Taller: Ecuaciones diferenciales

Juan José Segura Flórez
201510684

17 de octubre de 2019

1. Problemas

1. Se está buscando la solución de una ecuación diferencial ordinaria, con valor inicial. Considere la integración con j puntos, es decir

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+j}} g(y,t)dt \tag{1}$$

Muestre que si se toma $j = 2$, la regla de Simpson lleva a

$$y_{i+2} = y_i + \frac{\tau}{3}\left(g_{i+2} + 4g_{i+1} + g_i\right) \tag{2}$$

2. Un motociclista se lanza desde una rampa con una inclinación de 42,5° respecto a la horizontal, a una rapidez de 67 m/s. El aire ejerce una fuerza de fricción $\vec{f_r} = -A\rho v\vec{v}$, la cual se opone a la dirección de movimiento. Aquí $A = 0{,}93$ m^2 es la sección transversal del motociclista y la moto, y $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 es la densidad del aire. Asumiendo que la masa combinada del motociclista y la moto es de 250 kg obtenga (y grafique) la trayectoria del motociclista.

3. Muestre que el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden está dado por

$$y(t+\tau) = y(t) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{3}$$

con

$$k_1 = \tau g(y,t)$$
$$k_2 = \tau g\left(y + \frac{k_1}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right)$$
$$k_3 = \tau g\left(y + \frac{k_2}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right)$$
$$k_4 = \tau g\left(y + k_3, t\right)$$

4. Resuelva la ecuación diferencial

$$u'' = -\frac{\pi}{4}\left(u + 1\right) \tag{4}$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera $u(0)$ y $u(1)$. Use los algoritmo RK2 y RK4, y compare la convergencia de éstos a la solución analítica.

2. Solución problema 1

Si $j = 2$ la ecuación (1) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$y_{i+2} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+2}} g(y,t)dt \tag{5}$$

Seguidamente se necesitará hacer uso de una interpolación de Lagrange de orden 2 para la función $g(y,t)$, obteniendo:

$$g(y,t) = \frac{1}{2\tau^2}\left(t - t_{i+1}\right)\left(t - t_{i+2}\right)g_i - \frac{1}{\tau^2}\left(t - t_i\right)\left(t - t_{i+2}\right) + \frac{1}{2\tau^2}\left(t - t_i\right)\left(t - t_{i+1}\right) \tag{6}$$

Donde decimos que:

- $t_{i+1} - t_i = \tau$
- $t_{i+2} - t_{i+1} = \tau$

Se tiene que integrar la ecuación (6):

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} g(y,t)dt = \frac{1}{2\tau^2} g_i \int_{t_i}^{t_{i+2}} \left(t - t_{i+1}\right)\left(t - t_{i+2}\right)dt - \frac{1}{\tau^2} g_{i+1} \int_{t_i}^{t_{i+2}} \left(t - t_i\right)\left(t - t_{i+2}\right)dt$$
$$+ \frac{1}{2\tau^2} \int_{t_i}^{t_{i+2}} \left(t - t_i\right)\left(t - t_{i+1}\right)dt \tag{7}$$

Realizando el siguiente cambio en las constantes:

1. $t_{i+2} = a$
2. $t_{i+1} = a - \tau$
3. $t_i = a - 2\tau$

Por lo tanto, las integrales (en orden de lectura de izquierda a derecha y de arriba a abajo) se reescriben como sigue (con sus resultados):

1. $\int_{a-2\tau}^{a} \left(t - (a - \tau)\right)dt = \frac{2}{3}\tau^3$
2. $\int_{a-2\tau}^{a} \left(t - (a - 2\tau)\right)\left(t - a\right)dt = -\frac{4\tau^3}{3}$
3. $\int_{a-2\tau}^{a} \left(t - (a - 2\tau)\right)\left(t - (a - \tau)\right)dt = \frac{2\tau^3}{3}$

Si reemplazamos los anteriores resultados en la ecuación (7) obtendremos:

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} g(y,t)dt = \frac{\tau}{3}\left(g_{i+2} + 4g_{i+1} + g_i\right) \tag{8}$$

Es decir, que si reemplazamos la ecuación (8) en la ecuación (5) obtendremos finalmente que:

$$y_{i+2} = y_i + \frac{\tau}{3}\left(g_{i+2} + 4g_{i+1} + g_i\right) \tag{9}$$

Q.E.D.

3. Solución problema 2

El problema nos dice que un motociclista salió disparado con una rapidez de 67 m/s desde una rampa con una inclinación de 42,5°.Sobre este sistema es fácil percatarse que las únicas dos fuerzas que actúan sobre el sistema moticiclista-moto son la fricción que ejerce el aire y la fuerza de la gravedad. Por lo tanto, por la segunda ley de Newton la ecuación de movimiento que obedece el sistema que estamos estudiando es la siguiente:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f}_r + \vec{f}_g \tag{10}$$

donde $\vec{x} = (x, y)$ es el vector posición, $\vec{f}_r = -A\rho v\vec{v}$ es vector fuerza de fricción y $\vec{f}_g = -mg\hat{y}$ es el vector fuerza de gravedad. Si se escribe la ecuación (10), por componentes se tendrá que:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -A\rho v v_x\hat{x} - (A\rho v v_y + mg)\,\hat{y} \tag{11}$$

Despejando la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo tendremos:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{A\rho v v_x}{m}\hat{x} - \left(\frac{A\rho v v_y}{m} + g\right)\hat{y} \tag{12}$$

Tambien podemos escribirlo como:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{A\rho v(\vec{v}\cdot\hat{x})}{m}\hat{x} - \left(\frac{A\rho v\,(\vec{v}\cdot\hat{y})}{m} + g\right)\hat{y} \tag{13}$$

Esto es así ya que:

$$\vec{v}\cdot\hat{x} = v_x$$
$$\vec{v}\cdot\hat{y} = v_y$$

Por lo tanto si:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

se tendrá que:

$$\vec{g} = \frac{d}{dt}\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ -\frac{A\rho v(\vec{v}\cdot\hat{x})}{m}\hat{x} - \left(\frac{A\rho v(\vec{v}\cdot\hat{y})}{m} + g\right)\hat{y} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si se hace uso del Método de Euler-Picard con la fórmula (9), la trayectoria del motociclista será (según el programa "*Euler_Picard.py*") el mostrado por la figura 1.

4. Solución problema 3

El método de Runge-Kutta de orden 4 expresa que:

$$y(t+\tau) = y(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4 \tag{14}$$

y los valores de las k's son:

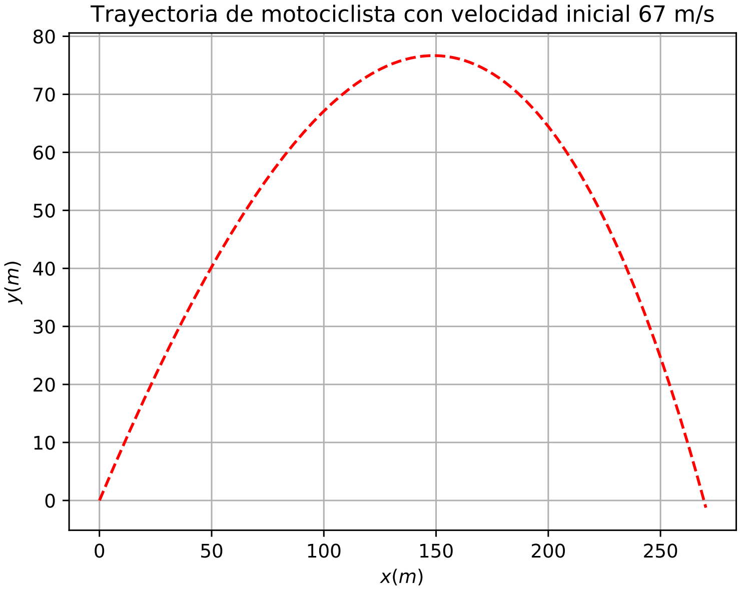

Figura 1: Trayectoria del motociclista con ángulo inicial de $\theta_0 = 42{,}5°$ y rapidez inicial de $v_0 = 67$ m/s

- $k_1 = \tau g(y,t)$
- $k_2 = \tau g\left(y + v_{21}k_1, t + v_{21}\tau\right)$
- $k_3 = \tau g\left(y + v_{31}k_1 + v_{32}k_2, t + \tau\left(v_{31} + v_{32}\right)\right)$
- $k_4 = \tau g\left(y + v_{41}k_1 + v_{42}k_2 + v_{43}k_3, t + \tau\left(v_{41} + v_{42} + v_{43}\right)\right)$

Realizando una expansión de Taylor en τ para k_2, k_3 y k_4 obtendremos:

- $k_1 = \tau g(y,t)$
- $k_2 = \tau\left(g(y,t) + v_{21}\tau \frac{d}{dt}g(y,t)\right)$
- $k_3 = \tau\left(g(y,t) + \tau\left(v_{31} + v_{32}\right)\frac{d}{dt}g(y,t)\right)$
- $k_4 = \tau\left(g(y,t) + \tau\left(v_{41} + v_{42} + v_{43}\right)\frac{d}{dt}g(y,t)\right)$

Reemplazando los valores anteriores en la ecuación (14) se tendrá:

$$y(t+\tau) = y(t) + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\right)\tau g(y,t) + \left(\alpha_2 v_{21} + \alpha_3\left(v_{31} + v_{32}\right) + \alpha_4\left(v_{41} + v_{42} + v_{43}\right)\right)\tau^2 \frac{d}{dt}g(y,t) \tag{15}$$

Si se ignora por un momento la ecuación (15) y realizamos una expansión de Taylor sobre $y(t+\tau)$, tendríamos:

$$y(t+\tau) \approx y(t) + \tau g(t) + \frac{\tau^2}{2}\frac{d}{dt}g(y,t) \tag{16}$$

donde $g(y,t) = \frac{d}{dt}y(t)$. Si se compara término a término la ecuación (16) con la ecuación (15), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_2 v_{21} + \alpha_3 \left(v_{31} + v_{32}\right) + \alpha_4 \left(v_{41} + v_{42} + v_{43}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{17}$$

Según los valores de las k's mostradas en el problema se puede hallar que:

1. $v_{21} = \frac{1}{2}$
2. $v_{31} = 0$, $v_{32} = \frac{1}{2}$
3. $v_{41} = 0$, $v_{42} = 0$ y $v_{43} = 1$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (17) se reduce a:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \\ \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{18}$$

Multiplicando la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (18) por 2 se tendrá:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \end{cases} \tag{19}$$

De la segunda ecuación del sistema (19) se puede deducir que:

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 1 - 2\alpha_4 \tag{20}$$

Reemplazando la ecuación (20) en la primera ecuación del sistema (19) se tendrá:

$$\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_4 \tag{21}$$

al tener este resultado, si reemplazamos $\alpha_1 = \alpha_4$ en la primera ecuación del sistema (19) que tanto la primera ecuación con la segunda ecuación no son linealmente independientes, de hecho, son la misma ecuación. Por lo tanto, la ecuación que tenemos que resolver es la siguiente:

$$\boxed{2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1} \tag{22}$$

Es decir, tenemos una ecuación con 3 incognitas, por lo tanto, podemos concluir que este problema tiene infinitas soluciones, lo cual nos dice que existen 2 parámetros libres. Podemos escoger:

$$\boxed{\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}} \tag{23}$$

Y de esta forma tendremos que:

1. $\alpha_1 = \frac{1}{6}$
2. $\alpha_2 = \frac{1}{3}$
3. $\alpha_3 = \frac{1}{3}$

4. $\alpha_4 = \frac{1}{6}$

Reemplazando todos los resultados encontrados hasta ahora en la ecuación (14) tendremos finalmente:

$$\boxed{y(t+\tau) = y(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)} \tag{24}$$

Q.E.D.

5. Solución problema 4

El problema de frontera que hay que resolver en este punto, es el siguiente:

$$u'' = -\frac{\pi}{4}(u+1) \tag{25}$$

donde $u(0) = 0$ y $u(1) = 1$. La solución analítica puede ser hallada con Mathematica mediante el siguiente código:

```
DSolveValue[{u''[x] == -(Pi^2/4) (u[x] + 1), u[0] == 0, u[1] == 1},
u[x], x]
```

Cuyo resultado es:

$$u(x) = -1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{26}$$

Si se hace uso del método de Runge-Kutta de orden 2, la solución númerica es mostrada en la figura 2. Si se hace uso del método de Runge-Kutta de orden 4 el resultado es mostrado en la figura 3.

En apariencia ambos resultados parecen ser el mismo, pero si se hace un zoom obtenemos las figuras 4 y 5. Finalmente, si calculamos el error debido al método de Runge-Kutta de orden 2 el resultado es $5{,}394691797443173 \times 10^{-7}$ y para el caso de método de Runge-Kutta de orden 4 el error será $6{,}765736897433891 \times 10^{-14}$. Los resultados anteriores se encuentran en el programa "*Runge_Kutta_2.py*" y '*Runge_Kutta_4.py*'"

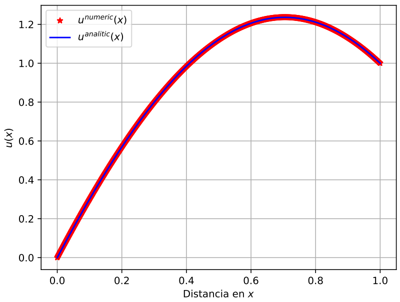

Figura 2: Resultado del problema de frontera con el método Runge-Kutta de orden 2. En azul se encuentra el resultado analítico y con estrellas rojas se encuentra el resultado númerico.

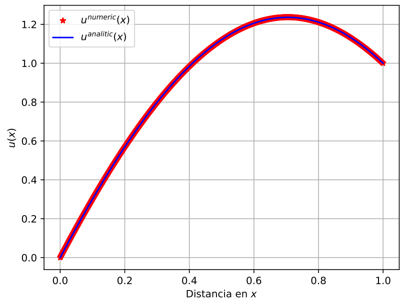

Figura 3: Resultado del problema de frontera con el método Runge-Kutta de orden 4. En azul se encuentra el resultado analítico y con estrellas rojas se encuentra el resultado númerico.

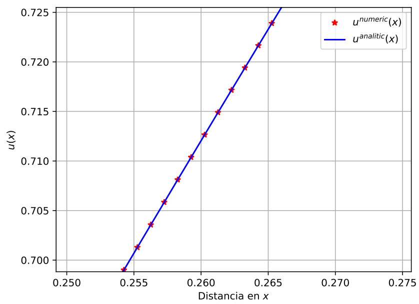

Figura 4: Resultado del problema de frontera con el método Runge-Kutta de orden 2. En azul se encuentra el resultado analítico y con estrellas rojas se encuentra el resultado númerico.

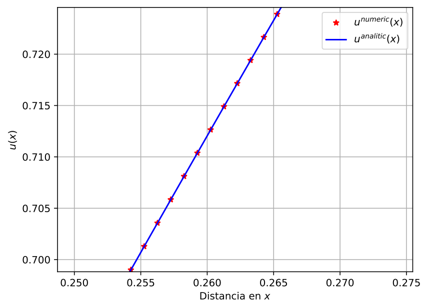

Figura 5: Resultado del problema de frontera con el método Runge-Kutta de orden 4. En azul se encuentra el resultado analítico y con estrellas rojas se encuentra el resultado númerico.