Optimización Lineal Discreta

Modelos Operativos de Gestión

Ingeniería del Software, UCM.

Elisenda Molina Ferragut
elisenda.molina@ucm.es

Contenidos

Optimización Lineal Discreta

Modelos Operativos de Gestión

Ingeniería del Software, UCM.

Elisenda Molina Ferragut
elisenda.molina@ucm.es

Contenidos

Introducción

Los modelos de optimización lineal entera son una extensión de los modelos del optimización lineal continua en los que algunas variables toman valores enteros.

Con frecuencia las variables enteras sólo toman valores en 0-1, ya que este tipo de variables permiten representar condiciones lógicas.

Este tipo de modelos permite representar sistemas mucho más complejos.

A cambio, la resolución de los mismos se complica. No escala muy bien.

- Ya no se pueden explotar tan fácilmente las propiedades geométricas del modelo, auqnue es fundamental tener un modelo *fuerte*.
- Hay que explorar muchos más candidatos a óptimo.
- Existen problemas discretos con decenas de variables que son muy difíciles de resolver en un tiempo razonable.

Introducción

Formulación de un problema de optimización lineal discreto

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & x_i \text{ entera para } i \in \mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

- Si $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ $\Rightarrow$ Programación Lineal Entera Pura.
- Si $\mathcal{I} \neq \{1, \ldots, n\}$ $\Rightarrow$ Programación Lineal Entera Mixta.
- Si $x_i \in \{0, 1\}$, $\forall\ i \in \mathcal{I}$ $\Rightarrow$ Programación Binaria o 0-1.

Modelos discretos: ¿cuándo son necesarios?

Los modelos de optimizacion discreta se usan por distintas razones:

- Directo. Las variables de decisión son de naturaleza entera.
  Núumero de empleados a contratar, de puestos de trabajo, etc.
- Codificación. Variables 0-1, que sirven como herramienta para representar el cumplimento o no de algunas condiciones (seleccion de alternativas).
  Seleccionar o no a un trabajador para una determinada tarea, una ruta por la que enviar productos, etc.
- Transformación. Variables 0-1, que permiten el modelado de ciertas condiciones (implicaciones, condiciones logicas, etc.) mediante restricciones lineales (OJO!!!)
  Tareas incompatibles, necesarias, etc.

Estrategias de resolución

A diferencia de un problema de optimización lineal continua, la presencia de variables enteras hace que la región factible no sea convexa y, por tanto, no es aplicable el algoritmo del simplex.

Además, el redondeo de la solución obtenida si se relaja la condición de que las variables tomen valores enteros tampoco es una estrategia válida ni computacionalmente eficiente.

Las dos estrategias principales para la abordar la resolución de este tipo de problemas son:

1. Planos de corte.
2. Ramificación y acotación.

Reformulación y preproceso

Los modelos con variables enteras pueden resultar muy complejos de resolver.

En muchas ocasiones, hay diversas alternativas para representar la misma situación. Los Solver profesionales aplican técnicas estándar de reformulación y preproceso.

Por ejemplo, si se tienen dos variables binarias, δ_1 y δ_2, la expresión

$$2\delta_1 + 3\delta_2 \leq 4{,}5$$

impide que ambas variables tomen el valor 1 simultáneamente. Esto también se puede lograr con:

$$\delta_1 + \delta_2 \leq 1$$

¿Cuál es mejor?

Optimización Lineal Discreta

Modelos Operativos de Gestión

Ingeniería del Software, UCM.

Elisenda Molina Ferragut
elisenda.molina@ucm.es

Contenidos

Contenidos

Problema directo. Ejemplo

Una compañóna tiene que planificar el alquiler de servidores informáticos para los próximos 6 meses según las siguientes necesidades:

mes	abril	mayo	junio	julio	agosto	septiembre
Cantidad	9	5	7	9	10	5

Los costes unitarios varían en función del periodo por el que se alquilen:

Duración	1 mes	2 meses	3 meses
Coste unitario	400€	700€	900€

Se trata de obtener la planificación de alquiler de servidores informáticos que garantice que el coste sea mínimo y se cubran las necesidades.

Problema directo. Planificación alquiler servidores.

Variables de decisión:

x_{ij} = número de servidores alquilados en el mes i durante j meses, $i = 4, \ldots, 9$, $j = 1, 2, 3$.

Función objetivo: coste a minimizar

$$\begin{gathered}400(x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91}) + \\ 700(x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} + x_{92}) + \\ 900(x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} + x_{93})\end{gathered}$$

Problema directo. Planificación alquiler servidores.

Restricciones demanda: cada mes se debe satisfacer la demanda

$$\begin{aligned}
x_{41} + x_{42} + x_{43} &\geq 9 \quad (\textit{abril})\\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{42} + x_{43} &\geq 5 \quad (\textit{mayo})\\
x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{52} + x_{53} + x_{43} &\geq 7 \quad (\textit{junio})\\
x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{62} + x_{63} + x_{53} &\geq 9 \quad (\textit{julio})\\
x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{72} + x_{73} + x_{63} &\geq 10 \quad (\textit{agosto})\\
x_{91} + x_{92} + x_{93} + x_{82} + x_{83} + x_{73} &\geq 5 \quad (\textit{septiembre})
\end{aligned}$$

Restricciones integralidad : las variables toman valores en el conjunto de los enteros positivos

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \; i = 4, \ldots, 9, \; j = 1, 2, 3.$$

Problema directo. Planificación alquiler servidores.

Resolviendo con el modelo anterior con GAMS se obtiene que la planificación óptima consiste en alquilar:

- 4 servidores durante 1 mes y 5 durante 3 meses en abril,
- 2 servidores durante 3 meses en junio,
- 2 servidores durante 2 meses y 5 durante 3 meses en julio,
- 1 servidor durante un mes en agosto,

con un coste de 14200€.

Contenidos

2 Modelización.

- Modelización. Problemas directos.
- Codificación. Modelos para algunos problemas clásicos
- Transformación. Modelado de condiciones lógicas

Codificación. Modelos para problemas clásicos.

Variables 0-1, que sirven como herramienta para representar el cumplimento o no de algunas condiciones (seleccion de alternativas).

Algunos problemas clásicos que se pueden plantear como modelos lineales con variables enteras. Permiten obtener la solución óptima del mismo resolviendo un problema de PLE.

Generalmente usan variables 0-1 como herramienta para representar el cumplimento o no de algunas condiciones.

- Problema de la mochila
- Problema de asignación y asignación generalizada.
- Problemas de cubrimiento y partición (OCR: *optimización combinatoria y redes*)
- Problema del viajante (OCR)

Problema de la mochila

Se tiene una mochila de capacidad limitada a b unidades de peso en la que hay que introducir un conjunto de n objetos.

Cada objeto j tiene un peso p_j y con un valor v_j, conocidos

La mochila no tiene capacidad suficiente para todos los objetos y, por tanto, el problema consiste en decidir qué subconjunto de objetos introducimos en la mochila, de forma que su valor sea máximo.

Se puede definir una variable binaria asociada a cada objeto:

Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } j \text{ es seleccionado,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

Problema de la mochila

Función objetivo

$$\max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

Restricciones

- Límite de peso de la mochila: $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq b$
- Condición de variables binarias: $x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j = 1, \ldots, n$

Variantes: se pueden considerar más de una limitación simultáneamete (peso y volumen, por ejemplo) o la posibilidad de que haya más de una unidad de cada objeto.

En este último caso, las variables serían x_j entera con valores entre 0 y el número de unidades del objeto j.

Problema de la mochila. Ejemplo

En un camión se desean cargar mercancías de 5 tipos diferentes en cuanto a su peso, valor y volumen, según se especifica en la siguiente tabla:

Mercancía Tipo	Peso	Volumen	Valor
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

En el citado camión sólo se admite un peso máximo de 112 y un volumen máximo de 109.

¿Cuántos productos de cada tipo debe llevar para maximizar el valor de la carga?

Problema de la mochila. Ejemplo

Problema de asignación

El problema de asignación busca asignar eficientemente un conjunto de personas a un conjunto de trabajos, máquinas a tareas, coches de policía a sectores de una ciudad, vendedores a zonas, etc.

El objetivo es minimizar los costes, tiempos de desplazamiento, maximizar la efectividad, etc.

Este problema aparece frecuentemente como subproblema en otros más complejos.

Problema de asignación

Se disponen de n máquinas para realizar n tareas.

- Cada máquina realiza una única tarea.
- Cada tarea debe realizarse por una sola máquina.

Se conoce el coste de asignar la máquina i a la tarea j, c_{ij}.

El objetivo es encontrar la asignación de máquinas a tareas de mínimo coste.

Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la máquina } i \text{ se asigna a la tarea } j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Problema de asignación

Problema de asignación. Ejemplo

La responsable de un bufete de jóvenes abogados está interesada en la utilización más efectiva de sus recursos de personal buscando la forma de hacer las mejores asignaciones de abogado-cliente.

El 1 de Marzo le llegan 4 nuevos clientes.

Revisando a su personal encuentra que 4 abogadas: Ana, Belén, Carmen y Dolores.

Todas pueden ser asignados a los casos.

Cada una de ellas sólo se puede hacer cargo de un caso.

Problema de asignación. Ejemplo

Para decidir la mejor asignación, se dispone de información sobre la tasa de efectividad (de 1 a 9) obtenida sobre actuaciones anteriores de dichas abogadas, ya que no todas son igual de buenas (especialistas) en todo tipo de procesos:

	Tasa de efectividad según caso de cliente			
Abogada	divorcio (1)	fusión empresarial (2)	desfalco (3)	herencias (4)
Ana (1)	6	2	8	5
Belén (2)	9	3	5	8
Carmen (3)	4	8	3	4
Dolores (4)	6	7	6	4

Problema de asignación. Ejemplo

Problema de asignación generalizada

Es una generalización del modelo anterior. Cada abogado puede hacerse cargo de más de un cliente simultáneamente, siempre y cuando no supere su capacidad

Dado un conjunto de m máquinas y n trabajos, se debe asignar cada trabajo a una máquina.

En este caso, cada máquina puede hacer más de un trabajo, pero tiene una capacidad máxima b_j.

Si el trabajo j se realiza en la máquina i consume una cantidad a_{ij} de la capacidad de dicha máquina. Esta asignación tiene un coste de c_{ij}.

El objetivo es encontrar la asignación de coste mínimo.

Problema de asignación generalizada. Ejemplo

Un sistema de procesamiento compartido tiene 3 ordenadores diferentes (O_j, $j = 1, 2, 3$) y tiene que procesar 6 tareas (T_i $i = 1, \ldots, 6$)

Todas las tareas se pueden realizar en cualquier ordenador, pero no pueden fraccionarse (se deben completar en el ordenador en que se inician)

Los tiempos de procesamiento de cada tarea i en cada ordenador j, t_{ij}, varía según el ordenador

El tiempo disponible de cada ordenador para ejecutar las tareas está limitado

Problema de asignación generalizada. Ejemplo

	Ordenador		
Tarea	O_1	O_2	O_3
T_1	18	16	12
T_2	14	21	19
T_3	23	27	33
T_4	16	24	23
T_5	17	24	24
T_6	25	28	30
T. disp. (C_j)	47	41	46

¿A qué ordenador debemos mandar cada tarea si queremos minimizar el tiempo total de procesamiento?

Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la tarea } i \text{ se asigna al ordenador } j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

$i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, 2, 3.$

Problema de asignación generalizada. Ejemplo

Función objetivo

$$\begin{aligned} T = & 18x_{11} + 16x_{12} + 12x_{13} + 14x_{21} + 21x_{22} + 19x_{23} + \\ & + 23x_{31} + 27x_{32} + 33x_{33} + 16x_{41} + 24x_{42} + 23x_{43} + \\ & + 17x_{51} + 24x_{52} + 24x_{53} + 25x_{61} + 28x_{62} + 30x_{63} \end{aligned}$$

Restricciones

- Cada tarea se procesa en un sólo ordenador:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

- Limitación de tiempo disponible en cada ordenador:

$$\begin{aligned} 18x_{11} + 14x_{21} + 23x_{31} + 16x_{41} + 17x_{51} + 25x_{61} &\leq 47 \\ 16x_{12} + 21x_{22} + 27x_{32} + 24x_{42} + 24x_{52} + 28x_{62} &\leq 41 \\ 12x_{13} + 19x_{23} + 33x_{33} + 23x_{43} + 24x_{53} + 30x_{63} &\leq 46 \end{aligned}$$

Problema de asignación generalizada. Ejemplo

$$T = \min \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{3} t_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

$$\sum_{i=1}^{6} t_{ij} x_{ij} \leq C_j, \qquad j = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

¿Cómo cambiarías el modelo para que el tiempo de procesamiento total fuese el tiempo que tardan en completarse todas las tareas que se procesan en paralelo en los 3 ordenadores?

Problema de asignación generalizada. Ejemplo

Función objetivo

$$T = \text{máx}\{18x_{11} + 14x_{21} + 23x_{31} + 16x_{41} + 17x_{51} + 25x_{61},$$
$$16x_{12} + 21x_{22} + 27x_{32} + 24x_{42} + 24x_{52} + 28x_{62},$$
$$12x_{13} + 19x_{23} + 33x_{33} + 23x_{43} + 24x_{53} + 30x_{63}\}$$

$$T = \text{mín}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{6} t_{i1}x_{i1}, \sum_{i=1}^{6} t_{i2}x_{i2}, \sum_{i=1}^{6} t_{i3}x_{i3}\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

$$\sum_{i=1}^{6} t_{ij}x_{ij} \leq C_j, \qquad j = 1, 2, 3$$

Problema de asignación generalizada. Ejemplo

$$T = \min z$$

$$\sum_{i=1}^{6} t_{i1} x_{i1} \leq z$$

$$\sum_{i=1}^{6} t_{i2} x_{i2} \leq z$$

$$\sum_{i=1}^{6} t_{i3} x_{i3} \leq z$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

Problema de asignación generalizada. Modelo

Variables

$x_{ij} = 1$ si el trabajo j se asigna a la máquina i y 0 en otro caso.

Modelo

$$z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Problemas de cubrimiento y partición

Sea el conjunto finito de elementos, $\mathcal{I}_m = \{1, \ldots, m\}$ y una colección de subconjuntos de $\mathcal{I}_m$, $\mathcal{S}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Esta colección forma un cubrimiento de $\mathcal{I}_m$ si verifica:

$$\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{S}_j = \mathcal{I}_m.$$

Si además, verifica la siguiente propiedad:

$$\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j,$$

la colección se denomina partición.

Si a cada subconjunto $\mathcal{S}_j$ se le asigna un coste, el problema del cubrimiento (partición) consiste en encontrar el cubrimiento (la partición) de mínimo coste.

Problemas de cubrimiento. Ejemplo

El condado de Washington incluye 6 poblaciones que necesitan servicios de ambulancias para urgencias.

Las estaciones de ambulancias pueden estar ubicadas en cualquiera de las 6 poblaciones (o en todas).

Debido a la proximidad de algunas de las poblaciones, una única estación puede dar servicio a más de una comunidad.

La estación debe estar a 15 minutos de distancia de las poblaciones a las que sirve.

Problemas de cubrimiento. Ejemplo

Las distancias entre las poblaciones (en tiempo empleado en ir de una a otra) son:

	1	2	3	4	5	6	Coste
1	0	23	14	18	10	32	100
2	23	0	24	13	22	11	120
3	14	24	0	60	19	20	90
4	18	13	60	0	55	17	60
5	10	22	19	55	0	12	80
6	32	11	20	17	12	0	95

Determinar la ubicación de las estaciones que minimiza el número de estaciones de ambulancias.

Problema de Cubrimiento. Ejemplo

Para costruir el modelo de forma general:

Variables: $x_j = 1$ si se selecciona el conjunto j, si se ubica una estación en la ciudad j, $j = 1, \ldots, 6$.

Restricciones: se construye la matriz de *pertenencia*: matriz de 0's y 1's, con 6 filas (1 para cada restricción, elemento) y 6 columnas (1 para cada variable de decisión, conjunto)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la población } i \text{ puede ser atendida desde} \\ & \text{una estación de ambulancias ubicada en } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \ldots, 6.$$

Restricciones de cubrimiento:

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{1}$$

Problemas de cubrimiento. Ejemplo

	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	0	23	14	18	10	32	1	0	1	0	1	0
2	23	0	24	13	22	11	0	1	0	1	0	1
3	14	24	0	60	19	20	1	0	1	0	0	0
4	18	13	60	0	55	17	0	1	0	1	0	0
5	10	22	19	55	0	12	1	0	0	0	1	1
6	32	11	20	17	12	0	0	1	0	0	1	1

Problema de cubrimiento. Ejemplo

La solución se puede obtener mediante el siguiente modelo de optimización lineal entera:

$$\min 100x_1 + 120x_2 + 90x_3 + 60x_4 + 80x_5 + 95x_6$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_3 + x_5 \geq 1\\
&x_2 + x_4 + x_6 \geq 1\\
&x_1 + x_3 \geq 1\\
&x_2 + x_4 \geq 1\\
&x_1 + x_5 + x_6 \geq 1\\
&x_2 + x_5 + x_6 \geq 1\\
&x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Solución óptima: 1 y 2. Coste=220.

Problema de partición

En este ejemplo, la solución óptima es una partición. En general no lo es.

Aunque el modelo de Partición es similar al del Problema de recubrimiento salvo por las restricciones, que deben ser de igualdad. En la practica, este ligero cambio hace el problema mas difcil de resolver. De hecho, incluso saber si el problema de particion admite una solucion factible puede ser extremadamente difcil.

Problema del viajante

Es uno de los más famosos problemas de optimización.

Definición

Un agente tiene que recorrer n ciudades, saliendo de una ciudad y regresando a ella. Se conoce la distancia entre cada par de ciudades, d_{ij}. El problema es determinar la ruta de distancia mínima.

Las aplicaciones no se limitan al aspecto físico de determinar recorridos (construcción de circuitos electrónicos, ordenación de tareas, etc.)

Definición

Una máquina tiene que realizar un conjunto de n tareas. Cada tarea tiene un tiempo de preparación que depende de la tarea que se ha realizado inmediatamente antes. El problema consiste en determinar el orden en el que se tienen que realizar las tareas de forma que la duración de la ejecución de todas las tareas sea mínima.

Problema del viajante. Modelo 1 I

Variables

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente va de la ciudad } i \text{ a la ciudad} \\ & j \text{ en el tramo } k. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n$$

Restricciones (1/2)

- El agente debe salir de todas las ciudades:

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

- El agente debe llegar a todas las ciudades:

$$\sum_{i,k=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Problema del viajante. Modelo 1 II

Restricciones (2/2)

- Cada tramo debe unir dos ciudades;

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_{ijk} = 1 \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

- Cada tramo debe empezar donde acabó el anterior:

$$\sum_{i \neq j} x_{ijk} = \sum_{i \neq j} x_{jik+1} \qquad \forall j, k = 1, \ldots, n$$

  Nota: si $k = n$, entonces, $k + 1 = 1$. El primer sumando vale 0 si el tramo k no acaba en la ciudad j y 1 en otro caso. El segundo sumando vale 0 si el tramo $k + 1$ no empieza en la ciudad j y 0 en otro caso.

- Integralidad de las variables: $x_{ijk} \in \{0, 1\}$, $\forall i, j, k = 1, \ldots, n$

Problema del viajante. Modelo 1 III

Objetivo

$$\text{mín} \sum_{i,j,k=1}^{n} d_{ij} x_{ijk}.$$

Problema del viajante. Modelo 2

Sólo se indica qué tramos se hacen, pero no qué posición ocupa cada tramo en la ruta final.

Por ello, se elimina el subíndice k de las variables y se reduce sensiblemente el número de variables.

Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Objetivo

$$\text{mín} \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}.$$

Problema del viajante. Modelo 2

Restricciones

- El agente debe salir de todas las ciudades:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

- El agente debe llegar a todas las ciudades:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

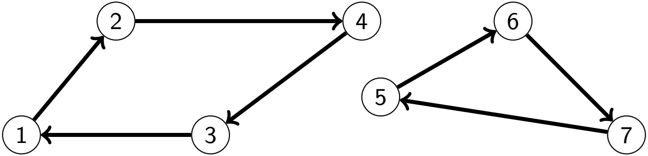
- Integralidad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Problema del viajante. Modelo 2

Las restricciones anteriores corresponden a un problema de asignación: a cada ciudad se le asigna una y sólo una ciudad para ser visitada justo antes y justo a continuación.

Esto no es suficiente y se pueden formar circuitos.



Se necesitan nuevas restricciones que eviten la formación de subciclos.

Hay que garantizar que para cualquier conjunto de nodos el número máximo de arcos incluidos en la solución sea de uno menos que el número de nodos.

Restricción de eliminación de subciclos

$$\sum_{i,j \in A} x_{ij} \leq |A| - 1 \qquad \forall A \subsetneq \{1, \ldots, n\}$$

Problema del viajante. Ejemplo

Una empresa dedicada a la producción de carrocerías tiene un único túnel de pintura para todas las carrocerías que fabrica.

En este momento, se están fabricando carrocerías negras, rojas, amarillas, azules y blancas.

Cada vez que se cambia de color, la producción debe pararse para limpiar el equipo, y evitar que las pinturas se mezclen. El tiempo necesario para esta operación depende de los colores entre los que se pretende cambiar, ya que unos son más sensibles que otros. Por esto, la empresa pinta juntos todos los coches del mismo color.

En estos momentos, debe decidir qué secuencia de colores utilizar para minimizar el tiempo total perdido en limpieza del equipo.

Por política de la empresa, debe mantenerse el mismo patrón todos los días , de manera que al final de cada día, las máquinas deben dejarse a punto para empezar al día siguiente con el primer color.

Problema del viajante. Ejemplo

En la tabla siguiente, están los tiempos de limpieza del equipo para cada transición entre colores:

de/a	negro	rojo	amarillo	azul	blanco
negro	0	3	5	2	7
rojo	1	0	4	3	5
amarillo	3	4	0	4	2
azul	1	3	4	0	5
blanco	2	2	1	2	0

¿Cómo se puede encontrar la secuencia óptima de colores?

Contenidos

Transformación. Modelado de condiciones lógicas

El uso de variables binarias permite modelizar condiciones lógicas que permiten obtener modelos muy complejos:

- Implicaciones: si se hace una actividad, se deben hacer otras o se deben impedir otras.
- Costes fijos: la realización de una actividad conlleva un gasto fijo, independientemente del nivel de actividad.
- Variables semicontinuas: si se realiza una actividad, se hace a un nivel mínimo.
- Funciones no lineales: aproximación por funciones lineales a trozos.
- Etc.

Incompatibilidades y dependencias.

Supongamos que tenemos dos variables binarias:

- x: vale 1 si la actividad A se lleva a cabo y 0 si no;
- y: vale 1 si la actividad B se lleva a cabo y 0 si no.

Imponer condiciones sobre las actividades A y B $\Leftrightarrow$ imponer condiciones sobre los valores de x e y

OJO!!! NO multiplicar variables, usamos desigualdades:

- Si la actividad B no se lleva a cabo, entonces A tampoco ($y = 0 \Rightarrow x = 0$): $x \leq y$
- Si la actividad B no se lleva a cabo, entonces A sí ($y = 0 \Rightarrow x = 1$): $x + y \geq 1$
- Si la actividad B se lleva a cabo, entonces A no ($y = 1 \Rightarrow x = 0$): $x + y \leq 1$
- Si la actividad B se lleva a cabo, entonces A también ($y = 1 \Rightarrow x = 1$): $x \geq y$

Ejemplo 1

Un entrenador de baloncesto tiene 9 jugadores, a los que ha evaluado de 1 a 3 de acuerdo con su manejo de pelota, tiro, rebote y defensa, según se indica en la tabla adjunta.

Jugador	Posición	Manejo de Pelota	Tiro	Rebote	Defensa
1	Pivot	2	1	3	3
2	Base	3	3	1	2
3	Pivot, Alero	2	3	2	2
4	Alero, Base	1	3	3	3
5	Pivot, Alero	1	3	1	2
6	Alero, Base	3	1	2	3
7	Pivot, Alero	3	2	2	1
8	Pivot	2	1	3	2
9	Alero	3	3	1	3

Ejemplo 1

El equipo debe verificar las siguientes condiciones:

- Debe tener la máxima puntuación defensiva.
- Estará compuesto por 5 jugadores.
- Por los menos dos jugadores deben estar en disposición de actuar de pivot, al menos dos de alero y por lo menos uno de base.
- Su nivel medio, tanto en el manejo de pelota, tiro y rebote debe ser no inferior a 2.
- Si juega el jugador 3, entonces el jugador 6 no puede estar en pista.
- Si el jugador 1 está en el equipo titular, también deberá estar el 5.
- El jugador 8 ó el 9, pero no los dos a la vez, deben formar parte del equipo.

Ejemplo 1

Se define una variable para cada jugador, $x_i = 1$ si el jugador i está en el equipo titular y 0 en otro caso.

- Debe tener la máxima puntuación defensiva.
- Estará compuesto por 5 jugadores.
- Por los menos dos jugadores deben estar en disposición de actuar de pivot, al menos dos de alero y por lo menos uno de base.

Ejemplo 1

- Su nivel medio, tanto en el manejo de pelota, tiro y rebote debe ser no inferior a 2.

- Si juega el jugador 3, entonces el jugador 6 no puede estar en pista.

Ejemplo 1

- Si el jugador 1 está en el equipo titular, también deberá estar el 5.
- El jugador 8 ó el 9, pero no los dos a la vez, deben formar parte del equipo.

La solución es que jueguen los jugadores 1, 2, 3, 5 y 8.

Ejemplo 1

- ¿Funciona realmente este modelo?
- ¿Se puede garantizar que el equipo está bien formado? (con suficientes aleros, pivots y bases)

Ejemplo 2 [Modeling the Supply Chain. J.F. Shapiro]

La empresa PECÉ vende ordenadores y debe hacer una planificación de la producción de la próxima semana.

La compañía produce tres tipos de ordenadores: de mesa (A), portátil normal (B) y portátil de lujo (C).

El beneficio neto por la venta un ordenador es 350, 470 y 610 euros, respectivamente.

Cada semana se venden todos los equipos que se montan.

Los ordenadores pasan un control de calidad de una hora y la empresa dispone de 120 horas para realizar los controles de los ordenadores A y B y 48 para los C.

El resto de las operaciones de montaje requieren 10, 15 y 20 horas, respectivamente y la empresa dispone de 2000 horas a la semana.

Ejemplo 2. Modelo

Modelo

$$z = \max 350x_A + 470x_B + 610x_C$$

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 120 \\ x_C &\leq 48 \\ 10x_A + 15x_B + 20x_C &\leq 2000 \\ x_A, x_B, x_C &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución

$x_A = 120$, $x_B = 0$ y $x_C = 40$, con $z = 66400$.

Ejemplo 2. Variables semicontinuas

En muchas situaciones, la decisión de realizar una actividad está condicionada a hacer un mínimo.

Se impone la restricción de que si se montan ordenadores de mesa, al menos se monten 5.

Esto se requiere del uso de variables binarias:

$$\delta_A = 1 \text{ si se montan ordenadores de tipo A y 0 en otro caso}$$

Se incluye la restricción

$$5\delta_A \leq x_A$$

Además, es necesario acotar superiormente la variable continua: 120:

$$5\delta_A \leq x_A \leq 120\delta_A$$

La variable x_A recibe el nombre de variable semicontinua.

Ejemplo 2. Variables semicontinuas

La compañía PECÉ ha estudiado con más detalle el proceso de producción de los ordenadores de mesa y ha concluido que:

- No es rentable iniciar la producción de estos ordenadores si no producen al menos 10 unidades.
- Las instalaciones actuales tienen capacidad para producir hasta 80 unidades, con un coste fijo de 1000 euros en concepto de mantenimiento.
- Puede incrementar la producción mediante el alquiler de instalaciones externas, con un coste de alquiler de 800 euros.

Ejemplo 2. Variables semicontinuas

En esta nueva situación, la empresa necesita saber no solo si producen o no ordenadores de mesa, sino que también si la producción está por encima de 80 unidades o no.

Son necesarias dos nuevas variables binarias:

$\delta_A^1 = 1$ si se montan entre 10 y 80 ordenadores de tipo A y 0 en otro caso

$\delta_A^2 = 1$ si se montan más de 80 ordenadores de tipo A y 0 en otro caso

Estas dos decisiones no pueden ser afirmativas simultáneamente, y, es decir, a lo sumo una de estas variables puede ser igual a 1:

$$\delta_A^1 + \delta_A^2 \leq 1$$

Ejemplo 2. Variables semicontinuas

Además:

- Si $\delta_A^1 = 0$ y $\delta_A^2 = 0$, entonces, no se producen ordenadores de mesa y x_A debe ser 0.
- Si $\delta_A^1 = 1$ (entonces $\delta_A^2 = 0$), x_A debe tomar valores entre 10 y 80.
- Si $\delta_A^2 = 1$ (entonces $\delta_A^1 = 0$), x_A debe tomar valores entre 80 y 120.

Para representar esta situación, se debe añadir la restricción:

$$10\delta_A^1 + 80\delta_A^2 \leq x_A \leq 80\delta_A^1 + 120\delta_A^2$$

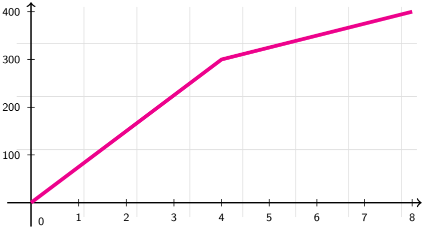
Además, hay que añadir en la función objetivo el término:

$$-1000\delta_A^1 - 1800\delta_A^2$$

(nótese que en el caso de producir entre 80 y 120 hay que computar los dos costes, 1000 de mantenimiento y 800 de alquiler)

Ejemplo 2. Economías de escala

En muchas ocasiones, aparece la economía de escala: incrementos en los precios decrecientes según aumenta la cantidad comprada.



En estos casos, con la función de costes no convexa, es necesario incluir variables 0-1, para impedir que el modelo considere los precios unitarios menores sin haber comprado la cantidad minima necesaria a precios más altos.

Ejemplo 2. Economías de escala

INTE ofrece a PECÉ la siguiente política de precios de los procesadores para los ordenadores de lujo :

- Los 30 primeros los vende a 250 euros la unidad
- Al resto les aplica un descuento del 20 % y los vende a 200 euros la unidad.

Sea v_1 y v_2 la cantidad de procesadores comprados a 250 y 200 euros, respectivamente.

La función objetivo modificada es:

$$\text{máx}\, 350x_A + 470x_B + 810x_C - 250v_1 - 200v_2$$

Hay que añadir siguientes restricciones:

$$x_C = v_1 + v_2, \qquad 0 \leq v_1 \leq 30, \qquad v_2 \geq 0$$

Ejemplo 2. Economías de escala

Este modelo no funciona bien, ya que compra a 200 euros antes que a 250 euros.

Para corregirlo hay que incluir una variable 0–1

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza la economía de escala} \\ & \text{(se montan más de 30 ordenadores portátiles de lujo)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se añaden las siguientes restricciones:

- Si $\delta = 1$, se compran 30 procesadores a 250 euros:

$$30\delta \leq v_1 \qquad\qquad (v_1 \leq 30)$$

- Si $\delta = 0$, no se pueden comprar procesadores a 200 euros:

$$v_2 \leq 18\delta$$

Ejemplo 2. Cambios de producción

La empresa PECÉ utiliza el mismo test para los ordenadores de mesa y los portátiles normales.

Compartir el mismo test supone una pérdida de 20 horas a la semana en preparación y cambios:

- Si solo se montan ordenadores de un tipo, la empresa puede hacer 120 test.
- Si se montan ordenadores de dos tipos, solo puede hacer 100 test.

El modelo actual NO es capaz de distinguir estas dos situaciones.

Para hacerlo, es necesario introducir nuevas variables binarias.

Ejemplo 2. Cambios de producción

Se definen las variables binarias:

$$\delta_A = \begin{cases} 1 & \text{si se montan ordenadores de mesa} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\delta_B = \begin{cases} 1 & \text{si se montan ordenadores portátiles normales} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y una tercera variable que recoja la información sobre si se montan ambos tipos de ordenadores

$$\delta_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{si se montan ambos tipos de ordenadores} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se añade la restricción

$$\delta_A + \delta_B \leq \delta_{AB} + 1$$

(si $\delta_{AB} = 0$, sólo una de las variables δ_A ó δ_B puede valer 1)

Ejemplo 2. Cambios de producción

Es necesario relacionar estas variables con la disponibilidad de recursos y la cantidad producida.

- Si no se montan ordenadores de algún tipo, la cantidad montada debe ser 0:

$$x_A \leq 120\delta_A \qquad\qquad x_B \leq 120\delta_B$$

- Si se montan los dos tipos de ordenadores, el tiempo disponible para los test se reduce en 20 horas:

$$x_A + x_B \leq 120 - 20\delta_{AB}$$

Ejemplo 3. Selección múltiple

Otro tipo de condición frecuente es la selección múltiple.

Una o a lo sumo una decisión de entre un grupo debe ser tomada (se extiende fácilmente al caso de k o a lo sumo k).

El transporte de ordenadores diseñado por PECÉ determinaba que la demanda (20 unidades) de Pamplona era atendida desde Madrid (4 unidades) y desde Zaragoza (16 unidades).

La empresa ha decidido que cada cliente sea atendido desde un único centro.

Esta condición requiere definir nuevas variables binarias.

Ejemplo 3. Selección múltiple. Ejemplo

Cada cliente tiene asociadas dos variables binarias:

$$\delta_i^M = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda se atiende desde Madrid} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\delta_i^Z = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda se atiene desde Zaragoza} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Puesto que sólo se puede atender desde uno de los dos sitios, es necesario incluir la restricción:

$$\delta_i^M + \delta_i^Z = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, 8$$

Ejemplo 3. Selección múltiple (cont.)

Función objetivo

$$\min(14 \cdot 22)\delta_1^M + (24 \cdot 22)\delta_1^Z + (24 \cdot 14)\delta_2^M + (15 \cdot 14)\delta_2^Z + \cdots + (30 \cdot 20)\delta_8^M + (28 \cdot 20)\delta_8^Z$$

Restricciones

- Cada cliente es atendido una y sólo una vez:

$$\delta_i^M + \delta_i^Z = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, 8$$

- La demanda atendida desde cada origen no supera las existencias:

$$\begin{aligned} 22\delta_1^M + 14\delta_2^M + 18\delta_3^M + \cdots + 20\delta_8^M &\leq 100 \\ 22\delta_1^Z + 14\delta_2^Z + 18\delta_3^Z + \cdots + 20\delta_8^Z &\leq 45 \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Selección múltiple (cont.)

- La empresa impone la condición adicional de que no se puede atender a más de tres clientes desde Zaragoza.

- La empresa exige que los clientes de Bilbao y Pamplona sean atendidos desde el mismo sitio, Madrid o Zaragoza.

Ejemplo 4

Una fábrica produce tres artículos A, B y C:

- El artículo A tiene dos secuencias de producción alternativas, s_A^1 y s_A^2.
- El artículo B sólo tiene una secuencia.
- El artículo C también se puede producir mediante dos secuencias alternativas, s_C^1 y s_C^2.

La fabrica dispone de tres máquinas, M_1, M_2 y M_3 y, dependiendo de la secuencia utilizada, cada producto requiere un tiempo de uso de estas máquinas.

	s_A^1	s_A^2	B	s_C^1	s_C^2	capacidad
M_1	2	0	2	3	2	100
M_2	0	4	7	2	1	200
M_3	6	5	1	5	9	250

Ejemplo 4

El beneficio neto es de 4, 3 y 6 euros por cada unidad vendida del producto A, B y C, respectivamente.

El objetivo de la fábrica es maximizar sus beneficios.

¿Qué cantidad de cada artículo debe ser producida por cada uno de los procesos?

Ejemplo 4 (cont.)

Variables

x_A^1, x_A^2, x_B, x_C^1 y x_C^2, cantidad a producir de cada artículo en cada una de las secuencias de producción alternativas.

Modelo

$$
\begin{array}{rllllllll}
z = \text{máx} & 4(x_A^1 + x_A^2) + 3x_B + 6(x_C^1 + x_C^2) & & & & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & \\
& 2x_A^1 & & +2x_B & +3x_C^1 & +2x_C^2 & & \leq & 100 \\
& & 4x_A^2 & +7x_B & +2x_C^1 & +x_C^2 & & \leq & 200 \\
& 6x_A^1 & +5x_A^2 & +x_B & +5x_C^1 & +9x_C^2 & & \leq & 250 \\
& x_A^1, & x_A^2, & x_B, & x_C^1, & x_C^2 & \geq 0 & &
\end{array}
$$

Solución

$x_A^1 = 0, \quad x_A^2 = 20{,}80, \quad x_B = 8{,}85, \quad x_C^1 = 27{,}43, \quad x_C^2 = 0, \; z = 274,34$

Ejemplo 4 (cont.)

Se plantean nuevas condiciones:

- Sólo puede utilizarse una secuencia por producto.
- Sólo pueden fabricarse dos productos.
- La cantidad mínima de cada producto fabricado debe ser 5.

Son necesarias cinco nuevas variables binarias para indicar si una secuencia se utiliza o no.

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si se fabrica el producto } i \text{ en la secuencia } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 4 (cont.)

El primer paso es relacionar las variables continuas con las nuevas variables binarias.

Ejemplo 4 (cont.)

Modelo

$$
\begin{array}{rl}
z = \text{máx} & 4(x_A^1 + x_A^2) + 3x_B + 6(x_C^1 + x_C^2) \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{llllllr}
2x_A^1 & & +2x_B & +3x_C^1 & +2x_C^2 & \leq & 100 \\
& 4x_A^2 & +7x_B & +2x_C^1 & +x_C^2 & \leq & 200 \\
6x_A^1 & +5x_A^2 & +x_B & +5x_C^1 & +9x_C^2 & \leq & 250 \\
x_A^1, & x_A^2, & x_B, & x_C^1, & x_C^2 & \geq 0 &
\end{array}
\end{array}
$$

Ejemplo 4 (cont.)

- Sólo puede utilizarse una secuencia por producto:

- Sólo pueden fabricarse dos productos:

- La cantidad mínima de cada producto fabricado debe ser 5.

Ejemplo 4 (cont.)