# Obliczenia Naukowe

Lista 2

Yuliia Melnyk

246202

13 listopada 2022

## 1 Zadanie I

### 1.1 Opis problemu

Ponowne obliczenie iloczynu skalarnego z zadania 5 z listy 1 dla typów `Float32` i `Float64` po wprowadzeniu niewielkich zmian danych w wektorze $x$, tj. obcięciu ostatniej cyfry znaczącej współrzędnych $x_4$ i $x_5$ (9 dla $x_4$, 7 dla $x_5$). W tym celu wykorzystano te same cztery algorytmy co w zadaniu z listy 1. Poniżej przedstawiono zmienione dane wejściowe:

$$\tilde{x} = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]$$
$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

### 1.2 Rozwiązanie

Iloczyn skalarny dla typów `Float32` i `Float64` obliczono za pomocą czterech algorytmów z programu z listy 1:

(a) *w przód*,

(b) *w tył*,

(c) *od największego do najmniejszego*,

(d) *od najmniejszego do największego*.

### 1.3 Wyniki

Zestawienie wyników iloczynów skalarnych $x \cdot y$ (zadanie 5 z listy 1) oraz $\tilde{x} \cdot y$ przedstawia Tabela 1.

| | `Float32` | | `Float64` | |
|---|---|---|---|---|
| Algorytm | $x \cdot y$ | $\tilde{x} \cdot y$ | $x \cdot y$ | $\tilde{x} \cdot y$ |
| (a) | -0.3472038161853561 | -0.3472038161889941 | 1.0251881368296672e-10 | -0.004296342739891585 |
| (b) | -0.3472038162872195 | -1.5643308870494366e-10 | -0.004296342998713953 | |
| (c) | -0.5 | -0.5 | 0.0 | -0.004296342842280865 |
| (d) | -0.5 | -0.5 | 0.0 | -0.004296342842280865 |

**Tabela 1:** Iloczyny skalarne $x \cdot y$ oraz $\tilde{x} \cdot y$ obliczone w arytmetykach `Float32` i `Float64` przy użyciu danych algorytmów.

### 1.4 Wnioski

Przeprowadzając analizę danych z tabeli można łatwo zauważyć, że w arytmetyce `Float32` zmiany dokonane w wektorze $x$ nie miały wpływu na wyniki. Jest to spowodowane stosunkowo niewielką precyzją tej arytmetyki, a co za tym idzie pewną niedokładnością w przechowywaniu poszczególnych składowych wektora. Ta niedokładność okazała się tutaj na tyle duża, że usunięcie 9 z $x_4$ nie zmieniło w żaden sposób zapisu wartości w arytmetyce `Float32`, a zmiana w $x_5$ zaważyła jedynie na najmniej znaczącym bicie zapisu liczby. Całkowicie odmienna sytuacja miała miejsce w arytmetyce `Float64`. Tutaj wprowadzenie niewielkich zmian rzutowało bardzo mocno na wyniki obliczeń iloczynu skalarnego. Mogłoby się wydawać że dokonanie modyfikacji rzędu $10^{-9}$ nie wpłynie znacząco na otrzymane wyniki, te jednak bardzo się zmieniły. Usunięcie ostatnich cyfr po przecinku z $x_4$ i $x_5$ sprawiło że wektory zostały dokładniej zapisane i arytmetyka okazała się wystarczająca do obliczenia iloczynu skalarnego. Widać zatem wyraźnie, że precyzja arytmetyki odgrywa kluczową rolę wtedy, kiedy mamy do czynienia ze źle uwarunkowanym zadaniem, tj. wtedy kiedy niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne odkształcenia wyników. Zatem do rozwiązywania takich zadań należy używać maksymalnej precyzji.

## 2 Zadanie II

### 2.1 Opis problemu

Porównanie wykresów funkcji

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) \tag{1}$$

(narysowanych w co najmniej dwóch programach do wizualizacji) z jej granicą $\lim_{x\to\infty}$, a następnie wyjaśnienie zaistniałego zjawiska.

### 2.2 Rozwiązanie

Wykresy funkcji (1) wykonano za pomocą biblioteki *Plotly* (używając różnych typów zmiennopozycyjnych) w języku *Julia*, a także za pomocą pakietu matematycznego *Wolfram Alpha*. Granicę $\lim_{x\to\infty}$ funkcji (1) wyliczono za pomocą biblioteki *SymPy* w języku *Julia* oraz w sposób analityczny.

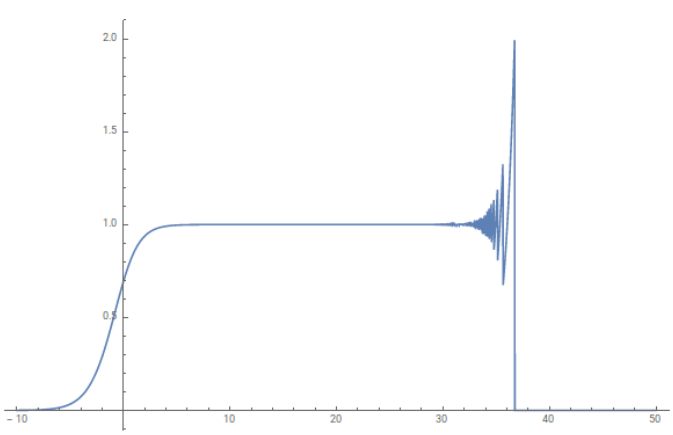
### 2.3 Wyniki

Poniżej przedstawiono (Rysunek 1, **??**) otrzymane wykresy funkcji (1).
Obliczona przez program granica $\lim_{x\to\infty}$ funkcji (1) wynosi 1. Taki sam wynik został uzyskany przez rozwiązanie analityczne:

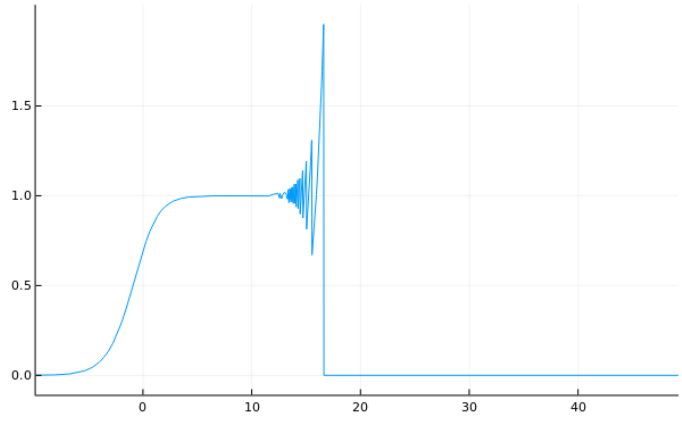
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1 + e^{-x}))'}{(e^{-x})'} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot -e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1.$$

### 2.4 Wnioski

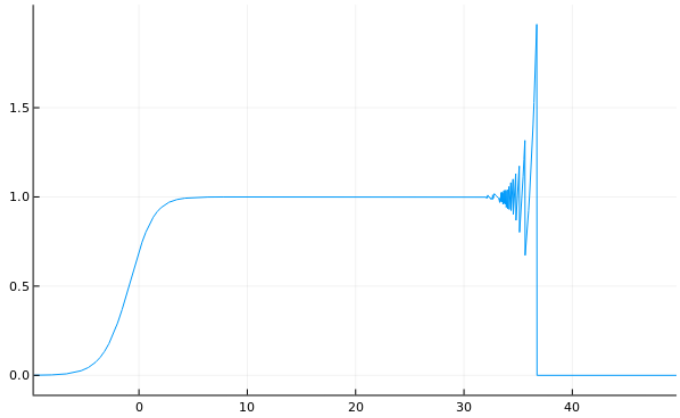
Z analitycznego punktu widzenia oczywistym jest, że wynik będzie równy jeden. Dużo trudniej podobnego wyniku dopatrzyć się na wykresach. Na każdym z nich pojawia się bowiem nietypowe zaburzenie po którym wartości funkcji są równe zero. Na wykresach które przedstawia Rysunek 1, można zaobserwować, że moment pojawienia się zaburzenia zależny jest od precyzji arytmetyki. Obserwowane zaburzenia wywołane są poprzez dodanie bardzo małej wartości $e^{-x}$ do, w stosunku do niej dużej, jedynki przez co następuje utrata cyfr znaczących. Kluczowe jest jednak pomnożenie logarytmu tak przybliżonej wartości przez bardzo duże $e^x$, co potęguje względnie niewielki początkowy błąd i przez co można zaobserwować niepokojące zmiany na




**(a)** `Wolph.Alpha`




**(b)** `Julia:Float32`




**(c)** `Julia:Float64`

**Rysunek 1:** Wykresy wykonane za pomocą biblioteki *Plotly* i Wolphram Alpha

wykresie. Łatwo można wnioskować dalej że w momencie kiedy $1 + e^{-x} = 1$, wtedy $\ln(1 + e^{-x}) = 0$, co tłumaczy pojawienie się wartości 0 na wykresie. W wielu programach wykres funkcji w pewnym momencie się kończy. Wynika to z przepełnienia (*overflow*) dla $e^x$, wtedy pojawia się mnożenie $\infty \cdot 0$ co przyjmuje wartość **NaN**. W tym zadaniu przedstawiona jest sytuacja gdzie małe zmiany danych spowodowały duże odchylenia co pozwala stwierdzić że jest ono źle uwarunkowane.

# 3 Zadanie III

## 3.1 Opis problemu

Rozwiązanie układu równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dla danej macierzy współczynników $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ i wektora prawych stron $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
Macierz $\mathbf{A}$ zadana była w następujący sposób:

(a) *macierz Hilberta* $\mathbf{H}_n$ stopnia $n$,

(b) *macierz losowa* $\mathbf{R}_n^c$ stopnia $n$ o danym wskaźniku uwarunkowania $c$.

Wektor $\mathbf{b}$ jako $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest wygenerowaną macierzą, a $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)^T$, tak aby było znane dokładne rozwiązanie dla $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b}$.
Układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ należało rozwiązać za pomocą dwóch algorytmów:

(i) *metodą eliminacji Gaussa*: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$,

(ii) *metodą macierzy odwrotnej*: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Obliczone rozwiązania $\tilde{\mathbf{x}}$ dla różnych macierzy wejściowych należało porównać z rozwiązaniem dokładnym $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)^T$ oraz obliczyć błędy względne.

## 3.2 Rozwiązanie

Macierz Hilberta $\mathbf{H}_n$ z rosnącym stopniem $n > 1$ wygenerowano za pomocą funkcji $hilb(n)$, natomiast losową macierz $\mathbf{R}_n^c$, $n = 5, 10, 20$, z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania $c = 1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}$ stworzono przy użyciu funkcji $matcond(n, c)$. Dla każdej wygenerowanej macierzy rozwiązano układ równań metodą eliminacji Gaussa i macierzy odwrotnej, a także policzono błędy względne $\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||}$ obu tych metod, wskaźniki uwarunkowania i rzędy macierzy.

## 3.3 Wyniki

Otrzymane wyniki dla macierzy Hilberta $\mathbf{H}_n$ prezentuje Tabela 2, natomiast dla macierzy losowej $\mathbf{R}_n^c$ Tabela 3, metoda eliminacji Gaussa jest oznaczona przez `GE`, a metoda macierzy odwrotnej przez `INV`. Patrząc na wyniki latwo można zauważyć że największy wpływ na wyniki ma wskaźnik uwarunkowania macierzy. Im większy wskaźnik weźmiemy tym większy błąd dostaniemy w wyniku. Szczególnie dobrze to widać w przypadku macierzy Hilberta, ponieważ ta macież jest bardzo źle uwarunkowana.

| Macierz Hilberta $\mathbf{H}_n$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rozmiar | Rząd | `COND` | Błędy względne | |
| | | | `GE` | `INV` |
| 1x1 | 1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2x2 | 2 | 1.928147006790397e+01 | 5.661048867003676e-16 | 1.124015143811696e-15 |
| 3x3 | 3 | 5.240567775860644e+02 | 8.022593772267726e-15 | 9.825526038180824e-15 |
| 4x4 | 4 | 1.551373873892924e+04 | 4.451545960181209e-13 | 2.950477637286781e-13 |
| 5x5 | 5 | 4.766072502425943e+05 | 1.682842629922719e-12 | 8.500055777753297e-12 |
| 6x6 | 6 | 1.495105864225467e+07 | 2.618913302311624e-10 | 3.347413507036174e-10 |
| 7x7 | 7 | 4.753673565831290e+08 | 1.260686722417155e-08 | 5.163959183577243e-09 |
| 8x8 | 8 | 1.525757553806004e+10 | 1.026543065687064e-07 | 2.698715074276819e-07 |
| 9x9 | 9 | 4.931537564468762e+11 | 4.832357120502150e-06 | 9.175846868614517e-06 |
| 10x10 | 10 | 1.602441699254171e+13 | 6.329153722983848e-04 | 4.552142251740885e-04 |
| 11x11 | 11 | 5.222677939280335e+14 | 1.154395859612211e-02 | 8.044466773431160e-03 |
| 12x12 | 11 | 1.751473190709146e+16 | 2.975640310734787e-01 | 3.439293709120522e-01 |
| 13x13 | 11 | 3.344143497338461e+18 | 2.375017867706776e+00 | 5.585796893150773e+00 |
| 14x14 | 12 | 6.200786263161444e+17 | 5.281004646755168e+00 | 4.800641929017436e+00 |
| 15x15 | 12 | 3.674392953467974e+17 | 1.177294734836712e+00 | 4.827357721257648e+00 |
| 16x16 | 12 | 7.865467778431645e+17 | 2.056465582380410e+01 | 3.173646749626613e+01 |
| 17x17 | 12 | 1.263684342666052e+18 | 1.774221463517907e+01 | 1.591033596260414e+01 |
| 18x18 | 12 | 2.244630992918913e+18 | 4.276456441115942e+00 | 6.281223433472033e+00 |
| 19x19 | 13 | 6.471953976541591e+18 | 2.211993729264891e+01 | 2.292561401563632e+01 |
| 20x20 | 13 | 1.355365790868823e+18 | 1.493006966929400e+01 | 2.153949860251383e+01 |

**Tabela 2:** Wyniki obliczeń dla macierzy Hilberta $\mathbf{H}_n$

| Macierz losowa $\mathbf{R}_n^c$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rozmiar | Rząd | COND | Błędy względne | |
| | | | GE | INV |
| 5x5 | 5 | 1 | 1.404333387430680e-16 | 1.790180836524724e-16 |
| 5x5 | 5 | 10 | 0.0 | 9.930136612989092e-17 |
| 5x5 | 5 | 1000 | 6.467561325518618e-15 | 6.138840652485208e-15 |
| 5x5 | 5 | $10^7$ | 2.932858554206356e-10 | 2.541421917682778e-10 |
| 5x5 | 5 | $10^{12}$ | 2.431174605159248e-05 | 2.445937707560239e-05 |
| 5x5 | 4 | $10^{16}$ | 9.228482506511224e-02 | 1.358024596793109e-01 |
| 10x10 | 10 | 1 | 2.328823463338184e-16 | 2.302207463925367e-16 |
| 10x10 | 10 | 10 | 5.324442579404919e-16 | 5.916561726981507e-16 |
| 10x10 | 10 | 1000 | 7.659734318226236e-16 | 1.167815308046354e-14 |
| 10x10 | 10 | $10^7$ | 2.568414379855613e-10 | 2.258463845088549e-10 |
| 10x10 | 10 | $10^{12}$ | 1.951994704671510e-05 | 2.174813032517800e-05 |
| 10x10 | 9 | $10^{16}$ | 3.178399241163815e-01 | 3.516778693816187e-01 |
| 20x20 | 20 | 1 | 5.495323605393213e-16 | 4.557326905135503e-16 |
| 20x20 | 20 | 10 | 5.087681048627601e-16 | 4.071658748137585e-16 |
| 20x20 | 20 | 1000 | 5.808917732317164e-15 | 3.747228857827342e-15 |
| 20x20 | 20 | $10^7$ | 1.511216720479130e-10 | 1.241078754561024e-10 |
| 20x20 | 20 | $10^{12}$ | 4.740084259557948e-05 | 4.819264617327459e-05 |
| 20x20 | 19 | $10^{16}$ | 8.613420159130484e-01 | 8.466277602660599e-01 |

**Tabela 3:** Wyniki obliczeń dla macierzy losowej $\mathbf{R}_n^c$

### 3.4 Wnioski

Obserwując wielkości błędów dla macierzy losowej $\mathbf{R}_n^c$ (Tabela 3) można zauważyć że wielkości błędów zależą głównie od wskaźnika (**cond**). Problemy, w których pojawiają się macierze o dużym wskaźniku uwarunkowania, są źle uwarunkowane. Wyjątkowo kłopotliwe są zadania które sprowadzają się do obliczeń z macierzą Hilberta. Wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy rośnie wskaźnik uwarunkowania więc można sobie wyobrazić, że zadanie w którym pojawia się taka macierz o dużym rozmiarze może być bardzo ciężko poprawnie rozwiązać. Z danych w tabeli można również wnioskować, że lepszym algorytmem w przypadku macierzy Hilberta jest eliminacja Gaussa (metoda macierzy odwrotnej nie jest zalecana z numerycznego punktu widzenia).

## 4 „Złośliwy wielomian" Wilkinsona

### 4.1 Opis problemu

Obliczenie dwudziestu zer wielomianu Wilkinsona $p$, tj. $p(x) = (x-20)(x-19)\dots(x-2)(x-1)$ w postaci naturalnej $P$ i sprawdzenie otrzymanych pierwiastków $z_k$ poprzez obliczenie $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$ dla $1 \leq x \leq 20$. Powtórzenie eksperymentu Wilkinsona, tj. zmiana współczynnika $-210$ przy $x^{19}$ na $-210-2^{-23}$ i wyjaśnienie zaistniałego zjawiska.

### 4.2 Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania użyto pakietu `Polynomials`. Miejsca zerowe wielomianu $P$ utworzonego z danych współczynników za pomocą funkcji `Poly` obliczono przy użyciu funkcji `roots`. Za pomocą funkcji `poly` stworzono natomiast wielomian $p$. Funkcja `polyval` posłużyła do obliczenia wartości wielomianów $P$ i $p$ w zadanych punktach. Obliczony został również błąd bezwzględny obliczonych pierwiastków wielomianu $P$. Podobne operacje zostały wykonane dla wielomianu $P$ z zaburzonym współczynnikiem przy $x^{19}$.

### 4.3 Wyniki

Tabela 4 przedstawia obliczone pierwiastki wielomianu $P$ oraz $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$, natomiast Tabela 5 prezentuje te wartości dla wielomianu $P$ z zaburzonym współczynnikiem.

| $k$ | $\|P(z_k)\|$ | $\|p(z_k)\|$ | $\|z_k - k\|$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3.635200000000e+04 | 3.840000000000e+04 | 3.010924842783e-13 |
| 2 | 1.817600000000e+05 | 1.981440000000e+05 | 2.831823664451e-11 |
| 3 | 2.094080000000e+05 | 3.015680000000e+05 | 4.079034887638e-10 |
| 4 | 3.106816000000e+06 | 2.844672000000e+06 | 1.626246826092e-08 |
| 5 | 2.411468800000e+07 | 2.334668800000e+07 | 6.657697912971e-07 |
| 6 | 1.201520640000e+08 | 1.188249600000e+08 | 1.075417522678e-05 |
| 7 | 4.803983360000e+08 | 4.782909440000e+08 | 1.020027930076e-04 |
| 8 | 1.682691072000e+09 | 1.678497280000e+09 | 6.441703922384e-04 |
| 9 | 4.465326592000e+09 | 4.457859584000e+09 | 2.915294362053e-03 |
| 10 | 1.270712678400e+10 | 1.269690726400e+10 | 9.586957518275e-03 |
| 11 | 3.575989555200e+10 | 3.574346905600e+10 | 2.502293290932e-02 |
| 12 | 7.216771584000e+10 | 7.214665062400e+10 | 4.671674615314e-02 |
| 13 | 2.157236290560e+11 | 2.156963307520e+11 | 7.431403244734e-02 |
| 14 | 3.653832509440e+11 | 3.653447936000e+11 | 8.524440819787e-02 |
| 15 | 6.139877534720e+11 | 6.139384156160e+11 | 7.549379969948e-02 |
| 16 | 1.555027751936e+12 | 1.554961097216e+12 | 5.371328339203e-02 |
| 17 | 3.777623778304e+12 | 3.777532946944e+12 | 2.542714623741e-02 |
| 18 | 7.199554861056e+12 | 7.199447475200e+12 | 9.078647283520e-03 |
| 19 | 1.027837616282e+13 | 1.027823565670e+13 | 1.909818299438e-03 |
| 20 | 2.746295274547e+13 | 2.746278890701e+13 | 1.907087633626e-04 |

**Tabela 4:** Obliczone wartości dla wielomianu $P$

| $k$ | $z_k$ | $\|P(z_k)\|$ | $\|p(z_k)\|$ | $\|z_k - k\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.999999999999836 | 2.099200000000e+4 | 2.201600000000e+4 | 1.643130076445e-13 |
| 2 | 2.000000000055037 | 3.491840000000e+5 | 3.655680000000e+5 | 5.503730804435e-11 |
| 3 | 2.999999996603420 | 2.221568000000e+6 | 2.295296000000e+6 | 3.396579906223e-09 |
| 4 | 4.000000089724362 | 1.046784000000e+7 | 1.072998400000e+7 | 8.972436216226e-08 |
| 5 | 4.999998573887910 | 3.946393600000e+7 | 4.330393600000e+7 | 1.426112089753e-06 |
| 6 | 6.000020476673031 | 1.291484160000e+8 | 2.061204480000e+8 | 2.047667303096e-05 |
| 7 | 6.999602070422420 | 3.881231360000e+8 | 1.757670912000e+9 | 3.979295775798e-04 |
| 8 | 8.007772029099446 | 1.072547328000e+9 | 1.852548659200e+10 | 7.772029099446e-03 |
| 9 | 8.915816367932559 | 3.065575424000e+9 | 1.371743170560e+11 | 8.418363206744e-02 |
| 10 | 10.095455630535774 - 0.644932823624069i | 7.143113638036e+09 | 1.491263381675e+12 | 6.519586830380e-01 |
| 11 | 10.095455630535774 + 0.644932823624069i | 7.143113638036e+09 | 1.491263381675e+12 | 1.110918027272e+00 |
| 12 | 11.793890586174369 - 1.652477136407579i | 3.357756113172e+10 | 3.296021414130e+13 | 1.665281290598e+00 |
| 13 | 11.793890586174369 + 1.652477136407579i | 3.357756113172e+10 | 3.296021414130e+13 | 2.045820276678e+00 |
| 14 | 13.992406684487216 - 2.518824425710844i | 1.061206453308e+11 | 9.545941595184e+14 | 2.518835871191e+00 |
| 15 | 13.992406684487216 + 2.518824425710844i | 1.061206453308e+11 | 9.545941595184e+14 | 2.712880531285e+00 |
| 16 | 16.730744879792670 - 2.812624896721978i | 3.315103475982e+11 | 2.742089401676e+16 | 2.906001873538e+00 |
| 17 | 16.730744879792670 + 2.812624896721978i | 3.315103475982e+11 | 2.742089401676e+16 | 2.825483521350e+00 |
| 18 | 19.502442368818102 - 1.940331978642903i | 9.539424609818e+12 | 4.252502487993e+17 | 2.454021446313e+00 |
| 19 | 19.502442368818102 + 1.940331978642903i | 9.539424609818e+12 | 4.252502487993e+17 | 2.004329444310e+00 |
| 20 | 20.846910215194789 | 1.114453504512e+13 | 1.374373319725e+18 | 8.469102151948e-01 |

**Tabela 5:** Obliczone wartości dla wielomianu $P$ z zaburzonym współczynnikiem przy $x^{19}$

### 4.4 Wnioski

W uproszczeniu można powiedzieć że zadanie polegało na policzeniu dwudziestu pierwiastków a następnie wykonaniu klasycznego „sprawdzenia" obliczając wartości funkcji w otrzymanych zerach. Tabela 4 pokazuje jednak że ta kontrola wyników się nie powiodła. Można by powiedzieć że pierwiastki wcale nie są źle obliczone, z otrzymanych danych wynika że odchylenia były niewielkie. Można by powiedzieć że odchylenie rzędu $10^{-13}$ jest bardzo niewielkie i zignorować taki błąd. Jednak przy zagadnieniu wielomianu Wilkinsona takie drobne odchylenie pierwiastka powoduje że zamiast oczekiwanego zera pojawia się około 20000, dla nieco większych odchyleń błędy rosną i sięgają naprawdę dużych liczb. Dzieje się tak ponieważ w tym konkretnym wielomianie drobny błąd w wartości pierwiastka mnożony jest przez czynnik rzędu 19!. Wpływ na błędy przy obliczeniach miejsc zerowych mają współczynniki wielomianu $P$, które nie są dokładnie reprezentowane w arytmetyce `Float64`. Widać to wyraźniej w próbie powtórzenia eksperymentu Wilkinsona, gdzie celowo został zaburzony jeden ze współczynników. Tabela 5 Można zauważyć, że w wielomianie, który ma miejsca zerowe rzeczywiste pojawiają się pierwiastki zespolone. Ze względu na tak duże odkształcenia wyników wynikłe z zaburzenia współczynników przy niewielkich zmianach danych można mówić o tym, że zadanie to jest źle uwarunkowane.

## 5 Model wzrostu populacji

### 5.1 Opis problemu

Zbadanie modelu wzrostu populacji (model logistyczny)

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

gdzie $r$ jest pewną daną stałą, $r(1 - p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a $p_0$ jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

W tym celu należało przeprowadzić następujące eksperymenty.

(i) Wykonanie 40 iteracji wyrażenia (2) w arytmetyce `Float32` dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$. Ponowne wykonanie 40 iteracji wyrażenia (2) z niewielką modyfikacją tj. wykonanie 10 iteracji, zatrzymanie, zastosowanie obcięcia wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku (daje to liczbę 0.722) i kontynuowanie dalej obliczenia (do 40-stej iteracji) tak, jak gdyby był to ostatni wynik na wyjściu. Porównanie wyników obu iteracji.

(ii) Wykonanie 40 iteracji wyrażenia (2) dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ w arytmetyce `Float32` i `Float64`. Porównanie wyników iteracji dla obu arytmetyk.

### 5.2 Rozwiązanie

Zaimplementowano podany model wzrostu populacji (2) i za pomocą stworzonej funkcji obliczono wyniki dla odpowiedniej liczby iteracji.

### 5.3 Wyniki

Zestawienie wyników dla obu eksperymentów prezentują odpowiednio Tabela 6 oraz Tabela 7.

### 5.4 Wnioski

Przeprowadzone w zadaniu eksperymenty są przykładami procesu, w którym dane wyjściowe jednego problemu są wejściem kolejnych obliczeń. Można zatem podejrzewać, że jeżeli w pierwszym eksperymencie wynik w dziesiątej iteracji jest zgodny tylko do trzeciego miejsca po przecinku, to w dalszych iteracjach też będzie istniała różnica między wynikami. Dziwić może jednak, że wyniki wyższych iteracji wydają się zupełnie nieskorelowane. Wskazuje to na istnienie pewnego chaosu w systemie, czy też, mówiąc inaczej niemożności

| Iteracja | Bez modyfikacji | Z modyfikacją |
|---|---|---|
| 1 | 0.0397 | 0.0397 |
| 2 | 0.154 071 73 | 0.154 071 73 |
| 3 | 0.545 072 6 | 0.545 072 6 |
| 4 | 1.288 978 1 | 1.288 978 1 |
| 5 | 0.171 518 8 | 0.171 518 8 |
| 10 | 0.722 930 6 | 0.722 |
| 11 | 1.323 836 4 | 1.324 147 9 |
| 12 | 0.037 716 985 | 0.036 488 414 |
| ... | ... | ... |
| 15 | 1.270 483 7 | 1.257 216 9 |
| 17 | 0.786 042 8 | 0.901 085 5 |
| ... | ... | ... |
| 19 | 0.165 524 72 | 0.577 893 |
| 20 | 0.579 903 6 | 1.309 691 1 |
| ... | ... | ... |
| 25 | 1.007 080 6 | 1.092 910 8 |
| ... | ... | ... |
| 30 | 0.752 920 9 | 1.319 182 2 |
| ... | ... | ... |
| 35 | 1.021 099 | 0.034 241 438 |
| ... | ... | ... |
| 40 | 0.258 605 48 | 1.093 568 |

**Tabela 6:** Wybrane wyniki kolejnych iteracji modelu logistycznego w arytmetyce `Float32` bez modyfikacji i z obcięciem wyniku 10 iteracji od 3 miejsca po przecinku

| Iteracja | Float32 | Float64 |
|---|---|---|
| 1 | 0.0397 | 0.0397 |
| 2 | 0.154 071 73 | 0.154 071 730 000 000 02 |
| 3 | 0.545 072 6 | 0.545 072 626 044 421 3 |
| 4 | 1.288 978 1 | 1.288 978 001 188 800 6 |
| 5 | 0.171 518 8 | 0.171 519 142 109 175 52 |
| 10 | 0.722 930 6 | 0.722 914 301 179 573 |
| 15 | 1.270 483 7 | 1.270 261 773 935 076 8 |
| 20 | 0.579 903 6 | 0.596 529 312 494 690 7 |
| 25 | 1.007 080 6 | 1.315 588 346 001 072 |
| 26 | 0.985 688 5 | 0.070 035 295 602 778 99 |
| 27 | 1.028 008 6 | 0.265 426 354 520 610 03 |
| 30 | 0.752 920 9 | 0.374 146 489 639 286 76 |
| 35 | 1.021 099 | 0.925 382 128 557 104 6 |
| 39 | 1.265 200 4 | 0.002 909 156 902 851 206 5 |
| 40 | 0.258 605 48 | 0.011 611 238 029 748 606 |

**Tabela 7:** Wybrane wyniki kolejnych iteracji modelu logistycznego w arytmetyce `Float32` i `Float64`

przewidywania (sformułowanie Lorenza). Można jednak powiedzieć, że w pierwszym eksperymencie wprowadzony błąd był zbyt duży i postawić tezę, że jeżeli błąd ten zostanie zmniejszony, to dziwne zachowanie iteracji zniknie. W tym celu przeprowadzono drugi eksperyment. Dane nie zostały w żaden sposób zaburzone, jednak do wykonywania obliczeń zostały zastosowane różne precyzje. Również tutaj widać jednak, że

małe odchylenie pojawiające się w pewnym momencie jest w dalszym etapie potęgowane i znów powoduje to nieskorelowanie wyników dla późniejszych iteracji. Mogłoby się wydawać że bardziej wiarygodne są obliczenia wykonane w arytmetyce `Float64`, jednak nie jest to do końca prawdziwy wniosek, gdyż jej precyzja też jest ograniczona. Można zauważyć, że w każdej kolejnej iteracji rośnie liczba cyfr znaczących pozwalających na dokładne zapisanie wyniku. W pewnym momencie zatem precyzja arytmetyki `Float64` staje się niewystarczająca. Widać zatem, że niezależnie od tego, jak małe odchylenie od wartości początkowych zostanie wybrane, na skutek przeniesienia błędu jako wejście do kolejnej iteracji, a potem następnej, itd., będzie on gwałtownie rósł, tak że po stosunkowo niewielu iteracjach przewidywanie za pomocą komputera stanie się bezwartościowe. Zaobserwowana tutaj numeryczna niestabilność jest ciężka do uniknięcia, ponieważ nie istnieje arytmetyka o nieskończonej precyzji, która byłaby w stanie wykonać wszystkie obliczenia poprawnie, można jedynie przez wybór odpowiednio dużej precyzji opóźnić zjawisko niemożności przewidywania.

# 6 Iterowanie funkcji kwadratowej

## 6.1 Opis problemu

Zbadanie zachowania równania rekurencyjnego

$$x_{n+1} := x_n^2 + c, \text{ dla } n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

gdzie $c$ jest pewną daną stałą, dla następujących danych:

(i) $c = -2$ i $x_0 = 1$

(ii) $c = -2$ i $x_0 = 2$

(iii) $c = -2$ i $x_0 = 1.99999999999999$

(iv) $c = -1$ i $x_0 = 1$

(v) $c = -1$ i $x_0 = -1$

(vi) $c = -1$ i $x_0 = 0.75$

(vii) $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

W tym celu należało wykonać 40 iteracji wyrażenia (3) i zaobserwować zachowanie generowanych ciągów, a także przeprowadzić iterację graficzną (3).

## 6.2 Rozwiązanie

Zaimplementowano wyrażenie (3) i za pomocą stworzonej w programie funkcji dla danych parametrów wejściowych $x_0$ i $c$ wykonano zadaną liczbę iteracji.

## 6.3 Wyniki

Wyniki kolejnych iteracji wyrażenia (3) dla różnych danych wejściowych przedstawia Tabela 8.
W celu lepszego przedstawienia wyników metodą iteracji graficznej zostały stworzone wykresy, które przedstawia Rysunek 2.

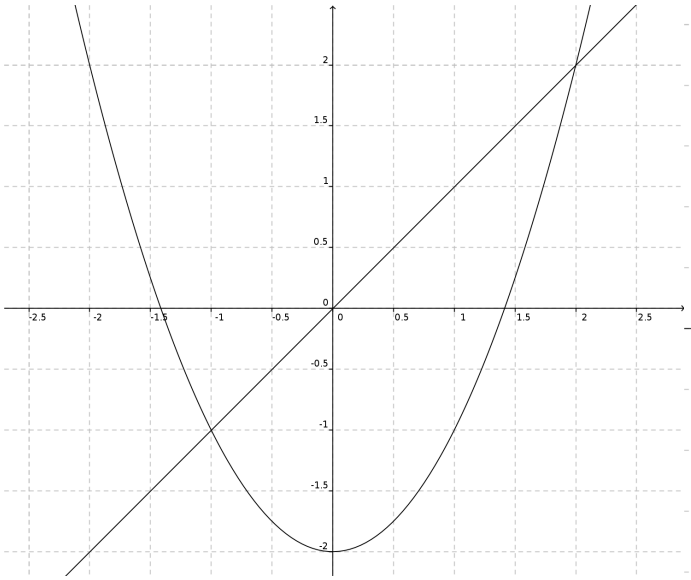
## 6.4 Wnioski

Analizując zadanie poprzednie (model wzrostu populacji) można wyciągnąć wnioski, że za niestabilność numeryczną odpowiedzialna jest operacja podnoszenia do kwadratu. Iteracje wykonane w tym zadaniu obalają jednak ten wniosek. W tabeli 8 widać, że dla $x_0 = 1$ lub $x_0 = 2$ przy $c = -2$ iteracja zachowuje się stabilnie. W przypadku, gdy $x_0 = 1.99999999999999$ (jest to niewielkie odchylenie od 2) widać natomiast odmienne zachowanie, w którym występuje niestabilność. Doskonale obrazuje to metoda iteracji graficznej pokazana na wykresach 2g, 2h, 2i. Można zatem wyciągnąć wnioski, że niektóre z danych początkowych prowadzą

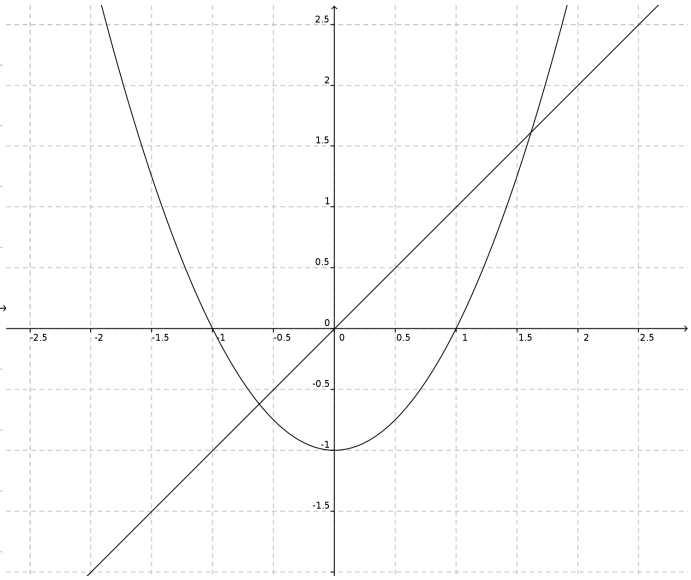
| It. | $c=-2$ | | | $c=-1$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_0$=1 | $x_0$=2 | $x_0$=1.99999999999999 | $x_0$=1 | $x_0$=-1 | $x_0$=0.75 | $x_0$=0.25 |
| 1 | -1.0 | 2.0 | 1.99999999999996 | 0.0 | 0.0 | -0.4375 | -0.9375 |
| 2 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999999998401 | -1.0 | -1.0 | -0.80859375 | -0.12109375 |
| 3 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999999993605 | 0.0 | 0.0 | -0.3461761474609375 | -0.9853363037109375 |
| 4 | -1.0 | 2.0 | 1.999999999997442 | -1.0 | -1.0 | -0.8801620749291033 | -0.029112368589267135 |
| 5 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999999897682 | 0.0 | 0.0 | -0.2253147218564956 | -0.9991524699951226 |
| 6 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999999590727 | -1.0 | -1.0 | -0.9492332761147301 | -0.0016943417026455965 |
| 7 | -1.0 | 2.0 | 1.999999999836291 | 0.0 | 0.0 | -0.0989561875164966 | -0.9999971292061947 |
| 8 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999993451638 | -1.0 | -1.0 | -0.9902076729521999 | -5.741579369278327e-6 |
| 9 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999973806553 | 0.0 | 0.0 | -0.01948876442658909 | -0.9999999999670343 |
| 10 | -1.0 | 2.0 | 1.999999989522621 | -1.0 | -1.0 | -0.999620188061125 | -6.593148249578462e-11 |
| 11 | -1.0 | 2.0 | 1.9999999580904841 | 0.0 | 0.0 | -0.0007594796206411569 | -1.0 |
| 12 | -1.0 | 2.0 | 1.9999998323619383 | -1.0 | -1.0 | -0.9999994231907058 | 0.0 |
| 13 | -1.0 | 2.0 | 1.9999993294477814 | 0.0 | 0.0 | -1.1536182557003727e-6 | -1.0 |
| 14 | -1.0 | 2.0 | 1.9999973177915749 | -1.0 | -1.0 | -0.9999999999986692 | 0.0 |
| 15 | -1.0 | 2.0 | 1.9999892711734937 | 0.0 | 0.0 | -2.6616486792363503e-12 | -1.0 |
| 16 | -1.0 | 2.0 | 1.9999570848090826 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| 17 | -1.0 | 2.0 | 1.999828341078044 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 |
| 18 | -1.0 | 2.0 | 1.9993133937789613 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| 19 | -1.0 | 2.0 | 1.9972540465439481 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 |
| 20 | -1.0 | 2.0 | 1.9890237264361752 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| 21 | -1.0 | 2.0 | 1.9562153843260486 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 |
| 22 | -1.0 | 2.0 | 1.82677862987391 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| 23 | -1.0 | 2.0 | 1.3371201625639997 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 |
| 24 | -1.0 | 2.0 | -0.21210967086482313 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 36 | -1.0 | 2.0 | -0.21657906398474625 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| 37 | -1.0 | 2.0 | -1.953093509043491 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 |
| 38 | -1.0 | 2.0 | 1.8145742550678174 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |
| 39 | -1.0 | 2.0 | 1.2926797271549244 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.0 |
| 40 | -1.0 | 2.0 | -0.3289791230026702 | -1.0 | -1.0 | -1.0 | 0.0 |

**Tabela 8:** Kolejne iteracje funkcji $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla danych $x_0$ i $c$

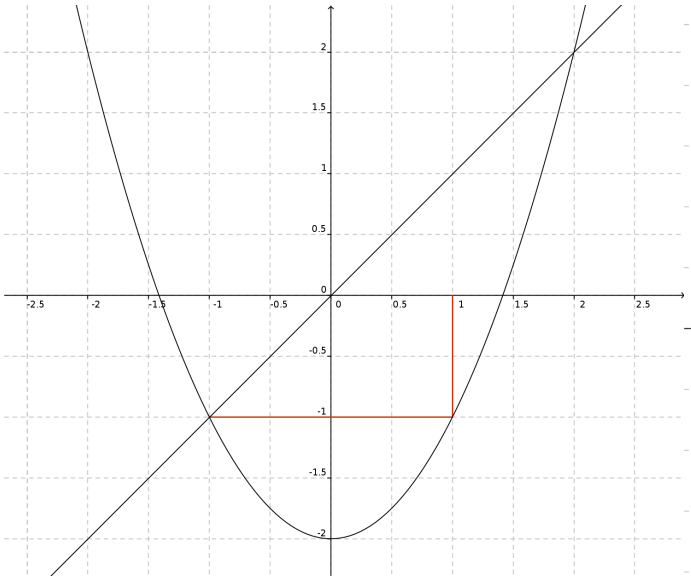
do stabilnego zachowania, inne generują niestabilność wyników. W rzeczywistości w przedziale $[-2, 2]$ nie znajduje się zbyt wiele wartości prowadzących do rozwiązań stabilnych. Funkcja $\phi(x) = x^2 - 2$ posiada dwa punkty stałe (tzn. takie $x$ dla których $\phi(x) = x$) – $-1$, 2, co pokazuje wykres 2a. Wartości początkowe dla których $\phi(x)$ jest zbieżna do tych punktów prowadzą do stabilnych rozwiązań. Eksperymentalne sprawdzenie za pomocą iteracji graficznej pokazało jednak że w dużej mierze $\phi(x)$ jest rozbieżna. Zbieżność została zaobserwowana dla pojedynczych wartości $x_0$ takich jak: $-2, -1, 0, 1, 2$. Obserwacje te pokazują, że analiza błędu nie jest łatwa do przeprowadzenia, co staje się jeszcze bardziej widoczne kiedy wartość $c = -2$ została zamieniona na $c = -1$. Dla tak zdefiniowanej funkcji $\phi(x)$ otrzymano punkty stałe $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zaobserwować można jednak inną ciekawą rzecz. Startując od $x_0$ równego $1, -1, 0.75$ czy $0.25$ po pewnej liczbie iteracji proces ustala się i powtarzają się tylko dwie wartości: 0 i $-1$. Do takiego efektu doprowadza również wybranie wielu innych wartości początkowych. Dla takich wartości $x_0$ układ sprzężenia zwrotnego jest w stanie idealnie stabilnym, co obrazują wykresy 2d, 2f i 2e. Dla tak przewidywalnych procesów niewielkie błędy podczas przebiegu zanikają lub ulegają redukcji, mogą więc zostać pominięte. Można posłużyć się zatem arytmetyką o skończonej precyzji, która staje się narzędziem jak najbardziej zdatnym do analizy i nie może zawieść.



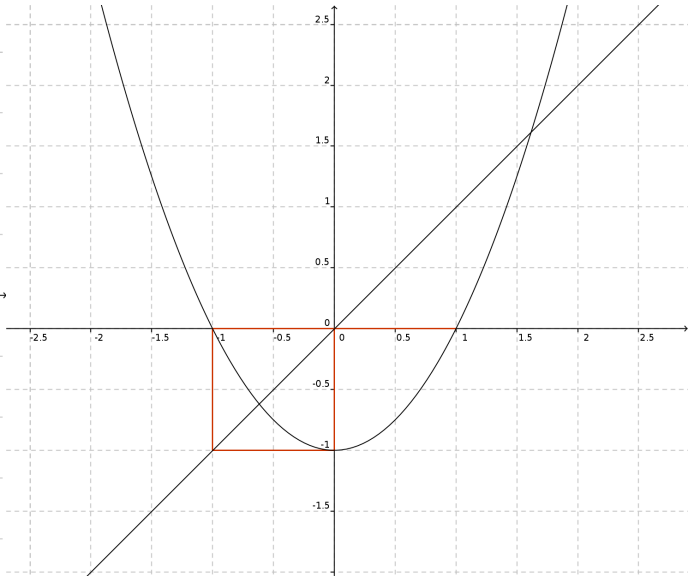
**(a)** $x_{n+1} = x_n^2 - 2$



**(b)** $x_{n+1} = x_n^2 - 1$

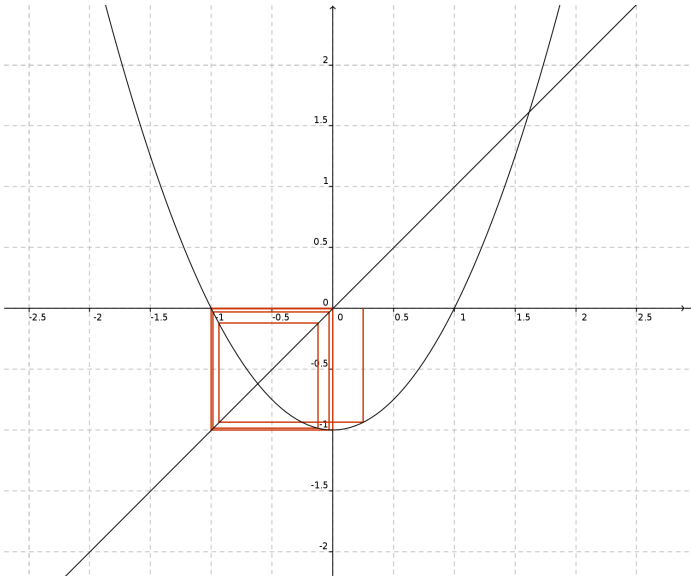


**(c)** $x_0 = 1, c = -2$

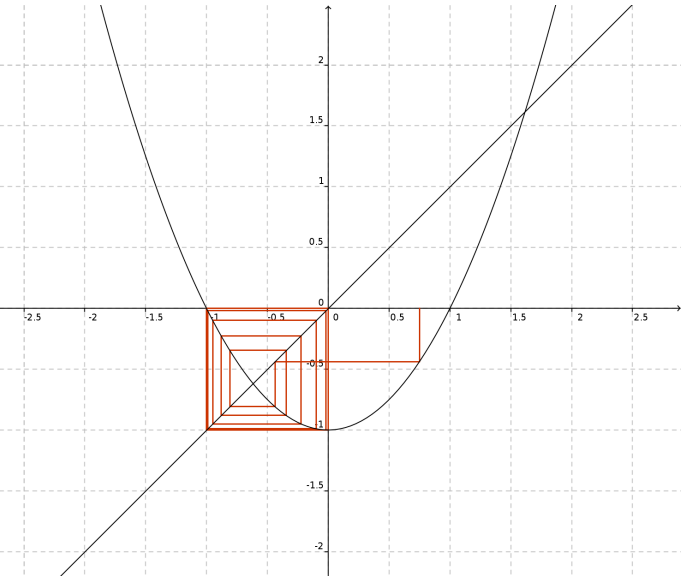


**(d)** $x_0 = 1, c = -1$

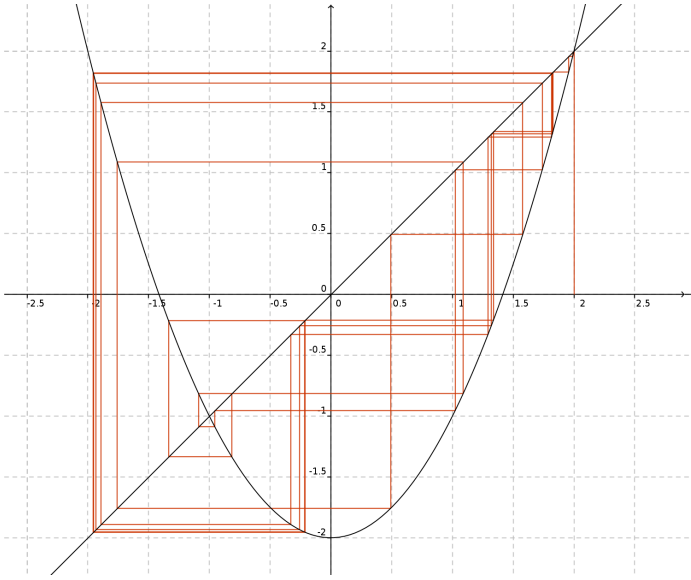
**Rysunek 2:** Iteracje graficzne wyrażenia $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla wybranych $x_0$ i $c$



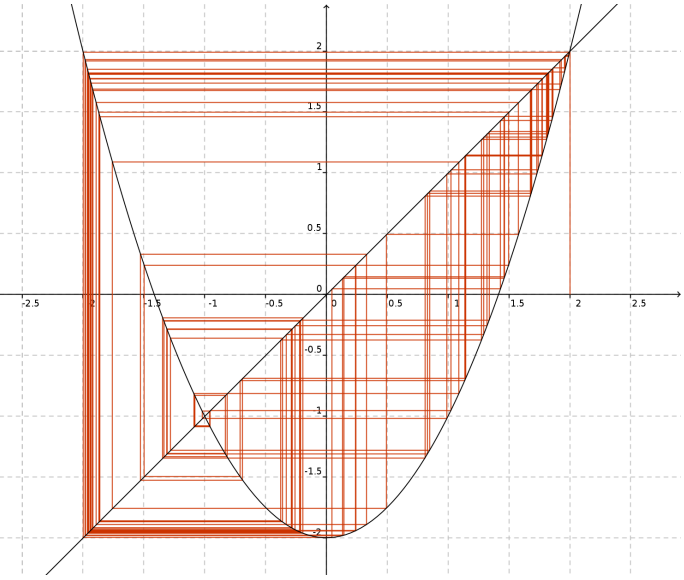
**(e)** $x_0 = 0.25, c = -1$



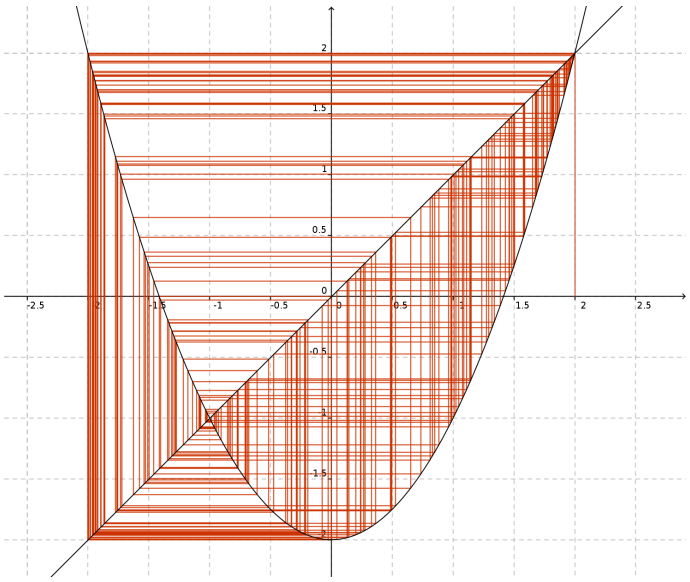
**(f)** $x_0 = 0.75, c = -1$



**(g)** $x_0 = 1.99999999999999, c = -2$ – 40 iteracji



**(h)** $x_0 = 1.99999999999999, c = -2$ – 100 iteracji



**(i)** $x_0 = 1.99999999999999, c = -2$ – 200 iteracji



**Rysunek 2:** Iteracje graficzne wyrażenia $x_{n+1} = x_n^2 + c$ dla wybranych $x_0$ i $c$