Fiche sur les polynômes et équations différentielles

Julien BESTARD

GENTS DO IT WITH PRECISION

Table des matières

1 Les polynômes :

1.1 Definition d'un polynôme

Un polynôme P est une application d'une partie I de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ tel que
$\forall X \in I, P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est un polynôme de degre n
où $n \in \mathbb{N}$,$(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$

Soit $P \in \mathbb{K}[X], deg(P) = max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polyômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.2 Racine

Définition : Soit P $\in \mathbb{K}[X]$, a est une racine ssi P(a) = 0

Propriétés :

1. a racine P $\iff X - a \mid P$
2. $a_1, ..., a_p$ racines de P 2 à 2 distinctes $\iff (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_p) \mid P$
3. ssi $deg(P) = n$, alors il y a au plus n racines distinctes

Définition : Soit P $\in \mathbb{K}[X]$ et a une racine de P. La multiplicité de a est le plus grand entier n tel que $(X - a)^n \mid P$

Prop : (a est une racine de P de multiplicité n)

$$\iff \begin{cases} P(a) &= P'(a) = P''(a) = ... = P(n-1)(a) = 0 \\ P^{(n)}(a) &\neq 0 \end{cases}$$

1.3 Division Euclidienne

Définition : Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$
On dit A divise B, noté $A \mid B$, ssi $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = A \cdot Q$

Remarque : $A \mid B$ et $B \mid A \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda B$

Théorème : Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$
$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R$ avec $deg(R) < deg(B)$

Exemple de division euclidienne : $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 & X^2 - X - 7 \\ \cline{2-2}
-X^4 + X^3 + 7X^2 \qquad\qquad & X^2 - 3X - 5 \\ \cline{1-1}
-3X^3 - 2X^2 + 27X \qquad & \\
3X^3 - 3X^2 - 21X \qquad & \\ \cline{1-1}
-5X^2 + 6X + 38 & \\
5X^2 - 5X - 35 & \\ \cline{1-1}
X + 3 &
\end{array}$$

$\implies X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 = \left(X^2 - X - 7\right)\left(X^2 - 3X - 5\right) + (X + 3)$
$deg(X + 3) = 1 < deg(X^2 - X - 7) = 2$

1.4 Degré P et Q

1. $deg(P+Q) \leqslant max(deg(P), deg(Q))$
2. $deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$

1.5 Equivalence

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$

$(X-a)|P \iff P(a) = 0$

$(X-a)^2|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$

$(X-a)^3|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$ et $P''(a) = 0$

$(X-a)^{(n)}|P \iff P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$ et $P''(a) = 0$ et ... et $P^{(n-1)} = 0$

2 Les equations différentielles

2.1 Equation différentielle du premier ordre $ay' + by = c$

2.1.1 Résolution de l'équation homogène

Les equations homogènes sont de la forme $ay' + by = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

y_0 est de la forme $ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x}$

La solution S_0 est de la forme : $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x} \end{array} \right\}$

2.1.2 Recherche d'une solution particulière

Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)y_0(x)$
On a donc $y_p' = k'(x)y_0(x) + k(x)y_(' x)$
On cherche $k(x)$ à partir de l'équation suivante :
$ay_p' + by_p = c \iff a(k'(x)y_0(x) + k(x)y_(' x)) + b(k(x)y_0(x))$

2.1.3 Conclusion

L'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$

2.2 Equation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d$

2.2.1 Résolution de l'équation homogène :

Les equations homogènes sont de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
L'équation caractéristique associée à (E_0) : $ar^2 + br + c$

- Si $\Delta > 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}\,(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

- Si $\Delta = 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 + k_2x)e^{r_1x}\,(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

- Si $\Delta < 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x}(k_1\cos(\beta x) + k_2\sin(\beta x)\,(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2.2.2 Recherche d'un solution particulière

<u>Cas 1 :</u> $ay'' + by' + cy = P(x)$, P polynôme :
Une solution particulière $y_p = Q(x)$ avec $Q(x)$ un polynôme.

Si $c \neq 0$: $degQ = degP$

Si $c = 0$ et $b \neq 0$: $degQ = 1 + degP$

Si $c = 0$ et $b = 0$: $defQ = 2 + degP$

<u>Cas 2 :</u> $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\gamma x}$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et P polynôme :

Une solution particulière $y_p = Q(x)e^{\gamma x}$ avec $Q(x)$ un polynôme.

$$y_p = Q(x)e^{\gamma x} \implies \left.\begin{array}{rcl} y'_p & = & Q'(x)e^{\gamma x} + \gamma Q(x)e^{\gamma x} \\ y''_p & = & Q''(x) + 2\gamma Q'(x)e^{\gamma x} + 2\gamma Q(x)e^{\gamma x} \end{array}\right\} \text{dans (E).}$$

- $AQ''(x) + BQ'(x) + CQ(x) = P(x)$
  Si $C \neq 0$: $degQ = degP$
  Si $C = 0 et B \neq 0$: $degQ = 1 + degP$
  Si $C = 0$ et $B = 0$: $degQ = 2 + degP$

- $y_p = Q(x)e^{\gamma x}$ avec :
  Si γ n'est pas racine de $ar^2 + br + c$: $degQ = degP$
  Si γ est une racine simple de $ar^2 + br + c$: $degQ = 1 + degP$
  Si γ est une racine double de $ar^2 + br + c$: $degQ = 2 + degP$

2.2.3 Conclusion

L'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$