 1/(1+j\omega/\omega_0)$$

### Módulo

$$|H|_{dB} = -20 \log (1 + \omega^2/\omega_0^2)^{1/2}$$

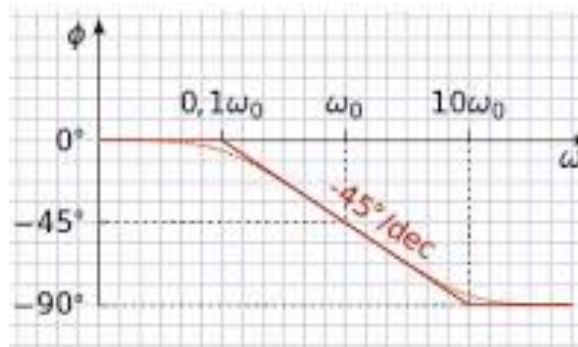
$$\begin{cases} \text{Si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 0 \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx -3 \text{ dB} \\ \text{Si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx -20 \log \omega/\omega_0 \end{cases}$$



### Fase

$$\phi(j\omega) = -\arctan \omega/\omega_0$$

$$\begin{cases} \text{Si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \phi \approx 0 \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \Rightarrow \phi = -\pi/4 \\ \text{Si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \phi \approx -\pi/2 \end{cases}$$



## Diagrama de Bode de un cero/polo cuadrático

$$H(j\omega) = 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad (\text{cero})$$

$$H(j\omega) = \left[ 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{-1} \quad (\text{polo})$$

Las raíces del polinomio pueden ser:

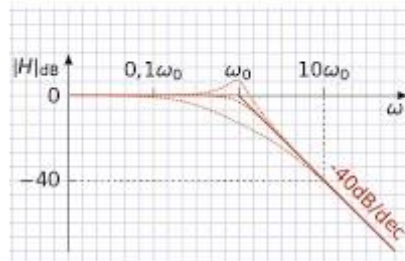
1. Reales y diferentes si  $\xi > 1$ .
2. Reales e iguales (cero múltiple en  $\omega = \omega_0$ ) si  $\xi = 1$ .
3. Complejas conjugadas si  $\xi < 1$ .

El tratamiento de los casos 1 y 2 es igual que el de los ceros simples.

### Módulo

$$|H|_{dB} = \pm 20 \log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_0)^2} \quad (+ \text{cero}, - \text{polo})$$

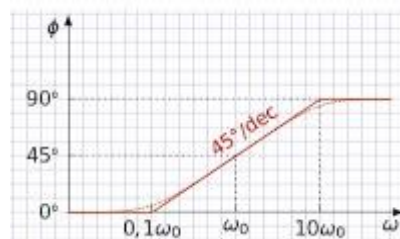
$$\begin{cases} \text{Si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 0 \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} = \pm 20 \log 2|\xi| \\ \text{Si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow |H|_{dB} \approx \pm 40 \log \omega/\omega_0 \end{cases}$$



### Fase

$$\phi = \arctan \frac{2\xi\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}$$

$$\begin{cases} \text{Si } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow \phi \approx 0 \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \\ \text{Si } \omega \gg \omega_0 \Rightarrow \phi \approx \pi \end{cases}$$



## Filtros de primer orden

Función de transferencia general

$$H(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0}$$

Función de transferencia del filtro paso-bajo

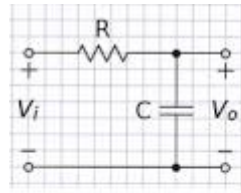
$$H(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0}$$

Función de transferencia del filtro paso-alto

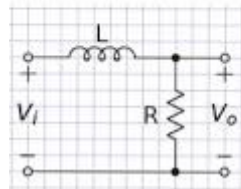
$$H(s) = \frac{a_1 s}{s + \omega_0}$$

## Filtros paso- bajo

### Filtros pasivos

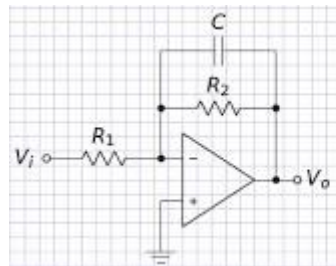


$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$
$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$



$$H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}$$
$$\omega_C = \frac{R}{L}$$

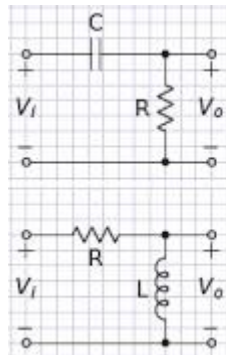
### Filtros activos



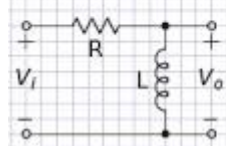
$$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1/R_2C}{j\omega + 1/R_2C}$$
$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_C = \frac{1}{R_2C}$$

## Filtros paso- alto

### Filtros pasivos

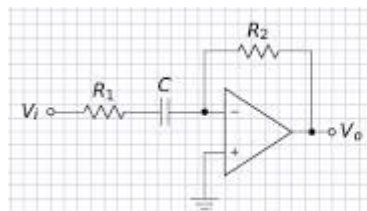


$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC}$$
$$\omega_C = \frac{1}{RC}$$



$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + R/L}$$
$$\omega_C = \frac{R}{L}$$

### Filtros activos



$$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{j\omega}{j\omega + 1/R_2C}$$
$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_C = \frac{1}{R_1C}$$

Nota: En todos los circuitos presentados la frecuencia de corte depende de dos parámetros. En el proceso de diseño tendremos que fijar uno de ellos arbitrariamente.

## Filtros de segundo orden

### Función de transferencia

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

$\xi$ : coeficiente de amortiguamiento.

$Q = 1/2\xi$ : factor de calidad.

$\omega_0$ : frecuencia de resonancia.

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s_1, s_2 = \omega_0 \left( -\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right)$$

- Reales y distintos si  $Q < 1/2$ .
- Reales e iguales si  $Q = 1/2$ .
- Complejos conjugados si  $Q > 1/2$ .

### Funciones de transferencia

Filtro paso-bajo

$$H(s) = \frac{a_0}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

Filtro paso-alto

$$H(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

Filtro paso-banda

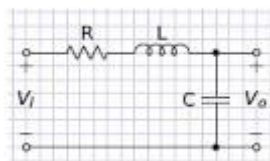
$$\frac{a_1 s}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

Filtro rechaza-banda

$$a_2 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

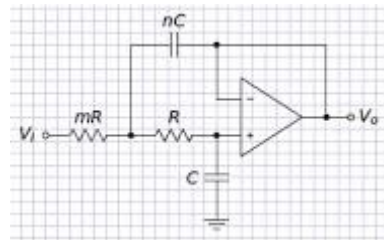
## Filtros paso- bajo

Filtro pasivo



$$H(j\omega) = \frac{1/LC}{(j\omega)^2 + j\omega R/L + 1/LC}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Filtro activo. Celda de Sallen-Key

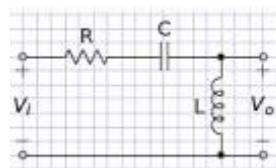


$$\omega_c = \frac{1}{RC\sqrt{mn}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{n+1}$$

## Filtros paso- alto

Filtro pasivo

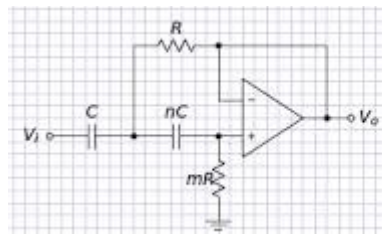


$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + j\omega R/L + 1/LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Filtro activo. Celda de Sallen-Key

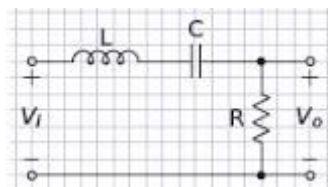


$$\omega_c = \frac{1}{RC\sqrt{mn}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{n+1}$$

## Filtros paso- banda

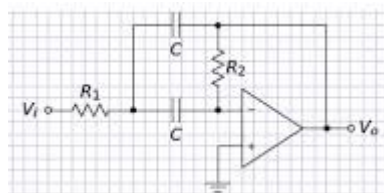
Filtro pasivo



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Filtro activo. Filtro Deliyannis



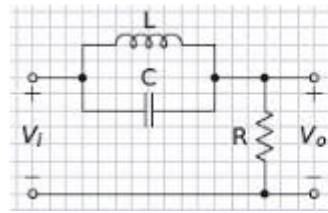
$$H_0 = -\frac{R_2}{2R_1}$$

$$\omega_c = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}$$

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

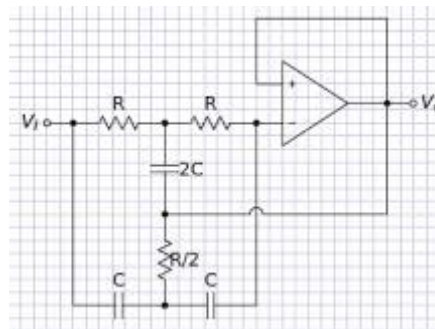
## Filtros rechaza- banda

Filtro pasivo



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Filtro activo. Celda en T gemela



$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

## Filtros de orden $n$

### Especificación de características de filtros

- Frecuencia de corte: por encima (o debajo) de la cual la señal se atenúa 3dB (filtro real) o completamente (filtro ideal).
- Banda de paso: intervalo de frecuencias para las que la respuesta en amplitud es mayor que 3dB (filtro real) o la unidad (filtro ideal).
- Banda atenuada: intervalo de frecuencias para las que la respuesta en amplitud es menor que 3dB (filtro real) o es nula (filtro ideal).
- Orden del filtro: es el grado del polinomio del denominador de la función de transferencia. Determina la pendiente de la atenuación.



$H_p$ : Mínima ganancia en la banda de paso

$H_a$ : Máxima ganancia en la banda atenuada

$\omega_p$ : Máxima frecuencia de la banda de paso

$\omega_a$ : Mínima frecuencia de la banda atenuada





$H_p$ : Mínima ganancia en la banda de paso

$H_a$ : Máxima ganancia en la banda atenuada

$\omega_p$ : Mínima frecuencia de la banda de paso

$\omega_a$ : Máxima frecuencia de la banda atenuada

Parámetro de discriminación de un filtro

$$K_d = \sqrt{\frac{1/H_p^2 - 1}{1/H_a^2 - 1}} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_a/10} - 1}}$$

Si  $H_p \gg H_a \Rightarrow K_d \ll 1$  y el filtro es de mejor calidad.

Parámetro de selectividad de un filtro

$$K_s = \frac{\omega_p}{\omega_a}$$

Si  $\omega_p \approx \omega_a \Rightarrow K_s \approx 1$  y el filtro se aproxima al ideal.

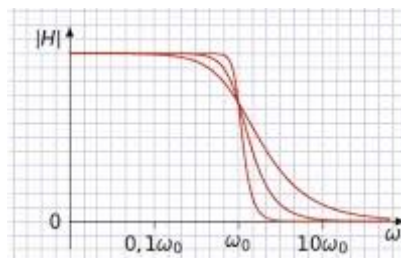
## Filtros de Butterworth

- El filtro de Butterworth tiene una función de transferencia máximamente plana en la banda de paso.
- Todos los ceros se encuentran en  $\omega = \infty$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}$$

$\omega_c$ : frecuencia de corte

$n$ : orden de filtro



## Diseño del filtro de Butterworth

- Cálculo del orden del filtro
- Obtener la función de transferencia a partir de tablas para filtros normalizados.
- Escalar la frecuencia de corte y las impedancias.

## Filtros de Chebyshev

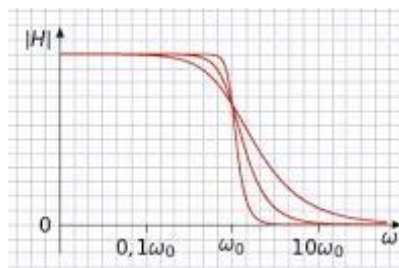
- El filtro de Chebyshev exhibe un rizado en la banda pasante.
- Es máximamente abrupto en la banda de transición.
- Todos los ceros se encuentran en  $\omega = \infty$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}} \quad C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)) & \text{si } x \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1}(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\omega_c$ : frecuencia de corte

$n$ : orden de filtro

$\epsilon$ : parámetro de rizado



### Diseño del filtro de Chebyshev

1. Cálculo del orden del filtro

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}(1/K_d)}{\cosh^{-1}(1/K_s)}$$

2. Cálculo del parámetro de rizado

$$\epsilon = \sqrt{1/H_p^2 - 1}$$

3. Obtener la función de transferencia a partir de tablas para filtros normalizados

4. Escalar la frecuencia de corte y las impedancias.

## Transformaciones de filtros

Transformación paso-bajo  $\rightarrow$  paso-alto

$s \rightarrow 1/s$  y  $R \rightarrow C = 1/R$  y  $C \rightarrow R = 1/C$

Escalado de frecuencias  $\omega \rightarrow \alpha\omega$

- En filtros pasivos:  $C \rightarrow C/\alpha$  y  $L \rightarrow L/\alpha$
- En filtros activos:  $C \rightarrow C/\alpha$  o  $R \rightarrow R/\alpha$

Escalado de impedancias

Esta transformación mantiene la frecuencia de corte del circuito.

$R \rightarrow \beta R$  y  $C \rightarrow C/\beta$  y  $L \rightarrow \beta L$