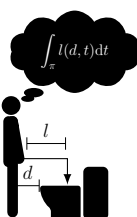


Fiche sur les polynômes et équations différentielles

Julien BESTARD



GENTS DO IT WITH PRECISION

Table des matières

1	Les polynômes :	3
1.1	Definition d'un polynôme	3
1.2	Racine	3
1.3	Division Euclidienne	3
1.4	Degré P et Q	4
1.5	Equivalence	4
2	Les equations différentielles	5
2.1	Equation différentielle du premier ordre $ay' + by = c$	5
2.1.1	Résolution de l'équation homogène	5
2.1.2	Recherche d'une solution particulière	5
2.1.3	Conclusion	5
2.2	Equation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d$	5
2.2.1	Résolution de l'équation homogène :	5
2.2.2	Recherche d'un solution particulière	5
2.2.3	Conclusion	6

1 Les polynômes :

1.1 Définition d'un polynôme

Un polynôme P est une application d'une partie I de \mathbb{K} dans \mathbb{K} tel que
 $\forall X \in I, P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{i=0}^n a_iX^i$ est un polynôme **de degré n**
 où $n \in \mathbb{N}, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$

Soit $P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K}

1.2 Racine

Définition : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, a est une racine ssi $P(a) = 0$

Propriétés :

1. a racine $P \iff X - a \mid P$
2. a_1, \dots, a_p racines de P 2 à 2 distinctes $\iff (X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_p) \mid P$
3. ssi $\deg(P) = n$, alors il y a au plus n racines distinctes

Définition : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a une racine de P . La multiplicité de a est le plus grand entier n tel que $(X - a)^n \mid P$

Prop : (a est une racine de P de multiplicité n)

$$\iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0 \\ P^{(n)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

1.3 Division Euclidienne

Définition : Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$

On dit A divise B , noté $A \mid B$, ssi $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = A \cdot Q$

Remarque : $A \mid B$ et $B \mid A \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda B$

Théorème : Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$

Exemple de division euclidienne : $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 & X^2 - X - 7 \\ -X^4 + X^3 + 7X^2 & \hline -3X^3 - 2X^2 + 27X & \\ 3X^3 - 3X^2 - 21X & \hline -5X^2 + 6X + 38 & \\ 5X^2 - 5X - 35 & \hline X + 3 & \end{array}$$

$$\implies X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 = (X^2 - X - 7)(X^2 - 3X - 5) + (X + 3)$$

$$\deg(X + 3) = 1 < \deg(X^2 - X - 7) = 2$$

1.4 Degré P et Q

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

1.5 Equivalence

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$

$$(X - a) | P \iff P(a) = 0$$

$$(X - a)^2 | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0$$

$$(X - a)^3 | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) = 0$$

$$(X - a)^{(n)} | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) = 0 \text{ et } \dots \text{ et } P^{(n-1)}(a) = 0$$

2 Les equations différentielles

2.1 Equation différentielle du premier ordre $ay' + by = c$

2.1.1 Résolution de l'équation homogène

Les equations homogènes sont de la forme $ay' + by = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

y_0 est de la forme $ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$

La solution S_0 est de la forme : $\left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \end{array} \right\}$

2.1.2 Recherche d'une solution particulière

Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)y_0(x)$

On a donc $y'_p = k'(x)y_0(x) + k(x)y'_0(x)$

On cherche $k(x)$ à partir de l'équation suivante :

$$ay'_p + by_p = c \iff a(k'(x)y_0(x) + k(x)y'_0(x)) + b(k(x)y_0(x))$$

2.1.3 Conclusion

L'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$

2.2 Equation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d$

2.2.1 Résolution de l'équation homogène :

Les equations homogènes sont de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

L'équation caractéristique associée à (E_0) : $ar^2 + br + c$

- Si $\Delta > 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$
- Si $\Delta = 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (k_1 + k_2 x) e^{r_1 x} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$
- Si $\Delta < 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longmapsto \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{\alpha x} (k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)) \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2.2.2 Recherche d'un solution particulière

Cas 1 : $ay'' + by' + cy = P(x)$, P polynôme :

Une solution particulière $y_p = Q(x)$ avec $Q(x)$ un polynôme.

Si $c \neq 0$: $\deg Q = \deg P$

Si $c = 0$ et $b \neq 0$: $\deg Q = 1 + \deg P$

Si $c = 0$ et $b = 0$: $\deg Q = 2 + \deg P$

Cas 2 : $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\gamma x}$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et P polynôme :

Une solution particulière $y_p = Q(x)e^{\gamma x}$ avec $Q(x)$ un polynôme.

$$y_p = Q(x)e^{\gamma x} \implies \left. \begin{aligned} y_p' &= Q'(x)e^{\gamma x} + \gamma Q(x)e^{\gamma x} \\ y_p'' &= Q''(x)e^{\gamma x} + 2\gamma Q'(x)e^{\gamma x} + \gamma^2 Q(x)e^{\gamma x} \end{aligned} \right\} \text{ dans (E).}$$

$$- AQ''(x) + BQ'(x) + CQ(x) = P(x)$$

$$\text{Si } C \neq 0 : \deg Q = \deg P$$

$$\text{Si } C = 0 \text{ et } B \neq 0 : \deg Q = 1 + \deg P$$

$$\text{Si } C = 0 \text{ et } B = 0 : \deg Q = 2 + \deg P$$

$$- y_p = Q(x)e^{\gamma x} \text{ avec :}$$

$$\text{Si } \gamma \text{ n'est pas racine de } ar^2 + br + c : \deg Q = \deg P$$

$$\text{Si } \gamma \text{ est une racine simple de } ar^2 + br + c : \deg Q = 1 + \deg P$$

$$\text{Si } \gamma \text{ est une racine double de } ar^2 + br + c : \deg Q = 2 + \deg P$$

2.2.3 Conclusion

$$\text{L'ensemble des solutions : } S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$$