UNTREF UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRES DE FEBRERO

SEÑALES Y SISTEMAS
AÑO 2019

Profesora Titular: Magister Ingeniera Miryam Sassano
Profesor Adjunto: Ingeniero Antonio Greco
Profesor Adjunto: Ingeniero Maximiliano Yommi

Índice general

Guía 0: NÚMEROS COMPLEJOS

NÚMEROS COMPLEJOS

1. Efectuar las siguientes operaciones escribiendo los números complejos que intervienen en forma trigonométrica y exponencial, escribir el resultado en forma binómica:

   a) $i(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)$

   b) $\frac{5i}{1+i}$

   c) $(1-\sqrt{2}i)^3$

2. Considerar un número complejo z definido por $z = z_1 z_2$, siendo $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$.

   a) Demostrar que el módulo de z es el producto de los módulos de z_1 y z_2.

   b) Demostrar que el ángulo comprendido entre z y el eje x es la suma de los ángulos que forman z_1 y z_2 con el eje x.

3. Hallar el módulo y la fase de los números complejos: $2 + i\sqrt{3}$ y $(2 - i\sqrt{3})^2$.

4. Calcular en forma binómica $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$. Expresar el resultado en forma exponencial compleja.

5. Demostrar:

   a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

   b) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$.

   c) $z\overline{z} = |z|^2$.

   d) $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

   e) $z - \overline{z} = 2iIm(z)$.

   f) $0 \leqslant |Re(z)| \leqslant |z|$.

   g) $0 \leqslant |Im(z)| \leqslant |z|$.

   h) $||(z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

   i) $|z| = |\overline{z}|$.

   j) Si $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

6. Calcular la magnitud y la fase de: $z = e^i + e^{3i}$.

7. Emplear la fórmula de *Euler* para obtener las expresión del $cos(\theta)$ y $sen(\theta)$. ($e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$).

8. Emplear los resultados del ítem anterior para calcular:$\int_0^\infty e^{-2t} cos(\pi t) dt$.

9. Graficar las siguientes regiones del plano:

   a) $|z-1| = 2$.

   b) $|z-1| \leqslant 2$.

   c) $Re(z+4) < 2$.

   d) $Im(z) \leqslant 1$ y $Re(z) > 2$.

   e) $|z-2| \leqslant |z+2i|$.

   f) $|z-2| = |z+2i|$.

Guía 1: SEÑALES

SEÑALES

1. Determinar la energía y la potencia de las siguientes señales:

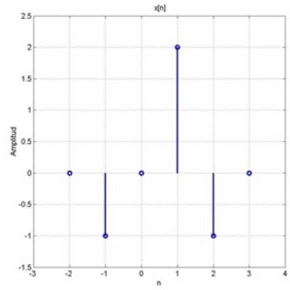
   a) $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$

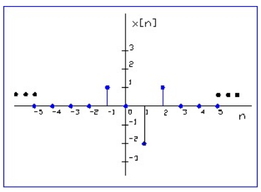
   b) $x(t) = 2cos(\omega_0 + \pi)$

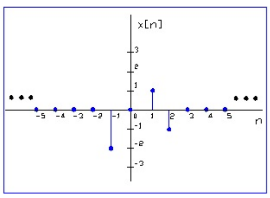
   c) $x[n] = 2u[n]$

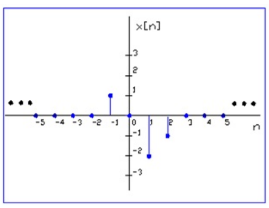
   d) Triangular de altura 2 y ancho 2.

2. Expresar las siguientes señales en términos de superposiciones desplazadas y escaladas de impulsos unitarios y escalones unitarios.

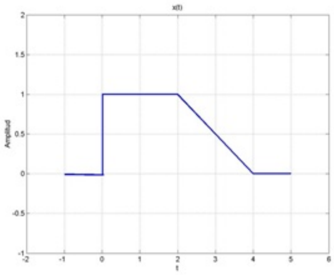
   a) 

   b) 

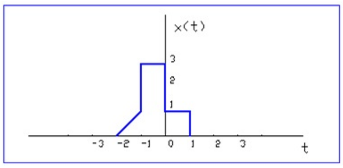
   c) 

   d) 

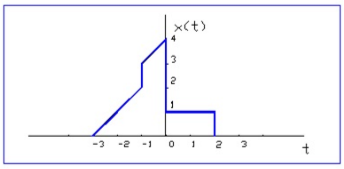
3. Para las curvas dadas realizar las transformaciones indicadas de $x(t)$ para cada caso. Expresar el resultado analítica y graficamente.



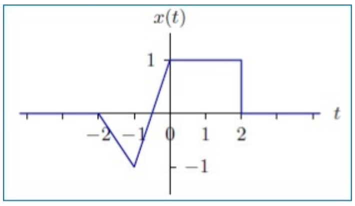
   a) $y(t) = x(-2t+1)$



   b) $y(t) = \frac{1}{2}x(-t+\frac{1}{2})$



   c) $y(t) = \frac{-1}{2}x(t+2)$



   d) $y(t) = \frac{1}{2}x(-2t+\frac{1}{2})$

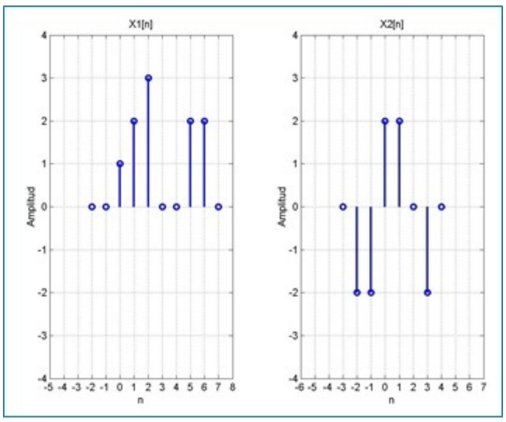
4. Empleando las señales discretas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ representadas en la figura. Obtener y graficar:

   a) $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$.

   b) $y[n] = 2x_1[n]$.

   c) $y[n] = -3x_2[n]$.

   d) $y[n] = x_1[n]x_2[n]$.

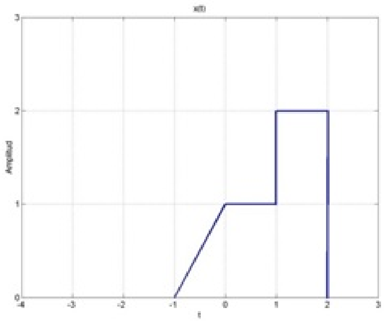


5. Para la siguiente señal continua grafique las siguientes señales:

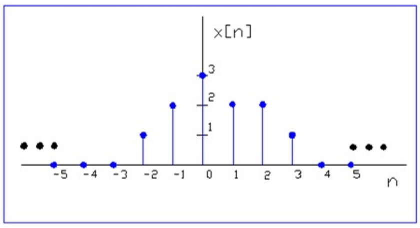
a) $y(t) = x(t)u(1-t)$.

b) $y(y) = x(t)u(t)u(t-1)$.

c) $y(t) = x(t)\delta(t - \frac{3}{2})$.



6. Sea la señal discreta $x[n]$ del siguiente gráfico:



Graficar cada una de las siguientes señales:

a) $y[n] = x[n]u[n-2]$.

b) $y[n] = x[n]\delta[n-3]$.

c) $y[n] = \frac{1}{2}x[n] + (-1)^n x[n]$.

7. Determinar si las siguientes señales son periódicas. Si lo son, encuentrar el período fundamental:

a) $x(t) = cos(\frac{3\pi}{2}t)$.

b) $x[n] = cos[\frac{3\pi}{2}n]$.

c) $x(t) = cos(\frac{3\pi}{2}t) + sen(\frac{3\pi}{2}t)$.

d) $x(t) = cos(\frac{3\pi}{2}t) + 3sen(t)$.

e) $x[n] = cos[3n]$.

f) $x[n] = e^{\frac{4\pi n}{3}} + e^{\frac{3\pi n}{4}}$.

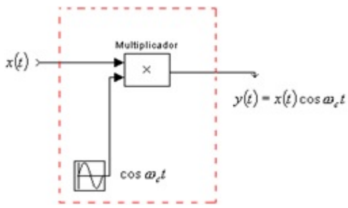
g) $x(t) = 2cos(\frac{\pi}{4}t) + sen(\frac{3\pi}{4}t)$.

Guía 2: SISTEMAS

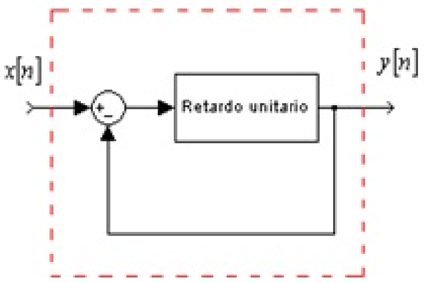
SISTEMAS

1. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justificar la respuesta.
   a) El sistema resultante de la interconexión en serie de dos sistemas lineales es también lineal.
   b) El sistema resultante de la interconexión en serie de dos sistemas estables es también estable.
   c) El sistema resultante de la interconexión en serie de dos sistemas invariantes en el tiempo es también invariante en el tiempo.
   d) El sistema resultante de la interconexión en serie de dos sistemas variantes en el tiempo (no invariantes en el tiempo) no es invariante en el tiempo.

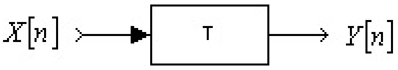
2. Considerar el sistema dado en la figura. Determinar si se trata de un sistema:
   a) Sin memoria.
   b) Causal.
   c) Lineal.
   d) Invariante en el tiempo.
   e) Estable.

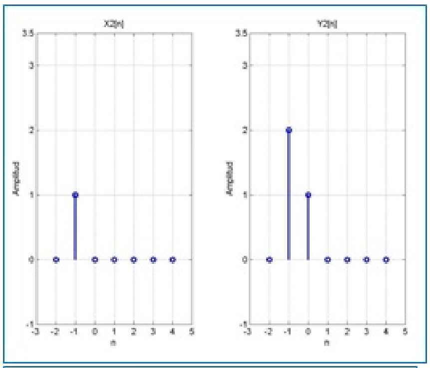


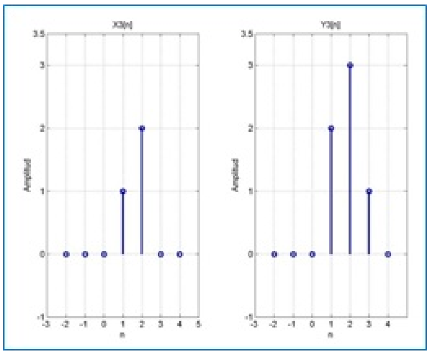
3. Encuentrar la relación entre la entrada y salida del sistema retroalimentado de la siguiente figura.

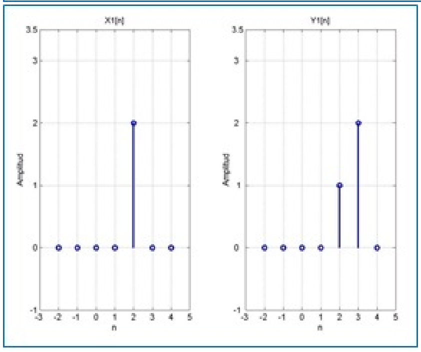


4. Se sabe que el sistema representado por la transformación T es *invariante en el tiempo*. Cuando las entradas al sistema son $x_1[n]$ y $x_2[n]$, las salidas del mismo son $y_1[n]$ e $y_2[n]$, respectivamente. Determinar si el sistema dado es lineal.









5. Determinar si el sistema definido por la transformación T es lineal.
$y[n] = T\{x[n]\} = \frac{1}{3}\{x[n+1] + x[n] + x[n-1]\}$.

6. Un sistema presenta una relación entre la entrada y la salida dada por la expresión: $y(t) = T\{x(t)\} = (t-2)x(t)$. Determinar si el sistema es:

   a) Sin memoria.

   b) Causal.

   c) Lineal.

   d) Invariante en el tiempo.

   e) Estable.

7. Un sistema presenta una relación entre la entrada y la salida dada por la expresión: $y[n] = T\{x[n]\} = nx[n]$. Determinar si el sistema es:

   a) Sin memoria.

   b) Causal.

   c) Lineal.

   d) Invariante en el tiempo.

   e) Estable.

8. Un sistema presenta una relación entre la entrada y la salida dada por la expresión: $y(t) = T\{x(t)\} = tx(t)$. Determinar si el sistema es:

    a) Sin memoria.

    b) Causal.

    c) Lineal.

    d) Invariante en el tiempo.

    e) Estable.

Guía 3: SISTEMAS LTI

SISTEMAS LTI. CONVOLUCIÓN

1. Verificar las siguientes igualdades:

   a) $x[n] * \delta[n] = x[n]$.

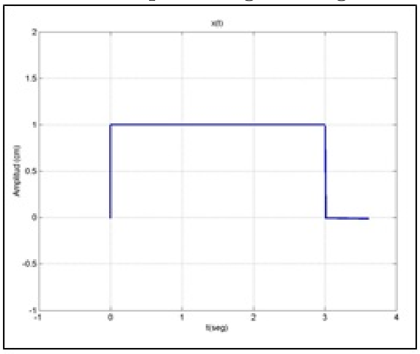
   b) $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$.

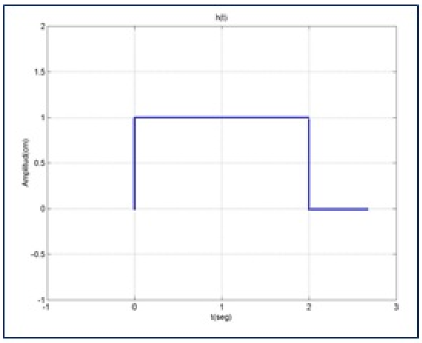
   c) $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

2. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por: $x(t) = u(t)$ y $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha > 0$. Hallar $y(t) = x(t) * h(t)$. Puede usar la propiedad conmutativa si facilita las cuentas.

3. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por: $x(t) = e^{\alpha t}u(-t)$ y $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha > 0$. Hallar $y(t) = x(t) * h(t)$. Puede usar la propiedad conmutativa si facilita las cuentas.

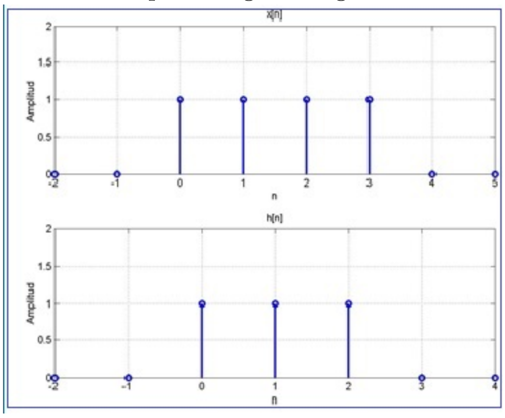
4. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y(t) = x(t) * h(t)$.



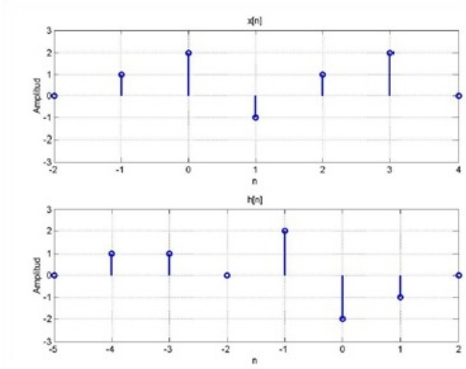


5. La entrada $x[n]$ y $h[n]$ la respuesta al impulso de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por: $x[n] = u[n]$ y $h[n] = \alpha^n u[n]$ con $0 < \alpha < 1$. Hallar $y[n] = x[n] * h[n]$.

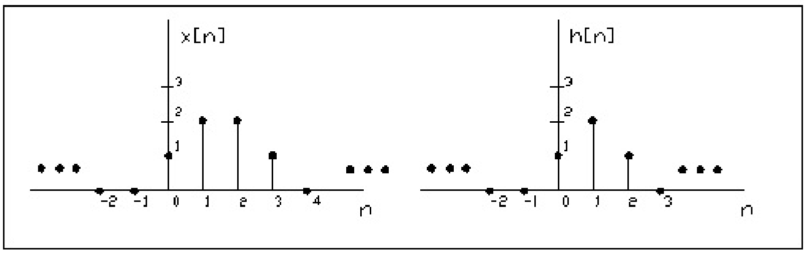
6. La entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y[n] = x[n] * h[n]$.



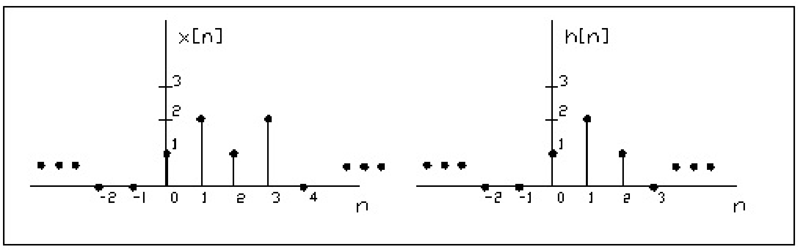
7. La entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y[n] = x[n] * h[n]$.



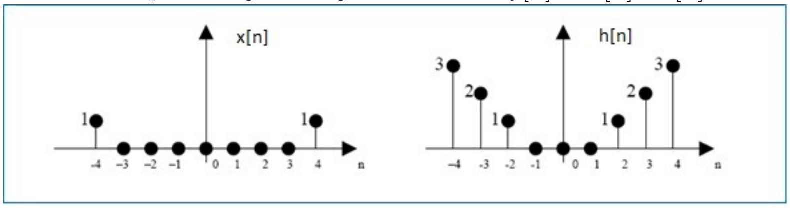
8. La entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y[n] = x[n] * h[n]$.



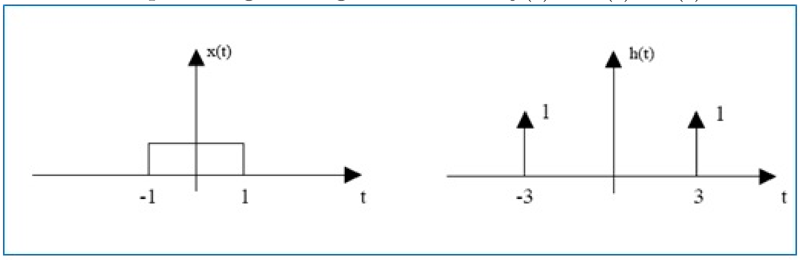
9. La entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y[n] = x[n] * h[n]$.



10. La entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y[n] = x[n] * h[n]$.



11. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por el siguiente gráfico. Hallar $y(t) = x(t) * h(t)$.



12. La entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo (LTI), están dadas por:

$$x(t) = \begin{cases} 2 & si \quad -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & caso \quad contrario \end{cases}$$

Guía 4: SERIES DE FOURIER

SERIES DE FOURIER

1. Dada la función $f(t) = e^{-4t}$ si $-2 \leq t \leq 2$. Se pide

   a) Graficar $f(t)$.

   b) Hallar la Transformada de Fourier de $f(t)$.

2. Demostrar que el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t) = t^4$ con $t \in (-1, 1)$ es:
   $\mathcal{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} 8\frac{n^2\pi^2-6}{\pi^4 n^4}(-1)^n cos(n\pi t)$.

3. Demostrar que el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t) = t^3$ con $t \in (-4, 4)$ es:
   $\mathcal{F}(\mathrm{j}\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 128\frac{n^2\pi^2-6}{\pi^3 n^3}(-1)^{n+1} sen(\frac{n\pi t}{4})$.

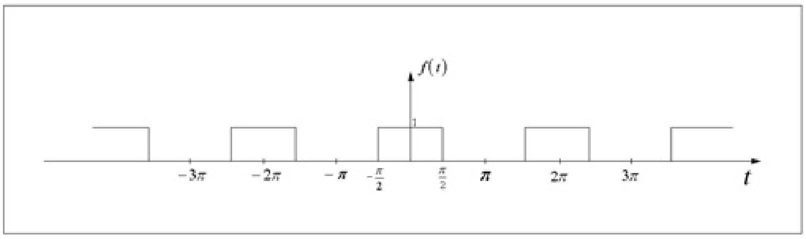
4. La respuesta recortada de un rectificador de media onda es la función $f(t)$ de período 2π definida en su periodo por:
   $f(t) = \begin{cases} 5sen(t) & si \quad 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & si \quad \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$ Expresar $f(t)$ como una expansión en serie de Fourier.

5. Dada la función $f(t)$ de período 2π definida en su periodo por:
   $f(t) = \begin{cases} \pi & si \quad -\pi < t < 0 \\ t & si \quad 0 < t < \pi \end{cases}$ Se pide:

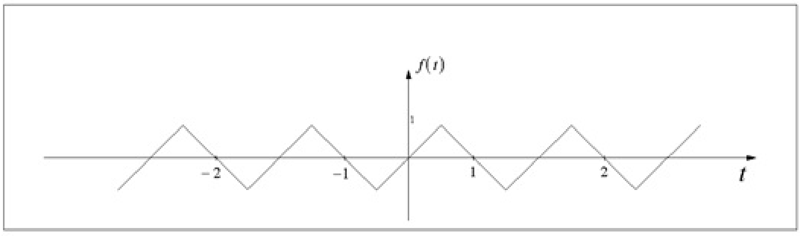
   a) Graficar $f(t)$ en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

   b) Expresar $f(t)$ como una expansión en serie de Fourier.

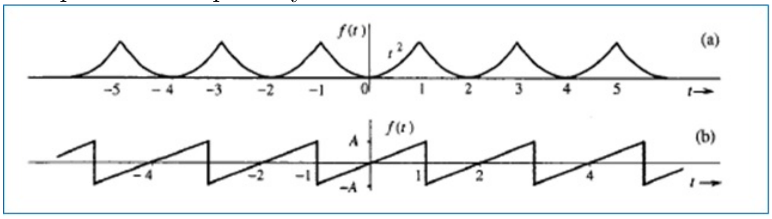
6. Hallar la serie trigonométrica de Fourier para la señal onda cuadrada periódica mostrada en la siguiente figura y graficar su espectro en amplitud y fase.



7. Hallar la serie trigonométrica de Fourier para la señal onda triangular periódica mostrada en la siguiente figura y graficar su espectro en amplitud y fase.



8. Hallar la serie trigonométrica de Fourier para las señales periódicas mostradas en la siguiente figura y graficar su espectro en amplitud y fase.



Guía 5: TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE I

TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE I

1. Usar la definicion para calcular la *Transformada de Fourier* de las siguientes funciones:

   a) $f(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$ con $\alpha > 0$.

   b) $f(t) = e^{-2|t-1|}$.

   c) Graficar la magnitud de las tranformadas de ambas señales.

2. Usar la definicion para calcular la *Transformada de Fourier* de la siguiente función:

   a) $f(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$.

   b) Graficar $f(t)$, $|\mathcal{F}(\mathrm{j}\omega)|$ y $\theta((\mathrm{j}\omega)$.

3. Usar la definicion para calcular la *Transformada de Fourier* de la siguiente función:

   a) $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & si \quad |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$

   b) Graficar $f(t)$, $|\mathcal{F}(\mathrm{j}\omega)|$ y $\theta((\mathrm{j}\omega)$.

4. Encuentrar la transformada de Fourier de la señal modulada $x(t) = rect(\frac{t}{4})cos(20t)$. Graficar el espectro de Fourier. Indicar claramente todas las propiedades utilizadas.

5. Dado que $x(t)$ tiene transformada de Fourier $\mathcal{X}(\mathrm{j}\omega)$, expresar las transformadas de Fourier de las señales enumeradas a continuación en términos de $\mathcal{X}(\mathrm{j}\omega)$. Indicar claramente todas las propiedades que usa.

   a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$.

   b) $x_2(t) = x(3t-6)$.

   c) $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$.

6. Usar las propiedades de diferenciación e integración y el par de transformadas de Fourier para el pulso rectangular para encontrar una expresión de la transformada de Fourier de:

   $$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2} & si \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & si \quad t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

   ¿Cuál es la transformada fe Fourier de la función $g(t) = x(t) - \frac{1}{2}$?.

7. Utilizar la definición de la Anti transformada de Fourier para hallar $x(t)$ siendo:

$$\mathcal{X}(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2 & si \quad -2 \leq \omega \leq 0 \\ 0 & si \quad |\omega| > 2 \end{cases}$$

8. Hallar la Anti transformada de Fourier para hallar $x(t)$. Indicar claramente las propiedades que usa. $\mathcal{X}(\mathrm{j}\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$.

9. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes señales:

    a) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$.

    b) $x(t) = \frac{d}{dt}[u(-t-2) + u(t-2)]$.

10. Determinar la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales periódicas:

    a) $x(t) = sen(2\pi t + \frac{\pi}{4})$.

    b) $x(t) = 1 + cos(6\pi t + \frac{\pi}{8})$.

Guía 6: TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE II

TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE II

1. Calcular la *Transformada de Fourier* de la siguiente función:

    a) $f(t) = cos(\omega_0 t)u(t)$.

    b) Graficar la señal y la magnitud de su tranformada.

2. a) Usar las propiedades de la transformada de Fourier, para hallar la transformada de la señal: $x(t) = t(\frac{sen(t)}{\pi t})^2$.

    b) Usar la relación de *Parseval* y el resultado de la parte anterior para determinar el valor numérico de: $A = \int_{\infty}^{\infty} t^2(\frac{sen(t)}{\pi t})^4 dt$.

3. Sabiendo que la transformada de Fourier $f(t) = e^{-|t|}$ es $\mathcal{F}(i\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$. Se pide:

    a) Usar las propiedades adecuadas de la transformada de Fourier para encontrar la transformada de Fourier de: $g(t) = te^{-|t|}$.

    b) Usar el resultado del ítem anterior junto con la propiedad de dualidad, para determinar la transformada de Fourier de: $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$.

4. Hallar la transformada de Fourier de:

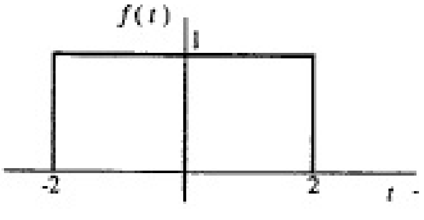
    a) $f(t) = e^{at}u(-t)$.

    b) $g(t) = e^{-a|t|}$ con $a > 0$.

    c) Realizar un gráfico de $g(t)$ y su espectro.

5. Hallar la transformada de: $f(t) = e^{-a|t-t_0|}$ con $a > 0$.

6. Encuentrar y graficar la transformada de Fourier de la señal modulada: $g(t) = f(t).cos(10t)$.
Donde $f(t) = rect(\frac{t}{4})$, mostrado en la siguiente figura,



7. Calcular la convolución de cada uno de los siguientes pares de señales $x(t)$ y $h(t)$ mediante el cálculo de sus respectivas transformadas de Fourier, usar la propiedad de la transformada de la convolución y por último obtener la transformada inversa.

   a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-4t}u(t)$.

   b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = te^{-4t}u(t)$.

   c) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $h(t) = e^{t}u(-t)$.

8. Un sistema LTI está caracterizado por la ecuación diferencial:
   $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$. Se pide:

   a) Hallar la función de transferencia.

   b) Hallar la respuesta del sistema cuando la entrada es el impulso.

9. La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial:
   $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$. Se pide:

   a) Encontrar la respuesta de este sistema al impulso.

   b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema si $x(t) = te^{-2t}u(t)$?.

10. La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial:
    $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$. Se pide:

    a) Encontrar la función de transferencia.

    b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema al impulso?.

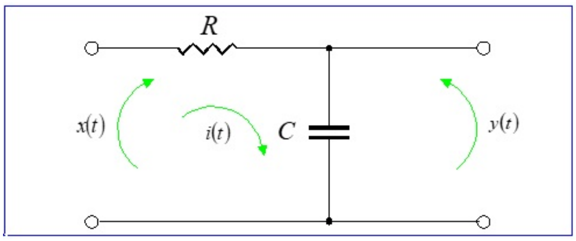
11. Considerar un sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia, es decir función de transferencia:
    $\mathcal{H}(\rangle\omega) = \frac{a-i\omega}{a+i\omega}$, donde $a > 0$. Hallar:

    a) La magnitud de $\mathcal{H}(i\omega)$.

    b) La fase de $\mathcal{H}(i\omega)$.

    c) La respuesta del sistema a la entrada impulsiva.

12. Encontrar la respuesta al impulso del siguiente sistema.



Guía 7: TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Para cada una de las siguientes integrales, especificar los valores del parámetro real σ que asegure que la integral converge:

   a) $\int_0^{+\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$.

   b) $\int_{-\infty}^{0} e^{-5t} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$.

   c) $\int_{-5}^{+5} e^{-5t} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$.

   d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$.

   e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$.

   f) $\int_{-\infty}^{0} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$.

2. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones temporales:

   a) $x(t) = 5u(t)$.

   b) $x(t) = e^{-at}u(t)$, con $a > 0$.

   c) $x(t) = Atu(t)$.

   d) $x(t) = cos(\omega_0 t)u(t)$.

   e) $x(t) = sen(\omega_0 t)u(t)$.

   f) $x(t) = 4\delta(t)$.

   g) $x(t) = e^{-2t} sen(\omega_0 t)u(t)$.

3. Para las transformadas del ejercicio anterior, dibujar en el plano s los polos y la región de convergencia. Analizar la ubicación de los polos con la forma temporal de las funciones.

4. Considerar la señal: $x(t) = e^{-5t}u(t) + e^{-\beta t}u(t)$. Sea $X(s)$ la transformada de Laplace de $x(t)$. ¿Cuáles son las restricciones que debe imponer sobre las partes real e imaginaria de β si la región de convergencia de $X(s)$ es $Re(s) > -3$?

5. *a)* Hallar la transformada de Laplace de: $x(t) = \begin{cases} e^t sen(2t) & si \quad t \leq 0 \\ 0 & si \quad t > 0 \end{cases}$

   b) Indicar la localización de sus polos y su región de convergencia.

6. Dado que: $\mathcal{L}(e^{-at}u(t)) = \frac{1}{s+a}$ si $Re(s) > Re(-a)$. Determinar la transformada inversa de Laplace de: $X(s) = \frac{2(s+2)}{(s^2+7s+12)}$, si $Re(s) > -3$.

7. Determinar la transformada inversa de Laplace de:

   a) $X(s) = \frac{1}{s^2+9}$. Si $Re(s) > 0$.

   b) $X(s) = \frac{1}{s^2+9}$. Si $Re(s) < 0$.

   c) $X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9}$. Si $Re(s) < -1$.

   d) $X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-3)}$. Si $Re(s) > 3$.

   e) $X(s) = \frac{3s^2+s+1}{s+1}$. Si $Re(s) > -1$.

   f) $X(s) = \frac{s}{(s+1)^2+16}$. Indicar región de convergencia.

8. Un sistema LTI cuya entrada es $x(t)$ y su salida $y(t)$ está caracterizado por la ecuación diferencial: $\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y = x(t)$. Se pide:

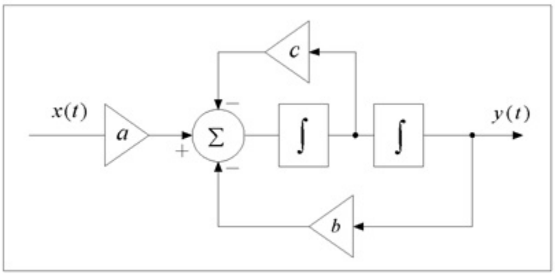
   a) Hallar la función de transferencia $G(s)$.

   b) Dibujar el patrón de polos y ceros de la función de transferencia.

   c) Analizar la estabilidad del sistema.

   d) Encontrar la respuesta impulsiva del sistema.

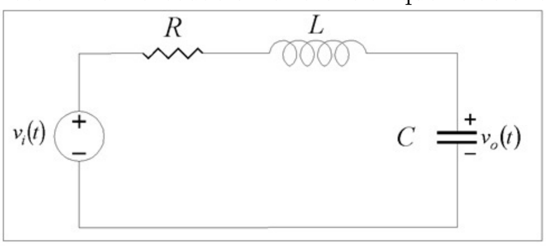
9. Dado el siguiente sistema:



   a) Encontrar la ecuación diferencial que lo describe.

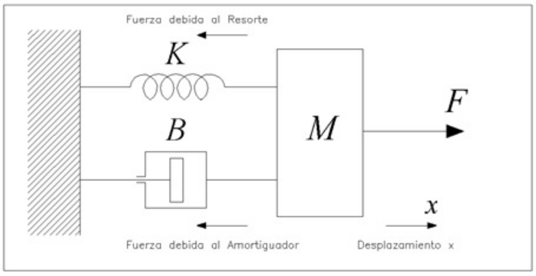
   b) Resolver el sistema para una entrada $x(t) = \delta(t)$, con $a = 1$, $b = 3$ y $c = 4$.

10. *a*) Determinar la ecuación diferencial que relaciona $v_i(t)$ con $v_o(t)$ para el circuito RLC de la figura:



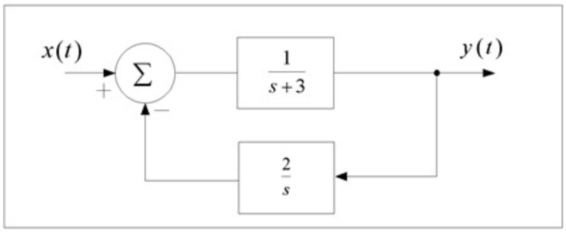
   b) Suponga que $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$. Usar la transformada unilateral de Laplace para determinar $v_0(t)$ para $t > 0$, $R = 30\Omega$, $L = 1\text{H}$, $C = 0.5\text{F}$, $v_0(0^+) = 1$, $\frac{dv_0(t)}{dt}|_{0^+} = 2$.

11. *a*) Determinar la ecuación diferencial que relaciona $x(t)$ con $F(t)$ para el sistema *Masa, Resorte, Amortiguador* de la figura:



b) Suponga que $F(t) = 2u(t)$. Usando la transformada unilateral de Laplace determinar $x(t)$ para $t > 0$.

12. Dado el siguiente sistema:



a) Hallar la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

b) A partir de $H(s)$ encontrar la respuesta al impulso $\delta(t)$.

Guía 8: TEOREMA DE MUESTREO

TEOREMA DE MUESTREO

1. Se sabe que una señal de valor real $x(t)$ ha sido determinada sólo por sus muestras cuando la frecuencia de muestreo es $\omega(s) = 10000\pi$. ¿Para qué valores de ω se garantiza que $X(i\omega)$ sea cero?.

2. Una señal continua $x(t)$ se obtiene a la salida de un filtro pasa bajos ideal con frecuencia de corte $\omega_c = 1000\pi$. Si el muestreo con tren de impulsos se realiza sobre $x(t)$, ¿Cuál de los siguientes períodos de muestreo garantiza que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de sus versiones muestreadas usando un filtro pasa bajos adecuado?

    a) $T = 0.510^{-3}$.

    b) $T = 210^{-3}$.

    c) $T = 10^{-4}$.

3. Aquella frecuencia que de acuerdo con el teorema de muestreo, debe ser excedida por la frecuencia de muestreo se llama *razón de Nyquist*. Determinar la razón de Nyquist correspondiente a cada una de las siguientes señales:

    a) $x(t) = 1 + cos(2000\pi t) + sen(4000\pi t)$.

    b) $x(t) = \frac{sen(4000\pi t)}{\pi t}$.

    c) $x(t) = (\frac{sen(4000\pi t)}{\pi t})^2$.

4. Sea $x(t)$ una señal con *razón de Nyquist* ω_0. Determinar la *razón de Nyquist* para cada una de las siguientes señales:

    a) $y(t) = x(t) + x(t-1)$.

    b) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

    c) $y(t) = x^2(t)$.

    d) $y(t) = x(t)cos(\omega_0 t)$.

Guía 9: TRANSFORMADA Z. PARTE I

TRANSFORMADA Z. PARTE I

1. Hallar la transformada $\mathcal{Z}$ y la región de convergencia para la señal $x[n] = a^n u[n]$. Graficar.

2. Hallar la transformada $\mathcal{Z}$ de:

   a) $x[n] = \delta[n]$.

   b) $x[n] = u[n]$.

   c) $x[n] = cos(\beta n)u[n]$.

3. Sabiendo que: $\mathcal{Z}(a^n u[n]) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, con $|z| > |a|$. Detrerminar la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de:
   $\mathcal{X}(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$, $|z| > 2$.

4. Sabiendo que la transformada $\mathcal{Z}$ de una sucesión $x[n]$ es:
   $\mathcal{X}(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$.

   a) Realizar una expansión en fracciones simples para la ecuación anterior expresada como una razón de polinomios en potencias de z^{-1} y, a partir de dicha expansión, determinar $x[n]$.

   b) Reescribir la ecuación anterior como una razón de polinomios en potencias de z y realizar una expansión en fracciones simples de $\mathcal{X}(z)$ expresada en términos de polinomios de z. A partir de esta expansión determinar $x[n]$ y demuestrar que la secuencia obtenida es idéntica a la obtenida en la parte *a*).

5. Mostrar que: $\mathcal{Z}(k^2) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$.

6. Hallar $\mathcal{Z}^{-1}(Y[z])$ en los siguientes casos:

   a) $Y[z] = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$.

   b) $Y[z] = \frac{z}{(2z+1)(z-3)}$.

   c) $Y[z] = \frac{z^2}{(2z+1)(z-1)}$.

   d) $Y[z] = \frac{2z}{2z^2+z-1}$.

   e) $Y[z] = \frac{z}{z^2+1}$.

7. Hallar la respuesta al impulso de un sistema, cuya función de transferencia es: $H(z) = \frac{3z^2}{z^2-2z+1}$.

Guía 10: TRANSFORMADA Z. PARTE II

TRANSFORMADA Z. PARTE II

1. Hallar la función de transferencia para cada uno de los siguientes sistemas discretos:

   a) $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = u_k$.

   b) $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = u_{k+1} - u_k$.

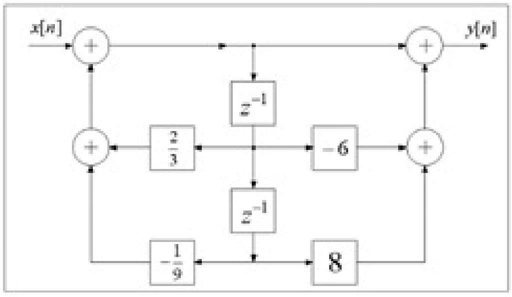
   c) $y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = u_k$. Indicar si los sistemas son estables.

2. Dibujar un diagrama que represente el sistema discreto en los siguientes casos:

   a) $y_{k+2} + 0.5y_{k+1} + 0.25y_k = u_k$.

   b) $y_{k+2} + 0.5y_{k+1} + 0.25y_k = u_{k+1} - u_k$.

3. La entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de un sistema LTI causal están relacionadas a través de la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura siguiente:



   a) Determinar una ecuación en diferencias que relacione $y[n]$ con $x[n]$.

   b) ¿El sistema es estable?

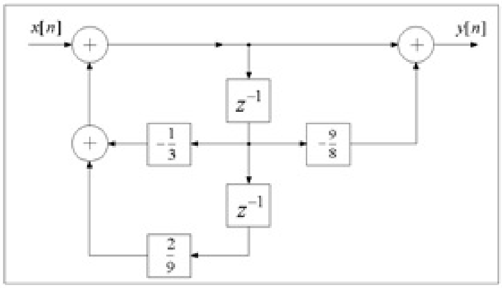
   c) Determinar $y[n]$ cuando la entrada es: $x[n] = \delta[n]$.

4. Considerar un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ para el cual $y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$.

   a) ¿El sistema es estable?

   b) Determinar la respuesta del sistema a la muestra unitaria.

5. La entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de un sistema LTI causal están relacionadas a través de la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura siguiente:

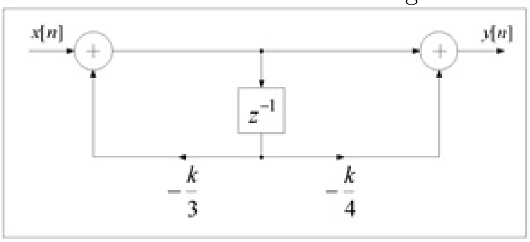


   a) Determinar una ecuación en diferencias que relacione $y[n]$ con $x[n]$.

   b) ¿El sistema es estable?

   c) Determinar $y[n]$ cuando la entrada es: $x[n] = \delta[n]$.

6. Considerar la estructura del filtro digital mostrado en la figura siguiente:



   a) Encuentrar $\mathcal{H}(z)$ para este filtro causal. Trazar el patrón de polos y ceros e indicar la región de convergencia.

   b) ¿Para qué valores de k el sistema es estable?

   c) Determinar $y[n]$ si $k = 1$ y $x[n] = (\frac{2}{3})^n$, $\forall n \leq 0$.

   d) Determinar la respuesta al impulso unitario.

   e) Determinar la respuesta al escalón unitario.

TABLA DE TRANSFORMADAS
TRANSFORMADA DE FOURIER

TRANSFORMADA DE FOURIER		*PROPIEDADES*
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$a\mathcal{X}(i\omega) + b\mathcal{Y}(i\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}\mathcal{X}(i\omega)$
Desplazamiento en la fracuencia	$e^{i\omega_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(i(\omega - \omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$\mathcal{X}^*(-i\omega)$
Inversión de Tiempo	$x(-t)$	$\frac{1}{\|a\|}\mathcal{X}(-i\omega)$
Escalamiento de Tiempo y de Fracuancia	$x(at)$	$\mathcal{X}(\frac{i\omega}{a})$
Convolución en el tiempo	$x(t) * y(t)$	$\mathcal{X}(i\omega)\mathcal{Y}(i\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\mathcal{X}(i\omega) * \mathcal{Y}(i\omega)$
Derivación en el tiempo	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(i\omega)^n\mathcal{X}(i\omega)$
Derivación en la fracuencia	$tx(t)$	$i\frac{d\mathcal{X}(i\omega)}{d\omega}$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{i\omega}\mathcal{X}(i\omega) + \pi\mathcal{X}(0)\delta(\omega)$
Relación de Parseval		$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{X}(i\omega)\|^2 d\omega$

SEÑAL	*TRANSFORMADA*
$e^{-at}u(t)$ con $a > 0$	$\frac{1}{a+i\omega}$
$e^{at}u(-t)$ con $a > 0$	$\frac{1}{a-i\omega}$
$e^{-a\|t\|}u(-t)$ con $a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$te^{at}u(t)$ con $a > 0$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$
$t^n e^{at}u(t)$ con $a > 0$	$\frac{n\,!}{(a+i\omega)^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$sen(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{i\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
$sen(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2i}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
$e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$ con $a > 0$	$\frac{a+i\omega}{(a+i\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}sen(\omega_0 t)u(t)$ con $a > 0$	$\frac{\omega_0}{(a+i\omega)^2+\omega_0^2}$
$rec(\frac{t}{\tau})$	$\tau sinc(\frac{\omega\tau}{2})$
$\frac{W}{\pi}sinc(Wt)$	$rec(\frac{\omega}{2W})$
$\Delta(\frac{t}{\tau})$	$\frac{\tau}{2}sinc^2(\frac{\omega\tau}{4})$
$\frac{W}{2\pi}sinc^2(\frac{Wt}{2})$	$\Delta(\frac{\omega}{2W})$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADA DE LAPLACE		*PROPIEDADES*
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$a\mathcal{X}(s)+b\mathcal{Y}(s)$ con $ROC=R_1\cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{st_0}\mathcal{X}(s)$ con $ROC=R$
Desplazamiento en la fracuencia	$e^{s_0t}x(t)$	$\mathcal{X}(s-s_0)$ si $(s-s_0)\in R$
Conjugación	$x^*(t)$	$\mathcal{X}^*(s^*)$ con $ROC=R$
Convolución en el tiempo	$x(t)*y(t)$	$\mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s)$ con $ROC=R_1\cap R_2$
Derivación en el tiempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$s\mathcal{X}(s)$ con $ROC=R$
Derivación en la fracuencia	$-tx(t)$	$\frac{d\mathcal{X}(s)}{ds}$ con $ROC=R$
Integración	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$ con $ROC=R\cap\{Re(s)>0\}$
Escalamiento de Tiempo y de Fracuancia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\mathcal{X}(\frac{s}{a})$ si $\frac{s}{a}\in R$

SEÑAL	*TRANSFORMADA DE LAPLACE*	*ROC*
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s)>0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s)<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)\ !}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re(s)>0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s)>-a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)\ !}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re(s)>-a$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	$\forall s$
$cos(\omega_0t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>0$
$sen(\omega_0t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>0$
$e^{-at}cos(\omega_0t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>-a$
$e^{-at}sen(\omega_0t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>-a$

TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$		*PROPIEDADES*
Linealidad	$ax[k] + by[k]$	$a\mathcal{X}(z) + b\mathcal{Y}(z)$
Primera Propiedad de Traslación: Retraso	$y[k] = x[k - k_0]$	$\mathcal{Z}(x[k - k_0]) = \frac{1}{z^{k_0}}\mathcal{Z}(x[k])$
Segunda Propiedad de Traslación: Avance	$y[k] = x[k + 1]$	$\mathcal{Z}(x[k + 1]) = z\mathcal{X}(z) - zx_0$
Segunda Propiedad de Traslación: Avance	$y[k] = x[k + 2]$	$\mathcal{Z}(x[k + 2]) = z^2\mathcal{X}(z) - z^2x_0 - zx_1$
Multiplicación por a^k	$\mathcal{Z}(x[k]) = \mathcal{X}(z)$	$\mathcal{Z}(a^k x[k]) = \mathcal{X}(\frac{1}{a}z)$
Multiplicación por k^n	$\mathcal{Z}(x[k]) = \mathcal{X}(z)$	$(-z\frac{d}{z})^n\mathcal{X}(z)$
Teorema del valor inicial	$\mathcal{Z}(x[k])$	$\lim_{z\to\infty} \mathcal{X}(z) = x_0$
Teorema del valor final	$\mathcal{Z}(x[k])$	$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\mathcal{X}(z) = \lim_{k\to\infty} x_k$

TABLA DE TRANSFORMADAS $\mathcal{Z}$

SEÑAL	*TRANSFORMADA* $\mathcal{Z}$	*ROC*
$x[k] = \delta[k]$ con $k \geq 0$	1	$\forall z$
$x[k] = u[k]$ con $k \geq 0$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$x[k] = a^k$ con $a =$cte.	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$x[k] = k$ con $k \geq 0$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$x[k] = ka^{k-1}$ con $a =$cte.	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$x[k] = e^{-kT}$ con $T =$cte.	$\frac{z}{z-e^{-T}}$	$\|z\| > e^{-T}$
$x[k] = cos(k\omega T)$ con $\omega, T =$ctes.	$\frac{z(z-cos(\omega T)}{z^2-2zcos(\omega T)+1}$	$\|z\| > 1$
$x[k] = sen(k\omega T)$ con $\omega, T =$ctes.	$\frac{zsen(\omega T)}{z^2-2zcos(\omega T)+1}$	$\|z\| > 1$