Soutien de Math du 17/01

Julien BESTARD
Paul DUFOUR

GENTS DO IT WITH PRECISION

Table des matières

Cours sur les polynômes

0.1 Definition

Un polynôme P est une application d'une partie I de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ tel que
$\forall X \in I, P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ est un polynôme de degre n
où $n \in \mathbb{N}$,$(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$

Soit $P \in \mathbb{K}[X], deg(P) = max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polyômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

0.2 Division Euclidienne

Définition : Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$
On dit A divise B, noté $A \mid B$, ssi $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = A \cdot Q$

Remarque : $A \mid B$ et $B \mid A \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda B$

Théorème : Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$
$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R$ avec $deg(R) < deg(B)$

0.3 Racines

Définition : Soit P $\in \mathbb{K}[X]$, a est une racine ssi P(a) = 0

Propriétés :

1. a racine P $\iff X - a \mid P$
2. $a_1, ..., a_p$ racines de P 2 à 2 distinctes $\iff (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_p) \mid P$
3. ssi deg(P) = , alors il y a au plus n racines distinctes

Définition : Soit P $\in \mathbb{K}[X]$ et a une racine de P. La multiplicité de a est le plus grand entier n tel que $(X - a)^n \mid P$

Prop : (a est une racine de P de multiplicité n)

$$\iff \begin{cases} P(a) & = & P'(a) = P''(a) = ... = P(n-1)(a) = 0 \\ P^{(n)}(a) & \neq & 0 \end{cases}$$

0.4 à savoir

deg(0) = -∞

1 Exercice 1 : Division Euclidienne

1.1 $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 & X^2 + 3X - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^4 - 3X^3 + X^2} & X^2 + 2X + 7 \\
2X^3 + 13X^2 + 19X & \\
\underline{-2X^3 - 6X^2 + 2X} & \\
7X^2 + 21X - 7 & \\
\underline{-7X^2 - 21X + 7} & \\
0 &
\end{array}
$$

$\implies X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 = \left(X^2 + 3X - 1\right)\left(X^2 + 2X + 7\right) + 0$
$deg(0) = -\infty < deg\left(X^2 + 3X - 1\right) = 2$

1.2 $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 & X^2 - X - 7 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^4 + X^3 + 7X^2} & X^2 - 3X - 5 \\
-3X^3 - 2X^2 + 27X & \\
\underline{3X^3 - 3X^2 - 21X} & \\
-5X^2 + 6X + 38 & \\
\underline{5X^2 - 5X - 35} & \\
X + 3 &
\end{array}
$$

$\implies X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 = \left(X^2 - X - 7\right)\left(X^2 - 3X - 5\right) + (X + 3)$
$deg(X + 3) = 1 < deg(X^2 - X - 7) = 2$

1.3 $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
X^5 - X^2 + 2 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^5 - X^3} & X^3 - X - 1 \\
-X^3 - X^2 & \\
\underline{X^3 + X} & \\
-X^2 + X + 2 & \\
\underline{X^2 + 1} & \\
X + 3 &
\end{array}
$$

$\implies X^5 - X^2 + 2 = \left(X^2 + 1\right)\left(X^3 - X - 1\right) + (X + 3)$
$deg(X + 3) = 1 < deg(X^2 + 1) = 2$

2 Exercice 2 : Travaillons sur le reste

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$

1. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ Exprimer R en fonction de $P(a)$ et $P(b)$:
   On effectue la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$:
   $\exists!(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2, P = (X-a)(X-b)Q + R$ et $deg(R) < deg((X-a)(X-b)) = 2$ Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

   On a donc : $P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$

   $$\iff \begin{cases} P(a) &= (a-a)(a-b)Q(a) + \alpha a + \beta = \alpha a + \beta \\ P(b) &= (b-a)(b-b)Q(b) + \alpha b + \beta = \alpha b + \beta \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} P(a) &= \alpha a + \beta \\ P(b) - P(a) &= \alpha b + \beta - \alpha a - \beta \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} P(a) &= \alpha a + \beta \\ P(b) - P(a) &= \alpha(b-a) \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} \beta &= P(a) - \alpha a \\ \alpha &= \frac{P(b)-P(a)}{b-a} \end{cases}$$

   $$\implies R(X) = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$$

2. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ Exprimer R en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$

   $P \in \mathbb{R}[X], a \in \mathbb{R}$:
   $\exists : (Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2, P(X) = (X-a)^2 Q(X) + R(X)$ avec $deg(R) < deg((X-a)^2) = 2$
   Donc $R(X) = \alpha X + \beta$

   On a donc $P(X) = (X-a)^2 Q(X) + \alpha X + \beta$ et $P'(X) = 2(X-a)Q(x) + (X-a)^2 Q'(X) + \alpha$

   $$\begin{cases} P(a) &= \alpha a + \beta \\ P'(a) &= \alpha \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} \alpha &= P'(a) \\ \beta &= P(a) - \alpha a = P(a) - aP'(a) \end{cases}$$

   Donc $R(X) = P'(a)X + P(a) - aP'(a) = P'(a)(X-a) + P(a)$

3 Exercice 3 : Compliqué ?

1. Montrer que $(X-1)(X-2)$ divise $P(X) = n((X-1)^{n+1} - X) + ((X-1)^n - X) + n + 1$.

   $P(1) = 0$ donc $(X-1)|P$, $P(2) = 0$ donc $(X-2)|P$ et $1 \neq 2$ donc $(X-1)(X-2)|P$
2. Montrer que $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ divise $(X-1)^2$.

   $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ donc 1 est racine de multiplicité 2 donc $(X-1)^2$

4 Exercice 4 : Multiplicité

Soit $n \geq 2$. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme.

$$P(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
P(2) &= n2^{n+2} - (4n+1) \times 2^{n+1} + 4(n+1)2^n - 4 \times 2^{n-1} \\
&= 2^{n-1}[2^3 n - (4n+1) \times 2^2 + 4(n+1) \times 2 - 4] \\
&= 2^{n-1}[8n - 16n - 4 + 8n + 8 - 4] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$P'(X) = (n+2) \times n \times X^{n+1} - (n+1)(4n+1)X^n + 4n(n+1)X^{n-1} - 4 \times (n-1)X^{n-2}$$

$$\begin{aligned}
P'(2) &= (n+2) \times n \times 2^{n+1} - (n+1)(4n+1)2^n + 4n(n+1)2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} \\
&= 2^{n-2}[8n^2 + 16n - 4(4n^2 + 5n + 1) + 8n^2 + 8 - 4n + 4] \\
&= 2^{n-2}[8n^2 + 16n - 16n^2 - 20n - 4 + 8n^2 + 8 - 4n + 4] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$P''(X) = (n-1)(n+2)n \times X^n - n(n+1)(4n+1)X^{n-1} + 4(n-1)n(n+1)X^{n-2} - 4(n-1)(n-2) \times X^{n-3}$$

$$\begin{aligned}
P''(2) &= (n-1)(n+2) \times n \times 2^n - n(n+1)(4n+1)2^{n-1} + 4(n-1)n(n+1)2^{n-2} \\
&\qquad - 4 \times (n-1) \times (n-2) \times 2^{n-3} \\
&= 2^{n-3}[8n(n+1)(n+2) - 4n(n+1)(4n+1) + 8n(n-1)(n+1) - 4(n-1)(n-2)] \\
&= 2^{n-3}[n(n+1)(8n + 16n - 4 + 8n - 8) - 4(n-1)(n-2)] \\
&= 2^{n-3}[4n^2 + 4n - 4n^2 + 12n - 8] \\
&= 2^{n-3}[16n - 8] \\
&= 2^{n-3} \times 2^3(2n-1) \\
&= 2^n(2n-1) \neq 0
\end{aligned}$$

5 Exercice 5 : Polynômes irreductibles

Soit $R(X) = X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$

1. Montrer que 1 est racine de R. Quelle est sa multiplicité ?
   $R(1) = -3 - 3 + 11 - 6 = 12 + 12 = 0$
   $R'(X) = 4X^3 - 9X^3 - 6X + 11$ donc $R'(1) = 15 - 15 = 0$
   $R''(X) = 12X^2 - 18X - 6$ $R''(1) = -12 \neq 0$

   $$\left\{ \begin{array}{ccl} R(1) & = & R'(1) = 0 \\ R''(1) & \neq & = 0 \end{array} \right.$$

   $\implies$ 1 est racine de R de multiplicité 2.
   Donc $(X-1)^2 \mid R(X)$

2. En déduire une factoristation de R en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

   $$\begin{array}{rr|l} & X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{3-3} & \underline{-X^4 + 2X^3 \quad - X^2} & X^2 - X - 6 \\ & -X^3 - 4X^2 + 11X & \\ & \underline{X^3 - 2X^2 \quad + X} & \\ & -6X^2 + 12X - 6 & \\ & \underline{6X^2 - 12X + 6} & \\ & 0 & \end{array}$$

   $R(X) = (X-1)^2(X^2 - X - 6)$
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25 > 0$ $X_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$
   donc $R(X) = (X-)^2(X-3)(X+2)$