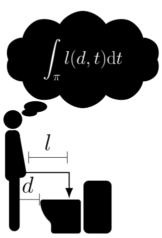
TD : Polynômes

Julien BESTARD
Paul Dufour
Quentin Robert



Gents Do It With Precision

Table des matières

Cours

0.1 Général

$\mathbb{K}[X] \Rightarrow$ polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}$ peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}_2[X] = \{a_1X^2 + a_2X + a_3; (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}\}$

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$:
$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$ est une polynôme de degre n

0.2 Définition

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
On dit que α est une racine (zéro) de $P(X)$, si $P(\alpha) = 0$

0.3 Division euclidienne

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de A par B si et seulement si $\exists!(q, r) \in \mathbb{K}[X]$ $A = q \times B + r$ avec $deg(r) < deg(B)$

0.4 Degré P et Q

1. $deg(P + Q) \leqslant max(deg(P), deg(Q))$
2. $deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$

0.5 Equivalence

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$

$(X - a)|P \iff P(a) = 0$

$(X - a)^2|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$

$(X - a)^3|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$ et $P''(a) = 0$

$(X - a)^{(n)}|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$ et $P''(a) = 0$ et ... et $P^{(n-1)} = 0$

1 Exercice 1 :

1.1 Exercicie 1.1 :

Soit P un polynôme de degré m, alors $\exists(a_0, a_1, .., a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$

$P(X) = a_m X^m + .. + a_1 X + a_0, a_m \neq 0$

Pour Q un polynôme de degré n, alors $\exists(b_0, b_1, .., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$Q(X) = b_n X^n + .. + b_1 X + b_0$ avec $b_n \neq 0$

On a,

$n \leq m \iff n < m$ ou $n = m$

$\deg(P+Q) = m \iff n < m$ ou dans le cas où $n = m$: on prend $a_m + b_n \neq 0$

$a_m \neq -b_n$

1.2 Exercice 1.2 :

Soit P un polynôme de degré n, alors $\exists(a_0, a_1, .., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0, a_n \neq 0$

$P'(X) = n a_n X^{n-1} + ... + a_1$

$P''(X) = n(n-1) a_n X^{n-2} + ... + 2a_2$

$\Downarrow$

$P^{(n)}(X) = a_n n(n-1) \times ... \times 1 = a_n n!$

$P^{(n)}(X) = a_n n!$

(De haut en bas on dérive $\iff$ De bas en haut on primitive)

1.3 Exercice 1.3 :

Soit P un polynôme.

$P^{(n)}(2) = 0 \iff P$ est de degré 2 et est de la forme :

$P(X) = aX^2 + bX + c$

$P'(X) = 2aX + b$

$P''(X) = 2a$

Or, on a :

$$\begin{cases} P(2) = & 6 \\ P'(2) = & 1 \\ P''(2) = & 4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2^2 a + 2b + c = & 6 \\ 2 \times 2a + b = & 1 \\ 2a = & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \times 2 + 2b + c = & 6 \\ 4 \times 2 + b = & 1 \\ 2 \times 2 = & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 2 \times (-7) + c = & 6 \\ b = & -7 \\ a = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = & 2 \\ b = & -7 \\ c = & 12 \end{cases}$$

Donc $P = 2X^2 - 7X + 12$

2 Division euclidienne de polynômes :

2.1 Exercice 2.4 :

Division euclidienne de $2X^4 - X^2 + X - 5$ par $X^2 + X - 2$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2X^4 & & -X^2 & +X & -5 & X^2+X-2 \\ \cline{6-6}
-2X^4 & -2X^3 & +4X^2 & & & 2X^2-2X+5 \\ \cline{1-3}
 & -2X^3 & +3X^2 & +X & & \\
 & 2X^3 & +2X^2 & -4X & & \\ \cline{2-4}
 & & 5X^2 & -3X & -5 & \\
 & & -5X^2 & -5X & +10 & \\ \cline{3-5}
 & & & -8X & +5 &
\end{array}
$$

Donc on a $2X^4 - X^2 + X - 5 = (X^2 + X - 2)(2X^2 - 2X + 5) - 8X + 5$

Division euclidienne de $X^3 + X + 1$ par $2X + 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & & +X & +1 & 2X+1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & -\frac{1}{2}X^2 & & & \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{5}{8} \\ \cline{1-2}
 & -\frac{1}{2}X^2 & +X & & \\
 & \frac{1}{2}X^2 & +\frac{1}{4}X & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{5}{4}X & +1 & \\
 & & -\frac{5}{4}X & -\frac{5}{8} & \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{3}{8} &
\end{array}
$$

Donc on a $X^3 + X + 1 = (2X + 1)\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{5}{8}\right) + \frac{3}{8}$

2.2 Exercice 2.6 :

Division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + X$ par $X^2 + 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^4 & +2X^3 & & +X & X^2+1 \\
-X^4 & & -X^2 & & \overline{X^2+2X-1} \\
\hline
 & 2X^3 & -X^2 & +X & \\
 & -2X^3 & & -2X & \\
\hline
 & & -X^2 & -X & \\
 & & X^2 & +1 & \\
\hline
 & & & -X+1 &
\end{array}
$$

Donc on a $X^4 + 2X^3 + X = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X + 1$

D'après la question (1), on a :

$X^4 + 2X^3 + X = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X + 1$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X}{X^2 + 1} = \frac{(X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X + 1}{X^2 + 1}$$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X}{X^2 + 1} = X^2 + 2X - 1 - \frac{X + 1}{X^2 + 1}$$

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int x^2 + 2x - 1 - \int -\frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

Or $\displaystyle\int x^2 + 2x - 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan(x) + c \text{ , avec } c \in \mathbb{R}$$

Donc $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

3 Racines et factorisations

3.1 Exercice 3.7

1. Division euclidienne de P par $(X-a)$:

   $\exists!(q(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2, P(X) = (X-a)q(X) + r(X)$ avec $deg(r(X)) < 1$
   donc $r(X) = constante = c\,,\ c \in \mathbb{K}$

2. ($\Rightarrow$) $(X-a)|P \Rightarrow \exists k(X) \in \mathbb{K}[X]\,,\ P(X) = (X-a)k(X)$
   donc $P(a) = (a-a)k(a) = 0$

   ($\Leftarrow$) Soit $P \in \mathbb{K}[X],\ P(a) = 0$, d'après la question (1), on a :
   $P(X) = (X-a)q(X) + c$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } P(a) = 0 &\iff (a-a)Q(X) + c = 0 \\ &\iff c = 0 \end{aligned}$$

   Donc, $P(X) = (X-a)q(X)$

   Ainsi, $(X-a)|P(X)$

3. ($\Rightarrow$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
   $(X-a)(X-b)|P \Rightarrow \exists k(x) \in \mathbb{R}[X]\,, P(X) = (X-a)(X-b)k(x)$

   $$\left.\begin{array}{rcl} P(a) &=& (a-a)(a-b)k(a) = 0 \\ P(b) &=& (b-a)(b-b)k(b) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{donc } P(a) = P(b) = 0$$

   ($\Leftarrow$) On applique la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$
   $\exists!(k(x), r(x)) \in \mathbb{R}[X]^2\,, P(X) = (X-a)(X-b)k(X) + r(x)$ avec $deg(r(X)) < 2$
   $r(x) = c_1X + c_2$ avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$
   Donc : $P(X) = (X-a)(X_b)k(X) + c_1X + c_2$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } (X-a)(X-b)|P &\iff r(X) = 0 \\ &\iff c_1 = c_2 = 0 \end{aligned}$$

   - $P(a) = 0 \iff (a-a)(a-b)k(a) + c_1a + c_2 = 0$
   - $P(b) = 0 \iff c_1b + c_2 = 0$

On a donc :

$$\begin{cases} c_1a + c_2 = 0 \\ c_1b + c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1a + c_2 = 0 \\ c_1a - c_1b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1a + c_2 = 0 \\ c_1a = c_1b \end{cases} \quad \text{or } a \neq b$$

$$\iff \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

D'où $r(X) = 0 \Rightarrow P(X) = (X-a)(X-b)k(X) \Rightarrow (X-a)(X-b)|P$

3.2 Exercice 3.8

Soit $P(X) = X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$

1. Montrons que $\sqrt{3}$ est l'unique racine réelle de P

$$\begin{aligned} P(\sqrt{3}) &= (\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 0 \\ &\iff \sqrt{3} \text{ racine de } P \iff (X - \sqrt{3})|P \\ & P(X) = (X-\sqrt{3})k(X) \end{aligned}$$

Division euclidienne de $X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$ par $X - \sqrt{3}$:

$$\begin{array}{l|l} X^3 + 3X - 6\sqrt{3} & X - \sqrt{3} \\ \hline & X^2 + \sqrt{3}X + 6 \end{array}$$

$\Rightarrow P(X) = (X - \sqrt{3})(X^2 + \sqrt{3}X + 6)$

$\Delta(X^2 + \sqrt{3}X + 6) = -21 < 0$ donc $X^2 + \sqrt{3}X + 6$ est irréductible dans $\mathbb{R}$

Donc $\sqrt{3}$ est l'unique racine réelle de P

3.3 Exercice 3.9

1. $X^2 + 2X = 0 \iff X(X+2) = 0$
   $\iff X = 0$ ou $X = -2$

   D'après l'exercice 3.7, on a :
   $X^2 + 2X|P \iff P(0) = P(-2) = 0$

   - $P(0) = (0+1)^{2n} - 1 = 0$
   - $P(-2) = (-2+1)^{2n} - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 0$

2. On pose $Q(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$:
   $Q(1) = n - (n+1) + 1 = 0$
   $Q'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$
   $Q'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$ Donc $(X-1)^2 | Q(X)$

3. On pose $P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$
   $P(1) = n1^{n+2} - (n+2) \times 1^{n+2} + (n+1) - n = 0$

   Donc 1 est racine du polynôme.

   $P'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+1)(n+2)X^n + (n+2)$
   $P'(1) = n(n+2) - (n+1)(n+2) + (n+2) = 0$
   $P''(X) = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$
   $P''(1) = n(n+1)(n+2) - n(n+1)(n+2) = 0$
   $P^{(3)}(X) = n^2(n+1)(n+2)X^{n-1} - (n+1)n(n+1)(n+2)X^{n-2}$
   $$\begin{aligned} P^{(3)}(1) &= n^2(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)(n-n+1) \\ &= n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$
   Or $n \geqslant 2$
   Donc $P^{(3)}(1) \neq 0$
   Donc la multiplicité de P est de 3

3.4 Exercice 3.10 :

1. La division euclidenne de $Q(X)$ par $(X-2)(X-1)$

   $\exists!\ (k(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2$, $Q(X) = (X-2)(X-1) \times k(X) + r(X)$ avec $deg(r(X)) < 2$.
   $r(X)$ est de la forme $AX + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$.
   $$\begin{cases} Q(X) = & (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 \\ Q(X) = & (X-2)(X-1) \times k(X) + AX + B \end{cases}$$
   Pour $X = 1$, on a :
   $$\begin{cases} Q(1) = & (1-2)^{2n} + (1-1)^n - 2 \Rightarrow -1 \\ Q(1) = & (1-2)(1-1) \times k(1) + A \times 1 + B \Rightarrow A + B \end{cases} \Longrightarrow \left\{ A + B = -1 \right.$$
   Pour $X = 2$, on a :
   $$\begin{cases} Q(2) = & -1 \\ Q(2) = & 2A + B \end{cases} \Longrightarrow \left\{ 2A + B = -1 \right.$$
   On a alors,
   $$\begin{cases} A + B = & -1 \\ 2A + B = & -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ A = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = & -1 \\ A = & 0 \end{cases}$$
   Le reste de la division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-2)(X-1)$ est $R(X) = AX+B = -1$.

2. La division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-1)^2$

   $\exists!(k(X),r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2, Q(X) = (X-1)^2 \times k(X) + r(X)$ avec $\deg(r(X)) < 2$.

   $r(X)$ est de la forme $AX+b$ avec $(A,B) \in \mathbb{K}^2$

   $$\begin{cases} Q(X) = & (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 \\ Q(X) = & (X-1)^2 \times k(X) + AX + B \end{cases}$$

   Pour $X=1$, on a :

   $$\begin{cases} Q(1) = & -1 \\ Q(1) = & A+B \end{cases} \implies \begin{cases} A+B = -1 \end{cases}$$

   Pour $Q'(X)$, on a :

   $$\begin{cases} Q'(X) = & 2n(X-2)^{2n-1} + n(X-1)^{n-1} \\ Q'(X) = & 2(X-1) \times k(X) + (X+1)^2 \times k'(X) + A \end{cases}$$

   Pour $X=1$, on alors,

   $$\begin{cases} Q'(1) = & 2n(1-2)^{2n-1} + n(1-1)^{n-1} \Rightarrow -2n \\ Q'(1) = & A \end{cases} \implies \begin{cases} A = -2n \end{cases}$$

   On a donc :

   $$\begin{cases} A &=& -2n \\ A+B &=& -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &=& -2n \\ B &=& -1+2n \end{cases}$$

   Donc le reste de la division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-1)^2$ est
   $r(x) = AX + B = -2nX - 1 + 2n$

3.5 Exercice 3.11 :

Soit $P(X)$ un polynôme de degré 3, on a :

$P(X) = X^3 + AX^2 + BX + C$, $(A,B,C) \in \mathbb{K}^3$

$$\begin{aligned} (X-1)|P &\iff P(1) = 0 \\ &\iff 1+A+B+C = 0 \end{aligned}$$

$\exists k(X) \in \mathbb{K}[X]\,, P(X) = (X-2)k(X) + R$
$\exists k_1(X) \in \mathbb{K}[X]\,, P(X) = (X-3)k(X) + R$ avec $R \in \mathbb{K}$
$\exists k_2(X) \in \mathbb{K}[X]\,, P(X) = (X-4)k(X) + R$

$$\begin{cases} 1+A+B+C &=& 0 \\ P(2) &=& R \\ P(3) &=& R \\ P(4) &=& R \end{cases} \iff \begin{cases} 1+A+B+C &=& 0 \\ 8+4A+2B+C &=& R \\ 27+9A+3B+C &=& R \\ 64+16A+4B+C &=& R \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1+A+B+C &=& 0 \\ 8+4A+2B+C &=& R \\ 37+7A+B &=& R \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} R & = & 6 \\ A & = & -9 \\ B & = & 26 \\ C & = & -18 \end{array} \right.$$

Donc $P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 18$

4 Theorème de d'Alembert-Gauss :

4.1 Exercice 4.12 :

1) a)

$P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$

$P(1) = 1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0 \iff (X-1)|P$ donc 1 est une racine de P

$P(-2) = (-2)^4 - 2 \times (-2)^3 - (-2) - 2 = 16 - 16 + 2 - 2 = 0 \iff (X+2)|P$ donc (-2) est une racine de P

1) b)

On a $P(1) = P(2) = 0 \iff (X-1)(X+2)|P$

$\iff \exists k(X) \in \mathbb{R}[X],\ P(X) = (X-1)(X+2)k(X)$

A l'aide de la division euclidienne, on calcule k(x)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +2X^3 & & -X & -2 & X^2+X-2 \\
\cline{6-6}
-X^4 & -X^3 & +2X^2 & & & X^2+X+1 \\
\cline{1-3}
 & X^3 & +2X^2 & -X & & \\
 & -X^3 & -X^2 & +2X & & \\
\cline{2-4}
 & & X^2 & +X & -2 & \\
 & & -X^2 & -X & +2 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+X+1)$

Or $X^2 + X + 1$ a un $\Delta = -3 < 0$ donc est irreductible sur $\mathbb{R}[X]$

Donc $P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+X+1)$

2) a)

$Q(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$

$Q(2) = 2^4 - \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 \times 2 - 4 = 0 \iff (X-2)|P$ donc 2 est une racine de Q

$Q(-2) = (-2)^4 - 2 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) - 4 = 0 \iff (X+2)|P$ donc -2 est une racine de Q

2) b)

On a $Q(2) = Q(-2) = 0 \iff (X-2)(X+2)|P$
$\iff \exists k(X) \in \mathbb{R}[X],\, Q(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$

A l'aide de la division euclidienne, on calcule k(x)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -2X^3 & -3X^2 & +8X & -4 & X^2-4 \\
\cline{6-6}
-X^4 & & +4X^2 & & & X^2-2X+1 \\
\cline{1-3}
 & -2X^3 & +X^2 & +8X & & \\
 & 2X^3 & & -8X & & \\
\cline{2-4}
 & & X^2 & & -4 & \\
 & & -X^2 & & +4 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$Q(X) = (X-2)(X+2)(X^2-2X+1) = (X-2)(X+2)(X-1)^2$ qui est irreductible sur $\mathbb{R}[X]$