Taller: Derivada númerica resuelto

Juan José Segura Flórez
201510684

4 de septiembre de 2019

1. Problemas

1. Obtener la expresión para la segunda derivada ordinaria, teniendo en cuenta un paso adaptativo.
2. Considere la función $f(x) = e^x \cos(4x)$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
   a) Realice un programa para calcular la derivada numérica de primer orden, usando las formulas de dos, tres y cinco puntos. En éste programa usted debe asumir $h = 2\pi/N$, donde N es el número de intervalos de división. Su programa debe exportar en un archivo de texto de cinco columnas correspondientes a los siguientes datos: x_i, $f_i'^{(2)}$, $f_i'^{(3)}$, $f_i'^{(5)}$ y $f'^{(analítica)}$, donde $f_i'^{(n)}$ es el resultado obtenido con la fórmula de n puntos, y $f'^{(analitica)}$ el resultado obtenido con la expresión exacta.
   b) Ejecute su programa para los siguientes valores $N = 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000$. Para cada uno de estos valores, realice un gráfico comparando el resultado númerico con el analítico. Discuta sus resultados.
3. De la misma manera que en el literal anterior, realice un programa para calcular la derivada de segundo orden de la función del enunciado.
4. En el archivo "datos.dat"se encuentra los datos de posición como función del tiempo para un objeto moviendose a lo largo del eje x. Realice un programa que, después de leer dichos datos, le permita obtener información de la velocidad y la aceleración del objeto.

2. Solución Problema 1

Para solucionar este problema se hace uso de las expansiones de Taylor:

$$f_{i+1} = f_i + h_i f_i' + \frac{1}{2!} h_i^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^3), \tag{1}$$

$$f_{i-1} = f_i - h_{i-1} f_i' + \frac{1}{2!} h_{i-1}^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^3), \tag{2}$$

donde $h_i = x_{i+1} - x_i$ y $h_{i-1} = h_i - h_{i-1}$. Se puede multiplicar la ecuación (1) por h_{i-1} y la ecuación (2) por h_i, obteniendo:

$$h_{i-1} f_{i+1} = h_{i-1} f_i + h_{i-1} h_i f_i' + \frac{1}{2!} h_{i-1} h_i^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^4), \tag{3}$$

$$h_i f_{i-1} = h_i f_i - h_i h_{i-1} f_i' + \frac{1}{2!} h_i h_{i-1}^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^4). \tag{4}$$

Si sumamos la ecuación (3) con la ecuación (4), nos quedará una expresión que puede acomodarse de tal manera que obtengamos la segunda derivada en términos de f_i:

$$h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} = h_{i-1} f_i + h_i f_i + \frac{1}{2!} h_{i-1} h_i^2 f_i'' + \frac{1}{2!} h_i h_{i-1}^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^4),$$

de forma equivalente:

$$h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} = (h_{i-1} + h_i) f_i + \frac{1}{2} \left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right) f_i'' + \mathcal{O}(h^4),$$

seguimos reescribiendo la ecuación anterior:

$$2 \left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - (h_{i-1} + h_i) f_i \right] = \left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right) f_i'' + 2\mathcal{O}(h^4),$$

$$\frac{2 \left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - (h_{i-1} + h_i) f_i \right]}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right)} = f_i'' + \frac{2\mathcal{O}(h^4)}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right)},$$

$$f_i'' = \frac{2 \left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - (h_{i-1} + h_i) f_i \right]}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right)} - \frac{2\mathcal{O}(h^4)}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right)}.$$

En conclusión:

$$f_i'' = \frac{2 \left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - (h_{i-1} + h_i) f_i \right]}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2 \right)} + \mathcal{O}(h).$$