

Clase

Filtros- Primera Parte

Filtros

Filtrado

En una amplia variedad de aplicaciones, resulta de interés cambiar las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia en una señal, o quizás eliminar por completo algunas componentes de frecuencia.

Filtros

Filtros Conformadores de Frecuencia

Son sistemas LTI que cambian la forma del espectro.

Filtros selectivos en Frecuencia

Son sistemas diseñados para dejar pasar algunas frecuencias esencialmente no distorsionadas y atenuar de manera significativa o por completo otras.

Filtros Selectivos en Frecuencia

Aplicaciones

Eliminación de Ruidos: por ejemplo, si el ruido en una grabadora de audio está en una banda de frecuencias más alta que la música o la voz de la grabación, se puede eliminar mediante este tipo de filtro.

Filtros Selectivos en Frecuencia

Aplicaciones

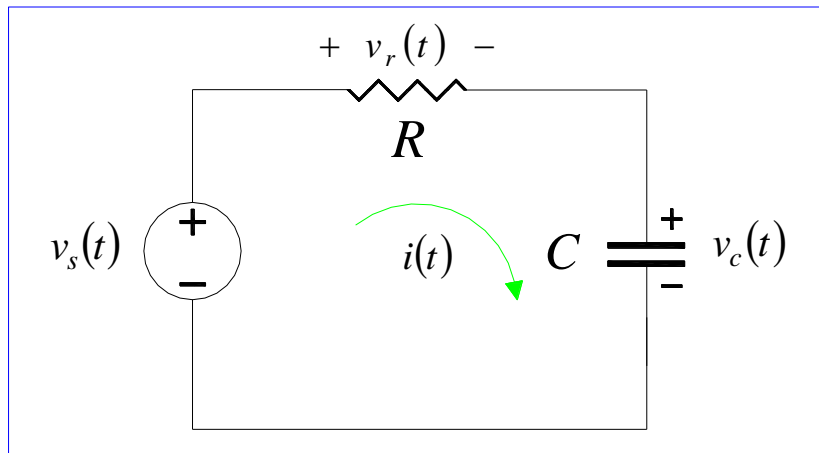
Sistemas de Comunicación: la base para los sistemas de comunicación de amplitud modulada (AM) es la transmisión de información de muchas fuentes diferentes simultáneas, poniendo la información de cada canal en una banda de frecuencias separadas y extrayendo los canales o bandas individuales en el receptor mediante el uso de filtros selectivos.

Filtros Continuos Descriptos Mediante Ecuaciones Diferenciales

En muchas aplicaciones, el filtrado selectivo en frecuencia se lleva a cabo mediante el uso de sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Ejemplo: Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo

Los circuitos eléctricos son usados ampliamente en las operaciones de filtrado continuo.



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, en todo momento debe cumplirse que:

$$v_s(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

$$v_s(t) = i(t)R + v_C(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\therefore i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Reemplazando tenemos que el voltaje de salida está relacionado con el de entrada a través de la ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$v_s(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Ejemplo: Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo

Para determinar su respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, observamos que, por definición, con el voltaje de entrada $v_s(t) = e^{j\omega t}$, debemos tener:

$$v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

Si sustituimos en la expresión anterior obtenemos:

$$e^{j\omega t} = RC \frac{d}{dt} [H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t},$$

$$o \quad e^{j\omega t} = RCj\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t},$$

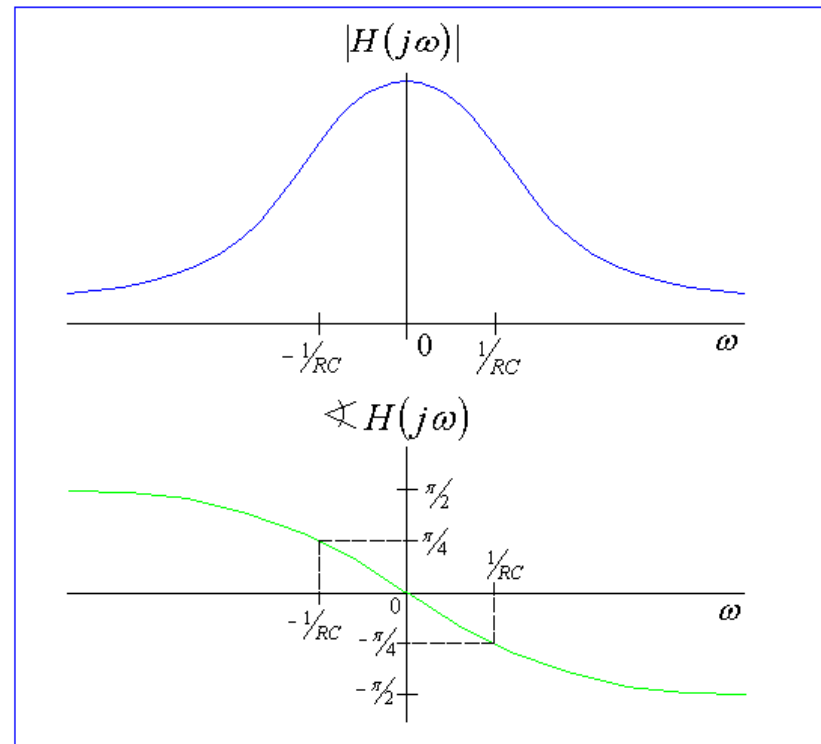
De lo cual se deduce directamente que

$$H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + RCj\omega} e^{j\omega t}$$

$$o \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

Ejemplo: Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo

El módulo y la fase de la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para este ejemplo se muestran en la figura siguiente:



Ejemplo: Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo

Para dar una idea inicial de los compromisos involucrados en el diseño de filtros, consideraremos el comportamiento en el dominio del tiempo del circuito.

En particular, la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación:

$$v_s(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace

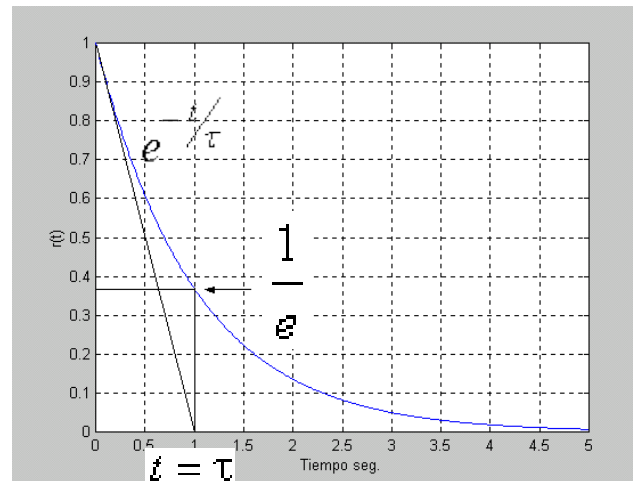
$$V_s(s) = sRCV_c(s) + V_c(s) \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{V_c(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Haciendo

$$\tau = RC$$

Antitransformando

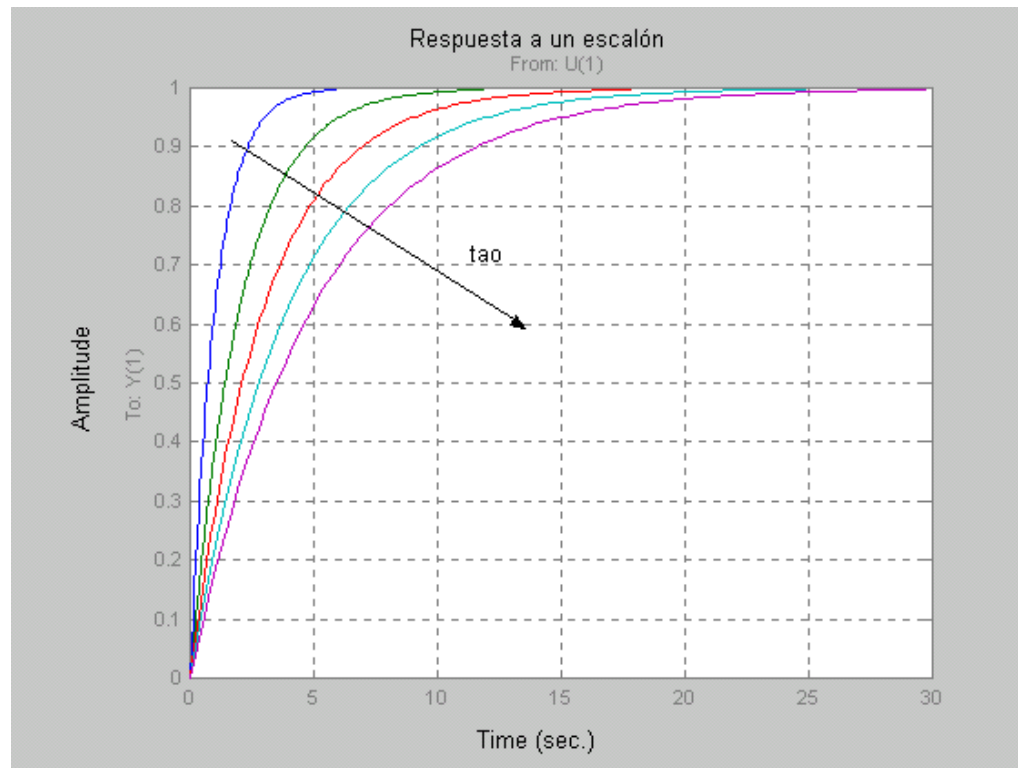
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$



Ejemplo: Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo

La respuesta al escalón

$$s(t) = \left[1 - e^{-t/RC} \right] u(t)$$



Ejemplo: Un Filtro Pasa Bajos RC sencillo

Al comparar las figuras de Respuesta en Frecuencia con las de Respuesta Temporal vemos un compromiso fundamental.

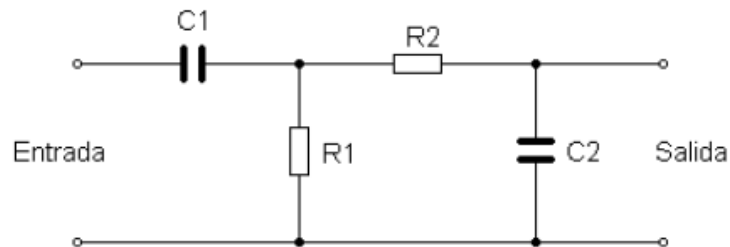
Si queremos que el filtro deje pasar frecuencias muy bajas, del gráfico de respuesta en frecuencia vemos que $1/RC$ muy pequeño o RC debe ser muy grande.

Por otro lado, de la respuesta en el tiempo vemos que si RC es grande, entonces a la respuesta al escalón le tomará más tiempo en alcanzar el valor final.

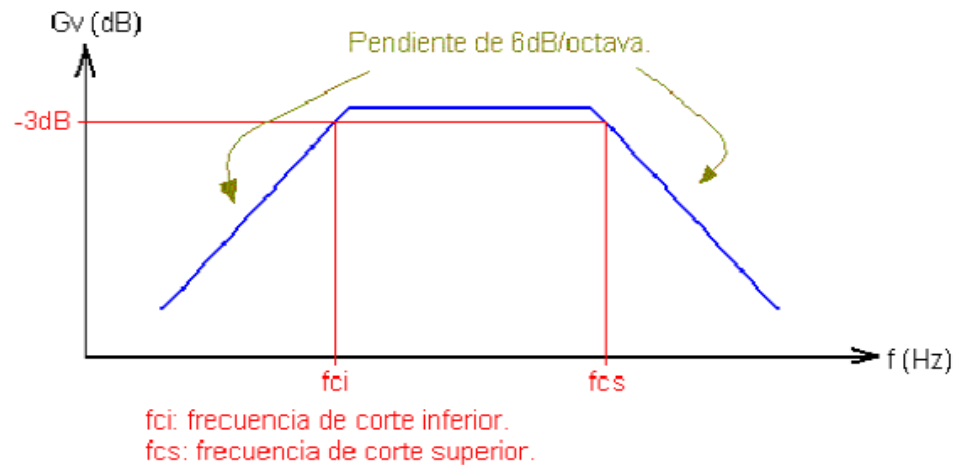
Ejemplo: Un Filtro Pasa Banda pasivo

El filtro pasa banda:

Se puede conseguir un filtro paso banda conectando en cascada (uno tras otro) un filtro pasa altos y un filtro pasa bajos:



La respuesta en frecuencia que cabe esperar de un filtro de este tipo será algo similar a esto:



Filtro Pasa Bajos Ideal

Transmisión Sin Distorsión

Para que un sistema pueda transmitir sin distorsión una señal, debe atenuar igualmente todas las componentes de frecuencia, es decir, $H(\omega) = Cte.$ para todas las frecuencias.

La condición anterior no es suficiente para garantizar la transmisión sin distorsión.

El cambio de fase de cada componente también debe satisfacer ciertas condiciones.

En general, puede haber algún retraso de tiempo.

Podemos decir que se transmite sin distorsión una señal $f(t)$

si la respuesta es: $k f(t - t_0)$

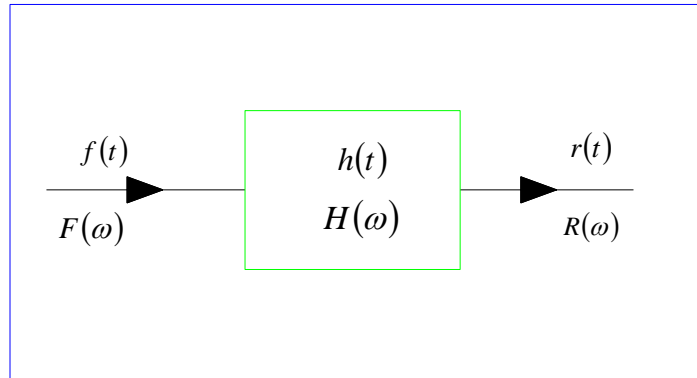
Si $f(t)$ es la señal de entrada, necesitamos que la respuesta $r(t)$ sea, en una transmisión sin distorsión:

$$r(t) = k f(t - t_0)$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo tenemos:

$$R(\omega) = k F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Filtro Pasa Bajos Ideal



Del gráfico vemos que,

$$R(\omega) = F(\omega)H(\omega) = k F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Entonces, en un sistema sin distorsión

$$H(\omega) = k e^{-j\omega t_0}$$

De donde

$$|H(\omega)| = k \quad Cte. \forall \omega$$

El desfaseamiento es proporcional a la frecuencia

$$\theta(\omega) = -\omega t_0$$

Filtro Pasa Bajos Ideal

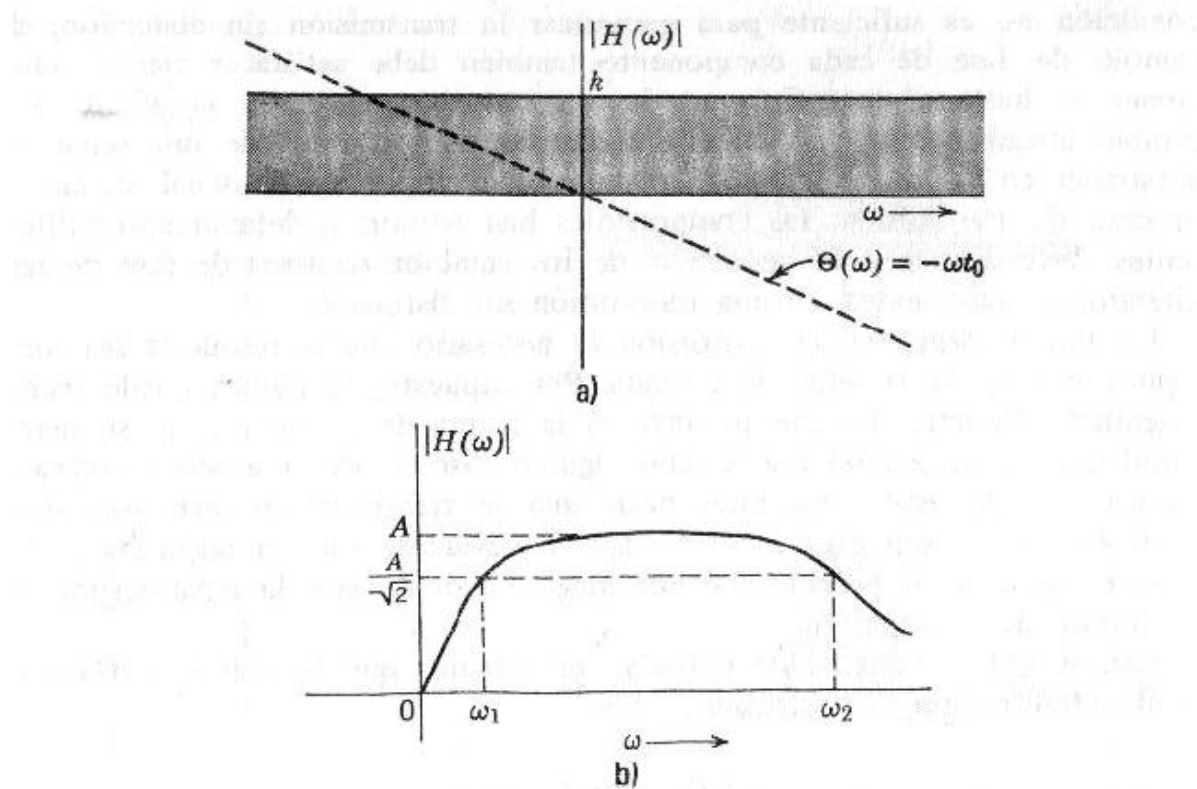


Figura 2.3 a) Características de magnitud y fase de un sistema de transmisión sin distorsión.

Filtro Pasa Bajos Ideal

Ancho de Banda de un Sistema

En general, la constancia de la magnitud $|H(\omega)|$ de un sistema queda especificada por su ancho de banda.

Se define arbitrariamente el ancho de banda de un sistema como el intervalo de frecuencia en la cual la magnitud $|H(\omega)|$ es mayor que $1/\sqrt{2}$ multiplicado (dentro de 3 db) por su valor en la mitad del intervalo.

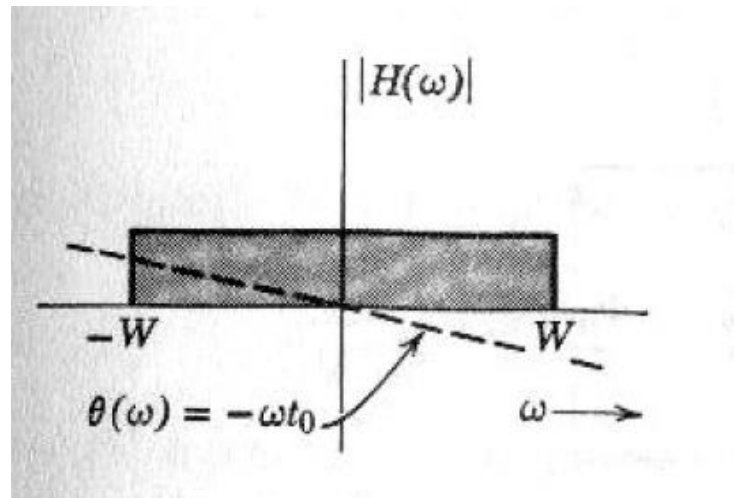
Para la figura anterior el ancho de banda es

$$\omega_2 - \omega_1$$

Filtro Pasa Bajos Ideal

Filtros ideales

Un filtro ideal de paso bajo transmite, sin distorsión alguna, todas las señales de frecuencias menores que una determinada frecuencia W radianes por segundo. Las frecuencias superiores a W se atenúan completamente.



Por consiguiente, la respuesta en frecuencia (característica de magnitud) de ese filtro es un pulso rectangular $G_{2W}(\omega)$.

La función de fase para una transmisión sin distorsión es $-\omega t_0$.

Filtro Pasa Bajos Ideal

La respuesta en frecuencia de ese filtro es

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} = G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Se puede encontrar la respuesta $h(t)$ al impulso unitario de este filtro si se calcula la transformada inversa de $H(\omega)$.

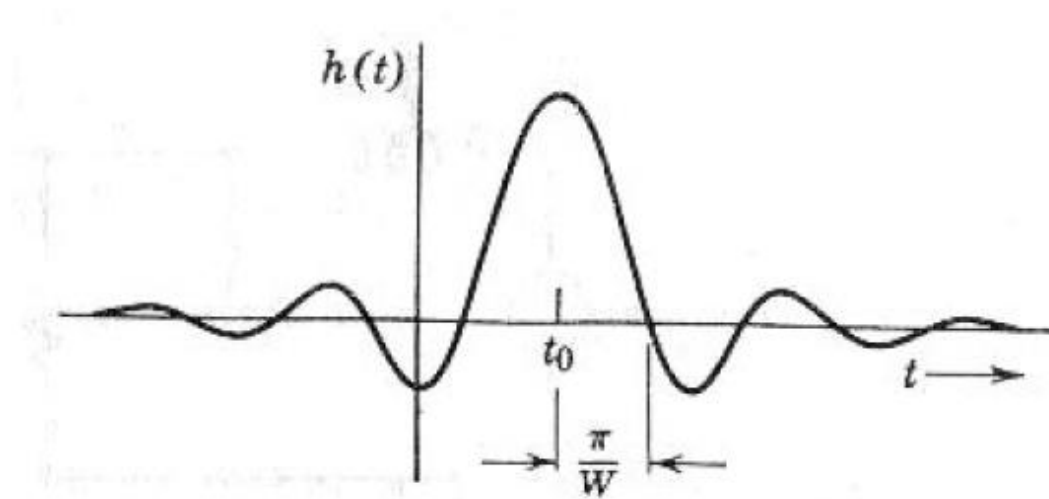
$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = F^{-1}[G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}]$$

De la tabla de transformadas y aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, se tiene

$$h(t) = \frac{W}{\pi} \text{Sinc}[W(t - t_0)]$$

Cuyo gráfico se muestra en la figura siguiente:

Filtro Pasa Bajos Ideal



La figura nos muestra que la respuesta al impulso existe para valores negativos de t .

Por lo tanto, se debe concluir que, aun cuando sería muy conveniente tener un filtro ideal de paso bajo, no es físicamente realizable.

Filtro Pasa Bajos Ideal

Criterio de Paley-Wiener

Condición en el dominio del tiempo:

La respuesta $h(t)$ al impulso unitario de un sistema físicamente realizable debe ser causal.

Condición en el dominio de la frecuencia:

Es condición necesaria y suficiente para que una función $|H(\omega)|$ sea físicamente realizable que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (1)$$

Y la función de magnitud $|H(\omega)|$ al cuadrado tiene que ser integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

Filtro Pasa Bajos Ideal

Criterio de Paley-Wiener

Si un sistema tiene una función de magnitud que no cumple con el criterio de Paley-Wiener su respuesta al impulso es no causal, es decir, existe una respuesta que se adelanta a la aplicación de la función de excitación.

Conclusiones:

La función de magnitud $|H(\omega)|$ puede ser cero en algunas frecuencias discretas, pero no puede ser cero en una banda finita de frecuencias pues esto implicaría que la integral de la ecuación (1) fuese infinita .

Filtro Pasa Bajos Ideal

Criterio de Paley-Wiener

La característica de magnitud realizable no puede tener una atenuación total demasiado grande. Así, la característica del filtro pasabajos mostrado en la figura siguiente es físicamente realizable para valores pequeños de ϵ .

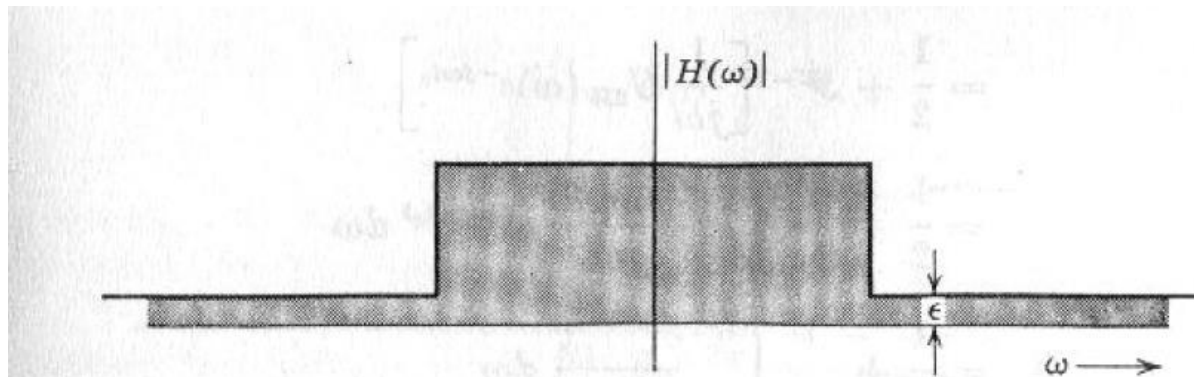
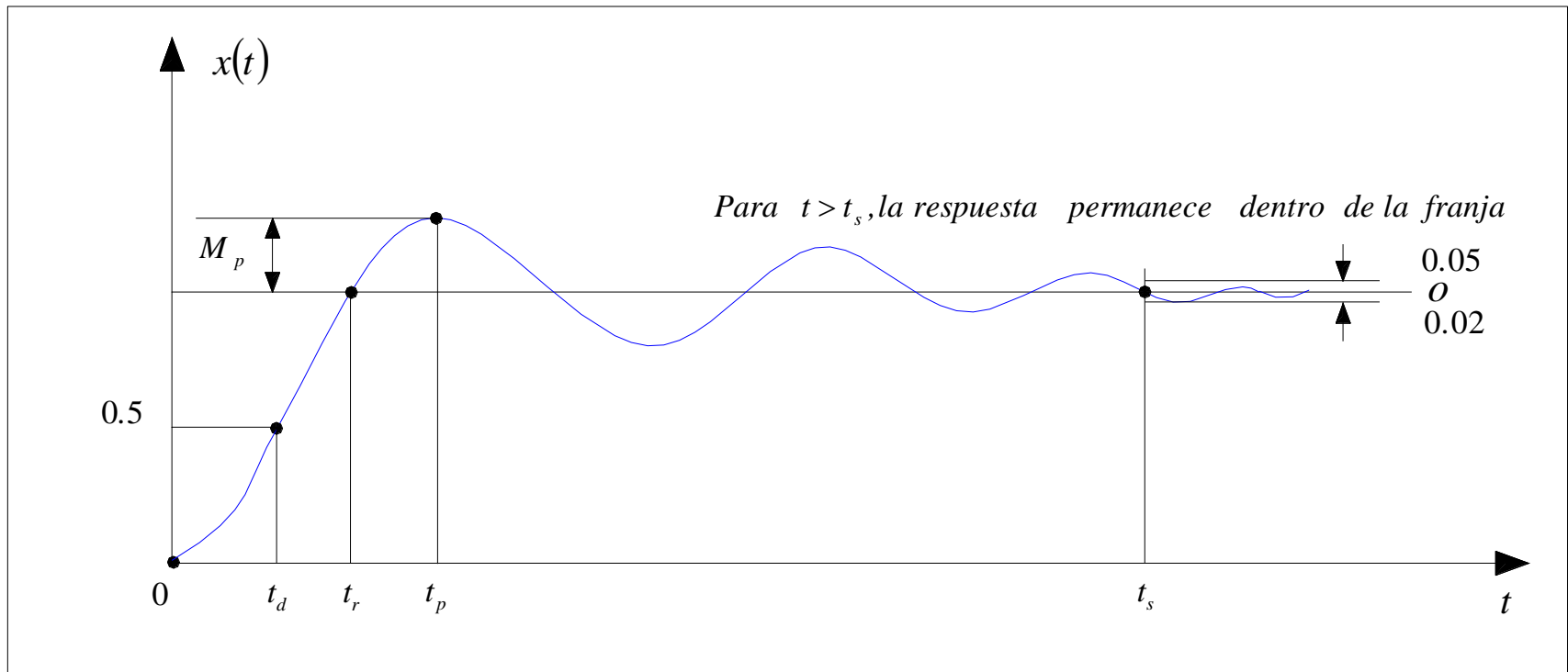


Figura 2.7 Característica de filtro físicamente realizable.

Respuesta al Escalón

Definiciones de la especificación de la respuesta transitoria: En muchos casos prácticos, la características de desempeño deseadas del sistema se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y exhiben respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.



Respuesta al Escalón

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, dado que ésta es fácil de generar y suficientemente drástica. (Si se conoce la entrada a un escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada).

La respuesta transitoria de un sistema exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Es común especificar las siguientes características

- 1) Tiempo de retardo, t_d
- 2) Tiempo de levantamiento, t_r
- 3) Tiempo de pico, t_p
- 4) Sobrepico máximo, M_p
- 5) Tiempo de asentamiento, t_s

Respuesta al Escalón

1) Tiempo de retardo t_d : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance por primera vez la mitad del valor final.

2) Tiempo de levantamiento t_r : es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10% al 90%; del 5% al 95% o del 0 al 100% de su valor final.

3) Tiempo de pico t_p : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer sobrepico.

4) Sobrepico máximo M_p : es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable (estacionario) de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepico máximo, que se define como:

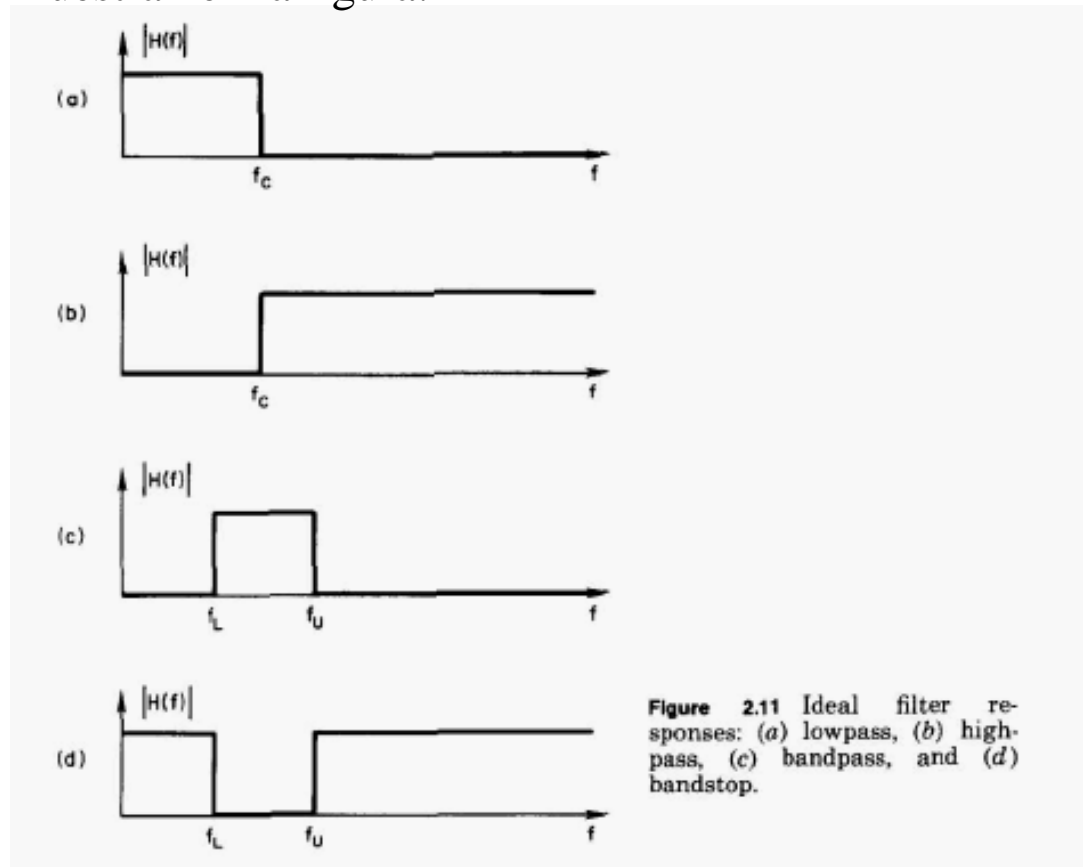
$$\% \text{ de sobrepico máximo} = \frac{r(t_p) - r(\infty)}{r(\infty)} \times 100\%$$

5) Tiempo de asentamiento t_s : es el tiempo que se requiere para que la respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5%) y permanezca dentro de él.

Filtros Característicos

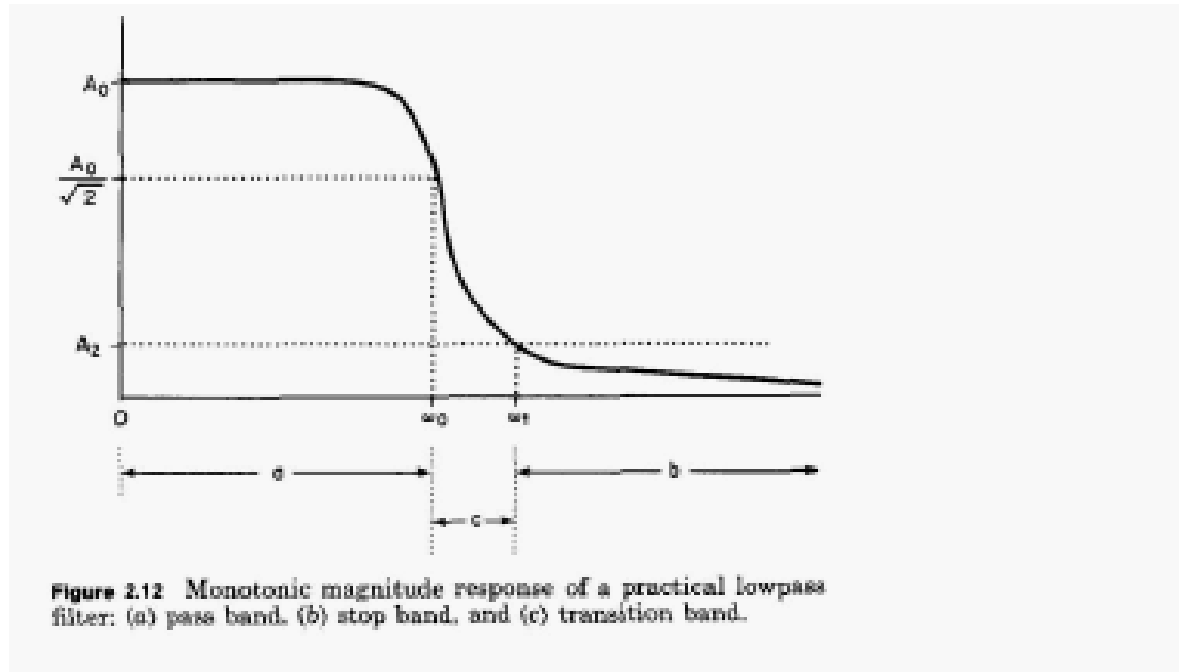
Respuesta en Amplitud

La respuesta en amplitud de los filtros prácticos, tiene generalmente una de las cuatro formas como las que se muestran en la figura:



Filtros Característicos

En los cuatro casos de filtros característicos mostrados se divide el espectro en tres regiones.



Para el filtro pasa bajos de la figura anterior, la Banda de Paso se extiende desde la corriente continua hasta la Frecuencia de Corte ω_c , la Banda de Transición desde ω_c hasta la frecuencia de la Banda Eliminada (Stop band) ω_1 , y la Banda Eliminada desde ω_1 hasta infinito.

Filtros Característicos

La Frecuencia de Corte ω_c es la frecuencia donde la amplitud cae una fracción especificada (3 dB) con respecto al valor pico en la Banda de Paso y se define ω_1 como el comienzo de la Banda Eliminada.

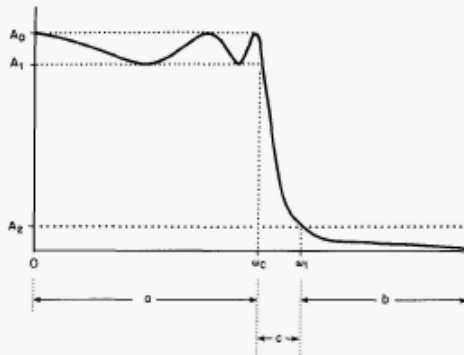


Figure 2.13 Magnitude response of a practical lowpass filter with ripples in the pass band: (a) pass band, (b) stop band, and (c) transition band.

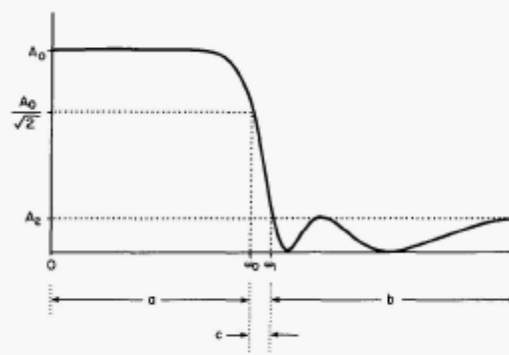


Figure 2.14 Magnitude response of a practical lowpass filter with ripples in the stop band: (a) pass band, (b) stop band, and (c) transition band.

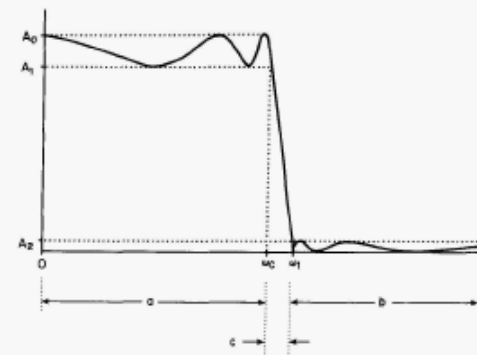


Figure 2.15 Magnitude response of a practical lowpass filter with ripples in the pass band and stop band: (a) pass band, (b) stop band, and (c) transition band.

Como vemos en las figuras anteriores no hay una característica que indique donde debe estar ubicada ω_1 , muchas veces se especifica una caída con respecto al pico máximo (o alternativamente una amplitud máxima de la Banda Eliminada).

El ancho W_T de la Banda de Transición es igual a

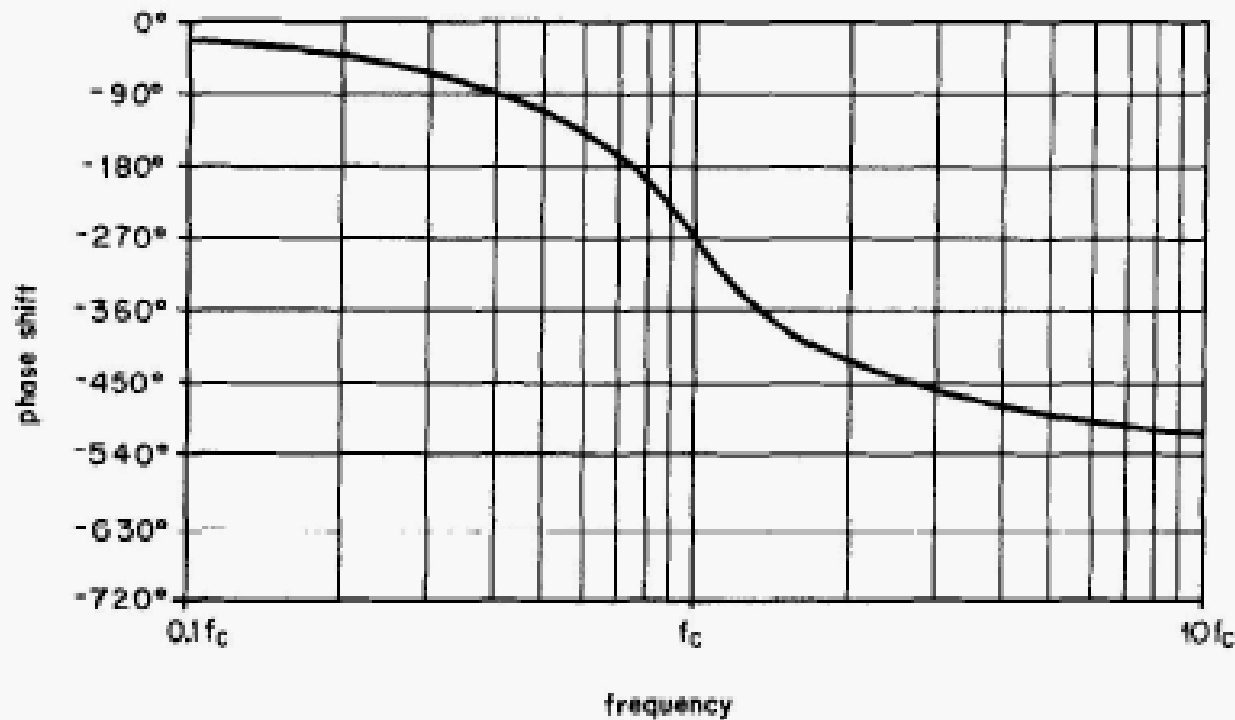
$$\omega_c - \omega_1.$$

La cantidad W_T / ω_c se define como Ancho de Transición Normalizado.

Filtros Característicos

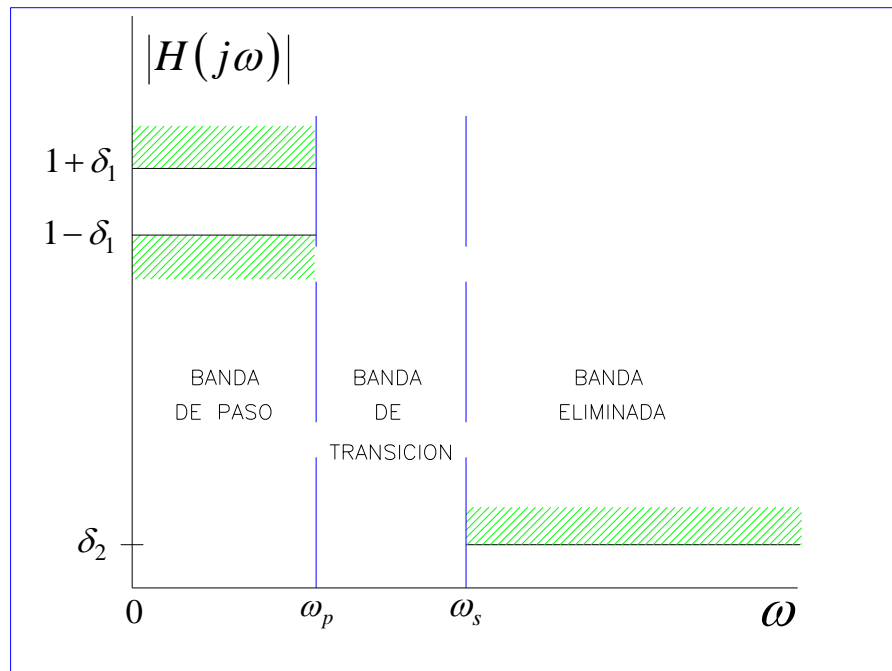
Respuesta en Frecuencia

La respuesta en fase es dibujada como el corrimiento de fase expresado en grados o radianes versus la frecuencia.



Filtros Característicos

Esquema de tolerancia y respuesta ideal de un filtro pasa bajo



Filtros de Butterworth

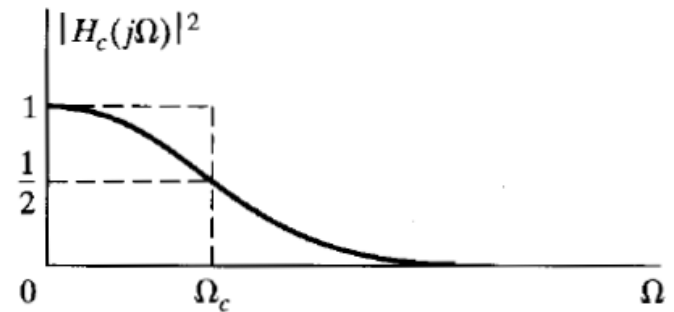
Los Filtros Pasa bajos de Butterworth (LPB) son diseñados para obtener una característica de respuesta en amplitud maximalmente plana en la Banda de Paso y monótonamente decreciente con el incremento de frecuencia.

Respuesta en frecuencia

El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos de Butterworth en tiempo continuo esta dada por:

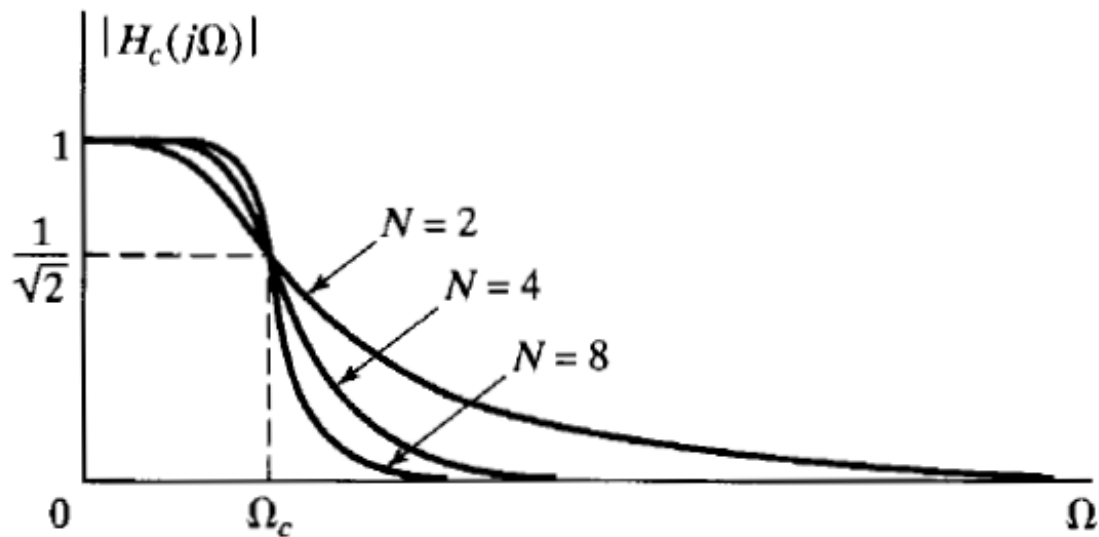
$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}}.$$

Esta función se muestra en la figura siguiente:



Filtros de Butterworth

A medida que aumenta el parámetro N , en la ecuación anterior, la características del filtro se va haciendo más abrupta. Es decir, permanece cercana a la unidad en una porción mayor de la banda de paso y desciende a cero más rápidamente en la banda eliminada, aunque la función del módulo al cuadrado en la frecuencia Ω_c siempre vale un medio, debido a la naturaleza de la ecuación anterior. La figura siguiente muestra la dependencia del módulo de un filtro de Butterworth con el parámetro N .



Filtros de Butterworth

Observando el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de la ecuación anterior podemos ver, sustituyendo $j\Omega = s$, que $H_c(s)H_c(-s)$ debe ser de la forma:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}.$$

Las raíces del polinomio del denominador (los polos del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia) están, por lo tanto localizados en los valores de s que satisfacen la ecuación:

$$1 + (s/j\Omega_c)^{2N} = 0$$

Es decir.

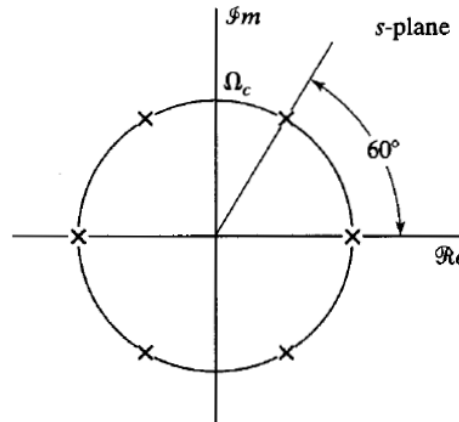
$$s_k = (-1)^{1/2N}(j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Por tanto, hay $2N$ polos equiespaciados en ángulo en una circunferencia de radio Ω_c en el plano s . Los polos están localizados simétricamente con respecto al eje imaginario. Un polo nunca podrá estar situado sobre el eje imaginario, y habrá uno en el eje real si N es impar, pero ninguno si N es par. La separación angular entre los polos de la circunferencia es de

$\frac{\pi}{N}$ radianes.

Filtros de Butterworth

Por ejemplo, para $N=3$, los polos están separados $\pi/3$ radianes o 60 grados, como se indica en la siguiente figura:



Para determinar la función de transferencia que se asocia con la función módulo al cuadrado de Butterworth debemos realizar la factorización $H_c(s)H_c(-s)$.

Los polos del módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia aparecen siempre en parejas. Es decir, si hay un polo en $s = s_k$, hay otro polo en $s = -s_k$. Por tanto, para construir $H_c(s)$ a partir de la función al módulo al cuadrado, debemos escoger un polo de cada una de las parejas. Para obtener un filtro causal y estable, debemos escoger los polos que estén en el semiplano izquierdo del plano s .

Filtros de Butterworth

Función Transferencia

La función transferencia para un Filtro Pasa bajos de Butterworth está dada por:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

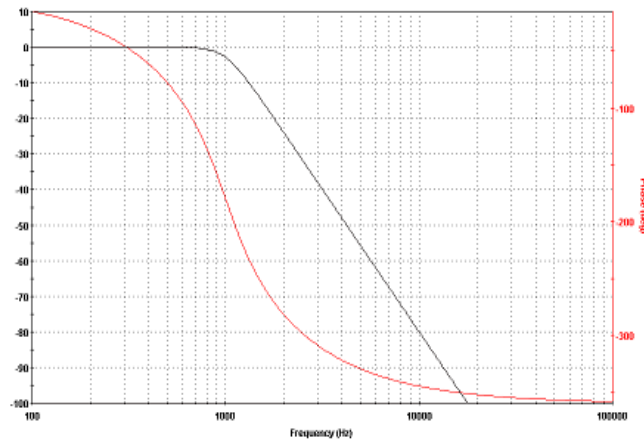
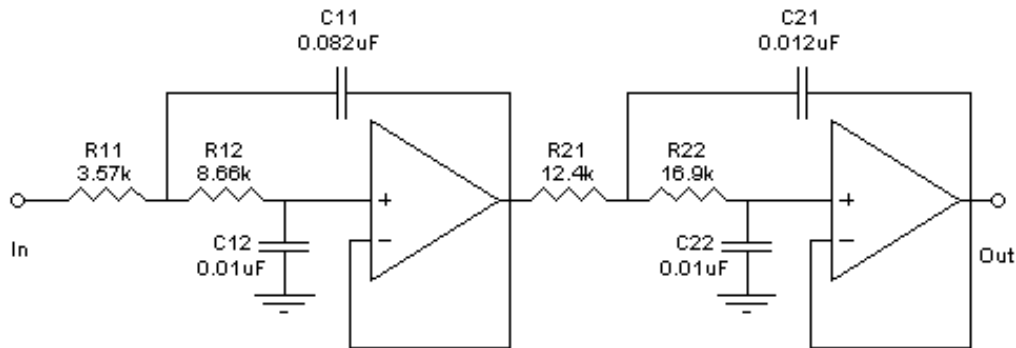
$$\text{where } s_i = e^{j\pi[(2i + n - 1)/2n]} = \cos\left(\pi \frac{2i + n - 1}{2n}\right) + j \sin\left(\pi \frac{2i + n - 1}{2n}\right)$$

Hay **n** polos en el plano **s** equiespaciados en ángulo en una circunferencia en el semiplano izquierdo y no tiene ceros finitos.

Filtros de Butterworth

Filtro de Butterworth

Ejemplo filtro analógico activo de orden 4



Filtros de Butterworth

Ejemplo:

Determinar la función transferencia para un Filtro Pasa bajos de Butterworth de tercer orden.

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$$

Donde

$$s_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0.5 + 0.866j$$

$$s_2 = e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi) = -1$$

$$s_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -0.5 - 0.866j$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s + 0.5 - 0.866j)(s + 1)(s + 0.5 + 0.866j)} \\ &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \end{aligned}$$

Filtros de Butterworth

Los polos de orden 2 a 8 están listados en la tabla siguiente

TABLE 3.1 Poles of Lowpass Butterworth Filters

n	Pole values
2	$-0.707107 \pm 0.707107j$
3	-1.0 $-0.5 \pm 0.866025j$
4	$-0.382683 \pm 0.923880j$ $-0.923880 \pm 0.382683j$
5	-1.0 $-0.809017 \pm 0.587785j$ $-0.309017 \pm 0.951057j$
6	$-0.258819 \pm 0.965926j$ $-0.707107 \pm 0.707107j$ $-0.965926 \pm 0.258819j$
7	-1.0 $-0.900969 \pm 0.433884j$ $-0.623490 \pm 0.781831j$ $-0.222521 \pm 0.974928j$
8	$-0.195090 \pm 0.980785j$ $-0.555570 \pm 0.831470j$ $-0.831470 \pm 0.555570j$ $-0.980785 \pm 0.195090j$

En la misma se puede apreciar que los polos de un filtro de Butterworth de orden par aparecen como pares complejos conjugados.

Filtros de Butterworth

Ubicación en el plano s

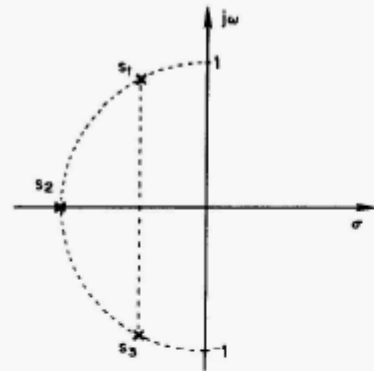


Figure 3.1 Pole locations for a third-order Butterworth LPF.

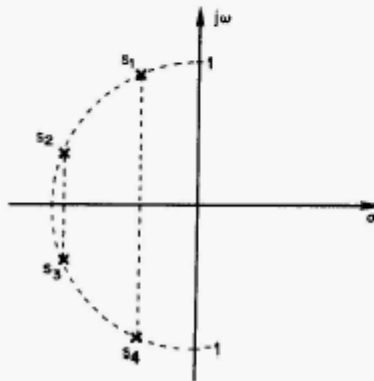


Figure 3.2 Pole locations for a fourth-order Butterworth LPF.

Filtros de Butterworth

Respuesta en Frecuencia

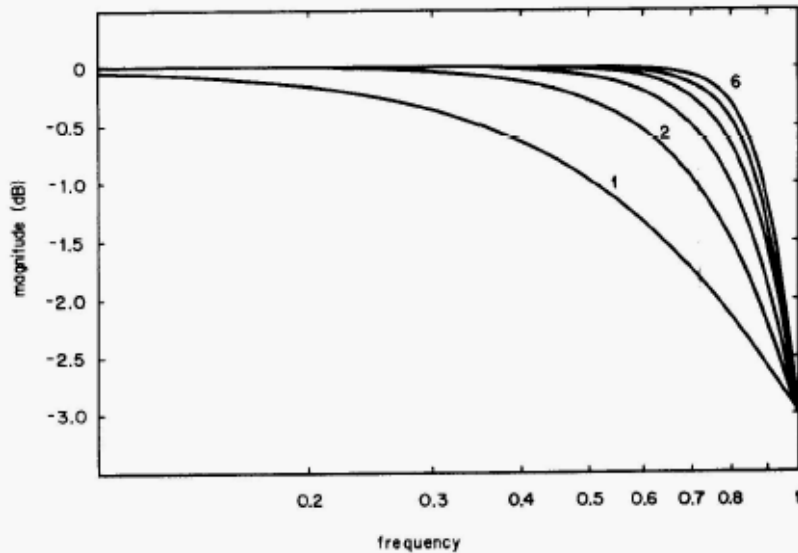


Figure 3.3 Pass-band amplitude response for lowpass Butterworth filters of orders 1 through 6.

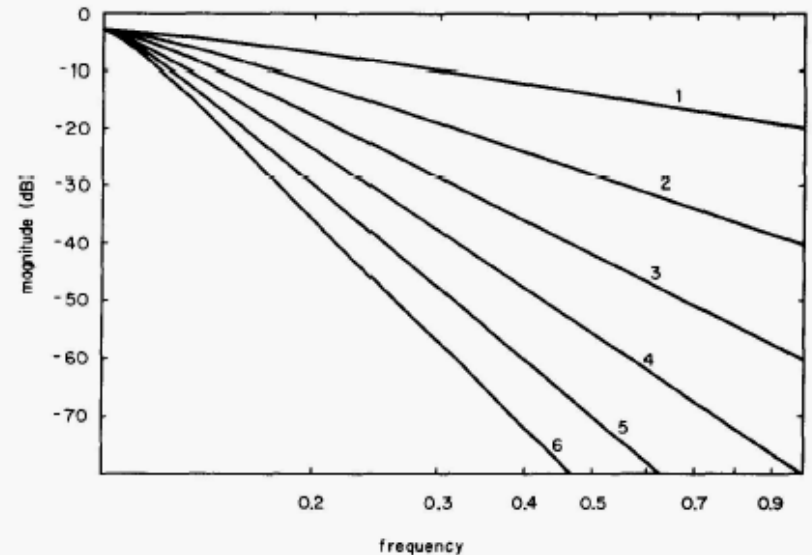
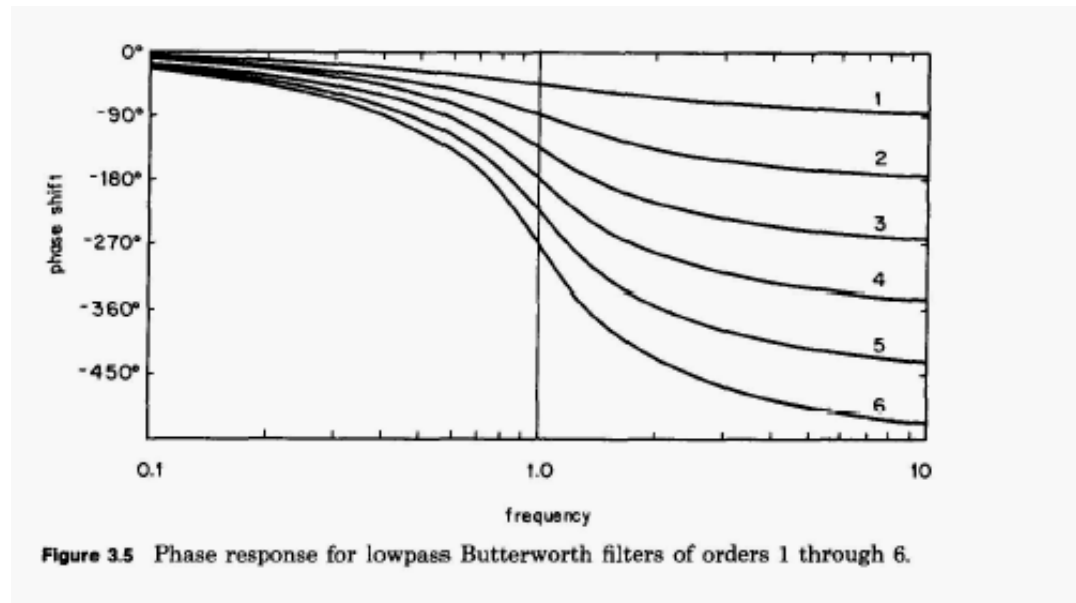


Figure 3.4 Stop-band amplitude response for lowpass Butterworth filters of orders 1 through 6.

Filtros de Butterworth



Filtros de Butterworth

Determinación del mínimo orden para un Filtro de Butterworth

Usualmente, en el mundo real, el orden n del filtro deseado no está dado como en el ejemplo anterior, sino que deberá ser escogido en base a las especificaciones de desempeño del mismo.

Para un filtro de Butterworth, el mínimo orden n que asegurará una magnitud A_1 o más baja para las frecuencias superiores a ω_1 puede ser obtenido usando la siguiente expresión:

$$n = \frac{\log(10^{-A_1/10} - 1)}{2 \log(\omega_1/\omega_c)} \quad (3.3)$$

where ω_c = 3-dB frequency

ω_1 = frequency at which the magnitude response first falls below A_1

(Note: The value of A_1 is assumed to be in decibels. The value will be negative, thus canceling the minus sign in the numerator exponent.)

Filtros de Butterworth

Respuesta al impulso

Para obtener la respuesta al impulso de un filtro de Butterworth de orden n necesitamos encontrar la transformada inversa de Laplace de la función transferencia. Aplicando el método de expansión en fracciones parciales obtenemos:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \sum_{r=1}^n K_r e^{s_r t}$$

$$\text{where } K_r = \frac{(s - s_r)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \Big|_{s=s_r}$$

Los valores de K_r y s_r son, en general, complejos, pero para estos filtros todos los valores complejo ocurren en pares complejos conjugados.

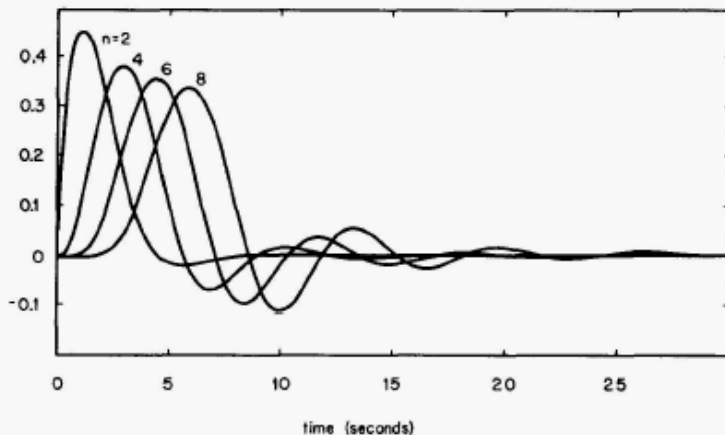


Figure 3.8 Impulse response of even-order Butterworth filters.

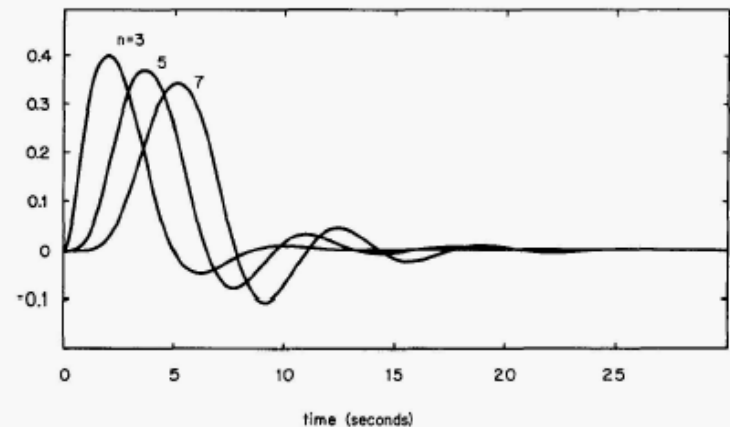


Figure 3.9 Impulse response of odd-order Butterworth filters.

Filtros de Butterworth

Respuesta al escalón

La respuesta al escalón puede obtenerse integrando la respuesta al impulso y se muestra en los siguientes gráficos,

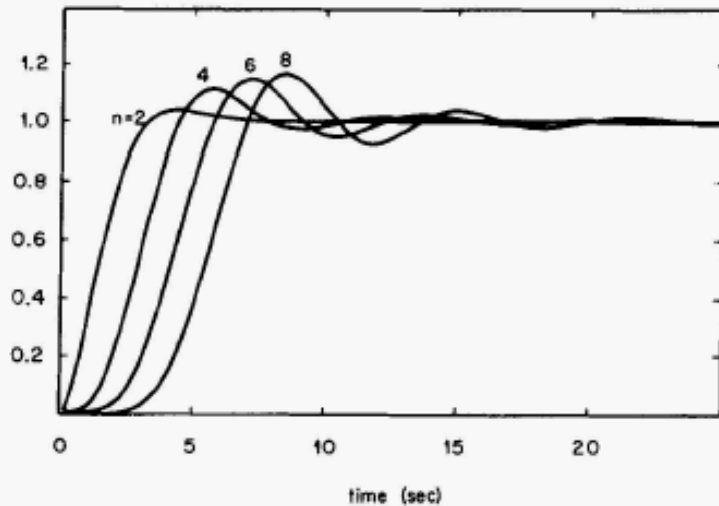


Figure 3.11 Step response of even-order lowpass Butterworth filters.

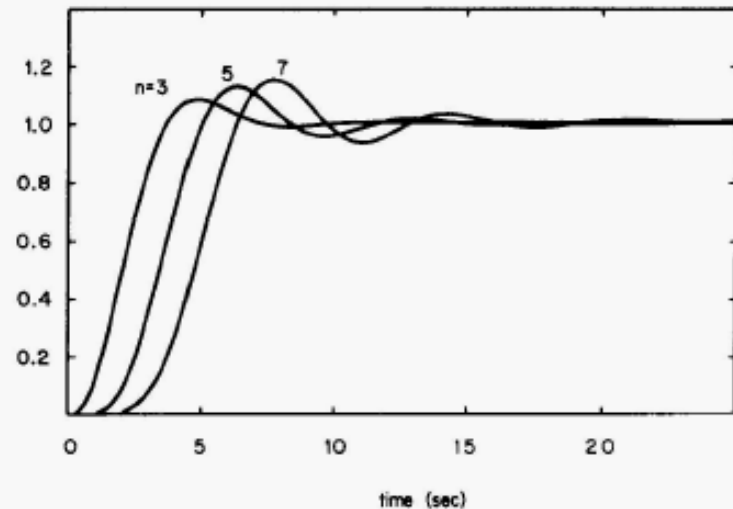


Figure 3.12 Step response of odd-order lowpass Butterworth filters.

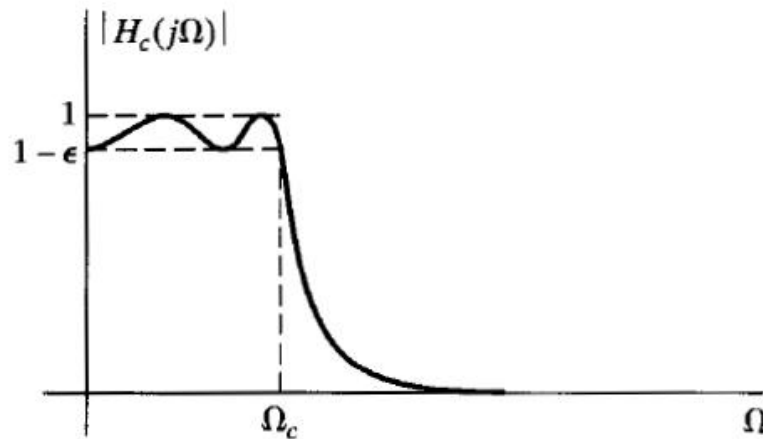
Filtros de Chebyshev

En los filtros de Butterworth, el módulo de la respuesta en frecuencia es monótono en la banda de paso y en la banda eliminada. Por tanto, si el filtro se especifica en términos de máximo error de aproximación en la banda de paso y en la banda eliminada, las especificaciones se cumplirán en exceso hacia la parte de bajas frecuencias en la banda de paso y por encima de la frecuencia de corte de la banda eliminada. Un planteamiento más eficiente, que produce generalmente filtros de orden inferior, es distribuir la exactitud de la aproximación uniformemente en la banda de paso, en la banda eliminada o en ambas.

Filtros de Chebyshev

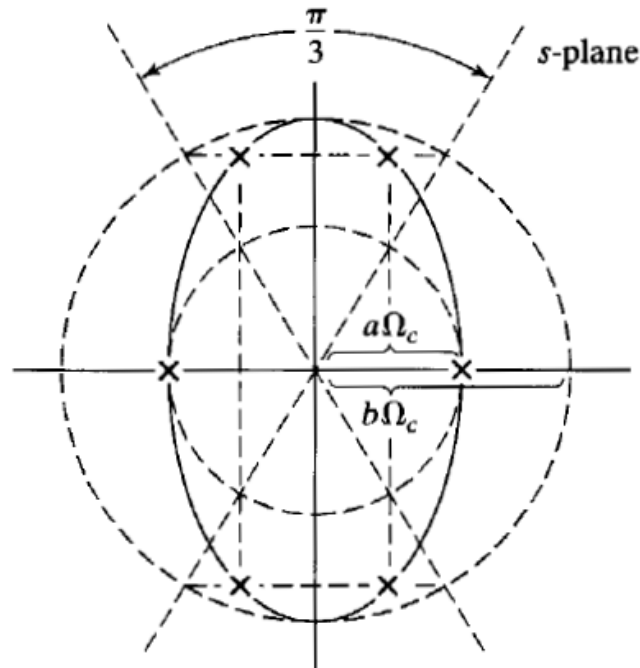
Esto se puede conseguir escogiendo una aproximación que tenga un comportamiento de rizado constante en vez de un comportamiento monótono.

La clase de filtros de Chebyshev tiene la propiedad de que el módulo de la respuesta en frecuencia o bien tiene rizado constante en la banda de paso y es monótona en la banda eliminada (que se denomina filtro de Chebyshev de Tipo I) o es monótona en la banda de paso y tiene rizado constante en la banda eliminada (que se denomina filtro de Chebyshev de Tipo II). La figura siguiente muestra la respuesta en frecuencia de un filtro de Chebyshev de Tipo I.



Filtros de Chebyshev

Los polos de un filtro de Chebyshev están en una elipse en el plano s . Como se muestra en la figura siguiente, la elipse queda definida por dos circunferencias cuyos diámetros coinciden con el eje mayor y el menor de la elipse.



Filtros de Chebyshev

Los Filtros de Chebyshev son diseñados para obtener una característica de respuesta en amplitud que tenga una transición relativamente abrupta de la Banda de Paso a la Banda Eliminada. Esta transición es obtenida a expensas de rizados (ripples) introducidos en la respuesta. Específicamente, estos filtros son obtenidos con una aproximación con ripple constante en la Banda de Paso de un filtro pasa bajos ideal o en la Banda Eliminada. El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia de este filtro tiene la forma

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

where $\epsilon^2 = 10^{r/10} - 1$

$T_n(\omega)$ = Chebyshev polynomial of order n

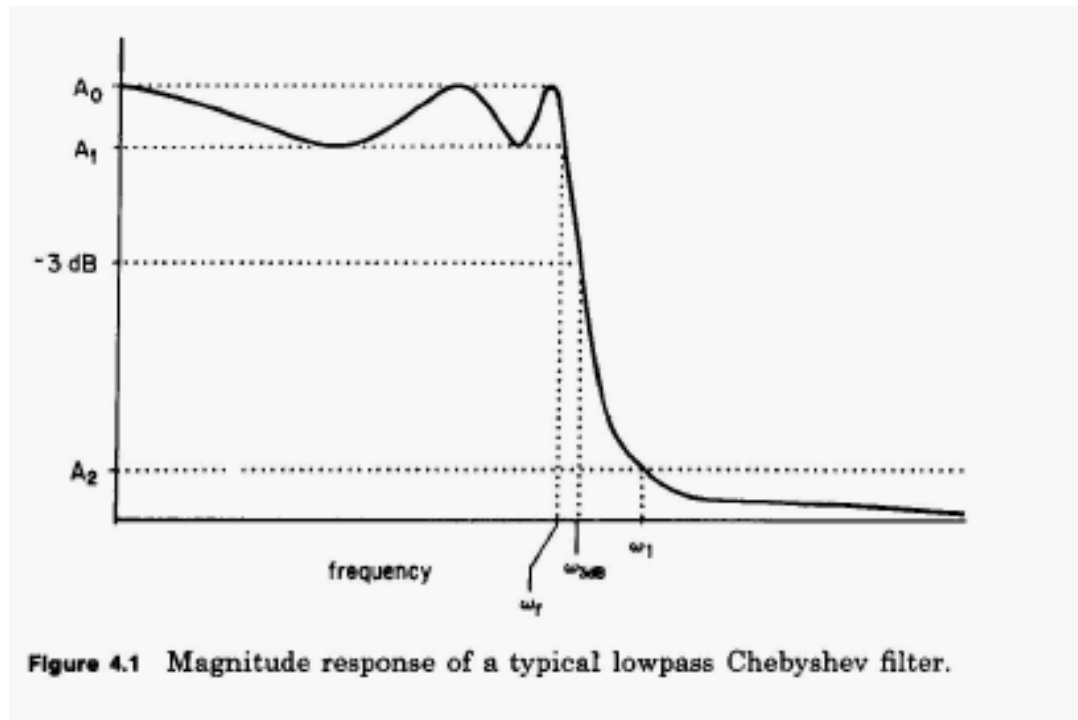
r = passband ripple, dB

Chebyshev polynomials are listed in Table 4.1.

Filtros de Chebyshev

Filtro de Chebyshev Tipo I

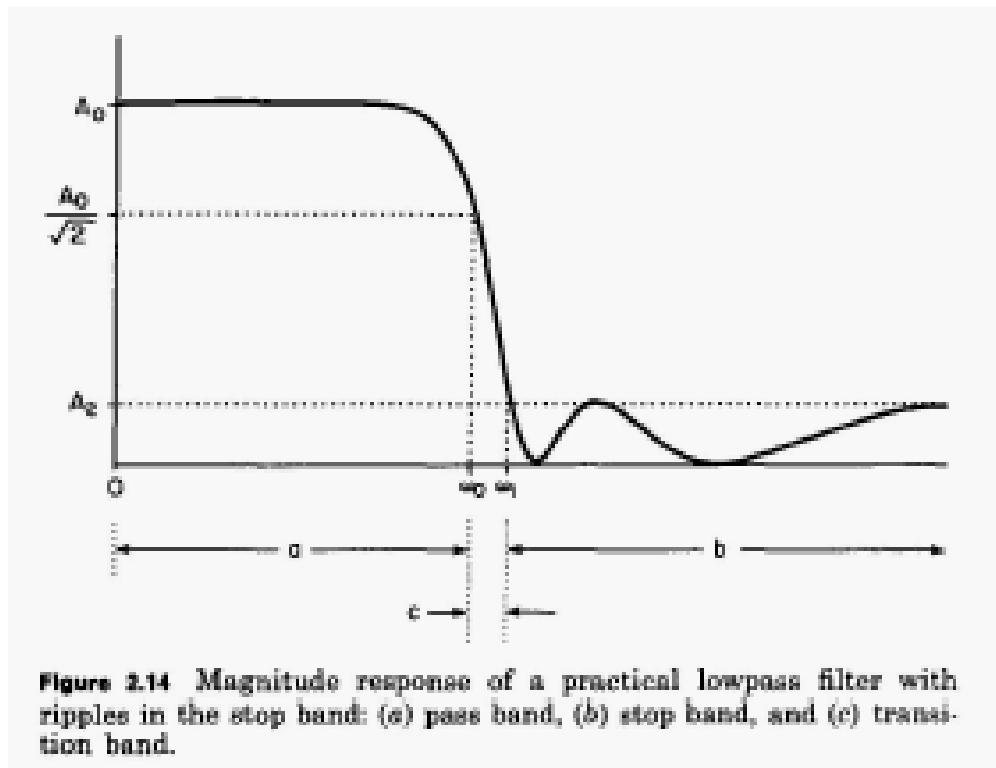
El módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia tiene un rizado constante en la Banda de Paso y es monótona en la Banda Eliminada.



Filtros de Chebyshev

Filtro de Chebyshev Tipo II

El módulo de la respuesta en frecuencia es monótona en la Banda de Paso y tiene un rizado constante en la Banda Eliminada.



Filtros de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev están listados en la tabla siguiente

TABLE 4.1 Chebyshev Polynomials

n	$T_n(\omega)$
0	1
1	ω
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$
6	$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$
7	$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$
8	$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$
9	$256\omega^9 - 576\omega^7 + 432\omega^5 - 120\omega^3 + 9\omega$
10	$512\omega^{10} - 1280\omega^8 + 1120\omega^6 - 400\omega^4 + 50\omega^2 + 1$

Filtros de Chebyshev

La expresión general para la función transferencia de un filtro pasa bajos de Chebyshev de orden n está dada por

$$H(s) = \frac{H_0}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \frac{H_0}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \quad (4.2)$$

$$\text{where } H_0 = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (-s_i) & n \text{ odd} \\ 10^{r/20} \prod_{i=1}^n (-s_i) & n \text{ even} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i \quad (4.4)$$

$$\sigma_i = \left[\frac{(1/\gamma) - \gamma}{2} \right] \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} \quad (4.5)$$

$$\omega_i = \left[\frac{(1/\gamma) + \gamma}{2} \right] \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \quad (4.6)$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{\epsilon} \right)^{1/n} \quad (4.7)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{r/10} - 1} \quad (4.8)$$

Filtros de Chebyshev

Las fórmulas para hallar los polos son algo más complicada que las vistas para los filtros de Butterworth, y diversos parámetros — ε , γ y r —, deben ser determinados antes que los polos puedan ser calculados.

Algoritmo para hallar los polos de un filtro de Chebyshev

Este algoritmo computa los polos para un filtro pasa bajos de Chebyshev de orden n normalizado para un ripple en un ancho de banda de 1Hz.

Step 1. Determine the maximum amount (in decibels) of ripple that can be permitted in the pass-band magnitude response. Set r equal to or less than this value.

Step 2. Use Eq. (4.8) to compute ϵ .

Step 3. Select an order n for the filter that will ensure adequate performance.

Step 4. Use Eq. (4.7) to compute γ .

Step 5. For $i = 1, 2, \dots, n$; use Eqs. (4.5) and (4.6) to compute the real part σ_i and imaginary part ω_i of each pole.

Step 6. Use Eq. (4.3) to compute H_0 .

Step 7. Substitute the values of H_0 and s_1 through s_n into Eq. (4.2).

Filtros de Chebyshev

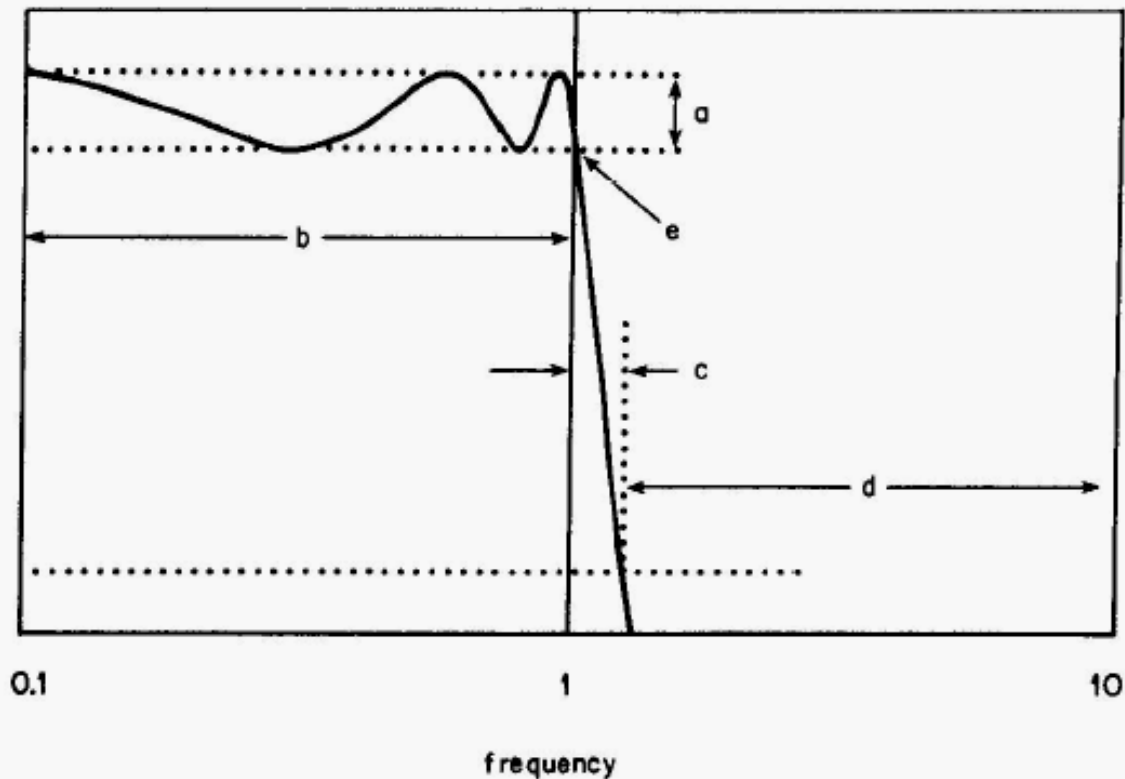


Figure 4.2 Chebyshev response normalized to have pass-band end at $\omega = 1$ rad/s. Features are: (a) ripple limits, (b) pass band, (c) transition band, (d) stop band, and (e) intersection of response and lower ripple limit at $\omega = 1$.

Filtros de Chebyshev

Ejemplo:

Usar el algoritmo anterior para determinar la función transferencia y los polos (normalizado para un ancho de banda de ripple de 1) para un filtro de Chebyshev de orden 3 con 0.5 dB de ripple en la Banda de Paso.

solution Algorithm 5.1 produces the following results:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 0.349311 & \gamma &= 1.806477 & s_1 &= -0.313228 + 1.021928j \\ s_2 &= -0.626457 & s_3 &= -0.313228 - 1.021928j & H_0 &= 0.715695\end{aligned}$$

La forma de la ecuación 4.2 muestra que para un filtro de Chebyshev de orden n siempre tendrá n polos y ningún cero finito.

Los polos se ubicarán sobre una elipse en el semiplano izquierdo del plano s .

El eje mayor de la elipse se ubicará sobre el eje $j\omega$ y el menor sobre el eje σ .

La dimensión de la elipse y la ubicación de los polos sobre ella dependerá del ripple permitido en la Banda de Paso.

Filtros de Chebyshev

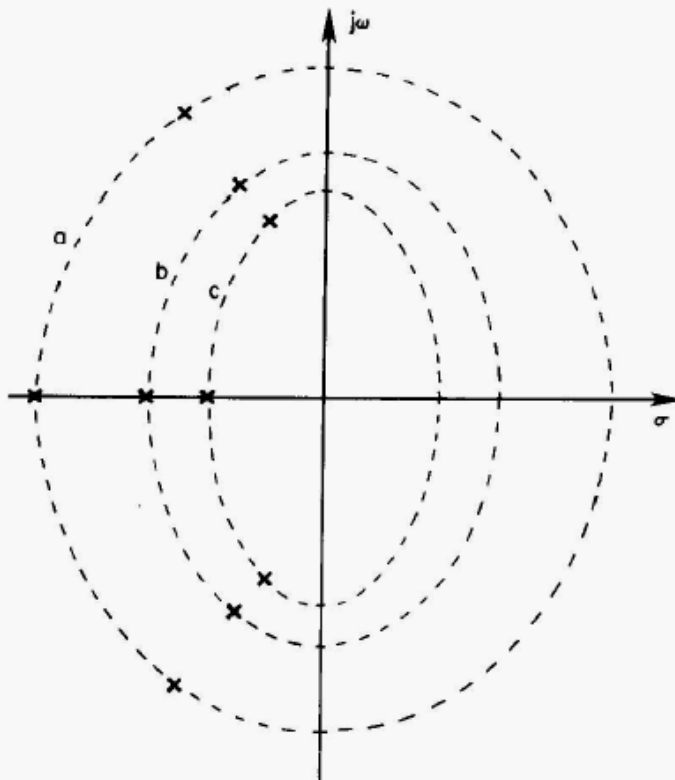


Figure 4.4 Comparison of pole locations for third-order low-pass Chebyshev filters with different amounts of pass-band ripple: (a) 0.01 dB, (b) 0.1 dB, and (c) 0.5 dB.

Filtros de Chebyshev

TABLE 4.2 Pole Values for Lowpass Chebyshev Filters with 0.1-dB Pass-Band Ripple

n	Pole values
2	$-1.186178 \pm 1.380948j$
3	-0.969406 $-0.484703 \pm 1.206155j$
4	$-0.637730 \pm 0.465000j$ $-0.264156 \pm 1.122610j$
5	-0.538914 $-0.435991 \pm 0.667707j$ $-0.166534 \pm 1.080372j$
6	$-0.428041 \pm 0.283093j$ $-0.313348 \pm 0.773426j$ $-0.114693 \pm 1.056519j$
7	-0.376778 $-0.339465 \pm 0.463659j$ $-0.234917 \pm 0.835485j$ $-0.083841 \pm 1.041833j$
8	$-0.321650 \pm 0.205314j$ $-0.272682 \pm 0.584684j$ $-0.182200 \pm 0.875041j$ $-0.063980 \pm 1.032181j$

TABLE 4.3 Pole Values for Lowpass Chebyshev Filters with 0.5-dB Pass-Band Ripple

n	Pole values
2	$-0.712812 \pm 1.00402j$
3	-0.626457 $-0.313228 \pm 1.021928j$
4	$-0.423340 \pm 0.420946j$ $-0.175353 \pm 1.016253j$
5	-0.362320 $-0.293123 \pm 0.625177j$ $-0.111963 \pm 1.011557j$
6	$-0.289794 \pm 0.270216j$ $-0.212144 \pm 0.738245j$ $-0.077650 \pm 1.008461j$
7	-0.256170 $-0.230801 \pm 0.447894j$ $-0.159719 \pm 0.807077j$ $-0.057003 \pm 1.006409j$
8	$-0.219293 \pm 0.199907j$ $-0.185908 \pm 0.569288j$ $-0.124219 \pm 0.852000j$ $-0.043620 \pm 1.005002j$

TABLE 4.4 Pole Values for Lowpass Chebyshev Filters with 1.0-dB Pass-Band Ripple

n	Pole values
2	$-0.548867 \pm 0.895129j$
3	-0.494171 $-0.247085 \pm 0.965999j$
4	$-0.336870 \pm 0.407329j$ $-0.139536 \pm 0.983379j$
5	-0.289493 $-0.234205 \pm 0.611920j$ $-0.089458 \pm 0.990107j$
6	$-0.232063 \pm 0.266184j$ $-0.169882 \pm 0.727227j$ $-0.062181 \pm 0.993411j$
7	-0.205414 $-0.185072 \pm 0.442943j$ $-0.128074 \pm 0.798156j$ $-0.045709 \pm 0.995284j$
8	$-0.175998 \pm 0.198206j$ $-0.149204 \pm 0.564444j$ $-0.099695 \pm 0.844751j$ $-0.035008 \pm 0.996451j$

Filtros de Chebyshev

Respuesta en Frecuencia

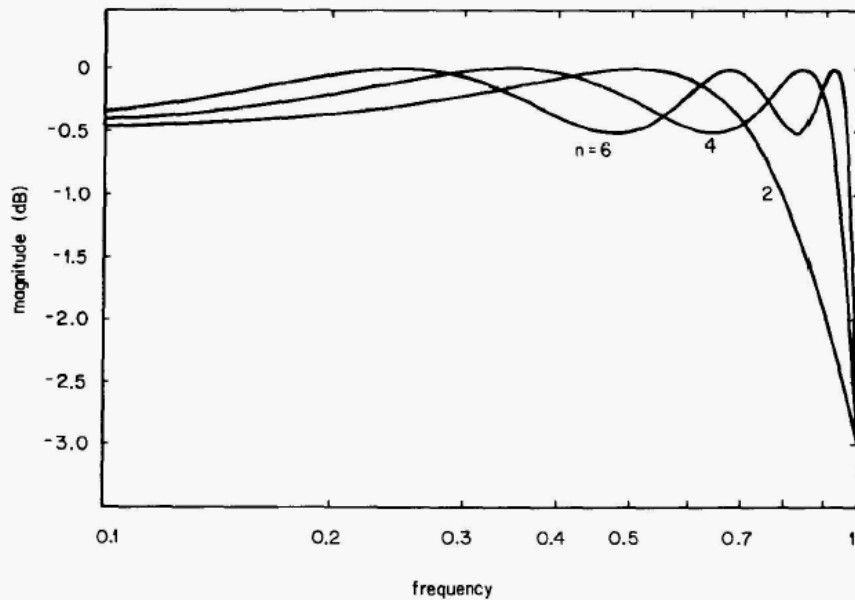


Figure 4.5 Pass-band magnitude response of even-order lowpass Chebyshev filters with 0.5-dB ripple.

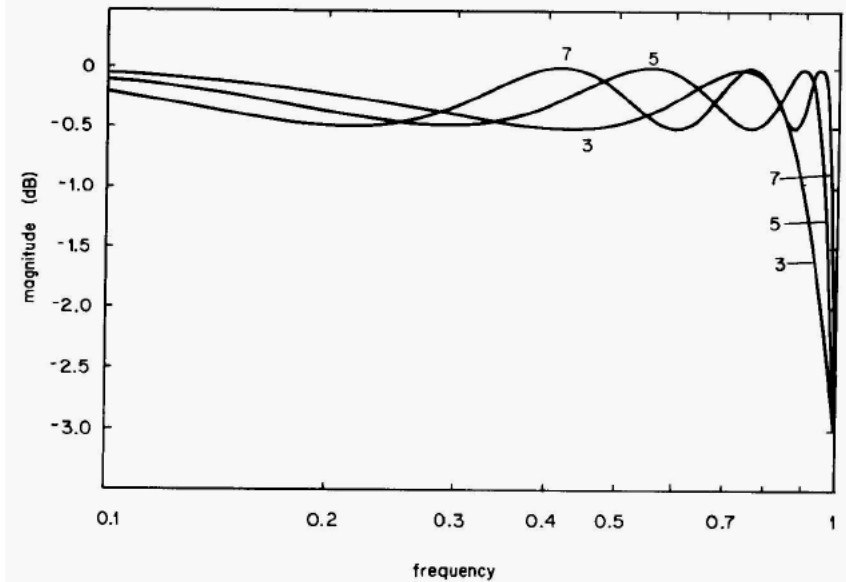


Figure 4.6 Pass-band magnitude response of odd-order lowpass Chebyshev filters with 0.5-dB ripple.

Filtros de Chebyshev

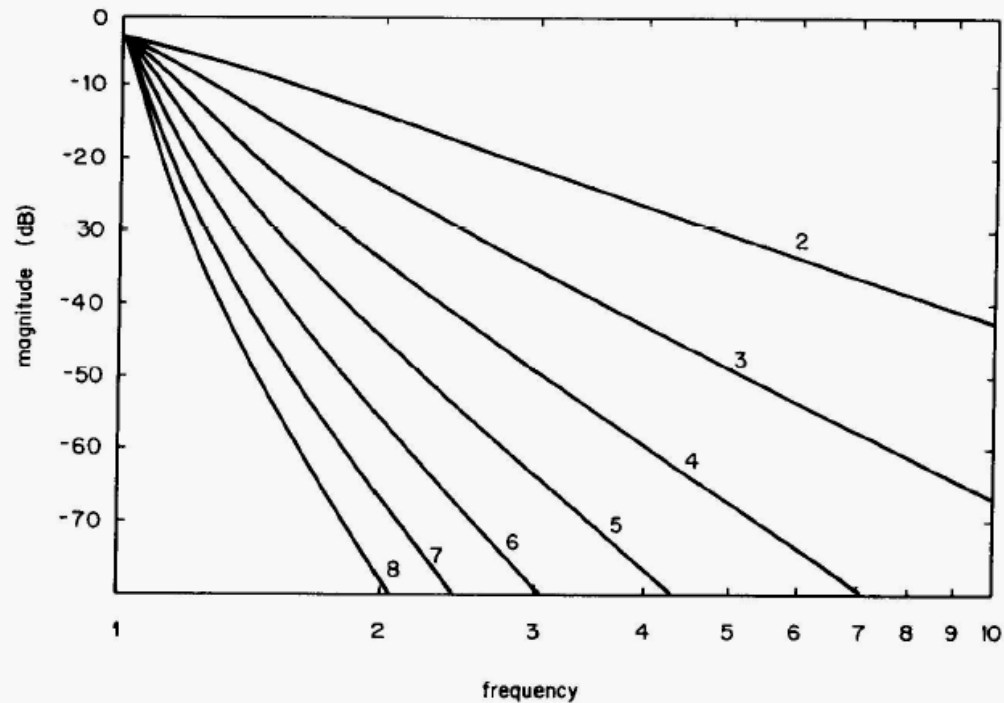


Figure 4.7 Stop-band magnitude response of lowpass Chebyshev filters with 0.5-dB ripple.

Filtros de Chebyshev

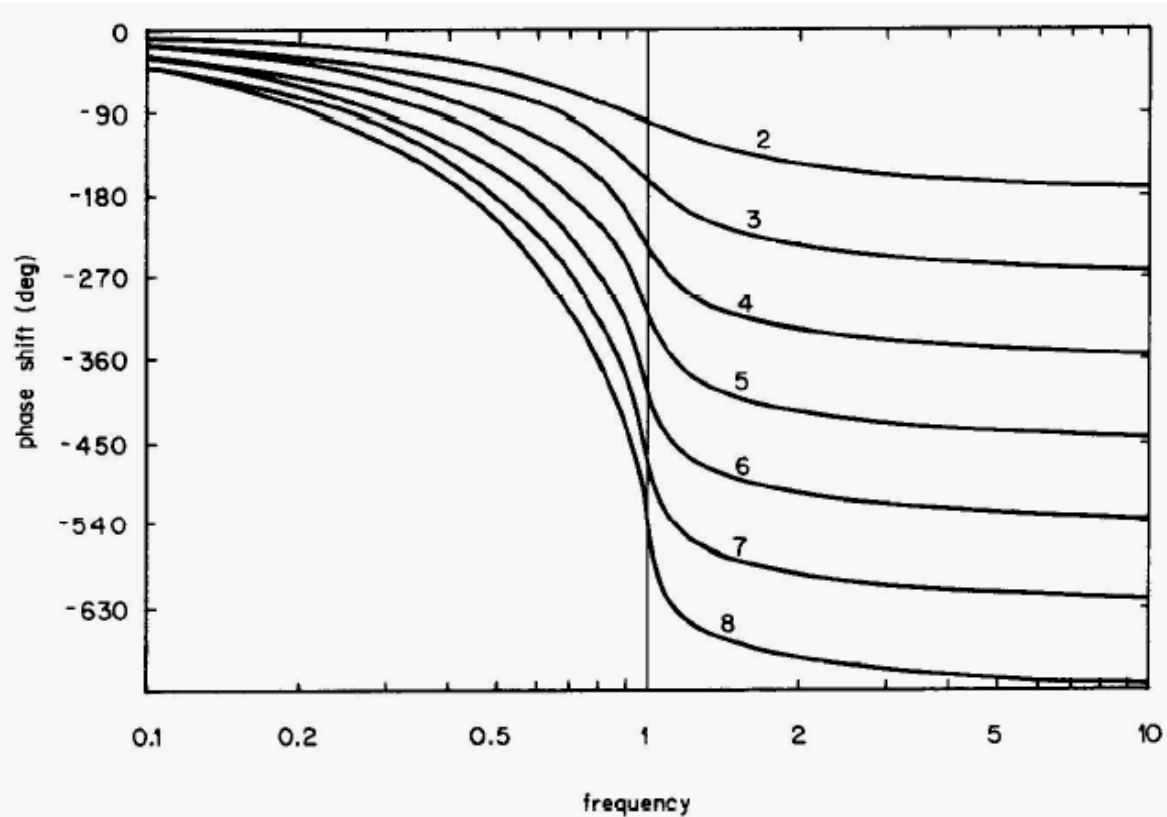


Figure 4.8 Phase response of lowpass Chebyshev filters with 0.5-dB pass-band ripple.

Filtros de Chebyshev

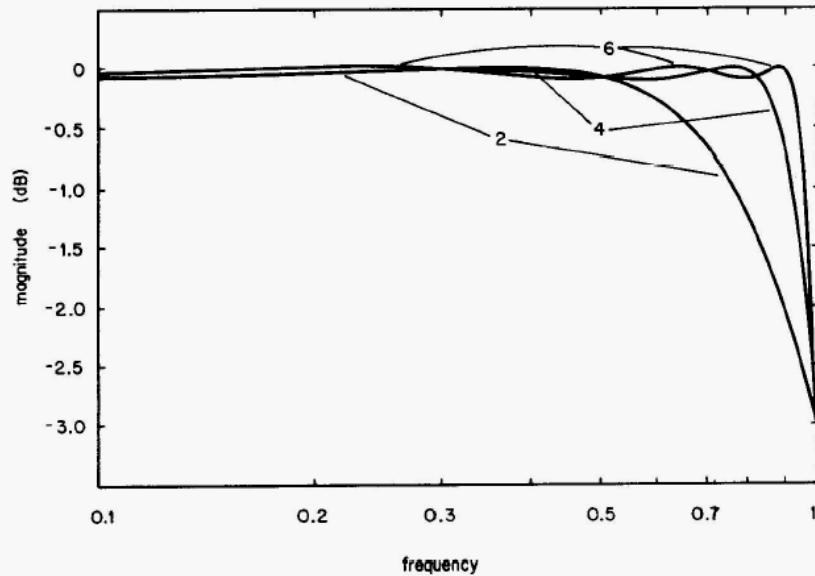


Figure 4.9 Pass-band magnitude response of even-order lowpass Chebyshev filters with 0.1-dB ripple.

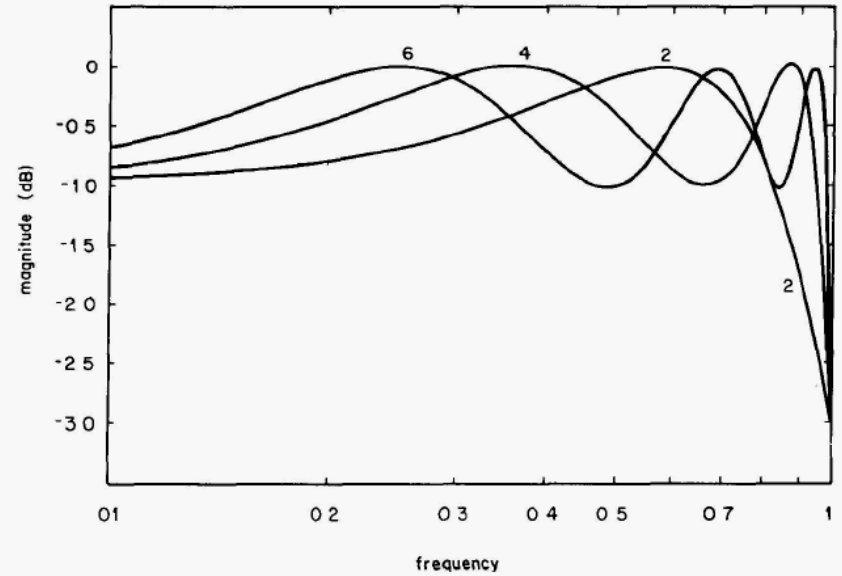


Figure 4.10 Pass-band magnitude response of even-order lowpass Chebyshev filters with 1.0-dB ripple.

Filtros de Chebyshev

Respuesta al impulso y al escalón

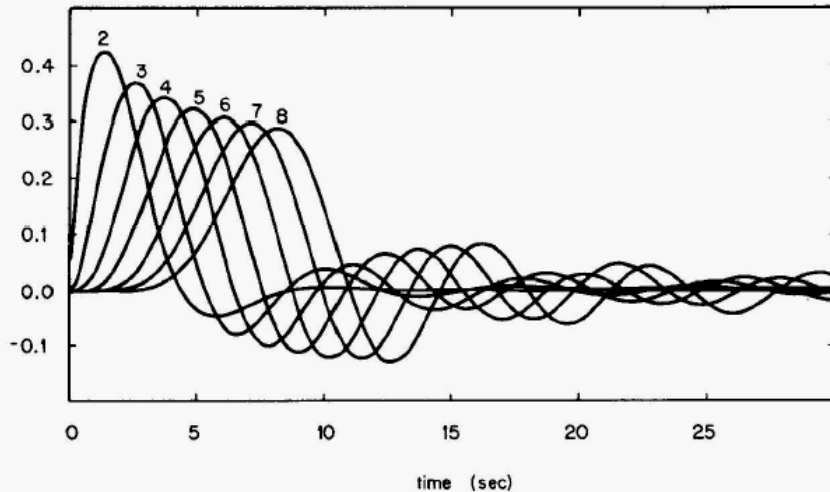


Figure 4.11 Impulse response of lowpass Chebyshev filters with 0.5-dB pass-band ripple.

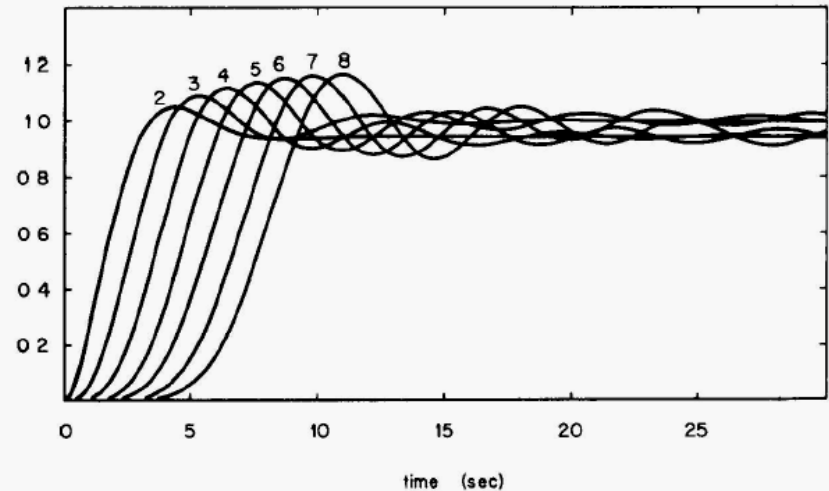


Figure 4.12 Step response of lowpass Chebyshev filters with 0.5-dB pass-band ripple.

Filtros Elípticos

Por permitir ripple en la Banda de Paso o en la Banda Eliminada , los filtros de Chebyshev obtienen una mejor selectividad que los filtro de Butterworth. Los filtros Elípticos mejoran el desempeño de los de Chebyshev porque permiten el ripple tanto en la Banda de Paso como en la Banda Eliminada.

La respuesta de un filtro Elíptico satisface

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega, L)}$$

Donde $R_n(\omega, L)$ es una función racional de Chebyshev de orden n con ripple con parámetro L .

Los filtros elípticos son a veces llamados filtros de Cauer.

Filtros Elípticos

Especificación de parámetros

Los filtros pasa bajos de **Butterworth** requieren la especificación de 2 parámetros:

Frecuencia de corte ω_c

Orden del filtro n

Los filtros de **Chebyshev** requiere las especificaciones anteriores más una tercera:

Ripple en la Banda de Paso (Chebyshev Tipo I) ó Ripple en la Banda Eliminada (Tipo II)

Los filtros **Elípticos** requieren las siguientes especificaciones:

Orde del filtro n

Máxima perdida en la Banda de Paso A_p

Máxima perdida en la Banda Eliminada A_s

Frecuencia de corte en la Banda de Paso ω_p

Frecuencia de corte en la Banda Eliminada ω_s

Filtros Elípticos

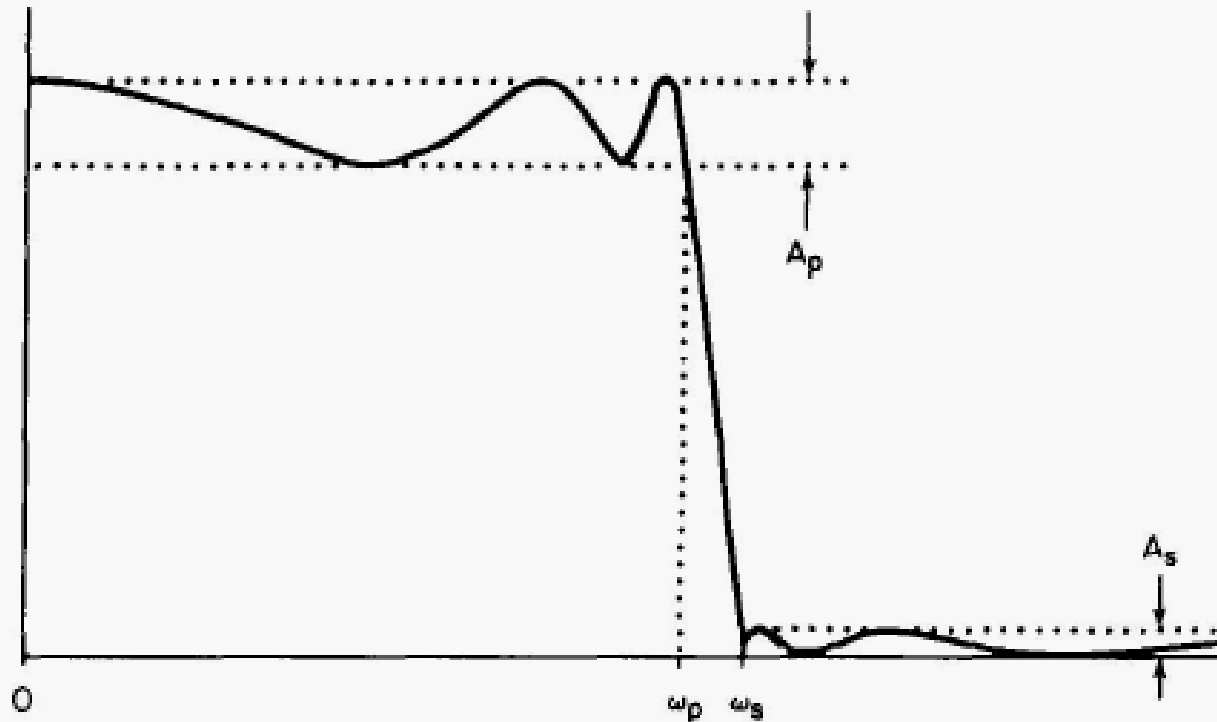
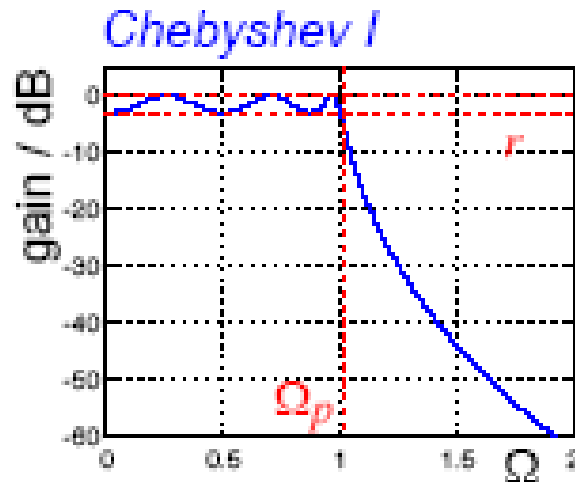
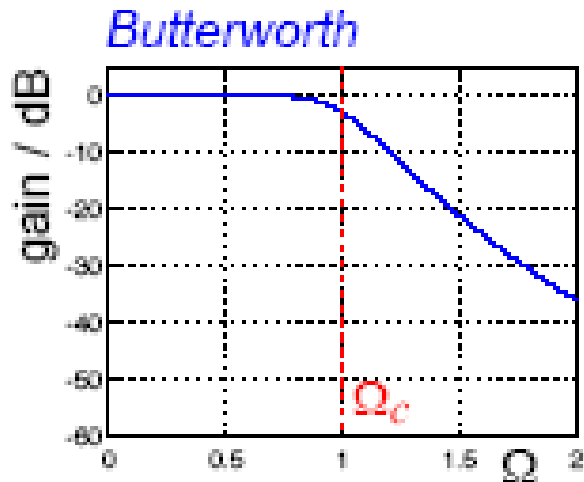


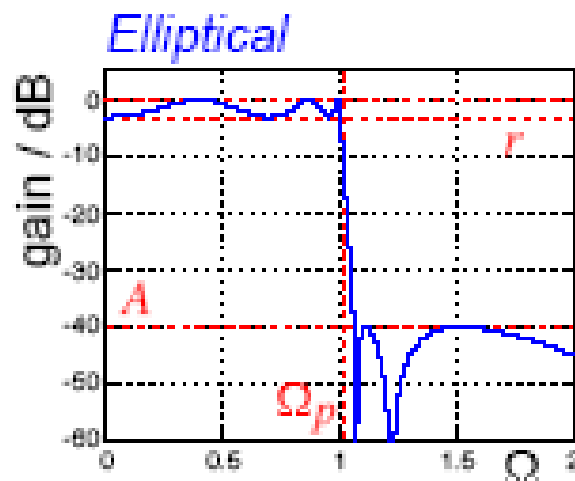
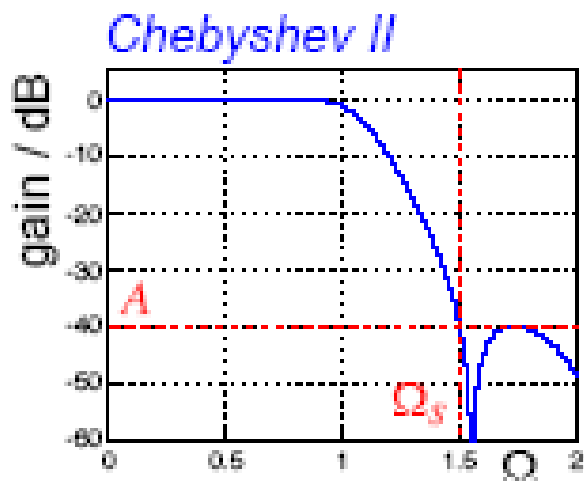
Figure 5.1 Frequency response showing parameters used to specify an elliptical filter.

Resumen de los tipos de Filtros Analógicos



$$N = 6$$

$$r = 3 \text{ dB}$$



$$A = 40 \text{ dB}$$

Diseño de Filtros Analógicos

	BANDA DE PASO	BANDA DE TRANSICION	BANDA ELIMINADA	RESPUESTA AL ESCALON
BUTTERWORTH	Maximiza la respuesta plana	No buena con respecto a Chebyshev	Sin rizado	Algo de sobrepico y oscilaciones, pero menos que los Chebyshev
CHEBYSHEV TIPO I	Rizado	Más abrupta que el Butterworth, pero no tanto como el Chebyshev TII	Sin rizado	Buen grado de sobrepico y oscilaciones, pero menos que el Chebyshev TII
CHEBYSHEV TIPO II	Respuesta Plana	Más abrupta que el Chebyshev TI	Rizado	Más sobrepico que los Butterworth y los Chebyshev TI
ELIPTICO	Rizado		Rizado	