Obliczenia Naukowe

Lista 4

Yuliia Melnyk
246202

11 grudnia 2022

1 Zadanie I

1.1 Opis problemu

W zadaniu 1 należy napisać funkcję obliczającą ilorazy różnicowe przy pomocy podanej informacji: danych wejściowych i wynikowych, dodatkowo funkcja musi być zaprogramowana bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

1.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania demonstruje plik zad1.jl
Celem uproszczenia notacji, przyjmijmy oznaczenie

$$q_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

dookreślając $q_0(x) = 1$. Wówczas postać Newtona wielomianu p możemy zapisać jako

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i q_i(x)$$

Wielomian p jest rozwiązaniem problemu interpolacji, jeśli spełnia

$$\forall k \in 0, ..., n \sum_{i=0}^{n} c_i q_i(x_k) = y_k$$

Uzyskany w ten sposób układ równań to

$$A \cdot C = Y$$

gdzie $a_{ij} = q_j(k), C = [c_0, ..., c_n]^T, aY = [y_0, ..., y_n]^T$. Zauważmy ponadto, że $\forall i < jq_j(x_i) = 0$, co czyni macierz A dolno-trójkątną. Ten fakt umożliwia nam łatwiejsze znalezienie c_i poprzez rozwiązywanie układu z góry do dołu. Łatwo wtedy zauważyć, że c_0 zależy od $y_0 = f(x_0), c1$ od $y0iy1$, itd. Będziemy oznaczać tę zależność jako

$$c_i = f[x_0, ..., x_i]$$

nazywając ten czynnik ilorazem różnicowym funkcji f opartym na węzłach $x0, ..., x_i$. Na wykładzie udało się dowieść, że ilorazy różnicowe spełniają zależność rekurencyjną

$$f[x_i, ..., x_k] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_k] - f[x_i, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_i}$$

gdzie $f[x_i] = y_i$. W najprostszym podejściu do wyznaczenia każdego moglibyśmy zatem wykorzystać tablicę dwuwymiarową C, gdzie $C[i, j] = f[x_i, ..., x_{i+j}]$. Zauważmy jednak, że po wyznaczeniu wszystkich ilorazów opartych na k węzłach, częściowe ilorazy oparte na $k - 1$ węzłach stają się bezużyteczne (z wyjątkiem $f[x_0, ..., x_{k-1}]$, który jest jednym z szukanych współczynników). Wydaje się zatem, że można w jakiś sposób oszczędzić pamięć potrzebną do rozwiązania zadania.

Odpowiedzią na ten niepokój jest algorytm zaprezentowany poniżej. Rozpoczynamy z wektorem $\bar{d}$ wypełnionym wartościami interpolowanej funkcji w zadanych węzłach. Na wyjściu chcemy dostać wektor ilorazów różnicowych postaci $f[x_0, ..., x_i]$ będących współczynnikami wielomianu we wzorze Newtona. Zauważmy, że element na pierwszym miejscu w $\bar{d}$, czyli d_0, jest już odpowiedniej postaci. Reszta elementów jest za to postaci $f[x_i]$, możemy zatem wyznaczyć z ich pomocą wszystkie ilorazy zależne od dwóch węzłów. Na przykład

$$d_1' = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{d_1-d_0}{x_1-x_0}$$

Zauważmy również, że po wyznaczeniu $f[xn-1, xn]$ nie użyjemy już do niczego ilorazu $f[xn]$, możemy zatem nadpisać go tą nową wartością, tymczasem na przykład $f[x1]$ potrzebny będzie jeszcze do wyznaczenia $f[x1, x2]$. Będziemy zatem szli od końca, nadpisując d_i po obliczeniu jego nowej wartości. Po jednej takiej rundzie uzyskamy wszystkie ilorazy oparte na dwóch węzłach. Wówczas $d1 = f[x0, x1]$ przyjmie już swoją ostateczną postać. Wykonujemy kolejną rundę, ponownie od końca, tym razem zatrzymując się na wyliczeniu d_3. Po n takich rundach nasz wektor wynikowy przyjmie już ostateczną postać.

2 Zadanie II

2.1 Opis problemu

Następnym zadaniem było napisanie funkcji obliczającej wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $Nn(x)$ w punkcie $x = t$ za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera, w czasie $O(n)$, tzn. zaimplementować algorytm z zadania 8 na liście nr. 4 (ćwiczenia)

2.2 Rozwiązanie

Łatwo zauważyć, że standardowa metoda liczenia "według wzoru" Newtona pozwala nam na dokonanie liczenia z kwadratową złożonością. Okazuje się jednak, że możemy rozłożyć nasz wielomian w sposób, który umożliwi złożoność liniową. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]q_i(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x-x_0)...(x-x_i) = \\ &= f[x] + (x-x_0)(f[x_0, x_1] + \sum_{i=2}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x-x_1)...(x-x_i)) = \ldots \\ &= f[x_0] + (x-x_0)(f[x_0, x_1] + (x-x_1)(\ldots(f[x_0, \ldots, x_{n-1}] + (x-x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n])\ldots)) \end{aligned}$$

Będziemy zatem obliczać wartość naszego wielomianu "od środka", zaczynając od najbardziej zagnieżdżonych elementów. Taka metodologia to zasadniczo schemat Hornera w bazie $q_i(x) : 0 \leqslant i \leqslant n$ zamiast tradycyjnej $1, x, ..., x_n$. Formalizując, mamy :

$$\begin{gathered} w_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n] \\ w_k(x) = f[x_0, \ldots, x_k] + (x-x_k)w_{k+1} \text{ dla } k < n \\ p(x) = w_0(x) \end{gathered}$$

Nietrudno dostrzec, że taki sposób pozwala nam na wyznaczenie poszukiwanej wartości z użyciem jednej pętli, a zatem w czasie liniowym.

3 Zadanie III

3.1 Opis Problemu

Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona $c0 = f[x0], c1 = f[x0, x1], c2 = f[x0, x1, x2], \ldots, cn = f[x0, ..., xn]$ oraz węzły $x0, x2, ..., xn$ trzeba napisać funkcję obliczającą, w czasie $O(n^2)$, współczynniki jego postaci naturalnej $a0, ..., an$ tzn. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ (implementacja algorytmu z zadania 9 lista nr 4– ćwiczenia).

3.2 Rozwizanie

Postacią naturalną wielomianu nazywamy jego przedstawienie w bazie $1, x, x_2, x_3, \ldots$, to znaczy

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Celem oszczędności znaków, przyjmiemy z powrotem oznaczenie $ci = f[x_0, ..., x_i]$. Pierwszym spostrzeżeniem potrzebnym nam do rozwiązania problemu jest fakt, że a_n - współczynnik przy x^n – jest równy c_n. Spróbujemy teraz przeżyć kilka pierwszych iteracji algorytmu Hornera z poprzedniej sekcji, skupiając się na współczynnikach przy konkretnych potęgach. Mamy

$$w_{n-1} = c_{n-1} + (x - x_{n-1})w_n$$

skąd otrzymujemy pierwsze składowe współczynnika przy x^{n-1} : $c_{n-1}i - x_{n-1}c_n$. Pójdźmy krok dalej:

$$w_{n-2} = c_{n-2} + (x - x_{n-2})w_{n-1}$$

Tutaj sytuacja trochę się zmienia, bo w_{n-1}, w odróżnieniu od w_n, jest wielomianem stopnia większego niż 0. Przyjrzyjmy się dokładniej drugiemu składnikowi tej sumy, rozbijając go na dwie części:

$$x \cdot w_{n-1} = \underbrace{x^2 c_n}_{a_n} + \underbrace{x(c_{n-1} - x_{n-1}c_n)}_{\text{"stare" } a_{n-1}}$$
$$-x_{n-2} \cdot w_{n-1} = \underbrace{-x_{n-2}c_n \cdot x}_{\text{"nowe" do } a_{n-1}} - \underbrace{x_{n-2}(c_{n-1} - x_{n-1}c_n)}$$

dostajemy $w_{n-2} = c_{n-2} - x_{n-2}(c_{n-1} - x_{n-1}c_n) + x(c_{n-1} - (xn - 1 + xn - 2)c_n) + x^2 c_n$. Kolejna iteracja to mnóstwo znaków, ale pozwoli nam upewnić się w dotychczasowych intuicjach.

$$x \cdot w_{n-2} = \underbrace{x^3 c_n}_{a_n} + \underbrace{x^2(c_{n-1} - (x_{n-1} + x_{n-2})c_n)}_{\text{"nowsze stare" } a_{n-1}} + \underbrace{x(c_{n-2} - x_{n-2}(c_{n-1} - x_{n-1}c_n))}_{\text{"stare" } a_{n-2}}$$
$$-x_{n-3} \cdot w_{n-2} =$$
$$\underbrace{-x_{n-3}c_n x^2}_{a_n} + \underbrace{-x_{n-3}(c_{n-1} - (x_{n-1} + x_{n-2})c_n)x}_{\text{"nowsze stare" } a_{n-1}} + \underbrace{-x_{n-3}(c_{n-2} - x_{n-2}(c_{n-1} - x_{n-1}c_n))}_{\text{"stare" } a_{n-2}}$$

Okazuje się zatem, że w każdej iteracji (cofając się jak w algorytmie Hornera, poza pierwszą) wyznaczamy bazową wartość przy obecnej potędze (dla x_i będzie to $c_i x_i a_{i+1}$), a następnie musimy jeszcze zaktualizować współczynniki przy wyższych potęgach o "nowo odkryty" składnik. Z powyższych rozważań można zauważyć, że do każdego a_j , że $i < j < n$ dodajemy w i-tej iteracji składnik postaci $x_{ni}a_{j+1}$, gdzie a_{j+1} odpowiada obecnemu stanowi naszej wiedzy (widać to w przykładach – "nowe" części dla a_{n1} i a_{n2}). Zaprojektujemy zatem algorytm oparty o dokładnie taką technikę. Jego złożoność jest kwadratowa, ponieważ dla każdego kroku "odwinięcia" (kroku algorytmu Hornera) musimy zaktualizować wszystkie współczynniki dla wyższych potęg.

4 Zadanie IV

4.1 Opis zadania

Napisać funkcję, która zinterpoluje zadaną funkcję f(x) w przedziale [a,b] za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję.

4.2 Rozwiązanie

Celem zadania jest połączenie zaimplementowanych metod w jedną – umożliwiającą graficzne porównanie otrzymanego wielomianu z interpolowaną funkcją. W tym celu na wskazanym przez użytkownika przedziale

$$[a, b]$$

wydzielamy $n + 1$ równoodległych węzłów i obliczamy dla nich wartości funkcji. Następnie wyznaczamy ilorazy różnicowe, dzięki którym możemy już ustalać wartość wielomianu w punkcie. Dyskretyzujemy przedział w taki sposób, żeby móc ujrzeć wartości wielomianu także poza węzłami (najlepiej $N \cdot (n + 1)$ punktów na przedziale $[a, b]$, gdzie $N > 1$ całkowite, wtedy wśród nich znajdą się nasze węzły). Dla każdego z punktów obliczamy wartość funkcji i wielomianu, a następnie uzyskane wyniki umieszczamy na wykresie.

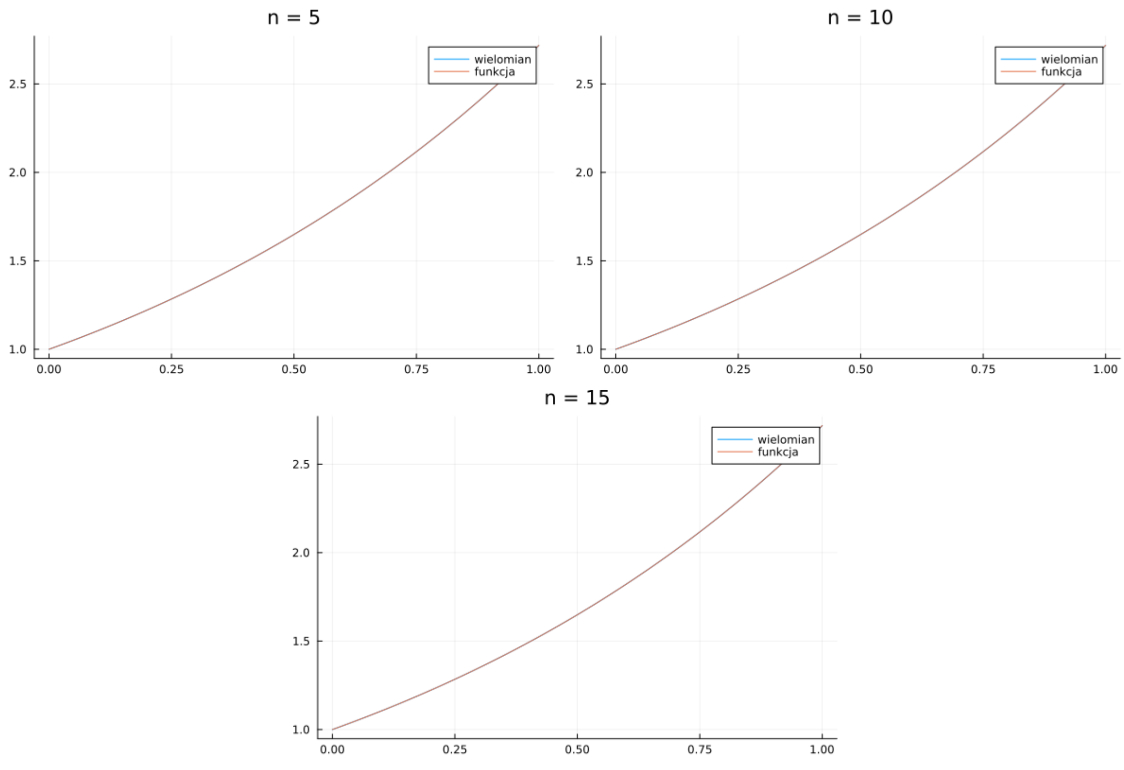
5 Zadanie V

5.1 Opis problemu

Celem zadania było użycie narzędzia skonstruowanego w poprzednim zadaniu na funkcjach
•$f(x) = e^x$ na przedziale $[0, 1]$
•$f(x) = x^2 \cdot sinx$ na przedziale $[-1, 1]$
dla stopni wielomianu n = 5, 10, 15.

5.2 Rozwiązanie

Możemy zaobserwować, że obie testowane funkcje dają się bardzo dokładnie interpolować, to znaczy dla obu wartości wielomianów interpolacyjnych dowolnego ze sprawdzanych stopni niemal pokrywają się z wartościami funkcji na całym zadanym przedziale.

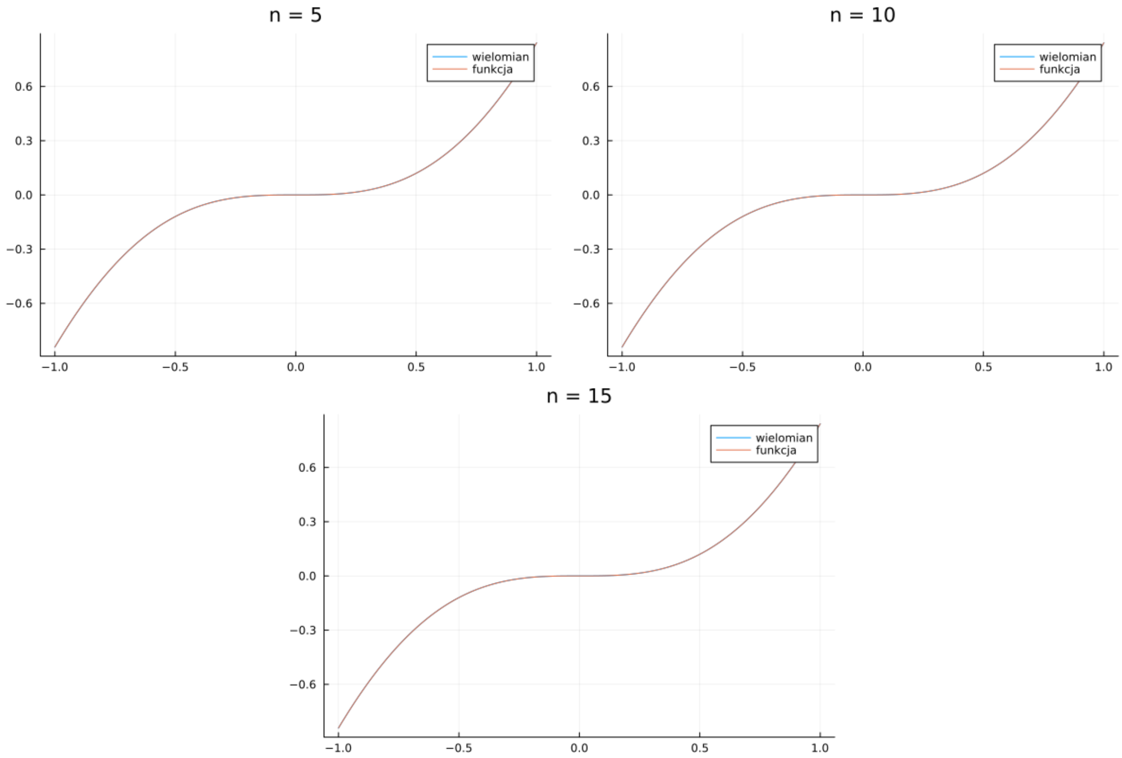


Rysunek 1: $f(x) = e^x$ w przedziale $[0, 1]$, z wielomianami o stopniach 5,10,15

6 Zadanie VI

6.1 Opis Problemu

Tym razem za cel mieliśmy zbadanie funkcji
•$f(x) = |x|$ na przedziale $[-1, 1]$



Rysunek 2: $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ w przedziale $[0, 1]$, z wielomianami o stopniach 5,10,15

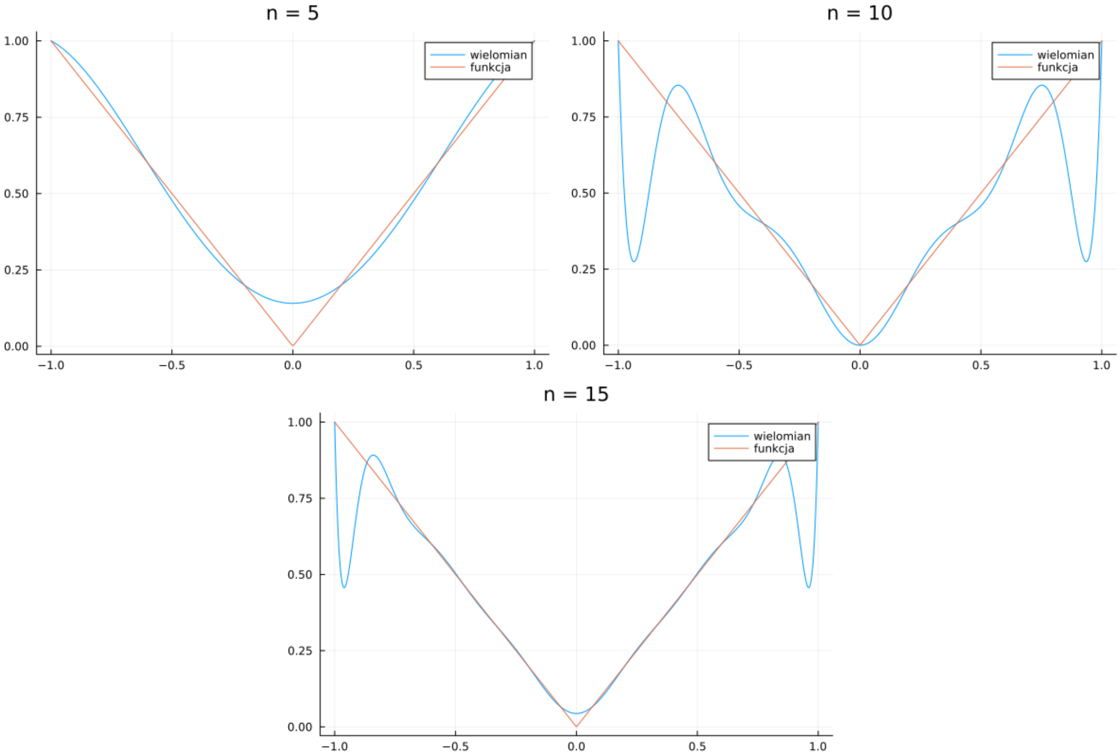
•$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$
dla stopni wielomianu n = 5, 10, 15.

6.2 Rozwiązanie

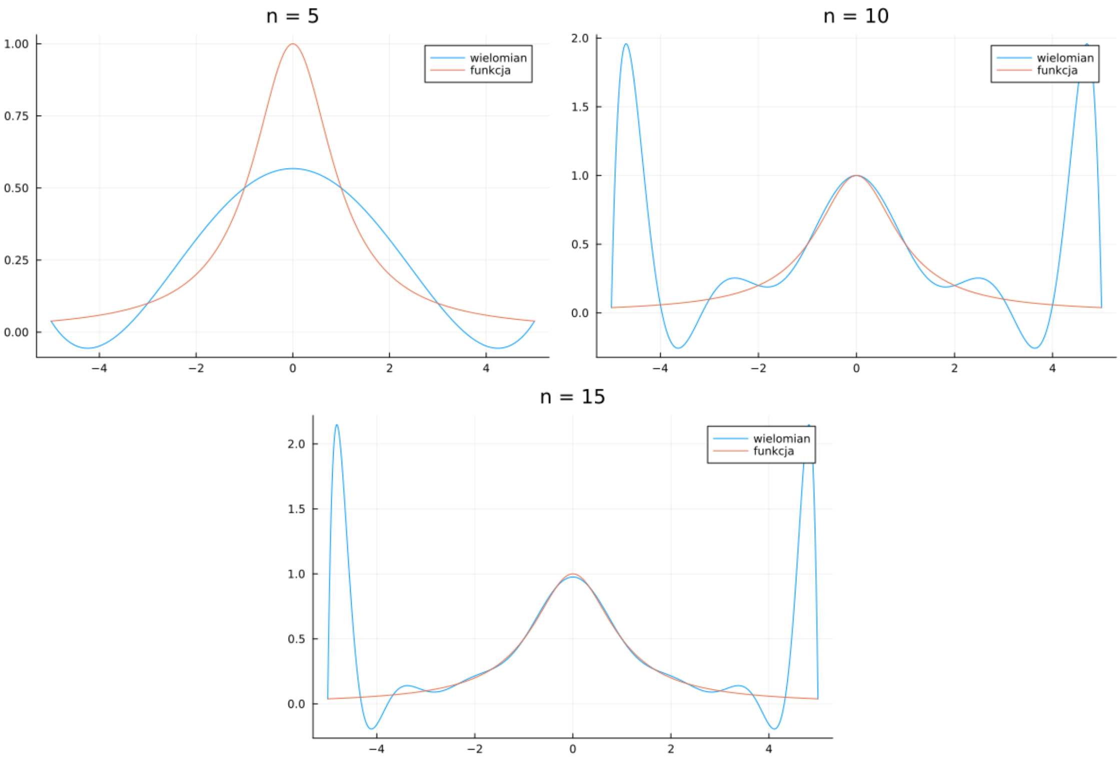
W przeciwieństwie do poprzedniego zadania, tym razem funkcje nie interpolują się za dobrze. Co więcej, wzrost stopnia wielomianu nie niesie za sobą poprawy dokładności. W przypadku funkcji $|x|$ problemem jest jej nieróżniczkowalność. Intuicyjnie można powiedzieć, że wielomiany są raczej okrągłe, dlatego wierzchołek wykresu stanowi dla nich trudność. Dla funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ obserwujemy zjawisko Rungego, które polega na zwiększaniu się rozbieżności na końcach przedziału wraz ze zwiększaniem stopnia wielomianu interpolacyjnego. Pojawia się ono, gdy węzły interpolacji są równoodległe, co ma miejsce w przypadku naszej implementacji. Rozwiązaniem tego problemu mógłby być na przykład dobór punktów w taki sposób, żeby na przy krańcach przedziału występowało ich większe zagęszczenie.

7 Wnioski

Interpolacja wielomianowa jest dosyć dobrą metodą przybliżania funkcji, gdy znamy jej wartości tylko w niektórych punktach, ale trzeba pamiętać o jej ograniczeniach. Świetnie radzi sobie z gładkimi, zaokrąglonymi funkcjami jak te z zadania 5. Taka intuicja może być jednak zgubna – druga funkcja z zadania 6 również może wydawać się bardzo porządna, a jednak natrafiliśmy na trudności. Należy mieć na uwadze, że bezmyślne zwiększanie stopnia wielomianu może przynieść więcej szkody niż pożytku. W niektórych przypadkach bardziej pomocne może okazać się z kolei przemyślane rozstawienie węzłów interpolacji. Narysowanie wykresu może dać nam pewną intuicję w kwestii tego rozstawu.



Rysunek 3: $f(x) = |x|$ w przedziale $[-1, 1]$, z wielomianami o stopniach 5,10,15



Rysunek 4: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w przedziale $[-5, 5]$, z wielomianami o stopniach 5,10,15