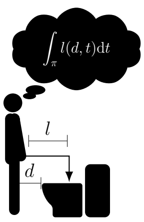
Fonctions Réelles

Julien BESTARD



GENTS DO IT WITH PRECISION

Table des matières

1 Cours

1.1 Comparateur de landau

Voisinage de x_0 V

Pour $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,+\infty\}$:

Pour $x_0 \in \mathbb{R}\,, \exists \alpha \in \mathbb{R}\,,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

Pour $x_0 = +\infty\,, \exists A \in \mathbb{R}\,, V =]A, +\infty[$

Pour $x_0 = -\infty\,, \exists B \in \mathbb{R}\,, V =]-\infty, B[$

Rappel sur les 3 comparateus : $o\,, O\,, \sim$

1. $$\begin{aligned} f = o(g) &\iff \exists \varepsilon, \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \\ &\iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

2. $f = O(g) \iff \exists$ fonction γ bornée au voisinage de x_0, $\frac{f(x)}{g(x)}$ bornée

3. $$\begin{aligned} f \underset{x_0}{\sim} g &\iff \exists \text{ fonction } B\,, B(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1\,, f(x) = g(x)B(x) \\ &\iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1 \\ &\iff \exists \text{ fonction } \alpha\,,\ \alpha(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0\,, f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)) \end{aligned}$$

2 Les comparaisons de Landau

Dans les corrections des exos : V_{x_0} signifie au voisinage de x_0.

2.1 Exercice 1.1

1. $f(x) = o(0) \iff \exists \varepsilon$ tel que $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow}$, $f(x) = 0\varepsilon(x) = 0$
   Donc $\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = 0$
2. $g(x) = O(0) \iff \exists \gamma$ bornée au voisinage de 0 tel que $g(x) = 0\gamma(x) = 0$
   Donc $\forall x \in V_{x_0}$, $g(x) = 0$
3. $h(x) \sim 0 \iff \iff \exists \beta$ tel que $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, $h(x) = 0(1 + \beta(x)) = 0$
   Donc $\forall x \in V_{x_0}$, $h(x) = 0$

2.2 Exercice 1.2

Cas $l \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x_0}{\sim} l &\iff \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)}{l} = 1 \\ &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = l \end{aligned}$$

Donc (P) est vrai si $l \neq 0$

Cas $l = 0$

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x_0}{\sim} 0 &\iff \forall x \in V_{x_0} , f(x) = 0 \\ &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc (P) est vrai si $l = 0$

Ainsi (P) est vraie pour $l \in \mathbb{R}$

2.3 Exercice 1.3

1a. $x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) &\iff \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0 \\ &\iff \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha - \beta} = 0 \\ &\iff \alpha > \beta \end{aligned}$$

1b. $x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta) &\iff \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0 \\ &\iff \exists \varepsilon \text{ tel que } \varepsilon(x) \to 0 \text{ et } x^\alpha = x^\beta \cdot \varepsilon(x) \\ &\iff \exists \varepsilon \text{ tel que } \varepsilon(x) \to 0 \text{ et } x^{\alpha - \beta} = \varepsilon(x) \\ &\iff \lim_{x \to 0} x^{\alpha - \beta} = 0 \\ &\iff \alpha - \beta > 0 \\ &\iff \alpha > \beta \end{aligned}$$

2a. Soit $g(x)$ un polynôme tel que

$$\begin{aligned} f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2 - 4x^3}{g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(2/x^2 - 1/x - 4)}{g(x)} = 1 \\ &\iff g(x) = -4x^3 \end{aligned}$$

Donc $2x - x^2 - 4x^3 \underset{+\infty}{\sim} -4x^3$

2b. Soit $g(x)$ un polynôme tel que

$$\begin{aligned} f(x) \underset{0}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to 0} \frac{2x - x^2 - 4x^3}{g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2x - x - 4x^2)}{g(x)} = 1 \\ &\iff g(x) = 2x \end{aligned}$$

Donc $2x - x^2 - 4x^3 \underset{0}{\sim} 2x$

2.4 Exercice 1.4

Pour cet exercice, le a. correspond "Au voisinage de $+\infty$" et le b. "Au voisinage de x_0".

1a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée)

Donc $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $\ln(x) \underset{+\infty}{=} O(x)$

2a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée)

Donc $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ et $x \underset{+\infty}{=} O(e^x)$

2b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Donc $x \underset{0}{=} o(e^x)$ et $x \underset{0}{=} O(e^x)$

3a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^3 - x^2 - x} = 0$

Donc $x^2 + 1 \underset{+\infty}{=} o(2x^3 - x^2 - x)$ et $x^2 + 1 \underset{+\infty}{=} O(2x^3 - x^2 - x)$

3b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 + 1} = 0$

Donc $2x^3 - x^2 - x \underset{0}{=} o(x^2 + 1)$ et $2x^3 - x^2 - x \underset{0}{=} O(x^2 + 1)$