Optimización Lineal Continua

Modelos Operativos de Gestión

Ingeniería del Software, UCM.

Elisenda Molina Ferragut
elisenda.molina@ucm.es

Contenidos

Resolución de problemas de PL (continua)

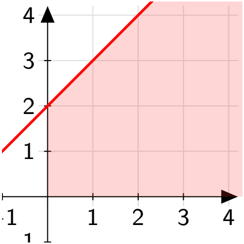
- Desde que en los años 40, Dantzig publicase el algoritmo del simplex, el desarrollo teórico y la potencia de los ordenadores permiten resolver problemas de programación de prácticamente cualquier dimensión.
- Problemas con varios millones de variables y restricciones se resuelven en unos pocos minutos.
- Clave: versiones avanzadas del algoritmo del simplex y métodos de punto interior (que aparecieron en la década de los 80).
- Se pueden encontrar muchos sitios web con aplicaciones válidas para resolver problemas sencillos de programación lineal: `http://www.phpsimplex.com/`

Contenidos

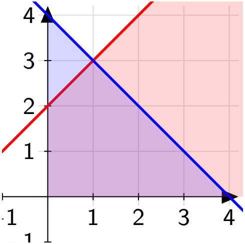
Solución gráfica: conjunto de Soluciones Factibles

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{mín} & 2x_1 & - & x_2 & , & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

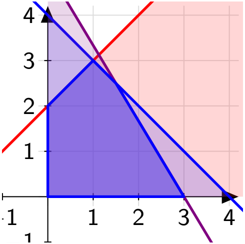
La región factible es independiente de la función objetivo.



1^a restricción y no negatividad



1^a y 2^a restricciones y no negatividad



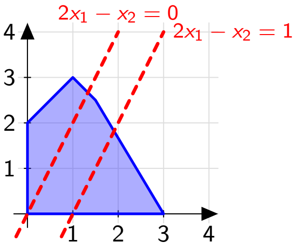
Las tres restricciones y no negatividad

Solución gráfica: solución óptima

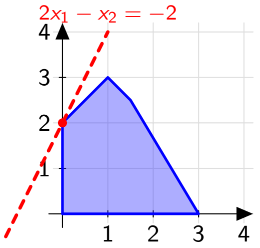
- *Región Factible:* Todos los puntos dentro de ella (incluidos los bordes) verifican las todas las restricciones y, por tanto, son posibles soluciones del problema.
- La cuestión ahora es encontrar el mejor de ellos (o los mejores) respecto de la función objetivo.
- Curvas de nivel: Hiperplanos (dim$=n-1$) $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ $(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = z)$.
- Objetivo: determinar el máximo (mínimo) valor de z tal que la recta resultante tenga algún punto en la región factible.
- Dirección de máximo crecimiento (decrecimiento): gradiente$=\mathbf{c}$ (su opuesto -$\mathbf{c}$)
- En $\mathbf{R}^2$, son rectas paralelas (perpendiculares a $\mathbf{c}$)

Solución gráfica de modelos bidimensionales

$$
\begin{aligned}
\text{mín } z = \quad & 2x_1 - x_2 \,, \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, \\
& x_1 + x_2 \leq 4, \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\
& x_1 \,, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Curvas de nivel para $z = 0, 1$

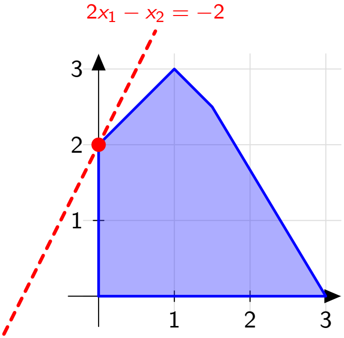


Solución óptima, $z = -2$

Tipos de solución

En este ejemplo, se trata de obtener el punto de la región factible que minimiza la función objetivo.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{mín} & 2x_1 & - & x_2 & , & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

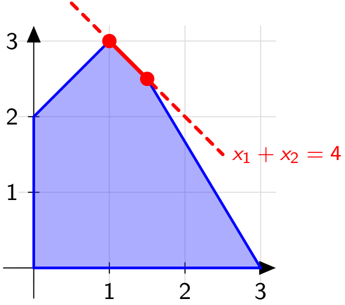


Solución única: punto $\mathbf{x}^T = (0, 2)$.

El óptimo es el único punto de la región factible que pasa por la recta $-x_1 - x_2 = -2$.

Solución gráfica de modelos bidimensionales

$$\begin{array}{rrcrcl}
\text{máx} & x_1 & + & x_2 & , & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$



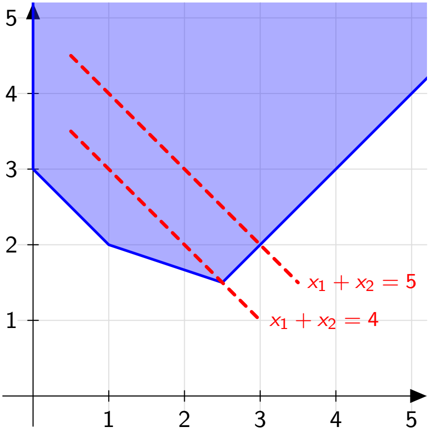
Solución múltiple

En este caso, los puntos de intersección son muchos, ya que las curvas de nivel son paralelas a una de las caras de la región factible.
Son solución todos los puntos de la forma:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \lambda \in [0,1].$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & x_1 + \ \ x_2 \\ \text{s.a} & x_1 - \ \ x_2 \leq 1, \\ & x_1 + \ \ x_2 \geq 3, \\ & x_1 + 3x_2 \geq 7, \\ & x_1 \ , \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$



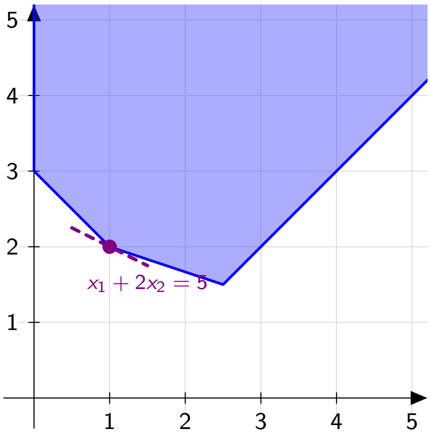
Solución no acotada

El problema no tiene solución acotada: la función objetivo puede crecer indefinidamente, sin salirnos de la región factible.

Ejemplo

$$
\begin{array}{rl}
\text{máx} & x_1 + x_2 \\
\text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1, \\
& x_1 + x_2 \geq 3, \\
& x_1 + 3x_2 \geq 7, \\
& x_1 , \quad x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

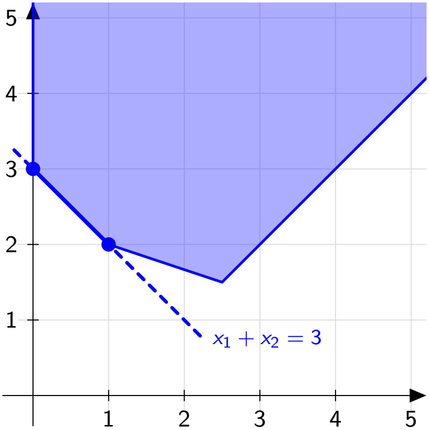
- mín $x_1 + 2x_2$: óptimo en $(2, 1)$.



Ejemplo

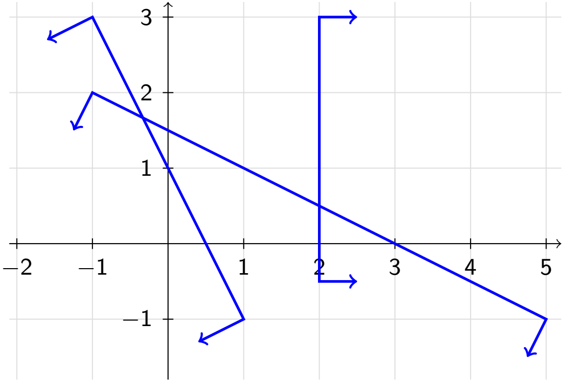
$$\begin{array}{llcl} \text{máx} & x_1 + x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 - x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 + x_2 & \geq & 3, \\ & x_1 + 3x_2 & \geq & 7, \\ & x_1 \;, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- mín $x_1 + 2x_2$: óptimo en $(2, 1)$.
- mín $x_1 + x_2$: múltiples óptimos.



Ejemplo

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{máx} & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\
 & 2x_1 + x_2 & \leq & 1, \\
 & x_1 & \geq & 2, \\
 & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$



El problema no tiene solución: la región factible está vacía.

Tipos de solución

- *Solución óptima*: si existe una solución factible que maximiza (minimiza) la función objetivo:
  - Solución óptimo única: se alcanza en un vértice (*punto extremo*)
  - Solución óptima múltiple: infinitas soluciones óptimas, se alcanza en un segmento del poliedro (en una *cara*)
- *Solución no acotada*: vértice y dirección extrema de crecimiento (decreciemiento)
- *Solución no factible*: no existe ningún punto que cumpla las restricciones $Ax = b, x \geq 0$. Problema *infactible*

Contenidos

Algoritmos de resolución

Los métodos de resolución se basan en:

- La región factible es un conjunto convexo: dados dos puntos, el segmento que los une también pertenece al convexo.
- La función objetivo es lineal y, por tanto, cóncava y convexa.

Estas dos propiedades permiten asegurar:

Cualquier óptimo local es global

Clave

Reconoce la optimalidad de un punto utilizando

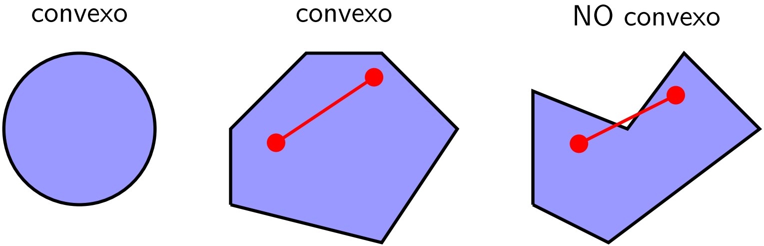
CONDICIONES DE OPTIMALIDAD LOCALES

Conjuntos convexos

Un conjunto $\mathcal{S}$ se dice que es convexo si para cada par de puntos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, los puntos de la forma $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $\lambda \in (0,1)$, también pertenecen al conjunto.

Un punto de la forma $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ con $\lambda \in (0,1)$ se denomina combinación lineal convexa de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

Gráficamente, todos los puntos del segmento que une $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son combinación lineal convexa de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.



En particular, se puede demostrar que la región factible de un problema de programación lineal es convexa. Es un poliedro

Funciones convexas

Los funciones convexas y cóncavas tienen buenas propiedades que las convierten en funciones interesantes dentro del ámbito de la optimización.

Son especialmente interesantes en el caso en que estén definidas sobre conjuntos convexos.

Por ejemplo, el mínimo local de una función convexa en un conjunto convexo es también un mínimo global.

Sea $f : \mathcal{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, con $\mathcal{S} \neq \emptyset$, convexo. f es convexa si:

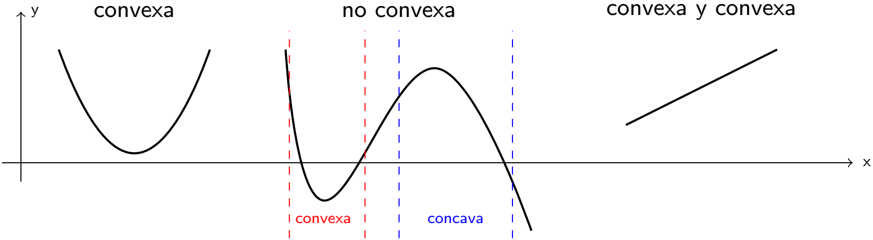
$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2), \qquad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S},\ \forall \lambda \in (0,1).$$

f es estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$.
f es cóncava si $-f$ es convexa.

Funciones convexas

Consideremos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, puntos del dominio de f y su media ponderada $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, para distintos valores de $\lambda \in (0,1)$.

Una función es convexa si el valor de f en todos los puntos $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, esto es $f\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right)$, quedan por debajo del segmento que une los puntos $[\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)]$ y $[\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)]$.

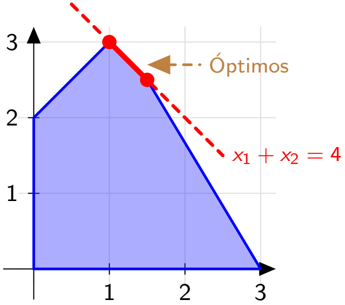


Resolución del problema

Las dos alternativas más importantes son:

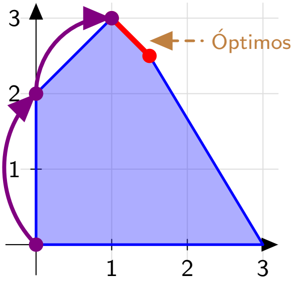
1. Algoritmo del simplex (Dantzig, 1949).
2. Métodos de punto interior (Karmarkar, 1986).

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{máx} & x_1 & + & x_2 & , & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$



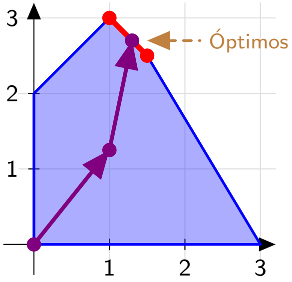
Resolución del problema

- **Simplex:** se mueve por **la frontera** de la región factible, hasta llegar a un punto óptimo.
- Se basa en el siguiente resultado:
  Si el problema de programación lineal tiene solución, entonces se alcanza al menos en ***un punto extremo***



Resolución del problema

- **Métodos de punto interior:** se mueven por **el interior** de la región factible.
- Utilizan técnicas de programación no lineal.
- Se basan en el uso de funciones *barrera* que penalizan la violación de alguna restricción.



Resolución del problema

Algoritmo del simplex	Métodos de barrera
Exponencial	Polinomial
	Rápido en problemas de grandes dimensiones
Muchas iteraciones rápidas	Muy pocas iteraciones (lentas)
Arranque en caliente muy rápido	Arranque en caliente lento

Algoritmo del simplex (Dantzig, 1949)

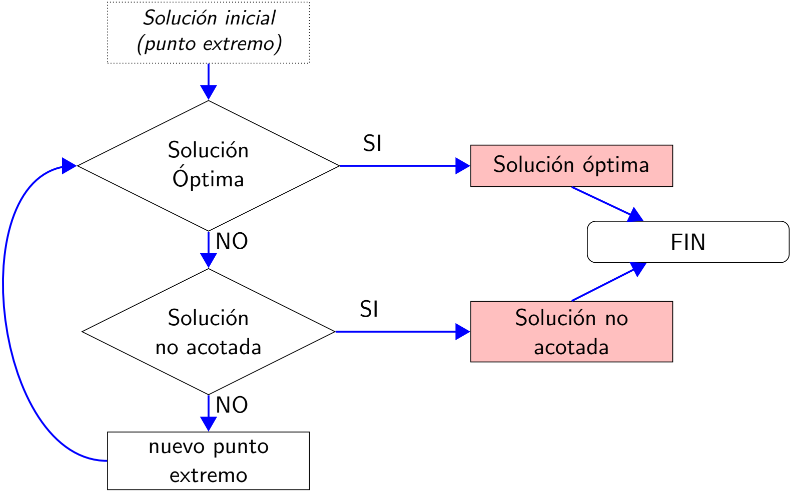
Procedimiento que permite moverse de un punto extremo a otro, mejorando cada vez (o, por lo menos, no empeorando) el objetivo.

Detecta si la región factible es vacía o si la solución óptima es no acotada.

A pesar de que han aparecido otros algoritmos, sigue siendo el más utilizado:

- Hay implementaciones muy eficientes del algoritmo.
- Proporciona mucha información sobre la estructura de la región factible.
- Si el número de variables (n) es muy superior al de restricciones (m), el número de iteraciones oscila entre $\frac{3}{2}m$ y $3m$ ($n = 60$ y $m = 20$, 30-60 iteraciones).

Algoritmo del simplex

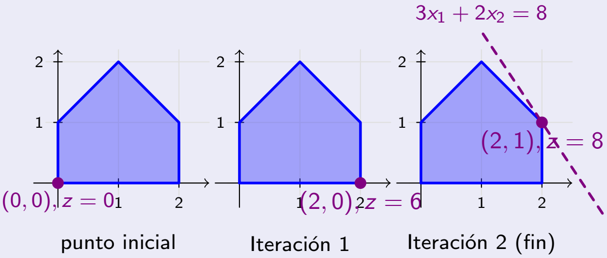


Algoritmo del simplex

- Se mueve de punto extremo a punto extremo.
- Sólo se mueve si mejora.
- Selecciona los cambios más prometedores.

Ejemplo

$$
\begin{array}{lrl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq 1, \\
& x_1 & \leq 2, \\
& x_1 + x_2 & \leq 3, \\
& x_1 \;,\; x_2 & \geq 0.
\end{array}
$$



Algoritmo del simplex

Algebráicamente, un punto extremo es una solución básica factible.

Sea el siguiente problema general con n variables y m restricciones:

$$\min z = \mathbf{c}^t \mathbf{x},$$

$$\text{s.a } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

- Se supone $m < n$. Si no, o el problema no tiene solución o hay restricciones redundantes.
- La matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es de rango completo $(rg(\mathbf{A}) = m)$.
- En otro caso, hay métodos que permiten detectar qué filas (restricciones) son redundantes y eliminarlas.
- $\mathbf{a}_j \in$: j-ésima columna de $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Algoritmo del simplex

- Se selecciona una base $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_{j1}, \ldots, \mathbf{a}_{jm})$: subconjunto de columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes.
- Reordenando:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$$

- solución básica del problema: fijando $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ y resolviendo el sistema:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \text{donde } \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

- solución básica factible (punto extremo): $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Ejemplo

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{mín} & 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & \\ \text{s.a.} & x_1 & & & - & x_3 & = 1 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = 5 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Los elementos de este problema son:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Una base de la matriz **A** es (hay otras):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Como sus columnas son linealmente independientes, siempre se puede calcular su inversa:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

La solución básica se obtiene fijando a 0 las variables de las columnas que no están en la base (x_3) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resulta:

$$\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b} \iff \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución básica es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

- x_1 y x_2 son variables básicas.
- x_3 es una variable no básica.

Ejemplo

- Hay resultados teóricos que garantizan que toda solución básica factible tiene asociada un punto extremo de la región factible y viceversa.
- Estos resultados proporcionan una forma de representar de forma analítica los vértices de la región factible.
- Además, se puede comprobar como para ir de un vértice a otro vértice contiguo es suficiente con cambiar un vector de la matriz **B** que define la solución básica asociada a cada punto extremo.

Ejemplo

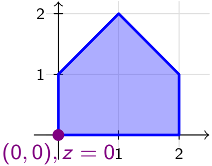
El primer paso es considerar que todas las restricciones son de igualdad. Añadir variables de holgura si es necesario:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\
 & x_1 & & & \leq & 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
\equiv
\begin{array}{llrcrcccl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & + x_3 & & & = & 1, \\
 & x_1 & & & & + x_4 & & = & 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & & & + x_5 & = & 3, \\
 & x_1 & , & x_2 & , \; x_3 & , \; x_4 & , \; x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Ejemplo

$$
\begin{array}{llcccccl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & \\
\text{s.a} & -x_1 & + & x_2 & + x_3 & & & = 1, \\
 & x_1 & & & & + x_4 & & = 2, \\
 & x_1 & + & x_2 & & & + x_5 & = 3, \\
 & x_1\,, & & x_2\,, & x_3\,, & x_4\,, & x_5 & \geq 0.
\end{array}
$$

El algoritmo del simplex encuentra la solución en dos iteraciones:

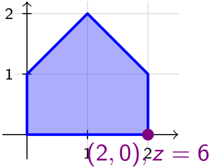


$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5

No básicas: x_1, x_2

Solución inicial

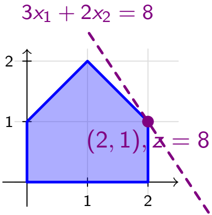


$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5

No básicas: x_4, x_2

Primera iteración



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

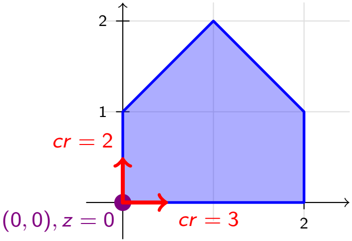
Básicas: x_3, x_1, x_2

No básicas: x_4, x_5

Segunda iteración

Algoritmo del simplex

1. Se obtiene una solución básica factible (SBF) inicial. Hay dos métodos:
   1.1. Método de las dos fases.
   1.2. Método de las penalizaciones (o de la gran M).
2. Desde la SBF actual se estudia si se puede obtener una SBF mejor
   2.1. No se estudian otras bases, sólo la dirección.
   2.2. Para cada dirección se calcula el coste reducido (cr), que indica la variación en la función objetivo al moverse en esa dirección.



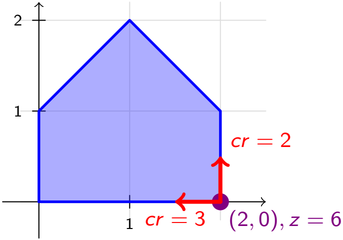
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5

No básicas: x_1, x_2

2.3. Se selecciona el mejor coste reducido.

2.4. Se avanza en la dirección asociada a ese coste reducido, hasta obtener el siguiente punto extremo.

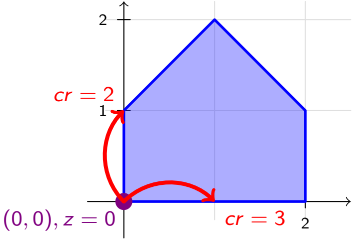


$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5

No básicas: x_4, x_2

3. Al cambiar de solución básica (punto extremo), sólo cambia un variable:
   3.1. Una variable básica pasa a no básica (de ≥ 0 a $= 0$).
   3.2. Una variable no básica pasa a básica (de $= 0$ a ≥ 0).
4. Dada una base, el coste reducido se puede asociar a la variable no básica que entra en la base al hacer un cambio (al moverse al otro punto extremo).
5. El coste reducido de la variable no básica es el valor de la función objetivo si entra en la base con valor igual a 1.



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

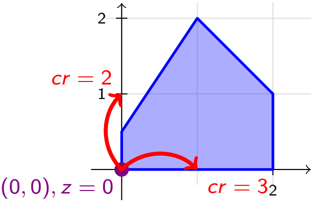
Básicas: x_3, x_4, x_5

No básicas: x_1, x_2

Algoritmo del simplex

5.1. Puede ocurrir que al fijar esa variable a 1, la solución sea infactible.

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 \quad\quad & \leq & 2, \\ & x_1 + \quad x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 \;, \quad x_2 & \geq & 0. \end{array}$$



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5

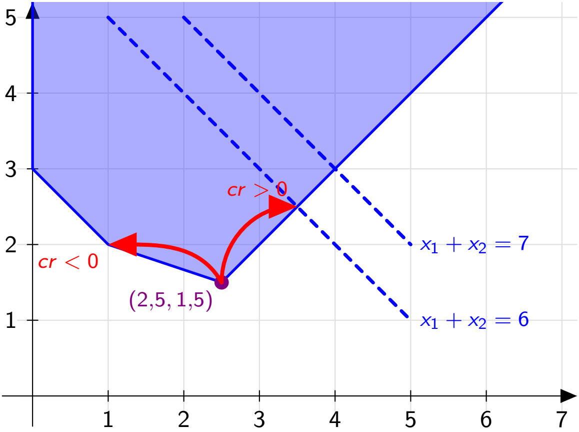
No básicas: x_1, x_2

¡El algoritmo calcula el punto exacto hasta el que puede llegar!

Algoritmo del simplex

5.2. Puede ocurrir que al avanzar en ese dirección de mejora no encuentre ningún punto.

$$
\begin{array}{rrcrl}
\text{máx} & x_1 & + & x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 & - & x_2 & \leq 1, \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq 3, \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \geq 7, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0.
\end{array}
$$



La solución es no acotada. El óptimo es $+\infty$.

Algoritmo del simplex

El algoritmo PARA cuando detecta que no hay solución, que la solución es no acotada o cuando encuentra la solución óptima.

En el último caso, una solución es óptima si el coste reducido para las variables no básicas es:

1. Positivo si el problema es de minimizar.
2. Negativo si el problema es de maximizar.

Algoritmo del simplex

Además, el software proporciona información sobre el estatus de una variable (básica o no básica).

Si cambiamos las restricciones de signo ($x \geq 0$) por restricciones de cota ($l \leq x \leq u$), hay que cambiar el algoritmo ligeramente, aunque la interpretación de los costes reducidos es similar. Además

1. Una variable básica toma un valor entre las cotas.
2. Una variable no básica puede estar a su cota inferior o a su cota superior.

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3, \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\
 & 20x_1 & + & 4x_2 & \leq & 25, \\
 & & + & 4x_2 & \leq & 5, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

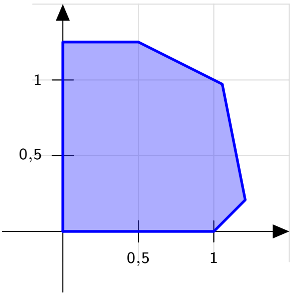
Se pueden incluir *variables de holgura* para convertir las restricciones en igualdades:

$$
\begin{array}{lrcrcccccccl}
\text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & + x_3 & & & & & & = & 3, \\
 & x_1 & - & x_2 & & + x_4 & & & & & = & 1, \\
 & 20x_1 & + & 4x_2 & & & + x_5 & & & & = & 25, \\
 & & + & 4x_2 & & & & & + x_6 & & = & 5, \\
 & x_1 & , & x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & , & x_6 & & \geq & 0.
\end{array}
$$

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$
\begin{array}{llr}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 \leq & 3, \\
& x_1 - x_2 \leq & 1, \\
& 20x_1 + 4x_2 \leq & 25, \\
& + 4x_2 \leq & 5, \\
& x_1 \, , \quad x_2 \geq & 0.
\end{array}
\quad \equiv \quad
\begin{array}{llr}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 = & 3, \\
& x_1 - x_2 + x_4 = & 1, \\
& 20x_1 + 4x_2 + x_5 = & 25, \\
& + 4x_2 + x_6 = & 5, \\
& x_1 \, , \; x_2 \, , \; x_3 \, , \; x_4 \, , \; x_5 \, , \; x_6 \geq & 0.
\end{array}
$$

Region Factible

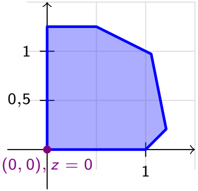


Cada vértice de la región factible (*punto extremo*) tiene asociada una solución básica.

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ & 20x_1 & + & 4x_2 & \leq & 25, \\ & & + & 4x_2 & \leq & 5, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array} \equiv \begin{array}{llcl} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3, \\ & x_1 - x_2 + x_4 & = & 1, \\ & 20x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 25, \\ & + 4x_2 + x_6 & = & 5, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0. \end{array}$$

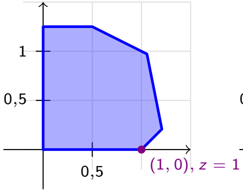
Cuatro puntos extremos / soluciones básicas



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5, x_6

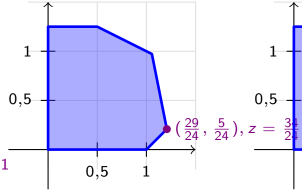
No básicas: x_1, x_2



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6

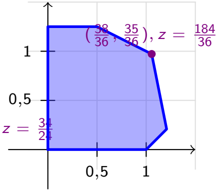
No básicas: x_4, x_2



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6

No básicas: x_4, x_2



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_4, x_1, x_5, x_6

No básicas: x_3, x_2

Algoritmo del simplex. Ejemplo

El algoritmo del simplex empezará por un vértice (*punto extremo* o *solución básica factible*).

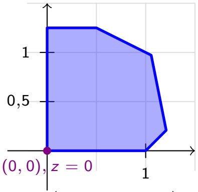
En cada iteración calculará el coste reducido de de cada variable no básica (el coste de introducir esa variable en la base con valor igual a 1).

Si hay alguna variable básica con coste reducido positivo, realiza un cambio de base (mete en la base la variable no básica con mayor coste reducido) y recalcula los costes reducidos de la nueva base.

El algoritmo termina cuando todos los costes reducidos son no positivos.

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & \le & 3, \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 1, \\ & 20x_1 & + & 4x_2 & \le & 25, \\ & & + & 4x_2 & \le & 5, \\ & x_1 & , & x_2 & \ge & 0. \end{array} \equiv \begin{array}{lrcrcccccl} \text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & & \\ \text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & + x_3 & & & & = & 3, \\ & x_1 & - & x_2 & & + x_4 & & & = & 1, \\ & 20x_1 & + & 4x_2 & & & + x_5 & & = & 25, \\ & & + & 4x_2 & & & & + x_6 & = & 5, \\ & x_1 & , & x_2 , & x_3 , & x_4 , & x_5 , & x_6 & \ge & 0. \end{array}$$



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5, x_6

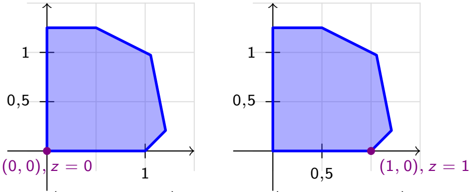
No básicas: x_1, x_2

C. red.: $cr_1 = 3$, $cr_2 = 2$

Como x_1 tiene el mayor coste reducido, entra en la base

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$\begin{array}{llcl} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1, \\ & 20x_1 + 4x_2 & \leq & 25, \\ & + 4x_2 & \leq & 5, \\ & x_1 \,,\; x_2 & \geq & 0. \end{array} \equiv \begin{array}{llcl} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3, \\ & x_1 - x_2 + x_4 & = & 1, \\ & 20x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 25, \\ & + 4x_2 + x_6 & = & 5, \\ & x_1 \,,\; x_2 \,,\; x_3 \,,\; x_4 \,,\; x_5 \,,\; x_6 & \geq & 0. \end{array}$$



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5, x_6
No básicas: x_1, x_2
C. red.: $cr_1 = 3$, $cr_2 = 2$

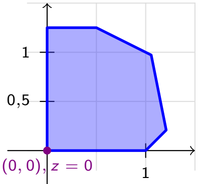
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

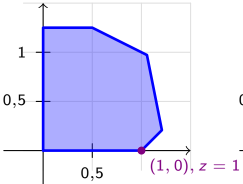
Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6
No básicas: x_4, x_2
C. red.: $cr_4 = -3$, $cr_2 = 5$

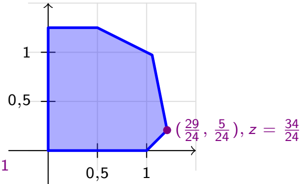
Como x_2 tiene el mayor coste reducido, entra en la base

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$\begin{array}{llcl} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1, \\ & 20x_1 + 4x_2 & \leq & 25, \\ & + 4x_2 & \leq & 5, \\ & x_1 \;,\; x_2 & \geq & 0. \end{array} \equiv \begin{array}{llcl} \text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3, \\ & x_1 - x_2 + x_4 & = & 1, \\ & 20x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 25, \\ & + 4x_2 + x_6 & = & 5, \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 & \geq & 0. \end{array}$$







$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5, x_6
No básicas: x_1, x_2
C. red.: $cr_1 = 3,\ cr_2 = 2$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6
No básicas: x_4, x_2
C. red.: $cr_4 = -3,\ cr_2 = 5$

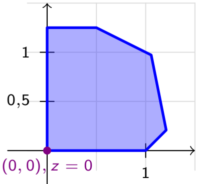
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6
No básicas: x_4, x_2
C. red.: $cr_1 = \frac{7}{6},\ cr_5 = -\frac{5}{24}$

Como x_4 tiene el mayor coste reducido, entra en la base

Algoritmo del simplex. Ejemplo

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\
 & x_1 - x_2 & \leq & 1, \\
 & 20x_1 + 4x_2 & \leq & 25, \\
 & + 4x_2 & \leq & 5, \\
 & x_1 \ , \quad x_2 & \geq & 0.
\end{array}
\equiv
\begin{array}{lrcl}
\text{máx} & 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3, \\
 & x_1 - x_2 + x_4 & = & 1, \\
 & 20x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 25, \\
 & + 4x_2 + x_6 & = & 5, \\
 & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ x_5 \ , \ x_6 & \geq & 0.
\end{array}
$$

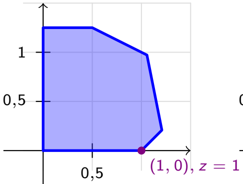


$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_4, x_5, x_6

No básicas: x_1, x_2

C. red.: $cr_1 = 3$, $cr_2 = 2$

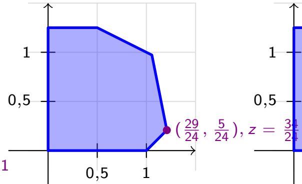


$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6

No básicas: x_4, x_2

C. red.: $cr_4 = -3$, $cr_2 = 5$

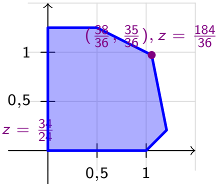


$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_3, x_1, x_5, x_6

No básicas: x_4, x_2

C. red.: $cr_1 = \frac{7}{6}$, $cr_5 = -\frac{5}{24}$



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Básicas: x_4, x_1, x_5, x_6

No básicas: x_3, x_2

C. red.: $cr_3 = \frac{-7}{6}$, $cr_5 = \frac{-1}{9}$

Como todos los costes reducidos son no positivos, la solución es óptima

Algoritmo del Simplex. Ampliación (NO entra)

- Dada una descomposición de A en base B y matriz no básica N, también hay una descomposición del vector x en coordenadas básicas x_B y coordenadas no básicas x_N
- Una solución del problema tiene que cumplir:

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \iff Bx_B + Nx_N = b$$

- Multiplicando por la izquierda por B^{-1}:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

- Notación:
  - $\bar{x}_B = B^{-1}b$
  - $y_j = B^{-1}a_j \; \forall j \in J$

Algoritmo del Simplex. Ampliación (NO entra)

- B: base formada por columnas de A
- J: índices de columnas fuera de A
- c_B^t: coordenadas básicas de c

- $\bar{x}_B = B^{-1}b$
- $y_j = B^{-1}a_j \qquad \forall j \in J$
- $z_j = c_B^t y_j \qquad \forall j \in J$
- $\bar{z} = c_B^t \bar{x}_B$

Sistema explícito

El sistema explícito es:

$$x_B = \bar{x}_B - \sum_{j \in J} y_j x_j$$

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j$$

Si **sólo** x_k entra en la base con valor 1:

$$x_B = \bar{x}_B - y_k$$

$$z = \bar{z} + (c_k - z_k)$$

Algoritmo del Simplex. Ampliación (NO entra)

Para un problema de maximización:

Criterios de entrada y de salida de la base

Criterio de entrada: entra en la base la columna a_k, siendo $k \in J$ tal que:

$$cr_k = c_k - z_k = \max\{c_j - c_j : j \in J\}$$

Criterio de salida: tras haber seleccionado la columna a_k que entra en la base, sale de ella a_ℓ, siendo $\ell \in I$ tal que:

$$\frac{\bar{x}_\ell}{y_{\ell k}} = \min\left\{\frac{\bar{x}_s}{y_{sk}} : y_{sk} > 0\right\}$$

¿Qué pasa si $y_k \leq \mathbf{0}$?