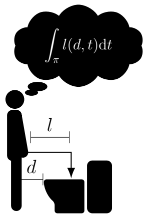
Espaces Vectoriels

Quentin ROBERT, Julie FIADINO



Gents Do It With Precision

Table des matières

1 Vecteurs et Espaces vectoriels 3

Exercice 1.1 3
1.1 . . . 3
1.2 . . . 3
1.3 . . . 3

Exercice 1.2 3
2.1 . . . 3
2.2 . . . 4
2.3 . . . 4
2.4 . . . 4

Exercice 1.3 5
3.1 . . . 5
3.2 . . . 5
3.3 . . . 5

Exercice 1.4 5
4.1 . . . 5
4.2 . . . 5

2 Sous-espaces vectoriels 6

Exercice 2.5 6
5.1 . . . 6
5.2 . . . 7

Exercice 2.6 8

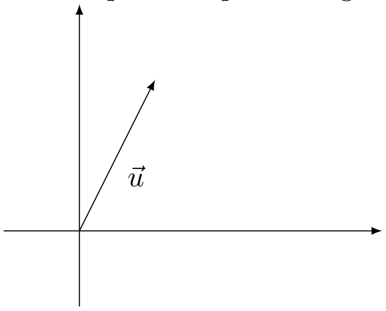
Exercice 2.7 8
7.1 . . . 8
7.2 . . . 8
7.3 . . . 8
7.4 . . . 9
7.5 . . . 9
7.6 . . . 9
7.7 . . . 10
7.8 . . . 10
7.9 . . . 10
7.10 . . . 10
7.11 . . . 10
7.12 . . . 11
7.13 . . . 11
7.14 . . . 11
7.15 . . . 11

1 Vecteurs et Espaces vectoriels

Exercice 1.1

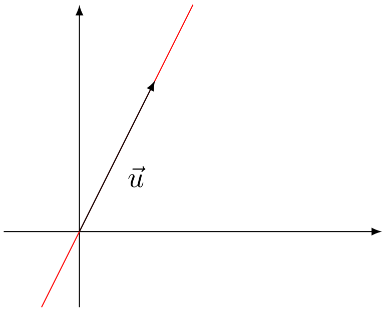
1.

On le représente par un segment partant de l'origine du repère.



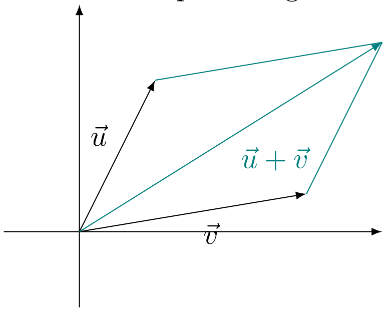
2.

On décrit la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point O



3.

On décrit un parallelograme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si les 2 vecteurs ne sont pas colinéaires.



Exercice 1.2

1.

L'élément neutre pour $+$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

L'élémént neutre pour $\cdot$ est 1

car $1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2.

Vérifions que E est un REV

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de E

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a'+a & b'+b \\ c'+c & d'+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= B + A \end{aligned}$$

3.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ deux éléments de E

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' \\ c'+c'' & d'+d'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(a'+a'') & b+(b'+b'') \\ c+(c'+c'') & d+(d'+d'') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+a')+a'' & (b+b')+b'' \\ (c+c')+c'' & (d+d')+d'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \\ &= (A+B)+C \end{aligned}$$

4.

L'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $A \in E$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Le symétriqe de A est $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$1 \cdot A = A, \forall A \in E$

Soit $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\lambda \cdot (\alpha \cdot A) = (\lambda\alpha) \cdot A$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$(\lambda + \alpha) \cdot A = \lambda \cdot A + \alpha \cdot A$

Donc E est un REV.

Exercice 1.3

1.

$E\{f : I \to \mathbb{R}\}$, $0_E : \forall x \in I$, $0_E(x) = 0\}$

2.
Le mot "interne" signifie que l'addition se fait entre deux éléments de E.
$$+ = \left\{ \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (f,g) \longrightarrow +((f,g)) = f+g \end{array} \right\}$$

3.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{array} \right\}$
Le mot "externe" signifie que l'opération se fait entre un élément de E et un élément extérieur ($\in \mathbb{R}$).
$$\cdot = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\ (\alpha, f) \longrightarrow \cdot((\alpha, f)) = \alpha \cdot f \end{array} \right\}$$

Exercice 1.4

1.
$+ = \{\forall\, (u_n)\, (v_n)$ deux suites, $(u_n) + (v_n) = (w_n)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n\}$

$\cdot = \{\forall \alpha (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\alpha \cdot (u_n) = (\alpha^n u_n)\}$

2.
L'élément neutre pour $\cdot$ est 1 car $1 \cdot (u_n) = (1^n u_n) = (u_n)$
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ n'est pas un REV car $(\lambda + \alpha) \cdot (u_n) \neq \lambda \cdot (u_n) + \alpha \cdot (u_n)$

Contre-Exemple :
Pour $\alpha = 2$, $\lambda = 3$, $(u_n) = (1)_n$

$$\begin{aligned} (3+2) \cdot (1)_n &= 5 \cdot (1)_n \\ &= (5^n)_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (1)_n + 2 \cdot (1)_n &= (3^n)_n + (2^n)_n \\ &= (3^n + 2^n)_n \neq (5^n)_n \end{aligned}$$

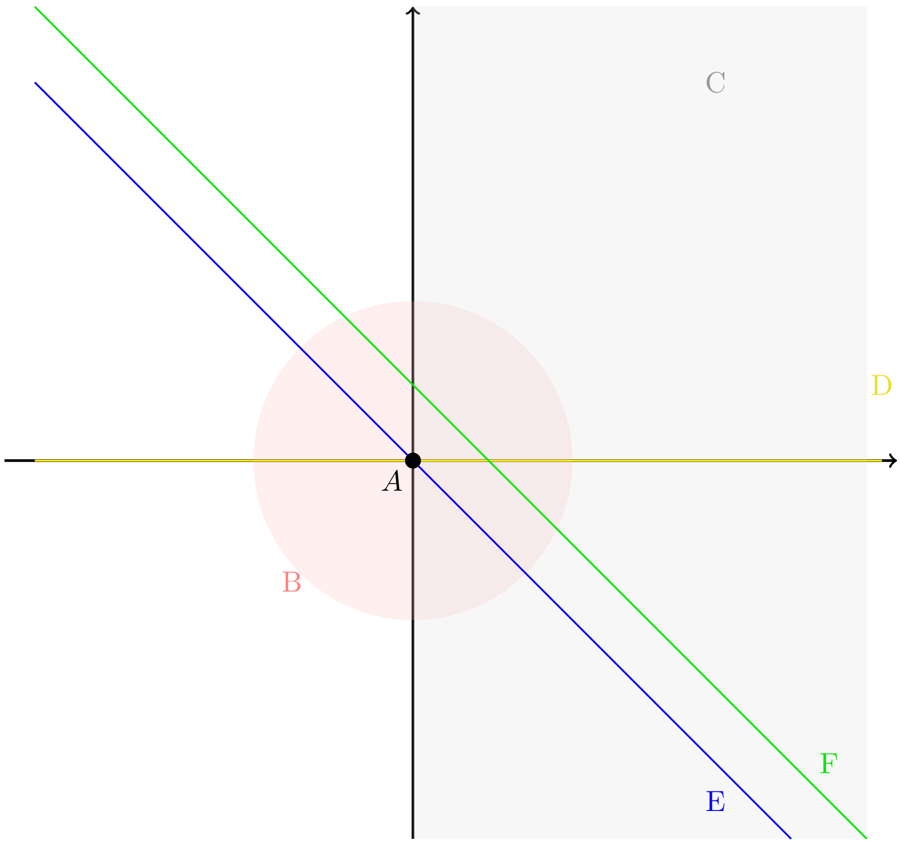
Définition: Si on prend la loi usuelle

Alors $(E, +, \cdot\ )$ est un $\mathbb{R}$.E.V

2 Sous-espaces vectoriels

Pour la suite du TD tout les $\mathbb{R}.E.V = \mathbb{R}$ Espace Vectoriel , E.V = Espace Vectoriel et S.E.V = Sous-Espace Vectoriel.

Exercice 2.5



1.
a/ Sur $\mathbb{R}^2$:

*A : $\{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{(0,0)\} = \{0\}$

(a)- On a $(0,0) \in$ A

(b)- Soit $(u,v) \in A^2 \longrightarrow u + v = (0,0) + (0,0) = (0,0) \in A$

(c)- Soit $u \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda \cdot u &= \lambda \cdot (0,0) \\ &= (\lambda \cdot 0, \lambda \cdot 0) \\ &= (0,0) \in A\end{aligned}$$

Donc A est un Sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{R}^2$

*B : Disque de rayon 1 et de centre $0 = (0,0)$
$\Longrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

B n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^2$ car si on prend $\lambda = 2$, et $u = (1,0) \in B$.

$\lambda \cdot u = 2 \cdot (2,0) \notin B$.

*C : Demi - plan n : $x \geqslant 0$
$\Longrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0\}$

C n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^2$, il n'est pas stable par la loi exterieur :
Contre exemple : $\lambda = -3, u = (1,2)$

$\lambda \cdot u = -3 \cdot (1,3) = (-3,-6) \notin C$

*D : axe des abscisses.
$\Longrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 0\}$ Soit que $\{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$

(a)- $O_{\mathbb{R}^2} \in D$

(b)- Soit (u, v) $\in$ D, $u = (x,0)$ et $v = (y,0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\Longrightarrow u + v = (x,0) + (y,0) = (x+y,0) \in D$

(c)- Soit $u = (x,0) \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\Longrightarrow \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x,0) = (\lambda \cdot x, 0) \in D$

Donc D est un S.E.V de $\mathbb{R}^2$.

*E : Droite $x + y = 0$
$\Longrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}$ Soit que $\{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$

(a)- $0_{\mathbb{R}^2} \in E$ car $0 + 0 = 0$

(b)- Soit $(u,v) \in E$,
$u = (x,y) = (x,-x)$
$v = (x',y') = (x',-x')$

$$\begin{aligned} u + v &= (x,-x) + (x',-x') \\ &= (x+x', -x-x') \\ &= (x+x', -(x+x')) \end{aligned}$$

(c)- Soit $u = (x,-x) \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\Longrightarrow \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x,-x) = (\lambda \cdot x, -\lambda \cdot x) \in E$

Donc E est un S.E.V de $\mathbb{R}^2$.

*F : Droite $x + y = 1$ $\Longrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=1\}$

$0 + 0 \neq 1 \Longrightarrow (0,0) \notin F$
Donc F n'est pas un S.E.V.

b/ Il n'est pas possible que deux S.E.V d'une même E.V soit disjoint car le 0_E est présent et donc en commun entre chaque S.E.V.

c/Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:
*$\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (Soit le $(0,\ 0)$).
*Les droites vectorielles (droites passants par l'origine).
*$\mathbb{R}^2$ lui-même.
2.
Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
*$\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (Soit le $(0,\ 0,\ 0)$).
*Plan vectoriels (Passants par l'origine).
*Droites vectorielles (Passants par l'origine).
*$\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.6

Pas encore fait.

Exercice 2.7

1.
F $= \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$
. On a F $\subset \mathbb{R}^3$ et on sait que $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$.E.V.

*On a $0+0+0=0 \Longrightarrow (0,\ 0,\ 0) \in F \Longrightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F$.

*Soit $(u,v) \in F^2$, on pose $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$.
On a $u \in F \Longrightarrow x+y+z=0$.
$v \in F \Longrightarrow x'+y'+z'=0$.

Donc :

$$\begin{aligned}
u+v &= (x,y,z)+(x',y',z') \quad {\scriptstyle (1)}\\
&= (x+x',y+y',z+z') \quad {\scriptstyle (2)}\\
&= (x+x')+(y+y')+(z+z') \quad {\scriptstyle (3)}\\
&= (x+y+z)+(x'+y'+z') \Longrightarrow 0+0=0 \quad {\scriptstyle (4)}\\
&= (x+x',y+y',z+z') \in F \Longrightarrow u+v \in F.
\end{aligned}$$

-Ligne 1 à 2 utilisation de la loi usuelle.
-Ligne 3 à 4, on cherche à vérifier si $u+v \in F$, donc on addition leur composants pour le voir.

*$\forall\ u \in F,\ \forall\ \lambda \in F,\ \lambda \cdot u \in F$.
Soit $u=(x,y,z) \in F$ avec $x+y+z=0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Donc $\lambda \cdot x + \lambda \cdot y + \lambda \cdot z = \lambda(x+y+z)$
$= \lambda \cdot 0 = 0$
$\Longrightarrow \lambda \cdot \in F$
F est un S.E.V de $\mathbb{R}^3$, donc il est aussi un $\mathbb{R}$.E.V.

2.

F $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=1\} \subset \mathbb{R}^3$, avec $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$.E.V.
*Rien que la première condition nous permets de montre que F n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^3$:
$0+0+0 \neq 1$.
Donc F n'étant pas un S.E.V de $\mathbb{R}^3$, ne sera pas un E.V.

3.

F $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \cdot y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, avec $\mathbb{R}^3$ un E.V.
Si on prend $(1,0,42)$ et $(0,1,42) \in F$.

On aura :
$(1, 0, 42) + (0, 1, 42) = (1, 1, 84) \notin$ car $1 \times 1 \neq 0$

F n'étant pas stable par addition, il n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^3$ et donc par conséquent n'est pas un $\mathbb{R}$.E.V.

4.

F $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^3$

Pareil pour ici, si on prend $(1, 0, -1)$ et $(2, 0, 2) \in F$.
On aura :
$(1, 0, -1) + (2, 0, 2) = (3, 0, 1) \Longrightarrow \notin F$ car $3^2 \neq 1^2$.

F n'est pas stable par addition ici non plus, il n'est donc pas un S.E.V de $\mathbb{R}^3$ et donc par conséquent n'est pas un $\mathbb{R}$.E.V.

5.

F $= \{u \in \mathbb{R}^3, u = \alpha \cdot (0, 1, 2) + \beta \cdot (1, 2, 3), (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$, avec $\mathbb{R}^3$ un E.V.

*$0_{\mathbb{R}^3} \in F$ il suffit de prendre $\alpha = \beta = 0$
$\Longrightarrow (0 \cdot (0, 1, 2) + 0 \cdot (1, 2, 3)) = 0$
*Soit $(u, v) \in F^2$, alors :
$u = \alpha \cdot (0, 1, 2) + \beta \cdot (1, 2, 3),\ (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$
$u = a \cdot (0, 1, 2) + b \cdot (1, 2, 3),\ (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow u + v &= \alpha \cdot (0, 1, 2) + \beta \cdot (1, 2, 3) + a \cdot (0, 1, 2) + b \cdot (1, 2, 3) \\ &= (\alpha + a)(0, 1, 2) + (\beta + b)(1, 2, 3) && ((\alpha + a)\ et\ (\beta + b) \in \mathbb{R}) \\ &= \lambda(0, 1, 2) + \theta(1, 2, 3) && (avec\ \lambda = (\alpha + a)\ et\ \theta = (\beta + b))\end{aligned}$$

Donc $u + v \in F$.

* Soit $u \in F, \lambda \in \mathbb{R}$
On a $u = \alpha \cdot (0, 1, 2) + \beta \cdot (1, 2, 3)$, avec $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Longrightarrow \lambda \cdot u = \lambda \cdot \alpha(0, 1, 2) + \lambda \cdot \beta(1, 2, 3)$
Pareil ici $(\lambda \cdot \alpha)$ et $(\lambda \cdot \beta) \in \mathbb{R}$ donc on peut les remplacer par une autre inconnu tel :
$(a(0, 1, 2) + b(1, 2, 3))$
Donc $\lambda \cdot u \in F$

Donc F est bien un S.E.V de $\mathbb{R}^3$ et est donc un $\mathbb{R}$.E.V.

6.

F $= \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = C,\ P(X + 1) = P(X)\} \subset \mathbb{R}[X]$

P $\in F \Longrightarrow$ admet une infinité de racines.
Or le seul pôlynome qui admets une infinité de racines est le pôlygone nul.

Donc $0_{\mathbb{R}[X]}$, F est bien un S.E.V de R[X].

*$0_{\mathbb{R}[X]} \in F$

$* *$ Soit $\lambda \cdot O_{\mathbb{R}[X]} + O_{\mathbb{R}}[X] = O_{\mathbb{R}}[X] \Longrightarrow \lambda \cdot O_{\mathbb{R}[X]} + O_{\mathbb{R}}[X] \in F$
(On fait ici les deux en un, l'addition et la multiplication a un λ)

Donc F est aussi un $\mathbb{R}$.E.V.

7.

F $= \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' = O_{\mathbb{R}[X]}\} = \mathbb{R}_0[X]$

$*0_{\mathbb{R}[X]} \in F$ car $O'_{\mathbb{R}[X]} = O_{\mathbb{R}[X]}$

$* *$ Soit $\lambda \in \mathbb{R},\ (P,Q) \in F$ (De même ici on verif les deux en même temps)
Verifions si $(\lambda \cdot P + Q) \in F$:

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot P + Q) &= (\lambda \cdot P') + Q' \\ &= \lambda \cdot P' + Q' \\ &= \lambda \cdot O_{\mathbb{R}[X]} + O_{\mathbb{R}[X]} \Longrightarrow O_{\mathbb{R}[X]}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow (\lambda \cdot P + Q) \in F$

Donc F est un S.E.V de $\mathbb{R}[X]$ et est donc un $\mathbb{R}$.E.V.

8.

F $= \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (U_n)$ convergente$\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles est un $\mathbb{R}$.E.V).

On ne l'a pas demonté mais F est un $\mathbb{R}$.E.V car vu qu'elle est convergente * la suite null $\Longrightarrow 0$, * l'addition de deux suites convergente $\Longrightarrow$ suite convergente et * la multiplication d'un λ a une suite convergente $\Longrightarrow$ suite convergente.

9.

F $= \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 3U_n - 1\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On a $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \notin F$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \neq 3 \times 0 - 1$

Donc F n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et n'est donc pas un $\mathbb{R}$.E.V.

10.

F $= \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (U_n) divergente\}$

F n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, car étant divergent il ne contient pas la suite nulle.

F n'est donc pas un $\mathbb{R}$.E.V.

11.

F $= \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$*0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F \qquad (0 = 2 \times 0 - 0)$

* Soit U_n et V_n deux suites de F $\Longrightarrow U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+2} = 2V_{n+1} - V_n$
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $W_n = U_n + V_n$

$U_{n+2} + V_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n + 2V_{n+1} - V_n$
$\Downarrow \quad = 2(U_{n+1} + V_{n+1}) - (U_n + V_n)$
$W_{n+2} = 2W_{n+1} - W_n$
Donc $W_n \in F$.

* Soit $(U_n)_{(n\in\mathbb{N})}, \in F,\ \lambda \in \mathbb{R}$, et toujours $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$.
$\lambda \cdot U_{n+2} = \lambda(2U_{n+1} - U_n)$
$= \lambda \cdot 2U_{n+1} - \lambda \cdot U_n$
$\Longrightarrow \lambda \cdot U_n \in F$

Donc F est un S.E.V de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc un $\mathbb{R}$.E.V.

12.

F $= \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - (U_n)^2\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Contre exemple : Si on prend la suite constante $(1)_n \in F$ et on prend $\lambda = 2$.
$\lambda \cdot (1)_n = 2(1)_n \Longrightarrow (2)_n \notin F$ (car $2 \neq 2 \times 2 - 2^2$)
F n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et n'est donc pas un $\mathbb{R}$.E.V.

13.

F $= \{(U_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \alpha 2^n + \beta 3^n + \gamma 4^n,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}\}$
*F contient la fonction nul car pour $(\alpha = \beta = \gamma = 0)$
* * Soit $(U_n)_n = (\alpha_1 2^n + \beta_1 3^n + \gamma_1 4^n)_n$ et $(V_n)_n = (\alpha_2 2^n + \beta_2 3^n + \gamma_2 4^n)_n$,
deux éléments de F, et $\lambda\ et\ \mu \in \mathbb{R}$
$\lambda \cdot U_n + \mu \cdot V_n = \lambda(\alpha_1 2^n + \beta_1 3^n + \gamma_1 4^n) + \mu(\alpha_2 2^n + \beta_2 3^n + \gamma_2 4^n)$
$= (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)2^n + (\lambda\beta_1 + \mu\beta_2)3^n + (\lambda\gamma + \mu\gamma)4^n$
Donc $\lambda \cdot (U_n)_n + \mu \cdot (V_n)_n \in F$
Donc F est un S.E.V de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et est par conséquent un $\mathbb{R}$.E.V.

On ss place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ est la fonction nulle qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe 0.

14.

F $= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ |f$ croissant $\}$
* La fonction nulle étant croisssante et décroissante elle $\in F$.
* Cependant pour $g : x \longrightarrow x$ contenu dans F son symétrique $-g : x \longrightarrow -x$ ne sera pas compris.
Donc F n'est pas un E.V.

15.

F $= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}|f(0) = 0$.
* Contient donc la fonction nulle.
* * Soit $g,\ h \in F$ et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, alors :
$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$.
Donc $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in F$
Donc F est stable par combinaison linéaire donc F est un S.E.V de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.