Statistique bayésienne avec R - exercice Monte Carlo

Julien JACQUES

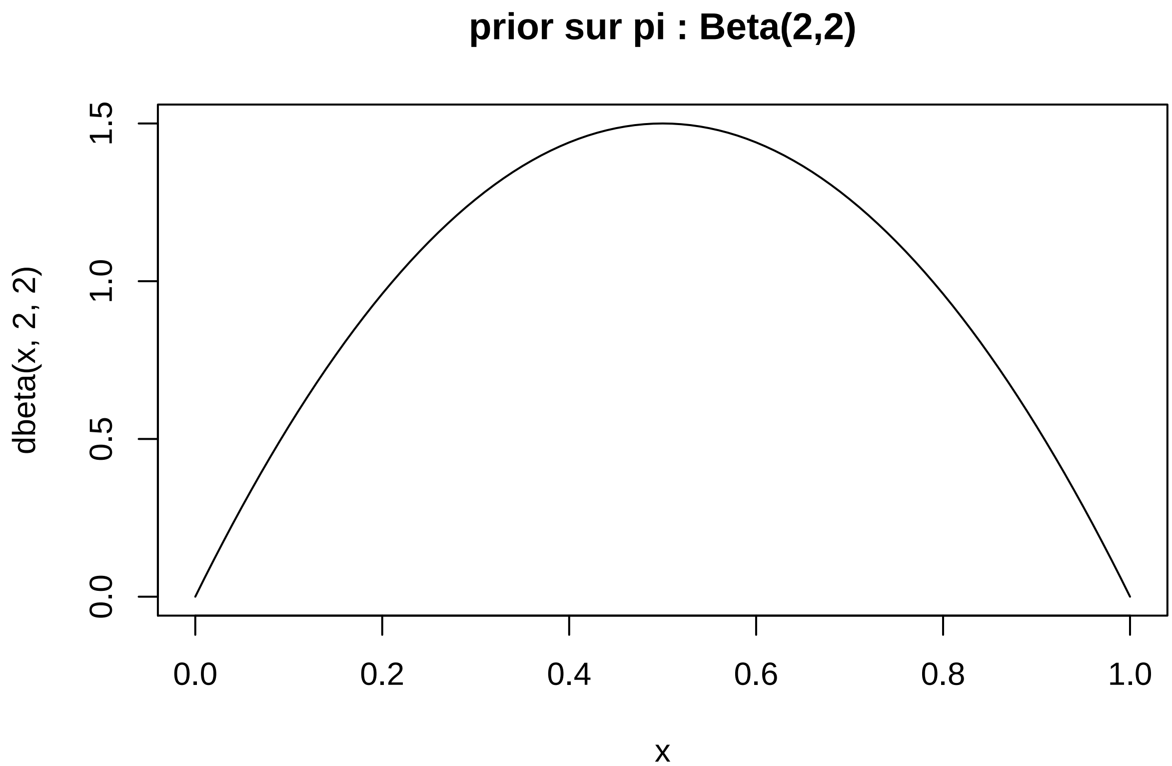
On s'intéresse au nombre Y de face obtenus sur 10 lancers d'une pièce.

Considérons le modèle suivant :

$$Y|\pi \sim \mathcal{B}(10, \pi)\pi \sim \mathcal{B}eta(2, 2)$$

La loi a priori suppose que la pièce est non truquée.

```
x=seq(0,1,0.01)
plot(x,dbeta(x,2,2),main="prior sur pi : Beta(2,2)",type='l')
```

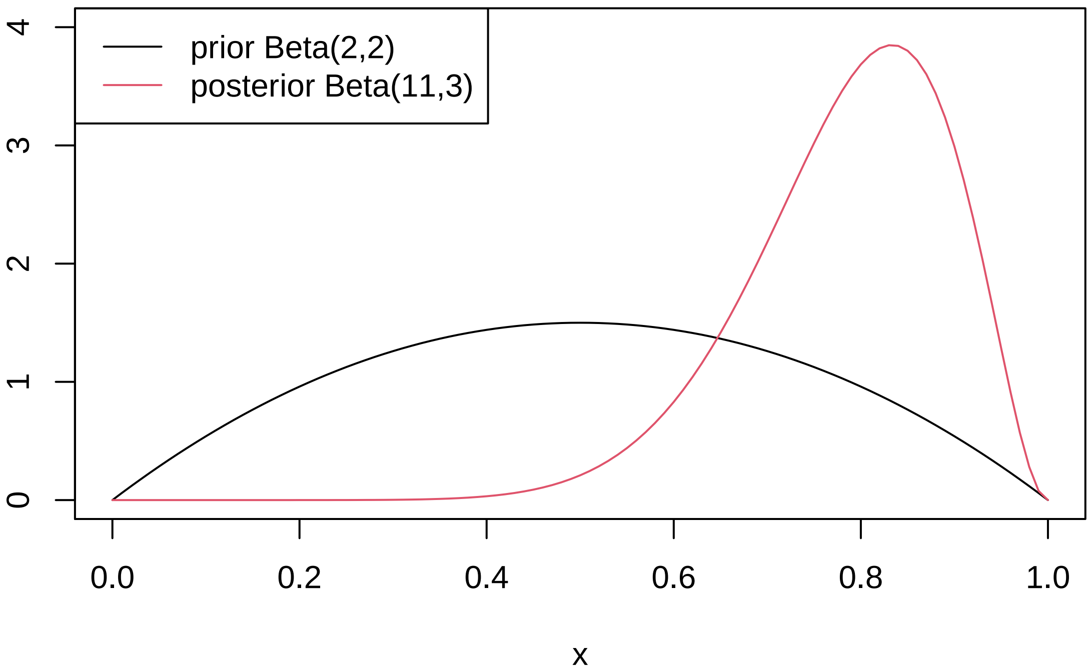


On obtient 9 faces.

La loi a posteriori est alors :

$$Y|\pi \sim \mathcal{B}(10, \pi)\pi|Y = 9 \sim \mathcal{B}(11, 3)$$

```
x=seq(0,1,0.01)
plot(x,dbeta(x,2,2),type='l',ylim=c(0,4),ylab="")
lines(x,dbeta(x,11,3),col=2)
legend("topleft",col=1:2,legend=c('prior Beta(2,2)','posterior Beta(11,3)'),lty=1)
```



Imaginons qu'on ne sache pas faire le calcul explicite de la loi a posteriori :

$$p(\pi|y) = \frac{\ell(\pi|y)p(\pi)}{\int \ell(\pi|y)p(\pi)d\pi}$$

On a :

- $\ell(\pi|y)$ est la densité d'une loi binomiale $\mathcal{B}(10, \pi)$ en y
- $p(\pi)$ est la densité d'une loi $\mathcal{B}eta(2, 2)$ en π

Le numérateur est alors calculable par :

```
dbinom(9,10,p)*dbeta(p,2,2)
```

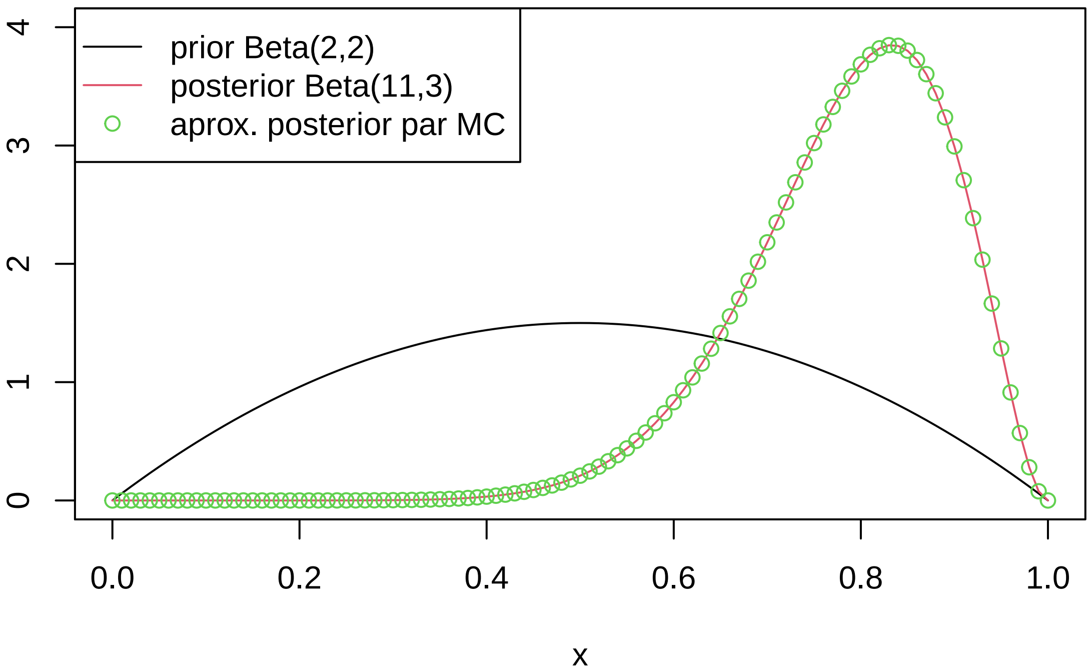
Nous allons approcher le dénominateur par Monte-Carlo:

```
pi=rbeta(10000,2,2)
denom=mean(dbinom(9,10,pi))
```

Nous pouvons alors calculer la loi a posteriori :

```
post <- function(p){
  dbinom(9,10,p)*dbeta(p,2,2) / mean(dbinom(9,10,pi))
}
```

```
x=seq(0,1,0.01)
plot(x,dbeta(x,2,2),type='l',ylim=c(0,4),ylab="")
lines(x,dbeta(x,11,3),col=2)
points(x,post(x),col=3)
legend("topleft",col=1:3,legend=c('prior Beta(2,2)','posterior Beta(11,3)','aprox. posterior par MC'),l
```



prior Beta(2,2)
posterior Beta(11,3)
aprox. posterior par MC
0
1
2
3
4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x