Ma322 - Quadrature et résolution numérique d'EDO

Mini Projet - Résolution numérique des équations différentielles

Aéro 3 - Filière Système

Julien Fresnel et 1 autre personne

2020-2021

3SA2

OBJECTIFS[1]

Ce mini-projet vise d'une part à la résolution d'une équation intégrale par une méthode d'intégration numérique et enfin l'appliquer à l'équation de Love en électrostatique et d'autre part , la résolution numérique des équations différentielles ordinaires issues de la physique et en biologie.

ÉQUATION INTÉGRALE

I. Position du problème

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables , s'apparaît sous le signe intégral. On souhaite déterminer une approximation de la solution u de l'équation de l'intégrale :

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt + f(x),\ x \in [a,b]$$

Où a, b deux réels, le noyau K et f sont des fonctions données.

II. Présentation du Benchmark

L'équation approchée du problème s'écrit sous la forme :

$$u_i = \frac{h}{2}(K(x_i,t_0)u_1 + 2\sum_{j=1}^{N-1} K(x_i,t_j)u_j + K(x_i,t_N)u_N) + f(x_i)$$

Où u_i est l'approximation de $u(x_i)$.

Question 1 :

On rappelle qu'on a :

$$u_i = \frac{h}{2}(K(x_i,t_0)u_1 + 2\sum_{j=1}^{N-1} K(x_i,t_j)u_j + K(x_i,t_N)u_N) + f(x_i)$$

Posons alors :

$$u_i - \frac{h}{2}(K(x_i,t_0)u_1 + 2\sum_{j=1}^{N-1} K(x_i,t_j)u_j + K(x_i,t_N)u_N) = f(x_i)$$

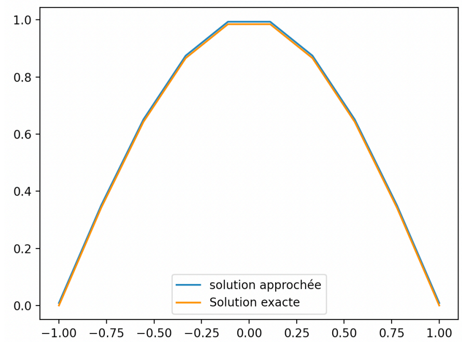
Posons alors une matrice $A \in \mathbb{M}_N$ s'écrivant de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} K(x_0,t_0) & 2K(x_0,t_1) & \cdots & 2K(x_0,t_{N-1}) & K(x_0,t_N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ K(x_N,t_0) & 2K(x_N,t_1) & \cdots & K(x_N,t_{N-1} & K(x_N,t_N) \end{pmatrix}$$

Notons par ailleurs :

$$F = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} ;\ U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Questions 2 :



L'erreur $||U - V||_2$ est :

0.027310897025062165

III. Équation de Love en électrostatique

L'équation de Love en électrostatique consiste à prendre dans l'approximation $a = 1,\ b = 1$. On obtient ainsi pour le noyau K et pour f :

$$K(x,t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-t)^2}\ \text{, et } f(x) = 1$$

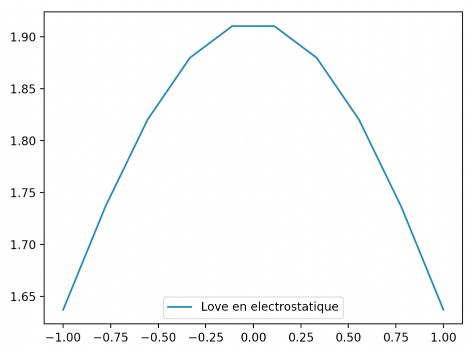
On obtient ainsi :

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-t)^2}u(t)dt + 1$$

Question 1 :

```
U = [1.63708319 1.736442   1.82027677 1.87968872 1.91017314 1.91017314
 1.87968872 1.82027677 1.736442   1.63708319]
```

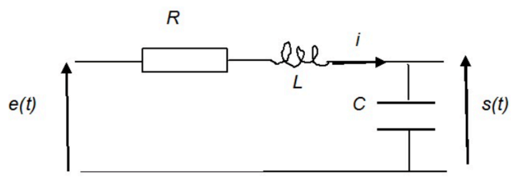
Question 2 :



[1] *Les codes sont disponibles en intégralités dans le fichier "Projet.py"*

CIRCUIT RLC

On se propose d'étudier du courant i et le tension s du circuit RLC.



Avec $C = 10^{-6}\ F,\ R = 3\ \Omega,\ L = 0.5\ H$

La tension (signal) d'entrée e est un échelon de 10 volts. Les lois de l'électricité permettent d'aboutir au système suivant d'équations différentielles :

$$\begin{cases} e = s(t) + Ri(t) + L\dfrac{di(i)}{dt} \\ i(t) = C\dfrac{ds(t)}{dt} \\ i(0) = 0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

où $t \in [0,2]$.

Question 1 :

On a alors d'après le système précédent :

$$\begin{cases} s(t) = e - Ri(t) - L\dfrac{di(i)}{dt} \\ i(t) = C\dfrac{ds(t)}{dt} \\ i(0) = 0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

En isolant $\dfrac{di(t)}{dt}$ et $\dfrac{ds(t)}{dt}$ on obtient :

$$\begin{cases} s'(t) = \frac{1}{C}i(t) \\ i'(t) = \frac{1}{L}[e(t) - Ri(t) - s(t)] \end{cases}$$

Posons ainsi les deux variables (y_1, y_2) tel que :

$$\begin{cases} y_1 = i(t) \\ y_2 = s(t) \\ y_1' = i'(t) = \dfrac{1}{L}[e(t) - Ri(t) - s(t)] \\ y_2' = s'(t) = \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases}$$

En définissant un vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ on obtient alors :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} i(0) = 0 \\ s(0) = 0 \end{pmatrix},\ Y' = \begin{pmatrix} y_1' = \frac{1}{L}[e(t) - Ry_1 - y_2] \\ \frac{1}{C}y_1 \end{pmatrix} = F(t, Y)$$

On peut alors écrire mettre ce problème sous la forme d'un problème de Cauchy.

Question 2 :

Pour montrer que la solution est unique il faut montrer que la fonction $F(t, Y)$ est continue et Lipschitzienne. Pour cela posons : $Y_1 \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \end{pmatrix}$ et $Y_2 \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ y_{2,2} \end{pmatrix}$.

Donc nous avons[2] :

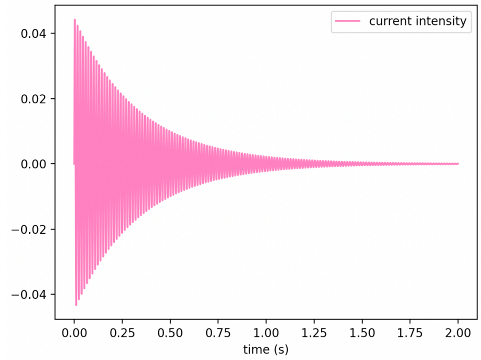
$$\begin{aligned} ||F(t,Y_1) - F(t,Y_2)|| &\leq |\frac{1}{L}[e(t) - Ry_{1,1} - y_{1,2}] - (\frac{1}{L}[e(t) - Ry_{2,1} - y_{2,2}])| + |\frac{1}{C}y_{1,1} - \frac{1}{C}y_{2,1}| \\ \Leftrightarrow &\leq \frac{1}{L}|R(y_{1,1} - y_{2,1} + (-(y_{1,2} - y_{2,2})) + \frac{1}{C}|y_{1,1} - y_{2,1}| \\ \Leftrightarrow &\leq [\frac{R}{L} + \frac{1}{C}]|y_{1,1} - y_{2,1}| + \frac{1}{L}[y_{1,2} - y_{2,2}] \end{aligned}$$

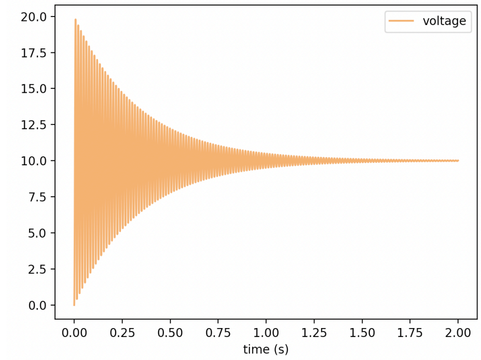
De cela on peut ainsi obtenir :

$$||F(t, Y_1) - F(t, Y_2)|| \leq \max([\frac{R}{L} + \frac{1}{C}]; \frac{1}{L})||Y_1 - Y_2||$$

Ainsi, on sait que la fonction $F(t, Y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. De plus d'après ce que l'on a montré précédemment nous pouvons dire que la fonction est $\max([\frac{R}{L} + \frac{1}{C}]; \frac{1}{L})$-Lipschitzienne sur le même ensemble. Ainsi d'après les propriété, la fonction $F(t, Y)$ admet une unique solution.

Question 5 :



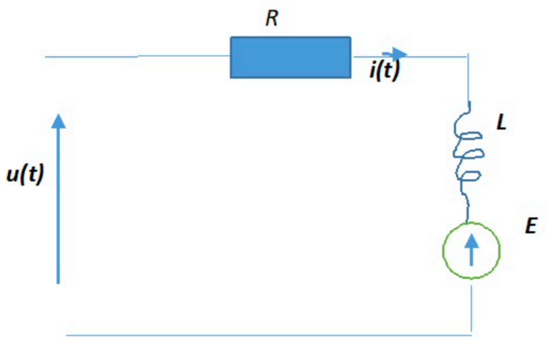


[2] *Le détail des calculs a été fortement réduit afin de minimiser le nombre de pages*

Question 6 :

On remarque que pour un temps $t \to \infty$ notre solution se rapproche de 0 que ce soit concernant l'intensité du courant ou bien la tension.

MOTEUR À COURANT CONTINU



On considère ce moteur à courant continu pour lequel les lois de l'électrocinétique nous permette d'écrire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} u(t) & = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + K_e\omega(t) \\ J_m\dfrac{d\omega(t)}{dt} & = C_m - C_f \\ C_m & = K_c i(t) \\ C_f & = F_m\omega(t) \end{cases}$$

Les paramètres électromécaniques sont rappelés dans le sujet.

Isolons alors les expressions de $\dfrac{d\omega(t)}{dt}$ et de $\dfrac{di(t)}{dt}$. Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} i'(t) & = \frac{1}{L}[u(t) - Ri(t) - K_e\omega(t)] \\ \omega'(t) & = \frac{1}{J_m}[K_c i(t) - F_m\omega(t)] \end{cases}$$

Maintenant soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 = i(t) \\ y_2 = \omega(t) \end{pmatrix}$ de cette façon nous avons :

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' = i'(t) = \frac{1}{L}[u(t) - Ri(t) - K_e\omega(t)] \\ y_2' = \omega'(t) = \frac{1}{J_m}[K_c i(t) - F_m\omega(t)] \end{pmatrix} = F(t, Y)$$

Sachant que $Y_0 = \begin{pmatrix} i(0) = 0 \\ \omega(0) = 0 \end{pmatrix}$ nous pouvons écrire ce système sous la forme d'un problème de Cauchy.

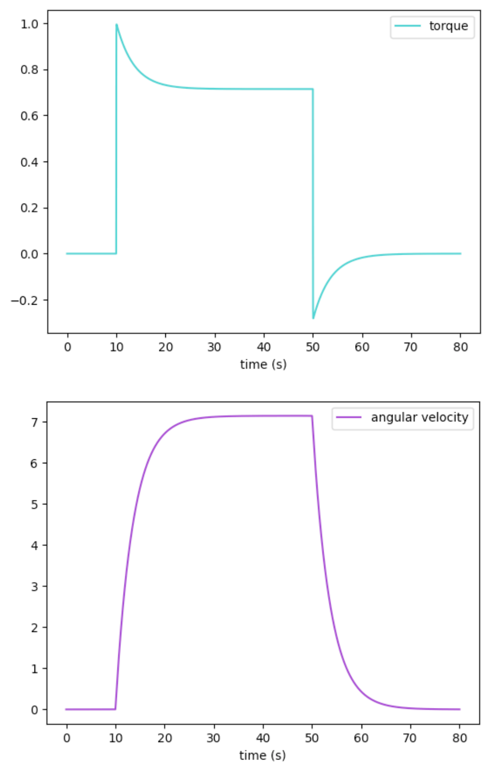
Question 2 :

Posons $Y_1 \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \end{pmatrix}$ et $Y_2 \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ y_{2,2} \end{pmatrix}$ et montrons que la fonction $F(t, Y)$ est Lipschitzienne.

$$\begin{aligned} ||F(t,Y_1) - F(t,Y_2)|| &\leq |\frac{1}{L}[u(t) - Ry_{1,1} - K_e y_{1,2}] - \frac{1}{L}[u(t) - Ry_{2,1} - K_e y_{2,2}]| \\ &+ |\frac{1}{J_m}[K_c y_{1,1} - F_m y_{1,2}] - \frac{1}{J_m}[K_c y_{2,1} - F_m y_{2,2}]| \\ &\Leftrightarrow \leq \frac{R}{L}| - (y_{1,1} - y_{2,1}| + \frac{K_e}{L}| - (y_{1,2} - y_{2,2}| + \frac{K_c}{J_m}|y_{1,1} - y_{1,2}| \\ &+ \frac{F_m}{J_m}| - (y_{1,2} - y_{2,2}] \\ &\Leftrightarrow \leq \max([\frac{R}{L} + \frac{K_c}{J_m}]; [\frac{K_e}{L} + \frac{F_m}{J_m}])||Y_1 - Y_2|| \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi dire que comme la fonction $F(t, Y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et qu'elle est également Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, alors on peut dire que la fonction admet une unique solution.

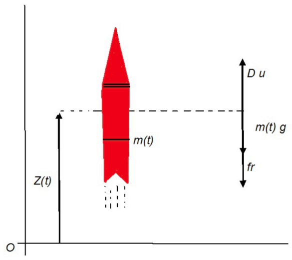
Questions 5 et 6 :



Question 7 :

On peut remarquer que les deux courbes commencent à croître presque exactement au même endroit, qu'elle commence à se rapprocher de leur asymptote à l'infini au même moment. Enfin on voit que lorsque $t \to \infty$ les deux solutions se rapprochent de 0.

MOUVEMENT D'UNE FUSÉE

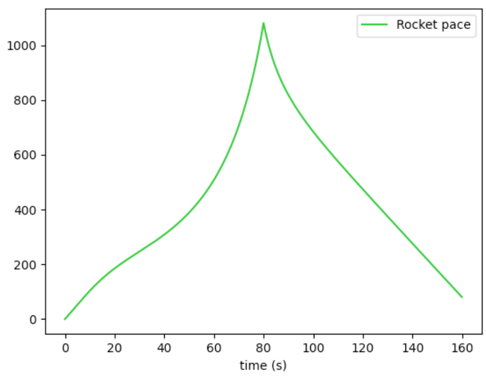


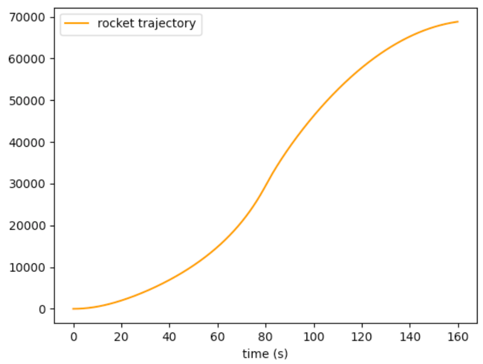
Une petite fusée est lancée dans la haute atmosphère pour y lancer des instruments de mesure. Après l'énoncé de toutes les caractéristiques de la fusée nous obtenons finalement le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} &= \dfrac{Du}{m(t)} - g - k_0 \exp(-\dfrac{z(t)}{a_0}) \times \dfrac{v^2}{m(t)} \\ \dfrac{dm(t)}{dt} &= -D \\ \dfrac{dz(t)}{dt} &= v(t) \end{cases}$$

Avec $t \in [0{,}160]$.

Question 3 et 4 :





Question 5 :

On peut visualiser grâce à ces deux courbes que pour $t \in [0{,}80]$ plus la vitesse de la fusée augmente plus son altitude (trajectoire) augmente également. Mais pour $t \in [80{,}160]$ plus la vitesse diminue plus l'altitude (trajectoire) de la fusée va se stabiliser.

MODÈLE PROIE-PRÉDATEUR

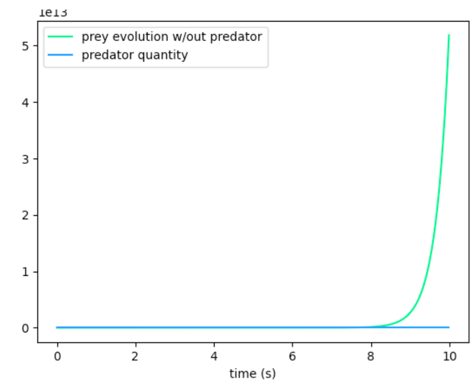
On suppose que coexistent sur le même territoire deux populations dont l'une nourriture pour l'autre. Avec les hypothèse exposées dans l'énoncé nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} &= \alpha_1 y_1(t) - \beta_1 y_1(t) y_2(t) \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} &= -\alpha_2 y_2(t) + \beta_2 y_1(t) y_2(t) \\ y_1(0) &= 5 \\ y_2(0) &= 3 \end{cases}$$

Où $\alpha_1 = 3,\ \beta_1 = 1,\ \alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$

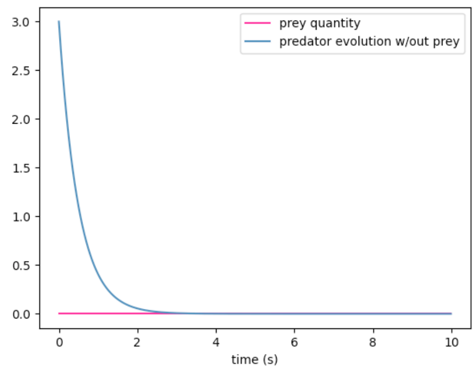
Question 1 :

L'évolution des proies en l'absence de prédateur se caractérise par $y_2(0) = 0$. Ainsi en codant sur python un code décrivant ce système on obtient la courbe suivante en l'absence de prédateur :



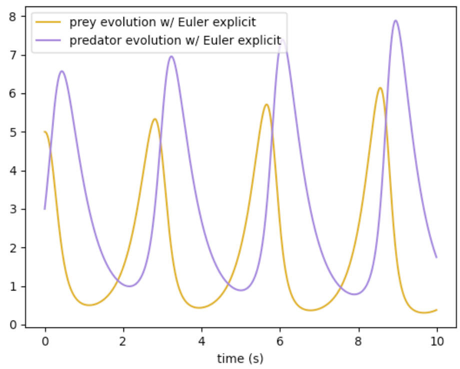
Question 2 :

Nous appliquons le même raisonnement mais pour cette fois-ci $y_1(0) = 0$:



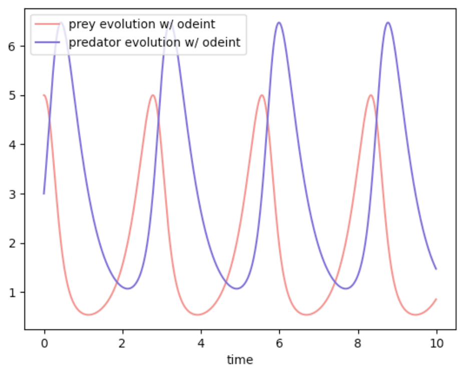
Question 3 :

On va utiliser Euler explicit pour déterminer l'évolution des proies et des prédateurs.



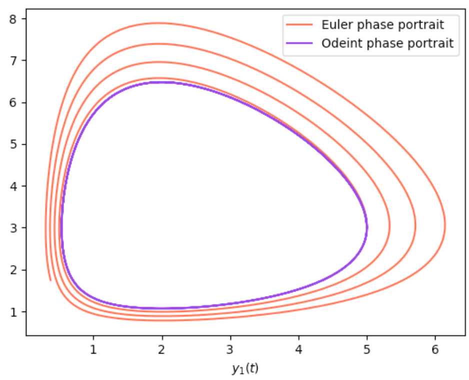
Question 4 :

Cette fois-ci on utilise le solveur Odeint pour déterminer cette évolution.



On remarque qu'au fil du temps les espèces se régulent toutes seules. Cela est logique moins il y a de proie moins il y a de prédateur et moins il y a de prédateur plus il y a de proies.

Question 5 :



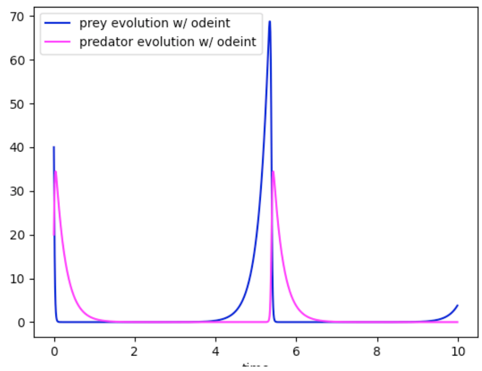
On remarque grâce à ce portrait de phase que la méthode d'Euler est très instable à la différence du solveur Odeint qui lui est très stable.

Question 6 :

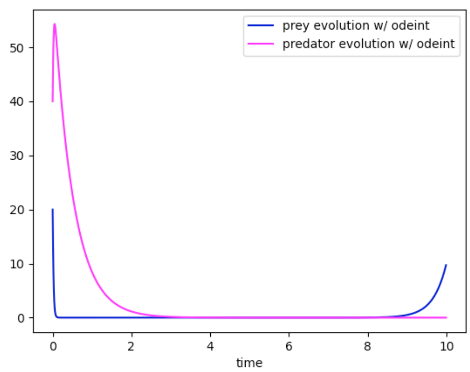
Vous pourrez retrouver toutes les études effectuées en regardant le code python. Plusieurs études ont été réalisées. Nous avons généralisé le code avec saisie des données par l'utilisateur afin que chacun puisse réaliser les tests qu'il veut.

Montrons le résultats trois essais, que nous avons jugés judicieux, où l'on a fait varier l'un des 4 paramètres ou les conditions initiales :

- Pour $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$ et $\beta_2 = 1$ et $Y[0] = 40$ et $Y[1] = 20$:



- Pour $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$ et $Y[0] = 20$ et $Y[1] = 40$:



- Pour $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$ et $\beta_2 = 4$ et $Y[0] = 6$ et $Y[1] = 6$