Taller: Derivada númerica resuelto

Juan José Segura Flórez
201510684

6 de septiembre de 2019

1. Problemas

1. Obtener la expresión para la segunda derivada ordinaria, teniendo en cuenta un paso adaptativo.
2. Considere la función $f(x) = e^x \cos(4x)$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
   a) Realice un programa para calcular la derivada numérica de primer orden, usando las formulas de dos, tres y cinco puntos. En éste programa usted debe asumir $h = 2\pi/N$, donde N es el número de intervalos de división. Su programa debe exportar en un archivo de texto de cinco columnas correspondientes a los siguientes datos: x_i, $f_i'^{(2)}$, $f_i'^{(3)}$, $f_i'^{(5)}$ y $f'^{(analítica)}$, donde $f_i'^{(n)}$ es el resultado obtenido con la fórmula de n puntos, y $f'^{(analitica)}$ el resultado obtenido con la expresión exacta.
   b) Ejecute su programa para los siguientes valores $N = 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000$. Para cada uno de estos valores, realice un gráfico comparando el resultado númerico con el analítico. Discuta sus resultados.
3. De la misma manera que en el literal anterior, realice un programa para calcular la derivada de segundo orden de la función del enunciado.
4. En el archivo "datos.dat"se encuentra los datos de posición como función del tiempo para un objeto moviendose a lo largo del eje x. Realice un programa que, después de leer dichos datos, le permita obtener información de la velocidad y la aceleración del objeto.

2. Solución Problema 1

Para solucionar este problema se hace uso de las expansiones de Taylor:

$$f_{i+1} = f_i + h_i f_i' + \frac{1}{2!} h_i^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^3), \tag{1}$$

$$f_{i-1} = f_i - h_{i-1} f_i' + \frac{1}{2!} h_{i-1}^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^3), \tag{2}$$

donde $h_i = x_{i+1} - x_i$ y $h_{i-1} = h_i - h_{i-1}$. Se puede multiplicar la ecuación (1) por h_{i-1} y la ecuación (2) por h_i, obteniendo:

$$h_{i-1} f_{i+1} = h_{i-1} f_i + h_{i-1} h_i f_i' + \frac{1}{2!} h_{i-1} h_i^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^4), \tag{3}$$

$$h_i f_{i-1} = h_i f_i - h_i h_{i-1} f_i' + \frac{1}{2!} h_i h_{i-1}^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^4). \tag{4}$$

Si sumamos la ecuación (3) con la ecuación (4), nos quedará una expresión que puede acomodarse de tal manera que obtengamos la segunda derivada en términos de f_i:

$$h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} = h_{i-1} f_i + h_i f_i + \frac{1}{2!} h_{i-1} h_i^2 f_i'' + \frac{1}{2!} h_i h_{i-1}^2 f_i'' + \mathcal{O}(h^4),$$

de forma equivalente:

$$h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} = \left(h_{i-1} + h_i\right) f_i + \frac{1}{2} \left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right) f_i'' + \mathcal{O}(h^4),$$

seguimos reescribiendo la ecuación anterior:

$$2\left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - \left(h_{i-1} + h_i\right) f_i\right] = \left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right) f_i'' + 2\mathcal{O}(h^4),$$

$$\frac{2\left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - \left(h_{i-1} + h_i\right) f_i\right]}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right)} = f_i'' + \frac{2\mathcal{O}(h^4)}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right)},$$

$$f_i'' = \frac{2\left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - \left(h_{i-1} + h_i\right) f_i\right]}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right)} - \frac{2\mathcal{O}(h^4)}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right)}.$$

En conclusión:

$$f_i'' = \frac{2\left[h_{i-1} f_{i+1} + h_i f_{i-1} - \left(h_{i-1} + h_i\right) f_i\right]}{\left(h_{i-1} h_i^2 + h_i h_{i-1}^2\right)} + \mathcal{O}(h).$$

3. Discusión de los resultados del punto 4

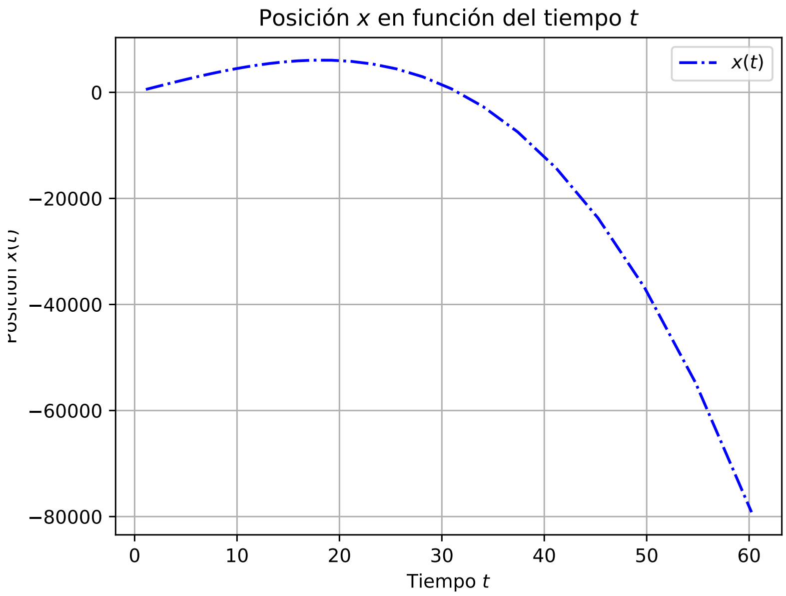

Figura 1: Gráfica de posición $x(t)$ en función del tiempo t.

Según la gráfica de posición x en función del tiempo t generada con los datos del archivo datos.dat (figura 1), se puede extraer la siguiente información:

1. el movimiento es unidimensional: esto se sabe porque solo se nos entrega una sola coordenada para especificar la posición del cuerpo que se está moviendo.

2. En el intervalo temporal (medido en segundos) $I = (1{,}0, 30{,}0]$ la coordenada espacial x aumenta. Sin embargo, en tiempos posteriores el valor de x disminuye hasta llegar a valores negativos. Como conclusión, el cuerpo movil llegará a una posición máxima en x que es positiva[1] y comenzará a retroceder.

3. Posición máxima: si se hace uso del programa generado en Python llamado punto_4.py es posible dar un intervalo espacial, en el cual, se encuentre el valor máximo en x que alcanza nuestro cuerpo móvil (posición máxima del cuerpo a la derecha del 0 del sistema coordenado). Para realizar aquello, simplemente nos fijamos en la posición en la cual la velocidad sea cercana a cero; según el programa punto_4.py esta posición se encuentra en $t = 29$ y $t = 30$, en otras palabras, $x_{máx} \in [6061{,}354021, 5850{,}714077]$.

Según la gráfica de velocidad $\dot{x}$ en función del tiempo t generada por el programa punto_4.py (figura 2), se puede extraer la siguiente información:

- la velocidad: la velocidad según la figura 2 disminuye a valores cada vez más pequeños, es decir, la velocidad disminuirá y luego crecerá de forma negativa. Como conclusión, el cuerpo móvil eventualmente irá desde la derecha hasta la izquierda. Es un caso parecido (más no similar) al de una piedra arrojada hacia el cielo con una velocidad menor a la velocidad de escape; con el tiempo su velocidad se hará cero y comenzará a caer. En nuestro caso, con el tiempo el cuerpo movil adquirirá una velocidad igual a cero y empezará a ir hacia la izquierda, con rapidez cada vez más grande.

Según la gráfica de aceleración $\ddot{x}$ en función del tiempo t generada por el programa punto_4.py (figura 3), se puede extraer la siguiente información:

- la aceleración: la aceleración es creciente, por lo tanto, la aceleración no es constante. Por esta razón el movimiento de este cuerpo móvil no es igual al de una piedra arrojada hacia el cielo; para que el caso fuese el mismo la aceleración tendría que ser constante, empero, en nuestro caso la aceleración crece negativamente de forma lineal (con pendiente negativa), de esta forma, se puede intuir que existe una fuerza ejercida sobre el cuerpo móvil, el cual, no es constante porque según la segunda ley de Newton ($F = ma$) para que $F = cte$ la aceleración a tiene que ser constante en el tiempo.

[1] De aquí en adelante si x es de valor positivo hablamos de una posición a la derecha del cero de un sistema de referencia arbitrario. En caso contrario, x negativo es una posición a la izquierda de dicho cero.

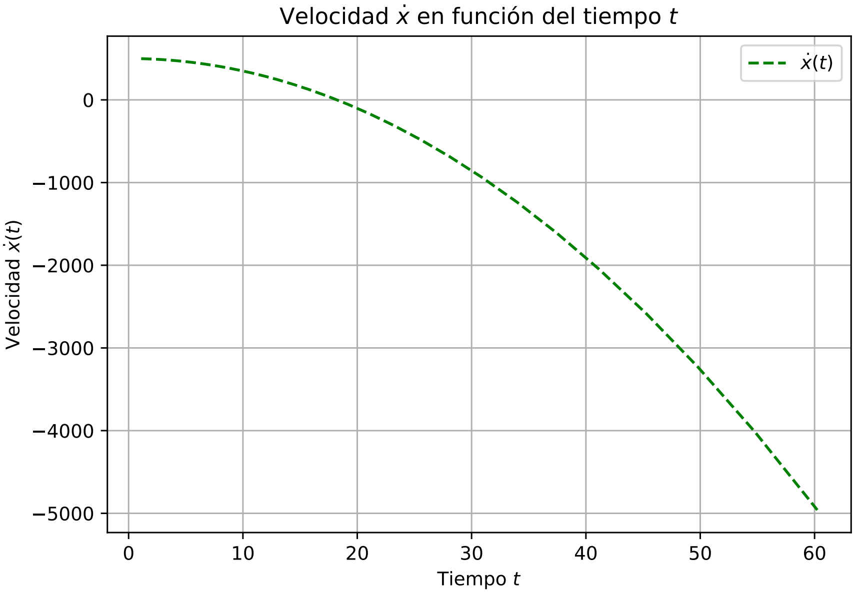

Figura 2: Gráfica de velocidad $\dot{x}$ en función del tiempo t.

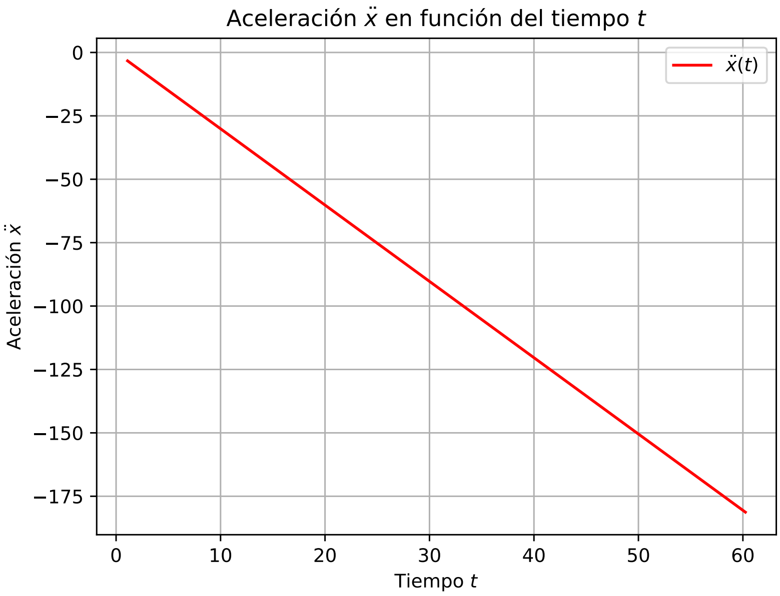

Figura 3: Gráfica de aceleración $\ddot{x}$ en función del tiempo t.