Optimización Lineal Continua

Modelos Operativos de Gestión

Ingeniería del Software, UCM.

Elisenda Molina Ferragut
elisenda.molina@ucm.es

Contenidos

Contenidos

Modelos de optimización: programación lineal

Modelo general de PLC

$$\begin{array}{rl} \text{mín}(max) & z = \mathbf{c}^t\,\mathbf{x} \\ \text{s.a.} & \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad (\text{ó} \geq \text{ó} =) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

- $\mathbf{c} \in \boldsymbol{R}^n$: vector de costes (beneficios),
- $\mathbf{b} \in \boldsymbol{R}^m$: vector de recursos (del lado derecho, RHS),
- $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$: matriz de restricciones (tecnológica),
- $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n$: vector de variables de decisión,
- $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$: condiciones de no-negatividad.

Se busca de entre todas las soluciones que verifican todas las restricciones impuestas al modelo (soluciones factibles), aquella que tenga mejor valor para la función objetivo (solución óptima).

Modelos de optimización: programación matemática

- Origen: en 1947, cuando Dantzig formula por primera vez el modelo de Programación Lineal y propone el algoritmo del simplex para su resolución.
- Antecedentes: los trabajos pioneros de L. Kantorovich, F.L. Hitchcock, W. Leontief y J. von Neumann (citados Dantzig).
- Dantzig trabajaba como consejero matemático de los controladores de la Fuerza Aérea de Estados Unidos y se le pidió que mecanizara el proceso de planificación.
- Dantzig desarrolló un mecanismo de planificación para un programa temporal de despliegue, entrenamiento y abastecimiento logístico.
- Es una de las herramientas más importantes en la gestión y asignación de recursos.

  Problemas en los que se trata de asignar o localizar un número de recursos, siempre limitados, entre diversas actividades, de manera que se obtenga el mayor beneficio posible.

Contenidos

Contenidos

Fábrica de cerveza

Una fábrica de cerveza produce dos tipos: rubia y negra. Las tecnologías de producción para cada una de ellas son muy distintas.

La fábrica debe decidir cuántos litros de cerveza debe producir semanalmente teniendo en cuenta que 1000 litros de cerveza rubia se venden a 100 euros y 1000 litros de cerveza negra a 125 euros.

Para producir 1000 litros de cerveza rubia (negra) se necesitan 3 (5) empleados. La fábrica sólo dispone de 15 empleados.

La compra de materias primas supone para el fabricante un precio de 90 euros (85 euros) por cada 1000 litros de cerveza rubia (negra) y dispone de 350 euros semanales para este concepto.

El problema que se plantea la gerente de la fábrica es determinar cuántos litros de cerveza debe producir teniendo en cuenta las condiciones anteriores.

Fábrica de cerveza. Elementos

Productos

Productos	beneficio	coste	mano obra
C. Rubia	100	90	3
C. Negra	125	85	5

Recursos

Recursos	límites
Dinero	350
Trabajadores	15

Fábrica de cerveza. Modelo I

Decisiones / variables

- x_1 = litros de cerveza rubia (en miles).
- x_2 = litros de cerveza negra (en miles).

Restricciones

- No emplear más empleados de los 15 disponibles:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

- No superar el presupuesto en la compra de materias primas:

$$90x_1 + 85x_2 \leq 350$$

- La producción es positiva: $x_1, x_2 \geq 0$

Fábrica de cerveza. Modelo II

Objetivo

Maximizar el beneficio obtenido: $\max 100x_1 + 125x_2$

Solución

$x_1 = 2{,}4359$ y $x_2 = 1{,}5385$. Beneficio: $435{,}8984$ euros.

Resolución con GAMS (www.gams.com)

GAMS es un potente software de lenguaje algebraico que permite crear los modelos de programación matemática y resolverlos mediante el uso de solvers profesionales.

```
variables x1, x2, z;
positive variables x1,x2;
equations obj, horas, presupuesto;
obj.. z =e= 100*x1+125*x2;
horas.. 3*x1+5*x2 =l= 15;
presupuesto.. 90*x1+85*x2 =l= 350;
model cerveza /all/;
solve cerveza using LP maximizing z;
```

Resolución con GAMS: output

```
GENERATION TIME      =        0.031 SECONDS      3 MB  36.1.0 r2c0a44a WEX-WEI
GAMS 36.1.0  r2c0a44a Released Aug  2, 2021 WEX-WEI x86 64bit/MS Windows - 09/03/21 19:05:47 Page 5
Problema fábrica de cerveza.
Solution Report     SOLVE cervezasRN Using LP From line 30


               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   cervezasRN          OBJECTIVE  z
     TYPE    LP                  DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  CPLEX               FROM LINE  30

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              435.8974

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.125 10000000000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         2    2147483647
--- *** This solver runs with a demo license. No commercial use.
--- GMO setup time: 0.02s
--- GMO memory 0.50 Mb (peak 0.50 Mb)
--- Dictionary memory 0.00 Mb
--- Cplex 20.1.0.1 link memory 0.00 Mb (peak 0.00 Mb)
--- Starting Cplex


--- LP status (1): optimal.
--- Cplex Time: 0.03sec (det. 0.00 ticks)


Optimal solution found
Objective:          435.897436


                           LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

---- EQU obj                 .              .              .            1.0000
---- EQU emp               -INF           15.0000        15.0000       14.1026
---- EQU pres              -INF          350.0000       350.0000        0.6410

                           LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

---- VAR rubia               .             2.4359        +INF             .
---- VAR negra               .             1.5385        +INF             .
---- VAR z                 -INF          435.8974        +INF             .

  rubia  litros de cerveza rubia (en miles)
  negra  litros de cerveza negra (en miles)
  z  beneficio total obtenido


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED


EXECUTION TIME       =        0.250 SECONDS      3 MB  36.1.0 r2c0a44a WEX-WEI
```

Contenidos

Explotación minera[Métodos Matemáticos para la economía. J Borrell]

Una empresa minera produce lignito y antracita.

Puede vender toda la producción que obtenga de ambos minerales con un beneficio unitario de 24 y 18 euros por tonelada vendida, respectivamente.

El proceso de producción está dividido en tres fases:

1. primero se corta el mineral,
2. después se procede al tamizado y a la selección,
3. y por último se produce el lavado.

Explotación minera (cont.)

La producción requiere del uso de maquinaria.

Las necesidades en cada una de las tres fases durante los tiempos y la disponibilidad máxima de cada tipo de máquinas son:

	Corte	Tamizado	Lavado
Lignito	3	3	4
Antracita	4	3	2
Disponibilidad máxima	12	10	8

Si el objetivo de la empresa minera es maximizar su beneficio, ¿cuántas toneladas de cada clase de carbón debe producir al día?

La respuesta a esta pregunta se obtiene resolviendo un problema de programación lineal.

Explotación minera. Modelo

Resolución con GAMS. Elementos.

Sets (índices)

- Productos: Lignito y antracita.
- Procesos (recursos): corte, tamizado y lavado.

Parameters (vectores sobre índices)

- Beneficio neto y unitario por producto (euros).
- Disponibilidad de cada recurso (horas).

Table (matrices)

- Consumo de cada recurso por cada tonelada de carbón producida (horas).

Scalar (escalar)

- No hay en este problema.

Resolución con GAMS. Modelo.

```
$title Problema de la explotación minera (Borrell)

$onText
Hoja 1 problemas de MOG.
Modelización y resolución con GAMS.

Una empresa minera produce lignito y antracita. Fases del proceso: corte, tamizado y selección.

unidades: toneladas de  mineral, diponibilidad (horas) máquinas en cada fase.
$offText

Sets
   minerales tipos de carbon / lignito, antracita /
   recursos maquinaria utilizada / corte,tamizado,lavado /;

Parameters
   b(minerales) 'beneficio por la venta de una tonelada'
        /lignito   24
         antracita 18/
   r(recursos) 'limite de recursos disponibles (horas maquina)'
        /corte  12
         tamizado 10
         lavado 8/;

Table c(recursos,minerales) 'horas maquina consumidas por cada unidad de carbon'
           lignito  antracita
corte         3         4
tamizado      3         3
lavado        4         2;


Variables
   cantidad(minerales) 'toneladas producidas de cada mineral'
   be       'beneficio obtenido';

Positive Variables cantidad;

Equations
   benef      'calculo del beneficio'
   consumo(recursos) 'limite en el uso de cada recurso';


benef..      be =e= sum(minerales, b(minerales)*cantidad(minerales));

consumo(recursos).. sum(minerales, c(recursos,minerales)*cantidad(minerales)) =l= r(recursos);

Model ExpMinera / all /;

solve ExpMinera using lp maximizing be;
```

Resolución con GAMS: output.

```
--- LP status (1): optimal.
--- Cplex Time: 0.00sec (det. 0.01 ticks)


Optimal solution found
Objective:           62.400000

                          LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

---- EQU benef              .              .              .             1.0000

  benef  calculo del beneficio

---- EQU consumo  limite en el uso de cada recurso

                LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

corte           -INF          12.0000        12.0000         2.4000
tamizado        -INF           9.6000        10.0000          .
lavado          -INF           8.0000         8.0000         4.2000

---- VAR cantidad  toneladas producidas de cada mineral

                 LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

lignito            .            0.8000         +INF             .
antracita          .            2.4000         +INF             .

                          LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

---- VAR be               -INF          62.4000        +INF             .

  be  beneficio obtenido


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

Contenidos

Problemas de mezclas

Uno de los campos donde más se ha aplicado la Programación Lineal es en el de la planificación óptima de la mezcla de productos a fabricar.

El problema consiste en determinar cómo combinar diversos productos de manera que la mezcla resultante contenga una serie de constituyentes en ciertas cantidades fijas minimizando el costo final de la mezcla.

Hay que determinar la cantidad de materia prima a comprar/producir, así como la proporción de cada materia prima en cada producto final.

Todo ello, teniendo en cuenta las características técnicas del producto final, las materias primas disponibles y sus componentes técnicos.

Son problemas que aparecen en la producción de piensos, combustibles procedentes del petróleo, etc.

Problemas de mezclas

Las limitaciones que suelen aparecer vienen dadas por:

- Garantía mínima relativa
- Costos fijos de producción
- Número máximo de ingredientes
- Ingredientes sustitutivos
- Procesos sustitutivos
- Proporciones de mercado
- Proporciones en características técnicas
- Tarifas de precios

Este tipo de problemas se aplica en diversos campos industriales, como son las industrias de la alimentación, ganadera, farmacéutica, química, siderúrgica o petrolífera.

Mezcla de aceites

- Una empresa elabora un cierto alimento refinando diferentes tipos de aceite y mezclándolos.
- Los aceites se clasifican en dos categorías: vegetales (VEG1 y VEG2) y no vegetales (OIL1, OIL2 y OIL3).
- Cada uno de estos tipos, vegetal o no vegetal, requiere una línea de producción diferente para el refinado:
  - La capacidad máxima de refino es de 200 Tn de aceite vegetal y 250 Tn de no vegetal.
  - Se puede asumir que el coste de refino es nulo y que durante el proceso no se producen pérdidas de peso.
- Cada tonelada de producto final se vende a un precio de 150 u.m..
- La siguiente tabla muestra el coste (por tonelada) de cada tipo de aceite:

	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
Coste	110	120	130	110	115

Mezcla de aceites (cont.)

- Por restricciones tecnológicas, la dureza del producto final debe estar entre 3 y 6 unidades.
- Se puede asumir que la dureza se mezcla linealmente. Esto es, la dureza final es la media ponderada de la dureza de los distintos aceites utilizados en la mezcla.
- La siguiente tabla muestra la dureza de cada tipo de aceite:

	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
Dureza	8.8	6.1	2.0	4.2	5.0

Objetivo

Determinar qué cantidad de aceite de cada tipo debe usarse en la mezcla para maximizar el beneficio obtenido (diferencia entre el precio de venta de la mezcla y el precio de compra de los aceites).

Mezcla de aceites. Modelo

Mezcla de aceites. Modelo

Resolución con GAMS. Elementos.

Sets

- Aceites VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3.
- Con dos subconjuntos:
  - Aceites vegetales: VEG1 y VEG2
  - Aceites no vegetales: OIL1, OIL2 y OIL3.

Parameters (vectores asociados a conjuntos)

- Coste de compra de cada aceite
- Dureza de cada aceite.

Scalars

- Precio de venta de la mezcla final: 150.
- Límites para la dureza de la mezcla final: 3 y 6.
- Capacidad de refino total de tipo de aceite, vegetal y no vegetal: 200 y 250.

Mezcla de aceites. Resolución con GAMS (1/2)

```
sets aceites /'VEG1','VEG2','OIL1','OIL2','OIL3'/
     vege(aceites) /'VEG1','VEG2'/
     mine(aceites) /'OIL1','OIL2','OIL3'/;

parameters
     coste(aceites) /
     VEG1 110
     VEG2 120
     OIL1 130
     OIL2 110
     OIL3 115/
     dureza(aceites) /VEG1 8.8, VEG2 6.1, OIL1 2.0, OIL2 4.2, OIL3 5.0/;

scalars
     dureza_min /3/
     dureza_max /6/
     precio_venta /150/
     refino_vege /200/
     refino_mine /250/;
```

Mezcla de aceites. Resolución con GAMS (2/2)

```
variables z, cantidad(aceites);
positive variables cantidad(aceites);
equations
      beneficio
      lim_refino_vegetal
      lim_refino_mineral
      lim_inf_dureza
      lim_sup_dureza;
beneficio.. z =e= precio_venta * sum(aceites,cantidad(aceites)) -
                        sum(aceites, coste(aceites)*cantidad(aceites));
lim_refino_vegetal.. sum(vege(aceites),cantidad(aceites)) =l= refino_vege;
lim_refino_mineral.. sum(mine(aceites),cantidad(aceites)) =l= refino_mine;
lim_inf_dureza.. dureza_min * sum(aceites,cantidad(aceites)) =l=
                        sum(aceites,dureza(aceites)*cantidad(aceites));
lim_sup_dureza.. sum(aceites,dureza(aceites)*cantidad(aceites)) =l=
                        dureza_max * sum(aceites,cantidad(aceites));
model aceite /all/;
solve aceite using LP maximizing z;
display cantidad.l;
```

Mezcla de aceites (cont.)

Si se imponen las siguientes condiciones adicionales al problema:

I. El alimento final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes.

II. Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo.

III. Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3).

Ahora, es necesario incluir nuevas variables enteras para representar las nuevas decisiones discretas (si se usa o no un tipo de aceite en la mezcla).

Los modelos con variables enteras son más complejos y difíciles de resolver, pero permiten representar situaciones mucho más cercanas a la realidad.

Contenidos

Sistemas multitarea

- Un ordenador con dos procesadores funciona durante al menos 10 horas diarias en aplicaciones administrativas y académicas.
- Cada tarea administrativa requiere 2 segundos de CPU en el procesador 1 y 6 segundos de CPU en el procesador 2.
- Cada tarea académica requiere 5 segundos de CPU en el procesador 1 y 3 segundos de CPU en el procesador 2.
- Se requiere programar la cantidad de tareas diarias a asignar a cada procesador de manera que se minimice el tiempo que el ordenador está ocupado con estos trabajos.

Sistemas multitarea (cont.)

Variables

Función objetivo

El ordenador se considera ocupado mientras un procesador no haya finalizado su tarea: minimax

Restriciones

Contenidos

Problema de la dieta

Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de pollos una dieta mínima para la alimentación de las aves consistente en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas.
Tiene la posibilidad de mezclar tres alimentos distintos: maíz, harina de pescado y pienso sintético.
La siguiente tabla muestra los precios y contenidos de estos dos alimentos:

	Hierro (u/kg)	Vitaminas (u/kg)	Coste (€/kg)
Maíz	2,5	1	0,3
Harina	3	3	0,5
Pienso	1	2	0,2

El granjero se pregunta por la composición de la dieta que, satisfaciendo las necesidades alimenticias, minimice el coste total.

El problema de la dieta (Solución)

El modelo a optimizar es:

Contenidos

Planificación de la producción [Modeling the Supply Chain. J.F. Shapiro]

La empresa PECÉ vende ordenadores y debe hacer una planificación de la producción de la próxima semana.

La compañía produce tres tipos de ordenadores: de mesa (A), portátil normal (B) y portátil de lujo (C).

El beneficio neto por la venta un ordenador es 350, 470 y 610 euros, respectivamente.

Cada semana se venden todos los equipos que se montan.

Los ordenadores pasan un control de calidad de una hora y la empresa dispone de 120 horas para realizar los controles de los ordenadores A y B y 48 para los C.

El resto de las operaciones de montaje requieren 10, 15 y 20 horas, respectivamente y la empresa dispone de 2000 horas a la semana.

Planificación de la producción. Modelo I

Contenidos

Problema del transporte I

Uno de los modelos más usados en logística es el modelo del transporte.

La compañía PECÉ dispone de un centro de montaje situado en Madrid y un almacén en Zaragoza.

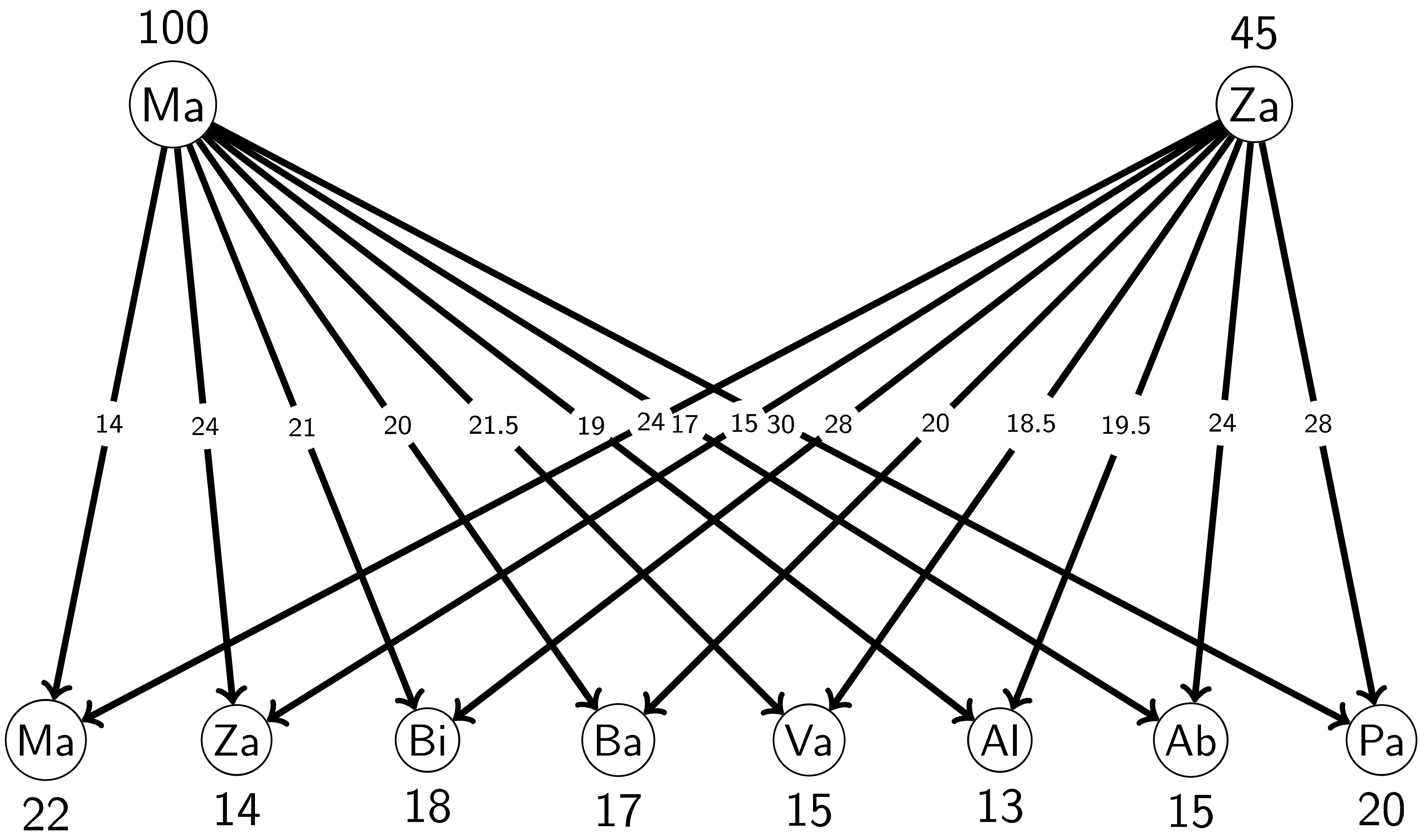
Además, cuenta con 8 grandes clientes situados en: Madrid, Zaragoza, Bilbao, Barcelona, Valencia, Alicante, Albacete y Pamplona.

La empresa dispone de 100 ordenadores de mesa en el centro de montaje y 45 en el almacén para servir la demanda de estos 8 clientes.

Costes de transporte

	Ma	Za	Bi	Ba	Va	Al	Alb	Pa
Madrid	14.00	24.00	21.00	20.00	21.50	19.00	17.00	30.00
Zaragoza	24.00	15.00	28.00	20.00	18.50	19.50	24.00	28.00
Demanda	22	14	18	17	15	13	15	20

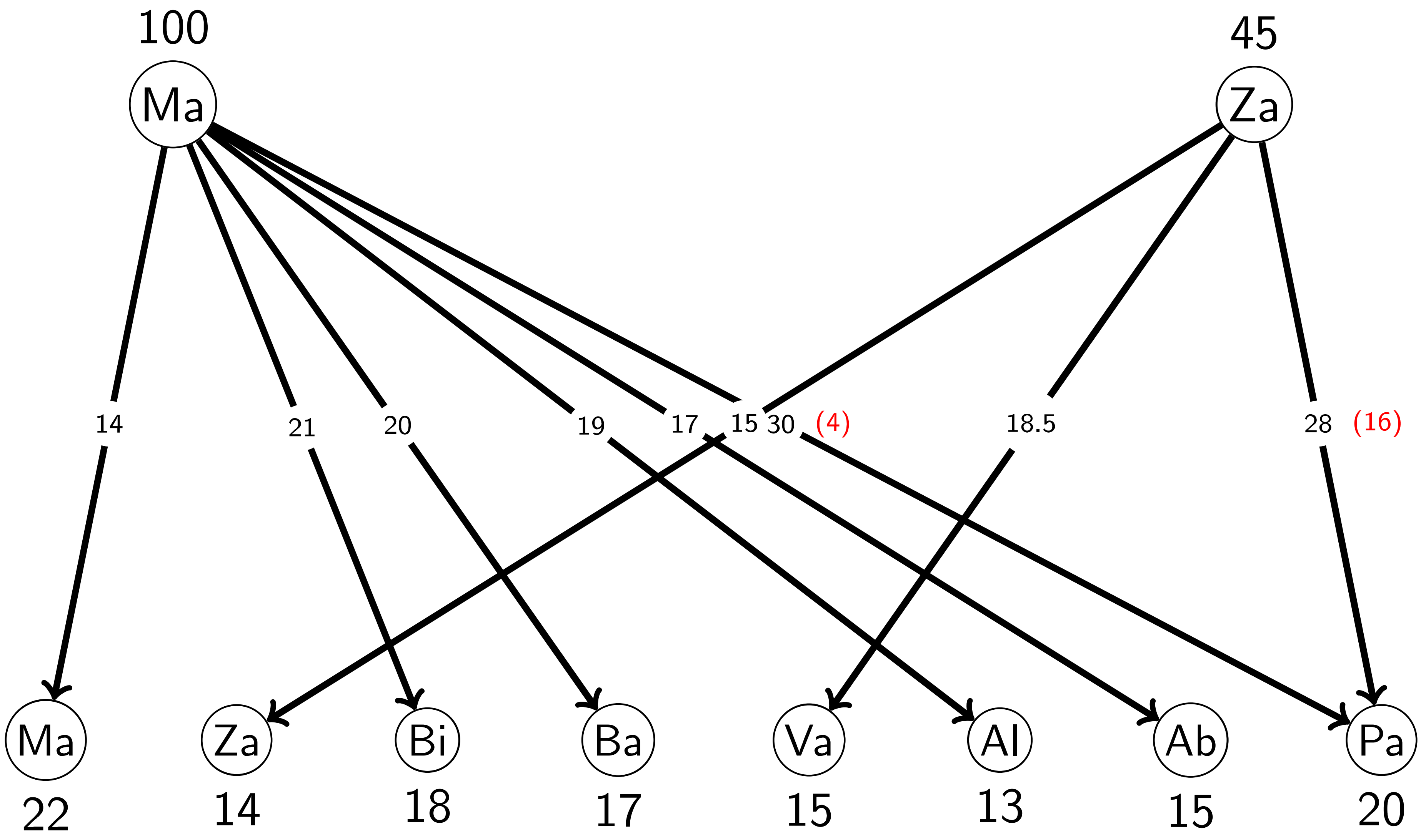
Problema del transporte. Representación gráfica



Problema del transporte. Elementos

Problema del transporte. Modelo

Problema del transporte. Solución



Problema del transporte (cont.)

La compañía está estudiando la posibilidad de instalar un almacén intermedio en la red, cerca de Barcelona, Valencia, Alicante, ya que piensa que puede reducir los costes de transporte.

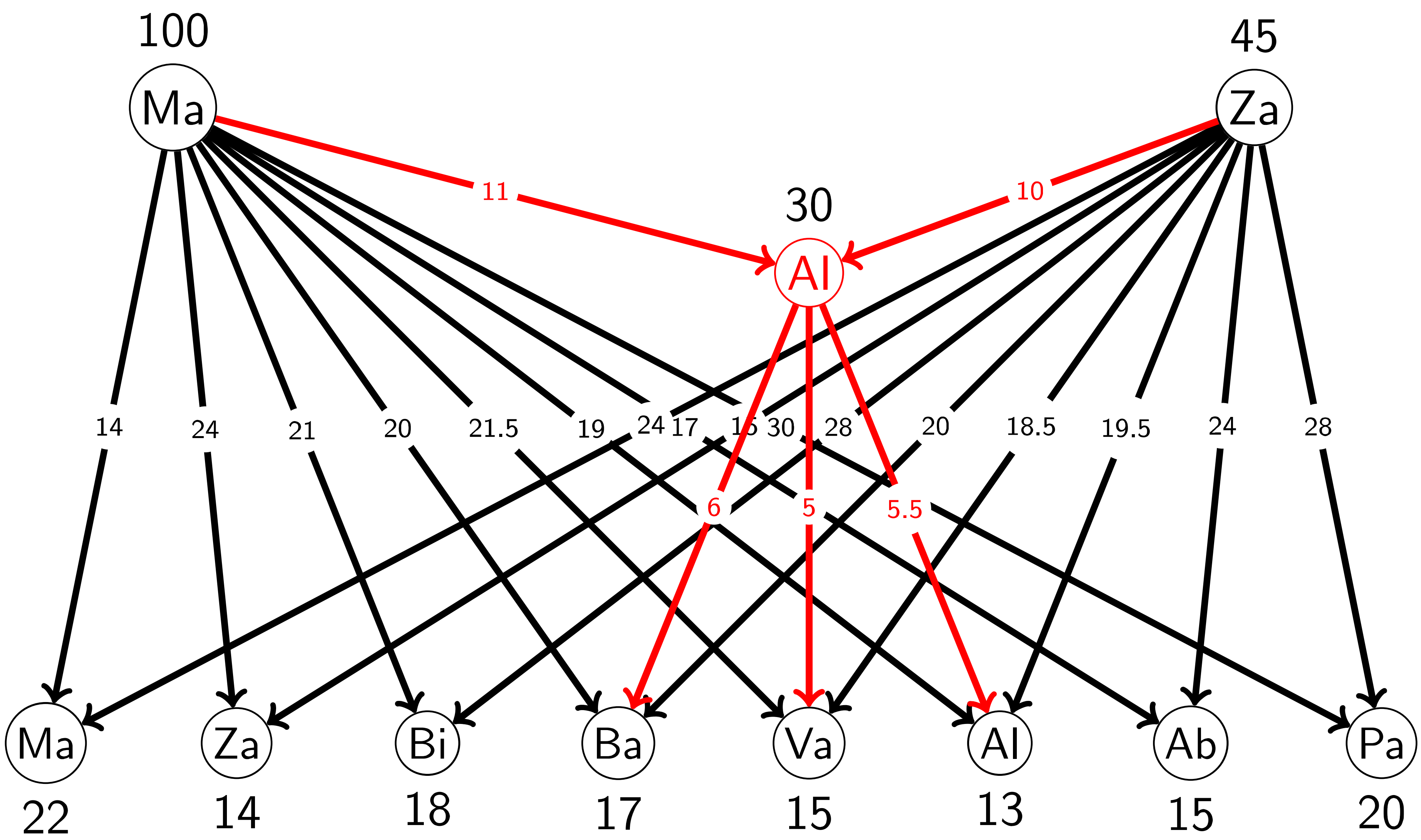
Los costes de transporte desde el centro y al nuevo almacén y de este almacén a cada cliente son:

	Centro		Ba	Va	Al
Madrid	11.00	Almacén	6.00	5.00	5.50
Zaragoza	10.00	central			

Adicionalmente, hay un coste de 2 euros por la manipulación de cada ordenador en este almacén y una capacidad máxima de 30 ordenadores por semana.

Problema del transporte (cont.)

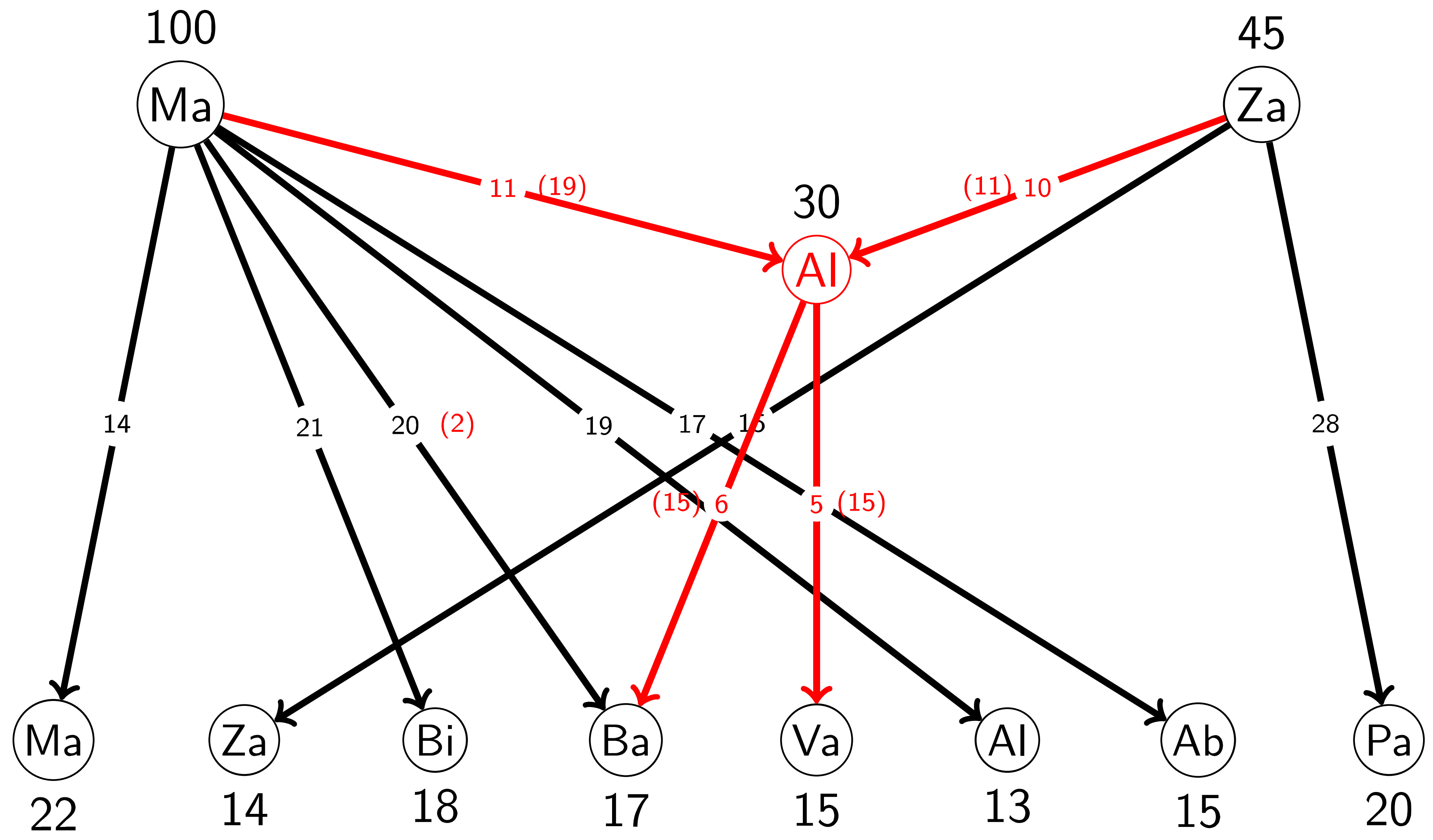
La siguiente figura muestra cómo quedaría el nuevo problema. El nuevo nodo roj orepresenta el nuevo almaceén y los arcos rojos las nuevas rutas.



Problema del transporte (cont.)

Problema del transporte. Modelo

Problema del transporte (cont.)



Contenidos

Propiedades de los modelos de Programación Lineal

La Programación Lineal se ha convertido en una de las herramientas más importantes en la optimización matemática debido a dos razones fundamentales:

- Es posible resolver problemas de grandes dimensiones.
- Prácticamente todos los modelos se pueden resolver, independientemente de su formulación.

Sin embargo, este éxito de la programación lineal tiene un coste: los modelos utilizan unas hipótesis de partida que muchas veces suponen una simplificación excesiva del problema.

Por ejemplo, suponen que los costes son lineales: producir el doble cuesta el doble, cuando las economías de escala suelen indicar que a mayor producción, menor coste unitario (producir el doble cuesta un poco menos del doble).

Hipótesis que conducen a modelos lineales

Las hipótesis más importantes que se asumen al utilizar la programación lineal como herramienta de trabajo son:

1. Linealidad.
2. Separabilidad y aditividad.
3. Divisibilidad y continuidad.
4. Un sólo objetivo.
5. Datos perfectamente conocidos.

Hipótesis que conducen a modelos lineales I

Linealidad y proporcionalidad

La contribución de cada variable a la función objetivo y a cada restricción es proporcional al valor que toma dicha variable.

Separabilidad y aditividad

El coste total es la suma de los costes individuales de cada variable.

La contribución total a cada restricción se halla sumando la contribución de cada variable.

No se permiten sinergias entre dos procesos.

Divisibilidad y continuidad

Asume que las decisiones adoptadas o las actividades desarrolladas pueden fragmentarse a cualquier nivel.

Hipótesis que conducen a modelos lineales II

Datos perfectamente conocidos

Implica que todos los elementos que definen el problema están perfectamente determinados.

Un único objetivo

No se pueden considerar varios objetivos como: maximizar el beneficio y minimizar el impacto medioambiental.

Existe un único centro de decisión independiente

Se considera que las decisiones del resto de decisores no afectan al funcionamiento de mi sistema

Por ejemplo, que un competidor lance un nuevo producto no afectará a la demanda del mío.

Alternativas

Las hipótesis anteriores son muy restrictivas. El avance tecnológico (potencia y velocidad de computación) ha permitido el desarrollo de alternativas dentro de la Investigación Operativa que permiten abordar nuevos problemas:

1. Programación Entera (Mixta): cantidades no divisibles y enteras y decisiones lógicas.
2. Programación no Lineal: relaciones no proporcionales y no aditivas.
3. Programación Multiobjetivo: varios objetivos.

   La Programación por Metas permite trabajar con modelos en los que las restricciones no sean tan rígidas.
4. Programación Estocástica, permite incorporar la incertidumbre inherente en muchas situaciones reales al modelo.
5. Programación difusa, permite trabajar con problemas en los que las restricciones no son rígidas (modelizan relaciones vagamente definidas).