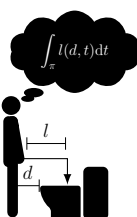


Equations Différentielles

Julien BESTARD



GENTS DO IT WITH PRECISION

Table des matières

1 Cours :	3
1.1 Equation différentielle du premier ordre $ay' + by = c$	3
1.2 Equation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d$	3
2 Equations différentielles du premier ordre :	5
2.1 $xy' - 2y = 0$ sur \mathbb{R}_+^*	5
2.2 $(x^2 + 1)y' - y = 1$ sur \mathbb{R}	5
2.3 $x \ln(x)y' - y = 4$ sur $] - 1; +\infty[$	5
2.4 $y' + y = e^x - 1$ sur \mathbb{R}	6
2.5 $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$ sur \mathbb{R}	6
2.6 $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ sur $] - 1; +\infty[$	7
2.7 $(1 + x^2)y' + xy = 3x^3 + 3x$ sur \mathbb{R}	8
3 Equations différentielles du second ordre :	9
3.1 $y'' - y' - 2y = -x^2 + 3x$	9
3.2 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$	9
3.3 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$	10
3.4 $y'' + y = e^x$	11
3.5 $y'' + 2y' + 5y = xe^x$	12

1 Cours :

1.1 Equation différentielle du premier ordre $ay' + by = c$

1. Les equations homogènes sont de la forme $ay' + by = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

y_0 est de la forme $ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$

La solution S_0 est de la forme : $\left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \end{array} \right\}$

2. Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)y_0(x)$

On a donc $y'_p = k'(x)y_0(x) + k(x)y'_0(x)$

On cherche $k(x)$ à partir de l'équation suivante :

$$ay'_p + by_p = c \iff a(k'(x)y_0(x) + k(x)y'_0(x)) + b(k(x)y_0(x))$$

3. L'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$

1.2 Equation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d$

1. Les equations homogènes sont de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

L'équation caractéristique associée à (E_0) : $ar^2 + br + c$

$$\text{- Si } \Delta > 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{- Si } \Delta = 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (k_1 + k_2 x) e^{r_1 x} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{- Si } \Delta < 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{\alpha x} (k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)) \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. Cas 1 : $ay'' + by' + cy = P(x)$, P polynôme :

Une solution particulière $y_p = Q(x)$ avec $Q(x)$ un polynôme.

Si $c \neq 0$: $\deg Q = \deg P$

Si $c = 0$ et $b \neq 0$: $\deg Q = 1 + \deg P$

Si $c = 0$ et $b = 0$: $\deg Q = \alpha + \deg P$

Cas 2 : $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\gamma x}$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et P polynôme :

Une solution particulière $y_p = Q(x)e^{\gamma x}$ avec $Q(x)$ un polynôme.

$$y_p = Q(x)e^{\gamma x} \implies \left. \begin{aligned} y_p' &= Q'(x)e^{\gamma x} + \gamma Q(x)e^{\gamma x} \\ y_p'' &= Q''(x)e^{\gamma x} + 2\gamma Q'(x)e^{\gamma x} + \gamma^2 Q(x)e^{\gamma x} \end{aligned} \right\} \text{ dans (E).}$$

$$- AQ''(x) + BQ'(x) + CQ(x) = P(x)$$

$$\text{Si } C \neq 0 : \deg Q = \deg P$$

$$\text{Si } C = 0 \text{ et } B \neq 0 : \deg Q = 1 + \deg P$$

$$\text{Si } C = 0 \text{ et } B = 0 : \deg Q = 2 + \deg P$$

$$- y_p = Q(x)e^{\gamma x} \text{ avec :}$$

$$\text{Si } \gamma \text{ n'est pas racine de } ar^2 + br + c : \deg Q = \deg P$$

$$\text{Si } \gamma \text{ est une racine simple de } ar^2 + br + c : \deg Q = 1 + \deg P$$

$$\text{Si } \gamma \text{ est une racine double de } ar^2 + br + c : \deg Q = 2 + \deg P$$

$$3. \text{ L'ensemble des solutions : } S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$$

2 Equations différentielles du premier ordre :

Résoudre les équations suivantes :

2.1 $xy' - 2y = 0$ sur \mathbb{R}_+^*

$xy' - 2y = 0$ est une équation homogène, les solutions sont de la forme : $y_0 = ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dx}$

$$y_0 = ke^{-\int \frac{-2}{x} dx}$$

$$y_0 = ke^{2\ln(x)}$$

$$y_0 = kx^2$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y_0 = kx^2 \end{array} \right\}$

2.2 $(x^2 + 1)y' - y = 1$ sur \mathbb{R}

1. Equation homogène : $(x^2 + 1)y' - y = 0$

$$y_0 = ke^{-\int \frac{-1}{x^2+1} dx}$$

$$y_0 = ke^{\int \frac{1}{x^2+1} dx}$$

$$y_0 = ke^{\arctan(x)}, k \in \mathbb{R}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y_0 = ke^{\arctan(x)}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particulière :

On remarque que $y_p = -1$ est la solution particulière de (E)

3. Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y = y_p + y_0 = -1 + ke^{\arctan(x)}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2.3 $x \ln(x)y' - y = 4$ sur $] - 1; +\infty[$

1. Equation homogène : $x \ln(x)y' - y = 0$

$$y_0 = ke^{-\int \frac{-1}{x \ln(x)} dx}$$

$$y_0 = ke^{\int \frac{1}{x \ln(x)} dx}$$

$$y_0 = ke^{\int \frac{1}{\ln(x)} dx}$$

$$y_0 = ke^{\ln(\ln(x))}$$

$$y_0 = k \ln(x), k \in \mathbb{R}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ll}] - 1; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y_0 = k \ln(x), k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particulière :

On remarque que $y_p = -4$ est une solution particulière de (E)

3. Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll}] - 1; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y = y_p + y_0 = -4 + k \ln(x), k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2.4 $y' + y = e^x - 1$ **sur** \mathbb{R}

1. Equation homogène :
- $y' + y = 0$

$$\begin{aligned} y_0 &= ke^{-\int \frac{1}{1} dx} \\ y_0 &= ke^{-x} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y_0 = ke^{-x}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particulière :

Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)e^{-x}$

$$y_p \text{ est solution de } (E) \iff y'_p + y_p = e^x - 1$$

$$\text{On a } y_p = k(x)e^{-x} \implies y'_p = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$$

$$\text{Dans } (E) : y'_p + y_p = e^x - 1 \iff k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = e^x - 1$$

$$\iff k'(x)e^{-x} = e^x - 1$$

$$\iff k'(x) = \frac{e^x - 1}{e^{-x}}$$

$$\iff k'(x) = (e^x - 1)e^x = e^{2x} - e^x$$

$$\iff k(x) = \int e^{2x} - e^x dx$$

$$\iff k(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$$

$$\text{On a } y_p = k(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x - 1$$

3. Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y = y_p + y_0 = \frac{1}{2}e^x - 1 + ke^{-x}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2.5 $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$ **sur** \mathbb{R}

1. Equation homogène :
- $y' - 2xy = 0$

$$\begin{aligned} y_0 &= ke^{-\int \frac{-2x}{1} dx} \\ y_0 &= ke^{x^2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y_0 = ke^{x^2}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particulière :

Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)e^{x^2}$

$$\text{On prend } y_0 = e^{x^2} \implies y_p = k(x)e^{x^2}$$

$$y_p \text{ est solution de } (E) \iff y'_p - 2xy_p = (1 - 2x)e^x$$

$$\text{On a } y_p = k(x)e^{x^2} \implies y'_p = k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}$$

$$\text{Dans } (E) : y'_p - 2xy_p = (1 - 2x)e^x \iff k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2} - 2xk(x)e^{x^2} = (1 - 2x)e^x$$

$$\iff k'(x)e^{x^2} = (1 - 2x)e^x$$

$$\iff k'(x) = \frac{(1 - 2x)e^x}{e^{x^2}}$$

$$\iff k'(x) = ((1 - 2x)e^x)e^{-x^2} = (1 - 2x)e^{x - x^2}$$

$$\iff k(x) = \int (1 - 2x)e^{x - x^2} dx$$

$$\iff k(x) = e^{x - x^2}$$

$$\text{On a } y_p = e^{x - x^2} e^{x^2} = e^x$$

3. Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y = y_p + y_0 = e^x + ke^{x^2}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2.6 $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ sur $] -1; +\infty[$

1. Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E) : $y' - \frac{2y}{x+1} = 0$

Les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme :

$$\begin{aligned} y_0 &= ke^{-\int \frac{-2}{x+1} dx} \\ y_0 &= ke^{2\int \frac{1}{x+1} dx} \\ y_0 &= ke^{2\ln(x+1)} \\ y_0 &= k(x+1)^2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l}] -1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y_0 = k(x+1)^2, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solutions particulières :

Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)(x+1)^2$

$$\text{On a } y_p = k(x)(x+1)^2 \implies y'_p = k'(x)(x+1)^2 + 2k(x)(x+1)$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\iff y'_p - \frac{2y_p}{x+1} = (x+1)^3 \\ &\iff k'(x)(x+1)^2 + 2k(x)(x+1) - \frac{2k(x)(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3 \\ &\iff k'(x)(x+1)^2 + 2k(x)(x+1) - 2k(x)(x+1) = (x+1)^3 \\ &\iff k'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3 \\ &\iff k'(x) = (x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff k(x) = \int (x+1) dx \\ &\iff k(x) = \frac{x^2}{2} + x \end{aligned}$$

$$\text{On a } y_p = k(x)(x+1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(x+1)^2$$

3. Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y = y_p + y_0 = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(x+1)^2 + k(x+1)^2, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2.7 $(1+x^2)y' + xy = 3x^3 + 3x$ **sur** \mathbb{R} 1. Equation homogène : $(1+x^2)y' + xy = 0$

$$y_0 = ke^{-\int \frac{x}{1+x^2} dx}$$

$$y_0 = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, k \in \mathbb{R}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y_0 = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particulière :

Les solutions particulières sont de la forme d'un polynôme de degré 2 :

$$\implies y_p = ax^2 + bx + c$$

$$\implies y'_p = 2ax + b$$

$$y_p \text{ est le solution de } (E) \iff (1+x^2)y'_p + xy_p = 3x^3 + 3x$$

$$\text{Dans } (E) : (1+x^2)y'_p + xy_p = 3x^3 + 3x \iff (1+x^2)(2ax+b) + x(ax^2+bx+c)$$

$$\iff 2ax+b+2ax^3+bx^2+ax^3+bx^2+xc=3x^3+3x$$

$$\iff 3ax^3+2bx^2+2ax+xc+b=3x^3+3x$$

$$\iff 3ax^3+2bx^2+x(2a+c)+b=3x^3+3x$$

On a donc le système suivant :

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 3ax^3 = 3x^3 \\ 2bx^2 = 0 \\ x(2a+c) = 3x \\ b = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 3a = 3 \\ b = 0 \\ 2a+c = 3 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

Ainsi $y_p = x^2 + 1$

3. Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow y = y_p + y_0 = x^2 + 1 + \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

3 Equations différentielles du second ordre :

3.1 $y'' - y' - 2y = -x^2 + 3x$

1. On pose $(E_0) = y'' - y' - 2y = 0$ l'équation homogène de (E) .
On a $r^2 - r - 2 = 0$ l'équation caractéristique de (E_0) .

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 \implies r_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ et } r_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\text{Donc, l'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ est } S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. Soit $y_p = Q(x)$ avec $Q(x)$ un polynôme, solution particulière de (E)

Comme $-x^2 - 3x$ est de degré 2 et que $-2 \neq 0$

Alors $\deg Q = \deg(-x^2 - 3x) = 2$

Ainsi $y_p = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

De plus $y'_p = 2ax + b$ et $y''_p = 2a$

y_p est solution de (E) , donc :

$$\begin{aligned} 2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) &= -x^2 + 3x \\ 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c &= -x^2 - 3x \\ -2ax^2 + (-2a - 2b)x + 2a - b - 2c &= -x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\text{Par identification, on a : } \left\{ \begin{array}{ll} -2a &= -1 \\ -2a - 2b &= -3 \\ 2a - b - 2c &= 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{ll} a &= \frac{1}{2} \\ b &= 1 \\ c &= 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Ainsi } y_p = \frac{1}{2}x^2 + x$$

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto y = y_p + y_0 = \frac{1}{2}x^2 + x + k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3.2 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

1. On pose $(E_0) = y'' - 5y' + 6y = 0$ l'équation homogène de (E) .
On a $r^2 - 5r + 6 = 0$ l'équation caractéristique de (E_0) .

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 = 1^2 \implies r_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ et } r_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\text{Donc, l'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ est } S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto k_1 e^{2x} + k_2 e^{3x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. Soit $y_p = Q(x)e^{2x}$ avec $Q(x)$ un polynôme, solution particulière de (E)

$$\text{On a } y_p = Q(x)e^{2x} \implies y'_p = Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x} \implies y''_p = Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ &\iff Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x} - 5(Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x}) + 6Q(x)e^{2x} = e^{2x} \\ &\iff Q''(x) - Q'(x) + 0 \times Q(x) = 1(*) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \deg(Q) = 1 + \deg(P) = 1 + 0 = 1$$

$$\left. \begin{array}{lcl} Q(x) & = & ax + b \\ \text{d'où } Q'(x) & = & a \\ Q''(x) & = & 0 \end{array} \right\} \text{ dans } (*)$$

$$\implies -a = 1 \implies a = -1$$

D'où $Q(x) = -x + b, b \in \mathbb{R}$ pour $b = 0, Q(x) = -x$

Ainsi $y_p = -xe^{2x}$

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = y_p + y_0 = -xe^{2x} + k_1e^{2x} + k_2e^{3x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3.3 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

1. On pose $(E_0) = y'' - 4y' + 4y = 0$ l'équation homogène de (E) .

On a $r^2 - 4r + 4 = 0$ l'équation caractéristique de (E_0) .

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0 \implies r = \frac{4}{2} = 2$$

Donc, l'ensemble des solutions de (E_0) est $S_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 + k_2x)e^{2x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2. Soit $y_p = Q(x)e^{2x}$ avec $Q(x)$ un polynôme, solution particulière de (E)

$$\text{On a } y_p = Q(x)e^{2x} \implies y'_p = Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x} \implies y''_p = Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) & \iff y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \\ & \iff Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x} - 4(Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x}) + 4Q(x)e^{2x} = xe^{2x} \\ & \iff Q''(x) = x(*) \end{aligned}$$

$$Q''(x) = x \implies Q'(x) = \frac{x^2}{2} \implies Q(x) = \frac{x^3}{6}$$

$$\text{Ainsi } y_p = \frac{x^3}{6}e^{2x}$$

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = y_p + y_0 = \frac{x^3}{6}e^{2x} + (k_1 + k_2x)e^{2x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3.4 $y'' + y = e^x$

1. On pose
- $(E_0) = y'' + y = 0$
- l'équation homogène de
- (E)
- .

On a $r^2 + 1 = 0$ l'équation caractéristique de (E_0) .

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 \implies r_1 = i \text{ et } r_2 = -i$$

$$\text{Donc, l'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ est } S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x), (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. Soit
- $y_p = Q(x)e^x$
- avec
- $Q(x)$
- un polynôme, solution particulière de
- (E)

$$\text{On a } y_p = Q(x)e^x \implies y'_p = Q'(x)e^x + Q(x)e^x \implies y''_p = Q''(x)e^x + 2Q'(x)e^x + Q(x)e^x$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff y'' + y = e^x \\ &\iff Q''(x)e^x + 2Q'(x)e^x + Q(x)e^x + Q(x)e^x = e^x \\ &\iff Q''(x) + 2Q'(x) + 2Q(x) = 1(*) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \deg(Q) = \deg(P) = 0$$

$$\text{d'où } \left. \begin{array}{l} Q(x) = a \\ Q'(x) = 0 \\ Q''(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ dans } (*)$$

$$\implies 2a = 1 \implies a = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } Q(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } y_p = \frac{e^x}{2}$$

3. Donc l'ensemble des solutions de
- (E)
- :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto y = y_p + y_0 = \frac{e^{2x}}{2} + k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x), (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3.5 $y'' + 2y' + 5y = xe^x$

1. On pose
- $(E_0) = y'' + 2y' + 5y = 0$
- l'équation homogène de
- (E)
- .

On a $r^2 + 2r + 5 = 0$ l'équation caractéristique de (E_0) .

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 \implies r_1 = -1 - 2i \text{ et } r_2 = -1 + 2i$$

Donc, l'ensemble des solutions de (E_0) est $S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{-x}(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)), (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2. Soit
- $y_p = Q(x)e^x$
- avec
- $Q(x)$
- un polynôme, solution particulière de
- (E)

$$\text{On a } y_p = Q(x)e^x \implies y'_p = Q'(x)e^x + Q(x)e^x \implies y''_p = Q''(x)e^x + 2Q'(x)e^x + Q(x)e^x$$

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff y'' + 2y' + 5y = xe^x \\ &\iff Q''(x)e^x + 2Q'(x)e^x + Q(x)e^x + 2(Q'(x)e^x + Q(x)e^x) + 5Q(x)e^x = xe^x \\ &\iff Q''(x) + 4Q'(x) + 8Q(x) = x(*) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \deg(Q) = \deg(P) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \left. \begin{array}{l} Q(x) = ax + b \\ Q'(x) = a \\ Q''(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ dans } (*) \\ \implies 0 + 4a + 8(ax + b) = x \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} 8a = 1 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ 4a + 8b = \frac{-4a}{8} \implies \frac{-4}{8} \implies -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\text{D'où } Q(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}$$

$$\text{Ainsi } y_p = \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \right) e^x$$

3. Donc l'ensemble des solutions de
- (E)
- :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto y = y_p + y_0 = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16} + e^{-x}(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)), (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$