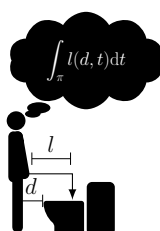


TD : Polynômes

Julien BESTARD

Paul Dufour

Quentin Robert



GENTS DO IT WITH PRECISION

Table des matières

0.1	Général	3
0.2	Définition	3
0.3	Division euclidienne	3
0.4	Degré P et Q	3
0.5	Equivalence	3
1	Exercice 1 :	4
1.1	Exercice 1.1 :	4
1.2	Exercice 1.2 :	4
1.3	Exercice 1.3 :	4
2	Division euclidienne de polynômes :	5
2.1	Exercice 2.4 :	5
2.2	Exercice 2.6 :	6
3	Racines et factorisations	7
3.1	Exercice 3.7	7
3.2	Exercice 3.8	8
3.3	Exercice 3.9	8
3.4	Exercice 3.10 :	9
3.5	Exercice 3.11 :	10
4	Theorème de d'Alembert-Gauss :	12
4.1	Exercice 4.12 :	12

Cours

0.1 Général

$\mathbb{K}[X] \Rightarrow$ polynômes à coefficient dans \mathbb{K}

\mathbb{K} peut prendre ses valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ou \mathbb{Q}

$$\mathbb{R}_2[X] = \{a_1X^2 + a_2X + a_3; (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}\}$$

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$:

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$ est une polynôme de degré n

0.2 Définition

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

On dit que α est une racine (zéro) de $P(X)$, si $P(\alpha) = 0$

0.3 Division euclidienne

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de A par B si et seulement si $\exists!(q, r) \in \mathbb{K}[X] A = q \times B + r$ avec $\deg(r) < \deg(B)$

0.4 Degré P et Q

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

0.5 Equivalence

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$

$$(X - a) | P \iff P(a) = 0$$

$$(X - a)^2 | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0$$

$$(X - a)^3 | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) = 0$$

$$(X - a)^{(n)} | P \iff P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \text{ et } P''(a) = 0 \text{ et } \dots \text{ et } P^{(n-1)}(a) = 0$$

1 Exercice 1 :

1.1 Exercice 1.1 :

Soit P un polynôme de degré m , alors $\exists(a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$

$$P(X) = a_m X^m + \dots + a_1 X + a_0, a_m \neq 0$$

Pour Q un polynôme de degré n , alors $\exists(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$Q(X) = b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0 \text{ avec } b_n \neq 0$$

On a,

$$n \leq m \iff n < m \text{ ou } n = m$$

$$\deg(P + Q) = m \iff n < m \text{ ou dans le cas où } n = m : \text{ on prend } a_m + b_n \neq 0$$

$$a_m \neq -b_n$$

1.2 Exercice 1.2 :

Soit P un polynôme de degré n , alors $\exists(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0, a_n \neq 0$$

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + \dots + a_1$$

$$P''(X) = n(n-1) a_n X^{n-2} + \dots + 2a_2$$

$$\Downarrow$$

$$P^{(n)}(X) = a_n n(n-1) \times \dots \times 1 = a_n n!$$

$$P^{(n)}(X) = a_n n!$$

$$(De \text{ haut en bas on dérive } \iff De \text{ bas en haut on primitive})$$

1.3 Exercice 1.3 :

Soit P un polynôme.

$P^{(n)}(2) = 0 \iff P$ est de degré 2 et est de la forme :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

$$P'(X) = 2aX + b$$

$$P''(X) = 2a$$

Or, on a :

$$\begin{cases} P(2) = 6 \\ P'(2) = 1 \\ P''(2) = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} 2^2 a + 2b + c = 6 \\ 2 \times 2a + b = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \times 2 + 2b + c = 6 \\ 4 \times 2 + b = 1 \\ 2 \times 2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 2 \times (-7) + c = 6 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 12 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P = 2X^2 - 7X + 12$$

2 Division euclidienne de polynômes :

2.1 Exercice 2.4 :

Division euclidienne de $2X^4 - X^2 + X - 5$ par $X^2 + X - 2$

$$\begin{array}{r}
 2X^4 \qquad - X^2 + X - 5 \mid X^2 + X - 2 \\
 \underline{- 2X^4 - 2X^3 + 4X^2} \qquad \qquad \qquad \mid 2X^2 - 2X + 5 \\
 \qquad - 2X^3 + 3X^2 + X \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \underline{2X^3 + 2X^2 - 4X} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad 5X^2 - 3X - 5 \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \underline{- 5X^2 - 5X + 10} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \qquad - 8X + 5 \qquad \qquad \qquad \mid
 \end{array}$$

Donc on a $2X^4 - X^2 + X - 5 = (X^2 + X - 2)(2X^2 - 2X + 5) - 8X + 5$

Division euclidienne de $X^3 + X + 1$ par $2X + 1$

$$\begin{array}{r}
 X^3 \qquad + X + 1 \mid 2X + 1 \\
 \underline{- X^3 - \frac{1}{2}X^2} \qquad \qquad \qquad \mid \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{5}{8} \\
 \qquad - \frac{1}{2}X^2 + X \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \underline{\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}X} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \frac{5}{4}X + 1 \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \underline{- \frac{5}{4}X - \frac{5}{8}} \qquad \qquad \qquad \mid \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{3}{8} \qquad \qquad \qquad \mid
 \end{array}$$

Donc on a $X^3 + X + 1 = (2X + 1) \left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{5}{8} \right) + \frac{3}{8}$

2.2 Exercice 2.6 :

Division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + X$ par $X^2 + 1$

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 2X^3 + X \quad \quad \quad | \quad X^2 + 1 \\
 - X^4 \quad \quad - X^2 \quad \quad \quad | \quad X^2 + 2X - 1 \\
 \hline
 2X^3 - X^2 + X \\
 - 2X^3 \quad \quad - 2X \\
 \hline
 - X^2 - X \\
 \quad X^2 \quad \quad + 1 \\
 \hline
 \quad \quad - X + 1
 \end{array}$$

Donc on a $X^4 + 2X^3 + X = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X + 1$

D'après la question (1), on a :

$$X^4 + 2X^3 + X = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X + 1$$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X}{X^2 + 1} = \frac{(X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1) - X + 1}{X^2 + 1}$$

$$\frac{X^4 + 2X^3 + X}{X^2 + 1} = X^2 + 2X - 1 - \frac{X + 1}{X^2 + 1}$$

$$\text{Ainsi, } \int \frac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1} dx = \int x^2 + 2x - 1 - \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Or } \int x^2 + 2x - 1 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{-x + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{-x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{-x + 1}{x^2 + 1} dx = \frac{-1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \int \frac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

3 Racines et factorisations

3.1 Exercice 3.7

1. Division euclidienne de P par $(X - a)$:

$\exists!(q(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2, P(X) = (X - a)q(X) + r(X)$ avec $\deg(r(X)) < 1$
donc $r(X) = \text{constante} = c, c \in \mathbb{K}$

2. $(\Rightarrow) (X - a) | P \Rightarrow \exists k(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X - a)k(X)$
donc $P(a) = (a - a)k(a) = 0$

(\Leftarrow) Soit $P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0$, d'après la question (1), on a :

$$P(X) = (X - a)q(X) + c$$

$$\text{Ainsi } P(a) = 0 \iff (a - a)q(a) + c = 0$$

$$\iff c = 0$$

$$\text{Donc, } P(X) = (X - a)q(X)$$

$$\text{Ainsi, } (X - a) | P(X)$$

3. (\Rightarrow) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
 $(X - a)(X - b) | P \Rightarrow \exists k(x) \in \mathbb{R}[X], P(X) = (X - a)(X - b)k(x)$

$$\left. \begin{array}{l} P(a) = (a - a)(a - b)k(a) = 0 \\ P(b) = (b - a)(b - b)k(b) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{donc } P(a) = P(b) = 0$$

(\Leftarrow) On applique la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$

$$\exists!(k(x), r(x)) \in \mathbb{R}[X]^2, P(X) = (X - a)(X - b)k(X) + r(x) \text{ avec } \deg(r(X)) < 2$$

$$r(x) = c_1X + c_2 \text{ avec } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Donc : } P(X) = (X - a)(X - b)k(X) + c_1X + c_2$$

$$\text{Ainsi } (X - a)(X - b) | P \iff r(X) = 0$$

$$\iff c_1 = c_2 = 0$$

$$\bullet P(a) = 0 \iff (a - a)(a - b)k(a) + c_1a + c_2 = 0$$

$$\bullet P(b) = 0 \iff c_1b + c_2 = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} c_1 a + c_2 &= 0 \\ c_1 b + c_2 &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} c_1 a + c_2 &= 0 \\ c_1 a - c_1 b &= 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} c_1 a + c_2 &= 0 \\ c_1 a &= c_1 b \end{cases} \quad \text{or } a \neq b \\
 &\iff \begin{cases} c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } r(X) = 0 \Rightarrow P(X) = (X - a)(X - b)k(X) \Rightarrow (X - a)(X - b) \mid P$$

3.2 Exercice 3.8

Soit $P(X) = X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$

1. Montrons que $\sqrt{3}$ est l'unique racine réelle de P

$$\begin{aligned}
 P(\sqrt{3}) &= (\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
 &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
 &= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
 &= 0 \\
 &\iff \sqrt{3} \text{ racine de } P \iff (X - \sqrt{3}) \mid P \\
 P(X) &= (X - \sqrt{3})k(X)
 \end{aligned}$$

Division euclidienne de $X^3 + 3X - 6\sqrt{3}$ par $X - \sqrt{3}$:

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 + 3X - 6\sqrt{3} & X - \sqrt{3} \\
 \hline
 & X^2 + \sqrt{3}X + 6
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(X) &= (X - \sqrt{3})(X^2 + \sqrt{3}X + 6) \\
 \Delta(X^2 + \sqrt{3}X + 6) &= -21 < 0 \text{ donc } X^2 + \sqrt{3}X + 6 \text{ est irréductible dans } \mathbb{R} \\
 \text{Donc } \sqrt{3} &\text{ est l'unique racine réelle de } P
 \end{aligned}$$

3.3 Exercice 3.9

$$\begin{aligned}
 1. \quad X^2 + 2X = 0 &\iff X(X + 2) = 0 \\
 &\iff X = 0 \text{ ou } X = -2
 \end{aligned}$$

D'après l'exercice 3.7, on a :

$$X^2 + 2X \mid P \iff P(0) = (P - 2) = 0$$

- $P(0) = (0 + 1)^{2n} - 1 = 0$
- $P(-2) = (-2 + 1)^{2n} - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 0$

2. On pose $Q(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$:
- $$Q(1) = n - (n+1) + 1 = 0$$
- $$Q'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$$
- $$Q'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0 \text{ Donc } (X-1)^2 | Q(X)$$

3. On pose $P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$
- $$P(1) = n1^{n+2} - (n+2) \times 1^{n+1} + (n+2) - n = 0$$

Donc 1 est racine du polynôme.

$$P'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+1)(n+2)X^n + (n+2)$$

$$P'(1) = n(n+2) - (n+1)(n+2) + (n+2)$$

$$P''(X) = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$$

$$P''(1) = n(n+1)(n+2) - n(n+1)(n+2) = 0$$

$$P^{(3)}(X) = n^2(n+1)(n+2)X^{n-1} - (n+1)n(n+1)(n+2)X^{n-2}$$

$$P^{(3)}(1) = n^2(n+1)(n+2) - (n+1)n(n+1)(n+2)$$

$$= n(n+1)(n+2)(n-n+1)$$

$$= n(n+1)(n+2)$$

Or $n \geq 2$

Donc $P^{(3)}(1) \neq 0$

Donc la multiplicité de P est de 3

3.4 Exercice 3.10 :

1. La division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-2)(X-1)$
- $\exists! (k(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2$, $Q(X) = (X-2)(X-1) \times k(X) + r(X)$ avec $\deg(r(X)) < 2$.
 $r(X)$ est de la forme $AX + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{cases} Q(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 \\ Q(X) = (X-2)(X-1) \times k(X) + AX + B \end{cases}$$

Pour $X = 1$, on a :

$$\begin{cases} Q(1) = (1-2)^{2n} + (1-1)^n - 2 \Rightarrow -1 \\ Q(1) = (1-2)(1-1) \times k(1) + A \times 1 + B \Rightarrow A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \end{cases}$$

Pour $X = 2$, on a :

$$\begin{cases} Q(2) = -1 \\ Q(2) = 2A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + B = -1 \end{cases}$$

On a alors,

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 0 \end{cases}$$

Le reste de la division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-2)(X-1)$ est $R(X) = AX + B = -1$.

2. La division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-1)^2$

$\exists!(k(X), r(X)) \in \mathbb{K}[X]^2, Q(X) = (X-1)^2 \times k(X) + r(X)$ avec $\deg(r(X)) < 2$.

$r(X)$ est de la forme $AX + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{cases} Q(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2 \\ Q(X) = (X-1)^2 \times k(X) + AX + B \end{cases}$$

Pour $X = 1$, on a :

$$\begin{cases} Q(1) = -1 \\ Q(1) = A + B \end{cases} \implies \begin{cases} A + B = -1 \end{cases}$$

Pour $Q'(X)$, on a :

$$\begin{cases} Q'(X) = 2n(X-2)^{2n-1} + n(X-1)^{n-1} \\ Q'(X) = 2(X-1) \times k(X) + (X+1)^2 \times k'(X) + A \end{cases}$$

Pour $X = 1$, on alors,

$$\begin{cases} Q'(1) = 2n(1-2)^{2n-1} + n(1-1)^{n-1} \Rightarrow -2n \\ Q'(1) = A \end{cases} \implies \begin{cases} A = -2n \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} A = -2n \\ A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2n \\ B = -1 + 2n \end{cases}$$

Donc le reste de la division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-1)^2$ est $r(x) = AX + B = -2nX - 1 + 2n$

3.5 Exercice 3.11 :

Soit $P(X)$ un polynôme de degré 3, on a :

$$P(X) = X^3 + AX^2 + BX + C, (A, B, C) \in \mathbb{K}^3$$

$$(X-1)|P \iff P(1) = 0$$

$$\iff 1 + A + B + C = 0$$

$$\exists k(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-2)k(X) + R$$

$$\exists k_1(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-3)k(X) + R \quad \text{avec } R \in \mathbb{K}$$

$$\exists k_2(X) \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-4)k(X) + R$$

$$\begin{cases} 1 + A + B + C = 0 \\ P(2) = R \\ P(3) = R \\ P(4) = R \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + A + B + C = 0 \\ 8 + 4A + 2B + C = R \\ 27 + 9A + 3B + C = R \\ 64 + 16A + 4B + C = R \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 + A + B + C = 0 \\ 8 + 4A + 2B + C = R \\ 37 + 7A + B = R \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} R &= 6 \\ A &= -9 \\ B &= 26 \\ C &= -18 \end{cases}$$

Donc $P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 18$

2) b)

$$\begin{aligned} \text{On a } Q(2) = Q(-2) = 0 &\iff (X-2)(X+2) \mid P \\ &\iff \exists k(X) \in \mathbb{R}[X], Q(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4 \end{aligned}$$

A l'aide de la division euclidienne, on calcule $k(x)$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4 & X^2 - 4 \\ -X^4 & +4X^2 \\ \hline -2X^3 & +X^2 + 8X \\ 2X^3 & -8X \\ \hline & X^2 - 4 \\ & -X^2 + 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$Q(X) = (X-2)(X+2)(X^2-2X+1) = (X-2)(X+2)(X-1)^2$ qui est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$