

Ma323 - Méthode des différences finies

Projet - Équation de transport-diffusion

Aéro 3 - Filière Système

Julien Fresnel et 1 autre personne

On considère le problème de transport-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Avec $\nu = \frac{1}{20}$ et $V = 1$.

On va envisager plusieurs schémas numériques pour résoudre cette équation. Pour la discrétisation, on va se limiter à $x \in [-10, 10]$ et $t \in [0, 4]$. On aura une subdivision avec $x_0 = -10$ et $x_{N+1} = 10$.

On choisira un pas de temps τ et on posera $t_n = n\tau$. On se limitera à $0 \leq t_n \leq 4$. On notera comme habituellement, u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$. Pour simplifier la situation aux limites on fixera $u_0^n = 0$ et $u_{N+1}^n = 0$, une condition de type Dirichlet. On pensera à commenter après coup le bienfondé de cette hypothèse.

On notera le vecteur :

$$u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

1. Exprimer h en fonction de N et de donner l'expression des x_j .

Nous sommes dans l'intervalle $[-10, 10]$ découpé en $N + 1$ subdivision. On rappelle l'expression du pas : $h = \frac{b - a}{N}$. De cette expression on obtient alors : $h = \frac{20}{N + 1}$.

De cette discrétisation on obtient aussi l'expression suivante pour les x_j : $x_j = -10 + jh$

2. Voici les six schémas envisagés dans ce projet (on les formule de façon générale, avec $V > 0$ et $\nu > 0$). Justifier sommairement ces dénominations (on pourra faire le lien entre l'EDP envisagée et des EDP déjà étudiées)

Tout d'abord nous précisons que nous étudions et justifions ces dénominations en fonction du schéma explicite centré. En effet les autres schéma étant des mélanges de plusieurs schémas effectuer le raisonnement sur un seul schéma (et appliquer ce dernier identiquement aux autres schémas) permet de faciliter la lecture du devoir. Ainsi concernant le schéma explicite centré. Rappelons l'équation du problème de transport/diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ensuite rappelons l'équation d'advection : $\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Ainsi que celle de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Avec les développements de Taylor en négligeant les restes nous obtenons le schéma explicite centré pour l'équation de la chaleur ci-après :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

Et pour l'équation d'advection on a :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

Ainsi en mélangeant les deux équations ensemble on retrouve l'équation de transport-diffusion pour le schéma explicite et on a un schéma tel que :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

On peut conclure :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\rightarrow \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement à tous les schémas (et en additionnant certains schémas entre eux comme implicite centré et explicite centré pour obtenir Crank-Nicholson centré) on peut justifier ces dénominations.

3. Les six schémas sont consistants avec les précisions suivantes. Le démontrer pour au moins trois schémas que vous choisirez.

Schéma implicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

On va poser $t = t_{n+1}$ et $x = x_j$

Pour déterminer l'erreur de troncature nous allons effectuer des changements de variables et remplacer : u_j^n par $u(x, t - \tau)$, u_{j-1}^{n+1} par $u(x - h, t)$, u_j^{n+1} par $u(x, t)$ et u_{j+1}^{n+1} par $u(x + h, t)$.

À l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2 de u suivant t on obtient¹ :

$$\frac{u(x, t) - u(x, t - \tau)}{\tau} = \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\tau)$$

Avec les mêmes formules de Taylor mais cette fois-ci à l'ordre 1 suivant x on obtient :

¹ les détails ont été simplifiés pour une meilleure lecture

$$u(x+h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4) \text{ et}$$

$$u(x, t) = u(x-h, t) + h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^4)$$

On a alors :

$$\frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + o(h^3)$$

Et en appliquant le même raisonnement on a pour la troisième partie du schéma :

$$\frac{u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t))}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(h^2)$$

De ce fait on obtient alors le schéma sous la forme :

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + V \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \nu \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\tau + h^2)$$

De cela lorsque $\tau \rightarrow 0$ et $h \rightarrow 0$ le schéma converge on peut alors dire qu'il est consistant en ordre 2 en espace et ordre 1 en temps.

Schéma implicite décentré :

On utilise les mêmes changements de variable pour ce schéma. On voit de plus que seule une partie est différente par rapport au schéma précédent : $V \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h}$ on obtient alors la forme suivante avec les développements de Taylor :

$$\frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + o(h^3)$$

On obtient donc au final le schéma suivant en ordre 1 en temps et en espace :

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + V \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + o(\tau + h)$$

De cela lorsque $\tau \rightarrow 0$ et $h \rightarrow 0$ le schéma converge on peut alors dire qu'il est consistant en ordre 1 en espace et ordre 1 en temps.

Schéma explicite centré :

Pour ce schéma on effectue exactement le même raisonnement que pour le schéma implicite centré sauf qu'on modifie les changements de variables on prend : u_j^n par $u(x, t)$, u_j^{j+1} par $u(x, t + \tau)$, u_{j-1}^n par $u(x-h, t)$ et u_{j+1}^n par $u(x+h, t)$.

En appliquant la même méthode que vu précédemment on trouve pour l'ordre 2 en espace et 1 en temps le schéma suivant :

$$\frac{\tau \partial^2 u}{\partial t^2} + V \left(\frac{h^2 \partial^3 u}{6 \partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{h^2 \partial^4 u}{12 \partial x^4} \right) + o(\tau + h^2)$$

De cela lorsque $\tau \longrightarrow 0$ et $h \longrightarrow 0$ le schéma converge on peut alors dire qu'il est consistant en ordre 2 en espace et ordre 1 en temps.

4. Exprimer les schémas sous forme matricielle. Pour simplifier les écritures on posera $c = \frac{\nu \tau}{h^2}$ et $d = \frac{V\tau}{h}$.

Schéma explicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{V\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\nu\tau}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{d}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + c(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = 0 \\ u_1^{n+1} = u_1^n(1 - 2c) + u_2^n(c - \frac{d}{2}) \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} = u_{N-2}^n(\frac{d}{2} + c) + u_{N-1}^n(1 - 2c) + u_N^n(c - \frac{d}{2}) \\ u_N^{n+1} = u_{N-1}^n(c + \frac{d}{2}) + u_N^n(1 - 2c) \end{cases}$$

On peut donc écrire ce schéma sous la forme matricielle suivante : $u^{n+1} = M_e \cdot u^n$ avec

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 - 2c & c - \frac{d}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ c + \frac{d}{2} & 1 - 2c & c - \frac{d}{2} & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & c - \frac{d}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & c + \frac{d}{2} & 1 - 2c \end{pmatrix}$$

Schéma explicite décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{V\tau}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{\nu\tau}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + d(u_j^n - u_{j-1}^n) + c(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = 0 \\ u_1^{n+1} = u_1^n(1 + d + 2c) + cu_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} = (d + c)u_{N-2}^n + (1 + d + 2c)u_{N-1}^n + cu_N^n \\ u_N^{n+1} = -d + c)u_{N-1}^n + (1 + d + 2c)u_N^n \end{cases}$$

On peut donc écrire ce schéma sous la forme matricielle suivante : $u^{n+1} = M_{ed} \cdot u^n$ avec

$$M_{ed} = \begin{pmatrix} (1 - d - 2c) & c & 0 & \dots & 0 \\ (d + c) & (1 - d - 2c) & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & c \\ 0 & \dots & 0 & (d + c) & (1 - d - 2c) \end{pmatrix}$$

Schéma implicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{V\tau}{h}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{\nu\tau}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = 0$$

$$u_j^n = u_j^{n+1} - d(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + c(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0^n = 0 \\ u_1^n = u_1^{n+1}(1 + 2c) + (\frac{d}{2} - c)u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^n = (-c - \frac{d}{2})u_{N-2}^{n+1} + (1 + 2c)u_{N-1}^{n+1} + (\frac{d}{2} - c)u_N^{n+1} \\ u_N^n = (-c - \frac{d}{2})u_{N-1}^{n+1} + (1 + 2c)u_N^{n+1} \end{cases}$$

On peut donc écrire ce schéma sous forme matricielle suivante : $u^n = M_i \cdot u^{n+1}$ avec

$$M_i = \begin{pmatrix} (1 + 2c) & \frac{d}{2} - c & 0 & \dots & 0 \\ (-c - \frac{d}{2}) & (1 + 2c) & \frac{d}{2} - c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \frac{d}{2} - c \\ 0 & \dots & 0 & (-c - \frac{d}{2}) & (1 + 2c) \end{pmatrix}$$

Schéma implicite décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{V\tau}{h}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{\nu\tau}{h^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = 0$$

$$u_j^n = u_j^{n+1} + d(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - c(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0^n = 0 \\ u_1^n = u_1^{n+1}(1 + d + 2c) - cu_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^n = -(d + c)u_{N-2}^{n+1} + (1 + d + 2c)u_{N-1}^{n+1} - cu_N^{n+1} \\ u_N^n = -(d + c)u_{N-1}^{n+1} + (1 + d + 2c)u_N^{n+1} \end{cases}$$

On peut donc écrire ce schéma sous forme matricielle suivante : $u^n = M_{id} \cdot u^{n+1}$ avec

$$M_{id} = \begin{pmatrix} (1 + d + 2c) & -c & 0 & \dots & 0 \\ -(d + c) & (1 + d + 2c) & -c & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & -c \\ 0 & \dots & 0 & -(d + c) & (1 + d + 2c) \end{pmatrix}$$

Schéma Crank-Nicholson centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{V}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} + \frac{d}{4}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{c}{2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n - \frac{d}{4}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = u_0^n = 0 \\ u_1^{n+1}(1 + c) + u_2^{n+1}(\frac{d}{4} - \frac{c}{2}) = u_1^n(1 - c) + u_2^n(\frac{c}{2} - \frac{d}{4}) \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1}(-1 - \frac{c}{2}) + u_{N-1}^{n+1}(1 + c) + u_N^{n+1}(\frac{d}{4} - \frac{c}{2}) = u_{N-2}^n(\frac{d}{4} + \frac{c}{2}) + u_{N-1}^n(1 - c) + u_N^n(\frac{c}{2} - \frac{d}{4}) \\ u_{N-1}^{n+1}(-1 - \frac{c}{2}) + u_N^{n+1}(1 + c) = u_{N-1}^n(\frac{d}{4} + \frac{c}{2}) + u_N^n(1 - c) \end{cases}$$

On peut donc écrire ce schéma sous la forme matricielle suivante : $M_{CN1} u^{n+1} = M_{CN2} \cdot u^n$ avec

$$M_{CN1} = \begin{pmatrix} 1+c & \frac{d}{4} - \frac{c}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 - \frac{c}{2} & 1+c & \frac{d}{4} - \frac{c}{2} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \frac{d}{4} - \frac{c}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 - \frac{c}{2} & 1+c \end{pmatrix}$$

$$M_{CN2} = \begin{pmatrix} 1-c & \frac{c}{2} - \frac{d}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d}{4} + \frac{c}{2} & 1-c & \frac{c}{2} - \frac{d}{4} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \frac{c}{2} - \frac{d}{4} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{d}{4} + \frac{c}{2} & 1-c \end{pmatrix}$$

Schéma Crank-Nicholson décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} + \frac{d}{2}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{c}{2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n - \frac{d}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{c}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = u_0^n = 0 \\ u_1^{n+1}(1 + \frac{d}{2} + c) - \frac{c}{2}u_2^{n+1} = u_1^n(1 - \frac{d}{2} - c) + \frac{c}{2}u_2^n \\ \vdots \\ -(\frac{d}{2} + \frac{c}{2})u_{N-2}^{n+1} + u_{N-1}^{n+1}(1 + \frac{d}{2} + c) - \frac{c}{2}u_N^{n+1} = u_{N-2}^n(\frac{d}{2} + \frac{c}{2}) + u_{N-1}^n(1 - \frac{d}{2} - c) + \frac{c}{2}u_N^n \\ -(\frac{d}{2} + \frac{c}{2})u_{N-1}^{n+1} + u_N^{n+1}(1 + \frac{d}{2} + c) = u_{N-1}^n(\frac{d}{2} + \frac{c}{2}) + u_N^n(1 - \frac{d}{2} - c) \end{cases}$$

On peut donc écrire ce schéma sous la forme matricielle suivante : $M_{CND1}u^{n+1} = M_{CND2} \cdot u^n$

$$M_{CND1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{2} + c & -\frac{c}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -(\frac{d}{2} + \frac{c}{2}) & 1 + \frac{d}{2} + c & -\frac{c}{2} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & -\frac{c}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -(\frac{d}{2} + \frac{c}{2}) & 1 + \frac{d}{2} + c \end{pmatrix}$$

$$M_{CND2} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{2} - c & \frac{c}{2} & 0 & \dots & 0 \\ (\frac{d}{2} + \frac{c}{2}) & 1 - \frac{d}{2} - c & \frac{c}{2} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \frac{c}{2} \\ 0 & \dots & 0 & (\frac{d}{2} + \frac{c}{2}) & 1 - \frac{d}{2} - c \end{pmatrix}$$

5. En utilisant le principe du maximum discret, étudier la stabilité en norme L^∞ des deux schémas explicites (on aura à formuler des conditions de stabilité).

Schéma explicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + d(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - c(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

On a ainsi :

$$u_j^{n+1} = u_j^n(1 - 2c) + u_{j+1}^n(c - \frac{d}{2}) + (c + \frac{d}{2})u_{j-1}^n$$

Supposons maintenant que le terme u_j^n est encadré par un couple (n, M) de tel sorte à obtenir l'inégalité suivante : $n \leq u_j^n \leq M$.

On cherche à expliciter les conditions de stabilité pour que cet encadrement soit également valable pour u_j^{n+1} . Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} n &\leq u_j^n \leq M \\ (1 - 2c)n &\leq (1 - 2c)u_j^n \leq (1 - 2c)M \\ (1 - 2c)n + (c - \frac{d}{2})n + (c + \frac{d}{2})n &\leq u_j^{n+1} \leq (1 - 2c)M + (c - \frac{d}{2})M + (c + \frac{d}{2})M \end{aligned}$$

De cette grande inégalité on obtient alors les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1 - 2c > 0 \\ c - \frac{d}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 2c \\ c > \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} > c \\ 2c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq c \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq d \leq 1 \end{cases}$$

Le schéma explicite centré est donc stable en norme L^∞ si et seulement si $c \in [0, \frac{1}{2}]$ et $d \in [0, 1]$.

Schéma explicite décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + d(u_j^n - u_{j-1}^n) - c(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

On a ainsi :

$$u_j^{n+1} = u_j^n(1 - d - 2c) + cu_{j+1}^n + (d + c)u_{j-1}^n$$

Supposons comme pour le schéma précédent que le terme u_j^n est encadré par un couple (n, M) qui nous permet d'avoir l'inégalité suivante : $n \leq u_j^n \leq M$

On cherche à expliciter les conditions de stabilité pour que cet encadrement soit également valable pour u_j^{n+1} . Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} n &\leq u_j^n \leq M \\ (1-d-2c)n &\leq (1-2c)u_j^n \leq (1-d-2c)M \\ (1-d-2c)n + cn + (d+c)n &\leq u_j^{n+1} \leq (1-d-2c)M + cM + (d+c)M \end{aligned}$$

On obtient alors les conditions de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} 1-d-2c > 0 \\ d+c > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > c \\ d > -c \\ c > 0 \end{cases}$$

Le schéma explicite décentré amont est donc stable en norme L^∞ si et seulement si $c \in [0,1]$ et $d > -c$.

6. En utilisant la condition de stabilité de Von Neumann, étudier la stabilité en norme L^2 des deux schémas implicites et des schémas Crank-Nicholson.

Pour effectuer cette étude de la stabilité en norme L^2 nous allons remplacer u_j^n par $A(\omega)^n e^{ij\omega h}$. Nous faisons cela quelque soit le schéma étudié.

Schéma implicite centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

En effectuant les remplacements mentionnés ci-dessus et en simplifiant les formules² on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{A(\omega) - 1}{\tau} + V \frac{A(\omega)e^{i\omega h} - A(\omega)e^{-i\omega h}}{2h} - \nu \frac{A(\omega)e^{i\omega h} - 2A(\omega) + A(\omega)e^{-i\omega h}}{h^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow A(\omega) + dA(\omega)(i \sin(\omega h)) - cA(\omega)(2 \cos(\omega h) - 2) &= 1 \\ \Leftrightarrow A(\omega) &= \frac{1}{[1 + d(i \sin(\omega h)) - c(2 \cos(\omega h) - 2)]} \end{aligned}$$

Si le schéma est stable cela signifie que $|A(\omega)| \leq 1$ et dans notre cas que : $1 \leq |1 + d(i \sin(\omega h)) - c(2 \cos(\omega h) - 2)|$

On a alors dans un premier temps :

² afin d'éviter des lourdeurs nous ne détaillerons pas entièrement les calculs

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \cos(\omega h) \leq 1 \\
\Leftrightarrow -2 &\leq 2 \cos(\omega h) \leq 2 \\
\Leftrightarrow -4 &\leq 2 \cos(\omega h) - 2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow 4c + 1 &\geq 1 - c[2 \cos(\omega h) - 2] \geq 1
\end{aligned}$$

Et d'autres part nous avons : $0 \leq 4d^2 \sin(\omega h) \leq 4d^2$

De ces deux inégalités nous pouvons alors affirmer que $|A(\omega)| \leq 1$. Cela prouve la stabilité inconditionnelle du schéma en norme L^2 .

Schéma implicite décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

En effectuant les changements de variables ainsi que les simplifications nécessaires nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A(\omega) + dA(\omega)[1 - \cos(\omega) - i \sin(\omega h)] - A(\omega)c[2 \cos(\omega h) - 2] &= 1 \\
\Leftrightarrow A(\omega) &= \frac{1}{1 - c[2 \cos(\omega h) - 2] + d[1 - \cos(\omega) - i \sin(\omega h)]}
\end{aligned}$$

Nous cherchons à voir si $|A(\omega)| \leq 1$ comme précédemment. On étudie d'abord le module de la partie réelle du dénominateur. Notons Re la partie réelle du dénominateur. Après la même logique de résolution que celle utilisée pour le schéma implicite centré nous obtenons alors l'encadrement suivant : $1 \leq Re \leq 1 + 4c + 2d$.

Concernant la partie imaginaire nous avons : $0 \leq Im \leq d$.

De ces deux encadrements nous pouvons alors affirmer que $|A(\omega)| \leq 1$ ce qui prouve la stabilité inconditionnelle en norme L^2 selon Van Neumann.

Schéma de Crank-Nicholson centré :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{V}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

Comme les pour les deux schéma précédents en effectuant les changements de variables ainsi que les simplifications nécessaires on obtient :

$$A(\omega) = \frac{1 + c[\cos(\omega h) - 1] - \frac{d}{2}[i \sin(\omega h)]}{1 - c[\cos(\omega h) - 1] + \frac{d}{2}[i \sin(\omega h)]}$$

De cette formule de $A(\omega)$ on peut noter que $|Re_{denominateur}| = |Re_{numérateur}|$ et que $|Im_{denominateur}| = |Im_{numérateur}|$. De ces deux égalités on peut trivialement dire que $|A(\omega)| \leq 1$. Cela implique donc la stabilité inconditionnelle en norme L^2 selon Van Neumann du schéma de Crank-Nicholson centré.

Schéma de Crank-Nicholson décentré amont :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{\nu}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

On effectue toujours les changements de variables pour étudier la stabilité en norme L^2 et on obtient :

$$A(\omega) = \frac{1 + c[\cos(\omega h) - 1] - d[1 - \cos(\omega h) - i \sin(\omega h)]}{1 - c[\cos(\omega h) - 1] + d[1 - \cos(\omega h) - i \sin(\omega h)]}$$

À l'instar du schéma précédent on remarque les deux égalités suivantes : $|Re_{\text{denominateur}}| = |Re_{\text{numérateur}}|$ et $|Im_{\text{denominateur}}| = |Im_{\text{numérateur}}|$. De ce fait on peut assurément dire que $|A(\omega)| \leq 1$. Cela prouve la stabilité inconditionnelle en norme L^2 selon Van Neumann du schéma de Crank-Nicholson.

7. Implémenter les schémas. On pourra représenter les courbes de $u(x, t)$ r, fonction de x pour différentes valeurs de $t \in [0, 4]$.

Voici les codes python ayant permis l'implémentation des schémas précédents. Nous avons réalisé un code permettant de construire les matrices dont nous avons besoin selon un code général :

```
import numpy as np

V = 1
nu = (1/20)
T_max = 4

def default_matrix(N, d, v, w):
    M = d*np.eye(N)
    for i in range(N-1):
        M[i, i+1] = v
        M[i+1, i] = w
    print(M)
    return M
```

Schéma explicite centré :

```
def centered_explicit (N,tau,u):
    h = 20./(N+1)
    c = (nu*tau)/(h**2)
    d = (V*tau)/h
    X = np.linspace(-10,10,N+2)
    nmax = int(T_max/tau)
    T = np.linspace(0.,tau*nmax,nmax+1)
    U_n = np.zeros((nmax+1,N+2))
    M = default_matrix(N,1-2*c, c-(d/2), c+(d/2))
    un = u(X[1:N+1])
    U_n[0,1:N+1] = un
    for i in range (nmax):
        un = M@un
        U_n[i+1, 1:N+1] = un
    return X,T,U_n
```

Schéma explicite décentré amont :

```
def decentered_explicit_left(N,tau,u):
    h = 20./(N+1)
    c = (nu*tau)/(h**2)
    d = (V*tau)/h
    X = np.linspace(-10,10,N+2)
    nmax = int(T_max/tau)
    T = np.linspace(0.,tau*nmax,nmax+1)
    U_n = np.zeros((nmax+1,N+2))
    M = default_matrix(N,1-d-2*c, c, d+c)
    un = u(X[1:N+1])
    U_n[0,1:N+1] = un
    for i in range (nmax):
        un = M@un
        U_n[i+1, 1:N+1] = un
    return X,T,U_n
```

Schéma implicite centré :

```
def centered_implicit(N,tau,u):
    h = 20./(N+1)
    c = (nu*tau)/(h**2)
    d = (V*tau)/h
    X = np.linspace(-10,10,N+2)
    nmax = int(T_max/tau)
    T = np.linspace(0.,tau*nmax,nmax+1)
    U_n = np.zeros((nmax+1,N+2))
    M = default_matrix(N,1+2*c, (d/2)-c, -c-(d/2))
    un = u(X[1:N+1])
    U_n[0,1:N+1] = un
    for i in range (nmax):
        un = np.linalg.solve(M,un)
        U_n[i+1, 1:N+1] = un
    return X,T,U_n
```

Schéma implicite décentré amont :

```
def decentered_implicit_left(N, tau, u):
    h = 20./(N+1)
    c = (nu*tau)/(h**2)
    d = (V*tau)/h
    X = np.linspace(-10,10,N+2)
    nmax = int(T_max/tau)
    T = np.linspace(0., tau*nmax, nmax+1)
    U_n = np.zeros((nmax+1, N+2))
    M = default_matrix(N, (1+d+2*c), -c, -(d+c))
    un = u(X[1:N+1])
    U_n[0, 1:N+1] = un
    for i in range(nmax):
        un = np.linalg.solve(M, un)
        U_n[i+1, 1:N+1] = un
    return X, T, U_n
```

Schéma de Crank-Nicholson centré :

```
def centered_CN(N, tau, u):
    h = 20./(N+1)
    c = (nu*tau)/(h**2)
    d = (V*tau)/h
    X = np.linspace(-10,10,N+2)
    nmax = int(T_max/tau)
    T = np.linspace(0., tau*nmax, nmax+1)
    U_n = np.zeros((nmax+1, N+2))
    M1 = default_matrix(N, (1+c), ((d/4)-(c/2)), -(1+(c/2)))
    M2 = default_matrix(N, (1-c), ((c/2)-(d/4)), ((d/4)+(c/2)))
    un = u(X[1:N+1])
    U_n[0, 1:N+1] = un
    for i in range(nmax):
        un = np.linalg.solve(M1, M2@un)
        U_n[i+1, 1:N+1] = un
    return X, T, U_n
```

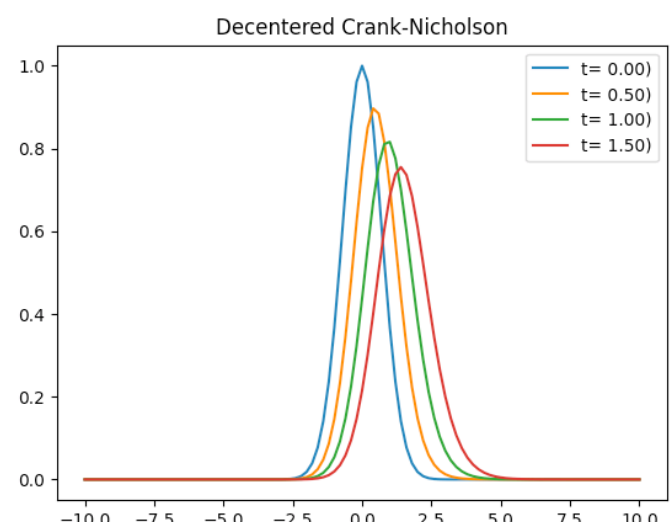
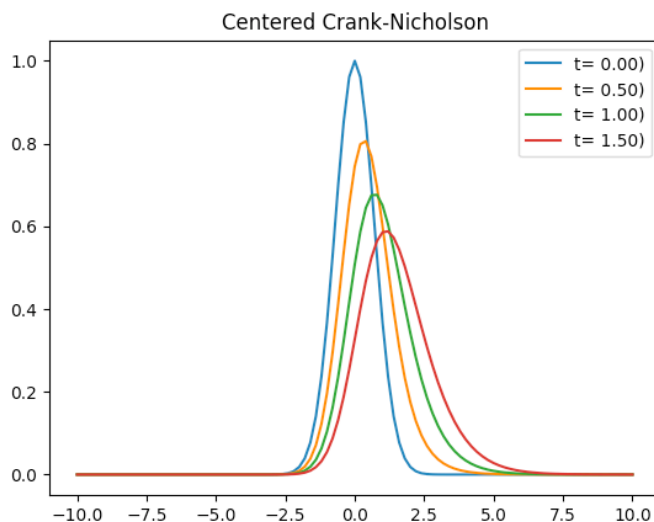
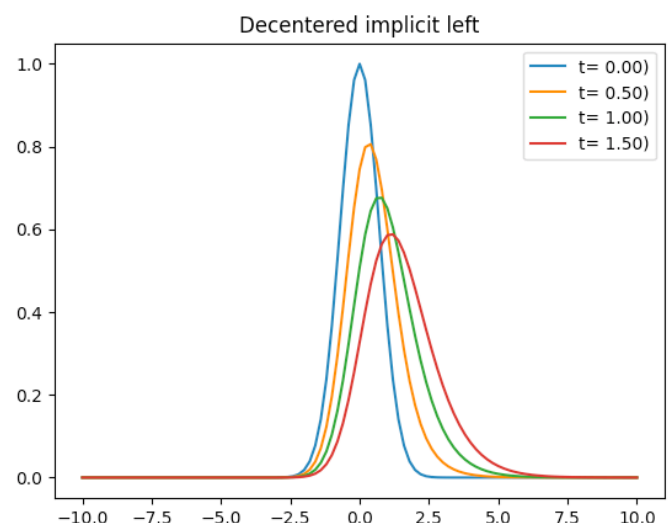
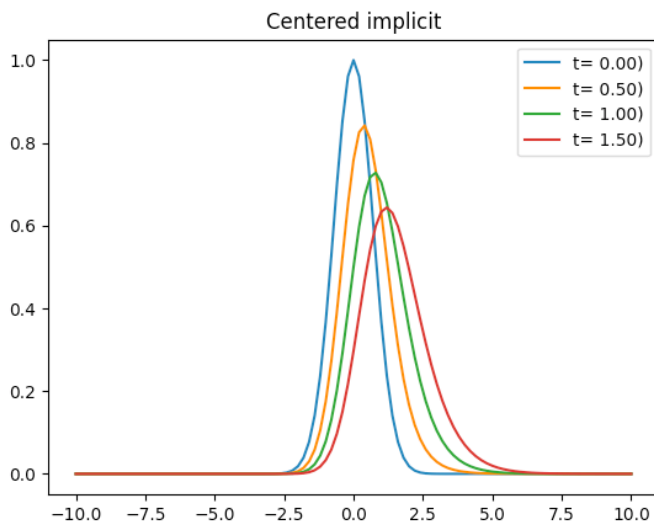
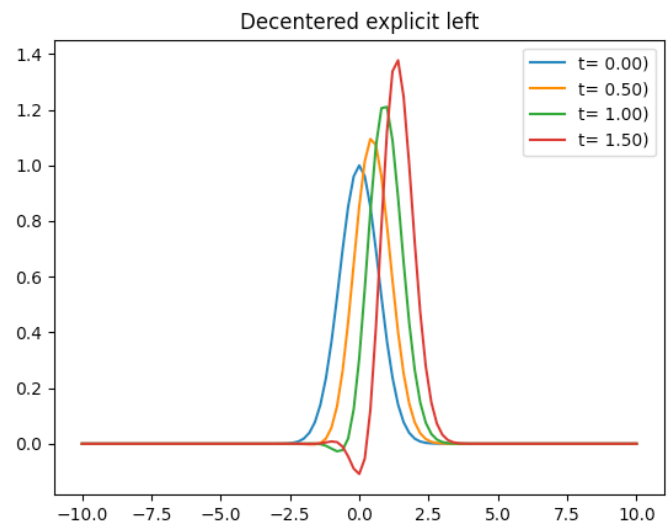
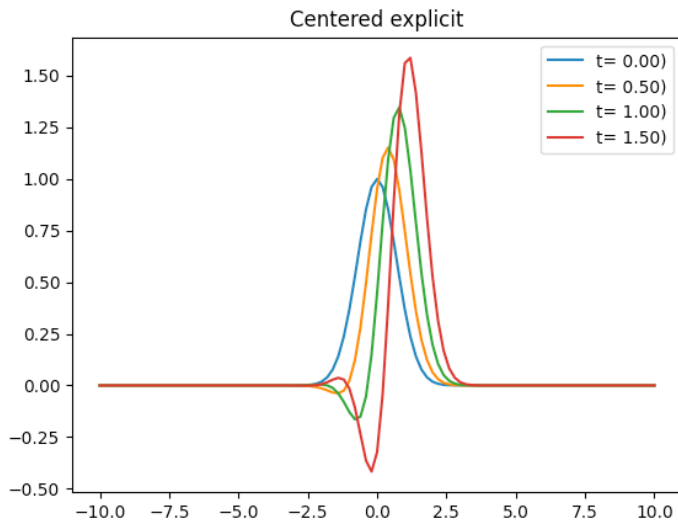
Schéma de Crank-Nicholson décentré amont :

```
def decentered_CN_left(N, tau, u):
    h = 20./(N+1)
    c = (nu*tau)/(h**2)
    d = (V*tau)/h
    X = np.linspace(-10,10,N+2)
    nmax = int(T_max/tau)
    T = np.linspace(0., tau*nmax, nmax+1)
    U_n = np.zeros((nmax+1, N+2))
    M1 = default_matrix(N, (1+(d/2)+c), -(c/2), -((d/2)+(c/2)))
    M2 = default_matrix(N, (1-(d/2)-c), (c/2), ((d/2)+(c/2)))
    un = u(X[1:N+1])
    U_n[0, 1:N+1] = un
    for i in range(nmax):
        un = np.linalg.solve(M1, M2@un)
        U_n[i+1, 1:N+1] = un
    return X, T, U_n
```

8. Tester avec les choix suivants de pas les différents schémas et commenter. Vous êtes invités à tester avec d'autres valeurs de pas.

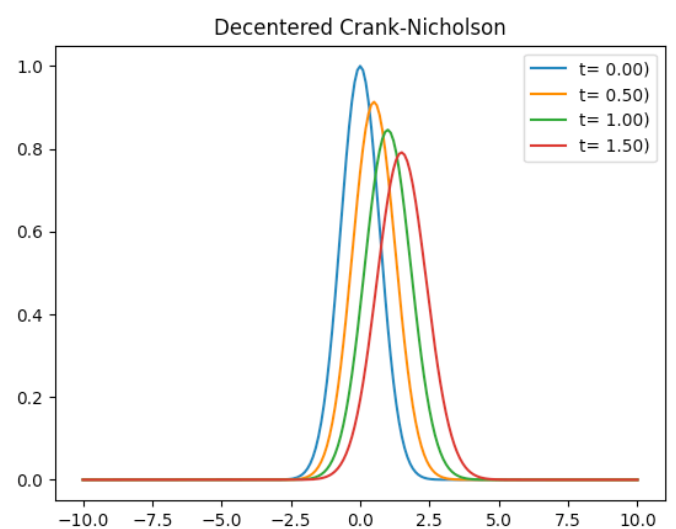
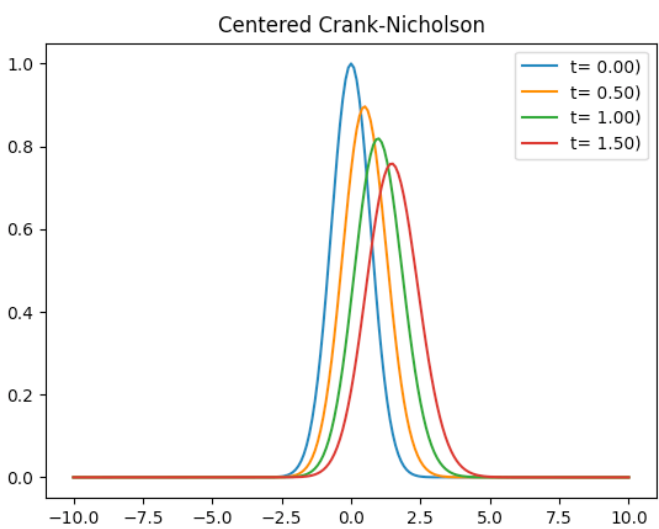
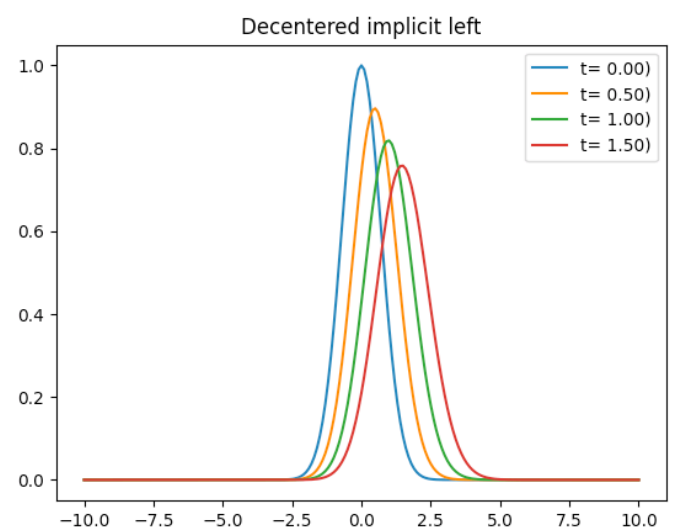
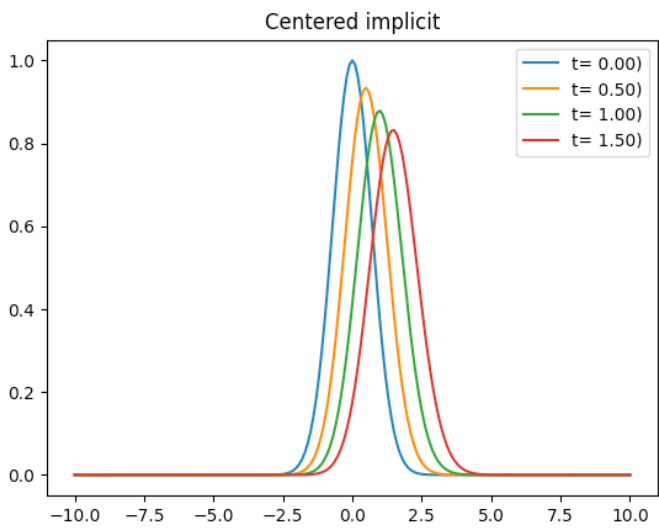
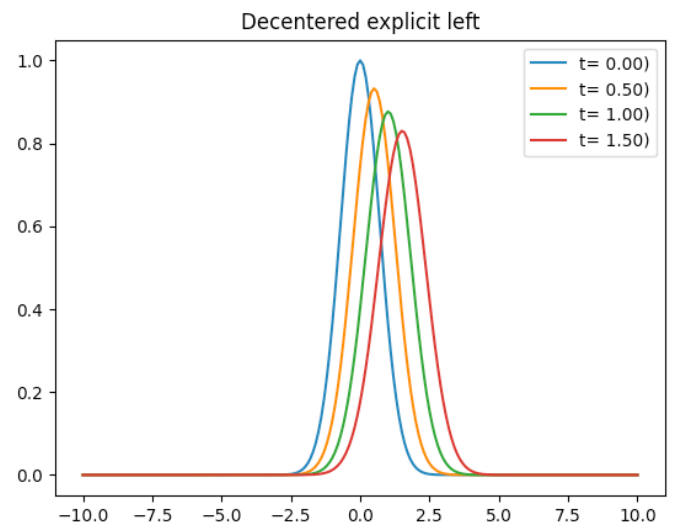
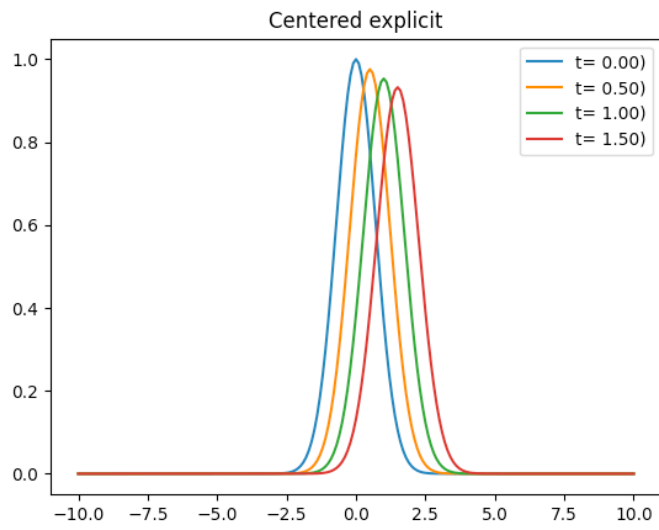
Afin de faciliter la lecture nous ne mettons aucune capture d'écran des codes python. Vous les trouverez dans le fichier "projet_test1.py".

A. $h = 0.2$ et $\tau = 0.5$



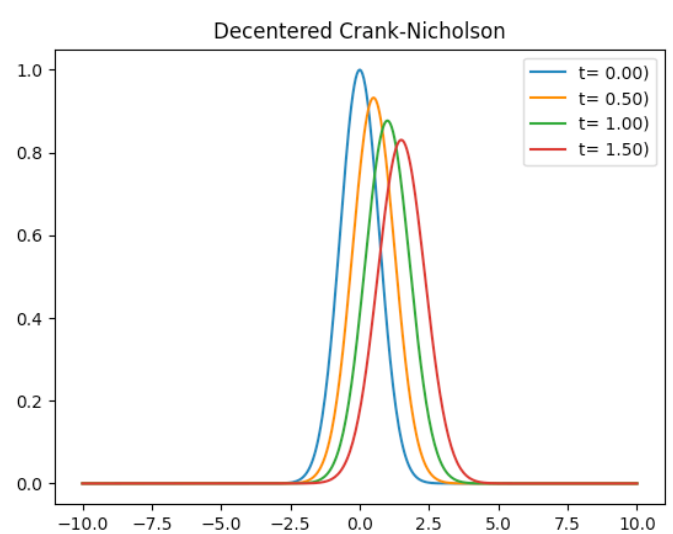
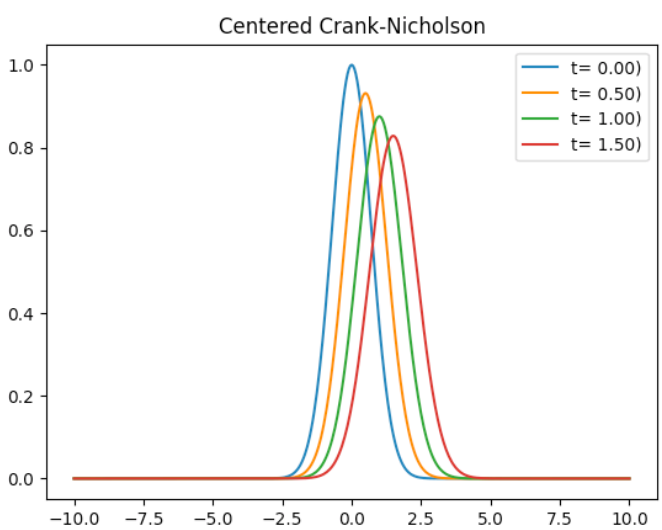
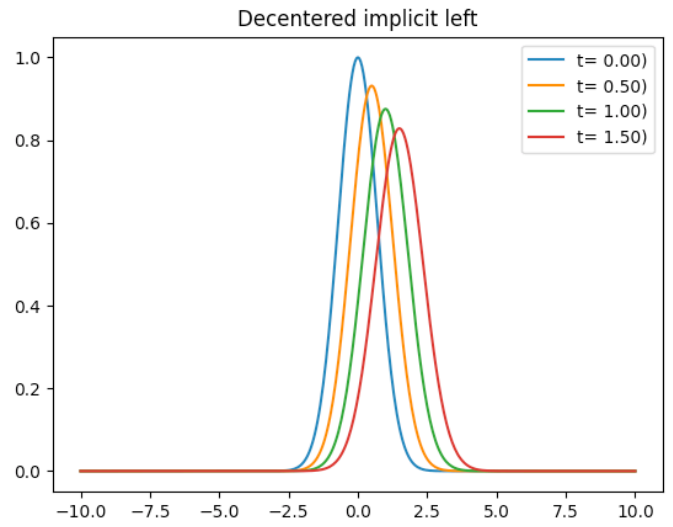
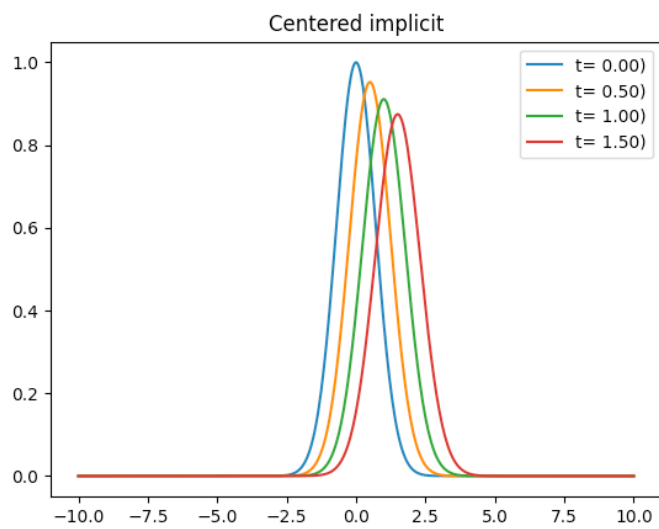
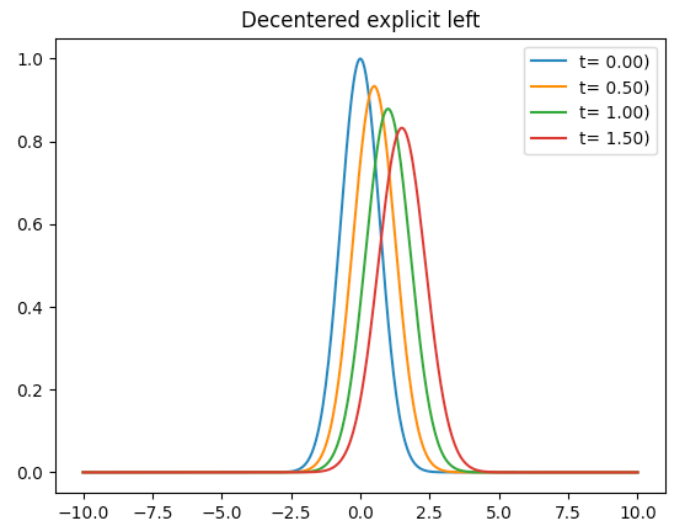
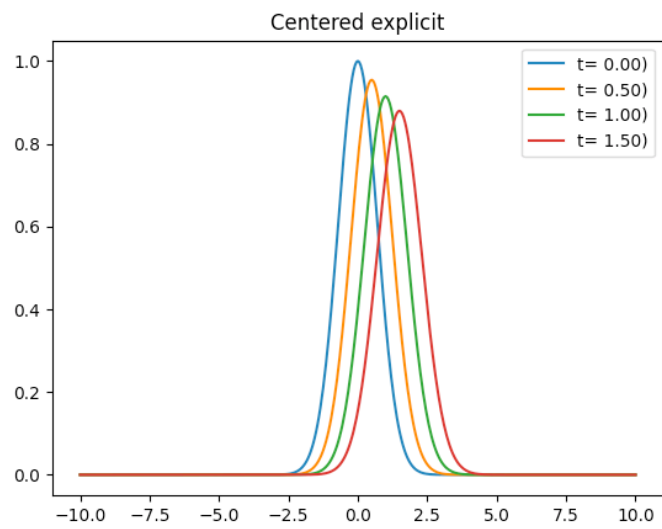
On remarque pour ces valeurs de h et de τ que les schémas implicites centrés, implicites décentrés amont, Crank-Nicholson centré et Crank-Nicholson décentré amont sont assez similaires. On remarque également une légère instabilité concernant les schémas explicites. Cela s'explique sûrement par le fait que les conditions sur c et d ne respectent pas celle de stabilité.

B. $h = 0.1$ et $\tau = 0.05$



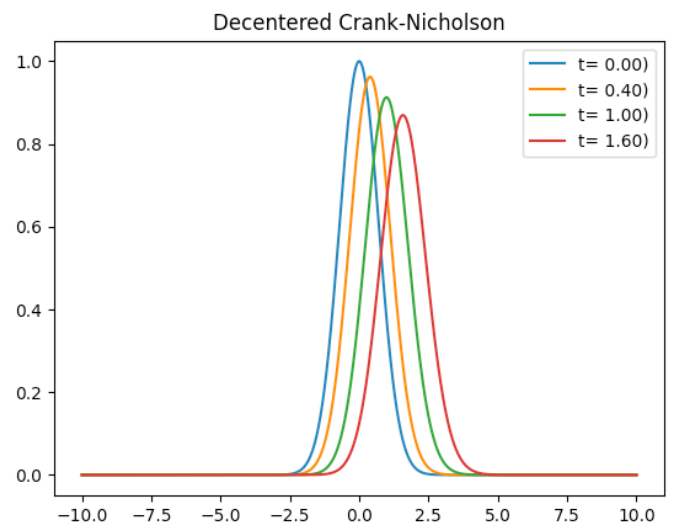
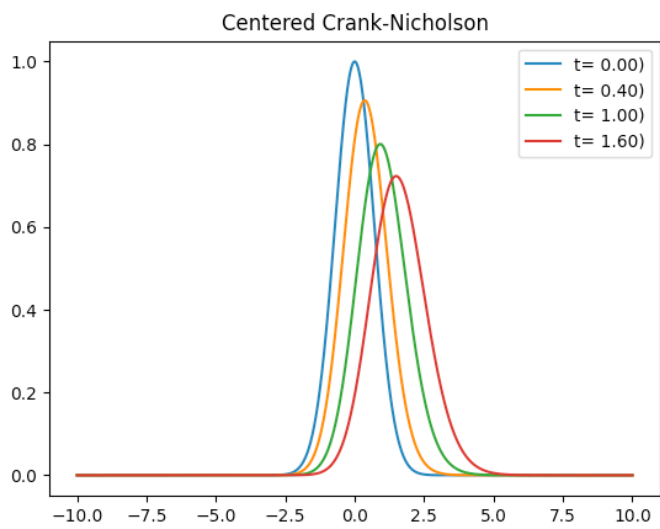
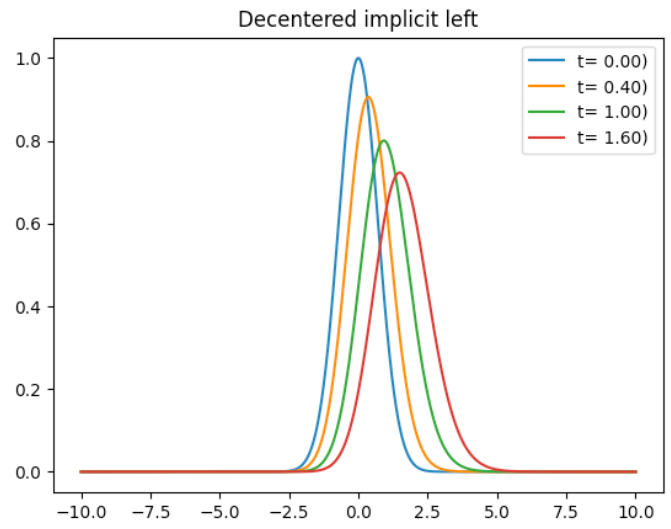
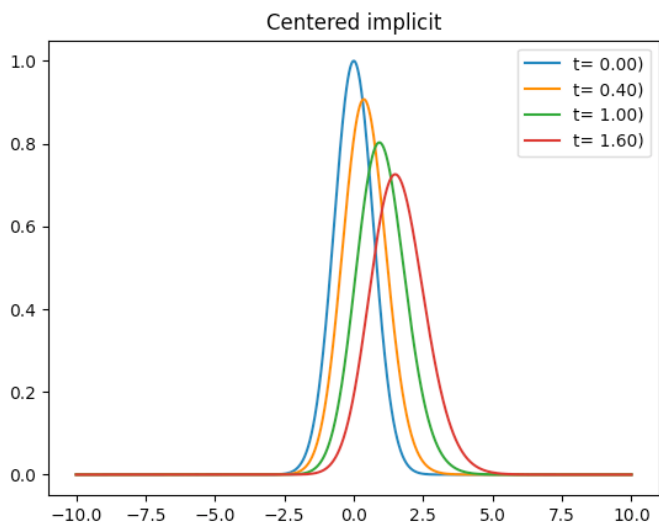
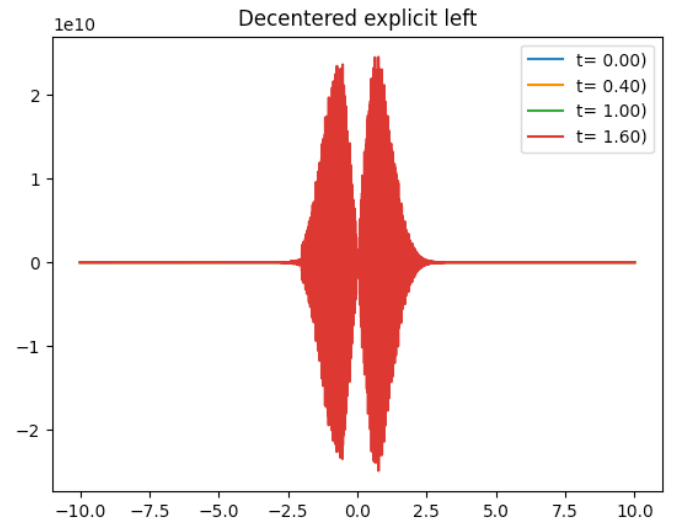
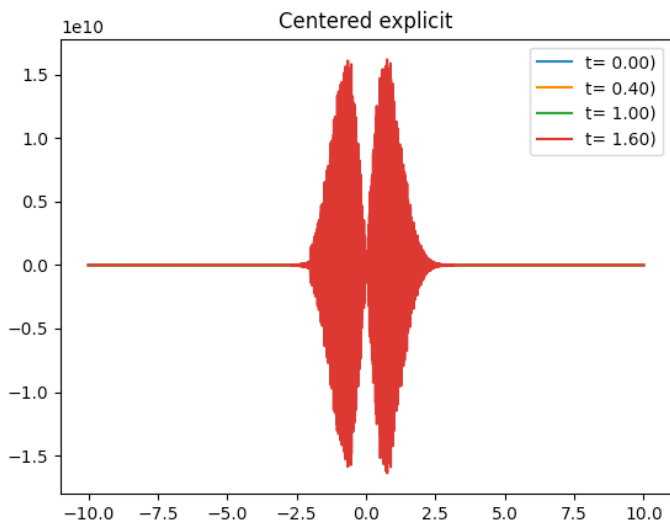
Ici nous n'avons pas réellement de commentaires à faire tous les schémas sont relativement stable et paraissent assez similaire. Seul un zoom sur ces derniers pourrait mettre en évidence les différences.

C. $h = 0.05$ et $\tau = 0.0025$



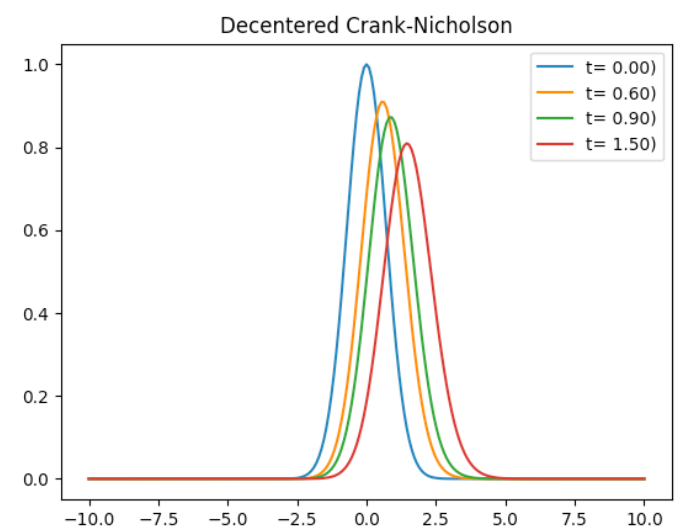
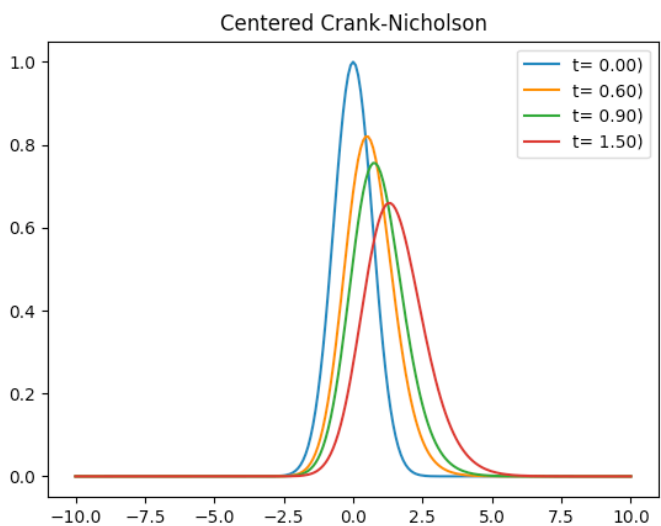
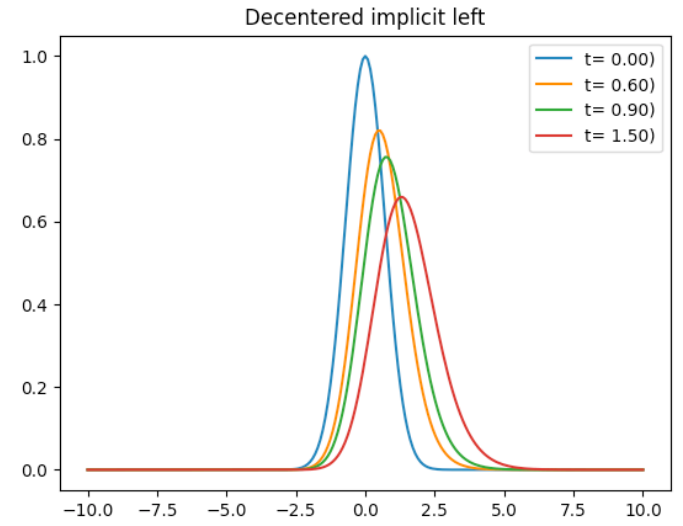
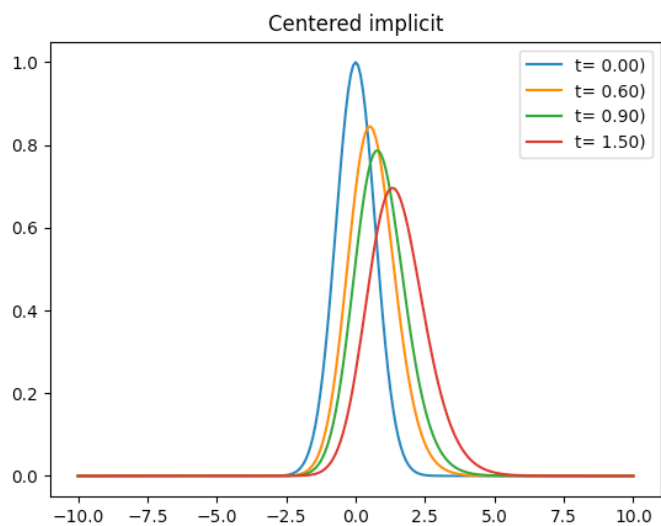
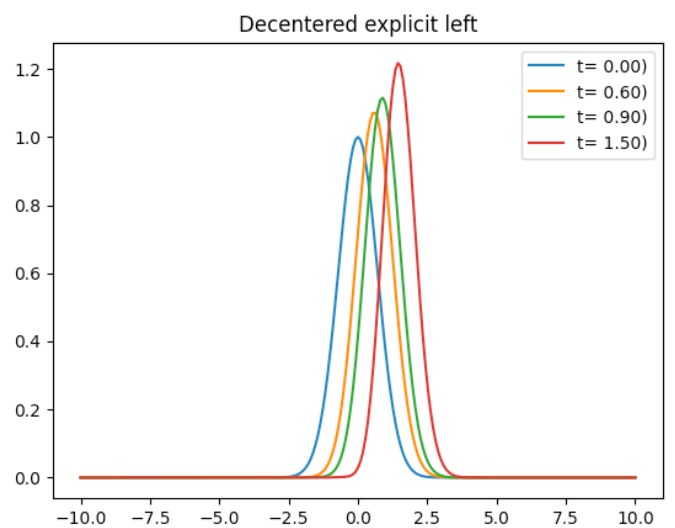
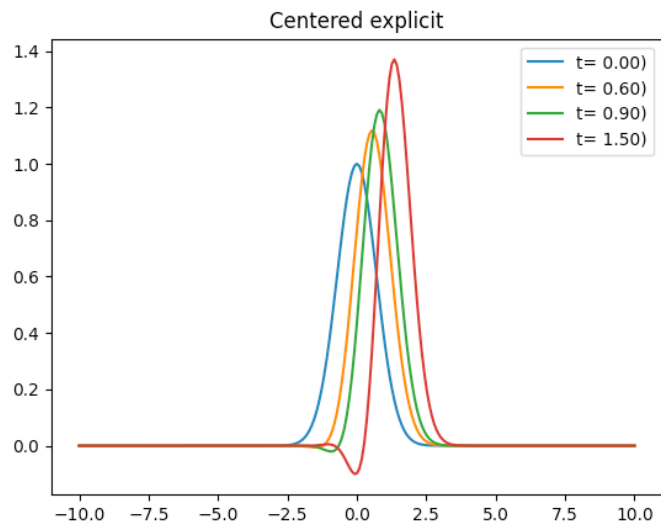
Pour ces valeurs de h et τ nous pouvons effectuer les mêmes conclusions que précédemment.
Tous les schémas paraissent stables.

$D. \quad h = 0.005 \text{ et } \tau = 0.2$



Ce test a été effectué selon notre initiative. Il nous est paru judicieux de le mettre en évidence car il montre réellement l'instabilité des deux schémas explicites. Nous voyons bien que nous obtenons des valeurs très très grande (de l'ordre de 10^{10}) ce qui est assez significatif de l'instabilité. A contrario on remarque que tous les autres schémas paraissent quant-à eux relativement stables.

$E. \quad h = 0.09 \text{ et } \tau = 0.3$



Ce dernier test a été sélectionné par nous et permet de mettre en évidence l'instabilité du schéma explicite centré tandis que tous les autres semblent tout de même être stables.

Conclusion générale :

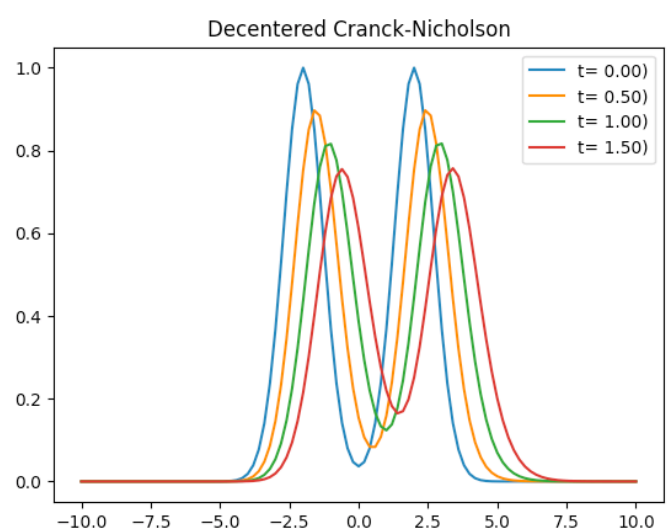
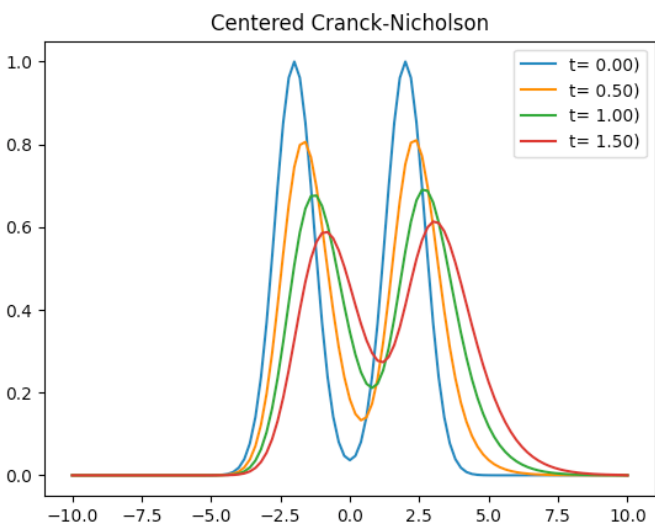
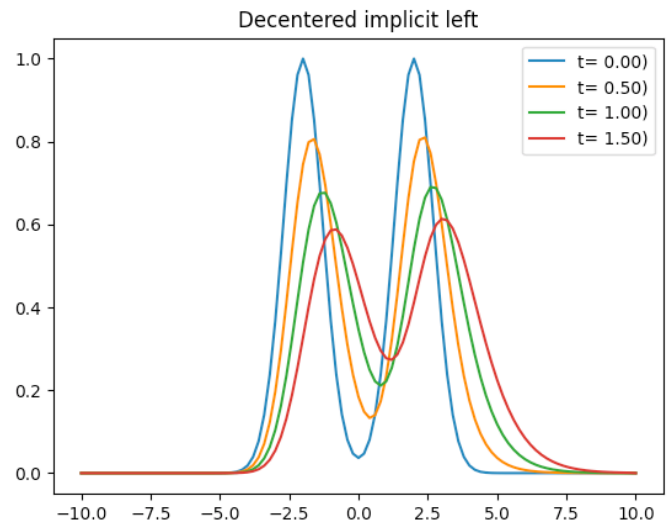
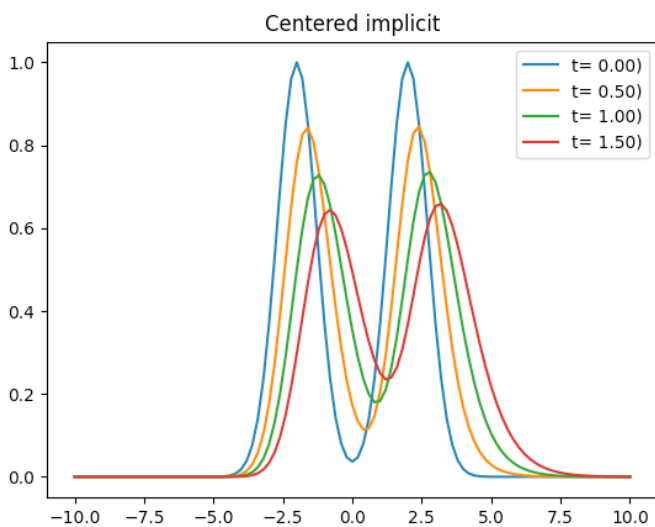
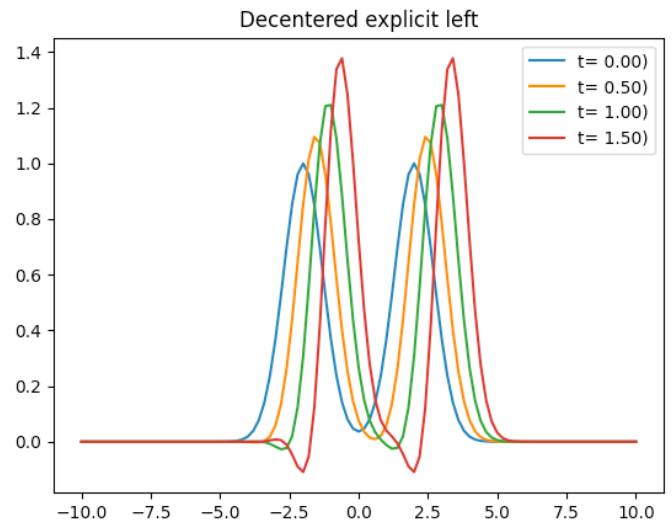
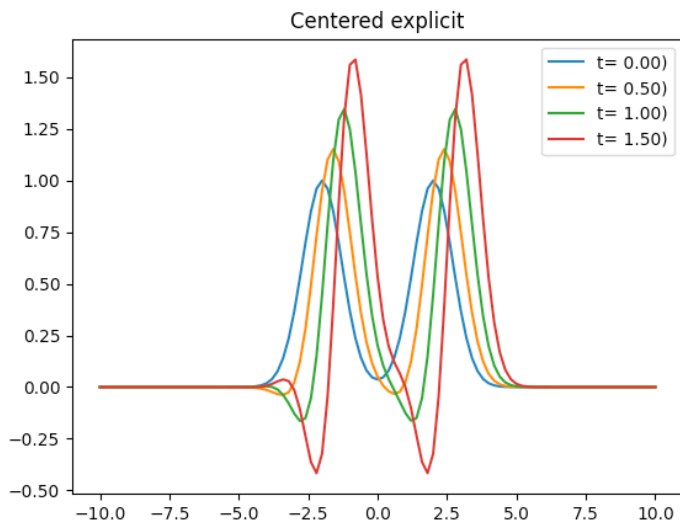
De tous ces test précédents on peut donc conclure que le schéma explicite centré est le plus instable, le schéma explicite décentré est aussi relativement instable en fonction des tests tandis que tous les autres schémas restent tout à fait stable. Mais quand est-il si nous changeons la condition initiale.

9. Expérimenter les schémas avec maintenant la condition initiale suivante :

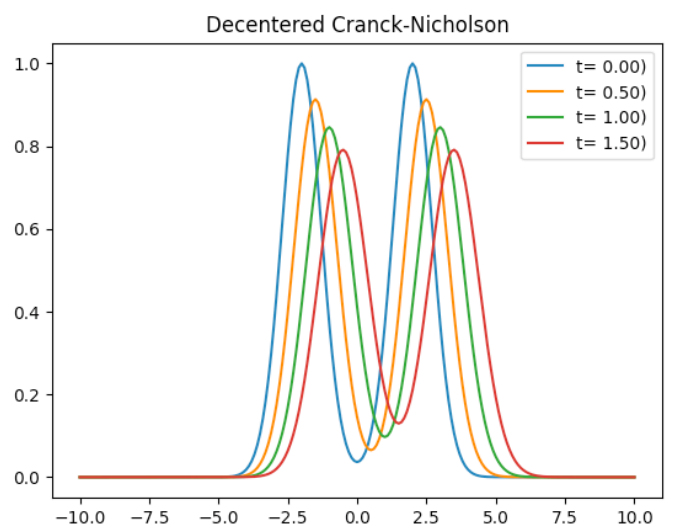
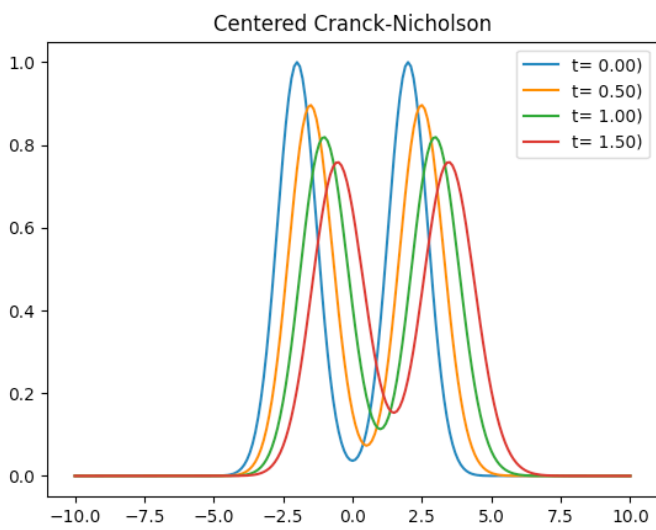
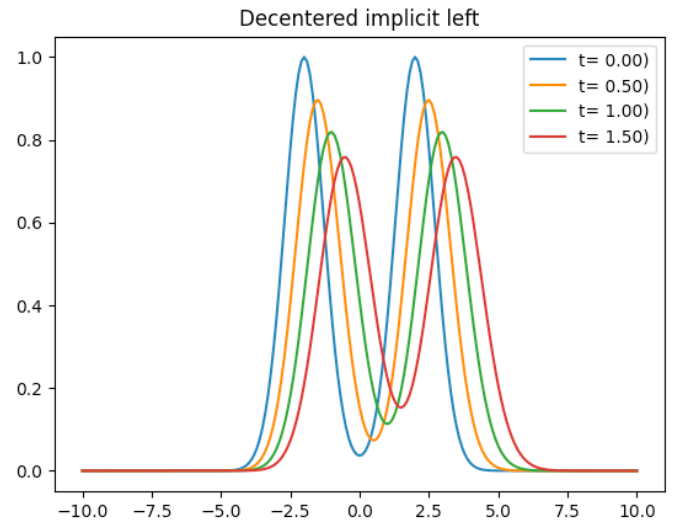
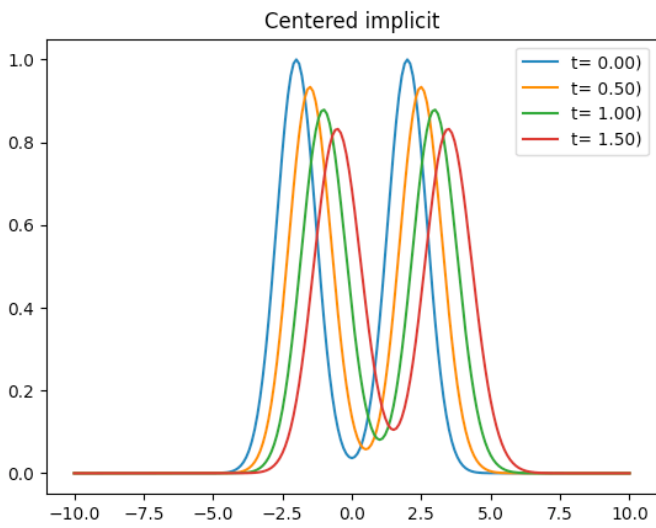
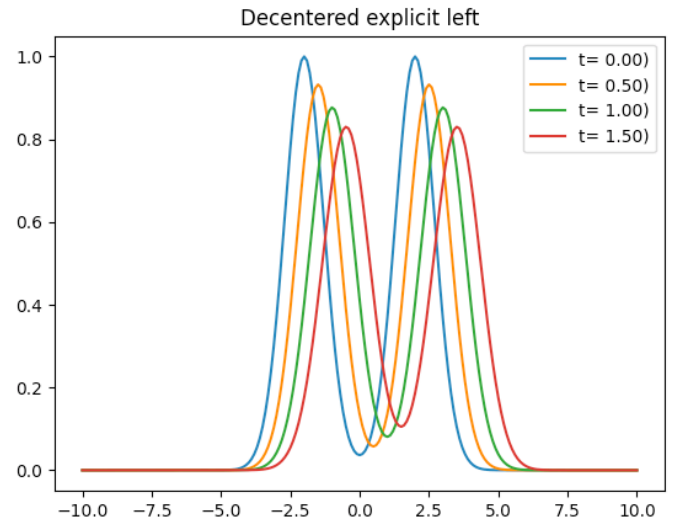
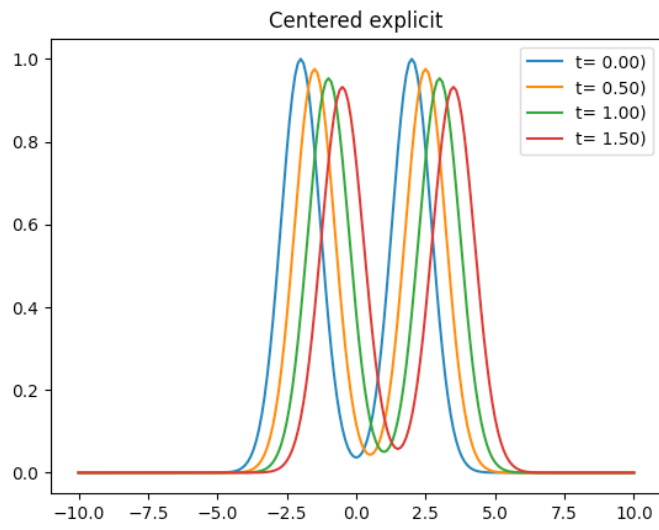
$$u_0(x) = e^{-(x-2)^2} + e^{-(x+2)^2}$$

À l'instar de la partie précédente, nous ne mettrons aucune capture des codes. Ces derniers sont accessibles dans le fichier "projet_test2.py".

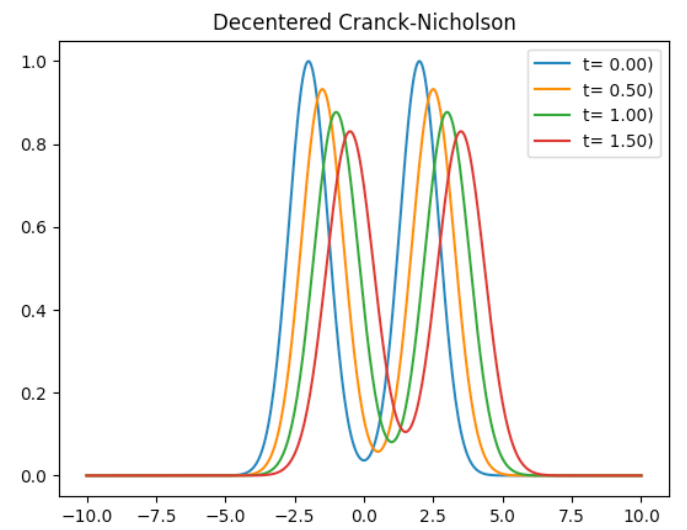
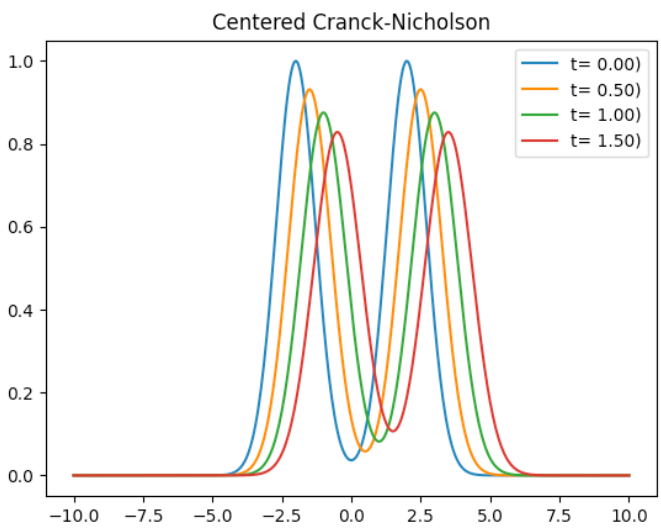
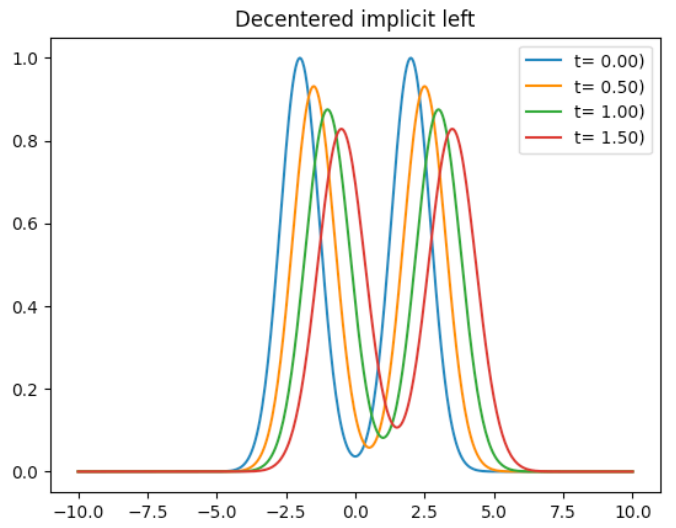
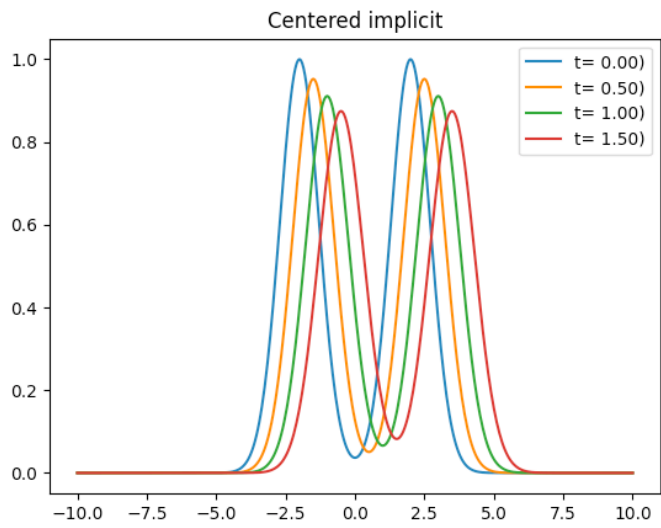
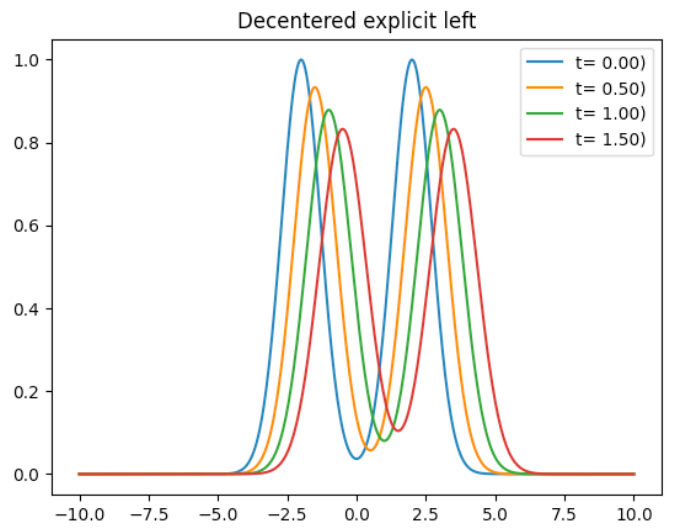
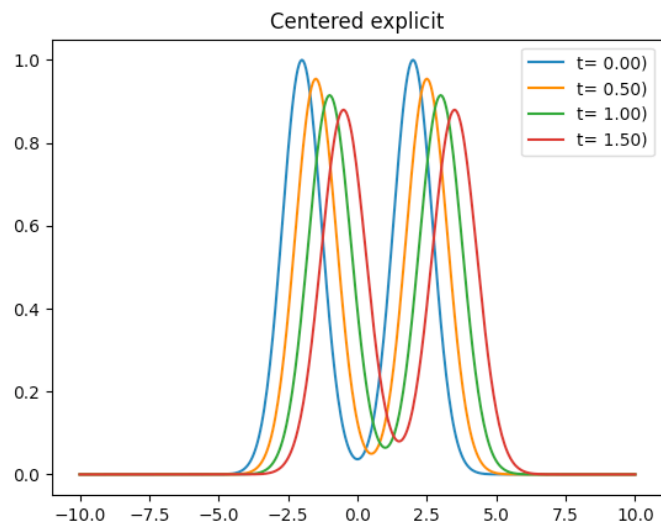
A. $h = 0.2$ et $\tau = 0.5$



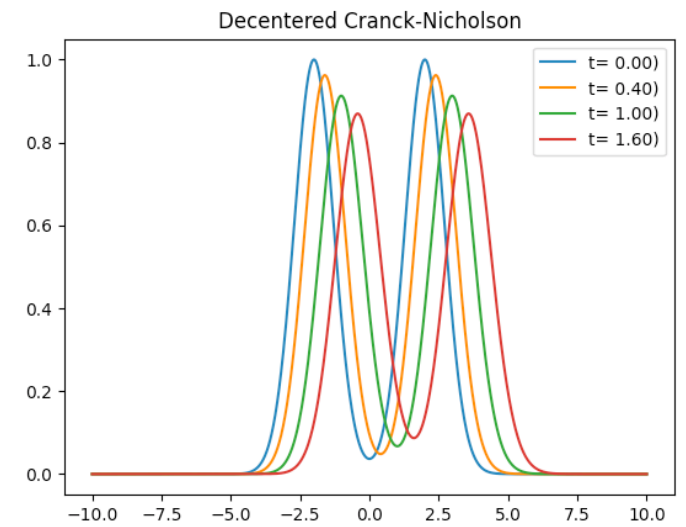
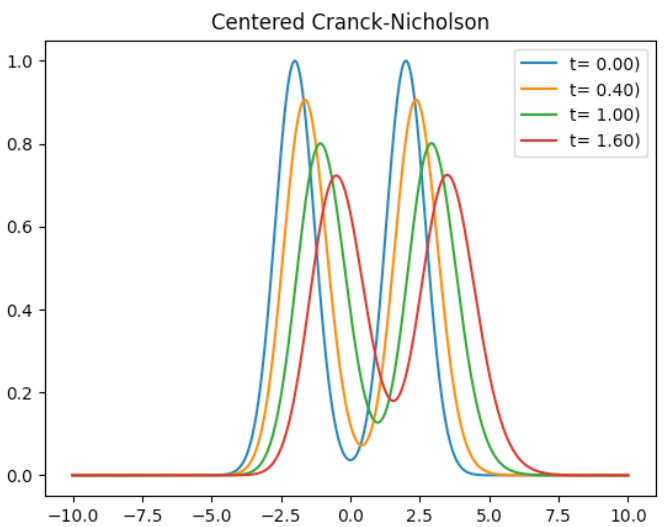
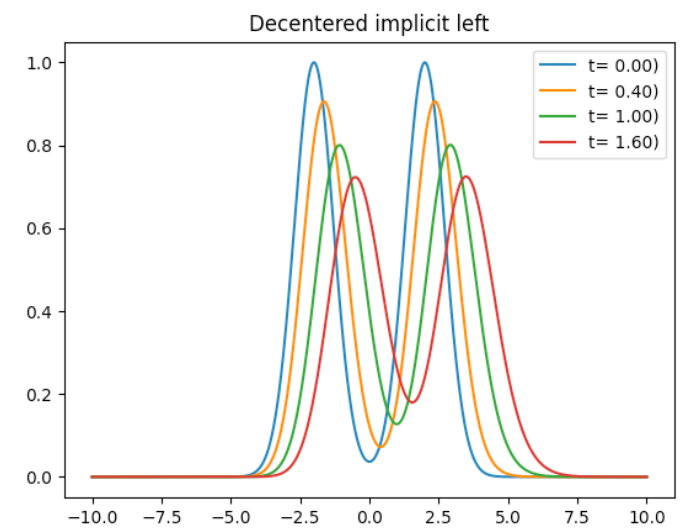
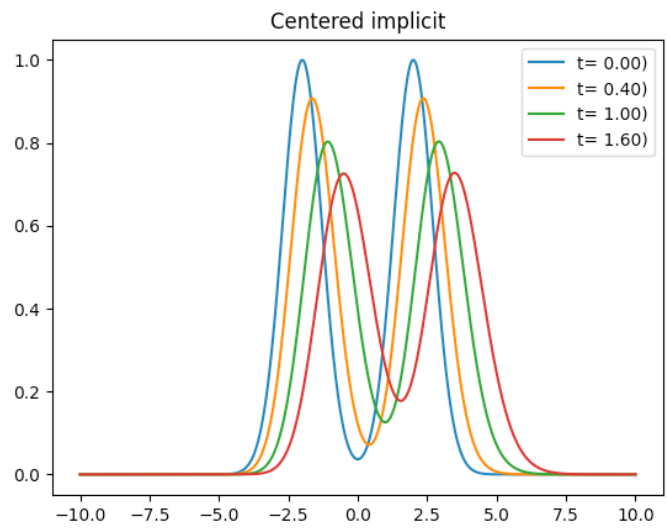
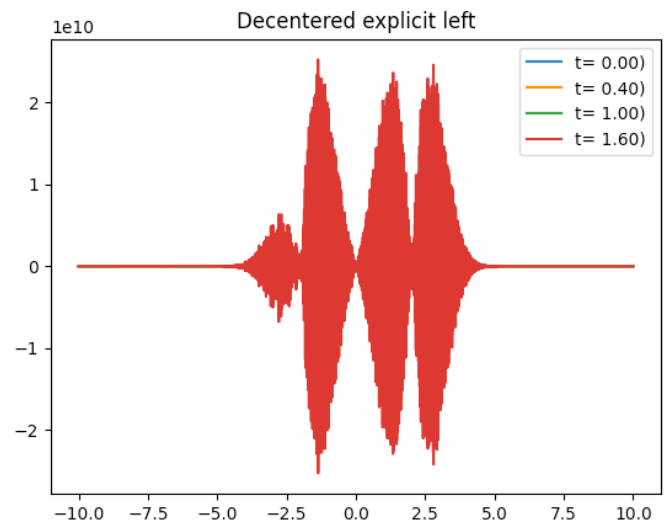
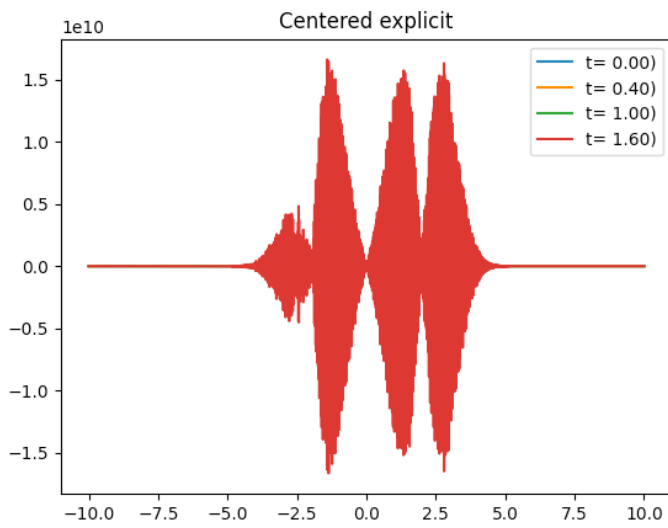
B. $h = 0.1$ et $\tau = 0.05$



C. $h = 0.05$ et $\tau = 0.0025$



$D. \quad h = 0.005 \text{ et } \tau = 0.2$



Conclusion générale :

Nous voyons que même avec le changement de condition initiale, les faits que nous avons exposés précédemment, pour la première série de tests, sont exacts aussi pour cette série de tests. Les schémas explicite semblent les plus instables tandis que tous les autres schémas réagissent plutôt bien et apparaissent comme relativement stables.