Optimización Lineal Continua

Modelos Operativos de Gestión

Ingeniería del Software, UCM.

Elisenda Molina Ferragut
elisenda.molina@ucm.es

Contenidos

Interpretación de la solución

Un elemento clave de la Programación Lineal es la interpretación de la solución, no sólo del valor de las variables, sino también del resto de indicadores que se obtienen.

Permiten asignar un valor a los recursos, determinar el coste de los requerimientos y, en general, explicar porqué una solución es óptima.

Además, permiten hacer análisis de robusted: ¿qué ocurre si cambia algún parámetro del problema? Fundamental en aplicaciones reales (el modelo es solo una aproximación de la realidad y los datos recogidos para dicho análisis suelen ser también aproximaciones)

Contenidos

Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad permite conocer si la solución obtenida es sensible a pequeños cambios de los parámetros.

- Cómo afectan los cambios en el lado derecho de las restricciones y los coeficientes de la función objetivo.
- Cómo afectan los cambios cuando se exige llevar a cabo una decisión que no está presente en la solución óptima.

Los informes suelen proporcionar intervalos de variación para los coeficientes de la función objetivo y para el lado derecho, dentro de los cuales la estructura de solución actual sigue siendo óptima.

Estos intervalos permiten además conocer la *validez* de los precios sombra y de los costes reducidos (*MARGINALS* en GAMS)

Análisis de sensibilidad

- El precio sombra asociado a una restricción nos proporciona el cambio en el valor óptimo debido a un cambio unitario en el lado derecho de la restricción, manteniendo el resto de datos del problema constantes.

- El costes reducido de una varibale básica en el óptimo es 0, el de las variables no básicas nos indica la variación en la función objetivo cuando se fuerza a que esa variable, que vale 0 en la solución óptima, valga 1.

AS con GAMS

- Seleccionar solver de PL: `OPTION LP=CPLEX;`
- En el fichero de opciones de CLPLEX: `CPLEX.OPT`, seleccionar *objrng all*, *rhsrng all*.
- Indicar en el fichero: `model.OPTFILE=1;`

```
Variables
   botella  'toneladas de PET-botella'
   fibra    'toneladas de PET-fibra'
   z        'beneficio total obtenido';

Positive Variables botella,fibra;

Equations obj,PTA,EtG;

obj..      z =e= 36*botella+30*fibra;
PTA..      0.966*botella+0.912*fibra =l= 260;
EtG..      0.365*botella+0.344*fibra =l= 150;


Model PetBF / all /;

OPTION LP=CPLEX;

PetBF.OPTFILE=1;

solve PetBF using lp maximizing z;
```

AS con GAMS. Ejemplo petroquímica

```
--- Start ranging / sensitivity analysis...
--- Right-hand-side ranging...

EQUATION NAME                  LOWER        CURRENT        UPPER
-------------                  -----        -------        -----
obj                             -INF             NA         +INF   =C
PTA                                0            260      396.986   =C
EtG                          98.2402            150         +INF   =C

--- Objective ranging...

VARIABLE NAME                  LOWER        CURRENT        UPPER
-------------                  -----        -------        -----
botella                      31.7763             36         +INF   =C
fibra                           -INF             30      33.9876   =C
z                               -INF             NA         +INF   =C
```

- Coeficientes función objetivo: mientras que el beneficio por tonelada de PET-botella no sea inferior a 31,7763 euros, o el beneficio unitario de PET-fibra no supere los 33,9876 euros, la solución actual sigue siendo óptima.
- Vector del lado derecho: la decisión de no hacer PET-fibra se mantendrá mientras la disponibilidad de PTA no sobrepase las 396,986 toneladas (incremento 136,99), o la disponibilidad de EtG esté por debajo de 98,2402 (disminuya en 51,76).

AS con GAMS. Ejemplo petroquímica

Los intervalos nos indica también la validez de los precios sombras y de los costes reducidos:

```
Optimal solution found
Objective:          9689.440994


                          LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

---- EQU obj                .              .              .            1.0000
---- EQU PTA              -INF         260.0000       260.0000        37.2671
---- EQU EtG              -INF          98.2402       150.0000          .

                          LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

---- VAR botella            .          269.1511        +INF              .
---- VAR fibra              .              .           +INF           -3.9876
---- VAR z                -INF        9689.4410        +INF              .

  botella  toneladas de PET-botella
  fibra  toneladas de PET-fibra
  z  beneficio total obtenido
```

- El precio sombra de la primera restricción será 37,268 mientras la disponibilidad de PTA se mantenga entre 0 y 396,986.
- El precio sombra de la segunda restricción será 0 mientras la disponibilidad de EtG se mantenga por encima de 98,2402.
- El coste reducido de empezar a producir PET-fibra será de $-3{,}9876$ siempre que su beneficio se mantenga por debajo de 33,9876.

Contenidos

Análisis paramétrico

Permiten hacer estudios sistemáticos en el vector de costes y el vector del lado derecho.

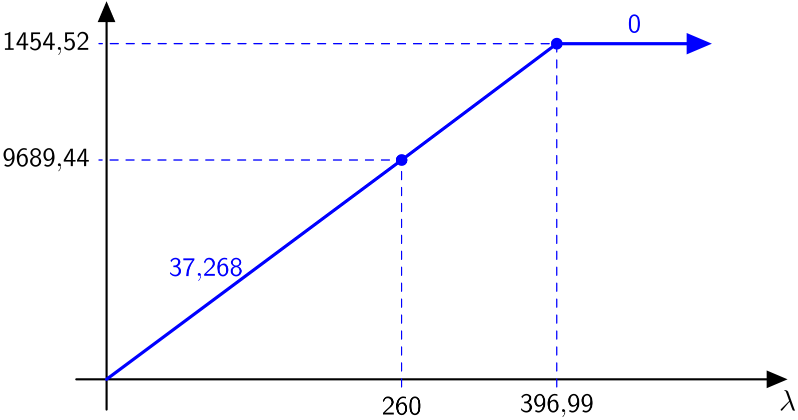
Por ejemplo, permiten estudiar cómo cambia la función objetivo cuando varía la disponibilidad de PTA:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & 36x_1 & + & 30x_2 & & \\ \text{s.a.} & 0{,}966x_1 & + & 0{,}912x_2 & \leq & \lambda, \\ & 0{,}365x_1 & + & 0{,}344x_2 & \leq & 150, \\ & & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

donde λ es un parámetro positivo.

Análisis paramétrico

Beneficio asociado a la solución óptima obtenida para los diferentes valores de λ



Disponibilidad de PTA

Análisis paramétrico. Compañía PECÉ

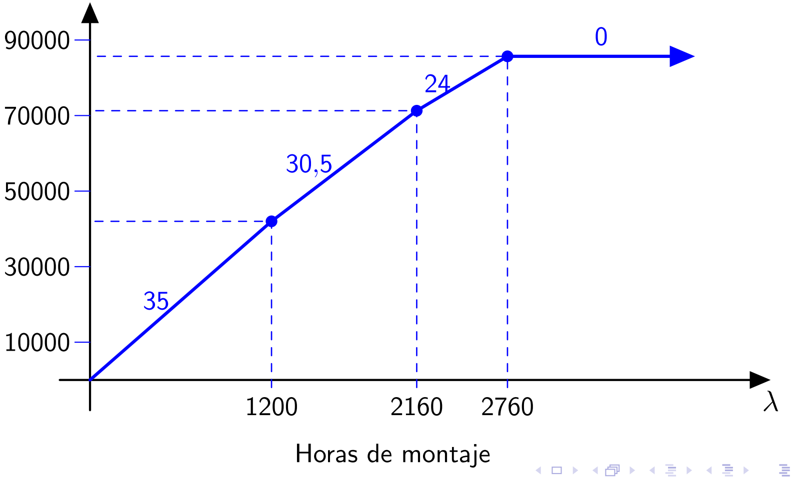
El análisis paramétrico permite hace un estudio del beneficio total de la compañía PECÉ en función del nivel de recursos.
Por ejemplo, para analizar la repercusión de la disponibilidad de horas de montaje, se resuelve el problema:

$$\begin{aligned}
\text{máx}\, & 350x_A + 470x_B + 610x_C \\
\text{s.a} & \\
& x_A + x_B \leq 120 \\
& x_C \leq 48 \\
& 10x_A + 15x_B + 20x_C \leq \lambda
\end{aligned}$$

Análisis paramétrico

La siguiente figura muestra el beneficio obtenido para distintos valores del recurso "horas de montaje".

La pendiente en cada recta indica el "precio" de ese recurso para cada nivel.



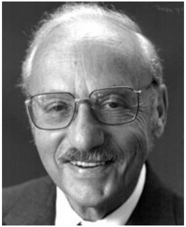
Contenidos

Dualidad

- Permite analizar cada problema desde otro punto de vista (dual) y obtener nuevos datos sobre el problema original para ayudar a interpretar la solución.
- Permite el desarrollo de algoritmos alternativos al algoritmo simplex (alg. *dual*, alg. *primal-dual*) que a veces son más eficientes para el problema que se está resolviendo.
- Aplicación directa: ¿qué problema es más fácil de resolver?
- Algunas aplicaciones:
  - valoración de empresas,
  - TIMES (*The Integrated MARKAL-EFOM System*) es un generador de modelos energéticos globales de optimización. Genera modelos económicos estratégicos (horizonte a largo plazo) multi-periodo. Modelos muy explícitos en tecnologías: tasa de emisiones de CO_2=precio sombra de la restricción que limita las emisiones totales.

Orígenes

Según G. Dantzig (1991), el concepto de dualidad fue introducido por J.V. Neumann y O. Morgenstern en 1944 como parte de la Teoría de Juegos (*teorema del minimax, valor de un juego de suma nula*).



(a) G.B. Dantzig, 1914-2005

(b) J. von Neumann, 1903-1957

Ejemplo. Planificación de la producción.

Ejemplo 1. Producción

Consideremos de nuevo el problema de una compañía que produce 4 tipos de productos, p_1, p_2, p_3, y p_4 a partir de tres tipos de recursos, r_1, r_2 y r_3.

	Productos				
Recursos	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	$\mathbf{p_3}$	$\mathbf{p_4}$	**Disponibilidad**
$\mathbf{r_1}$	2	3	1.5	4	300
$\mathbf{r_2}$	2	4	3	1	500
$\mathbf{r_3}$	5	1	2	2	250
Beneficio	4	3	6	2	

Resolución

Para maximizar el beneficio de la compañía se resuelve el problema de PL:

$$x_i = \text{Cantidad de producto } i \text{ que se produce } (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3 + 4x_4 \leqslant 300 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 500 \\ & 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leqslant 250 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es: $z^* = 750 \qquad \mathbf{x}^{*^t} = (0, 0, 125, 0)$

Gran empresa productora

Una gran empresa del sector quiere persuadir a la pequeña compañía de que abandone su proceso productivo y le venda directamente sus existencias de recursos r_1, r_2 y r_3.

Sistema de precios rentable para la pequeña empresa productora

- ¿cuánto recibe la pequeña empresa por dejar de producir una unidad de producto p_1?

$$2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \geq 4$$

  No aceptará un sistema de precios por debajo del beneficio que le reporta directamente.

- El objetivo de la gran compañía es adquirirlos al menor coste posible:

$$\text{mín } w = 300u_1 + 500u_2 + 250u_3$$

Gran empresa productora

Una gran empresa del sector quiere persuadir a la pequeña compañía de que abandone su proceso productivo y le venda directamente sus existencias de recursos r_1, r_2 y r_3.

Sistema de precios rentable para la pequeña empresa productora

- ¿cuánto recibe la pequeña empresa por dejar de producir una unidad de producto p_1?

  $$2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \geq 4$$

  No aceptará un sistema de precios por debajo del beneficio que le reporta directamente.

- El objetivo de la gran compañía es adquirirlos al menor coste posible:

$$\text{mín } w = 300u_1 + 500u_2 + 250u_3$$

Gran empresa productora

Una gran empresa del sector quiere persuadir a la pequeña compañía de que abandone su proceso productivo y le venda directamente sus existencias de recursos r_1, r_2 y r_3.

Sistema de precios rentable para la pequeña empresa productora

- ¿cuánto recibe la pequeña empresa por dejar de producir una unidad de producto p_1?

  $$2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \geq 4$$

  No aceptará un sistema de precios por debajo del beneficio que le reporta directamente.

- El objetivo de la gran compañía es adquirirlos al menor coste posible:

  $$\text{mín } w = 300u_1 + 500u_2 + 250u_3$$

Gran empresa productora

Para determinar el sistema de precios competitivo óptimo, la gran empresa debe resolver el problema de PL:

$$u_j = \text{Precio por unidad de recurso } j, j = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & w = 300u_1 + 500u_2 + 250u_3 \\
\text{s.a:} \quad & 2u_1 + 2u_2 + 5u_3 \geqslant 4 \\
& 3u_1 + 4u_2 + u_3 \geqslant 3 \\
& 1{,}5u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geqslant 6 \\
& 4u_1 + u_2 + 2u_3 \geqslant 2 \\
& u_1, u_2, u_3 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Par de problemas duales

Problema Primal

$$
\begin{array}{llrrrrl}
\text{máx} & z = 4x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +2x_4 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & +3x_2 & +1{,}5x_3 & +4x_4 & \leqslant & 300 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +1x_4 & \leqslant & 500 \\
 & 5x_1 & +1x_2 & +2x_3 & +2x_4 & \leqslant & 250 \\
 & x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Solución óptima: $z^* = 750 \qquad \mathbf{x}^{*^t} = (0, 0, 125, 0)$

Problema Dual

$$
\begin{array}{llrrrl}
\text{mín} & w = 300u_1 & +500u_2 & +250u_3 & & \\
\text{s.a:} & 2u_1 & +2u_2 & +5u_3 & \geqslant & 4 \\
 & 3u_1 & +4u_2 & +1u_3 & \geqslant & 3 \\
 & 1{,}5u_1 & +3u_2 & +2u_3 & \geqslant & 6 \\
 & 4u_1 & +1u_2 & +2u_3 & \geqslant & 2 \\
 & u_1\,, & u_2\,, & u_3 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Solución óptima: $w^* = 750 \qquad \mathbf{u}^{*^t} = (0, 0, 3)$

Ejemplo 2. Reciclado residuos.

Una empresa obtiene 3 productos (A,B y C) a partir del reciclado de residuos generados en municipios y grandes empresas.
Dependiendo del origen los residuos a reciclar tienen una determinada proporción de los productos que la empresa obtiene. Se suponen 5 tipos de residuos:

- Proporción de cada producto A,B y C que se puede obtener mediante el reciclado de cada tipo de residuo.
- Coste, en euros, de transportar cada tonelada desde el punto donde se genera a la planta de reciclado.
- Demanda semanal de los productos A,B y C: 100, 80 y 60 toneladas, respectivamente

Tipos de residuo	1	2	3	4	5
A	0	0.1	0.1	0.6	0
B	0.1	0.2	0.1	0.1	0.3
C	0.2	0	0.1	0.3	0.1
Coste	18	12	24	30	6

¿Qué cantidad de cada tipo de residuo debe recoger semanalmente para que el coste de transporte sea mínimo?

Ejemplo 1. Reciclado residuos.

Política óptima de recogida de residuos:

$$x_i = \text{Cantidad de residuo recogido del origen } j = 1, \ldots, 5$$

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 \\
\text{s.a:} & 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}6x_4 \geqslant 100 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}3x_5 \geqslant 80 \\
 & 0{,}2x_1 + 0{,}1x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}1x_5 \geqslant 60 \\
 & x_1, \ldots, x_5 \geqslant 0
\end{array}$$

Transportar 166,67 Tm. de residuo del tipo 4 y 211,11 Tm. del tipo 5. El coste mínimo es de 1044,444 euros.

Cambio de política.

El gerente de la empresa se está planteando sustituir el reciclado de residuos por la compra directa de los productos A, B y C que tiene que servir.

Sistema de precios rentable para la empresa, ¿u_A, u_B, u_C?

- Precio pagado por los productos obtenidos con una tonelada de residuo del origen 1:

$$0{,}1u_B + 0{,}2u_c \leq 3$$

El gerente no aceptará un sistema de precios que supere el coste de transporte de los residuos.

- Lo mismo para los residuos procedentes del resto de orígenes $2, \ldots, 5$:

$$0{,}1u_B + 0{,}2u_C \leqslant 3 \quad 0{,}1u_A + 0{,}2u_B \leqslant 2 \quad 0{,}1u_A + 0{,}1u_B + 0{,}1u_C \leqslant 4$$

$$0{,}6u_A + 0{,}1u_B + 0{,}3u_C \leqslant 5 \quad 0{,}3u_B + 0{,}1u_C \leqslant 1$$

Cambio de política.

El gerente de la empresa se está planteando sustituir el reciclado de residuos por la compra directa de los productos A, B y C que tiene que servir.

Sistema de precios rentable para la empresa, ¿u_A, u_B, u_C?

- Precio pagado por los productos obtenidos con una tonelada de residuo del origen 1:

$$0{,}1u_B + 0{,}2u_c \leq 3$$

  El gerente no aceptará un sistema de precios que supere el coste de transporte de los residuos.

- Lo mismo para los residuos procedentes del resto de orígenes $2, \ldots, 5$:

$$0{,}1u_B + 0{,}2u_C \leqslant 3 \quad 0{,}1u_A + 0{,}2u_B \leqslant 2 \quad 0{,}1u_A + 0{,}1u_B + 0{,}1u_C \leqslant 4$$

$$0{,}6u_A + 0{,}1u_B + 0{,}3u_C \leqslant 5 \quad 0{,}3u_B + 0{,}1u_C \leqslant 1$$

Cambio de política.

Mejor sistema de precios para una productora, ¿u_A, u_B, u_C?

Una empresa productora de A,B y C, ¿qué cantidad podría esperar ganar como máximo con la transacción?

$$\max 100u_A + 80u_B + 60u_C$$

Par de problemas duales

Problema Primal

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{mín} & 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +5x_4 & +1x_5 & & \\
\text{s.a:} & & +0{,}1x_2 & +0{,}1x_3 & +0{,}6x_4 & & \geqslant & 100 \\
& 0{,}1x_1 & +0{,}2x_2 & +0{,}1x_3 & +0{,}1x_4 & +0{,}3x_5 & \geqslant & 80 \\
& 0{,}2x_1 & & +0{,}1x_3 & +0{,}3x_4 & +0{,}1x_5 & \geqslant & 60 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Solución óptima: $z^* = 1044{,}444$,
${\mathbf{x}^*}^t = (0, 0, 0, 1666{,}67, 211{,}11)$

Problema Dual

$$
\begin{array}{llllll}
\text{máx} & 100u_A & +80u_B & +60u_C & & \\
\text{s.a:} & & 0{,}1u_B & +0{,}2u_C & \leqslant & 3 \\
& 0{,}1u_A & +0{,}2u_B & & \leqslant & 2 \\
& 0{,}1u_A & +0{,}1u_B & +0{,}1u_C & \leqslant & 4 \\
& 0{,}6u_A & +0{,}1u_B & +0{,}3u_C & \leqslant & 5 \\
& & 0{,}3u_B & +0{,}1u_C & \leqslant & 1 \\
& u_A, & u_B, & u_C & \geqslant & 0
\end{array}
$$

Solución óptima: $w^* = 1044{,}444$, ${\mathbf{u}^*}^t = (7{,}778, 3{,}333, 0)$

Ejemplo3. Empresa de muebles

Una empresa de muebles tiene:

- 2 plantas madereras de las que obtiene toda la madera que necesita,
- 3 fábricas en las que produce y vende sus muebles.

De cada planta maderera se obtiene una cantidad de 103 y 197 toneladas de madera y la demanda de madera de cada centro de fabricación de muebles es de 71, 133 y 96 toneladas.

Costes de transporte

	FÁBRICA 1	FÁBRICA 2	FÁBRICA 3
PLANTA 1	9	16	28
PLANTA 2	14	29	19

Empresa de muebles

Se trata de un problema del transporte. El objetivo es transportar la madera al menor coste posible.

Variables

x_{ij} cantidad de madera que envía de la planta de producción i, $i = 1, 2$, a la fábrica de muebles j, $j = 1, 2, 3$.

Formulación

$$
\begin{array}{lccccccccccccl}
\text{mín} & 9x_{11} & + & 16x_{12} & + & 28x_{13} & + & 14x_{21} & + & 29x_{22} & + & 19x_{23} & & \\
\text{s.a.} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & \leq & 103, \\
 & & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \leq & 197, \\
 & x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & \geq & 71, \\
 & & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & \geq & 133, \\
 & & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & \geq & 96, \\
 & & & & & & & & & & & x_{ij} & \geq & 0, \ \forall\ i, j.
\end{array}
$$

Gran compañía maderera

Una gran compañía maderera intenta disuadir a la pequeña empresa de muebles de que le venda la madera de sus plantas de producción y le compre la madera en sus puntos de fabricación de muebles.

A cambio, la pequeña empresa maderera se ahorraría los costes de transporte.

Para ello, la gran compañía maderera debe establecer un sistema de precios de compra en las plantas de producción y de venta en las fábricas aceptables por la pequeña empresa:

Sistema de precios

precios de compra:	u_1	u_2	
precios de venta:	v_1	v_1	v_3

Gran compañía maderera

Los precios a los que compre y venda la madera deben ser tales que a la pequeña compañía no le salga más caro vender su madera en origen y comprarla en cada destino que transportarla por sus propios medios.

$$\boxed{v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad \forall\, i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2,3\}}$$

Y, en cualquier caso, el objetivo es maximizar el beneficio.

Gran compañía maderera

El modelo resultante es:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{máx} & -103u_1 & - & 197u_2 & + 71v_1 & + 133v_2 & + 96v_3 & \\
\text{s.a.} & -u_1 & & & + \quad v_1 & & & \leq 9, \\
& -u_1 & & & & + \quad v_2 & & \leq 16, \\
& -u_1 & & & & & + \quad v_3 & \leq 28, \\
& & & -u_2 & + \quad v_1 & & & \leq 14, \\
& & & -u_2 & & + \quad v_2 & & \leq 29, \\
& & & -u_2 & & & + \quad v_3 & \leq 19, \\
& & & & & & \mathbf{u} & \geq \mathbf{0}, \\
& & & & & & \mathbf{v} & \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\qquad (D_4)
$$

Definición del par de problemas duales

Si analizamos los ejemplos anteriores:

- A cada restricción del problema primal se le asocia una variable del problema dual.
- A cada variable del problema primal se le asocia una restricción del problema dual.
- La matriz de restricciones del problema dual es la traspuesta de la matriz de restricciones del problema primal.
- El vector de coeficientes de la función objetivo del problema dual es el vector de términos independientes del problema primal.
- El vector de términos independientes del problema dual es el vector de coeficientes de la función objetivo del problema primal.

Sistema de reglas

El dual del problema dual es el problema primal.

Problema de minimización		**Problema de maximización**
Variables		Restricciones
≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$
≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$
no restringido	$\longleftrightarrow$	$=$
Restricciones		Variables
$\geq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0
$\leq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0
$=$	$\longleftrightarrow$	no restringido

Sistema de reglas

Ejemplo

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{máx} & 8x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\
& 5x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\
& & & & & x_1 & \leq & 0 \\
& & & & & x_2 & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & \multicolumn{2}{l}{\text{no restringido}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{mín} & 2w_1 & - & 4w_2 & & \\
\text{s.a.} & w_1 & + & 5w_2 & \leq & 8 \\
& -6w_1 & + & 7w_2 & \geq & 3 \\
& w_1 & - & 2w_2 & = & -2 \\
& & & w_1 & \leq & 0 \\
& w_2 & \multicolumn{4}{l}{\text{no restringido}}
\end{array}
$$

Propiedades

- El algoritmo del símplex es más sensible al número de restricciones que al número de variables (proporcional a m^3).
- El modelo dual es más apropiado para resolver problemas con muchas más restricciones que variables. Software profesional decide.
- El modelo dual proporciona una interpretación económica del problema.
- A partir de la solución del problema dual (primal) se puede obtener todas la información sobre la solución del problema primal (dual).
- La teoría de la dualidad nos permite llevar a cabo los análisis de sensibilidad y postoptimización que no estudiamos con anterioridad (cuando se pierde la factibilidad primal).

Propiedades

- El algoritmo del símplex es más sensible al número de restricciones que al número de variables (proporcional a m^3).
- El modelo dual es más apropiado para resolver problemas con muchas más restricciones que variables. Software profesional decide.
- El modelo dual proporciona una interpretación económica del problema.
- A partir de la solución del problema dual (primal) se puede obtener todas la información sobre la solución del problema primal (dual).
- La teoría de la dualidad nos permite llevar a cabo los análisis de sensibilidad y postoptimización que no estudiamos con anterioridad (cuando se pierde la factibilidad primal).

Propiedades

- El algoritmo del símplex es más sensible al número de restricciones que al número de variables (proporcional a m^3).
- El modelo dual es más apropiado para resolver problemas con muchas más restricciones que variables. Software profesional decide.
- El modelo dual proporciona una interpretación económica del problema.
- A partir de la solución del problema dual (primal) se puede obtener todas la información sobre la solución del problema primal (dual).
- La teoría de la dualidad nos permite llevar a cabo los análisis de sensibilidad y postoptimización que no estudiamos con anterioridad (cuando se pierde la factibilidad primal).

Propiedades

- El algoritmo del símplex es más sensible al número de restricciones que al número de variables (proporcional a m^3).
- El modelo dual es más apropiado para resolver problemas con muchas más restricciones que variables. Software profesional decide.
- El modelo dual proporciona una interpretación económica del problema.
- A partir de la solución del problema dual (primal) se puede obtener todas la información sobre la solución del problema primal (dual).
- La teoría de la dualidad nos permite llevar a cabo los análisis de sensibilidad y postoptimización que no estudiamos con anterioridad (cuando se pierde la factibilidad primal).

Propiedades

- El algoritmo del símplex es más sensible al número de restricciones que al número de variables (proporcional a m^3).
- El modelo dual es más apropiado para resolver problemas con muchas más restricciones que variables. Software profesional decide.
- El modelo dual proporciona una interpretación económica del problema.
- A partir de la solución del problema dual (primal) se puede obtener todas la información sobre la solución del problema primal (dual).
- La teoría de la dualidad nos permite llevar a cabo los análisis de sensibilidad y postoptimización que no estudiamos con anterioridad (cuando se pierde la factibilidad primal).

Relación entre los objetivos de los problemas duales

- La pequeña empresa no aceptará vender sus recursos a menos que el precio de venta sugerido por la gran empresa le garantice obtener el beneficio que puede asegurarse obtener vendiendo los derivados directamente en el mercado.

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 300u_1 + 500u_2 + 250u_3$$

- La empresa de reciclado no aceptará comprar los productos finales A, B y C a menos que el precio de compra que le propongan le garantice un coste que no exceda el coste que se puede garantizar pagar mediante el reciclado:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 \geq 100u_A + 80u_B + 60u_C$$

Relación entre los objetivos de los problemas duales

- La pequeña empresa no aceptará vender sus recursos a menos que el precio de venta sugerido por la gran empresa le garantice obtener el beneficio que puede asegurarse obtener vendiendo los derivados directamente en el mercado.

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 300u_1 + 500u_2 + 250u_3$$

- La empresa de reciclado no aceptará comprar los productos finales A, B y C a menos que el precio de compra que le propongan le garantice un coste que no exceda el coste que se puede garantizar pagar mediante el reciclado:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 \geq 100u_A + 80u_B + 60u_C$$

Relación entre los objetivos de los problemas duales (cont.)

- La empresa de fabricación de muebles no aceptará ninguna transacción de compra–venta con la compañía maderera que le suponga un coste mayor que el coste que puede garantizarse diseñando un flujo de transporte factible $\bar{\mathbf{x}}$.

$$\begin{aligned} 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23} \geq \\ -103u_1 - 197u_2 + 71v_1 + 133v_2 + 96v_3 \end{aligned}$$

Relaciones entre las soluciones de los problemas duales

Teorema fundamental de dualidad

Únicas relaciones posibles entre primal y dual:

1. Los dos problemas tienen solución óptima.
2. Un problema tiene solución no acotada y el otro no tiene solución factible.
3. Ninguno de los dos problemas tiene solución factible.

Relación entre las soluciones óptimas de los problemas duales

Teorema de las holguras complementarias

Dados dos problemas duales P_c y D_c en forma canónica, dos soluciones $\bar{\mathbf{x}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ son óptimas si, y sólo si, se verifica:

1. $\bar{\mathbf{x}}$ factible primal y $\bar{\mathbf{u}}$ factible dual
2. Ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j \bar{u}_j^h &= 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n, \\ \bar{x}_i^h \bar{u}_i &= 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

siendo x_i^h y u_j^h las variables de holgura de las restricciones i–ésima y j–ésima de los problemas primal y dual respectivamente.

Ejemplo. Aplicación teorema holguras complementarias

Dado el siguiente problema de programación lineal P:

$$\begin{aligned} \text{mín } & 2x_1 - 6x_2 - 10x_3 \\ \text{s.a } & x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & -x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Se propone como solución óptima $\mathbf{x}^t = (0, 1, 2)$.
Comprobar que en efecto lo es y obtener la solución óptima del problema dual.

Contenidos

Interfaces de modelado

Son aplicaciones que permiten escribir el modelo matemático y obtener la solución.

1. Entorno gráfico.
2. Incluyen un lenguaje algebraico:
    1. No es necesario escribir el modelo explícitamente.
    2. Incluyen las expresiones más habituales: $\forall$, $\sum$, $\cup$, $\cap$.
3. Interactuan con bases de datos y hojas de cálculo para la lectura datos y escritura de soluciones.
4. Los más extendidos: GAMS, AMPL, OPL-Studio, LINGO.
   GAMS: `www.gams.com`
   AMPL: `www.ampl.com`
   OPL-studio: `www.ibm.com`
   LINGO: `www.lindo.com`

Librerías de optimización

Son librerías habitualmente en código C ó C++ que pueden ser incorporadas a cualquier programa.

1. Es necesario conocer el lenguaje de programación para las que están desarrolladas.
2. Tienen más opciones y, por tanto, permiten un mayor control por parte del usuario.
3. Permiten interactuar con el modelo de forma dinámica: reoptimizar, fijar variables, añadir restricciones, en función de la solución obtenida, etc.
4. Los más extendidos: C-PLEX, Coin-OR, X-PRESS, LINGO.

   XPRESS: `www.dashoptimization.com`
   Cplex: `www.ibm.com`
   LINGO: `www.lindo.com`
   GUROBI: `www.gurobi.com`

Datos de entrada: fichero MPS

El MPS (Mathematical Programming System) es un formato estándar para la representación de un problema de Programación matemática.
En un fichero de texto plano se incluye en un formato determinado toda la información necesaria para la representación de un caso concreto (modelo particularizado a unos datos)
Contiene:

1. Nombre del fichero.
2. Para cada fila, etiqueta y tipo de fila (igualdad, etc.).
3. Para cada columna: etiqueta y componentes no nulas.
4. Para cada columna: cota inferior y superior.
5. Para cada fila: lado derecho (RHS).
6. Otros: problemas cuadráticos, condiciones enteras, etc.

Datos de entrada: fichero MPS

Ejemplo

$$\text{máx} 350x_A + 470x_B + 610x_C$$

$$\text{s.a } x_A + x_B \leq 120$$

$$x_C \leq 48$$

$$10x_A + 15x_B + 20x_C \leq 2000$$

$$0 \leq x_A, x_B \leq 100, \qquad 0 \leq x_C \leq 40$$

Datos de entrada: fichero MPS

Ejemplo. Formato MPS

```
NAME PECE
OBJSENSE MAX
ROWS
N BENEF
L TEST1
L TEST2
L MONTAJE
COLUMNS
XA TEST1 1.0000000
XA MONTAJE 10.0000000
XA BENEF 350.0000000
XB MONTAJE 15.0000000
XB TEST1 1.0000000
XB BENEF 470.0000000
XC BENEF 610.0000000
XC MONTAJE 20.0000000
XC TEST2 1.0000000
RHS
RHS TEST1 120.0000000
RHS TEST2 48.0000000
RHS MONTAJE 2000.0000
BOUNDS
UP BND XA 100.0000000
UP BND XB 100.0000000
UP BND XC 40.0000000
ENDATA
```

Otros recursos

La hoja de cálculo Microsoft Office Excel ofrece una herramienta que permite resolver sencillos ejemplos de reducidas dimensiones (no más unos pocas decenas de variables y restricciones).

En internet hay muchos recursos de libre distribución. El más consolidado es el proyecto NEOS:

`http://www-neos.mcs.anl.gov/`

En esta página es posible resolver gratuitamente problemas de grandes dimensiones utilizando software comercial.