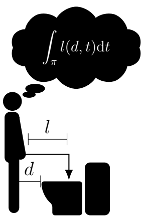
Equations Différentielles

Julien BESTARD
Paul DUFOUR
Quentin ROBERT



Gents Do It With Precision

Table des matières

1 Cours :

1.1 Equation différentielle du premier ordre $ay' + by = c$

1. Les equations homogènes sont de la forme $ay' + by = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

   y_0 est de la forme $ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x}$

   La solution S_0 est de la forme : $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x} \end{array} \right\}$

2. Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(x)y_0(x)$
   On a donc $y_p' = k'(x)y_0(x) + k(x)y_(' x)$
   On cherche $k(x)$ à partir de l'équation suivante :
   $ay_p' + by_p = c \iff a(k'(x)y_0(x) + k(x)y_(' x)) + b(k(x)y_0(x))$

3. L'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$

1.2 Equation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = d$

1. Les equations homogènes sont de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
   L'équation caractéristique associée à (E_0) : $ar^2 + br + c$

   - Si $\Delta > 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}\,(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$
   - Si $\Delta = 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 + k_2x)e^{r_1x}\,(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$
   - Si $\Delta < 0 \implies S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x}(k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)\,(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2. <u>Cas 1 :</u> $ay'' + by' + cy = P(x)$, P polynôme :
   Une solution particulière $y_p = Q(x)$ avec $Q(x)$ un polynôme.
   Si $c \neq 0$: $degQ = degP$
   Si $c = 0$ et $b \neq 0$: $degQ = 1 + degP$
   Si $c = 0$ et $b = 0$: $defQ = \alpha + degP$

Cas 2 : $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\gamma x}$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et P polynôme :

Une solution particulière $y_p = Q(x)e^{\gamma x}$ avec $Q(x)$ un polynôme.

$$y_p = Q(x)e^{\gamma x} \implies \left.\begin{array}{rcl} y_p' & = & Q'(x)e^{\gamma x} + \gamma Q(x)e^{\gamma x} \\ y_p'' & = & Q''(x) + 2\gamma Q'(x)e^{\gamma x} + 2\gamma Q(x)e^{\gamma x} \end{array}\right\} \text{dans (E).}$$

- $AQ''(x) + BQ'(x) + CQ(x) = P(x)$
  Si $C \neq 0 : degQ = degP$
  Si $C = 0 et B \neq 0 : degQ = 1 + degP$
  Si $C = 0$ et $B = 0 : degQ = 2 + degP$

- $y_p = Q(x)e^{\gamma x}$ avec :
  Si γ n'est pas racine de $ar^2 + br + c : degQ = degP$
  Si γ est une racine simple de $ar^2 + br + c : degQ = 1 + degP$
  Si γ est une racine double de $ar^2 + br + c : degQ = 2 + degP$

3. L'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 \end{array} \right\}$

2 Equations différentielles du premier ordre :

Résoudre les équations suivantes :

2.1 $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$xy' - 2y = 0$ est une équation homogène, les solutions sont de la forme : $y_0 = ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned} y_0 &= ke^{-\int \frac{-2}{x}\mathrm{d}x} \\ y_0 &= ke^{2ln(x)} \\ y_0 &= kx^2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 = kx^2 \end{array} \right\}$

2.2 $(x^2+1)y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$

1. Equation homogène : $(x^2+1)y' - y = 0$
   $$\begin{aligned} y_0 &= ke^{-\int \frac{(x^2+1)}{-1}\mathrm{d}x} \\ y_0 &= ke^{\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x} \\ y_0 &= ke^{\arctan(x)}, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
   Donc l'ensemble des solutions est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 = ke^{\arctan(x)}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particuliere :
   On remarque que $y_p = -1$ est la solution particulière de (E)

3. Conclusion :
   L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :
   $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 = -1 + ke^{arctan(x)}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2.3 $x\ln(x)y' - y = 4$ sur $]-1; +\infty[$

1. Equation homogène : $x\ln(x)y' - y = 0$
   $$\begin{aligned} y_0 &= ke^{-\int \frac{-1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x} \\ y_0 &= ke^{\int \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x} \\ y_0 &= ke^{\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\mathrm{d}x} \\ y_0 &= ke^{\ln(\ln(x))} \\ y_0 &= k\ln(x), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
   Donc l'ensemble des solutions de l'equation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc}]-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 = k\ln(x), k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particuliere :
   On remarque que $y_p = -4$ est une solution particulière de (E)

3. Conclusion :
   L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :
   $\left\{ \begin{array}{ccc}]-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 = -4 + k\ln(x), k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2.4 $y' + y = e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$

1. Equation homogène : $y' + y = 0$

$$\begin{array}{lcl} y_0 & = & ke^{-\int \frac{1}{1}\mathrm{d}x} \\ y_0 & = & ke^{-x} \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'equation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 = ke^{-x}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particuliere :
Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(t)y_0(t)$

On prend $y_0 = e^{-x}$: $y_p = k(x)e^{-x}$
y_p est solution de $(E) \iff y_p' + y_p = e^x - 1$
On a $y_p = k(x)e^{-x} \implies y_p' = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$
Dans (E) : $y_p' + y_p = e^x - 1 \iff k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = e^x - 1$
$\iff k'(x)e^{-x} = e^x - 1$
$\iff k'(x) = \frac{e^x - 1}{e^{-x}}$
$\iff k'(x) = (e^x - 1)e^x = e^{2x} - e^x$
$\iff k(x) = \int e^{2x} - e^x \mathrm{d}x$
$\iff k(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x$
On a $y_p = k(x)e^{-x} = (\frac{1}{2}e^{2x} - e^x)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x - 1$

3. Conclusion :
L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :
$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 = \frac{1}{2}e^x - 1 + ke^{-x}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2.5 $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$ sur $\mathbb{R}$

1. Equation homogène : $y' - 2xy = 0$

$$\begin{array}{lcl} y_0 & = & ke^{-\int \frac{-2x}{1}\mathrm{d}x} \\ y_0 & = & ke^{x^2} \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'equation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 = ke^{x^2}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particuliere :
Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(t)y_0(t)$

On prend $y_0 = e^{x^2} \implies y_p = k(t)e^{x^2}$
y_p est solution de $(E) \iff y_p' - 2xy_p = (1 - 2x)e^x$
On a $y_p = k(x)e^{x^2} \implies y_p' = k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}$
Dans (E) : $y_p' - 2xy_p = (1 - 2x)e^x \iff k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2} - 2xk(x)e^{x^2} = (1 - 2x)e^x$
$\iff k'(x)e^{x^2} = (1 - 2x)e^x$
$\iff k'(x) = \frac{(1-2x)e^x}{e^{x^2}}$
$\iff k'(x) = ((1 - 2x)e^x)e^{-x^2} = (1 - 2x)e^{x - x^2}$
$\iff k(x) = \int (1 - 2x)e^{x - x^2}\mathrm{d}x$
$\iff k(x) = e^{x - x^2}$
On a $y_p = e^{x - x^2}e^{x^2} = e^x$

3. Conclusion :
   L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :
   $\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 = e^x + ke^{x^2}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2.6 $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ sur $]-1;+\infty[$

1. Equation homogène : $y' - \frac{2y}{x+1} = 0$
   $$\begin{array}{lll} y_0 & = & ke^{-\int \frac{\frac{-2}{x+1}}{1} \mathrm{d}x} \\ y_0 & = & ke^{\int \frac{2}{x+1} \mathrm{d}x} \end{array}$$
   Donc l'ensemble des solutions de l'equation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 =, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particuliere :
   Les solutions particulières sont de la forme $y_p = k(t)y_0(t)$

   On prend $y_0 =$, $y_p = k(x)e$
   y_p est solution de $(E) \iff y_p' - \frac{2y_p}{x+1} = (x+1)^3$
   On a $y_p = k(x)e \implies y_p' =$
   Dans (E) :
   On a

3. Conclusion :
   L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :
   $\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 =, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2.7 $(1+x^2)y' + xy = 3x^3 + 3x$ sur $\mathbb{R}$

1. Equation homogène : $(1+x^2)y' + xy = 0$

   $$\begin{array}{rcl} y_0 & = & ke^{-\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x} \\ y_0 & = & \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, k \in \mathbb{R} \end{array}$$

   Donc l'ensemble des solutions de l'equation E_0 est : $S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y_0 = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

2. Solution particuliere :

   Les solutions particulières sont de la forme d'un polynôme de degré 2 :

   $\Longrightarrow\ y_p = ax^2 + bx + c$

   $\Longrightarrow\ y_p' = 2xa + b$

   y_p est le solution de $(E) \iff (1+x^2)y_p' + xy_p = 3x^3 + 3x$

   Dans (E) : $(1+x^2)y_p' + xy_p = 3x^3 + 3x \iff (1+x^2)(2ax+b) + x(ax^2+bx+c)$

   $\iff 2ax + b + 2ax^3 + bx^2 + ax^3 + bx^2 + xc = 3x^3 + 3x$

   $\iff 3ax^3 + 2bx^2 + 2ax + xc + b = 3x^3 + 3x$

   $\iff 3ax^3 + 2bx^2 + x(2a+c) + b = 3x^3 + 3x$

   On a donc le systeme suivant :

   $$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3ax^3 & = & 3x^3 \\ 2bx^2 & = & 0 \\ x(2a+c) & = & 3x \\ b & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a & = & 3 \\ b & = & 0 \\ 2a+c & = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1 \end{array} \right.$$

   Ainsi $y_p = x^2 + 1$

3. Conclusion :

   L'ensemble des solutions de (E) est de la forme : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = y_p + y_0 = x^2 + 1 + \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

3 Equations différentielles du second ordre :

3.1 $y'' - y' - 2y = -x^2 + 3x$

1. On pose $(E_0) = y'' - y' - 2y = 0$ l'équation homogène de (E).
   On a $r^2 - r - 2 = 0$ l'équation caractèristique de (E_0).

   $$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 \implies r_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ et } r_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

   Donc, l'ensemble des solutions de (E_0) est $S_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2. Soit $y_p = Q(x)$ avec $Q(x)$ un polynôme, solution particulière de (E)
   Comme $-x^2 - 3x$ est de degré 2 et que $-2 \neq 0$
   Alors $degQ = deg(-x^2 - 3x) = 2$
   Ainsi $y_p = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
   De plus $y_p' = 2ax + b$ et $y_p'' = 2a$
   y_p est solution de (E), donc :

   $$\begin{array}{rcl} 2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bc + c) & = & -x^2 + 3x \\ 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c & = & -x^2 - 3x \\ -2ax^2 + (-2a - 2b)x + 2a - b - 2c & = & -x^2 + 3x \end{array}$$

   Par identification, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} -2a & = & -1 \\ -2a - 2b & = & -3 \\ 2a - b - 2c & = & 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & 1 \\ c & = & 0 \end{array} \right.$

   Ainsi $y_p = \frac{1}{2}x^2 + x$

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) :
   $S = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = y_p + y_0 = \frac{1}{2}x^2 + x + k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

3.2 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

1. On pose $(E_0) = y'' - 5y' + 6y = 0$ l'équation homogène de (E).
   On a $r^2 - 5r + 6 = 0$ l'équation caractèristique de (E_0).
   $$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 = 1^2 \implies r_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ et } r_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$
   Donc, l'ensemble des solutions de (E_0) est $S_0 = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k_1 e^{2x} + k_2 e^{3x}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2. Soit $y_p = Q(x)e^{2x}$ avec $Q(x)$ un polynôme, solution particulière de (E)

   On a $y_p = Q(x)e^{2x} \implies y_p' = Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x} \implies y_p'' = Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x}$

   $$\begin{array}{rcl} y_p \text{ solution de } (E) & \iff & y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ & \iff & Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x} - 5(Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x}) + 6Q(x)e^{2x} = e^{2x} \\ & \iff & Q''(x) - Q'(x) + 0 \times Q(x) = 1 (*) \end{array}$$

   Donc $deg(Q) = 1 + deg(P) = 1 + 0 = 1$

$$\text{d'où} \left.\begin{array}{rcl} Q(x) & = & ax+b \\ Q'(x) & = & a \\ Q''(x) & = & 0 \end{array}\right\} \text{dans } (*)$$
$\implies -a = 1 \implies a = -1$

D'où $Q(x) = -x + b\,, b \in \mathbb{R}$ pour $b = 0$, $Q(x) = -x$
Ainsi $y_p = -xe^{2x}$

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) :
$$S = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = y_p + y_0 = -xe^{2x} + k_1e^{2x} + k_2e^{3x}\,, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3.3 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

1. On pose $(E_0) = y'' - 5y' + 6y = 0$ l'équation homogène de (E).
On a $r^2 - 5r + 6 = 0$ l'équation caractèristique de (E_0).
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 = 1^2 \implies r_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{5+1}{2} = 3$
Donc, l'ensemble des solutions de (E_0) est $S_0 = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k_1e^{2x} + k_2e^{3x}\,, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$

2. Soit $y_p = Q(x)e^{2x}$ avec $Q(x)$ un polynôme, solution particulière de (E)

On a $y_p = Q(x)e^{2x} \implies y_p' = Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x} \implies y_p'' = Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x}$

$$\begin{array}{rcl} y_p \text{ solution de } (E) & \iff & y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ & \iff & Q''(x)e^{2x} + 4Q'(x)e^{2x} + 4Q(x)e^{2x} - 5(Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x}) + 6Q(x)e^{2x} = e^{2x} \\ & \iff & Q''(x) - Q'(x) + 0 \times Q(x) = 1 (*) \end{array}$$

Donc $deg(Q) = 1 + deg(P) = 1 + 0 = 1$

$$\text{d'où} \left.\begin{array}{rcl} Q(x) & = & ax+b \\ Q'(x) & = & a \\ Q''(x) & = & 0 \end{array}\right\} \text{dans } (*)$$
$\implies -a = 1 \implies a = -1$

D'où $Q(x) = -x + b\,, b \in \mathbb{R}$ pour $b = 0$, $Q(x) = -x$
Ainsi $y_p = -xe^{2x}$

3. Donc l'ensemble des solutions de (E) :
$$S = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = y_p + y_0 = -xe^{2x} + k_1e^{2x} + k_2e^{3x}\,, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$