tableTabelaTabele

Obliczenia Naukowe

Lista 3

Yuliia Melnyk
246202

27 listopada 2022

1 Zadanie I

1.1 Opis Problemu

W zadaniu 1 należało napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2 Rozwiązanie

Została zaimplementowana funkcja z podanymi w zadaniu zmiennymi. Działanie metody bisekcji przedstawia *zad1.jl*

Dane:

`f`	–	funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function),
`a, b`	–	końce przedziału początkowego,
`delta, epsilon`	–	dokładności obliczeń,

Wyniki:

`(r,v,it,err)`	–	czwórka, gdzie
`r`	–	przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
`v`	–	wartość $f(r)$,
`it`	–	liczba wykonanych iteracji,
`err`	–	sygnalizacja błędu
		0 - brak błędu
		1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b]

1.3 Opis Algorytmu

Ważnym założeniem, pozwalającym stosować metodę bisekcji do znalezienia rozwiązania równania nieliniowego, jest fakt, że zadana funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz $f(a)f(b) < 0$ (funkcja $f(x)$ zmienia na tym przedziale znak). Na początku działania algorytmu sprawdzane jest, czy funkcja zmienia znak na zadanym przedziale. Jeżeli nie, to algorytm kończy działanie z kodem błędu `1`. W przeciwnym wypadku rozpoczyna się wykonywanie pętli *while*, gdzie warunkiem końca jest osiągnięcie przedziału mniejszego od *epsilon* (o szerokości mniejszej od *epsilon*). W każdym przebiegu pętli jest wyznaczany środek bieżącego przedziału oraz liczona wartość funkcji $f(x)$ dla wyznaczonego środka. W tym miejscu należy zwrócić uwagę na sposób wyznaczania środka przedziału. W celu uniknięcia błędów, które mogłyby powstać przy wyliczaniu przedziału za pomocą wzoru $mid \leftarrow \frac{1}{2} \cdot (b - a)$, najpierw jest wyliczana wartość mid, a następnie ta wartość jest dodawana do lewego końca bieżącego przedziału. W przypadku, jeżeli osiągnięto zadaną precyzję dla szerokości przedziału lub dla wartości funkcji (wartość $f(x)$ jest wystarczająco bliska 0) to wtedy zwracamy rezultat obliczeń. Jeżeli algorytm nie kończy jeszcze działania to sprawdzamy, na którym z dwóch podprzedziałów funkcja $f(x)$ zmienia znak i ten podprzedział przyjmujemy jako nowy przedział, w którym będziemy szukać przybliżenia miejsca zerowego.

2 Zadanie II

2.1 Opis Problemu

W zadaniu 2 należało napisać funkcje rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona (metodą stycznych).

2.2 Rozwiązanie Problemu

Została zaimplementowana funkcja z podanymi w zadaniu zmiennymi. Działanie metody Newtona przedstawia *zad2.jl*

Dane:

`f, pf`	–	funkcja $f(x)$ oraz $f'(x)$ zadane jako anonimowe funkcje (ang. anonymous function),
`x0`	–	przybliżenie początkowe,
`delta, epsilon`	–	dokładności obliczeń,
`maxit`	–	maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Wyniki:

`(r,v,it,err)`	–	czwórka, gdzie
`r`	–	przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
`v`	–	wartość $f(r)$,
`it`	–	liczba wykonanych iteracji,
`err`	–	sygnalizacja błędu
		0 - metoda zbieżna
		1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w `maxit` iteracji
		2 - pochodna bliska zeru

2.3 Opis Algorytmu

Metoda Newtona, znana również pod nazwą metody stycznych (ta nazwa została użyta przy implementacji), wykorzystuje do obliczenia miejsca zerowego funkcji $f(x)$ tak zwaną metodę linearyzacji czyli zastąpienie funkcji f funkcją liniową. Jest nią suma dwóch początkowych składników we wzorze Taylora dla funkcji $f(x)$. Jeżeli

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \tfrac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + ...$$

to w wyniku zastosowania metody linearyzacji otrzymujemy funkcję liniową l:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Jest to dobre przybliżenie funkcji $f(x)$ w pobliżu argumentu c. Do obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka r zadanej funkcji $f(x)$ wykorzystywany jest następujący wzór:

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

gdzie $n \leq 0$. Algorytm rozpoczyna swoje działanie od sprawdzenia czy pochodna funkcji $f(x)$ nie jest bliska 0 (czyli, na potrzeby tej metody numerycznej, mniejsza od wartości *epsilon*). Jeżeli jest, to algorytm kończy działanie z kodem błędu 2. W przeciwnym przypadku algorytm próbuje w zadanej liczbie iteracji *maxit* wyznaczyć miejsce zerowe zadanej funkcji $f(x)$. Stosowany jest tutaj wzór wynikający z samej definicji. Wyliczana jest wartość x_{n+1} oraz wartość $f(x)$ dla tego argumentu. Następnie, jeżeli otrzymane przybliżenie miejsca zerowego jest już wystarczająco dokładne, to algorytm kończy działanie zwracając otrzymane wyniki. W przeciwnym wypadku algorytm wykonuje kolejną iterację. Jeżeli nie osiągnięto wymaganej dokładności w zadanej liczbie iteracji *maxit*, to algorytm kończy działanie z kodem błędu 1.

3 Zadanie III

3.1 Opis Problemu

W zadaniu 2 należało napisać funkcje rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

3.2 Rozwiązanie Problemu

Została zaimplementowana funkcja z podanymi w zadaniu zmiennymi. Działanie metody siecznych przedstawia *zad3.jl*

3.2.1 Opis Algorytmu

Metoda siecznych, podobnie jak metoda Newtona, jest również metodą iteracyjną. Jednak, w odróżnieniu od odpisanej w poprzednim punkcie metody stycznych, nie wymaga on obliczania wartości pochodnej podczas każdej z iteracji wykonywanych przez algorytm. Dokonano tutaj zastąpienia pochodnej funkcji $f(x)$ ilorazem różnicowym mającym następującą postać:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_n)-f(x_n-1)}{x_n-x_{n-1}}$$

Stąd, metoda siecznych, jest opisana przez następujący wzór:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_n-1)}$$

gdzie $n \geq 1$. Ze względu, że iloraz różnicowy jest wyrażony przez x_n oraz x_{n-1}, jako argument algorytm otrzymuje na wejściu dwa punkty początkowe: $x0$ i $x1$. W przypadku tej metody styczna, wykorzystywana w metodzie Newtona, zostaje zastąpiona sieczną wykresu funkcji $f(x)$. Algorytm rozpoczyna działanie od wyliczenia wartości funkcji $f(x)$ dla zadanych $x0$ i $x1$. Następnie algorytm przechodzi do próby znalezienia przybliżenia pierwiastka $f(x)$ w zadanej liczbie iteracji *maxit.* Na początku każdego przebiegu pętli sprawdzany jest warunek, czy $|fx0|> |fx1|$. Jeżeli nierówność zachodzi, to następuje zamiana wartości zmiennych. Ma to na celu zapewnienie, że moduły funkcji $f(x)$ w kolejnych punktach x_n nie rosną. W następnej kolejności liczony jest iloraz różnicowy oraz wartość dla kolejnego x_{n+1}. Jeżeli przybliżenie pierwiastka jest dokładne (odległość punktów przecięcia siecznej z wykresem funkcji jest mniejsza od *delta*) lub wartość funkcji dla bieżącego argumentu jest bliska 0 (mniejsza od *epsilon*) to algorytm zwraca wynik. Jeżeli nie - kontynuuje swoje działania. Jeśli nie otrzymano przybliżenia pierwiastka funckji $f(x)$ w zadanej liczbie iteracji *maxit*, to algorytm kończy działanie z kodem błędu 1.

`Dodatkowo wszystkie powyższe zadania zostały dodane do modułu. Został utworzony plik testowy. Przykładowe obliczenia w` *Tabeli 3*

4 Zadnie IV

4.1 Opis Problemu

Zadanie 4 polegało na wyznaczeniu pierwiastka równania $sinx - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ wykorzystując zaimplementowane wcześniej metody bisekcji, siecznych i stycznych.

$f(x) = 2x^2 - 4$ w przedziale $[1, 3]$				
Metoda	Miejsce zerowe (x_0)	Wartość funkcji ($f(x_0)$)	Liczba iteracji	Błąd
Bisekcji	2.0	0.0	1	0
Newtona	2.0000000929222947	3.716891878724482e-7	4	0
Siecznych	2.000000195092221	7.803689223706556e-7	5	0
$f(x) = x^3$ w przedziale $[1, 3]$				
Metoda	Miejsce zerowe (x_0)	Wartość funkcji ($f(x_0)$)	Liczba iteracji	Błąd
Bisekcji	0.0	0.0	0	1
Newtona	0.011561019943888409	1.5452133483989817e-6	11	0
Siecznych	0.016910208379717486	4.835561130555694e-6	15	0

Tabela 3: Przykładowe miejsca zerowe funkcji obliczone za pomocą danych metod.

4.2 Rozwiązanie Problemu

Dla następujących danych początkowych zostały uruchomione zaimplementowane wcześniej algorytmy:

1. bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$

2. Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5, \delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$

3. siecznych z przybliżeniami początkowymi $x0 = 1, x1 = 2, \delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Ponadto, dla metod siecznych i stycznych została ustalona maksymalna liczba iteracji równa 50.

4.3 Wyniki

W wyniku działania programów otrzymano następujące wyniki dla poszczególnych implementacji metod obliczenia miejsc zerowych funkcji (x_0 to obliczone przybliżenie miejsca zerowego funkcji $f(x)$:

Metoda	x_0	$f(x_0)$	Iteracje	Kod błędu
Bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Obliczenia zostały wykonane przy użyciu arytmetyki Float64

.

4.4 Obserwacje

Najwięcej iteracji do znalezienia przybliżenia pierwiastka funkcji $f(x)$ potrzebowała metoda bisekcji (16 iteracji), a najmniej pozostałe dwie metody (4 iteracje). Metoda bisekcji zwróciła wartości najbliższe zadanej dokładności, a pozostałe dwie metody wyliczyły pierwiastki najbliższe pierwiastkowi rzeczywistemu.

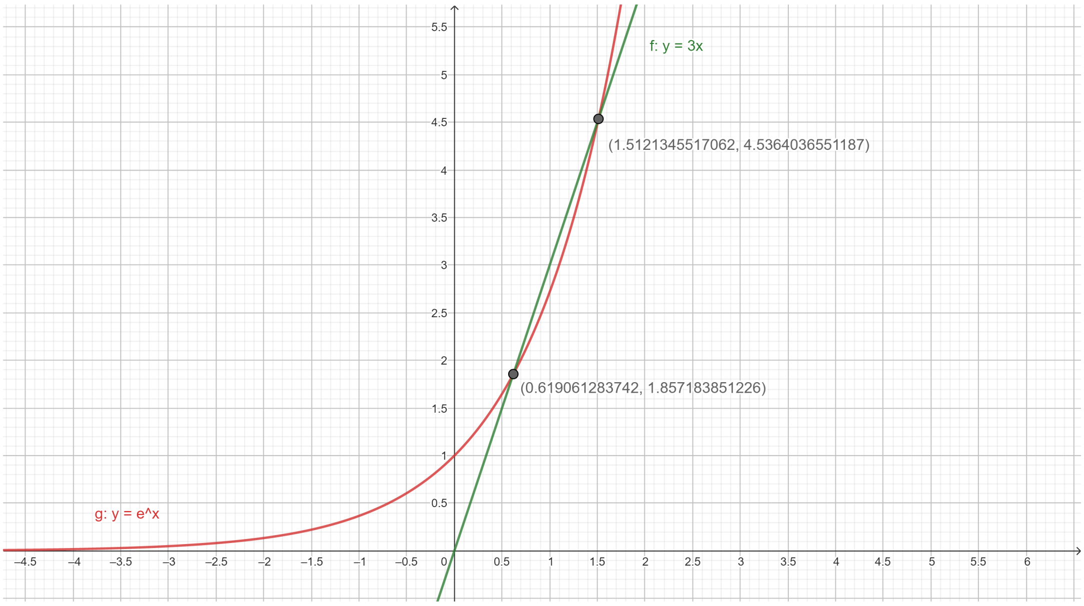
4.5 Wnioski

Uzyskane wyniki potwierdzają zbieżność każdej z metod determinowaną przez *współczynnik zbieżności* α. Dla metody bisekcji otrzymano zbieżność kwadratową ($\alpha = 1$), dla metody Newtona zbieżność liniową ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) i dla metody siecznych zbieżność nadliniową ($\alpha = 2$). Metoda bisekcji, mimo że zbiega najwolniej spośród wszystkich trzech metod, to jest to metoda najstabilniejsza, gdyż uzyskaliśmy w jej przypadku wyniki najbardziej zbliżone do zadanej na wejściu dokładności. Metody Newtona oraz siecznych są najszybciej zbieżne.

5 Zadanie V

5.1 Opis Problemu

Używając zaimplementowanej w zadaniu 1. metody bisekcji należało znaleźć wartości zmiennej x, dla których wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$ przecinają się. Zadana dokładność: $\delta = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-4}$. Wykres wykonano za pomocą *Geogebra*



Wykres przecięć funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$

5.2 Rozwiązanie Problemu

Na podstawie przedstawionego poniżej wykresu stwierdzamy, iż takich wartości zmiennej x należy szukać na przedziale $[0, 2]$. Problem znalezienia żądanych wartości zmiennej x sprowadzono do znalezienia miejsc zerowych funkcji $y = 3x - e^x$, które są jednocześnie miejscami przecięcia się wspomnianych funkcji. W celu znalezienia każdego z dwóch punktów przecięcia rozpatrzymy osobno dwa podprzedziały: $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$ (wywołanie metody bisekcji dla przedziału $[0, 2]$ będzie skutkować zakończeniem wykonywania algorytmu z kodem błędu 1 (funkcja nie zmienia znaku na zadanym przedziale). Do obliczenia wartości zmiennej x wykorzystano zaimplementowaną metodę bisekcji w zadaniu 1. Obliczenia wykonano w arytmetyce `Float64`.

5.3 Wyniki

W wyniku działania programu dla powyższych danych uzyskano następujące wyniki:

Przedział	x	Iteracje
$[0, 1]$	0.619140625	9
$[0, 2]$	1.5120849609375	13

5.4 Obserwacje

Wyniku działania programu otrzymano pierwiastki funkcji $y = 3x - e^x$, które są zgodne z punktami przecięcia widocznymi na wykresie.

5.5 Wnioski

Na podstawie analizy otrzymanych wyników i wykresu funkcji dochodzimy do wniosku, że otrzymano poprawne wyniki. Dla poprawnego wybrania podprzedziałów, na których wywołano metodę bisekcji dla zadanej funkcji, była konieczna analiza wykresu obu funkcji, o których mowa w poleceniu zadania.

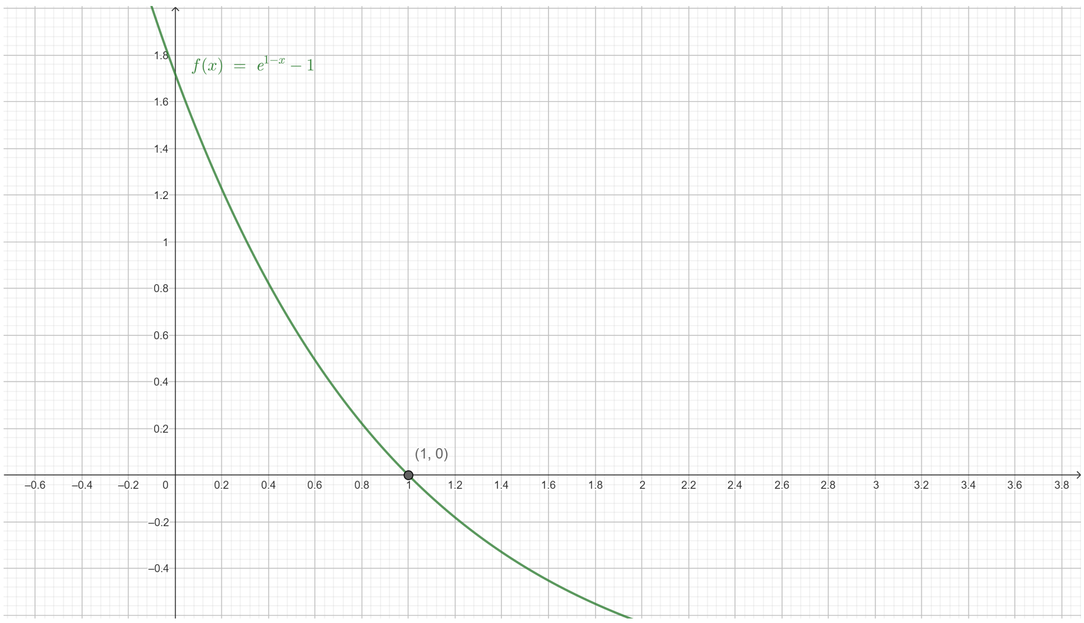
6 Zadanie VI

6.1 Opis Problemu

W zadaniu 6 należało znaleźć miejsca zerowe funkcji $f1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f2(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych.

6.2 Rozwiązanie Problemu

Poniżej znajdują się wykresy funkcji $f1$ oraz $f2$. Wykresy wykonano za pomocą pakietu *Geogebra*. Na podstawie analizy przebiegu funkcji $f1$ i $f2$ przedstawionej na wykresie zostały wykonane eksperymenty dla różnych danych testowych.



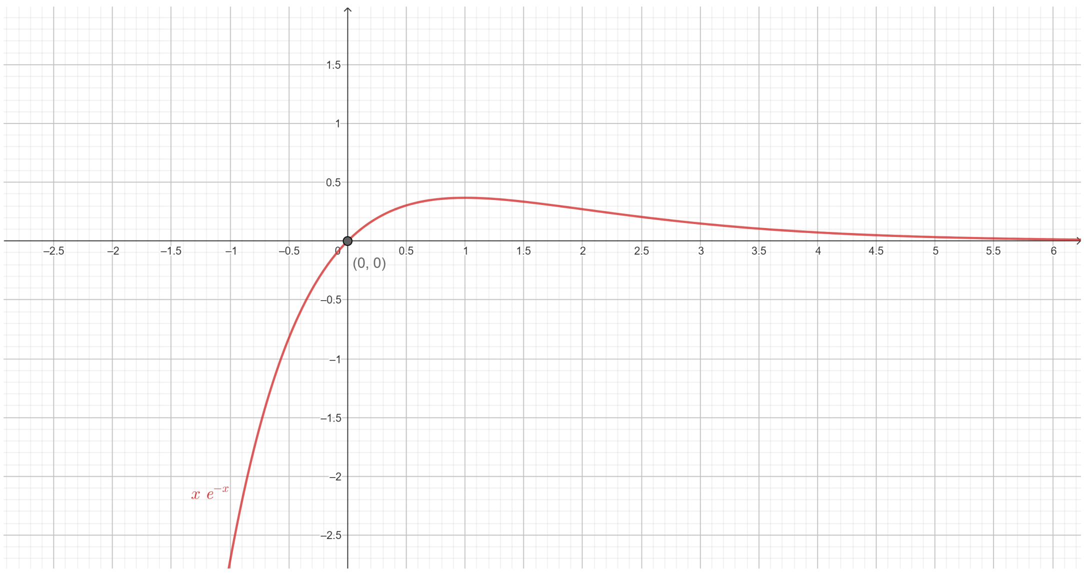
Wykres funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$

6.3 Wyniki

Wyniki otrzymane dla każdej metody dla funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$ i $f(x) = xe^{-x}$ są przedstawione na tabelkach poniżej

6.4 Obserwacje

Zauważamy, że metoda bisekcji, niezależnie od poprawnie wybranego przedziału (czyli takiego, na którym funkcja zmienia znak), zawsze znajduje miejsce zerowe z określoną dokładnością. Wybranie



Wykres funkcji $f(x) = xe^{-x}$

Metoda Bisekcji dla $f(x) = e^{1-x} - 1$			
Przedział	r	$f(r))$	Iteracje
$[0.0, 2.0]$	1.0	0.0	1
$[-2.0, 2.0]$	1.0	0.0	2
$[0.1, 2.0]$	0.9999992370605468	7.62939744269886e-7	17
$[0.1, 1.2]$	0.9999938964843748	6.10353425178e-6	14
$[-0.2, 1.8]$	0.9999969482421875	3.051762469175045e-6	17
$[-5.0, 500.0]$	0.9999921917915344	7.80823894963589e-6	24

Metoda Newtona dla $f(x) = e^{1-x} - 1$				
x_0	r	$f(r))$	Iteracje	Kod Błędu
-1	0.9999922654776594	7.73455225200336e-6	5	0
0.0	0.9999984358892101	1.564112013019425e-6	4	0
1.1	0.99999999991094	8.90598705893808e-11	3	0
2.0	0.9999999810061002	1.899390000836831e-8	5	0
6.0	0.9999999573590406	4.26409603182520e-8	147	0
8.0	NaN	NaN	1000	1
15.0	15.0	-0.9999991684712809	0	2

Metoda Siecznych dla $f(x) = e^{1-x} - 1$					
x_0	x_1	r	$f(r))$	Iteracje	Kod Błędu
-2	2.0	1.0000000080618678	-8.06186783997020e-9	8	0
-0.3	1.8	1.0000003464708873	-3.464708272504779e-7	6	0
0.1	1.3	0.9999999935820667	6.4179332959213e-9	5	0

przedziału, dla którego miejsce zerowe leży w jego środku, powoduje, że metoda znajduje je niemal natychmiastowo (w 1-2 iteracjach), a znalezione rozwiązanie jest dokładne. Można zauważyć, że dla pierwszej funkcji zawsze otrzymano dobre przybliżenie (zmieniała się jedynie liczba iteracji), natomiast dla drugiej metoda ta, dla niektórych przedziałów, dawała kompletnie niepoprawną wartość już po jednej iteracji i kończyła działanie. W przypadku metody Newtona zawuważalny jest

Metoda Bisekcji dla $f(x) = xe^{-x}$			
Przedział	r	$f(r))$	Iteracje
$[-0.5, 0.5]$	0.0	0.0	1
$[-0.7, 0.4]$	4.5776367188509e-6	4.577615764140961e-6	16
$[-10.0, 100.0]$	45.0	1.288133361247227e18	1

Metoda Newtona dla $f(x) = xe^{-x}$				
x_0	r	$f(r))$	Iteracje	Kod Błędu
-1	-3.064249341646176e-7	3.064250280608723e-7	5	0
-0.4	-1.844031330942592e-8	-1.84403136494710e-8	4	0
0.0	0.0	0.0	1	0
1.0	1.0	0.36787944117144233	0	2
6.0	14.97432014974184	4.69983382720811e-6	8	0
8.0	14.636807965014	6.43815521984328e-6	6	0
15.0	15.0	4.58853480752738e-6	0	2

Metoda Siecznych dla $f(x) = xe^{-x}$					
x_0	x_1	r	$f(r))$	Iteracje	Kod Błędu
-2	2.0	14.294924723787231	8.8506454983386e-6	15	0
-0.3	1.8	14.661140570698615	6.29383436678240e-6	14	0
0.1	1.3	2.482998842799128e-7	2.4829982262708e-7	5	0
-2.0	6.0	14.812321857602736	5.46655212223931e-6	12	0
-10.0	10.0	9.999999958776927	0.0004539993144685704	1	0
10.0	100.0	100.0	3.720075976020836e-42	1	0

znaczny wzrost szybkości wyznaczania przybliżenia pierwiastka r dla danej funkcji w porównaniu z metodą bisekcji. Dla pierwszej funkcji przekazanie algorytmowi wartości początkowej $x_0 \epsilon (1, \infty]$ powoduje drastyczny wzrost liczby potrzebnych iteracji do wyznaczenia przybliżenia miejsca zerowego. W przypadku drugiej funkcji przekazanie do algorytmu $x_0 = 1$ powoduje natychmiastowe zakończenie działa programu, gdyż $f_2'(x_0)$ jest bliska wartości 0. Wzrost wartości x_0 powoduje zmniejszanie się dokładności wyznaczonego przybliżenia. Dla wartości przybliżeń zbyt odległych od faktycznego pierwiastka, metoda stycznych nie jest w stanie osiągnąć poprawnego przybliżenia. W przypadku metody siecznych wybranie początkowych wartości x_0, x_1 zbyt odległych od faktycznej wartości pierwiastka funkcji powoduje, że metoda nie jest w stanie osiągnąć przybliżenia o wymaganej dokładności i zwraca wartość bardzo odległą od rzeczywistej (analogicznie jak w przypadku metody stycznych). Im bardziej ścisły przedział wokół rzeczywistego miejsca zerowego, tym mniej potrzeba iteracji do obliczenia przybliżenia z zadaną dokładnością.

6.5 Wnioski

Na podstawie analizy otrzymanych wyników można stwierdzić, że metoda bisekcji jest zbieżna globalnie i jej zbieżność nie zależy od wybranego przedziału. Fakt, iż metoda Newtona jest szybsza od metody bisekcji wynika wynika z jej lepszej zbieżności - metoda bisekcji ma zbieżność kwadratową, a stycznych - liniową (zostało do bardziej szczegółowo opisane w zadaniu 4.). Podobnie, jak metoda Newtona, metoda siecznych jest o wiele szybsza od metody bisekcji, ponieważ posiada ona złożoność nadliniową.