FGV - Fundação Getulio Vargas

Visão Computacional - Lista 2

Professor: Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva
Monitor: Tulio Koneçny

A lista deverá ser entregue no formato .pdf
(preferencia em LaTeX)
Entrega: 09/04/24

1 Verdadeiro ou Falso

Verifique qual das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, e demonstre no caso que for verdadeira (a demonstração pode ser por geometria sintética ou analítica):

a) Transformações afins $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preservam paralelismo.

b) Transformações projetivas $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ preservam paralelismo.

c) Isometrias $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que levam a origem na origem preservam ângulos.

d) Isometrias $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preservam ângulos.

e) Transformações projetivas $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ preservam a relação de perpendicularismo entre retas.

f) Transformações projetivas $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ levam circunferências em cônicas.

g) Transformações projetivas do $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ levam cônicas em cônicas.

2 Era uma vez, uma elipse que virou parábola

Considere uma elipse E, com focos sobre o eixo Ox e centro na origem, com equação:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Use coordenadas homogêneas para mostrar que a transformação projetiva $H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ que deixa invariante o vértice (-3,0), mas leva o outro (3,0) para um ponto ideal (infinito), transforma esta elipse em uma parábola. Determine a equação desta parábola em coordenadas cartesianas

3 Unicidade na homografia

Considere dois conjuntos de 4 pontos no plano projetivo em posição geral (quadriláteros não degenerados):

$$p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, ..., p_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad p'_1 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix}, ..., p'_4 = \begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Mostre que existe uma única homografia (transformação projetiva):

$$H : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2 \text{ tal que } H(p_i) = p'_i, \text{ com } i = 1...4$$

Ilustre o caso com formando o quadrado unitário, isto é

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e com p'_i sendo pontos de sua escolha.

4 Extra

4.1 Teorema de Pappus

Sejam r e r' duas retas paralelas, na qual A, B, C pertencem a r e A', B', C' pertencem a r'. Prove que para:

$$P = \overline{AB'} \cap \overline{A'B} \quad Q = \overline{AC'} \cap \overline{A'C} \quad R = \overline{BC'} \cap \overline{B'C}$$

temos P, Q, R colineares. Mostre que o resultado pode facilmente ser generalizado para r e $'r$ não paralelas, utilizando um ponto de fuga. Exiba um exemplo, no qual a reta formada pelos pontos P, Q, R é paralela a r (r e r' concorrentes).

Caso queira, segue em anexo um código do Geogebra com o Teorema de Pappus já implementado em retas paralelas.