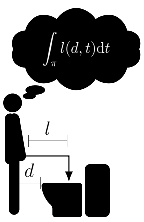
Moment des forces-Equilibre

Quentin ROBERT



Gents Do It With Precision

Table des matières

1 Cours

1.1 Outils Mathématiques / Rappel

Produit scalaire :

Notions :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} &= \overrightarrow{V_1}\ scalaire\ \overrightarrow{V_2}\\ &= scalaire\ \mathbb{R}\end{aligned}$$

Définition:

$\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} \;=\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|\times\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|\times\cos(\alpha)$

- si $\alpha=\frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2}=0$ soit que : $\overrightarrow{V_1}\perp\overrightarrow{V_2}$
- si $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2}>0$
- $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi \iff \overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2}<0$

Définition: En fonction des coordonnées $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} &= \begin{pmatrix}V_{1x}\\V_{1y}\\V_{1z}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}V_{2x}\\V_{2y}\\V_{2z}\end{pmatrix}\\ &= V_{1x}\cdot V_{2x}+V_{1y}\cdot V_{1y}+V_{1z}\cdot V_{2z}\end{aligned}$$

Produit vectoriel :

Notions :

$\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{V_3}(\overrightarrow{V_1}$ vectoriel $\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{V_3})$

Définition:

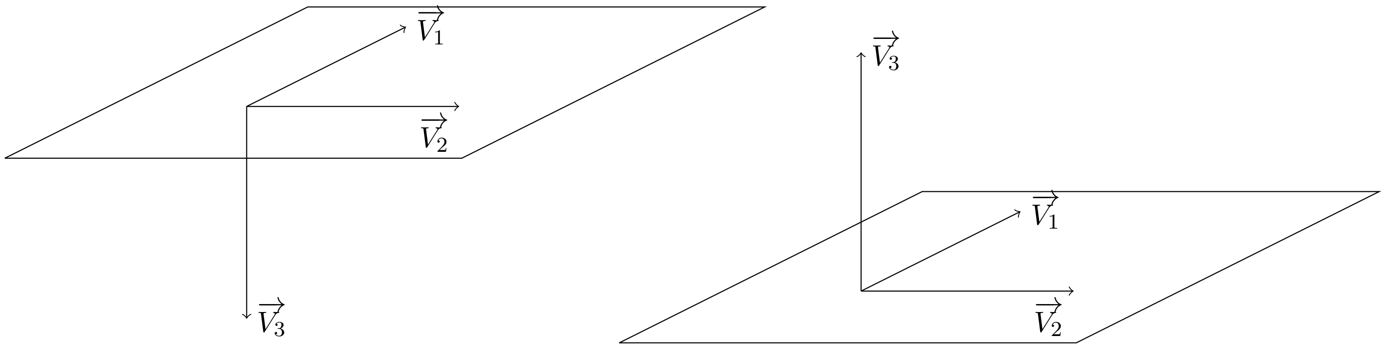
Norme de $\overrightarrow{V_3}$ avec $\alpha=(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$

$\overrightarrow{V_3}=\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|\times\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|\times|\sin(\alpha)|$

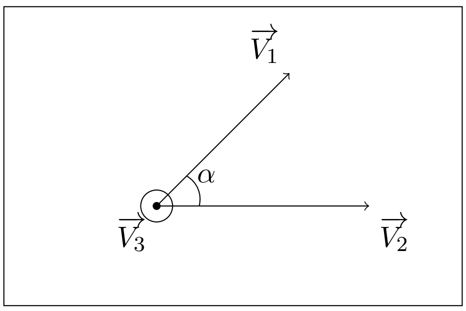
- si $\alpha=0$ ou $\alpha=\pi \iff \sin(\alpha)=0$
  $\iff \overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{0}$
- si $\alpha=\frac{\pi}{2} \iff \left\|\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}\right\|=$ norme maximale.

Propriété :

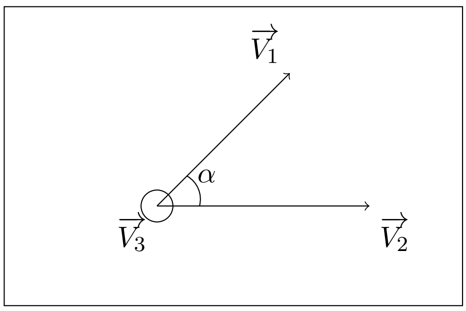
- $\overrightarrow{V_3}$ est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.
- $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ forme un trièdre direct.



$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$



$\overrightarrow{V_3}$ sortant.



$\overrightarrow{V_3}$ entrant

Définition: Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{V_3}$

Calculs en fonction de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$: (Règle du gamma)

$$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} \Longrightarrow \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{3x} = V_{1y} \cdot V_{2z} - V_{1z} \cdot V_{2y} \\ V_{3y} = V_{1z} \cdot V_{2x} - V_{1x} \cdot V_{2z} \\ V_{3z} = V_{1x} \cdot V_{2y} - V_{1y} \cdot V_{2x} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \overrightarrow{V_3} \right\| = \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2 + V_{3z}^2}$$

1.2 Moment des forces-Equilibres

Définition:

Moment d'une force par rapport à un point O :

$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A})$ avec O centre de rotation et A point d'application.

$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A}$

Si $\overrightarrow{F}$ n'a aucun effet de rotation sur le système, alors $\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{O}$

Si $\overrightarrow{F}$ a une droite d'action coupant l'axe de rotation, alors $\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{O}$

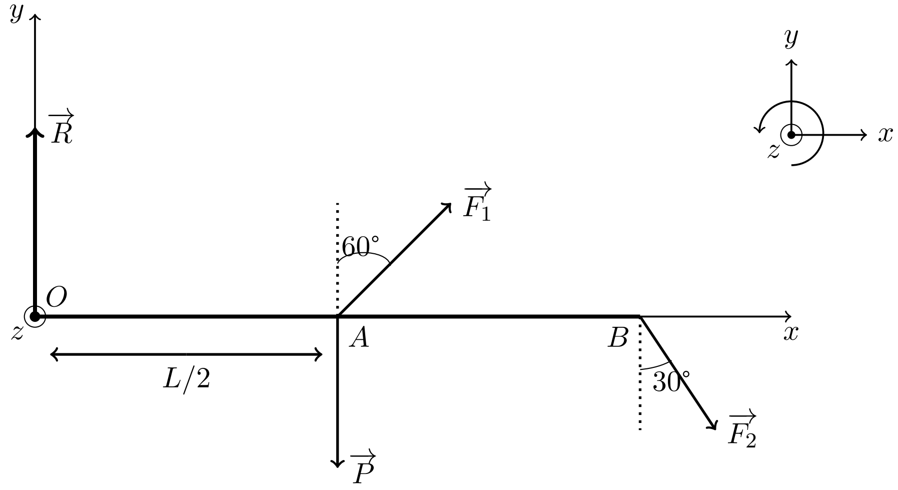
Condition d'équilibre de translation :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$

Condition d'équilibre de rotation :

$\sum \overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{0}$

2 Exo 1 :



2.1 1-

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{/O}\overrightarrow{(F_1)} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_1} \\
&= \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \sin(60) \\ F_1 \cos(60) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \times 0 - 0 \times F_1 \cos(60) \\ 0 \times F_1 \sin(60) - L/2 \times 0 \\ L/2 \times F_1 \cos(60) - 0 \times F_1 \sin(60) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \times F_1 \cos(60) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} M_x(\overrightarrow{F_1}) \\ M_y(\overrightarrow{F_1}) \\ M_z(\overrightarrow{F_1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc $M_z(\overrightarrow{F_1}) = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{2} = 2\text{Nm}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{/O}\overrightarrow{(F_2)} &= \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_2} \\
&= \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_2 \sin(30) \\ -F_2 \cos(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_2 \times L \cos(30) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc $M_z(\overrightarrow{F_2}) = (-12) \times 1 \times \cos(30) = (-12) \times \cos(30)\text{Nm}$

2.2 2- Application Numérique

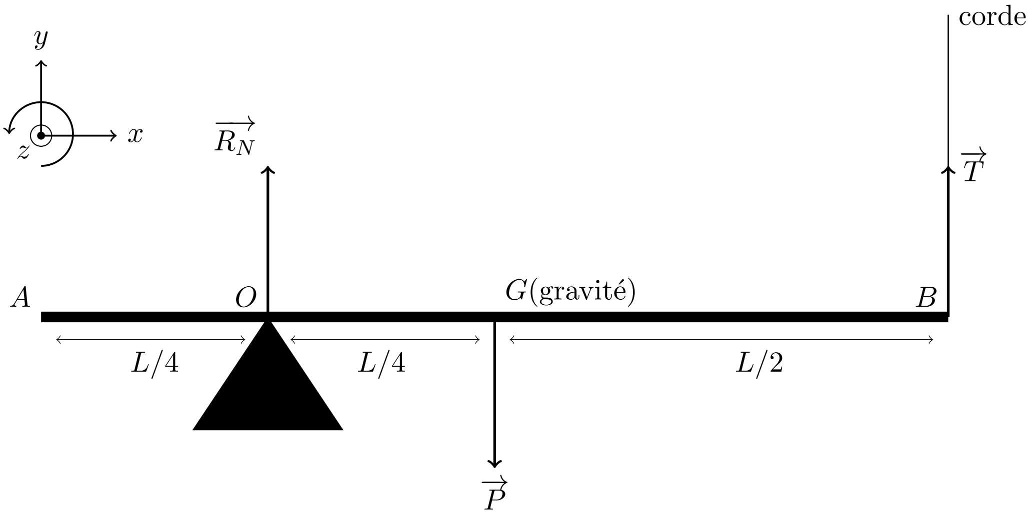
$$
\begin{aligned}
M_z(\overrightarrow{F_1}) &= 2Nm \\
M_z(\overrightarrow{F_2}) &= -12 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= -6\sqrt{3}Nm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_z &= M_z(\overrightarrow{F_1}) + M_z(\overrightarrow{F_2}) \\
&= 2 - 6\sqrt{3}Nm
\end{aligned}
$$

or $M_z < 0$

Donc la tige tournera dans le sens indirect (horaire)

3 Exo 2 :



3.1 1- Forces Exterieurs :

Poids : $\overrightarrow{P}$ (exercé par la Terre)
Tension : $\overrightarrow{T}$ (exercée par la corde)
Support : réaction $\overrightarrow{R}$ (force de contact)

3.2 2- Norme de la tension de T :

<u>Rappel :</u> $\begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0} \quad => \begin{cases} \sum \overrightarrow{F}x = 0 \\ \sum \overrightarrow{F}y = 0 \end{cases} \\ \sum \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F}_{ext}) = \overrightarrow{0} \quad => \sum M_z = 0 \end{cases}$

Dans l'exercice, les vecteurs sont orthogonaux, donc il n'y a pas de projections sur x.
Nous allons alors utiliser les moments($\sum M_0(\overrightarrow{F}_{ext})$).

(En gros, quand on regarde les vecteurs $\overrightarrow{R_N}$, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ du dessin, aucun de ces vecteurs ne sont orientées vers x, ils sont tous "droit" suivant l'axe des ordonnées, c'est pour ça que l'on ne prend)

<u>Calcul de T :</u>

Pour cela, il vaut mieux utiliser :

$\sum M_z(\overrightarrow{F}_{ext}) = 0 \quad \text{car } \overrightarrow{M}_z(R) = 0$
$=> M_z(\overrightarrow{T})_{(1)} + M_z(\overrightarrow{P})_{(2)} + M_z(\overrightarrow{R})_{(3)} = 0 \qquad \text{avec } (1) > 0,\ (2) < 0 \text{ et } (3) = 0$

Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
T \cdot OB - P \cdot OG &= 0 \\
T \times \frac{3L}{4} - P \times \frac{L}{4} &= 0 \\
\frac{L}{4}(3T - P) &= 0 \\
T &= P/3 \\
T &= \frac{100}{3} \simeq 33,3N
\end{aligned}
$$

3.3 3- Norme de la réaction de R

Calcul de R :

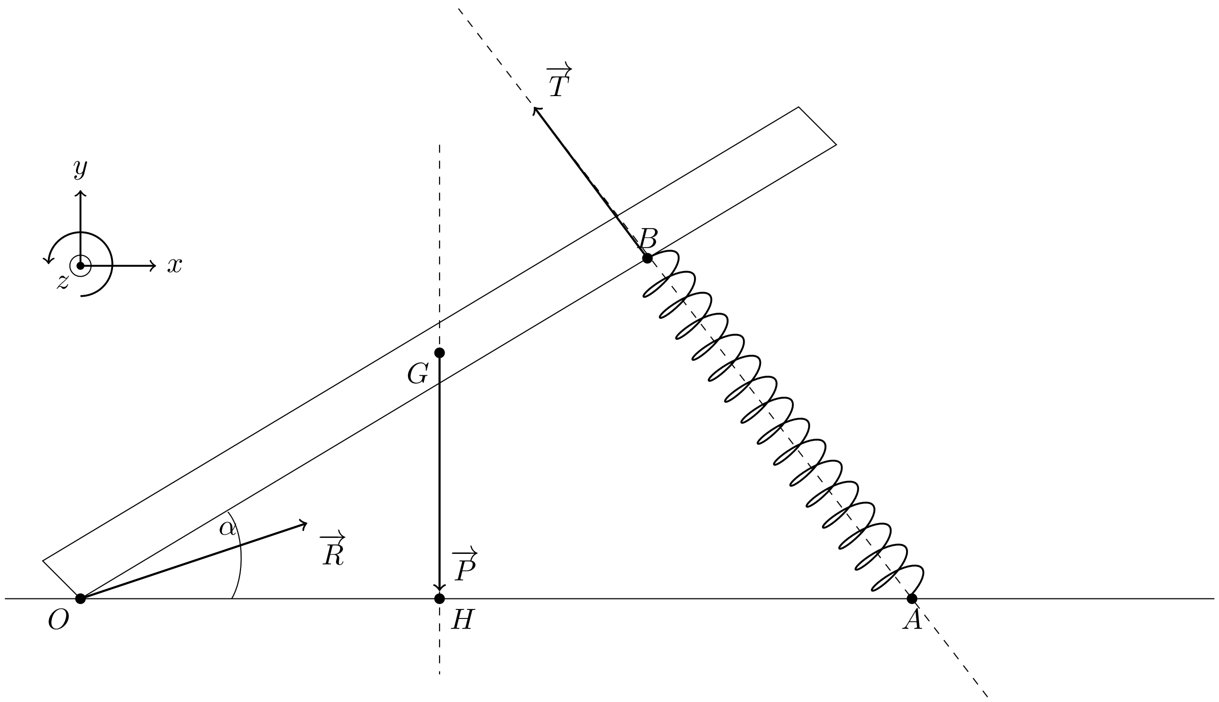
On utilise $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$

$$
\begin{cases}
\sum F_x = 0 + 0 + 0 = 0 \\
\sum F_y = R - P + T => 0
\end{cases}
$$

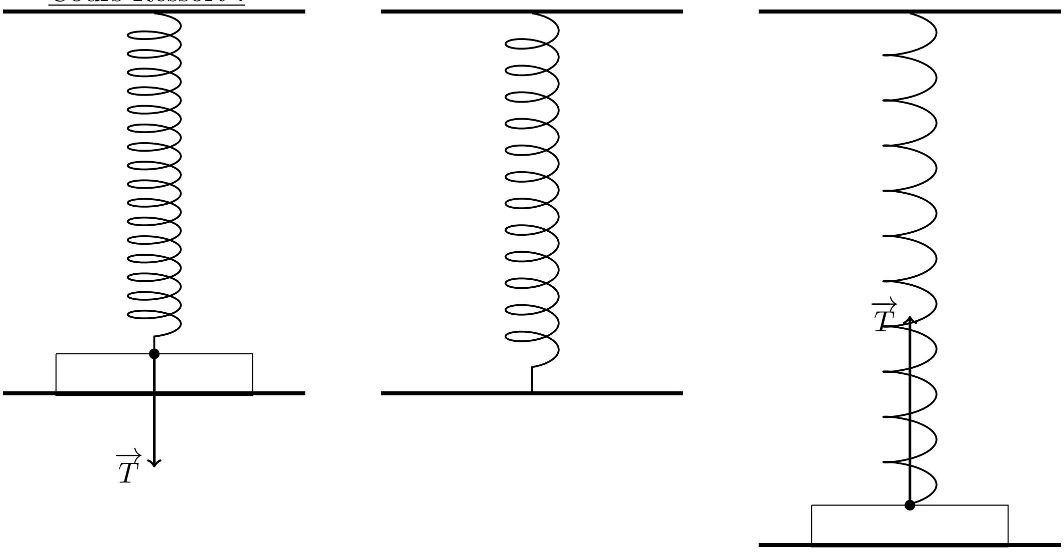
Donc :

$$
\begin{aligned}
R &= P - T \\
&= P - \frac{1}{3}P \quad \simeq 66,7N
\end{aligned}
$$

4 Exo 3 :



Cours Ressort :

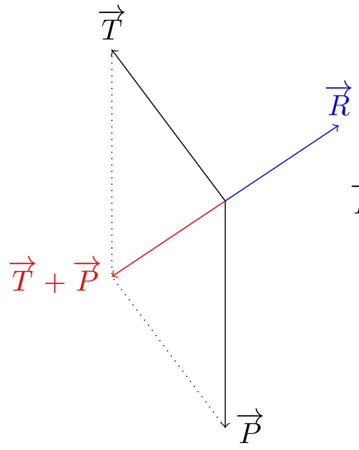


- Compression
- A vide
- Allongement

Construction du shéma :

-Ressort :
Pédale appuyée, ressort comprssé.

-Frottement sur O :
Se base sur l'équilibre pour que la pédale ne tombe pas.



$\overrightarrow{R}$: sens opposé de $\overrightarrow{T}+\overrightarrow{P}$.

4.1 2.1- Bilan des forces exterieurs appliquées à la pédale.

$\overrightarrow{P}$: Poids, système homogène donc au centre de la pédale.
$\overrightarrow{T}$: Force de Rappel.
$\overrightarrow{R}$: Force de contact en 0.

4.2 2.2- Calcules et quelque points sur la trigo

$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$ et $\sum \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F}_{ext}) = \overrightarrow{0}$

Soit :
$\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{R}) + \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{T}) + \overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{0}$
$0 \ + M_z(\overrightarrow{T}) + M_z(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{0}$

Sachant que $\overrightarrow{T}$ est dans le sens positif et $\overrightarrow{P}$ dans le sens négatif, on aura comme équation final :

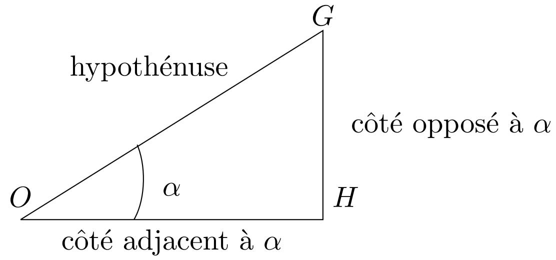
$(+)T\times$ dmin $+(-P\times$ dmin $= 0$.

Avec dmin les distances minimals qui séparent les droites associées aux vecteurs et O (expliqué ci-dessous).

Distance minimum et rappel de trigo :

Pour avoir la distance minimum (dmin), il faut avoir le chemin le plus court entre la droite d'action du vecteur que l'on veut et le centre de rotation.
Pour ca vous trouvez la perpendiculaire à la droite passant par le point.

D'où le petit rappel de trigo pour ceux qui en ont besoin.



Cah.Soh.Toa :
*$\cos(\alpha) = \frac{adjacent}{hypothenuse} \Longrightarrow \cos(\alpha) \times OG = OH$
*$\sin(\alpha) = \frac{oppose}{hypothenus} \Longrightarrow \sin(\alpha) \times OG = GH$
*$\tan(\alpha) = \frac{oppose}{adjacent}$

Donc si on reprend le shéma de base, on voit bien que pour le vecteur $\overrightarrow{T}$ on a pas besoin car OB est déjà la dmin.
Et pour $\overrightarrow{P}$ on suit les pointillés pour tombé sur H (on l'a nommé comme ca) et c'est la que l'on applique la trigo pour trouver la distance, dmin, OH.

Donc si on revient au calcul des données :

$$\begin{aligned} T \times dmin_T - P \times dmin_P &= 0 \\ T \times OB &= P \times OH \\ T \times OB &= P \times (OG \times \cos(\alpha)) \\ T &= \frac{P \times OG \times \cos(\alpha)}{OB} \end{aligned}$$

<u>Application numérique :</u>

$$\begin{aligned} T &= \frac{10_N \times 10_{cm}}{15_{cm}} \times \cos(45) \\ &= \frac{10_N \times (10_m \times 10^{-2})}{15_m \times 10^{-2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{100}{30} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{10}{3}\sqrt{2}N \end{aligned}$$

$$\frac{N \times m}{m} \Longrightarrow N$$

4.3 2.3-

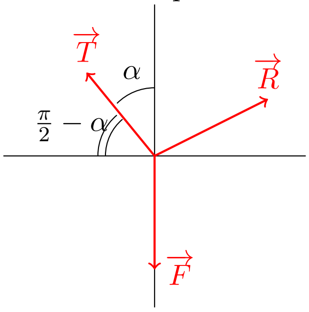
a/

$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$

$T\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$

$\Longrightarrow \begin{cases} Projection\ sur\ x \\ Projection\ sur\ y \end{cases}$

Donc si on reprend les vecteurs du shéma et qu'on les recentre au point O, on a :



Avec :

$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} -T\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\sin(\alpha) \\ T\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 1/\ 0 + R_x - T\sin(\alpha) = 0 \\ 2/\ \ -P + R_y + T\cos(\alpha) = 0 \end{cases}$

$1/\ R_x = T\sin(\alpha) \Longrightarrow \frac{10}{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{3}$

$2/R_y = P - T\cos(\alpha) \Longrightarrow 10 - \frac{10}{3}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$

b/

$\tan(\beta) = \frac{R_y}{R_x} \Longrightarrow \frac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{3}} = 2$

$\beta = \arctan(2) \simeq 63,4°$