

## Modelos Operativos de Gestión.

### Optimización Lineal Continua. Modelización y resolución con GAMS.

#### Hoja 1 de problemas.

1. Una granja produce patatas y maíz con fines humanitarios. Cada kilo de patatas alimenta a 4 familias y cada kilo de maíz a 3 familias, siendo el objetivo poder alimentar a un mínimo de 2000 familias. Además, por la disposición de las tierras, debe producir un mínimo de 200 kilos de patatas y 100 kilos de maíz. Finalmente, se sabe que la producción de un kilo de patatas cuesta 3 euros y la de un kilo de maíz cuesta 2 euros, Formula un modelo que permita decidir la producción que cumple estos requisitos con el mínimo coste y encuentra la solución óptima. ¿Qué sucede si el coste del maíz es de 5 euros por kilo?
2. Un banco quiere determinar dónde invertir fondos durante el proximo año. Actualmente, dispone de 500000 euros para fondos de inversión, hipotecas, adelantos de nómina y préstamos personales. Las tasas de beneficios para cada tipo de inversión al cabo del año son: fondos de inversión, el 10%; hipotecas, el 16%; adelantos de nómina, el 13%; préstamos personales, el 20%. Para asegurar que su cartera de inversiones no es demasiado arriesgada, tiene las siguientes limitaciones:

- La cantidad invertida en préstamos personales no puede exceder la invertida en fondos de inversión.
- La cantidad invertida en hipotecas no puede ser mayor que la invertida en adelantos de nómina.

Escribe el modelo que ayude al banco a maximizar sus beneficios del próximo año.

3. La Comunidad de Madrid dispone de tres almacenes de sal para la conservación de carreteras en temporada invernal. Ante la alerta de nieve y bajas temperaturas, la sal debe ser transportada a 9 silos repartidos por la región y destinados a proteger la red de carreteras de la región. La siguiente tabla proporciona las distancias entre los almacenes y los silos (kms.), las cantidades demandadas en cada uno de los silos y la capacidad de cada almacén (miles de toneladas).

Almacenes Silos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Capacidad
1	20	40	60	25	50	60	35	55	70	9
2	55	35	15	65	40	20	70	45	40	10
3	65	60	65	35	40	35	20	15	20	6
<b>Demanda</b>	4	3	4	3	3	2	2	2	2	25

El coste de transporte por unidad de carga y por kilómetro recorrido es de 10 euros. Plantea, y resuelve con GAMS, un modelo de optimización adecuado para que se minimice el coste total de la operación.

En el óptimo, no se envía nada desde el almacén 1 al silo 3, ¿cómo cambia la solución si por motivos técnicos nos vemos forzados a mandar mil toneladas (1 unidad) de sal del almacén 1 al silo 3?, ¿y si en lugar del almacén 1 y el silo 3 se tratara del almacén 3 y el silo 5?

4. Una empresa produce tres tipos de café (A, B y C) que deben ser procesados a través de cinco departamentos. En la tabla siguiente se pueden ver las horas de trabajo necesarias para procesar una tonelada del producto en cada departamento, el beneficio neto (en euros por tonelada) y la demanda máxima (en toneladas).

Café	Demanda máxima (t)	Beneficio (€/t)	Procesamiento (h/t)				
			D1	D2	D3	D4	D5
A	400	20	0.2	0.5	0.1	0.2	0.5
B	500	18	0.1	0.1	0.3	0.2	0.6
C	200	21	0.3	0.1	0.1	0.2	0.5
Horas máximas a semana			160	100	90	110	120

- a) Asumiendo que se vende todo lo que se produce, formula un modelo que maximice el beneficio neto total.
- b) Resuelve el modelo con GAMS.

- c) ¿Cambiaría el beneficio total si el departamento 4 pudiese trabajar solo 50 horas a la semana?
5. Un agricultor tiene 500 hectáreas de terreno para cultivar próximamente y desea planificar su estrategia. Sabe que necesitará disponer de 200 toneladas de trigo y 240 toneladas de maíz para alimentar su ganado, lo cual puede hacer mediante su propia cosecha o mediante compra en el mercado. Lo que produzca y no dedique a su ganado, lo puede vender, siendo los precios de venta de 170 euros y 150 euros por tonelada de trigo y maíz, respectivamente. Los precios de compra sufren un incremento del 50 % debido a las ganancias de intermediarios y a los costes de transporte. Otro cultivo posible es el de caña de azúcar, que se vende a 36 euros la tonelada. Sin embargo, normas de la Unión Europea le imponen una cuota máxima de 6000 toneladas.

Basado en experiencias anteriores, el agricultor conoce que la producción media por hectárea exclusiva es de 2.5, 3 y 20 toneladas de trigo, maíz y caña de azúcar, respectivamente. El coste de plantar una hectárea de trigo, maíz y caña de azúcar es de 150, 230 y 260 euros, respectivamente.

- a) Plantea y resuelve con GAMS un modelo cuya solución ayude al agricultor a maximizar sus beneficios.
- b) ¿Cambia la política de producción si el beneficio de la tonelada de azúcar se reduce en 6 euros?
- c) ¿Cuánto ganaría el agricultor si, de repente, heredase 20 hectáreas cultivables más?
6. Una planta de reciclado recoge cuatro tipos de material de desechos sólidos y los trata para amalgamarlos en un producto que pueda lanzar al mercado. El tratamiento y el amalgamado son dos procesos diferentes. Se pueden obtener tres tipos diferentes de producto resultante en función de la mezcla de materiales que se utilice. En este proceso de amalgamado no se produce ninguna pérdida de peso.

Los estándares de calidad exigen que el producto tenga unas cantidades mínimas y máximas de los materiales permitidos en cada tipo de producto, expresadas como porcentajes del peso total del producto. Estas especificaciones se recogen en la Tabla 1, junto con el coste de amalgamado y el precio de venta.

La planta recoge los materiales de desecho de fuentes habituales por lo que puede mantener una tasa de producción estable. En la Tabla 2 se puede ver las cantidades disponibles semanalmente así como el coste de tratamiento. La planta es propiedad de una organización medioambiental que consigue unas donaciones de 30000 euros semanales dedicados exclusivamente a este proceso de tratamiento. Además, las directrices de la organización imponen que debe tratarse al menos la mitad de cada tipo de material.

Producto	Especificaciones	Coste de amalg. (euros/kg)	Precio de venta (euros/kg)
A	Material 1 $\leq$ 30 % Material 2 $\geq$ 40 % Material 3 $\leq$ 50 % Material 4 = 20 %	3	8.5
B	Material 1 $\leq$ 50 % Material 2 $\geq$ 10 % Material 3 = 10 %	2.5	7
C	Material 1 $\leq$ 70 %	2	5.5

Cuadro 1: Especificaciones y costes

	Material 1	Material 2	Material 3	Material 4
Disponibilidad (kg/semana)	3000	2000	4000	1000
Coste (euros/kg)	3	6	4	5

Cuadro 2: Disponibilidad y coste de tratamiento.

- a) El gerente de la planta necesita determinar qué cantidad producir de cada tipo de producto y la mezcla de materiales que llevará cada uno para maximizar la ganancia neta semanal. Plantea el modelo adecuado y encuentra la solución óptima con GAMS.

- b) ¿Cómo cambia la solución óptima si hubiese que destinar 100 kg de Material 3 a la fabricación del Producto C?
- c) ¿Resultaría rentable que la cantidad disponible de Material 3 se redujese de 4000 a 3900 kg?
- d) ¿Se podría obtener un beneficio mayor si el presupuesto fuese de 31000 euros?
- e) ¿Resultaría interesante que la cantidad disponible de Material 4 aumentase a 3500 kg?
7. Una fábrica debe determinar la cantidad (en  $kg$ ) de tres tipos de productos (A, B y C) que debe mantener en stock para llevar a cabo su producción. Los detalles sobre el beneficio (en cientos de euros) que reporta cada  $kg$  de producto utilizado, el espacio de almacenamiento que requiere (en  $m^2$  per  $kg$ ) así como la inversión necesaria (en euros por  $kg$ ) para la adquisición de material aparecen en la siguiente tabla:

Producto	A	B	C
Beneficio (cientos de euros)	80	20	50
Espacio ( $m^2$ )	7	5	6
Inversión (euros)	150	70	80

La fábrica dispone de un espacio de almacenamiento para estos productos de  $5000m^2$  y el presupuesto del que se dispone para su adquisición es de 70000 euros. Además, por cuestiones de producción se requiere que al menos el 40 % de la cantidad total (en  $kg$ ) de productos almacenados sean del producto B.

- a) Formula, y resuelve con GAMS, un modelo de optimización.
- b) ¿Cómo cambia la solución óptima si el presupuesto del que se dispone se reduce en un 1 %?
- c) ¿Se podría obtener un beneficio mayor si el espacio de almacenamiento aumenta en  $50m^2$ ?
- d) ¿Cómo cambia el stock óptimo si el beneficio de cada  $kg$  de producto B pasa a ser de 40000 euros?
8. Panificación de la producción de teclados. Una empresa de productos informáticos fabrica 5 tipos de teclados,  $TE_1, \dots, TE_5$ . Para su fabricación dispone de 3 soldadoras, 2 tornos, 3 pulidoras, 1 ensambladora y 2 limadoras. La fabricación de cada tipo de teclado consume un tiempo determinado de cada una de estas máquinas. En la siguiente tabla se recogen los tiempos necesarios para la fabricación de un teclado de cada uno de los 5 tipos, así como el beneficio asociado (en cientos de euros) a las venta de cada teclado.

Máquina	$TE_1$	$TE_2$	$TE_3$	$TE_4$	$TE_5$
Soldadora	0.3	0.4	0.5	0.2	0.35
Torno	0.02	0.03	-	0.11	0.09
Pulidora	0.5	0.6	0.4	0.43	0.3
Ensambladora	0.1	0.13	0.15	0.09	0.12
Limadora	0.02	0.1	0.04	0.05	0.06
Beneficio	3	3.7	4.2	5.1	3.9

La empresa quiere determinar el plan de producción de teclados durante los próximos meses de julio y agosto que maximice sus beneficios, teniendo en cuenta sus previsiones sobre la demanda máxima de cada tipo de teclado, la disponibilidad de sus máquinas durante esos meses y su capacidad de almacenamiento. Las previsiones de demanda máxima para dichos meses son:

Mes	$TE_1$	$TE_2$	$TE_3$	$TE_4$	$TE_5$
julio	800	2000	700	900	1300
agosto	500	1500	300	450	550

Se sabe que durante el mes de julio estará en mantenimiento 1 soldadora y 2 pulidoras durante el mes de agosto. La empresa opera durante 24 días al mes, 16 horas al día. Además, dispone de una capacidad de almacenamiento de hasta 650 teclados, y aunque en la actualidad no hay inventario, les gustaría disponer de 125 unidades de cada tipo al final de julio y de ninguna a finales de agosto.