Statistique bayésienne avec R

Julien JACQUES

Les données

On s'intéresse à la longueur de saumon juvénils le long d'une rivière de Bretagne (source http://sirs.agrocampus-ouest.fr/bayes_V2/index.html).

Sur cette rivière est installée une feme d'élevage, et on se pose la question de l'impact de cette ferme sur les poissons dans le reste de la rivière.

```
ForkLengthData <- read.csv("~/Enseignement/Formations/Stat Bayesienne-v2/Rcode/ForkLengthData.csv",
                           sep=";")
ForkLengthData$Location=as.factor(ForkLengthData$Location)
levels(ForkLengthData$Location)=c("farm","downstream","other","upstream")
boxplot(ForkLengthinmillimeters~Location,data=ForkLengthData)
```

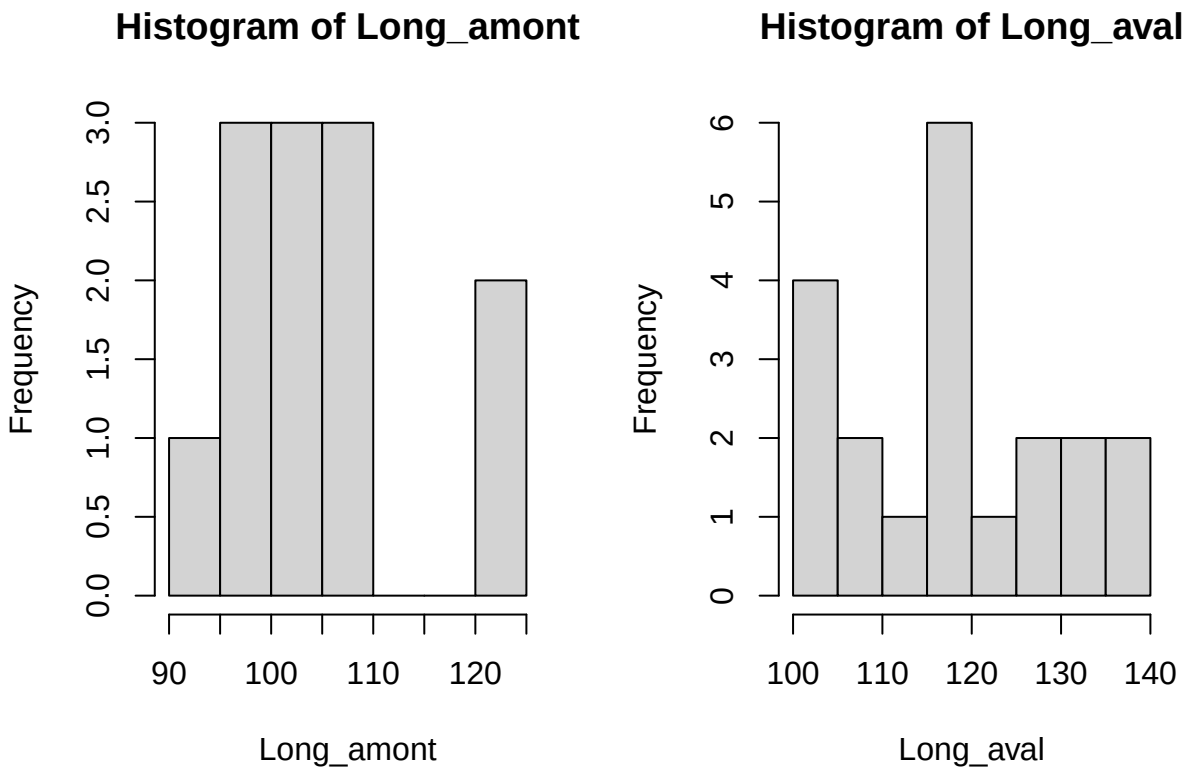
Visuellement, les poissons ont l'air plus grands en aval de la ferme qu'en amont.

Approche fréquentiste

On peut confirmer cela à l'aide d'un test statistique classique :

```
Long_aval=ForkLengthData[ForkLengthData$Location=="downstream",2]
Long_amont=ForkLengthData[ForkLengthData$Location=="upstream",2]
```

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(Long_amont);hist(Long_aval)
```




```
t.test(Long_aval,Long_amont,alternative="greater")
```

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  Long_aval and Long_amont
## t = 3.5407, df = 27.447, p-value = 0.0007233
## alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  6.689227      Inf
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  118.0500  105.1667
```

```
wilcox.test(Long_aval,Long_amont,alternative="greater")
```

```
## Warning in wilcox.test.default(Long_aval, Long_amont, alternative = "greater"):
## cannot compute exact p-value with ties
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  Long_aval and Long_amont
## W = 197.5, p-value = 0.001341
## alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
```

En effet, les poissons sont plus grands en aval de la ferme !

L'estimation de l'espérance du poids en aval μ_d et en amont μ_u est de façon fréquentiste donné par les

moyennes empiriques

```
tmp=t.test(Long_aval);
cat('Estimation de l espérance en aval : ',tmp$estimate,'\n')
```

```
## Estimation de l espérance en aval :  118.05
```

```
cat('intervalle de confiance : [',tmp$conf.int[1],',',tmp$conf.int[2],']','\n')
```

```
## intervalle de confiance : [ 112.7388 , 123.3612 ]
```

```
tmp=t.test(Long_amont);
cat('Estimation de l espérance en amont : ',tmp$estimate,'\n')
```

```
## Estimation de l espérance en amont :  105.1667
```

```
cat('intervalle de confiance : [',tmp$conf.int[1],',',tmp$conf.int[2],']','\n')
```

```
## intervalle de confiance : [ 99.42699 , 110.9063 ]
```

Approche bayésienne

Intégrons de l'information supplémentaire à l'aide d'un estimation bayésienne; Nous supposons un a priori Gaussien sur μ_d et μ_u : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Comment avoir une idée des hyperparamètres : nous pouvons utiliser les données des autres sites de mesure sur la rivière. Attention, on veut une idée de l'espérance de la longueur des poissons, non pas de la longueur elle même.

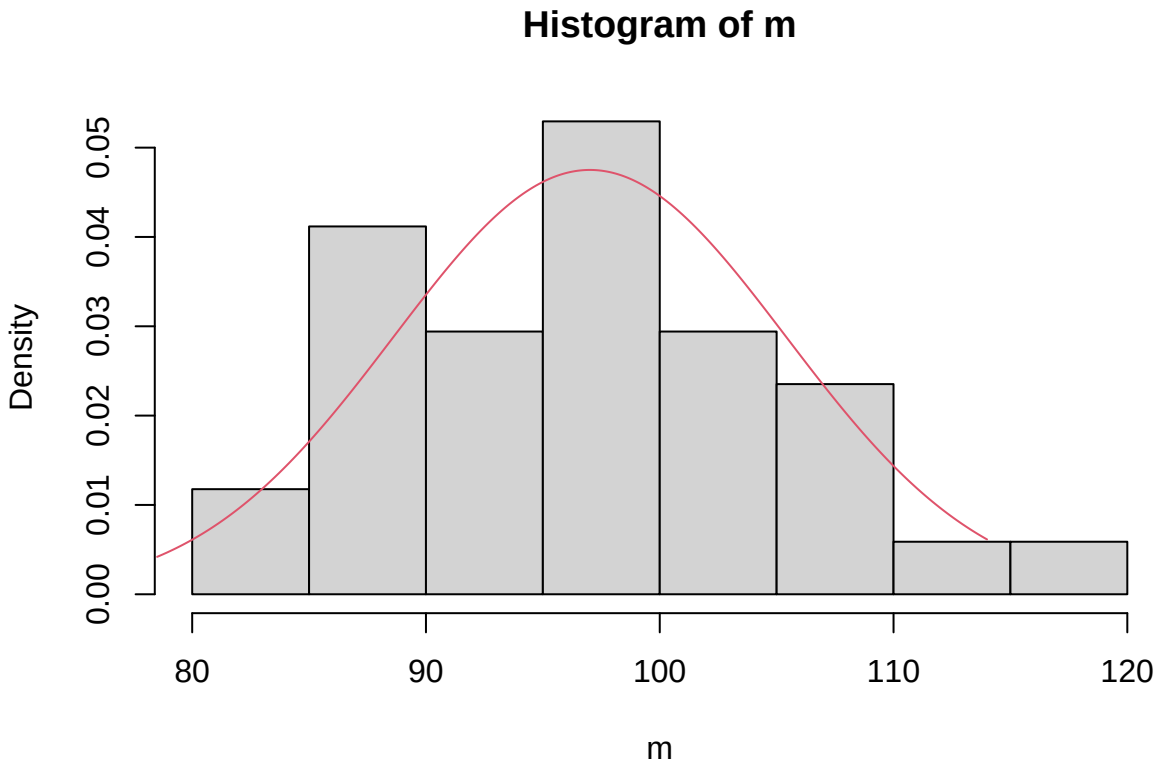
```
extra=ForkLengthData[ForkLengthData$Location=="other",]
m=NULL
for (site in unique(extra$StationNumber)){
    m=c(m,mean(extra[extra$StationNumber==site,2]))
}
hist(m,probability = T)
mu=mean(m)
tau2=var(m)
cat('Moyenne des moyennes des tailles sur les autres sites :',mu,'\n')
```

```
## Moyenne des moyennes des tailles sur les autres sites : 97.0097
```

```
cat('Variance des moyennes des tailles sur les autres sites :',tau2,'\n')
```

```
## Variance des moyennes des tailles sur les autres sites : 70.53082
```

```
x=seq(min(m)-5,max(m)-5,0.01)
lines(x,dnorm(x,mu,sqrt(tau2)),col=2)
```



Comme la loi gaussienne est conjuguée pour elle même, si :

- $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \sim \mathcal{N}(\mu_d, \sigma^2)$
- $\mu_d \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$

alors la loi a posteriori de l'espérance en aval μ_d est :

$$\mu_d|\underline{x} \quad \sim \quad \mathcal{N}(\frac{\tau^2\bar{x} + \mu\frac{\sigma^2}{n}}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}}, \frac{\tau^2\frac{\sigma^2}{n}}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}})$$

A noter que l'on a supposé la variance identique en aval et en amont, ce qui signifie que les conditions aléatoire sont les mêmes, la présence de la ferme influencant éventuellement uniquement sur l'espérance.

L'espérance et la variance de la loi gaussienne a posteriori est donc :

```
nd=length(Long_aval)
mu_dpost=(mean(Long_aval)*tau2 + mu*var(Long_aval)/nd)/(tau2 + var(Long_aval)/nd)
sigma_dpost=(tau2 * var(Long_aval)/nd)/(tau2 + var(Long_aval)/nd)
cat('Espérance a posteriori, aval :', mu_dpost,'\n')
```

```
## Espérance a posteriori, aval : 116.2898
```

```
cat('Variance a posteriori, aval :', sigma_dpost,'\n')
```

```
## Variance a posteriori, aval : 5.900625
```

De même pour l'amont

```
nu=length(Long_amont)
mu_upost=(mean(Long_amont)*tau2 + mu*var(Long_amont)/nu)/(tau2 + var(Long_amont)/nu)
sigma_upost=(tau2 * var(Long_amont)/nd)/(tau2 + var(Long_amont)/nu)
cat('Espérance a posteriori, amont :', mu_upost,'\n')
```

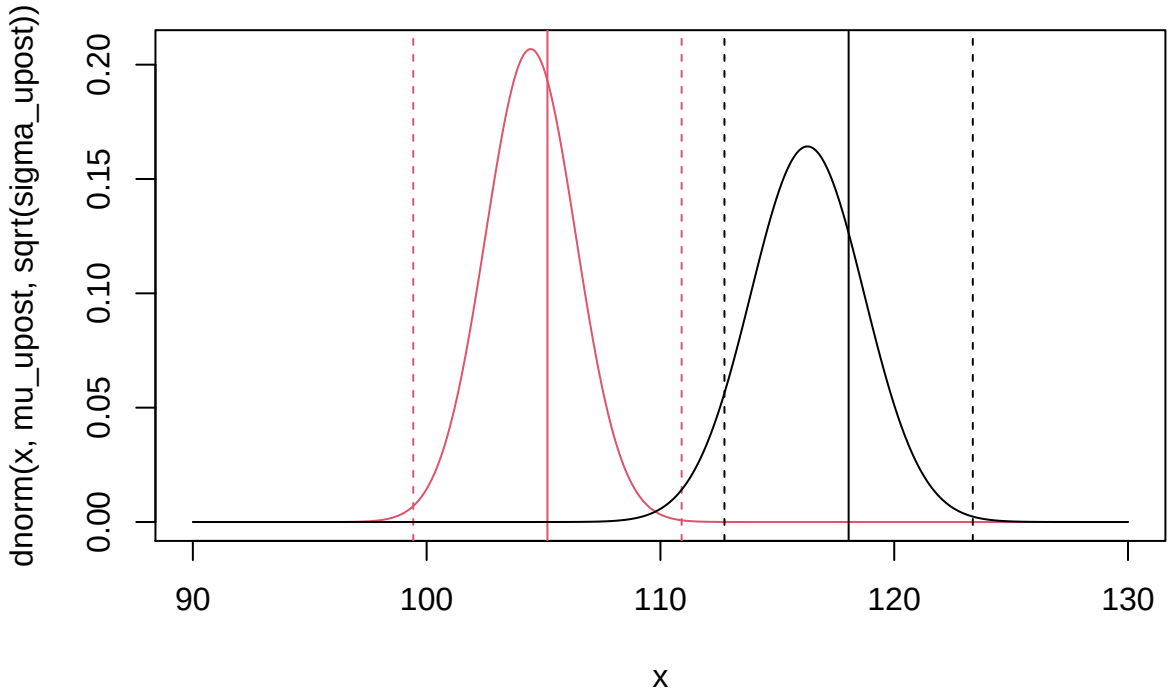
```
## Espérance a posteriori, amont : 104.4493
```

```
cat('Variance a posteriori, amont :', sigma_upost,'\n')
```

```
## Variance a posteriori, amont : 3.721482
```

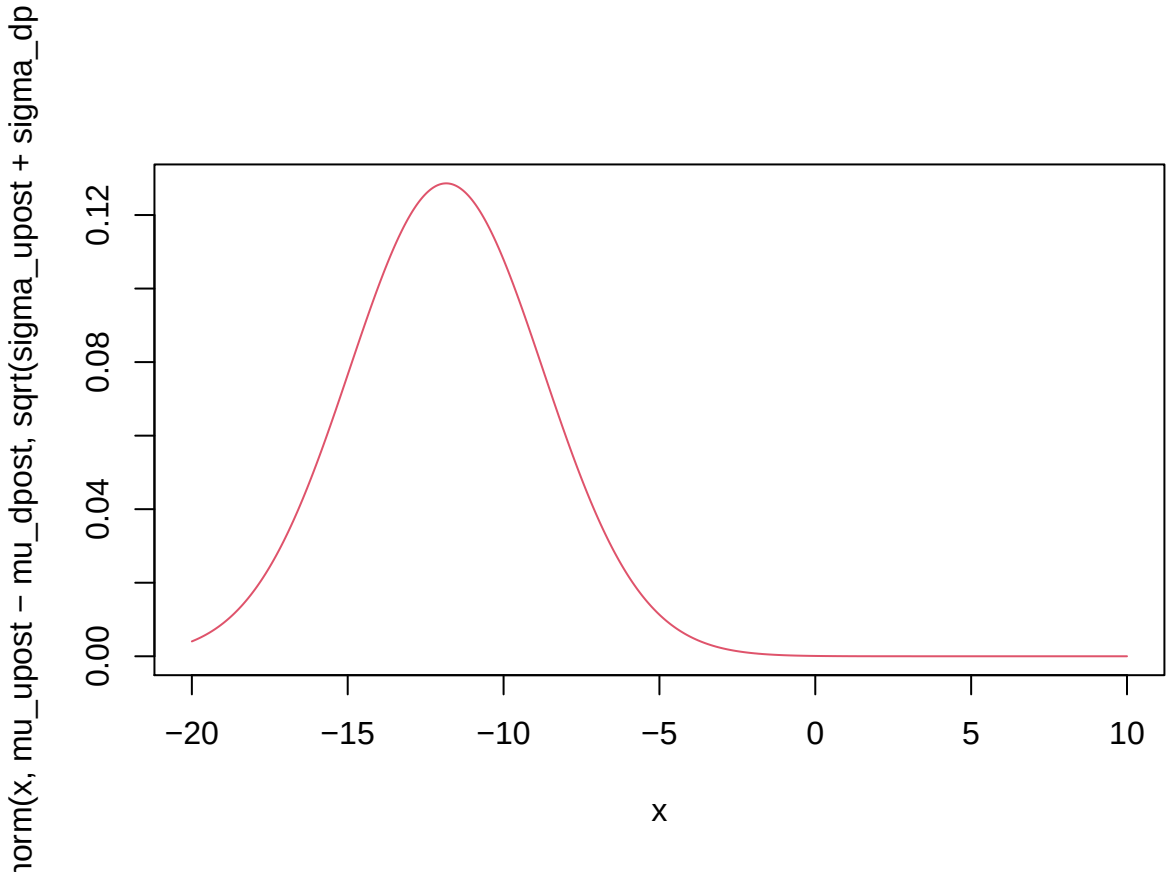
On peut alors représenter l'estimation fréquentiste (moyenne et intervalle de confiance) et bayésienne (loi a posteriori)

```
x=seq(90,130,0.01)
plot(x,dnorm(x,mu_upost,sqrt(sigma_upost)),type='l',col=2)
abline(v=mean(Long_amont),col=2)
tmp=t.test(Long_amont);
abline(v=tmp$conf.int[1],col=2,lty=2)
abline(v=tmp$conf.int[2],col=2,lty=2)
lines(x,dnorm(x,mu_dpost,sqrt(sigma_dpost)),type='l')
abline(v=mean(Long_aval))
tmp=t.test(Long_aval);
abline(v=tmp$conf.int[1],lty=2)
abline(v=tmp$conf.int[2],lty=2)
```



Enfin, on peut également analyser la loi a posteriori de la différence de longeur amont/aval $\mu_u - \mu_d$. Sous l'hypothèse d'indépendance, l'espérance est la différence et la variance la somme :

```
x=seq(-20,10,0.01)
plot(x,dnorm(x,mu_upost-mu_dpost,sqrt(sigma_upost+sigma_dpost)),type='l',col=2)
```



La probabilité que la taille des poissons en aval soit plus grande qu'en amont est :

```
pnorm(0,mu_upost-mu_dpost,sqrt(sigma_upost+sigma_dpost))
```

```
## [1] 0.9999325
```