Julián Beraún Centineo
19962/3

Matemáticas 3

Biblio - Devore
Walpole

Leer técnicas de conteo, combinaciones, permutaciones

Probabilidad → estudia exp. aleatorios → resultados no predecibles, repitiéndolos bajo las mismas condiciones tantas veces como fuera

se puede decir cuáles son todos los posibles resultados

Espacio muestral → conjunto de todos los posibles resultados de un exp. aleatorio. Se anota con **S**

Ejemplo 1) se tira un dado y se ve qué número queda arriba

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ó $S = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}$

2) Se tira una moneda 2 veces y se ve cuántas veces sale cara $S = \{0, 1, 2\}$

3) Se tira una moneda 2 veces y se ve qué ocurre en cada tiro

→ se define un par ordenado. $S = \{(c,c), (s,c), (c,s), (s,s)\}$

$\# S = 4$

→ Se define la cantidad de elementos del conjunto, si es finito, con $\# S$

4) se enciende una lámpara y se observa el número de horas hasta que se quema

conj. infinito no numerado $S = \{t \in \mathbb{R}, t > 0\} = (0, \infty)$

5) se tira el dado hasta que sale el 1 y se ve el n° de tiros necesario $S = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ → conj. infinito numerado

Evento o suceso → todo subconjunto del espacio muestral S.

Ejemplo: se tira un dado y $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
entonces $A = \{1, 3, 5\}$ → A es un evento de S, pues $A \subset S$

Se pueden describir los eventos con letras y palabras
→ A = "sale un número impar"

Si se tira el dado y sale el 5, entonces se dice que A ocurrió.
Como $5 \in A$

NOTA

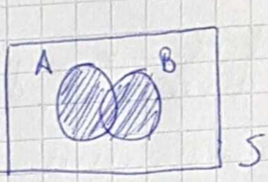
Hay 3 eventos especiales:

1) El espacio muestral está incluido en el espacio muestral
$S \subset S$, entonces S es un evento de S. Siempre ocurre

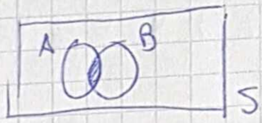
2) Conjunto vacío $= \emptyset \rightarrow$ conj. que no tiene elementos. Está incluido en cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset S$
$\emptyset$ no puede ocurrir porque no tiene elementos. $\emptyset$ es un evento de S.

3) A es un evento simple o elemental si A contiene un solo elemento (A conj. unitario)

$A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$

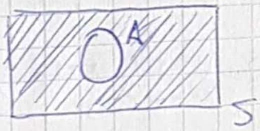


$A \cap B = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$

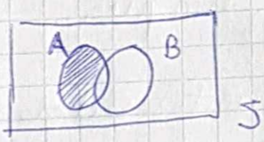


si $A \cap B = \emptyset$ se dice que son disjuntos y no es posible que ocurran simultáneamente

$A^c = \{x, x \in S \wedge x \notin A\}$



$A - B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$



Frecuencia relativa de un Evento: se repite un exp. aleatorio bajo las mismas condiciones N veces. Sea A un evento, entonces n_A es el nro. de veces que A ocurre en las N repeticiones. Proporción
$\rightarrow f_A = \frac{n_A}{N} \rightarrow$ frecuencia relativa del evento A. de veces que A ocurre.

$\rightarrow$ Propiedades: 1) $0 \leq f_A \leq 1$

2) $f_A = 1 \rightarrow$ si y solo si A siempre ocurre en las N repeticiones
$f_A = 0 \rightarrow$ " " " A nunca ocurre en las N repeticiones.

3) sean A y B tales que $A \cap B = \emptyset \rightarrow f_{A \cup B} = \frac{n_{A \cup B}}{N} = \frac{n_A + n_B}{N} = f_A + f_B$
si $A \cap B = \emptyset$

4) si $N \rightarrow \infty$ se puede verificar (pero no demostrar) en forma exp. que f_A tiende a un número.

NOTA

Definición axiomática de probabilidad

$S \rightarrow$ un espacio muestral asociado a un exp. aleatorio

Para un evento A de S se define probabilidad de A, $P(A)$, al número real que cumple las siguientes propiedades teóricas o axiomas.

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(S) = 1$

3) si A y B son eventos tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

4) generalización de la 3, se toma una secuencia infinita de eventos:

si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son mutuamente excluyentes de a 2 o sea $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ $\rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Nota: hay espacios muestrales infinitos

Observaciones: se tira una moneda 1 vez y $S = \{c, s\}$ (posibles resultados). Se anotan los eventos elementales $A_1 = \{c\}$ y $A_2 = \{s\}$

Entonces $S = A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\rightarrow \underset{\text{ax 2)}}{1 = P(S)} = \underset{\text{ax 3)}}{P(A_1 \cup A_2)} = \boxed{P(A_1) + P(A_2)}$ ① $\therefore$ la suma de los eventos elementales es 1.

si la moneda es normal $\rightarrow \boxed{P(A_1) = P(A_2)}$ ② (info extra característica del exp)

De ① y ② $= \begin{cases} 1 = P(A_1) + P(A_2) \\ 0 = P(A_1) - P(A_2) \end{cases} \rightarrow$ se resuelve

$1 = P(A_1) + P(A_1) = 2P(A_1) \rightarrow P(A_1) = \frac{1}{2} \therefore P(A_2) = \frac{1}{2}$

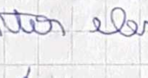
Propiedades derivadas a partir de los axiomas.

1) $P(\emptyset) = 0$

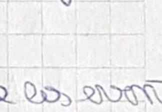
2) $P(A^c) = 1 - P(A)$

3) si $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$

4) si $A \subset B \rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$

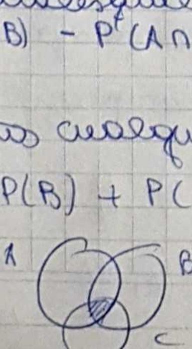


si A y B son eventos cualquiera $\rightarrow \boxed{P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)}$ generalización



5) si A y B son eventos cualesquiera
$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6) si A, B y C son eventos cualquiera
$\rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



NOTA

7) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes de a 2, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \rightarrow \text{inducción compl}$$

Cálculo de probabilidades en espacios muestrales finitos

Supongamos que se tira un dado y $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Llamamos los eventos elementales

$A_1 = \{1\}$ $A_2 = \{2\}$ $A_3 = \{3\}$ $A_4 \{4\}$ $A_5 = \{5\}$ $A_6 = \{6\}$

Entonces $S = \bigcup_{i=1}^{6} A_i$ y $A_1, \ldots, A_6$ son mutuamente excluyentes

$$\therefore 1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) = 1$$

En general en un espacio muestral finito, la suma de las probabilidades de los eventos elementales es igual a 1.

si el dado es normal $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_6)$ (es equiprobable)

$$\therefore 1 = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) = \sum_{i=1}^{6} p = 6p \rightarrow \boxed{p = \frac{1}{6}}$$

En general, si S es finito y equiprobable, $\rightarrow$ las probabilidades de los eventos elementales es igual a $\frac{1}{\#S}$

si $A = \{1,2,3\} \rightarrow A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$\therefore P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

En general para calcular la $P(A)$ siendo $A \subset S$, se deben sumar las probabilidades de los eventos elementales que forman A.

si S es equiprobable, entonces $P(A_i) = \frac{1}{6} \therefore P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{3}{6}$

$\frac{3}{6} = \frac{\#A}{\#S} \rightarrow$ si S es un espacio muestral finito equiprobable

y $A \subset S$, entonces $P(A) = \frac{\#A}{\#S}$

Ej: se tiene una urna con 15 bolillas distinguibles de las cuales 10 son blancas y 5 rojas

$\left| \begin{matrix} 1 \ldots 10^B \\ 11 \ldots 15R \end{matrix} \right|$ se extraen 2 bolillas al azar

puede ocurrir: 1) la extracción sea sin importar el orden (combinaciones)

2) " se hace con orden $\rightarrow$ con pares

i) sin reemplazo (sin reposición)

ii) con reemplazo (con reposición)

1) $\#S = \binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)!\,2!}$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}}$

2) $\#S = 15 \times 14$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{10 \times 9}{15 \times 14}$

3) $\#S = 15^2$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{10^2}{15^2}$

elementos de a 2, entonces

Nota: si hago pares ordenados, importa el orden.

Entonces el S se describe con elementos entre llaves

$$S = \{\{1,2\}, \ldots, \{1,6\}\}$$

na

a1

(a

iables)

Espacio muestral infinito numerable

Si S espacio muestral inf. numerable, lo anotamos $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ y anotamos a los eventos elementales

$A_i = \{a_i\}$ $i = 1, 2, 3, \dots$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$

Entonces $$1 \underset{\text{ax 2)}}{=} P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{ax 4)}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1$$

Si S es infinito numerable, no puede ser equiprobable. Si S fuera equiprobable, entonces $P(A_i) = p$ $i = 1, 2, 3 \dots$

$\rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p = \infty \rightarrow$ un absurdo esto es porque se partió de algo es falso

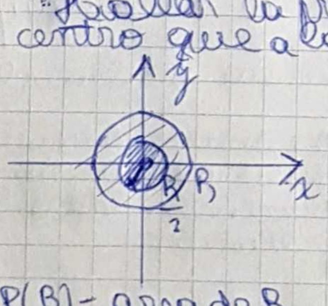
Si $B \subset S$, para calcular $B(B)$, se deben sumar las probabilidades de los eventos elementales que componen B.

Espacio muestral infinito no numerable

Solo consideramos espacios muestrales donde S sea un intervalo real de longitud finita o una región del plano de un área finita y además suponemos que un punto de S se elige al azar.

Se puede probar que si $B \subset S$, entonces $P(B) = \dfrac{\text{medida de } B}{\text{medida de } S}$

Ejemplo: en el interior de un círculo, se elige un punto al azar. Hallar la prob. de que el punto fuera más cercano al centro que a la circunferencia.



$$S = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$B = \left\{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$$

$$P(B) = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } S} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

si $C = \left\{(x, y);\ x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\} \rightarrow P(C) = \dfrac{\text{área de } C}{\text{área de } S} = \dfrac{\overset{\text{es una curva}}{0}}{\pi r^2} = 0$

Nota $\rightarrow$ $P(C)$ es 0 pero $C \neq \emptyset$ $\therefore$ C no es imposible, pero es muy raro que ocurra casi imposible.

Que $P(C)$ sea cero no implica que sea imposible

Cap 2: Probabilidad condicional.

Supongamos que tiramos un dado normal 2 veces.

$S = \{(1,1), \dots (1,3), \dots\} = \{(a,b),\ 1 \leq a \leq 6,\ 1 \leq b \leq 6\}$ $\#S = 36$

A: "En el primer tiro sale el 4" $A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B: "la suma de los numeros es 5" $= \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Ahora se quiere calcular $P(B)$ sabiendo que A ocurrió; lo anotamos $P(B/A)$

Podemos calcular $P(B/A)$ en forma intuitiva reduciendo el espacio muestral al evento A. Solo un elemento de A cumple con lo que pide B, (1,4)

$P(B/A) = \frac{1}{6}$. Análogamente $P(A/B) = \frac{1}{4} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A\cap B)}{\#S}}{\frac{\#B}{\#S}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B/A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#A}$ (siendo equiprobables)

En general, si A y B son eventos de un espacio muestral S, la probabilidad condicional de B dado que A ocurrió se define como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A) \neq 0 \quad (S \text{ no tiene que ser equiprobable})$$

Ej: se tiene una urna con 7 bolillas blancas y 3 rojas, distinguibles

①② ... ⑦B
⑧⑨⑩R

Se extraen al azar 2 bolillas importando el orden y sin reemplazo. $\#S = 10 \cdot 9$ S equip.

A: "La primer bolilla es blanca" B: "La segunda bolilla es blanca"

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{7 \times 9}{10 \times 9} = \frac{7}{10}$

$P(B/A) = \frac{6}{9}$ Al reducirse el espacio muestral, quedan 6 bolillas entre 9 blancas

| 6B 3R | ↘1
9

ó $P(B/A) = \frac{\frac{7\times 6}{10\times 9}}{\frac{7\times 9}{10\times 9}} = \frac{6}{9} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(B^c/A) = 1 - P(B/A)$ → Se puede probar que una prob condicional, si el elemento que condiciona queda fijo, cumple con la definición axiomática de probabilidad

Teorema de la multiplicación

Sean A y B dos eventos de un espacio muestral S entonces

$$\boxed{P(A\cap B) = P(B/A)\,P(A)}$$ → vale siempre (y viceversa)

En general, si $A_1, \dots, A_n$ son n eventos de un S. Entonces:

$P(A_1\cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\dots P(A_n/(A_1\cap\dots A_{n-1}))$ se extraen 4 en orden sin reemple.

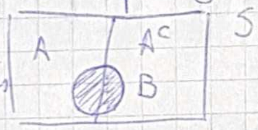
Ej: se tienen 10 bolillas, 7 blancas y 3 rojas. Cual es la prob. de que las 2 ultimas sean blancas.

A_i: "saco bolilla blanca en la i-esima extracción" $i = 1,2,3,4$

$$P(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3\cap A_4) = \underbrace{P(A_1^c)}_{3/10}\cdot\underbrace{P(A_2^c/A_1^c)}_{\frac{2}{9}}\cdot\underbrace{P(A_3/(A_1^c\cap A_2^c))}_{\frac{7}{8}}\cdot\underbrace{P(A_4/(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3))}_{\frac{6}{7}}$$

Teorema de la Probabilidad total

Se resuelve el primer ej. y se quiere calcular $P(B)$. Urna con 7 bolillas B) blancas y 3 rojas, se extraen 2 en orden y sin reemplazo.



→ $B = B\cap S = B\cap(A\cup A^c) = (B\cap A)\cup(B\cap A^c)$ → mutuamente excluyentes

→ $P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A^c)$

→ $P(B) = P(B/A)\,P(A) + P(B/A^c)\,P(A^c)$

Se calcula el evento B, la segunda bolilla es blanca

→ $P(B) = \frac{6}{9}\cdot\frac{7}{10} + \frac{7}{9}\cdot\frac{3}{10}$

En general, si $B\subset S$, $A_1, \dots, A_n$ son eventos de S tales que:

1) $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 2) $A_1, \dots, A_n$ mutuamente excluyentes de a dos

3) $P(A_i)\neq 0 \ \forall i$

$P(B) = P(B/A_1)\,P(A_1) + P(B/A_2)\,P(A_2) + \dots + P(B/A_n)\,P(A_n)$

En otras palabras, se toma una partición de S tal que se conozca la probabilidad.

Si se cumple 1), 2) y 3), entonces $A_1, \dots, A_n$ es una partición de S.

Ej.: Se tienen 3 urnas

3R 5B	2R 1B	2R 3B
1	2	3

Se elige una urna al azar, y luego se extrae una bolilla al azar. ¿Cuál es la prob. de que sea roja?

B: "la bolilla es roja" A_i: "se elige la urna i"

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$

Cada urna es una partición de S

A_1, A_2, A_3 son mutuamente excluyentes de a dos. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

Por el teorema de la prob total: $P(B) = P(B/A_1) . P(A_1) + P(B/A_2) . P(A_2) + P(B/A_3) . P(A_3)$

$$P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

Una firma de consultoría alquila autos de 3 agencias. 30% de la agencia A, 50% de la B y 20% de la C. Si el 7% de los autos de A, el 10% de B y el 2% de C tienen neumáticos en mal estado, ¿cuál es la prob. de que la firma alquile un vehículo con neumáticos en mal estado.

D: "la firma alquila un auto con neumáticos en mal estado"
A: "el auto alquilado es de la agencia A" $P(A) = 0,3$ $P(D/A) = 0,07$
B: " " " agencia B" $P(B) = 0,5$ $P(D/B) = 0,1$
C: " " " agencia C" $P(C) = 0,2$ $P(D/C) = 0,02$

$P(D) = 0,07 . 0,3 + 0,5 . 0,1 + 0,02 . 0,2$

Se toma A, B y C como partición de S porque $A \cup B \cup C = S$

¿Cuál es la prob de que un auto con neumáticos en mal estado provenga de la agencia B? $P(B/D) = ?$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B \cap D)}{P(D/A) P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) . P(C)}$$

prob. total

$$P(B/D) = \frac{P(D/B) \, P(B)}{P(D/A) P(A) + P(D/B) . P(B) + P(D/C) . P(C)} \rightarrow \text{Bayes}$$

T. multipli

Teorema de Bayes

Sea $B \subset S$, $P(B) \neq 0$, se toma una partición de S, entonces se puede calcular la prob de una de las partes usando el teorema de Bayes:

$$\boxed{P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) \, P(A_j)}{\sum_{j=1} P(B/A_j) \, P(A_j)}}$$

ej 12, 13, 14 → prob total y bayes.

Independencia de Eventos

Sean A y B eventos de un S. Puede ocurrir que $P(B/A) = P(B)$, entonces ~~solo~~ A y B son eventos independientes. Si A ocurrió, no modifica la probabilidad de ocurrencia de B.

Observaciones:

1) A y B eventos independientes

$$P(A \cap B) \underset{\uparrow}{=} P(B/A) \cdot P(A) = P(B)\,P(A)$$

T. multiplicación

2) si A y B cumplen $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ entonces $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{P(A)}\,P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$

$\therefore$ de 1) y 2) A y B son eventos independientes si y solo si: $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

3) si A y B mutuamente excluyentes, generalmente, eso no significa independencia ($P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$)

en general, $P(B/A) = 0$ pero $P(B) \neq 0$ (se sabe que uno ocurrió y por ende, el otro no)

4) si se tira un dado 2 veces, A es el evento que indica qué ocurre en el 1er tiro y B lo que ocurre en el segundo.

Entonces A y B son independientes

3) Análogamente, pasa lo mismo con una moneda

4) Si tenemos 2 urnas con bolillas y se extrae al azar una bolilla de cada 1.

A es el evento que indica que bolilla se extrajo de la urna 1
B " " " " " " " urna 2

A y B son independientes.

Teorema $\rightarrow$ si A y B son independientes entonces A^c y B^c son independientes, B^c y A son indep. y A^c y B son independientes.

Independencia de más de dos eventos

Sean $A_1, \dots, A_n$ eventos de un espacio S. Estos son indep. si y solo si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) \quad k = 2, 3, \dots, n$$

k: cant de elem. que se toman.

Ej: A_1, A_2, A_3 son eventos indep., entonces:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2)$ $\qquad P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) P(A_3)$ $\qquad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$

Se tienen que cumplir <u>todas</u> las igualdades

Ej. Se tira un dado normal 5 veces. a) Prob. de que siempre salga el 1? b) Prob. de que nunca salga el 1? c) Prob. de que alguna vez salga el 1?

A_i: En el tiro i-ésimo sale el 1. $\quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

Notar que $A_1, A_2, \dots, A_5$ son independientes $\qquad P(A_i) = \frac{1}{6}$

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \underset{\text{indep.}}{=} P(A_1) P(A_2) P(A_3) P(A_4) P(A_5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$

b) $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) = P(A_1^c) P(A_2^c) P(A_3^c) P(A_4^c) P(A_5^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c)$

De Morgan $\Rightarrow \begin{cases} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$

De Morgan $\Rightarrow = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$

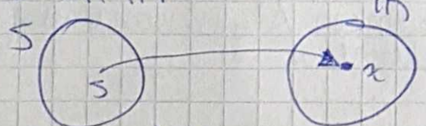
$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Cap 3

Variables Aleatorias

Supongamos que S un espacio muestral asociado a un exp. aleatorio. Una variable aleatoria (va) es una función de S en $\mathbb{R}$

S en $\mathbb{R}$ $\qquad$ Notación: $X, Y, Z, \dots$



$X(s) = x$

Ej: 3 de ellos tienen etiqueta de 10Ω y los otros 3 de 20Ω. El ing. quiere conectar una resistencia de 10Ω y una de 20Ω para crear una resistencia de 30Ω.

~~Se supone~~

$\underbrace{9\Omega \;\; 10\Omega \;\; 11\Omega}_{10\Omega} \pm 1$ $\qquad \underbrace{19\Omega \;\; 20\Omega \;\; 21\Omega}_{20\Omega} \pm 1$ $\quad$ El ing. elige al azar uno etiquetado con 10Ω y luego otro de 20Ω

$S = \{(9,19), (9,20), (9,21), (10,19), (10,20), (10,21), (11,19), (11,20), (11,21)\}$

$\#S = 9$ y S equiprobable

X: "suma de las resistencias elegidas"

$X((9,19)) = 28$ $X((9,20)) = 29$ $X((9,21)) = 30$ $X((10,19)) = 29$

$X((10,20)) = 30$ $X((10,21)) = 31$ $X((11,19)) = 30$ $X((11,20)) = 31$

$X((11,21)) = 32$

La imagen de esta función se denomina rango o recorrido de X. y se anota R_x

En el ejemplo: $R_x = \{28, 29, 30, 31, 32\}$. Se considera a R_x como un nuevo espacio muestral. Y si $B \subset R_x$, entonces B es un evento de R_x

Anotamos a los eventos elementales o simples de R_x:

$\{X=28\}, \{X=29\}, \{X=30\}, \{X=31\}, \{X=32\}$

En general, si $B \subset R_x$ para calcular $P(B)$, se busca en S el evento A equivalente a B. ej: el evento $(9,19)$ es equivalente a $\{X=28\}$; entonces $P(B) = P(A)$

$P(X=28) = P(\{(9,19)\}) = \frac{1}{9} = \frac{1}{\#S}$

$P(X=29) = P(\{(9,20),(10,19)\}) = \frac{2}{9}$

$P(X=30) = \frac{3}{9}$ $P(X=31) = \frac{3}{9}$ $P(X=32) = \frac{1}{9}$

En general, las v.a. se clasifican según su recorrido R_x. Si R_x es finito o infinito numerable, entonces X es discreta.
Si R_x es un intervalo (conjunto infinito no numerable), X es una v.a continua.

Variables Aleatorias Discretas

Supongamos que X es una v.a discreta con rango R_x
Anotamos $R_x \{x_1, \ldots, x_n\}$ o $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$

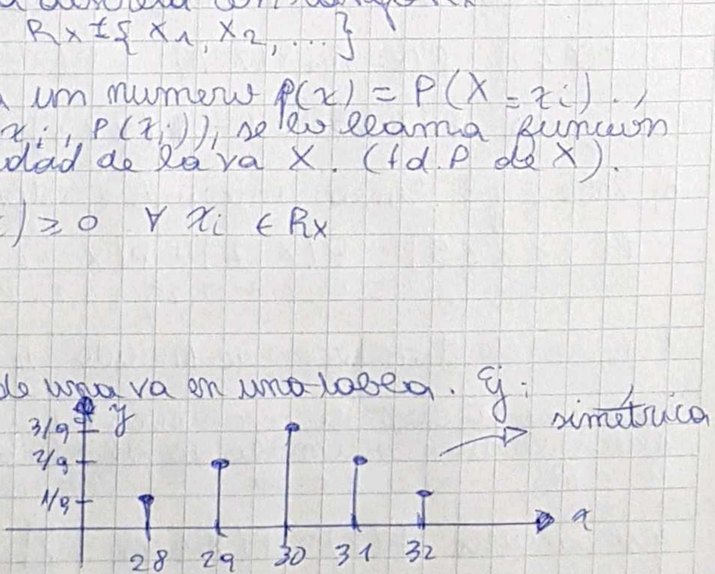
A cada x_i de R_x se le asigna un número $p(x) = P(X = x_i)$.
Al conj. de todos los pares $(x_i, P(x_i))$, se lo llama función de distribución de probabilidad de la v.a X. (f.d.P de X).

Debe cumplirse que; 1) $P(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in R_x$

2) $\sum_{x_i \in R_x} P(x_i) = 1$

Es costumbre presentar la fdP de una v.a en una tabla. Ej:

x_i	28	29	30	31	32
$P(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$



"Ejemplo: Un embarque de 8 micro PC similares para un negocio contiene 3 que están defectuosos. Una escuela hace una compra al azar de ~~dos~~ de ~~estos~~ PC.

Sea X: "nro de PC defectuosos comprados por la escuela"

Hallar la fdP de X. $R_X = \{0, 1, 2\}$

$\boxed{3D \quad 5ND}$ 2 sin orden

8

$S = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{3,5\}, \dots\}$

$\# S = \binom{8}{2}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28} \qquad P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

Ejemplo: Un negocio de PC que atiende pedidos por correo tiene 6 líneas telefónicas.

X: "nº de líneas telefónicas en uso en un momento especificado"

Supongamos que fdP de X es:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,20	0,06	0,04

Calcular la prob de los siguientes eventos:

a) A lo sumo 3 líneas están en uso $\{X \leq 3\}$

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,1 + 0,15 + 0,2 + 0,25$

b) Menos de 3 líneas están en uso $P(X < 3) = 0,1 + 0,15 + 0,2$

c) Por lo menos 3 líneas están en uso $\{X \geq 3\}$

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 0,25 + 0,2 + 0,06 + 0,04$

Otra forma: $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (0,1 + 0,15 + 0,2)$

d) Entre 2 y 5 líneas inclusive están en uso $\{2 \leq X \leq 5\}$

$P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$
$= 0,2 + 0,25 + 0,2 + 0,06$

Función de distribución acumulada de una va discreta

Sea X una va discreta con rango R_X y fdP $P(x_i)$. Se define la función distribución acumulada de X (fda de X) como $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < \infty$

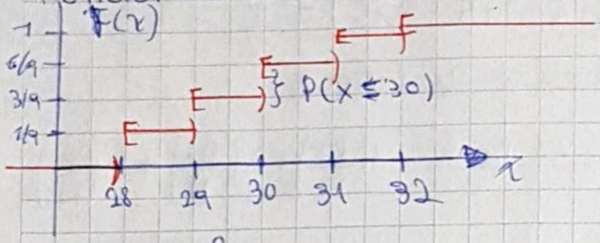
y se calcula $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

En el ejemplo:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 0,1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 0,25 \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 0,45 \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ 0,70 \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ 0,90 \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ 0,96 \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ 1 \text{ si } 6 \leq x \end{cases}$$

NOTA

Función de distribución acumulada de una va discreta (fda)



En general la fda de una va discreta es creciente, escalonada, las discontinuidades se encuentran en los x_i del rango, y la magnitud del salto en x_i es $P(X=x_i)$

rango = R_x

Si X es una va discreta con $R_x=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $x_1<x_2<\dots<x_n$

$$\begin{cases} P(X=x_1)=F(x_1) \\ P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}) & 2\le i\le n \end{cases}$$ <u>recursiva</u>

Ej: Un negocio de PC que atiende pedidos por correo y tiene 6 líneas telefónicas

2 X: "nº de líneas que están en uso"

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	0,1	0,15	0,20	0,25	0,20	0,06	0,04

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0,1 & 0\le x<1 \\ 0,25 & 1\le x<2 \\ 0,45 & 2\le x<3 \\ 0,70 & 3\le x<4 \\ 0,9 & 4\le x<5 \\ 0,96 & 5\le x<6 \\ 1 & 6\le x \end{cases}$$

$P(X\le 3)=F(3)=0,7$ $P(X<3)=F(2)=0,45$

$P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-0,45$

$P(2\le X\le 5)=P(X\le 5)-P(X<2)=F(5)-F(1)=0,96-0,25$

En general $$\begin{cases} P(x_i\le X\le x_j)=F(x_j)-F(x_{i-1}) \\ i<j \\ P(x_i<X\le x_j)=F(x_j)-F(x_i) \end{cases}$$

Esperanza de una VA discreta

Sea X una va discreta con fdp $P(x_i)$. Se define esperanza de X y se anota: $E(X)$ o μ_x o μ

y es igual: $\boxed{E(X)=\sum_{x_i\in R_x} x_i\,P(x_i)}$

Sea X: "nº de fallas de un alambre de cobre de 1" de longitud"

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,48	0,39	0,12	0,01

$E(X)=0.(0,48)+1.(0,39)+2.(0,12)+3.(0,01)$

No tiene porque coincidir con alguno de los valores de R_x

Es una especie de promedio. En el caso anterior, no puede dar menos de 0 ni ~~más~~ que 3.

Ej: X: "n que queda en la cara de arriba" un dado

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

→ dist. uniforme discreta.

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2} = 3,5$$

Ahora se tira el dado N veces, se observan los valores

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} = \frac{n_1 . 1 + n_2 . 2 + \dots + n_6 . 6}{N} = 1\left(\frac{n_1}{N}\right) + 2\left(\frac{n_2}{N}\right) + \dots + \left(\frac{n_6}{N}\right)6.$$

$\frac{n_i}{N} \Rightarrow$ frec. relativa del evento $\{X=i\}$

Se puede probar que: $p_i = P(X=i)$

$$P\left(\left|\frac{n_i}{N} - p_i\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Esperanza de una función de una va discreta

Se tiene una urna con 7 bolillas distinguibles, de las cuales 4 son rojas y 3 negras.

S equiprobable $\boxed{4R \; 3N}$ 7 → 2 con orden y sin reemplazo. $\#S = 7\times 6$

X: "n de bolillas rojas extraídas" $R_X = \{0,1,2\}$ $P(X=0) = \frac{3\times 2}{7\times 6} = \frac{1}{7}$

$P(X=1) = \frac{4\times 3 + 3\times 4}{7\times 6} = \frac{4}{7}$ $P(X=2) = \frac{4\times 3}{7\times 6} = \frac{2}{7}$

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$E(X) = 0 . \frac{1}{7} + 1 . \frac{4}{7} + 2 . \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

Por cada bolilla roja, se gana 2 pesos. Y por cada negra, se pierden 3 pesos.
Y: "ganancia obtenida luego de extraer 2 bolillas"

$$Y = 2X - 3.(2-X) = 5X - 6$$

En general, si X es una va discreta y $h(x)$ es una función, entonces $Y = h(X)$ es otra va. En el ejemplo $h(x) = 5x-6$

Nos interesa calcular $E(Y)$. Se puede calcular sin hallar previamente la fdP de Y, utilizando el siguiente teorema:

Sea X una va discreta con fdP $P(x_i)$. Sea $h(x)$ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea $Y = h(X)$

Entonces $E(Y) = E(h(X)) = \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) P(x_i)$

En el ejemplo. $E(Y) = E(5X-6) = \sum_{x_i\in R_X} (5x_i - 6) P(x_i)$

$= (5.0-6)P(X=0) + (5.1-6)P(X=1) + (5.2-6).P(X=2)$

$(-6).\frac{1}{7} + (-1).\frac{4}{7} + 4.\frac{2}{7} = \boxed{-\frac{2}{7}}$ → si juego muchas veces, a la larga pierdo.

En general, si $h(x) = ax+b$, o sea $Y = aX+b$, entonces

$$E(Y) = E(aX+b) = \sum_{x_i\in R_X}(ax_i+b)P(x_i) = a\sum_{x_i\in R_X} x_i P(x_i) + b\underbrace{\sum_{x_i\in R_X} P(x_i)}_{1} = \boxed{aE(X)+b}$$

NOTA

Propiedad de linealidad de esperanza: $E(aX+b) = aE(X)+b$

En el ej: $Y = 5X-6 \to E(Y) = 5E(X)-6 = 5\left(\frac{8}{7}\right)-6 = \frac{40}{7}-\frac{42}{7} = -\frac{2}{7}$

Varianza de una va discreta

Sea X una va discreta fdp $P(x_i)$. La varianza de X se anota $V(X)$ ó σ_X^2 ó σ^2. Es el numero $V(X) = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^2 P(x_i)$

$x_1 \quad x_2 \quad E(X) \quad x_n$

si $V(X) = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^2 P(x_i) = E\left[(X-\mu)^2\right]$

$h(x_i) = (x_i-\mu)^2 \to$ ya que $E(Y) = E(h(a)) = \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) P(x_i)$

Propiedades

1. $V(X) \geq 0$
2. $\sqrt{V(X)} = \sigma_X = \sigma$ Es la variación estándar de X

Si se desarrolla el cuadrado del binomio y se distribuye, entonces

3. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
4. $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Ejemplo: X: "nº de fallos de un alambre de cobre de 1 pulgada"

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,48	0,39	0,12	0,01

Hallar $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X) = 0 \cdot 0,48 + 1 \cdot 0,39 + 2 \cdot 0,12 + 3 \cdot 0,01 = 0,66$

$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,48 + 1^2 \cdot 0,39 + 2^2 \cdot 0,12 + 3^2 \cdot 0,01 =$

$\therefore V(X) = 0,5244$ y $\sqrt{V(X)} = \sqrt{0,5244} = 0,724 = \sigma_X$ (misma unidad de medida de la variable)

Variables aleatorias discretas importantes

Distribución binomial

Exp. binomial → supongamos que tenemos un exp. aleatorio cualquiera. Se realiza n repeticiones independientes de E. (n fijado de antemano). Sea A un evento asociado a E. En cada rep. de E se observa si ocurre A o no. La $P(A) = p$ es la misma en cada rep. del experimento.

Entonces, si se cumple, se dice que se tiene un exp. binomial.

Ejemplos:

1. Lo tira una moneda 10 veces. Supongamos que $P(\text{cara}) = \frac{3}{4}$
   A: "sale cara"
   E: "tirar una moneda" $n=10$ Los tiros de una moneda son indep. y $P(\text{cara})$ es la misma en cada tiro.

2. Se tiene una urna con 10 bolillas distinguibles, de las cuales 3 son R, 2 son B y 5 son V.

$\frac{\boxed{3R\ 2B\ 5V}}{10}$ 4 al azar con orden y con reemplazo.

En cada extracción se observa si la bolilla es blanca o no.

$n = 4$

Las extracciones son indep. pues hay reemplazo

E: "extraer 1 bolilla al azar"

A: "se extrae bolilla blanca"

$P(A) = \frac{2}{10}$ en cada extracción

Si la extracción era sin reemplazo, el exp no es binomial, ya que falla en la independencia de las extracciones.

$\left| \frac{n}{N} < 0,05 \right| \rightarrow$ si saco con o sin reemplazo, habría independencia por las pequeñas variaciones del resultado

Consideramos la v.a X: "nº de veces que sale cara en los 10 tiros de la moneda"

$R_X = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ A_i: "En el tiro i, sale cara" $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$

Los tiros son indep. y $P(A_i) = P(A) = \frac{3}{4}$ (moneda cargada)

$P(X=0) = P(A_1^c \cap \ldots A_{10}^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \ldots P(A_{10}^c) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10}$

$P(X=1) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{10}^c) + \ldots = \binom{10}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-1}$

$P(X=2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{10}^c) + \ldots = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-2}$

$P(X=k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-k}$ $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$

En un exp. binomial cualquiera, si X es "n de veces que ocurre A en las n rep. del exp." $R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$ $\left| P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right|$

decimos que X tiene dist. binomial con parametros n y p.

Notación: $X \sim B(n, p)$

En el ejemplo anterior, cual es la prob. de que en 10 tiros se obtengan 4 caras? X: nº de veces que sale cara en los 10 tiros de la moneda.

$X \sim B(10, \frac{3}{4})$ $P(X=k) = \binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-k}$

$P(X=4) = \binom{10}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-4}$

¿prob de que a lo sumo se obtengan 4 caras en 10 tiros?

$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = F(4)$

app = Probability distribution

Teorema: si $X \sim B(n, p)$, entonces $\boxed{E(X) = np}$ y $\boxed{V(X) = np(1-p)}$

El evento A se le puede decir éxito

X: "nº de éxitos en n rep. de un exp."

Distribución Geométrica

Supongamos que se tiene un exp. aleatorio y se tiene A un evento asociado al exp. $P(A) = p$. Se realizan repeticiones indep. del exp. hasta que ocurre el evento A por primera vez. Se asume que P(A) se mantiene constante en cada rep.

Sea X: "nº de rep. hasta que ocurre A inclusive" $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{Z}^+$

A_i: "ocurre A en la rep. i" $i = 1, 2, 3, \ldots$

$P(X=1) = P(A_1) = p(1-p)^0$

$P(X=2) = P(A_1^c \cap A_2) = P(A_1^c) P(A_2) = (1-p)^1 p$ (independencia)

$P(X=3) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1^c) P(A_2^c) P(A_3) = (1-p)^2 p$

$\boxed{P(X=k) = (1-p)^{k-1} p}$ X tiene dist. geometrica con parametro p

$X \sim G(p)$ sin tablas, pero con acumulada

Observación: $P(X=1)=p$ $\quad P(X=k)=P(X=k-1).(1-p)$ sucesión geométrica

$$F(k)=P(X\le k)=\sum_{i=1}^{k} p.(1-p)^{i-1}=\boxed{1-(1-p)^k}$$ k del rango.

En general, $F(x)=\begin{cases} 1-(1-p)^{[x]} & x\ge 1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$ Se queda con la parte entera, porque $x\in\mathbb{R}$ y usamos los $\mathbb{Z}$

Ejemplo: Un proceso que llena paquetes se detiene cada vez que se detecta 1 cuyo peso no cumple con la especificación. Suponga que cada paquete tiene prob. de 0,01 de no cumplir con la especificación y que los pesos son indep. ¿Cuál es la prob. de que a lo sumo se tengan que llenar 80 paquetes o lo sumo para encontrar el primero que no cumple? ¿Determine el n° medio de paquetes llenados antes de que se detenga el proceso?

Teorema: $X\sim G(p)\rightarrow E(X)=\frac{1}{p}$ $\quad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

X: "n° de paquetes que llena un proceso hasta encontrar el primero que no cumple con la especificación"

A: "el peso no cumple con la especificación" $\quad P(A)=0{,}01$

$X\sim G(0{,}01)$ $\quad P(X=k)=0{,}01\cdot(1-0{,}01)^{k-1}$

a) $P(X\le 80)=F(80)=1-(1-0{,}01)^{80}=1-0{,}99^{80}=0{,}5525$

b) $E(X)=\frac{1}{0{,}01}=100$

Distribución Binomial Negativa (generalización del anterior)

Se tiene un exp. aleatorio y A es un evento asociado al exp. $P(A)=p$ y se realizan rep. independientes hasta que ocurre A por r-ésima vez. P(A) es constante en cada rep. del exp.

X: "n° de rep. necesarios del exp. hasta que ocurre A por r-ésima vez inclusive" $\quad R_X=\{r, r+1, r+2, \dots\}$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}}$$ $X\sim BN(r,p)$
sin tablas ni acumulada

Teorema: si $X\sim BN(r,p)\rightarrow E(X)=r\frac{1}{p}$ $\quad V(X)=r.\frac{1-p}{p^2}$

Distribución Hipergeométrica

Supongamos que se tiene una urna con 25 bolillas de las cuales 5 son blancas y 20 son rojas. Se extraen al azar sin orden 4 bolillas

5B 20R → 4
25

X: "n° de bolillas blancas extraídas"

$$P(X=k)=\frac{\binom{5}{k}\binom{25-5}{4-k}}{\binom{25}{4}}$$ $R_X=\{0,1,2,3,4\}$

Se tiene una población, de lo que sea, N objetos, dividida en 2 categorías: los que tienen una característica y los que no la tienen.

NOTA

población de N objetos.

M tienen la característica y los restantes N − M no la tienen. Se extraen al azar n objetos sin importar el orden.

Sea X: "nº de objetos con la característica particular entre los n elementos extraídos"

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Para establecer el rango:

$$\begin{cases} ① \ 0 \leq k \leq M \\ ② \ 0 \leq n-k \leq N-M \end{cases}$$

de ② se despeja k $\rightarrow -n \leq -k \leq N-M-n$

$\therefore \quad -N+M+n \leq k \leq n$

$\therefore \max(0, -N+M+n) \leq k \leq \min(M, n)$

~~Teorema~~ Notación: se dice que X tiene dist. hipergeométrica con parámetros $X \sim H(n, M, N)$

Teorema: si $X \sim H(n, M, N) \rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{M}{N} \cdot n \\ V(X) = n \frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \end{cases}$

Nota:

si $N \rightarrow \infty$, $\frac{M}{N} \rightarrow p$, entonces $P(X=k)$ tiende a $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (binomial)

Se parece a una binomial. Entre ambas, se diferencian en la independencia

Ej: un embarque de 120 alarmas contra robo contiene 5 defectuosos, si 3 son elegidos al azar sin orden y se embarcan a un cliente. ¿Cuál es la prob. de que le toque 1 defectuoso?

X: "nº de unidades defectuosas recibidas por el cliente"

$X \sim H(n=3, M=5, N=120)$ $\quad P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{115}{3-k}}{\binom{120}{3}}$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{115}{3-1}}{\binom{120}{3}} = 0,11670$$

$\frac{3}{120} < 0,05 \rightarrow$ La dist. hipergeo. se tiene que parecer a una binomial

Usando la aprox. binomial $X \approx B\left(n=3, p=\frac{5}{120}\right)$

$$P(X=1) \approx \binom{3}{1}\left(\frac{5}{120}\right)^1\left(1-\frac{5}{120}\right)^{3-1} = 0,1148$$

NOTA

Distribución Poisson

Sea X una va discreta y $\lambda > 0$. X tiene dist. Poisson con parametro λ si su fdP es $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Notación: $X \sim P(\lambda)$

Podemos verificar que tenemos una dist. de probabilidad:

① $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} > 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

② $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$

Teorema: si $X \sim P(\lambda)$ entonces $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$

Aplicaciones de la dist. Poisson

1) Aproximación Poisson a la binomial

Supongamos $X \sim (n, p)$, se puede probar que cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ pero de manera tal que $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$, entonces $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[p \to 0]{n \to \infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

regla practica: cuando $np < 7$, entonces $P(X=k) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ con $\lambda = np$

- $n \geq 100$, $p \leq 0{,}01$, $np \leq 20$ (esta es más exigente, con la primera funciona bien).

Ej: X: "nº de articulos defectuosos" $X \sim (10, 0{,}1)$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}7361$

Como $n.p = 1 < 7$, podemos aplicar la aproximación Poisson

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$
$= \frac{e^{-1} 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = 0{,}7358$

Ej: ~~En una prueba de tarjeta de circ~~
X: "n de diodos que fallan" $X \sim (200, 0{,}01)$

a) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}858034$

si usamos la aprox Poisson, los cuentos se simplifican
$X \approx P(\lambda)$ $\lambda = np = 2$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0{,}857$

2) La dist. Poisson describe los llamados "procesos de Poisson"

Interesa observar eventos que ocurren de forma aleatoria en un intervalo de tiempo fijado. Por ejemplo, el intervalo $(0,t)$. Supongamos que:

① La prob. de que ocurra exactamente un evento en $(0,t)$ es la misma para todo intervalo de longitud t y es igual a αt si la longitud del intervalo es muy pequeña

② La prob. de que ocurran 2 o más eventos en un intervalo de long. t es la misma para todos los intervalos de longitud t, y es casi cero si la longitud del intervalo es muy pequeña.

③ El número de ocurrencias en el intervalo I_1 es indep. del número de ocurrencias en el intervalo I_2 si I_1 e I_2 no se superponen (pueden ser de distinta longitud).

Si se cumplen 1, 2 y 3, se dice que tenemos un proceso de Poisson.

X: "nº de eventos que ocurren en el intervalo $(0,t)$". Se puede probar que X tiene dist. Poisson. $\lambda = \alpha t$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^k}{k!} \qquad E(X) = \lambda = \alpha t \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{E(X)}{t}}$$ tasa o rapidez del proceso.

Ej: En un mostrador los clientes llegan a un promedio de 1.5 por minuto.

a) Prob. de que a lo sumo 4 lleguen en un minuto dado

b) al menos 3 clientes lleguen en un intervalo de 2 min.

a) X: "n de clientes que llegan al mostrador en un minuto"

$X \sim P(\lambda)$ $\lambda = \alpha t = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$

$$P(X=k) = \frac{e^{-1,5}\, 1{,}5^k}{k!} \longrightarrow P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} P(X=k) = 0{,}98142$$

b) Y: "nº de clientes que llegan al mostrador en 2 min".

$Y \sim P(\lambda) \longrightarrow \lambda = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ $\qquad P(Y=k) = \frac{e^{-3}\, 3^k}{k!}$

$$P(Y \geq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X=3) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}423 = 0{,}577$$

Estos fueron los procesos de Poisson temporales. Análogamente, se pueden describir los procesos de Poisson espaciales.

El número de fallas en un cable sigue un proceso de Poisson con promedio de 0,6 para 100 pies.

a) Prob. de exactamente 2 fallas en un cable de 200 pies

b) Prob. de exact. 1 falla en los primeros 100 pies y exactamente 1 en los segundos 100 pies.

a) X: "nº de fallas en un cable de 200 pies" $\quad X \sim P(\lambda) \quad \lambda = \alpha \cdot l = 0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$ (unidad = 100 pies)

$$P(X=k) = \frac{e^{-1,2}\, 1{,}2^k}{k!} \qquad P(X=2) = \frac{e^{-1,2}\, 1{,}2^2}{2!} = 0{,}216$$

b) 0 — 100 — 200

X_1: "nº de fallas en los primeros 100 pies" $\quad X_1 \sim P(\lambda)$

X_2: " " segundos 100 pies" $\quad X_2 \sim P(\lambda)$ $\quad \lambda = 0{,}6$

$$P(\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\}) = P(X_1=1)\,P(X_2=1) = (0{,}32928)^2 = 0{,}108429$$

Usa la prop. ③ intervalos indep. — indep.

Variables aleatorias Continuas

Sea X una va con R_X, si R_X es un intervalo real, entonces X es una va continua.

Al ser R_X un intervalo real, se puede dar la siguiente defi: X es una va continua si existe una $f(x)$ no negativa tal que para todo $B \subset \mathbb{R} \to P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$

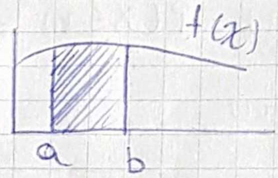
$f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X (fdP de X)

Observaciones:

① $1 = P(-\infty < X < \infty) \to$ prob de que X tome un valor real

$\boxed{1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} \to$ análogo a $1 = \sum_{x_i \in R_X} P(x_i)$

② $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$



Interpretamos la $P(a \leq X \leq b)$ como el area bajo $f(x)$ entre a y b

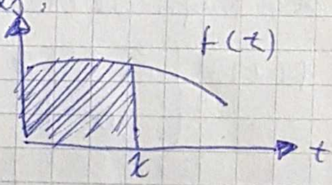
③ $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

④ $P(X \leq a) = P(X < a) + \underbrace{P(X = a)}_{=0}$ $\therefore P(X \leq a) = P(X < a)$

$\to P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$
$= P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

La Fda de una va continua con fdP $f(x)$ es:

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \underline{\underline{-\infty < x < \infty}}$



Observaciones

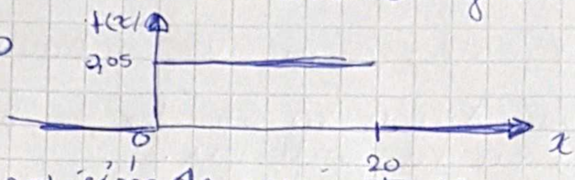
① $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad F(b) - F(a)$

② $F'(x) = f(x)$ en los x donde la $F(x)$ es derivable

Ejemplo:
Sea la va continua X: "corriente en mA en un conductor delgado de cobre" con fdP

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}05 & 0 \le x \le 20 \\ 0 & cc \end{cases}$$



a) ¿Cuál es la prob de que una medición de corriente sea menor que 10 mA?

$$P(X<10) = \int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{10} 0{,}05\,dx = \int_{0}^{10} 0{,}05\,dx$$

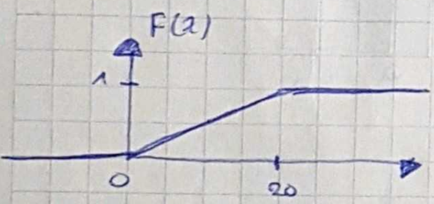
$$= 0{,}05x \Big|_{0}^{10} = 0{,}05(10-0) = 0{,}5$$

b) ¿Cuál es la prob. que una medición esté entre 5mA y 15mA?

$$P(5 \le X \le 15) = \int_{5}^{15} 0{,}05\,dx = 0{,}05x \Big|_{5}^{15} = 0{,}05(15-5) = 0{,}5$$

c) Hallar la Fda

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \; x<0 \\ \int_0^x 0{,}05\,dt & si \; 0 \le x \le 20 \\ 1 & si \; x>20 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \; x<0 \\ 0{,}05x & si \; 0<x<20 \\ 1 & si \; x>20 \end{cases}$$



En general, la Fda de una va continua es una función continua.

Esperanza de una va continua
Sea X una va continua con Fdp $f(x)$

$$E(X) = \mu_x = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Ej: X: "prop. de impurezas en una muestra de mineral".

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & si \; 0<x<1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0\,dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3 + x^2\,dx$$

$$= \left(\frac{3}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{17}{24}$$

Sea X una va continua con fdP $f(x)$. Sea $h(x)$ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $Y = h(X)$ $\longrightarrow$ $E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$ Teorema

Siguiendo el ejemplo: Y: "valor en dólares de la muestra"

$Y = 5 - 0,5X \qquad E(Y) = \int_0^1 (5-0,5x)\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)dx = \dots = \frac{223}{46}$

En general si $h(x) = ax+b$ entonces $Y = aX+b$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\,dx$$

$$= a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx}_{E(X)} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx}_{=1}$$

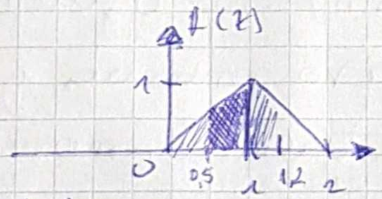
En el ejemplo anterior $Y = 5-0,5X$

$E(Y) = -0,5\,E(X)+5 = -0,5\left(\frac{17}{24}\right)+5$

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$$

Ej: 1) X: "tiempo total (en unidades de 100 horas) que un adolescente utiliza en 1 año el estéreo"

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$



a) $P(X < 1,2) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{1,2}(2-x)\,dx$

b) $P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 x\,dx$

5) Y: "nº kW hora que el adolescente gasta al año"

$Y = 60X^2+39X \rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}(60x^3+39x)\,dx$

$$= \int_0^1 (60x^3+39x)x\,dx + \int_1^2 (60x^2+39x)(2-x)\,dx$$

Varianza de una va continua

Sea X una va continua con fdP $f(x)$

$$V(X) = \sigma_x^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx = E\left[(X-E(X))^2\right]$$

$h(x) = (x-E(X))^2$

Propiedades

① $V(X) \geq 0$ ② $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

③ $V(aX+b) = a^2V(X)$

Distribución uniforme continua

Sea X una va continua, sean $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

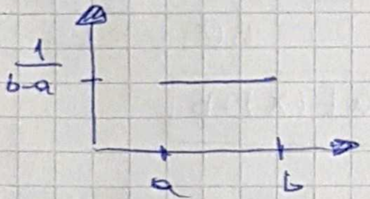
X tiene distribución uniforme continua en el intervalo (a, b) si su fdP es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & cc \end{cases}$$

Notación: $X \sim U(a, b)$

Su Fda es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Teorema si $X \sim U(a, b)$ entonces

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad y \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución normal o gaussiana

Sea X una va continua y $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$

X tiene distribución normal con parametros μ y σ si su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Notación $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

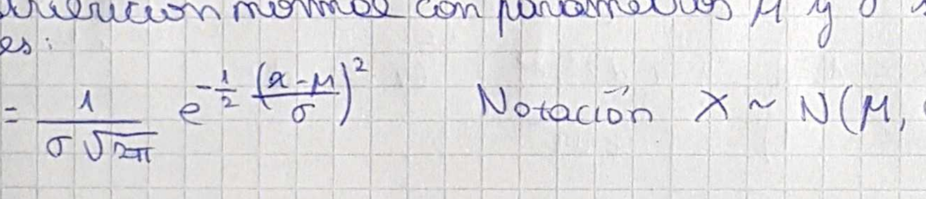
Observación

① $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ eje x es una asintota horizontal

② $f(\mu - a) = f(\mu + a)$ en $x = \mu$ ~~eje~~ está el centro de simetría de la grafica $f(x)$

③ $f'(x) = 0 \rightarrow x = \mu$ se puede verificar que en $x = \mu$ la grafica de $f(x)$ tiene un maximo absoluto

④ $f''(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \mu - \sigma \\ x = \mu + \sigma \end{cases}$ se puede verificar que en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ la gráfica es concava hacia abajo y fuera de ese rango es concava hacia arriba



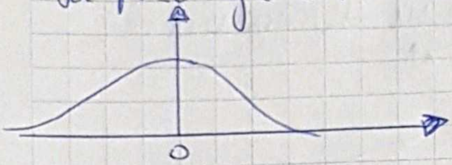
μ es parametro de posición σ es parametro de escala

Cuando σ disminuye, los valores se juntan y aumenta su altura (más puntiaguda. Cuando σ aumenta pasa lo opuesto, y la grafica es mas chata

Teorema → si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $E(X) = \mu$ (por la simetría en torno a μ)

$V(X) = \sigma^2$

Si $\mu=0$ y $\sigma=1$ entonces se tiene $X\sim N(0,1)$, normal estándar



$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\Phi(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Para calcular $\Phi(x)$ se usan tablas de la Fda $N(0,1)$

Si $X\sim N(0,1)$, al ser simetrica $\Phi(-x)=P(X\le -x)=P(X>x)$
$=1-P(X\le x)$
$=1-\Phi(x)$

$\boxed{\therefore\ \Phi(-x)=1-\Phi(x)}$

Si $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$

Para calcular $F(x)$ se usa el siguiente teorema: si $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ y $Y=aX+b$ se puede probar que Y es tambien normal $Y\sim N(\underbrace{a\mu+b}_{E(X)},\underbrace{a^2\sigma^2}_{V(X)})$

y ademas se tiene $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ entonces $Y\sim N(0,1)$
se dice que se "estandarizó" la va X.

Ejemplo, si se quiere calcular $P(X\le x)$, hay que estandarizar

$\to P(X\le x)=P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Y\sim N(0,1)}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$X\sim(3,9)$ $\mu=3$ $\sigma^2=9$

a) $P(2<X<5)=P\left(\frac{2-3}{3}<\frac{X-3}{3}<\frac{5-3}{3}\right)$

$P(a<x<b)=F(b)-F(a)$ $\to$ $=\Phi\left(\frac{2}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=\Phi(0{,}66)-\Phi(-0{,}33)$

c) $P(|X-3|>6)=1-P(|X-3|\le 6)=1-P(-6\le X-3\le 6)$

$=1-P\Big(-\frac{6}{3}\le\underbrace{\frac{X-3}{3}}_{Y\sim N(0,1)}\le\frac{6}{3}\Big)$ si estaba siendo X restado por otro numero, habría que despejarlo y ahí restar por 3.

$=1-[\Phi(2)-\Phi(-2)]$

$=1-[\Phi(2)-(1-\Phi(2))]=1-[2\Phi(2)-1]=1-2\Phi(2)+1=2-2\Phi(2)$

Se distribuye normalmente el volumen de latas llenadas por una maquina con media 12,05 y desviacion estandar 0,03
¿Que prop. de latas tiene menos de 12 oz.?

X: "volumen de llenado de una lata tomada al azar (en oz)"

$X\sim N(12{,}05,\ 0{,}03^2)$ $P(X<12)=P(X\le 12)=P\left(\frac{X-12{,}05}{0{,}03}\le\frac{12-12{,}05}{0{,}03}\right)$

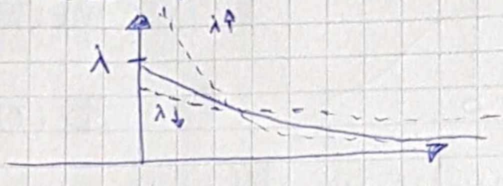
$=\Phi\left(\frac{12-12{,}05}{0{,}03}\right)=\Phi(-1{,}666)$

Distribución Exponencial

Sea X una va continua y $\lambda > 0$

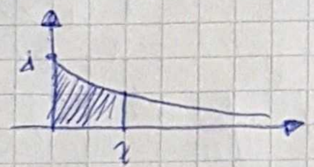
X tiene dist. exponencial con parametro λ si su densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

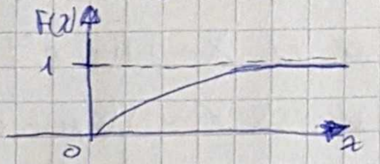


Notacion $X \sim Exp(\lambda)$

La Fda es: $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt & si\ x \geq 0 \end{cases}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Teorema: si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Propiedades: ① se relaciona con proceso de Poisson. Si tenemos un proceso de Poisson temporal (o no) y X mide "el n° de ocurrencias en $(0,t)$" $\rightarrow X \sim P(\alpha t)$ $\alpha t = \lambda$

Sea Y "tiempo entre 2 ocurrencias consecutivas"

Se puede probar que Y tiene dist. exponencial con par λ

Una masa radioactiva emite particulas de acuerdo a un proc. de Poisson con una tasa de 15 particulas por min.
¿Cual es la prob de que transcurran 5 segundos antes de la siguiente emision?

X: "n° de part emitidas en $\underline{1\ \text{minuto}}$" (segundo) $X \sim P(\lambda)$ $\lambda = 15 \cdot \frac{1}{60} = \frac{15}{60}$

Y: "tiempo $\underline{\text{en segundos}}$ entre 2 emisiones sucesivas"

Se hizo un cambio de unidades de tiempo para que coincidan los parametros

$X \sim Exp\left(\frac{15}{60}\right)$ $P(Y > 5)$

$F(y) = 1 - e^{-\frac{15}{60} y} \rightarrow P(Y > 5) = 1 - P(\cancel{X} \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{15}{60} 5}\right) = e^{-\frac{15}{60} 5}$

② Falta de memoria

Se tiene un circuito, sea X: "tiempo de duración en años de 1 circuito integral" $X \sim Exp(0{,}5)$ $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (1 - e^{-0,5 \cdot 3}) = e^{-0,5 \cdot 3}$

$F(x) = 1 - e^{-0,5 x}$

Tengo uno que ya lleva 4 años ¿Prob de que funcione otros 3 años mas?

$$P(X > 3+4 / X > 4) = \frac{P(\{X > 3+4\} \cap \{X > 4\})}{P(X > 4)} = \frac{P(X > 3+4)}{P(X > 4)}$$

$$= \frac{1 - (1 - e^{-0,5(3+4)})}{1 - (1 - e^{-0,5 \cdot 4})} = \frac{e^{-0,5(3+4)}}{e^{-0,5 \cdot 4}} = \frac{\cancel{e^{-0,5 \cdot 4}} \cdot e^{-0,5 \cdot 3}}{\cancel{e^{-0,5 \cdot 4}}} = e^{-0,5 \cdot 3}$$

En general, si $X \sim Exp(\lambda)$, la prob de $\underline{P(X > s+t \,/\, X > s) = P(X > t)}$ con $s>0$, $t>0$

Si una va continua tiene prop de falta de memoria, entonces es dist exponencial

Ejemplo: El tiempo de vida de un fusible tiene dist. exponencial con media de 2 años. Si un fusible tiene un año y sigue funcionando, ¿cuál es la prob de que funcione 2 años más por lo menos?

$X \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad E(x) = \frac{1}{\lambda} = 2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$$P(X > 2+1 \,/\, X > 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{falta} \\ \text{de memoria}}}{=} P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-0,5 \cdot 2}) = e^{-0,5 \cdot 2} = e^{-1}$$

Leer desigualdad de Chevychev

Capitulo 6: Variables aleatorias bidimensionales.

Sean X e Y dos va. Se denomina va bidimensional al par (X, Y). Si ambas variables, X e Y son discretas, entonces (X, Y) es una va bidimensional discreta.

Si ambas variables son continuas, entonces (X, Y) es una va bidimensional continua.

Anotamos el rango R_{XY}, que es un conjunto de pares ordenados
$R_{XY} = \{(x_i, y_j);\ x_i \in R_X,\ y_j \in R_Y\}$

A cada par (x_i, y_j) se le asigna un numero $P(x_i, y_j)$, y ~~$P(x_i, y_j)$~~
y $P(x_i, y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(X = x_i, Y = y_j)$

Al conjunto de todos los pares $((x_i, y_j), P(x_i, y_j))$ se lo llama función de dist de probabilidad conjunta de (X, Y)
(fdP conjunta de (X, Y))

Debe cumplirse: a) $P(x_i, y_j) \geq 0$

b) $\sum_{x_i} \sum_{y_j} P(x_i, y_j) = 1$

Ejemplo: se seleccionan al azar 2 repuestos de un boligrafo de una caja que contiene 3 azules, 2 rojos y 3 verdes.
Sea X: "n° de repuestos azules extraidos"
Y: "n° de repuestos rojos extraidos"

a) Hallar la función de dist. Prob. conjunta de (X, Y)

X \ Y	0	1	2
0	3/28	6/28	1/28
1	9/28	6/28	0
2	3/28	0	0
	15/28	12/28	1/28 = 1

$$P(X=0, Y=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

b) Hallar la prob. de que el total de repuestos azules y rojos extraídos sea menor o igual que 1.

$P(X+Y\leq 1) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=0, Y=1)$

$P(X+Y\leq 1) = \frac{3}{28} + \frac{9}{28} + \frac{6}{28} = \frac{9}{14}$

• Observación: los eventos de la forma $\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}$ son eventos simples o elementales/simples de R_{XY}.

• Al tener la fdp conjunta de (X,Y), tenemos las prob. de los elementos simples de R_{XY}.

Funciones de distribución marginales de X e Y

Supongamos en el ej anterior: $P(X=0) = P(X=0, (\{Y=0\}\cup\{Y=1\}\cup\{Y=2\}))$

Se distribuye la intersección: $= P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2)$

$= \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{1}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

Análogamente: $P(X=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2)$

$\frac{9}{28} + \frac{6}{28} + 0 = \frac{15}{28}$

$P(X=2) = P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) = \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28}$

Notar que se encontró la fdp de la va X

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{1}{28}$

Análogamente se puede hallar la fdP de Y

$P(Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) = \frac{15}{28}$

$P(Y=1) = \frac{12}{28}$ $\quad P(Y=2) = \frac{1}{28}$

Entonces se dice que se encontraron las fdP marginales de X e Y

c) Calcular $E(X)$ y $E(Y)$: $E(X) = 0\cdot\frac{10}{28} + 1\cdot\frac{15}{28} + 2\cdot\frac{3}{28} = \frac{3}{4}$

$E(Y) = 0\cdot\frac{15}{28} + 1\cdot\frac{12}{28} + 2\cdot\frac{1}{28} = \frac{1}{2}$

d) Calcular $V(X)$ y $V(Y)$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{27}{28} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$E(X^2) = 0^2\cdot\frac{10}{28} + 1^2\cdot\frac{15}{28} + 2^2\,\frac{3}{28} = \frac{27}{28}$

$V(X) =$

Distribuciones de Probabilidades Condicionales

En el ejemplo: $P(X=0/Y=0) = \frac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{3/28}{\frac{15}{28}} = \frac{3}{15}$

$P(X=1/Y=0) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{9/28}{15/28} = \frac{9}{15}$

Se encontró la FdP condicional de X dado que Y=0

$P(X=2/Y=0) = \frac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{3/28}{15/28} = \frac{3}{15}$

NOTA

En general, las fdP ~~marginales~~ condicional de X dado que $Y = y_j$:

$$P_{X/Y=y_j}(x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \quad \forall x_i \in R_X$$

Las fdP marginales: $P_X(x_i) = \sum_{y_j \in R_Y} P(x_i, y_j) \quad \forall x_i \in R_X$

$$P_Y(y_j) = \sum_{x_i \in R_X} P(x_i, y_j) \quad \forall y_j \in R_Y$$

Variables aleatorias independientes

Sea X e Y las va discretas con fdP conjunta $P(x_i, y_j)$ y marginales $P_X(x_i)$; $P_Y(y_j)$, entonces X e Y son indep. si y solo si

$$\boxed{P(x_i, y_j) = P_X(x_i) \cdot P_Y(y_j)} \quad \forall x_i \, \forall y_j \quad \text{(hay que probarlo)}$$

Observaciones

① Notar que si X e Y son indep y se tienen las marginales de X e Y, entonces se puede hallar la fdP conjunta de (X, Y)

② Si X e Y son va indep. se puede probar que la prob. de que X tome valores de un conj. A y Y tome valores de un conj B:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \text{(sirve si son continuas)}$$

Ejemplo: Una persona tiene 2 lamparitas para una lampara.

X_i: "duración de lamparita i en miles de horas" $i = 1, 2$

$X \sim Exp(\lambda)$ $\lambda = 1$ X_1 y X_2 son indep.

¿Cual es la prob de que cada lamparita dure menos de 1000 horas?

$$P(X_1 < 1, X_2 < 1) = P(X_1 < 1) \cdot P(X_2 < 1) = F_{X_1}(1) \cdot F_{X_2}(1) = (1-e^{-1})(1-e^{-1}) = (1-e^{-1})^2$$

Función de una va bidimensional discreta

Sea (X, Y) una va bidimensional discreta con fdP conjunta $P(x_i, y_j)$
Sea $h(x,y)$ una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

Entonces $Z = h(X,Y)$ es otra va. Interesa calcular $E(Z)$ sin hallar previamente la fdP de Z.

Teorema → si (X, Y) es una va bidimensional discreta con fdP conjunta $P(x_i, y_j)$ y $h(x,y)$ es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ entonces $Z = h(X,Y)$ tiene la esperanza

$$E(Z) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} h(x_i, y_j) P(x_i, y_j)$$

En caso de ser $h(x_i, y_j) = x + y$, entonces $Z = X + Y = h(X,Y)$

$E(Z) = E(X+Y) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} (x_i + y_j)\, p(x_i, y_j) = \sum\sum x_i\, p(x_i, y_j) + \sum\sum y_j\, p(x_i, y_j)$

$= \sum_{x_i} x_i \sum_{y_j} p(x_i, y_j) + \sum_{y_j} y_j \sum_{x_i} p(x_i, y_j) = \underbrace{\sum_{x_i} x_i\, p_x(x_i)}_{E(X)} + \underbrace{\sum_{y_j} y_j\, p_y(y_j)}_{E(Y)}$

$= E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Por inducción completa, se puede probar que si: $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias.

entonces $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Además si $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales entonces se puede probar que:
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

Si X e Y son va indep. entonces que $E(X.Y) = E(X).E(Y)$
(válido para continuas)

Ej: El espesor X de una cuña de madera (en mm) tiene una fdp
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(x-5)^2 & 4 \leq x \leq 6 \\ 0 & cc \end{cases}$$

a) $E(X) = \int_4^6 x\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}(x-5)^2\right) dx = 5$

c) Se seleccionan 3 cuñas de manera indep. y se apilan una encima de la otra. Encuentre la media del espesor total

X_i: "espesor en mm de cuña i" $i = 1,2,3$

Z: "Espesor total de los 3 cuñas apilados" $Z = X_1 + X_2 + X_3$
$E(Z) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 5+5+5 = 15$

Varianza de una suma de va

Sea X e Y va. Se quiere hallar la varianza de la suma.
Sea $Z = X + Y \rightarrow V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$

$= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X) + E(Y))^2 = E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X))^2 + (E(Y))^2 + 2E(X)E(Y)$

$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X)E(Y)$

$= \underbrace{E(X^2) - (E(X))^2}_{V(X)} + \underbrace{E(Y^2) - (E(Y))^2}_{V(Y)} + 2\underbrace{[E(XY) - E(X)E(Y)]}_{Cov(X,Y)}$

$\therefore V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)$

Análogamente: $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,cov(X,Y)$

Covarianza: En gral si X e Y son 2 va, se define la $Cov(X,Y)$ como:
$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = Cov(X,Y) = \sigma_{XY}$$

Propiedades: ① $E[(X-E(X))(Y-E(X))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

② si X e Y son indep entonces $Cov(X,Y)=0$. Se observa que puede pasar que $Cov(X,Y)=0$ pero X e Y son dependientes

Ejemplo:

Y \ X	-1	0	1	
0	1/3	0	1/3	2/3
1	0	1/3	0	1/3
	1/3	1/3	1/3	

$E(X) = (-1)\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 1.\frac{1}{3} = 0$

$E(Y) = 0.\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$E(X.Y) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} x_i\, y_j\, P(x_i, y_j) = 0$

$Cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y) = 0 - 0.\frac{1}{3} = 0$

$P(X=-1) = \frac{1}{3}$ $\quad P(X=1) = \frac{1}{3} \rightarrow P(X=-1, Y=1) \neq P(X=-1)\,P(Y=1)$

③ Si X e Y son indep entonces la $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

④ se puede probar por inducción completa si X_1, X_2, X_n son va indep $\rightarrow V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son numeros reales: $V(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$

En el ej de los 3 cubos se pide la varianza del espesor total
$Z = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow V(Z) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$
$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

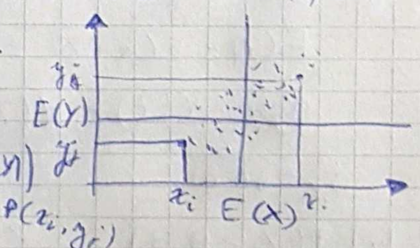
En gral: $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,Cov(X,Y)$
pues $Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)$ puede tomar cualquier valor. Indica una relación entre X, Y. Si es positiva, cuando una variable aumenta, la otra también, y si es negativa, cuando una variable aumenta la otra disminuye

Covarianza $\rightarrow$ Sean X e Y va, la $Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-E(X))(Y-E(X))]$

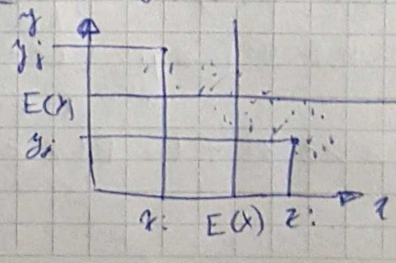
Interpretación: Sea R_{XY} el rango de (X,Y).

$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
$= \sum_{x_i}\sum_{y_j} (x_i - E(X))(y_j - E(Y))\, P(x_i, y_j)$



> 0

Indica que si uno aumenta, el otro disminuye o viceversa dependiendo del signo. $Cov(X,Y) < 0$



Coeficiente de correlación

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sigma_X \sigma_Y} = E\left[\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Propiedades. ① $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

② $\rho_{XY} = 1$ si y sólo si $Y = aX+b$ $a>0$

$\rho_{XY} = -1$ si y sólo si $Y = aX+b$ $a<0$

③ si X e Y son indep $\rightarrow \rho_{XY} = 0$. La recíproca no ~~es~~ siempre es cierta.

Cap 6?

Suma de variables aleatorias → Resultados conocidos

① $X \sim B(m,p)$, $Y \sim B(n,p)$ X e Y independientes

Entonces $Z = X+Y \sim B(m+n, p)$

② $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$ X e Y indep

$Z = X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

③ $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ X e Y indep

$Z = X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

④ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a independientes de manera tal que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

Si además $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, entonces

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Ejemplo: X: "espesor en mm de hoja 1" Y: "espesor en mm de hoja 2"

$X \sim N(1{,}5, 0{,}1^2)$ $Y \sim N(1{,}5, 0{,}1^2)$ X e Y indep.

a) Z: "espesor total de la envoltura" $Z = X+Y$

$E(Z) = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 1{,}5+1{,}5 = 3$

$V(Z) = V(X+Y) \underset{\text{indep}}{=} V(X)+V(Y) = 0{,}1^2+0{,}1^2 = 0{,}02$

$\sigma_Z = \sqrt{0{,}02}$

b) $P(Z > 3{,}3)$ Z es suma de v.a normales independientes, entonces Z también es normal.

$Z \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \mu = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 3$ $Z \sim N(3, 0{,}02)$

$\sigma^2 = V(X+Y) = V(X)+V(Y) = 0{,}02$

$$P(Z>3{,}3) = 1 - P(Z \leq 3{,}3) = 1 - P\left(\frac{Z-3}{\sqrt{0{,}02}} \leq \frac{3{,}3-3}{\sqrt{0{,}02}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3{,}3-3}{\sqrt{0{,}02}}\right)$$

$1 - \Phi(\underline{2{,}12}132)$

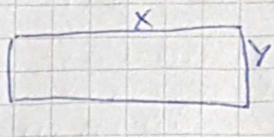
NOTA

Ejemplo

X: "long en cm de una pieza rectangular"   X e Y indep

Y: "ancho en cm " " " "

$X \sim N(2, 0{,}1^2)$ $Y \sim N(5, 0{,}2^2)$



Z: "perímetro de la pieza"

$Z = 2X + 2Y$ Z es combinación lineal de va normales indep. ∴ Z es normal

$$\mu = E(Z) = E(2X+2Y) = 2E(X) + 2E(Y) = 2.2 + 2.5 = 14$$

$$V(Z) = V(2X+2Y) = 2^2 V(X) + 2^2 V(Y) = 2^2 . 0{,}1^2 + 2^2 . 0{,}2^2 = 0{,}2$$

$Z \sim N(14, 0{,}2)$

$$P(Z > 14{,}5) = 1 - P(Z \leq 14{,}5)$$
$$= 1 - P\left(\frac{Z-14}{\sqrt{0{,}2}} \leq \frac{14{,}5-14}{\sqrt{0{,}2}}\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{14{,}5-14}{\sqrt{0{,}2}}\right) = 1 - \Phi(\underbrace{1{,}1180}_{})$$
$$= 1 - 0{,}8665$$

Ej: El peso de un caramelo tiene una dist normal con media 0,1 oz y desviación 0,01 oz. Suponga que se colocan 17 en un paquete y sus pesos son indep. Prob de que el peso neto sea menor a 1,6 oz.

X_i: "peso en oz del caramelo i" $i = 1, 2, \dots, 17$ $X_1, \dots, X_{17}$ son indep

$X_i \sim N(0{,}1, 0{,}01^2)$ $i = 1, 2, \dots, 17$

Z: "peso neto del paquete" $Z = \sum_{i=1}^{17} X_i$ $P(Z < 1{,}6)$

Z es suma de va normales indep ∴ Z es normal. $Z \sim N(1{,}7, 0{,}0017)$

$$P(Z < 1{,}6) = \Phi\left(\frac{1{,}6-1{,}7}{\sqrt{0{,}0017}}\right) = \Phi(\underline{2{,}4253}) = 0{,}9922$$

En general si $X_1, \dots, X_n$ son va indep con $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es tal que

$$Z \sim N(n.\mu, n\sigma^2)$$

Promedio Muestral

Sean $X_1, \dots, X_n$ va indep con la misma dist. (o idénticamente distribuidos) (i.i.d).

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ es la va promedio muestral

Anotamos $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = V(X_i)$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\mu} = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}.\mu = \mu = E(\bar{X})$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} . \sum_{i=1}^{n} \underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{n} = V(\bar{X})}$$

Si suponemos que las X_i son normales, entonces $\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

$\bar{X} = \left(\frac{1}{n}\right) X_1 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right) X_n \Rightarrow \bar{X}$ es una comb. lineal de va normales independientes $\therefore$ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Ejemplo. El peso de ladrillos de adobe utilizados en construcción tienen una dist normal con media de 3 lb y desviación estandar 0,25 lb. Suponga pesos indep y que se toman 25 ladrillos. Prob de que el peso medio sea menor a 2,95 lb.

$P(\bar{X} < 2.95\ lb)$

X_i: "peso del ladrillo i" $i = 1, 2, \ldots, 25$ $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ indep

$X_i \sim N(3, 0{,}25^2)$ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{25} X_i$ (peso prom. de los 25 ladrillos)

$\bar{X} \sim N\left(3, \frac{0{,}25^2}{25}\right)$

$P(\bar{X} < 2{,}95) = \Phi\left(\frac{2{,}95 - 3}{\sqrt{\frac{0{,}25^2}{25}}}\right) = \Phi(-1) = 0{,}15866$

Variable aleatoria suma

Si consideramos la va $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \mu = \boxed{n\mu = E(S_n)}$

$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \boxed{n\sigma^2 = V(S_n)}$

Si los $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

Teorema Central del Límite

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sean n va independientes identicamente distribuidos.

Anotamos $\mu = E(X_i)$, $\sigma = V(X_i)$

Entonces $P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x)$

En la practica, si $n \geq 30$, entonces $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \approx N(0,1)$

Si sabemos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen una distribución simétrica, entonces si $n \geq 20$ entonces

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \approx N(0,1)$$

Observación: $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma}} \leq x\right) = P\left(\frac{\frac{S_n - n\mu}{n}}{\frac{\sqrt{n\sigma}}{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma}{n}}} \leq x\right)$

$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma}{n}}} \leq x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x)$

Ej: Supongamos X_i: "consumo de calorías en el día i" $i=1,\dots,365$

$\mu = E(X_i) = 3000$ $\sigma^2 = V(X) = 230^2$

$X_1, X_2, \dots, X_{365}$ $\bar{X} = \frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365} X_i$

$P(2959 \leq \bar{X} \leq 3050) =$ $\frac{\bar{X}-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}} \approx N(0,1)$ por TCL

$$\approx P\left(\frac{2959-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}} \leq \frac{\bar{X}-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}} \leq \frac{3050-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}}\right) \approx \Phi\left(\frac{3050-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}}\right) - \Phi\left(\frac{2959-3000}{\sqrt{\frac{230^2}{365}}}\right)$$

Ej: X_i: "duración en horas del instrumento electrónico i"

$X_i \sim Exp(0,1)$ $i=1,2,\dots,30$ T: "tiempo total de duración de los 30 instrumentos"

$X_1, X_2, \dots, X_{30}$ independientes $T = \sum_{i=1}^{30} X_i$

$P(T > 350) = ?$

$E(X_i) = \mu = \frac{1}{0,1} = 10$ $V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{0,1^2} = 100$

$E(T) = n\mu = 30.10 = 300$ $V(T) = n\sigma^2 = 30.100 = 3000$

$\underbrace{\frac{T-300}{\sqrt{3000}} \approx N(0,1)}_{TCL}$ $P(T>350) = 1 - P(T \leq 350)$

$= 1 - \left(\frac{T-300}{\sqrt{3000}} \leq \frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right) \approx$ TCL

$\approx 1 - \Phi\left(\frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right) = 1 - \Phi(0,9128) = 1 - 0,8186$

Ejemplo: Suponga que se lanza 500 veces un dado balanceado de 10 lados numerados del 0 al 9. En cada tiro, se observa el número que ocurre. Calcule la prob de que el promedio de los números obtenidos esté entre 4 y 5.

X_i: "n° que sale en el tiro i" $i=1,\dots,500$ $X_1,\dots,X_{500}$ son indep.

Cada X_i tiene la sig dist:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\mu = E(X_i) = \frac{9}{2}$

$\sigma^2 = V(X_i) = \frac{33}{4}$

$\bar{X} = \frac{1}{500}\sum_{i=1}^{500} X_i \rightarrow$ prom. obtenido de los 500 tiros. $P(4 \leq \bar{X} \leq 5) = ?$

$\frac{\bar{X}-4,5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}} \approx N(0,1)$ por TCL. $P(4 \leq \bar{X} \leq 5) = P\left(\frac{4-4,5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}} \leq \frac{\bar{X}-4,5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}} \leq \frac{5-4,5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}\right)$

$\approx \Phi\left(\frac{5-4,5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}\right) - \Phi\left(\frac{4-4,5}{\sqrt{\frac{33/4}{500}}}\right)$

$= \Phi(3,8924) - \Phi(-3,8924)$

$= 2\Phi(3,8924) - 1$

NOTA

Aplicaciones del TCL

① Aproximación normal a la binomial

Sea $X \sim B(n,p)$. Para cada rep del exp. se define una va X_i discreta.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si en la repetición } i \text{ ocurre éxito} \\ 0 & cc \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \dots X_n$ son independientes
- $X_i \sim B(1,p)$ $\quad i = 1,2,\dots,n$ $\quad \mu = E(X_i) = 1 \cdot p = p$

  $\sigma^2 = V(X_i) = 1 \cdot p \cdot (1-p) = p(1-p)$
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad$ X es suma de v a independientes idénticamente distribuidas

Por lo tanto, en la teoría, por TCL, $P\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le x\right)$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x)$$

Observaciones

① En la práctica: si $np \geq 10$ y $n(1-p) \geq 10$, entonces la aproximación normal es buena.

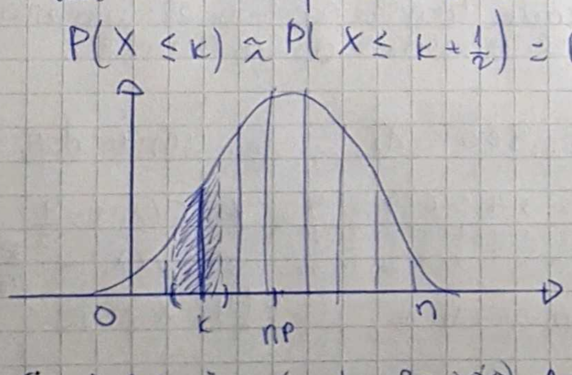
② Corrección por continuidad → tratamos a una discreta como continua

$$P(X = k) \approx P\left(k - \tfrac{1}{2} < X < k + \tfrac{1}{2}\right) = P\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\underset{TCL}{\approx} \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$ Es conveniente aplicarla en todos los casos.

La corrección por cont. también se aplica: (se aplica sobre la acumulada)

$$P(X \le k) \approx P\left(X \le k + \tfrac{1}{2}\right) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \underset{TCL}{\approx} \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$



Ej: nº de ejes (entre los 200) fuera de especificación $\quad X \sim (200, 0{,}1)$

$np = 20$
$n(1-p)$ 180

a) $P(X \le 30) \approx P(X \le 30{,}5) = P\left(\dfrac{X - 20}{\sqrt{18}} \le \dfrac{30{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) \underset{TCL}{\approx}$

$\approx \Phi\left(\dfrac{30{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) = \Phi(2{,}474) = 0{,}9932$

b) $P(X < 30) = P(X \le 29) \approx P(X \le 29{,}5) = P\left(\dfrac{X - 20}{\sqrt{18}} \le \dfrac{29{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) \underset{TCL}{\approx} \Phi\left(\dfrac{29{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right)$

c) $P(15 \le X \le 25) \approx (14{,}5 \le X \le 25{,}5)$

$= P\left(\dfrac{14{,}5 - 20}{\sqrt{18}} \le \dfrac{X - 20}{\sqrt{18}} \le \dfrac{25{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) \underset{TCL}{\approx} \Phi\left(\dfrac{25{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\dfrac{14{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right)$

NOTA

Otra forma:

$P(15 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 14) \approx P(25,5) - P(X \leq 14,5)$

$= P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{25,5-20}{\sqrt{18}}\right) - P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{14,5-20}{\sqrt{18}}\right) \approx$

$\underset{TCL}{\approx} \Phi\left(\frac{25,5-20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{14,5-20}{\sqrt{18}}\right)$

Ejemplo: Se arman bolsas de caramelos donde el nro de caramelos de dulce de leche es una v.a X con la siguiente dist.:

X: "nº de caramelos de DDL en una bolsa"

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,38	0,2	0,15	0,27

a) Se toman 100 bolsas. Hallar la prob de que en promedio contengan menos de 2 caramelos de DDL

b) Prob. aprox de que menos de 35 bolsas no contengan caramelos de DDL

a) X_i: "cantidad de caramelos en la bolsa i" $i = 1, 2, \ldots, 100$
Son independientes. Noten que cada X_i tiene la misma distribución que la v.a X.

$\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ promedio de caramelos en las 100 bolsas.

$P(\bar{X} < 2) = ?$ $\mu = E(X_i) = 0 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,20 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,27 = 1,31$

$\sigma^2 = V(X_i) = \underbrace{E(X_i^2)}_{3,23} - \underbrace{(E(X_i))^2}_{(1,31)^2} = 1,5139$

$P(\bar{X} < 2) = P\left(\frac{\bar{X} - 1,31}{\sqrt{\frac{1,5139}{100}}} < \frac{2 - 1,31}{\sqrt{\frac{1,5139}{100}}}\right) \underset{TCL}{\approx} \Phi\left(\frac{2-1,31}{\sqrt{\frac{1,5139}{100}}}\right) = \Phi(5,6079) \approx 1$

b) Y: "nº de bolsas entre las 100 que no contienen caramelos de DDL" $Y \sim B(100, 0,38)$ → P de que no haya caramelos en la bolsa

$P(Y < 35) = ?$ $nP = 100 \cdot 0,38 = 38$

$n(1-P) = 100(1-0,38) = 62$ $nP(1-P) = \frac{589}{25}$

$P(Y < 35) = P(Y \leq 34) \approx P(Y \leq 34,5) = P\left(\frac{Y-38}{\sqrt{\frac{589}{25}}} \leq \frac{34,5-38}{\sqrt{\frac{589}{25}}}\right) \underset{TCL}{\approx} \Phi(-0,72)$

$= 0,2358$

5) Aproximación normal a la Poisson:

Sea $X \sim P(\lambda)$, se puede probar que $P\left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x\right) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} \Phi(x)$.

Regla práctica: si $\lambda \geq 30$ entonces:

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$$

Observación: se está aproximando una v.a. discreta con una continua. En teoría, se debería aplicar la corrección por continuidad

$$P(X=k) = P\left(k-\frac{1}{2} < X \leq k+\frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Es optativa porque algunos autores dicen que no mejora la aproximación en la práctica si el k es muy grande, especialmente.

Ejemplo: Las galletas "marca x" están de oferta y algunos de sus paquetes incluyen premios. El nº de paquetes premiados que se venden al día en un lugar sigue dist Poisson con parámetro $\frac{1}{2}$ 50. Calcular la prob de que en 100 días se vendan más de 40 paquetes con premio.

Y: "nº de paquetes con premio vendidos en 100 días" $Y \sim P(\lambda)$

$\lambda = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

$$P(X=k) = e^{-50}\frac{50^k}{k!}$$

$P(Y>40) = ?$ $\quad P(Y>40) = 1 - P(Y \leq 40) = 1 - P\left(\frac{Y-50}{\sqrt{50}} \leq \frac{40-50}{\sqrt{50}}\right)$

$\approx 1 - P(Y \leq 40{,}5)$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-50}{\sqrt{50}} \leq \frac{40{,}5-50}{\sqrt{50}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{40{,}5-50}{\sqrt{50}}\right) = 1 - \Phi(-1{,}34) = 0{,}9099$$

$1 - 0{,}0901$