Moment des forces-Equilibre

Quentin ROBERT

Gents Do It With Precision

Table des matières

1 Cours

1.1 Outils Mathématiques / Rappel

<u>Produit scalaire :</u>
<u>Notions :</u>

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} &= \overrightarrow{V_1}\ scalaire\ \overrightarrow{V_2} \\ &= scalaire\ \mathbb{R}\end{aligned}$$

Définition:

$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} \; = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| \times \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| \times \cos(\alpha)$

- si $\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 0$ soit que : $\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2}$
- si $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2} \iff \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} > 0$
- $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi \iff \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} < 0$

Définition: En fonction des coordonnées $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} &= \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{pmatrix} \\ &= V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{1y} + V_{1z} \cdot V_{2z}\end{aligned}$$

<u>Produit vectoriel :</u>
<u>Notions :</u>

$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3}(\overrightarrow{V_1}$ vectoriel $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3})$

Définition:

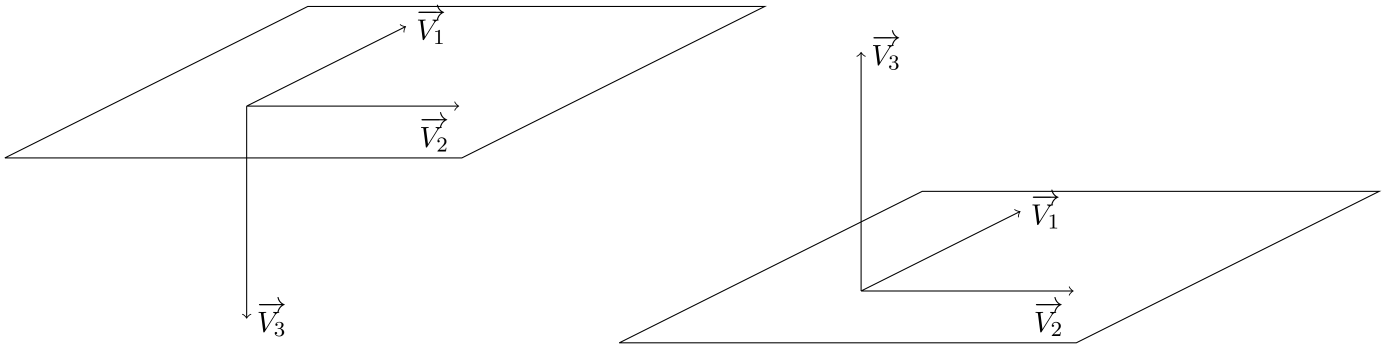
Norme de $\overrightarrow{V_3}$ avec $\alpha = (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$

$\overrightarrow{V_3} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| \times \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| \times |\sin(\alpha)|$

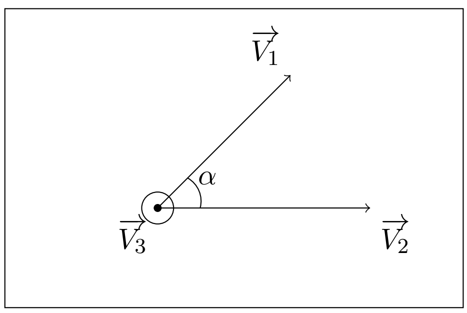
- si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi \iff \sin(\alpha) = 0$
  $\iff \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0}$
- si $\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\| =$ norme maximale.

Propriété :

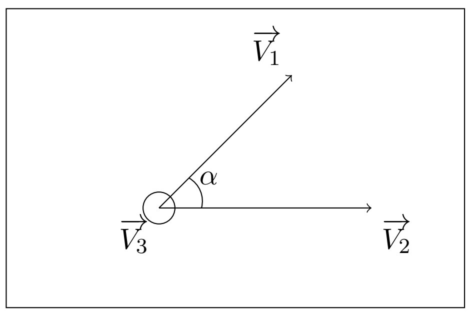
- $\overrightarrow{V_3}$ est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.
- $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ forme un trièdre direct.



$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$



$\overrightarrow{V_3}$ sortant.



$\overrightarrow{V_3}$ entrant

Définition: Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{V_3}$

Calculs en fonction de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$: (Règle du gamma)

$$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} \Longrightarrow \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{3x} = V_{1y} \cdot V_{2z} - V_{1z} \cdot V_{2y} \\ V_{3y} = V_{1z} \cdot V_{2x} - V_{1x} \cdot V_{2z} \\ V_{3z} = V_{1x} \cdot V_{2y} - V_{1y} \cdot V_{2x} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \overrightarrow{V_3} \right\| = \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2 + V_{3z}^2}$$

1.2 Moment des forces-Equilibres

Définition:

Moment d'une force par rapport à un point O :

$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A})$ avec O centre de rotation et A point d'application.

$\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A}$

Si $\overrightarrow{F}$ n'a aucun effet de rotation sur le système, alors $\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{O}$

Si $\overrightarrow{F}$ a une droite d'action coupant l'axe de rotation, alors $\overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{O}$

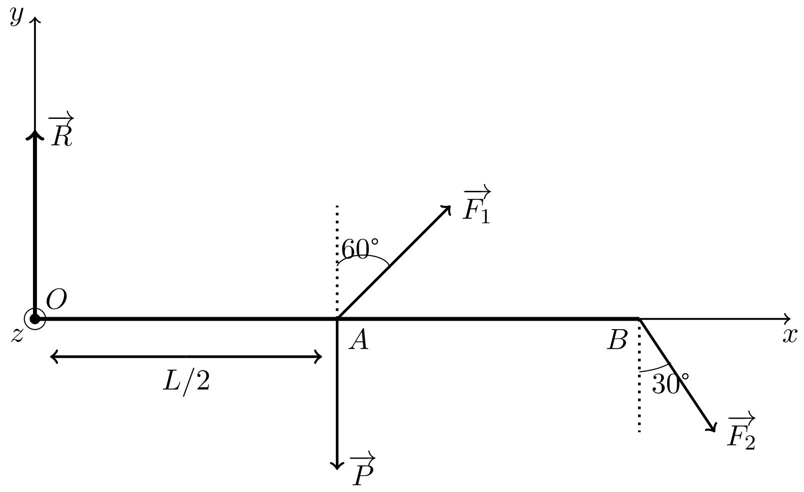
Condition d'équilibre de translation :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$

Condition d'équilibre de rotation :

$\sum \overrightarrow{M}_{/O}(\overrightarrow{F_A}) = \overrightarrow{0}$

2 Exo 1 :



2.1 1-

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{/O}\overrightarrow{(F_1)} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_1} \\
&= \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \sin(60) \\ F_1 \cos(60) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \times 0 - 0 \times F_1 \cos(60) \\ 0 \times F_1 \sin(60) - L/2 \times 0 \\ L/2 \times F_1 \cos(60) - 0 \times F_1 \sin(60) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \times F_1 \cos(60) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} M_x(\overrightarrow{F_1}) \\ M_y(\overrightarrow{F_1}) \\ M_z(\overrightarrow{F_1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc $M_z(\overrightarrow{F_1}) = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{2} = 2\text{Nm}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{/O}\overrightarrow{(F_2)} &= \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_2} \\
&= \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_2 \sin(30) \\ -F_2 \cos(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_2 \times L \cos(30) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc $M_z(\overrightarrow{F_2}) = (-12) \times 1 \times \cos(30) = (-12) \times \cos(30)\text{Nm}$

2.2 2- Application Numérique

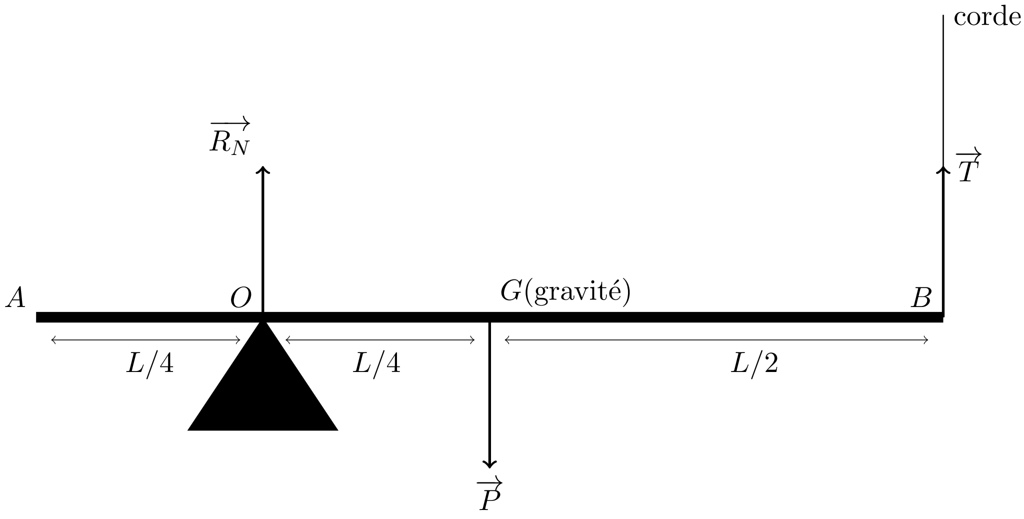
$$\begin{aligned}
M_z(\overrightarrow{F_1}) &= 2Nm \\
M_z(\overrightarrow{F_2}) &= -12 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= -6\sqrt{3}Nm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_z &= M_z(\overrightarrow{F_1}) + M_z(\overrightarrow{F_2}) \\
&= 2 - 6\sqrt{3}Nm
\end{aligned}$$

or $M_z < 0$

Donc la tige tournera dans le sens indirect (horaire)

3 Exo 2 :



3.1 1- Forces Exterieurs :

Poids : $\overrightarrow{P}$ (exercé par la Terre)
Tension : $\overrightarrow{T}$ (exercée par la corde)
Support : réaction $\overrightarrow{R}$ (force de contact)

3.2 2- Norme de la tension de T :

Rappel : $\begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0} \quad => \begin{cases} \sum \overrightarrow{F}x = 0 \\ \sum \overrightarrow{F}y = 0 \end{cases} \\ \sum \overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{F}_{ext}) = \overrightarrow{0} \quad => \sum M_z = 0 \end{cases}$

Dans l'exercice, les vecteurs sont orthogonaux, donc il n'y a pas de projections sur x.
Nous allons alors utiliser les moments($\sum M_0(\overrightarrow{F}_{ext})$).

(En gros, quand on regarde les vecteurs $\overrightarrow{R_N}$, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ du dessin, aucun de ces vecteurs ne sont orientées vers x, ils sont tous "droit" suivant l'axe des ordonnées, c'est pour ça que l'on ne prend)

Calcul de T :

Pour cela, il vaut mieux utiliser :

$\sum M_z(\overrightarrow{F}_{ext}) = 0$ car $\overrightarrow{M}_z(R) = 0$
$=> M_z(\overrightarrow{T})_{(1)} + M_z(\overrightarrow{P})_{(2)} + M_z(\overrightarrow{R})_{(3)} = 0$ avec $(1) > 0$, $(2) < 0$ et $(3) = 0$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
T \cdot OB - P \cdot OG &= 0 \\
T \times \frac{3L}{4} - P \times \frac{L}{4} &= 0 \\
\frac{L}{4}(3T - P) &= 0 \\
T &= P/3 \\
T &= \frac{100}{3} \simeq 33,3N
\end{aligned}$$

3.3 3- Norme de la réaction de R

Calcul de R :

On utilise $\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 + 0 + 0 = 0 \\ \sum F_y = R - P + T => 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
R &= P - T \\
&= P - \frac{1}{3}P \quad \simeq 66,7N
\end{aligned}$$