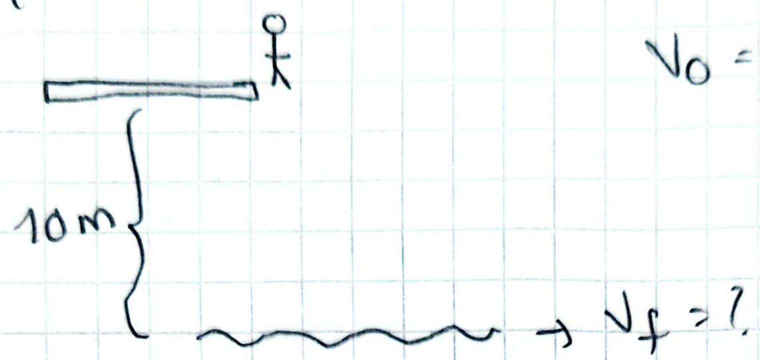
a. Para este primer numeral, se hace en dos partes, la primera para determinar la velocidad a la que llega al agua y la segunda para obtener la E.D.

(*)



$V_0 = 0$

Se calcula mediante conservación de la energía

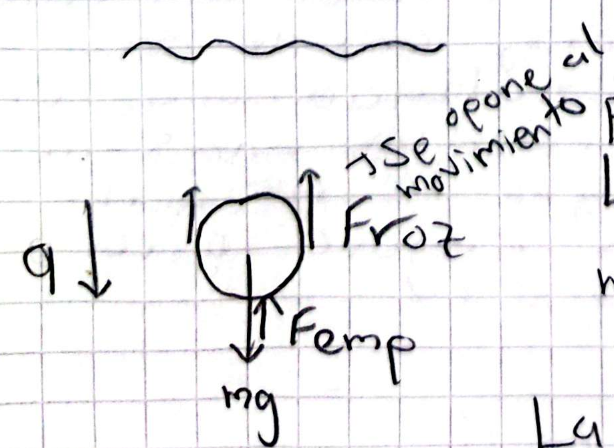
$$E_I = E_{pot} \qquad E_f = E_{cin}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s}$$

Con esto ahora el clavadista en el agua

En este caso se modela como una esfera



Por lo que la segunda Ley de Newton queda

$$ma = mg - F_{emp} - F_{roz}$$

La fuerza de rozamiento viene dada por

$$F_{roz} = \frac{1}{2} C_d \rho_a A v^2$$

C_d = coeficiente de arrastre

ρ_a = densidad del agua

A = area frontal de la esfera

La fuerza de empuje viene dada por:

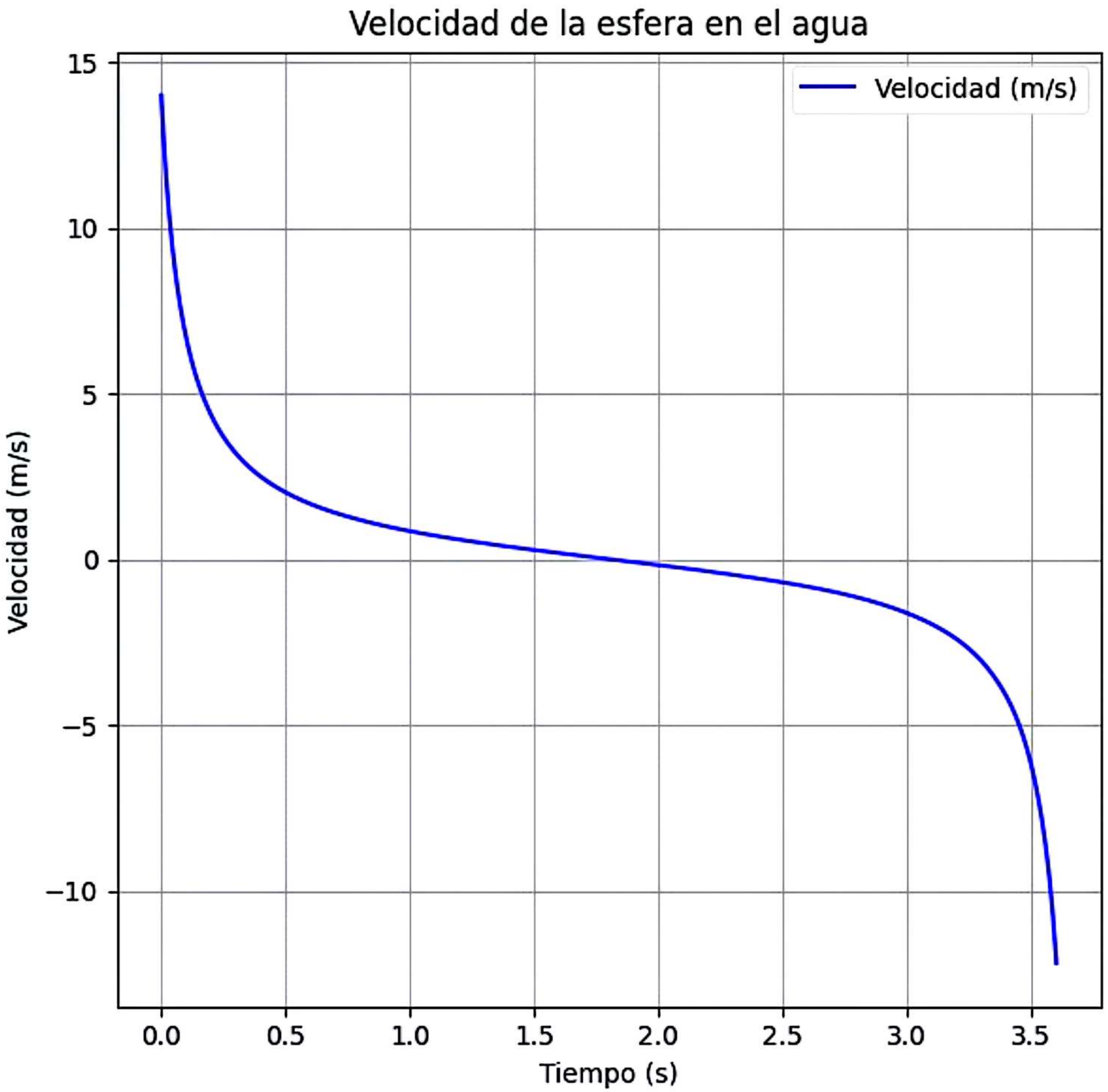
$$F_{emp} = \rho_a \cdot g \cdot V_{des}$$

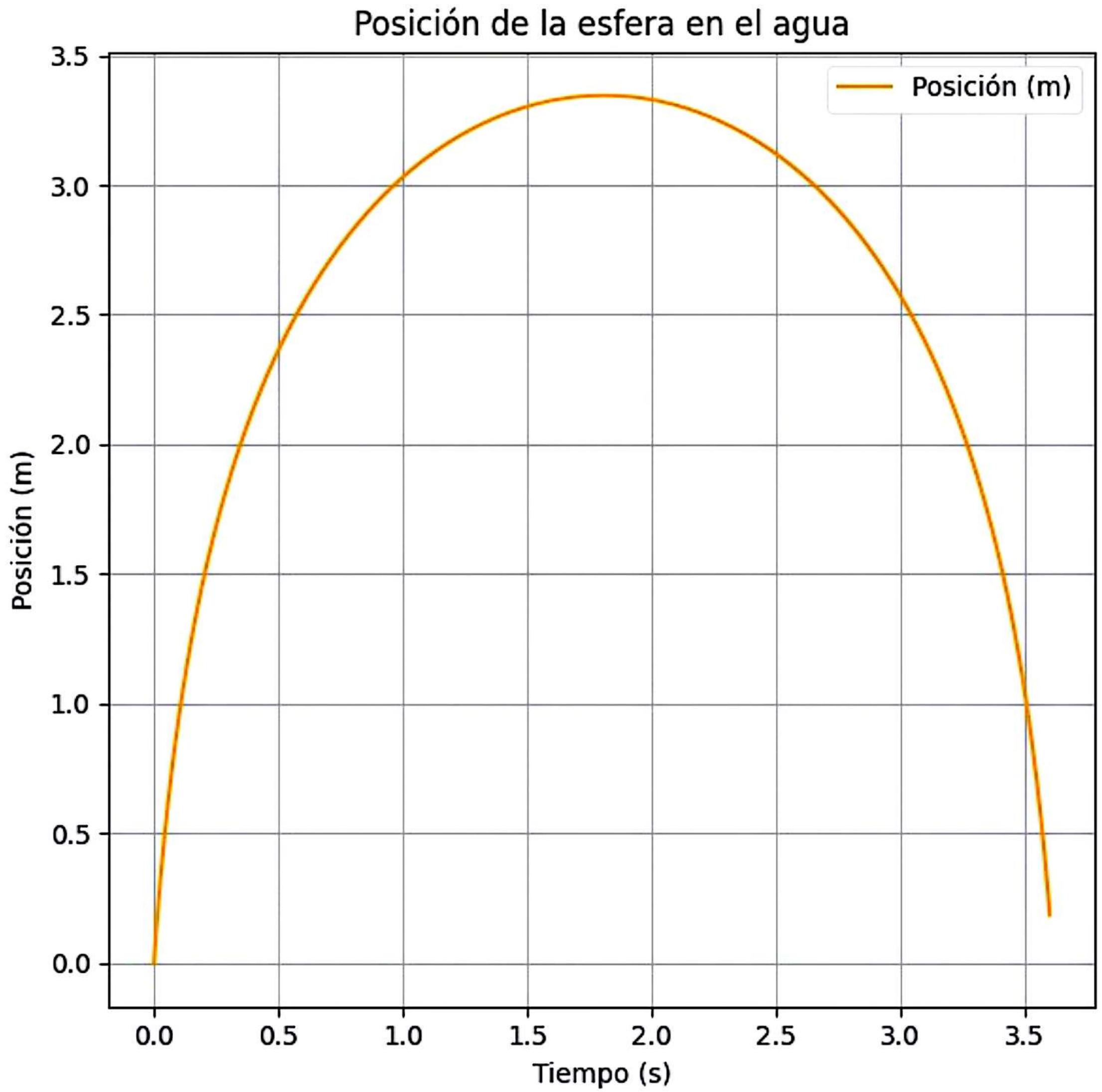
V_{des} = Volumen sumergido en agua

Por lo que la E.D. viene dada por:

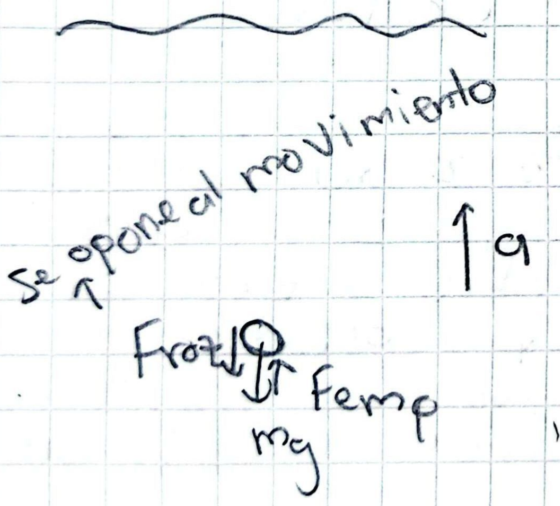
$$\ddot{Y} = g - \frac{C_d \rho_a A \dot{Y}^2}{2m} - \frac{\rho_a g V_{des}}{m} \quad //$$

El cálculo se realizó numericamente a tráves de Python, donde se obtuvo como resultado que el clavadista no descendia mas de 3,5 m, por lo que la profundidad de 5 m es seguro para ellos.


Velocidad de la esfera en el agua
Velocidad (m/s)
15
10
5
0
−5
−10
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Tiempo (s)
Velocidad (m/s)


Posición de la esfera en el agua
Posición (m)
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Tiempo (s)
Posición (m)

b. el problema del corcho es similar al anterior, la diferencia es que el movimiento empieza abajo.



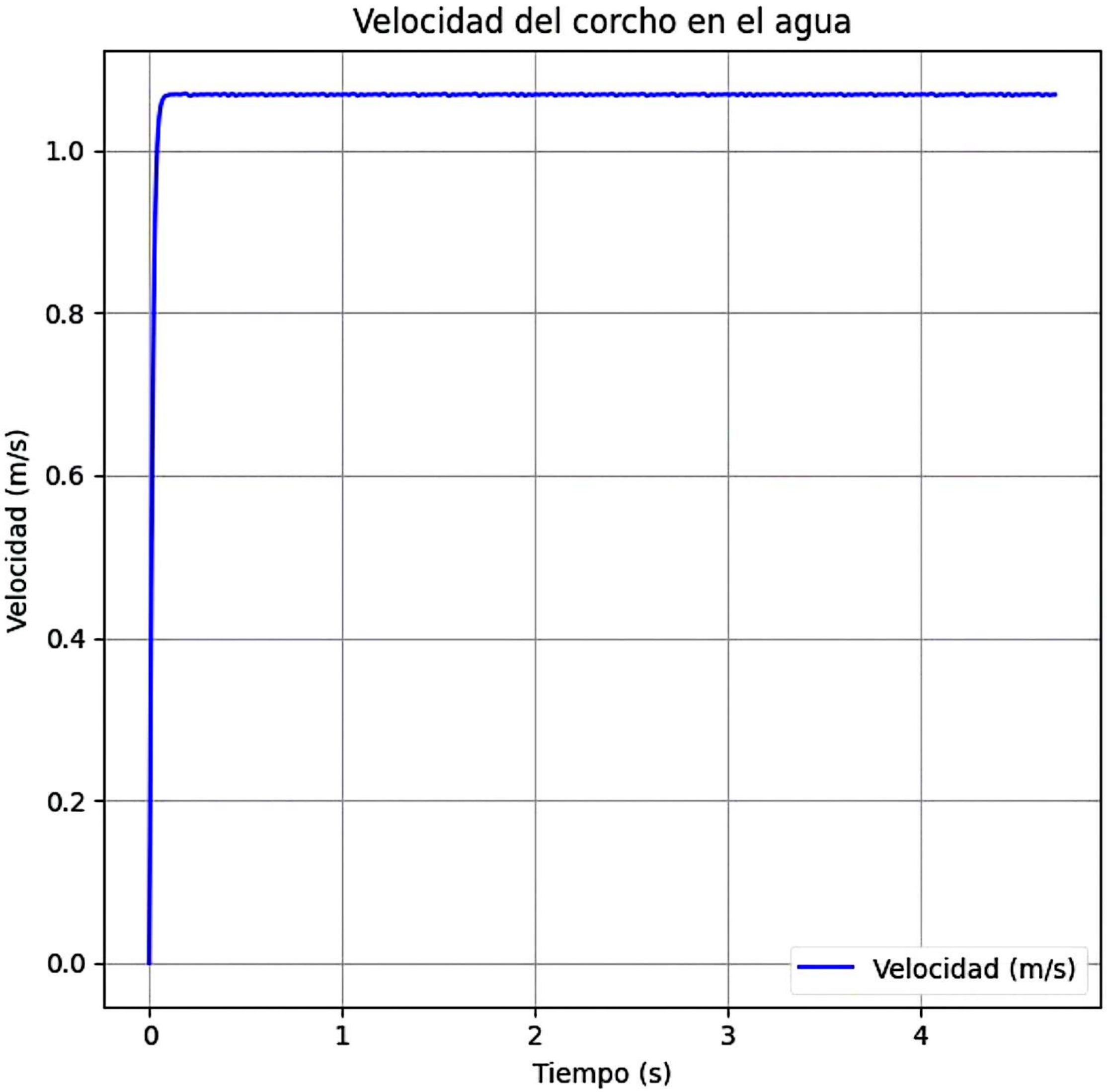
La ecuación diferencial resultante es

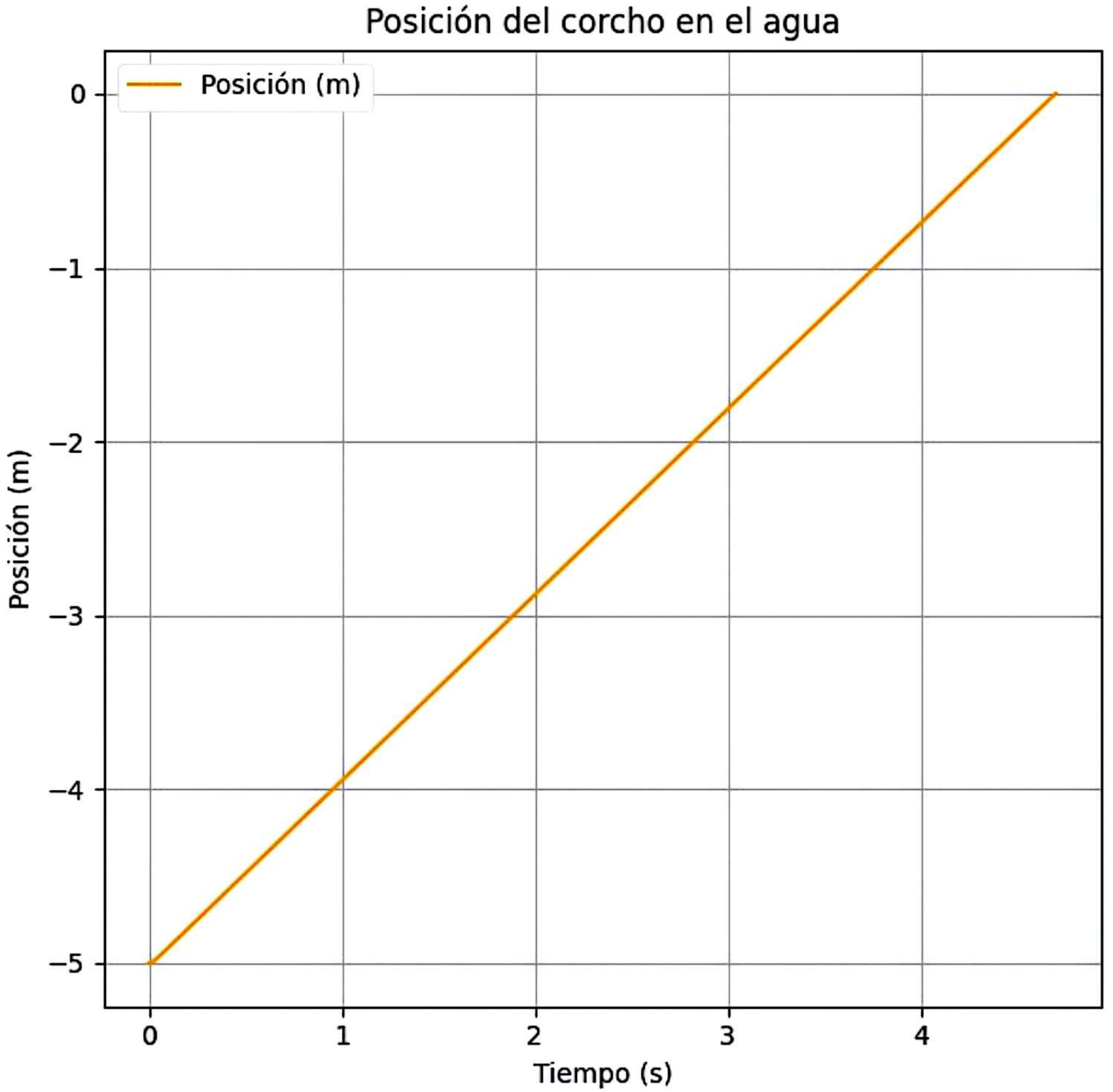
$$ma = -mg + F_{emp} - F_{roz}$$

Por lo que queda:

$$\ddot{Y} = -g + \frac{\rho_a g V_{ds}}{m} - \frac{C_d \rho_a A Y^2}{2m} \quad //$$

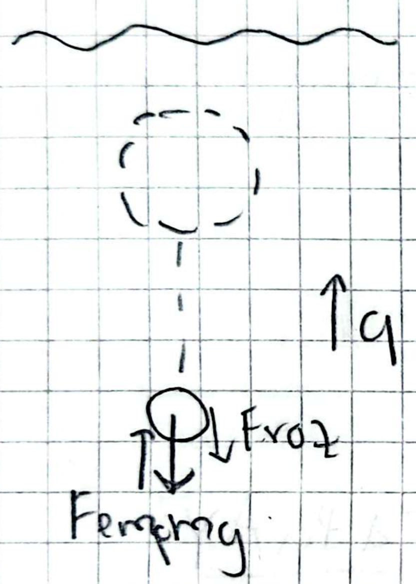
Se realizó el calculo numerico, dando como resultado una velocidad de 1,07 m/s.





La velocidad con la que el corcho llega a la superficie es: 1.07 m/s

c. Por último, la burbuja, es similar al del corcho pero en este caso la burbuja varía su volumen conforme va subiendo a la superficie debido a la presión que experimenta



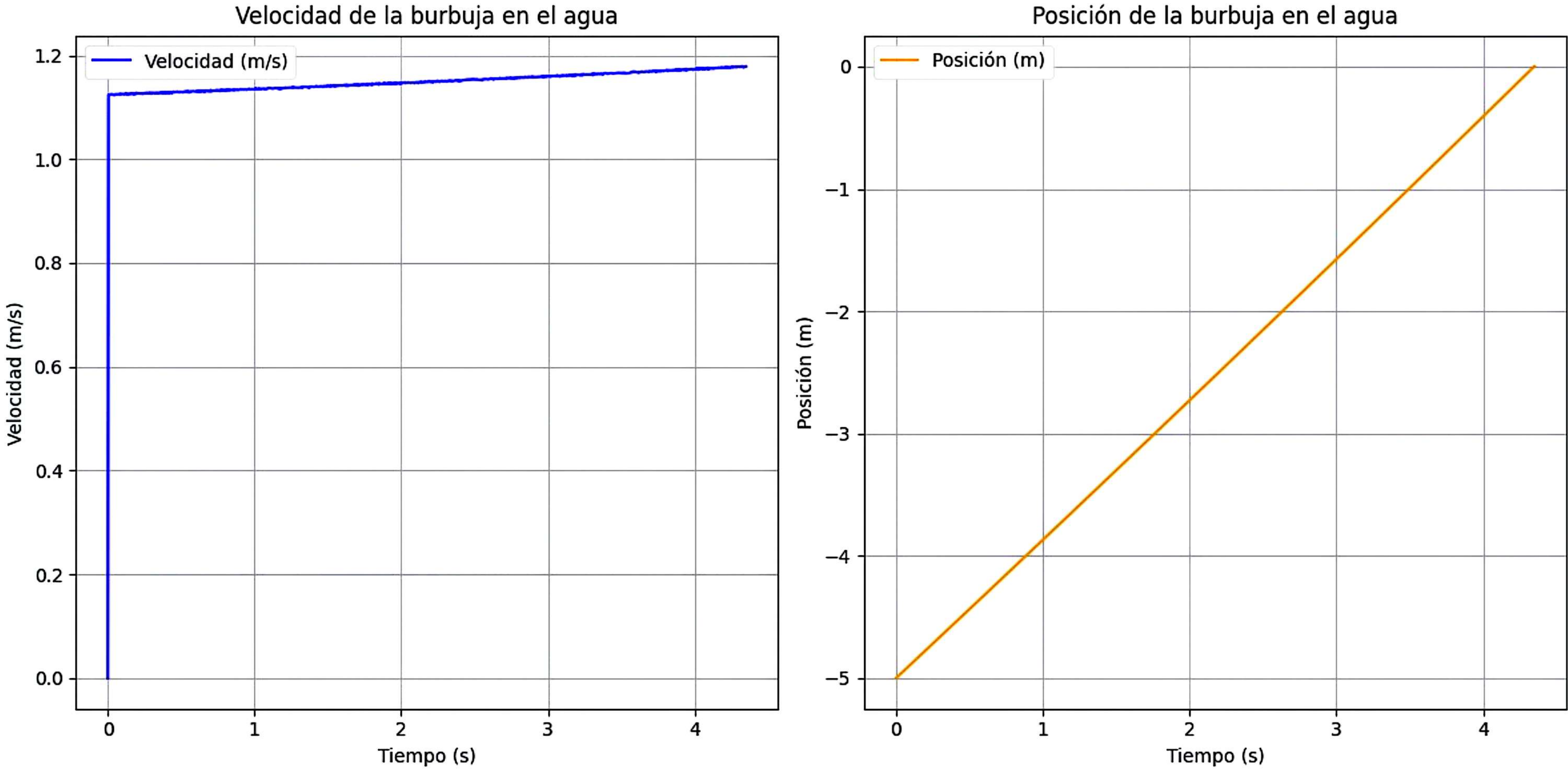
En este caso la E.D es la misma que el corcho pero el area y volumen van variando dando como resultado:

$$\ddot{y} = -g + \frac{\rho_a g V_{des}(y)}{m} - \frac{C_d \rho_a A(y) \dot{y}^2}{2m}$$

En este caso para calcular como varía el volumen de la burbuja se usa la aproximación de gas ideal usando la Ley de Boyle:

$$V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2} \qquad r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

Con esto se realizaron los calculos y se obtuvo una velocidad de 1,18 m/s



La velocidad con la que la burbuja llega a la superficie es: 1.18 m/s

Segundo Punto:

(a). Las líneas de flujo del campo magnético son paralelas a B.

La trayectoria de una partícula está marcada por la dirección de la velocidad de la misma. Por lo que al entrar normal a las líneas de flujo, la velocidad es perpendicular al campo B.

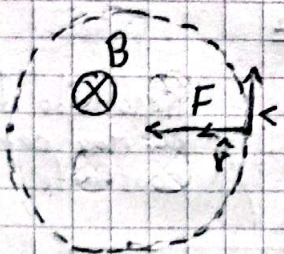
$$V \perp B \Rightarrow |V \times B| = VB\sin(90) = VB.$$

Como $E=0$, entonces la fuerza de Lorentz para esa partícula está dada por:

$$F = \frac{e}{c} V \times B \quad \text{(dirección perpendicular a } V \text{ y } B\text{).}$$

$$F = \frac{e}{c} VB$$

Por orientabilidad de la base y definición del producto vectorial, la fuerza de Lorentz en ausencia de E y $V \perp B$, la partícula seguirá una trayectoria circular.



Esto significa que la fuerza de Lorentz funciona como una fuerza centrípeta.

$$F_{cen} = m a_{cen} = +m \frac{V^2}{r} \hat{r} \; ; \quad \hat{r} \text{ vector radial (unitario) del círculo y } r \text{ el valor del radio.}$$

Ahora por segunda Ley de Newton, se tiene:

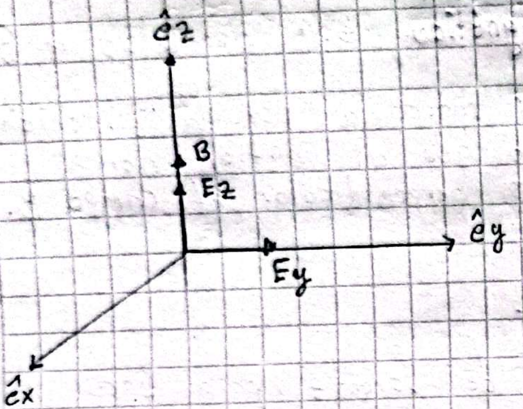
$$F = m a_{cen} \quad [\text{escalar}]$$

$$\frac{e}{c} VB = m\frac{V^2}{r} \quad \text{(Despejando radio)}$$

R1. $$\boxed{r = \frac{mcV}{eB} \qquad r = \frac{V}{\omega_c}}$$

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{mc} \quad \text{(frecuencia ciclotrónica).}$$

(b).



$\mathbf{B} = B\hat{e}_z$

$\mathbf{E} = E_y\hat{e}_y + E_z\hat{e}_z$

Fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = e\left[E_y\hat{e}_y + E_z\hat{e}_z\right] + \frac{e}{c}\left[(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z) \times (B\hat{e}_z)\right].$$

$$\mathbf{F}\cdot\hat{e}_z = eE_z + 0$$

Por segunda Ley de Newton, F también es: [masa constante].

$$\mathbf{F} = m(\ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z]$$

$$\mathbf{F}\cdot\hat{e}_z = m\ddot{z} = eE_z$$

$$\ddot{z} = \frac{eE_z}{m}$$

Resultado de la ec. Mov con aceleración constante

Integrar dos veces:

$$\boxed{\begin{array}{l} z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2 \\ z_0 = z(0) \;;\; \dot{z}_0 = \ddot{z}(0). \end{array}}$$

(c). Todas las componentes de la fuerza de Lorentz:

$$F = e[E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z] + \frac{e}{c}[-\dot{x}B\hat{e}_y + \dot{y}B\hat{e}_x]$$

$$\left.\begin{aligned} F\cdot\hat{e}_x &= \frac{e}{c}B\dot{y} = m\ddot{x} \quad (1) \\ F\cdot\hat{e}_y &= eE_y - \frac{e}{c}B\dot{x} = m\ddot{y} \quad (2) \end{aligned}\right\} \text{Dos EDO}$$

Resolución:

$$\frac{d(1)}{dt} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\ddot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}B\dot{y}\right)$$

$$m\dddot{x} = \frac{e}{c}B\ddot{y}$$

$$\dddot{x} = \frac{eB}{cm}\ddot{y} = W_c\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\dddot{x}}{W_c}$$

Reemplazando en (2):

$$eE_y - \frac{e}{c}B\dot{x} = \frac{\dddot{x}}{W_c}m$$

$$\frac{eE_y}{m}W_c - W_c^2\dot{x} = \dddot{x}$$

Solución de la EDO:

$$\boxed{x(t) = C_1 + C_2\cos(W_c t) + C_3\sin(W_c t) + \frac{E_y c t}{B}}$$

De la ecuación (1) tenemos:

$$\ddot{x} = W_c\dot{y}$$

Así tenemos que:

$$\dot{y}(t) = -C_2 W_c\cos(W_c t) - C_3 W_c\sin(W_c t)$$

$$y(t) = -C_2\sin(W_c t) + C_3\cos(W_c t) + C_4$$

Las expresiones de la velocidad son:

$$\dot{x}(t) = -C_2 W_c \sin(W_c t) + C_3 W_c \cos(W_c t) + \frac{c E_y}{B}$$

$$\dot{y}(t) = -C_2 W_c \cos(W_c t) - C_3 \sin(W_c t)$$

Como sus velocidades y su posición son composiciciones de las funciones senos y cosenos, su trayectoria será periodica.

El valor medio para un periodo completo de la función seno y coseno es 0. y de una constante es ella misma:

$$\boxed{\langle \dot{x}(t) \rangle = \frac{c E_y}{B}; \quad \langle \dot{y}(t) \rangle = 0 .}$$

(c).

(d). Los expresiones de la posición son:

$$x(t) = C_1 + C_2 \cos(w_c t) + C_3 \sin(w_c t) + \frac{cE_y}{B} t$$

$$y(t) = -C_2 \sin(w_c t) + C_3 \cos(w_c t) + C_4$$

Si usamos las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} &C_1, C_2 = 0 \\ &C_3 = \frac{A}{w_c} \\ &C_4 = -\frac{A}{w_c} \end{aligned}\right\}$$

Tenemos:

$$x(t) = 0 + 0 + \frac{A}{w_c} \sin(w_c t) + \frac{cE_y}{B} t$$

$$x(t) = \frac{A}{w_c} \sin(w_c t) + \frac{cE_y}{B} t. \checkmark$$

$$y(t) = 0 + \frac{A}{w_c} \cos(w_c t) - \frac{A}{w_c}$$

$$y(t) = \frac{A}{w}\left[\cos(w_c t) - 1\right]. \checkmark$$

Note que:

$$\frac{cE_y}{B} t = \frac{cE_y}{B w_c} \overbrace{w_c t}^{\phi} = \frac{cE_y}{B w_c} \phi$$

1. Si $A = \frac{cE_y}{B} \rightarrow \frac{A}{w_c} = \frac{cE_y}{B w_c}$

Por lo que: Haciendo cambio de variable:

$$x(\phi) = a \sin(\phi) + a\phi \quad ; \quad \text{con} \quad a = \frac{A}{w_c}, \quad \phi = w_c t.$$

$$y(\phi) = a \cos(\phi) - a$$

Son las ecuaciones paramétricas de una cicloide.

2. Si $A > \frac{cE_y}{B} \longrightarrow a = \frac{cE_y}{B w_c}$

llamando $\frac{A}{w_c} = b$, se tiene $b > a$.

$$\left.\begin{aligned} x(\phi) &= b \sin(\phi) + a\phi \\ y(\phi) &= b \cos(\phi) - a \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones de una cicloide alargada.}$$

③ Si $A < \frac{c\,E_y}{B}$

Haciendo el mismo cambio de variable que en la cicloide alargada, pero:

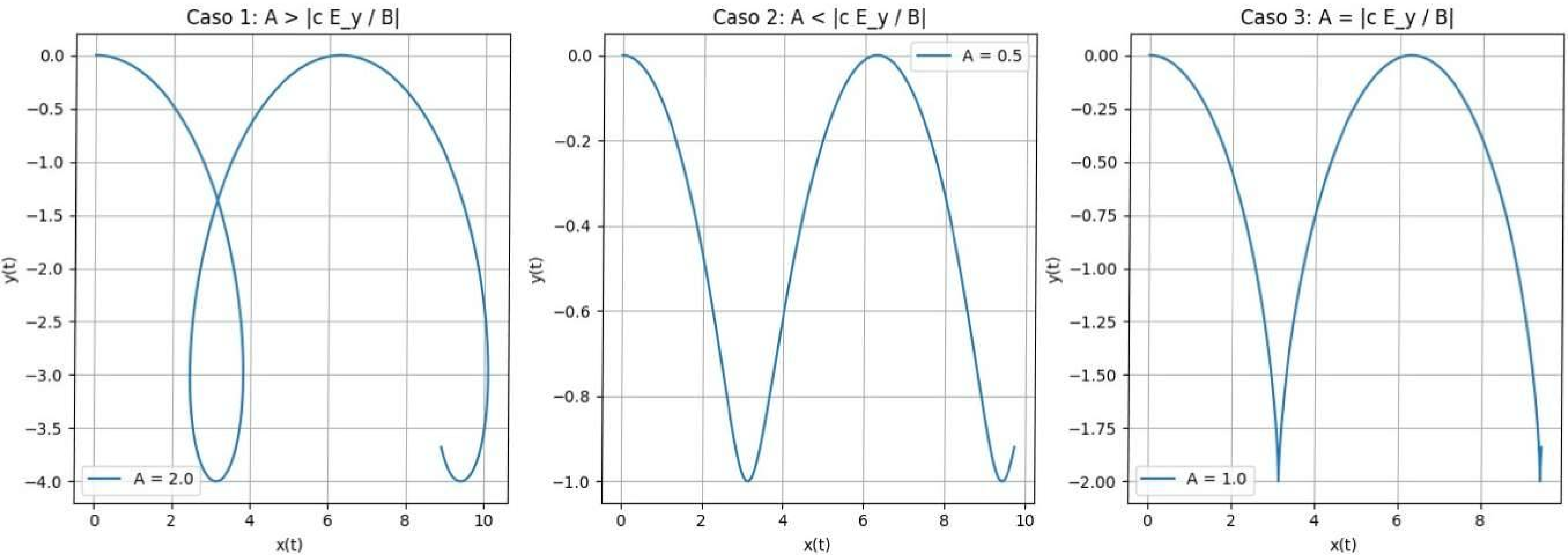
$$b < a.$$

$$\left.\begin{aligned} x(\phi) &= b\,\text{sen}(\phi) - a\phi \\ y(\phi) &= b\cos(\phi) - a \end{aligned}\right\} \text{ Ecuaciones de una cicloide acortada}$$

Para graficar cada una de las trocoides se pondrá los siguientes valores:

- $w_c = 1$
- $E_y\, c/B = 1$
- $A = [2, 0.5, 1]$

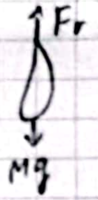
La elección de estos valores es unicamente ilustrativo:


Caso 1: A > |c E_y / B|
A = 2.0
y(t)
x(t)
Caso 2: A < |c E_y / B|
A = 0.5
y(t)
x(t)
Caso 3: A = |c E_y / B|
A = 1.0
y(t)
x(t)

3 punto:

Masa inicial = m_o

(a).



Fuerza Fricción aire = $-K\dot{x}$

masa aumenta en proporción con b.

$$m(t) = m_o + bt.$$

Sumatoria de fuerzas:

$$F = m(t)g - K\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}(m(t)\dot{x}) = m(t)g - K\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}m(t)\dot{x} + m(t)\ddot{x} = m(t)g - K\dot{x}$$

$$b\dot{x} + m(t)\ddot{x} = m(t)g - K\dot{x}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{(K+b)\dot{x}}{m_o+bt}$$ EDO del movimiento.

(b).

tiempo que pasa la nube:

$t_f \to m = 2m_o.$

$m = m_o + bt_f = 2m_o$

$$\boxed{t_f = \frac{m_o}{b}}$$

Usando el factor Integrante:

$$\mu(t) = e^{\wedge}\left(\int \frac{b+K}{m_o+bt}\,dt\right) = (m_o+bt)^{\frac{b+K}{b}}$$

y con la condición inicial $V(0)=0$:

La ecuación que modela la velocidad es:

$$V(t) = \frac{g(m_o+bt)}{b+K} - \frac{g\, m_o^{\frac{2b+K}{b}}}{(b+K)(m_o+bt)^{\wedge}\frac{b+K}{b}}$$

Así, la velocidad luego de pasar por la nube está dado por:

$$v\left(\frac{m_o}{b}\right) = \frac{g \cdot 2m_o}{b+K} - \frac{g\, m_o^{\frac{2b+K}{b}}}{(b+K)\,(2m_o)^{\frac{b+K}{b}}}$$ //

Exponente.

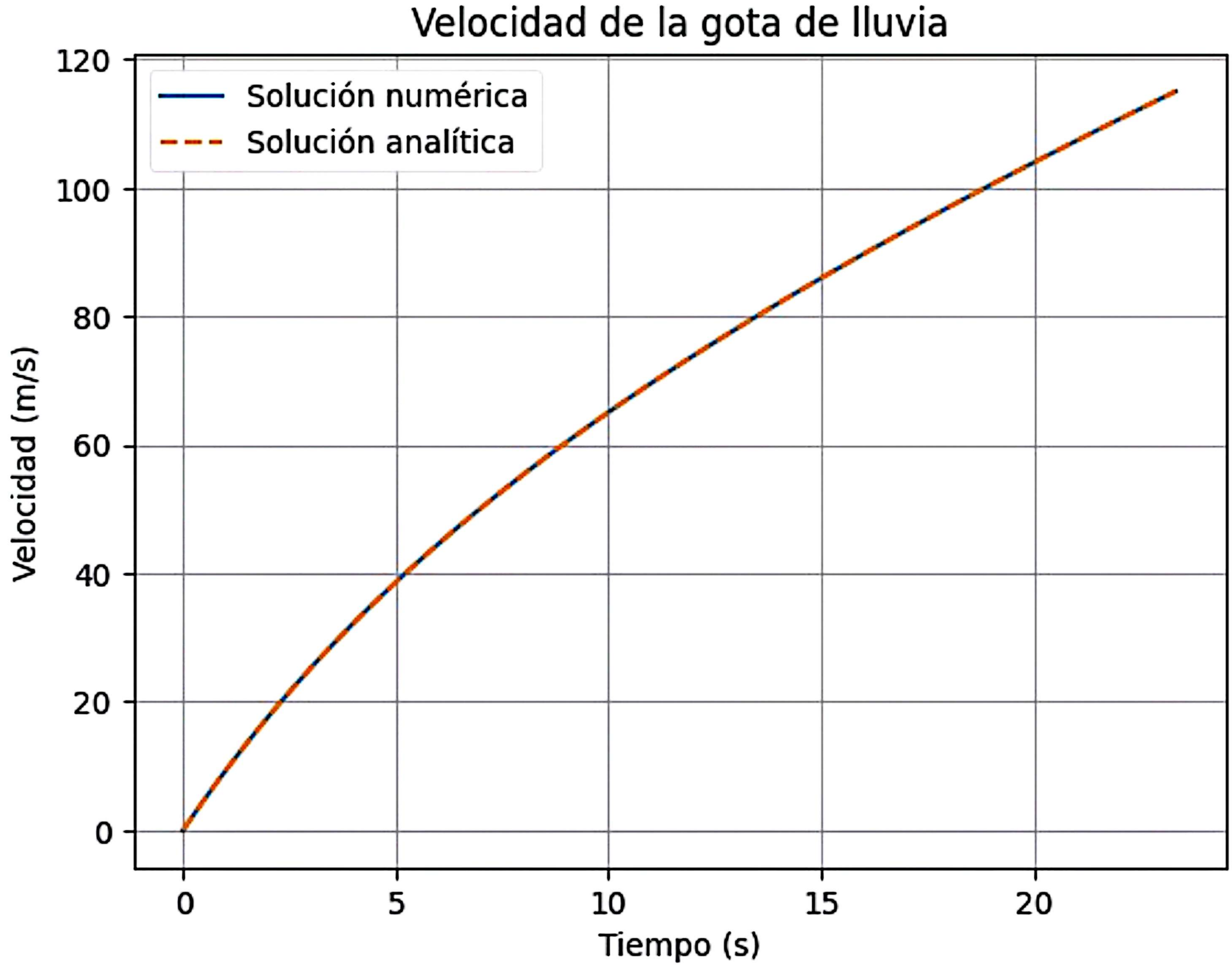
Esa será la velocidad con la que saldría de la nube.

Se hará una resolución del modelo numéricamente donde se pondrán valores para comparar la solución analítica con la numérica

c. Y por último, después de salir de la nube la masa de la gota es constante $2m_0$ y la velocidad límite se alcanza cuando la fuerza de gravedad iguala a la fuerza de resistencia

$$2m_0 g = k v_{lim}$$

$$v_{lim} = \frac{2m_0 g}{k}$$ //




```
Velocidad final numérica: 115.0220805 m/s
Velocidad final analítica: 115.0228661 m/s
Velocidad límite después de salir de la nube: 171.67 m/s
```

Realizado por:

Luis Enrique Niño ID: 2230670
Juan Esteban Gómez García ID. 2230676