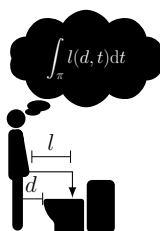


# TD : Polynômes

Julien BESTARD

Paul Dufour

Quentin Robert



GENTS DO IT WITH PRECISION

## Table des matières

0.1	Général . . . . .	3
0.2	Définition . . . . .	3
0.3	Division euclidienne . . . . .	3
0.4	Degré P et Q . . . . .	3
0.5	Equivalence . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Exercice 1 :</b>	<b>4</b>
1.1	Exercice 1.1 : . . . . .	4
1.2	Exercice 1.2 : . . . . .	4
1.3	Exercice 1.3 : . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Division euclidienne de polynômes :</b>	<b>5</b>
2.1	Exercice 2.4 : . . . . .	5
2.2	Exercice 2.6 : . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Racines et factorisations</b>	<b>7</b>
3.1	Exercice 3.7 . . . . .	7
3.2	Exercice 3.8 . . . . .	8
3.3	Exercice 3.9 . . . . .	8
3.4	Exercice 3.10 : . . . . .	9
3.5	Exercice 3.11 : . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Theorème de d'Alembert-Gauss :</b>	<b>12</b>
4.1	Exercice 4.12 : . . . . .	12

# Cours

## 0.1 Général

$\mathbb{K}[X] \Rightarrow$  polynômes à coefficient dans  $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$  peut prendre ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{R}_2[X] = \{a_1X^2 + a_2X + a_3; (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}\}$$

Soit  $P(X) \in \mathbb{R}[X]$  :

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$  avec  $a_n \neq 0$  est une polynôme de degré  $n$

## 0.2 Définition

Soit  $P(X) \in \mathbb{R}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

On dit que  $\alpha$  est une racine (zéro) de  $P(X)$ , si  $P(\alpha) = 0$

## 0.3 Division euclidienne

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  et  $B \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$ , la division euclidienne de A par B si et seulement si  $\exists!(q, r) \in \mathbb{K}[X] A = q \times B + r$  avec  $\deg(r) < \deg(B)$

## 0.4 Degré P et Q

1.  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
2.  $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

## 0.5 Equivalence

Soit  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$

$$(X - a) | P \iff P(a) = 0$$

$$(X - a)^2 | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0$$

$$(X - a)^3 | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) = 0$$

$$(X - a)^{(n)} | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) = 0 \text{ et } \dots \text{ et } P^{(n-1)}(a) = 0$$

## 1 Exercice 1 :

### 1.1 Exercice 1.1 :

Soit  $P$  un polynôme de degré  $m$ , alors  $\exists(a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$

$$P(X) = a_m X^m + \dots + a_1 X + a_0, a_m \neq 0$$

Pour  $Q$  un polynôme de degré  $n$ , alors  $\exists(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$Q(X) = b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0 \text{ avec } b_n \neq 0$$

On a,

$$n \leq m \iff n < m \text{ ou } n = m$$

$$\deg(P + Q) = m \iff n < m \text{ ou dans le cas où } n = m : \text{ on prend } a_m + b_n \neq 0$$

$$a_m \neq -b_n$$

### 1.2 Exercice 1.2 :

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ , alors  $\exists(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0, a_n \neq 0$$

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + \dots + a_1$$

$$P''(X) = n(n-1) a_n X^{n-2} + \dots + 2a_2$$

$$\Downarrow$$

$$P^{(n)}(X) = a_n n(n-1) \times \dots \times 1 = a_n n!$$

$$P^{(n)}(X) = a_n n!$$

$$(De \text{ haut en bas on dérive } \iff De \text{ bas en haut on primitive})$$

### 1.3 Exercice 1.3 :

Soit  $P$  un polynôme.

$P^{(n)}(2) = 0 \iff P$  est de degré 2 et est de la forme :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

$$P'(X) = 2aX + b$$

$$P''(X) = 2a$$

Or, on a :

$$\begin{cases} P(2) = 6 \\ P'(2) = 1 \\ P''(2) = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2^2 a + 2b + c = 6 \\ 2 \times 2a + b = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \times 2 + 2b + c = 6 \\ 4 \times 2 + b = 1 \\ 2 \times 2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 2 \times (-7) + c = 6 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 12 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P = 2X^2 - 7X + 12$$

## 2 Division euclidienne de polynômes :

### 2.1 Exercice 2.4 :

Division euclidienne de  $2X^4 - X^2 + X - 5$  par  $X^2 + X - 2$

$$\begin{array}{r}
 2X^4 \qquad - X^2 + X - 5 \mid X^2 + X - 2 \\
 \underline{- 2X^4 - 2X^3 + 4X^2} \qquad \qquad \qquad \mid 2X^2 - 2X + 5 \\
 \qquad - 2X^3 + 3X^2 + X \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \underline{2X^3 + 2X^2 - 4X} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad 5X^2 - 3X - 5 \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \underline{- 5X^2 - 5X + 10} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \qquad - 8X + 5 \qquad \qquad \qquad \mid
 \end{array}$$

Donc on a  $2X^4 - X^2 + X - 5 = (X^2 + X - 2)(2X^2 - 2X + 5) - 8X + 5$

Division euclidienne de  $X^3 + X + 1$  par  $2X + 1$

$$\begin{array}{r}
 X^3 \qquad + X + 1 \mid 2X + 1 \\
 \underline{- X^3 - \frac{1}{2}X^2} \qquad \qquad \qquad \mid \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{5}{8} \\
 \qquad - \frac{1}{2}X^2 + X \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \underline{\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}X} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \frac{5}{4}X + 1 \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \underline{- \frac{5}{4}X - \frac{5}{8}} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{3}{8} \qquad \qquad \qquad \mid
 \end{array}$$

Donc on a  $X^3 + X + 1 = (2X + 1) \left( \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{5}{8} \right) + \frac{3}{8}$

**2.2 Exercice 2.6 :**

Division euclidienne de  $X^4 + 2X^3 + X$  par  $X^2 + 1$

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 2X^3 \quad + X \quad \left| \begin{array}{l} X^2 + 1 \\ X^2 + 2X - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{- X^4 \quad - X^2} \phantom{+ X} \\
 2X^3 - X^2 \quad + X \\
 \underline{- 2X^3 \quad - 2X} \\
 - X^2 - X \\
 \phantom{- X^2 - X} \underline{X^2 \quad + 1} \\
 \phantom{- X^2 - X} - X + 1
 \end{array}$$

Donc on a  $X^4 + 2X^3 + X = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X - 1$

D'après la question (1), on a :

$$X^4 + 2X^3 + X = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X - 1$$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X}{X^2 + 1} = \frac{(X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X - 1}{X^2 + 1}$$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X}{X^2 + 1} = X^2 + 2X - 1 - \frac{X + 1}{X^2 + 1}$$

Ainsi,  $\int \frac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1} dx = \int x^2 + 2x - 1 - \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx$

Or  $\int x^2 + 2x - 1 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{-x + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{-x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{-x + 1}{x^2 + 1} dx = \frac{-1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Donc  $\int \frac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$

### 3 Racines et factorisations

#### 3.1 Exercice 3.7

1. Division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)$  :

$\exists!(q(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2, P(X) = (X - a)q(X) + r(X)$  avec  $\deg(r(X)) < 1$   
donc  $r(X) = \text{constante} = c, c \in \mathbb{K}$

2.  $(\Rightarrow) (X - a) | P \Rightarrow \exists k(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X - a)k(X)$   
donc  $P(a) = (a - a)k(a) = 0$

$(\Leftarrow)$  Soit  $P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0$ , d'après la question (1), on a :

$$P(X) = (X - a)q(X) + c$$

$$\text{Ainsi } P(a) = 0 \iff (a - a)q(a) + c = 0$$

$$\iff c = 0$$

$$\text{Donc, } P(X) = (X - a)q(X)$$

$$\text{Ainsi, } (X - a) | P(X)$$

3.  $(\Rightarrow)$  Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$   
 $(X - a)(X - b) | P \Rightarrow \exists k(x) \in \mathbb{R}[X], P(X) = (X - a)(X - b)k(x)$

$$\left. \begin{array}{l} P(a) = (a - a)(a - b)k(a) = 0 \\ P(b) = (b - a)(b - b)k(b) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{donc } P(a) = P(b) = 0$$

$(\Leftarrow)$  On applique la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$

$$\exists!(k(x), r(x)) \in \mathbb{R}[X]^2, P(X) = (X - a)(X - b)k(X) + r(x) \text{ avec } \deg(r(X)) < 2$$

$$r(x) = c_1X + c_2 \text{ avec } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Donc : } P(X) = (X - a)(X - b)k(X) + c_1X + c_2$$

$$\text{Ainsi } (X - a)(X - b) | P \iff r(X) = 0$$

$$\iff c_1 = c_2 = 0$$

$$\bullet P(a) = 0 \iff (a - a)(a - b)k(a) + c_1a + c_2 = 0$$

$$\bullet P(b) = 0 \iff c_1b + c_2 = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} c_1 a + c_2 = 0 \\ c_1 b + c_2 = 0 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} c_1 a + c_2 = 0 \\ c_1 a - c_1 b = 0 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} c_1 a + c_2 = 0 \\ c_1 a = c_1 b \end{array} \right. \quad \text{or } a \neq b \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } r(X) = 0 \Rightarrow P(X) = (X - a)(X - b)k(X) \Rightarrow (X - a)(X - b) \mid P$$

### 3.2 Exercice 3.8

Soit  $P(X) = X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$

1. Montrons que  $\sqrt{3}$  est l'unique racine réelle de  $P$

$$\begin{aligned}
 P(\sqrt{3}) &= (\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
 &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
 &= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
 &= 0 \\
 &\iff \sqrt{3} \text{ racine de } P \iff (X - \sqrt{3}) \mid P \\
 P(X) &= (X - \sqrt{3})k(X)
 \end{aligned}$$

Division euclidienne de  $X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$  par  $X - \sqrt{3}$  :

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 + 3X - 6\sqrt{3} & X - \sqrt{3} \\
 \hline
 & X^2 + \sqrt{3}X + 6
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(X) &= (X - \sqrt{3})(X^2 + \sqrt{3}X + 6) \\
 \Delta(X^2 + \sqrt{3}X + 6) &= -21 < 0 \text{ donc } X^2 + \sqrt{3}X + 6 \text{ est irréductible dans } \mathbb{R} \\
 \text{Donc } \sqrt{3} &\text{ est l'unique racine réelle de } P
 \end{aligned}$$

### 3.3 Exercice 3.9

$$\begin{aligned}
 1. \quad X^2 + 2X = 0 &\iff X(X + 2) = 0 \\
 &\iff X = 0 \text{ ou } X = -2
 \end{aligned}$$

D'après l'exercice 3.7, on a :

$$X^2 + 2X \mid P \iff P(0) = (P - 2) = 0$$

- $P(0) = (0 + 1)^{2n} - 1 = 0$
- $P(-2) = (-2 + 1)^{2n} - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 0$



2. On pose  $Q(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  :  
 $Q(1) = n - (n+1) + 1 = 0$   
 $Q'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$   
 $Q'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$  Donc  $(X-1)^2 | Q(X)$

3. On pose  $P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$   
 $P(1) = n1^{n+2} - (n+2) \times 1^{n+1} + (n+2) - n = 0$

Donc 1 est racine du polynôme.

$$P'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+1)(n+2)X^n + (n+2)$$

$$P'(1) = n(n+2) - (n+1)(n+2) + (n+2)$$

$$P''(X) = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$$

$$P''(1) = n(n+1)(n+2) - n(n+1)(n+2) = 0$$

$$P^{(3)}(X) = n^2(n+1)(n+2)X^{n-1} - (n+1)n(n+1)(n+2)X^{n-2}$$

$$P^{(3)}(1) = n^2(n+1)(n+2) - (n+1)n(n+1)(n+2)$$

$$= n(n+1)(n+2)(n-n+1)$$

$$= n(n+1)(n+2)$$

Or  $n \geq 2$

Donc  $P^{(3)}(1) \neq 0$

Donc la multiplicité de  $P$  est de 3

### 3.4 Exercice 3.10 :

1. La division euclidienne de  $Q(X)$  par  $(X-2)(X-1)$   
 $\exists! (k(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2$ ,  $Q(X) = (X-2)(X-1) \times k(X) + r(X)$  avec  $\deg(r(X)) < 2$ .  
 $r(X)$  est de la forme  $AX + B$  avec  $(A, B) \in \mathbb{K}^2$ .

$$\begin{cases} Q(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 \\ Q(X) = (X-2)(X-1) \times k(X) + AX + B \end{cases}$$

Pour  $X = 1$ , on a :

$$\begin{cases} Q(1) = (1-2)^{2n} + (1-1)^n - 2 \Rightarrow -1 \\ Q(1) = (1-2)(1-1) \times k(1) + A \times 1 + B \Rightarrow A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \end{cases}$$

Pour  $X = 2$ , on a :

$$\begin{cases} Q(2) = -1 \\ Q(2) = 2A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + B = -1 \end{cases}$$

On a alors,

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 0 \end{cases}$$

Le reste de la division euclidienne de  $Q(X)$  par  $(X-2)(X-1)$  est  $R(X) = AX + B = -1$ .

2. La division euclidienne de  $Q(X)$  par  $(X-1)^2$

$\exists!(k(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2, Q(X) = (X-1)^2 \times k(X) + r(X)$  avec  $\deg(r(X)) < 2$ .

$r(X)$  est de la forme  $AX + b$  avec  $(A, B) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{cases} Q(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 \\ Q(X) = (X-1)^2 \times k(X) + AX + B \end{cases}$$

Pour  $X = 1$ , on a :

$$\begin{cases} Q(1) = -1 \\ Q(1) = A + B \end{cases} \implies \begin{cases} A + B = -1 \end{cases}$$

Pour  $Q'(X)$ , on a :

$$\begin{cases} Q'(X) = 2n(X-2)^{2n-1} + n(X-1)^{n-1} \\ Q'(X) = 2(X-1) \times k(X) + (X+1)^2 \times k'(X) + A \end{cases}$$

Pour  $X = 1$ , on alors,

$$\begin{cases} Q'(1) = 2n(1-2)^{2n-1} + n(1-1)^{n-1} \Rightarrow -2n \\ Q'(1) = A \end{cases} \implies \begin{cases} A = -2n \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} A = -2n \\ A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2n \\ B = -1 + 2n \end{cases}$$

Donc le reste de la division euclidienne de  $Q(X)$  par  $(X-1)^2$  est  $r(x) = AX + B = -2nX - 1 + 2n$

### 3.5 Exercice 3.11 :

Soit  $P(X)$  un polynôme de degré 3, on a :

$$P(X) = X^3 + AX^2 + BX + C, (A, B, C) \in \mathbb{K}^3$$

$$(X-1)|P \iff P(1) = 0$$

$$\iff 1 + A + B + C = 0$$

$$\exists k(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-2)k(X) + R$$

$$\exists k_1(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-3)k(X) + R \quad \text{avec } R \in \mathbb{K}$$

$$\exists k_2(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-4)k(X) + R$$

$$\begin{cases} 1 + A + B + C = 0 \\ P(2) = R \\ P(3) = R \\ P(4) = R \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + A + B + C = 0 \\ 8 + 4A + 2B + C = R \\ 27 + 9A + 3B + C = R \\ 64 + 16A + 4B + C = R \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 + A + B + C = 0 \\ 8 + 4A + 2B + C = R \\ 37 + 7A + B = R \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} R &= 6 \\ A &= -9 \\ B &= 26 \\ C &= -18 \end{cases}$$

Donc  $P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 18$



2) b)

$$\begin{aligned} \text{On a } Q(2) = Q(-2) = 0 &\iff (X-2)(X+2) \mid P \\ &\iff \exists k(X) \in \mathbb{R}[X], Q(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4 \end{aligned}$$

A l'aide de la division euclidienne, on calcule  $k(x)$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4 & X^2 - 4 \\ -X^4 & +4X^2 \\ \hline -2X^3 & +X^2 + 8X \\ 2X^3 & -8X \\ \hline & X^2 - 4 \\ & -X^2 + 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$Q(X) = (X-2)(X+2)(X^2 - 2X + 1) = (X-2)(X+2)(X-1)^2$  qui est irréductible sur  $\mathbb{R}[X]$