

Taller 2: Ejercicio de Procesos Estocásticos

Tópicos en Econometría

Juan Diego Moreno Sánchez

2026-02-22

Contenido

1	Ejercicio 1 – Responda, Defina y Explique	1
2	Ejercicio 2: Comparando la Tasa de Crecimiento Económico – En R	2
3	Ejercicio 3 – Uso del Operador de Rezago	6
4	Ejercicio 4 – La curva de Phillips	7
5	Ejercicio 5 – Simulación de un Proceso Ruido Blanco Gaussiano en R	10
6	Codigo Github	12

1 Ejercicio 1 – Responda, Defina y Explique

a) Teniendo en cuenta la definición de proceso estacionario. ¿Puede considerarse que un proceso ruido blanco es un proceso estacionario? Explique.

Sí, un proceso de ruido blanco se considera un proceso estacionario (específicamente en sentido amplio o *Weakly Stationary*).

Explicación: Para que un proceso $X(t)$ sea estacionario en sentido amplio, debe cumplir tres condiciones que el ruido blanco $w(t)$ satisface:

1. **Media constante:** La media es constante para todo t , $E[w(t)] = 0$.
2. **Varianza finita:** $E[w(t)^2] = \sigma^2 \neq \infty$.
3. **Autocovarianza dependiente solo del desplazamiento (τ):** La función de autocovarianza del ruido blanco es:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

Como la relación estadística entre dos puntos depende únicamente de la distancia temporal entre ellos y no del tiempo absoluto, cumple con la definición.

b) Defina la propiedad de Ergodicidad.

La **ergodicidad** es una propiedad de algunos procesos estacionarios que permite determinar las estadísticas de todo el proceso a partir de una única realización (o muestra) lo suficientemente larga.

En términos simples, un proceso es ergódico si los **promedios temporales** coinciden con los **promedios del conjunto** (esperanza matemática).

- **Ergodicidad en la media:**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = E[X(t)]$$

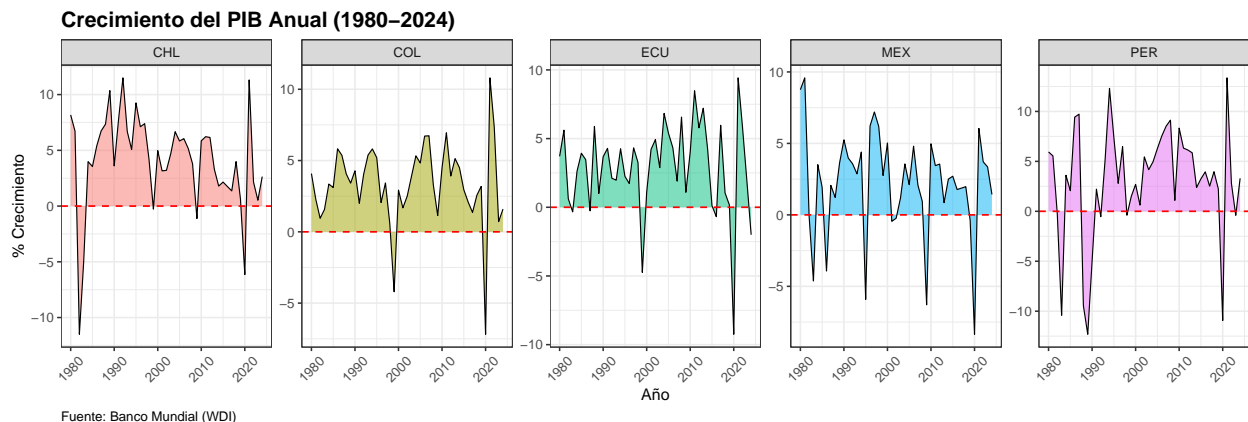
Si esta igualdad se cumple (con probabilidad 1), significa que no necesitamos observar múltiples trayectorias del proceso para conocer su comportamiento medio; basta con observar una sola trayectoria durante mucho tiempo.

2 Ejercicio 2: Comparando la Tasa de Crecimiento Económico – En R

Ingresa a la página del [Banco Mundial \(World Development Indicators\)](#), descargue la serie del **Crecimiento del PIB** (*GDP growth (annual %)*) para Chile, Colombia, Ecuador, México y Perú, para el periodo comprendido entre **1980 y 2024**, y realice lo siguiente:

2.1 a) Visualización de Series

Grafique cada serie en gráficos separados. Indique el título y la fuente de la serie.



2.2 b) Estadísticas Descriptivas Globales

Para cada país calcule las estadísticas descriptivas (**Media, Mediana, desviación estándar, Mínimo, Máximo**) y repórtelas en una tabla ordenada (con título y fuente).

Nota: Escriba un párrafo (mínimo 2 líneas) para cada país describiendo su comportamiento y apoyándose en estas estadísticas.

Table 1: Estadísticas Descriptivas del Crecimiento del PIB (1980-2024)

País	Media	Mediana	Desv. Estándar	Mínimo	Máximo
CHL	4.10	4.72	4.31	-11.50	11.50
COL	3.38	3.41	2.86	-7.19	10.80
ECU	2.91	3.46	3.34	-9.25	9.42
MEX	2.24	2.70	3.66	-8.35	9.59
PER	3.10	3.61	5.62	-12.31	13.36

Fuente: Elaboración propia con datos del Banco Mundial (WDI).

Chile presenta una media de crecimiento del PIB del 4.10%, siendo esta la mas alta entre los paises analizados, los que nos indica que el pais tiene una de las mejores sendas de crecimiento económico de la región.

Colombia tiene un crecimiento promedio del 3.38%, siendo esta la segunda mas alta de la región analizada, y una desviación estándar del 2.68%, los que nos indica qye el país ha tenido un crecimiento relativamente estable en comparación con los demás países.

Ecuador tiene un crecimiento promedio del 2.91%, siendo esta la cuarta mas alta de la región analizada, lo que nos indica que el país ha tenido un crecimiento mas moderado en comparación con los demás países.

Mexico tiene un crecimiento promedio del 2.24%, siendo este el mas bajo entre los paises analizados, esto posiblemente debido a las crisis económicas y sociales que ha enfrentado el país en las últimas décadas, lo que ha afectado su crecimiento económico.

Peru tiene un crecimiento promedio del 3.10%, siendo esta la tercera mas alta de la región analizada, lo que nos indica que el país ha tenido un crecimiento relativamente bueno en comparación con los demás países, aunque no tan alto como Chile y Colombia, esto a pesar de sus inestabilidades políticas y sociales de las ultimas decadas.

2.3 c) Análisis por Periodos

Calcule las estadísticas descriptivas (las mismas del literal b) para cada serie desglosada por los siguientes periodos:

- 1980 - 1989
- 1990 - 1999
- 2000 - 2009
- 2010 - 2024

Reporte los resultados en una tabla ordenada (con título y fuente). Escriba un párrafo para cada país comparando los cuatro periodos y apoyándose en las estadísticas.

Table 2: Comparativa Histórica de Crecimiento del PIB por Periodos

País	Periodo	Media (%)	Mediana (%)	Desv. Est.	Mínimo	Máximo
CHL	1980 - 1989	3.58	6.06	6.70	-11.50	10.36
CHL	1990 - 1999	6.23	6.90	3.27	-0.27	11.50
CHL	2000 - 2009	4.25	4.85	2.22	-1.12	6.67
CHL	2010 - 2024	2.91	2.15	3.79	-6.14	11.31
COL	1980 - 1989	3.40	3.38	1.54	0.95	5.82
COL	1990 - 1999	2.86	3.74	3.00	-4.20	5.81
COL	2000 - 2009	3.91	3.60	1.96	1.14	6.74
COL	2010 - 2024	3.36	3.19	3.94	-7.19	10.80
ECU	1980 - 1989	2.63	3.05	2.28	-0.34	5.89
ECU	1990 - 1999	2.32	2.76	2.68	-4.74	4.33
ECU	2000 - 2009	3.92	4.27	2.11	1.09	6.83
ECU	2010 - 2024	2.83	4.03	4.82	-9.25	9.42
MEX	1980 - 1989	2.21	1.99	4.61	-4.62	9.59
MEX	1990 - 1999	3.65	4.19	3.68	-5.91	7.20
MEX	2000 - 2009	1.27	1.63	3.26	-6.30	5.03
MEX	2010 - 2024	1.96	2.50	3.27	-8.35	6.05
PER	1980 - 1989	0.39	2.83	8.26	-12.31	9.73
PER	1990 - 1999	3.20	2.51	4.87	-4.98	12.31
PER	2000 - 2009	5.04	5.21	2.95	0.62	9.13
PER	2010 - 2024	3.54	3.30	5.14	-10.93	13.36

Fuente: Elaboración propia con datos del Banco Mundial (WDI).

En el caso chileno se puede observar como el periodo Pos-dictadura (1990 en adelante) fue el periodo con el mayor crecimiento económico del país, mostrando una media del 6.23% en el periodo 1990-1999, y una media del 5.09% en el periodo 2000-2009, lo que nos indica que el país tuvo un crecimiento económico muy fuerte en las décadas posteriores a la dictadura, esto posiblemente a la democratización del sistema político.

Colombia tuvo un crecimiento económico más estable en el periodo 2000-2009, con una media del 3.91%, lo que nos indica que el país tuvo un crecimiento económico relativamente bueno en esa década, esto posiblemente a la estabilización política y económica del país después de los violentos años 90.

En el caso de Ecuador, el periodo 2000-2009 fue el periodo con el mayor crecimiento económico del país, mostrando una media del 3.92%, lo que nos indica que el país tuvo un crecimiento económico relativamente bueno en esa década, esto posiblemente a la estabilización política y económica del país después de los violentos años 90.

En el caso de México fue al contrario, los periodos de violencia y inestabilidad política debido a la política de guerra contra el narcotráfico en los años 2000-2009, y la crisis económica de 2008-2009, fueron los periodos con el menor crecimiento económico del país, mostrando una media del 1.22% en el periodo 2000-2009, lo que nos indica que el país tuvo un crecimiento económico relativamente bajo en esa década.

Para el caso de Perú, el periodo 2000-2009 fue el periodo con el mayor crecimiento económico del país, mostrando una media del 5.04%, lo que nos indica que el país tuvo un crecimiento económico relativamente bueno en esa década, esto posiblemente a la estabilización política y económica del país después de los violentos años 90, y a pesar de las inestabilidades políticas y sociales de las últimas décadas, además su crecimiento se desacelera para la siguiente década, esto posiblemente a la inestabilidad política del país.

2.4 d) Estacionariedad

¿Qué puede decir, al menos visualmente, acerca de la **estacionariedad** de la tasa de crecimiento de la economía de cada país?

Visualmente los países presentan una tendencia estacionaria en ciertos casos, como la década de 2000-2009, posiblemente a la bonanza de las materias primas que se vivió en dicho años, pero también presentan periodos de alta volatilidad, como la década de 1990-1999, posiblemente a las crisis económicas y sociales que se vivieron en la región durante esos años.

3 Ejercicio 3 – Uso del Operador de Rezago

El modelo Cobweb (*Teorema de la Telaraña*) se desarrolló inicialmente para explicar la volatilidad en los precios agrícolas, a partir de un modelo de oferta y demanda estático. Considere una formulación alternativa de este modelo llamado *expectativas adaptativas*. Sea el precio esperado en t (denotado por p_t^*) un promedio ponderado del precio en $t - 1$ y el precio esperado del periodo anterior:

$$p_t^* = \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha)p_{t-1}^* \quad (1)$$

Claramente, cuando $\alpha = 1$, los esquemas de expectativas estáticas y adaptativas son equivalentes. Una característica interesante de este modelo es que puede verse como una ecuación de diferencias que expresa el precio esperado en función de su propio valor rezagado y la variable p_{t-1} .

- Utilice el operador de rezago para encontrar la solución. (*Pista: no elimine el operador de rezago durante el procedimiento*)
- Verifique la respuesta sustituyendo su resultado en la ecuación original.

3.1 a) Uso del operador de rezago para encontrar la solución

Partimos de la ecuación de expectativas adaptativas dada:

$$p_t^* = \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha)p_{t-1}^* \quad (1)$$

Aplicando el operador de rezago L , donde $Ly_t = y_{t-1}$, podemos reescribir la ecuación como:

$$p_t^* = \alpha Lp_t + (1 - \alpha)Lp_t^*$$

Agrupamos los términos que contienen p_t^* en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} p_t^* - (1 - \alpha)Lp_t^* &= \alpha Lp_t \\ [1 - (1 - \alpha)L]p_t^* &= \alpha Lp_t \end{aligned}$$

Despejando el precio esperado p_t^* :

$$p_t^* = \frac{\alpha L}{1 - (1 - \alpha)L} p_t$$

Utilizando la propiedad de la serie geométrica para el operador inverso $\frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i$, donde $z = (1 - \alpha)L$:

$$\begin{aligned} p_t^* &= \alpha L \left[\sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i L^i \right] p_t \\ p_t^* &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i L^{i+1} p_t \end{aligned}$$

Expandiendo la sumatoria, obtenemos la solución en términos de los precios pasados:

$$p_t^* = \alpha p_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)p_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 p_{t-3} + \dots$$

3.2 b) Verificación de la respuesta

Para verificar, sustituimos el resultado obtenido para p_t^* y su rezago p_{t-1}^* en la ecuación original (1).

Sabemos que:

$$p_{t-1}^* = \alpha p_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)p_{t-3} + \alpha(1 - \alpha)^2 p_{t-4} + \dots$$

Sustituimos en el lado derecho de la ecuación original $p_t^* = \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha)p_{t-1}^*$:

$$p_t^* = \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha)[\alpha p_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)p_{t-3} + \alpha(1 - \alpha)^2 p_{t-4} + \dots]$$

Distribuyendo $(1 - \alpha)$:

$$p_t^* = \alpha p_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)p_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 p_{t-3} + \alpha(1 - \alpha)^3 p_{t-4} + \dots$$

Como se puede observar, la expresión resultante es exactamente igual a la solución encontrada en el inciso a), por lo que la solución es correcta.

4 Ejercicio 4 – La curva de Phillips

Desde la publicación del artículo de Phillips se efectuó una muy extensa investigación sobre la curva de Phillips tanto en el nivel teórico como en el empírico. La curva de Phillips establece una relación entre la inflación y el desempleo, que puede ser formulada de la siguiente manera:

$$\pi_t = \theta \pi_{t-1} + (\mu + z) + \alpha u_t \quad (2)$$

En su versión inicial propuesta por Phillips, se toma $\theta = 0$, por lo tanto,

$$\pi_t = (\mu + z) + \alpha u_t \quad (3)$$

Posteriormente, Samuelson y Solow establecen una relación llamada la curva de Phillips modificada, donde $\theta = 1$

$$\pi_t = \pi_{t-1} + (\mu + z) + \alpha u_t \quad (4)$$

La cual establece que la relación de Phillips se da entre la variación de la tasa de inflación y la tasa de desempleo. Por lo tanto, se puede representar como:

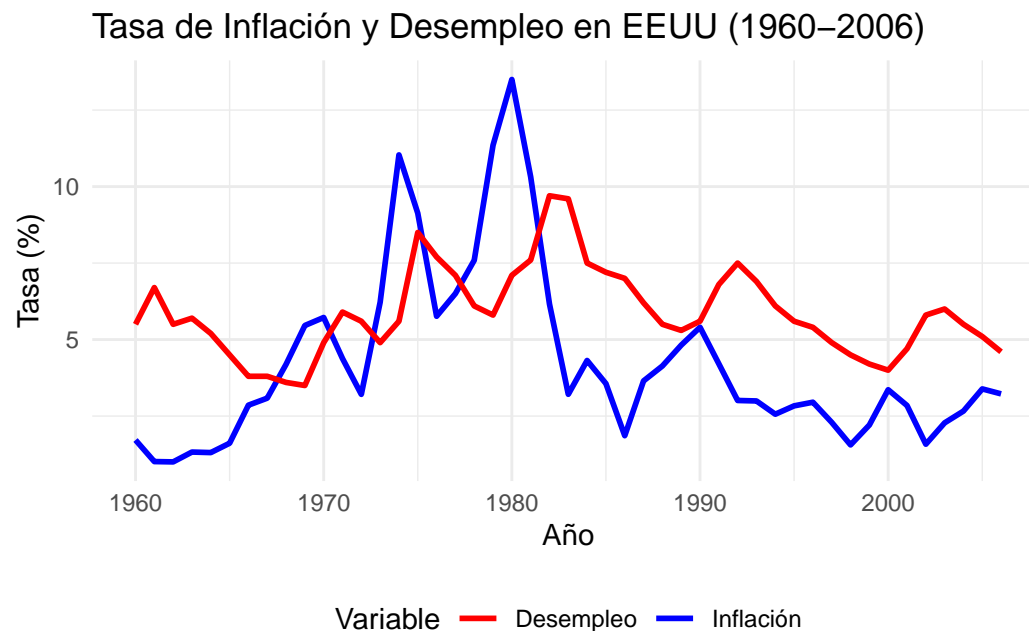
$$\pi_t - \pi_{t-1} = (\mu + z) + \alpha u_t \quad (5)$$

Recordemos que los términos μ y z representan el margen sobre los precios y los demás factores que afectan a la fijación de los salarios, respectivamente.

El archivo "curva_phillips.xlsx" contiene información de la tasa de inflación y la tasa de desempleo de Estados Unidos, para el periodo 1960 a 2006.

- Grafique las series de tiempo y comente las relaciones que se observan.
- Estime la curva de Phillips modificada y presente los resultados en una Tabla ordenada.
- Interprete los coeficientes estimados y su significancia estadística.
- Calcule el valor de la tasa natural de desempleo. Recuerde que *la tasa natural de desempleo es la tasa de desempleo necesaria para mantener constante la tasa de inflación*.
- Determine si existe algún problema econométrico, presente el resultado de una prueba de Heteroscedasticidad, Autocorrelación y Normalidad, explicando el resultado.

4.1 a) Gráfica de las series de tiempo



La relación que se observa no es probablemente no se lineal pero si proporcional con algo de retraso, además se puede observar momentos como el 1974 y 1980 donde aumentan en una forma simultanea la tasa de inflación y desempleo, lo que se conoce como estanflación, esto posiblemente debido a las crisis económicas y sociales que se vivieron en esos años.

4.2 b) Estimación de la Curva de Phillips

Table 3: Tabla 1: Resultados Curva de Phillips

	(1)
(Intercept)	3.784*** (0.903)
unem	-0.638*** (0.149)
Num.Obs.	46
R2	0.294
• p < 0.1, * p < 0.05, ** p < 0.01, *** p < 0.001	

Aca podemos observar que el coeficiente de la variable desempleo es negativo y estadísticamente significativo, lo que indica que un aumento en la tasa de desempleo está asociado con un disminución en la tasa de inflación, lo que es consistente con la teoría de la curva de Phillips.

4.3 c) Interpretación de los coeficientes

El coeficiente de la variable desempleo (unem) es de -0.638. Esto significa que por cada punto porcentual de aumento en la tasa de desempleo, la tasa de inflación disminuye en aproximadamente 0.638 puntos porcentuales, manteniendo constante el resto de las variables.

4.4 d) Cálculo de la tasa natural de desempleo

Para calcular la NAIRU (Natural Rate of Unemployment), podemos usar la fórmula derivada de la curva de Phillips modificada:

$$NAIRU = -\frac{\mu + z}{\alpha}$$

En este caso, $\mu + z$ es el intercepto del modelo, que es 3.784, y α es el coeficiente de desempleo, que es -0.638. Por lo tanto:

$$NAIRU = -\frac{3.784}{-0.638} \approx 5.93\%$$

Esto nos muestra que el desempleo “Natural” para Estados Unidos es de aproximadamente de 5.93%, lo que significa que si la tasa de desempleo se mantiene en ese nivel, la tasa de inflación se mantendrá constante.

4.5 e) Pruebas de problemas econométricos

Table 4: Diagnósticos del Modelo

Prueba	Estadístico	P-Valor	Decision
Durbin-Watson (Autocorr)	1.4771	0.0262	Rechaza H0
Breusch-Godfrey (Autocorr)	3.1352	0.0766	No rechaza H0
Breusch-Pagan (Hetero)	0.5599	0.4543	No rechaza H0
White (Hetero)	1.6661	0.4347	No rechaza H0
Jarque-Bera (Normalidad)	17.1812	0.0002	Rechaza H0

Podemos ver como el modelo que estabamos estimando presenta problemas de autocorrelación, como se ve en la prueba de Durbin-Watson, pero no se observa en la prueba de Breusch-Godfrey, lo que podría indicar que el problema de autocorrelación no es tan grave. Además, se observa un problema de heteroscedasticidad, como se ve en la prueba de Breusch-Pagan y White, lo que indica que los errores no tienen varianza constante. Finalmente, la prueba de Jarque-Bera indica que los residuos si siguen una distribución normal.

5 Ejercicio 5 – Simulación de un Proceso Ruido Blanco Gaussiano en R

Utilizando R simule los siguientes procesos (media, varianza)

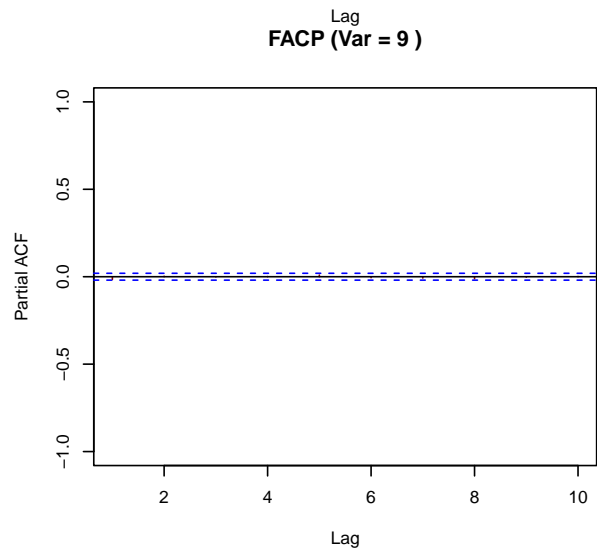
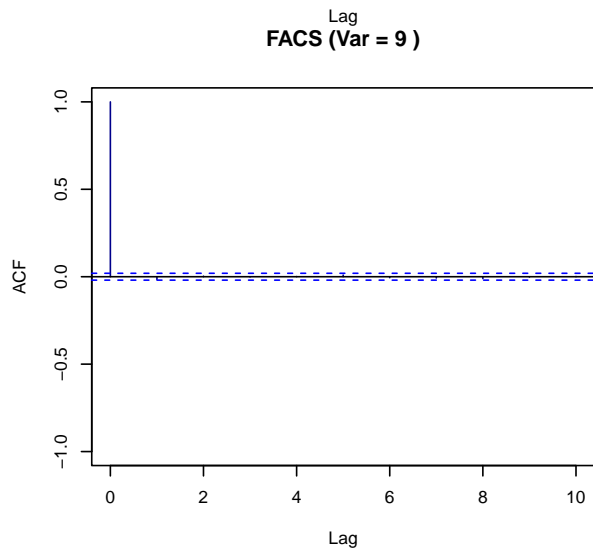
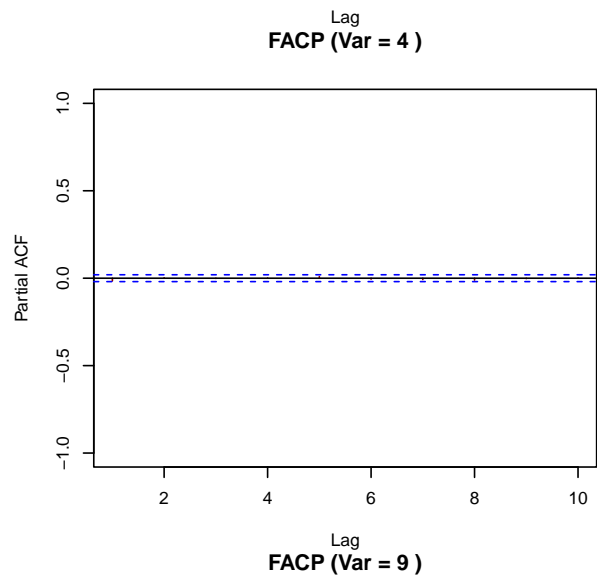
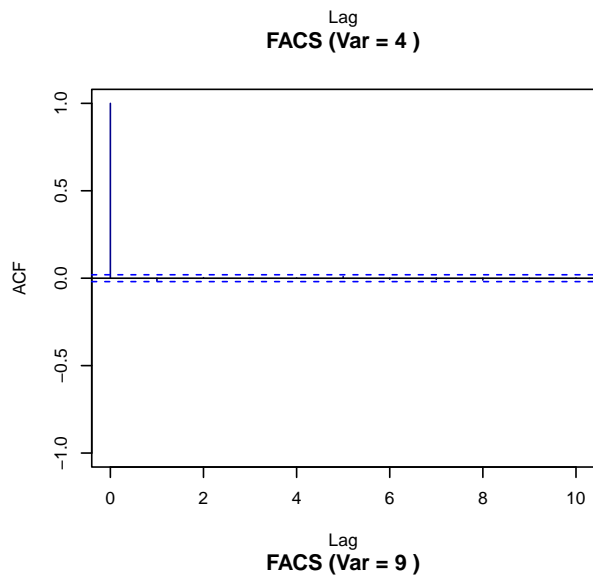
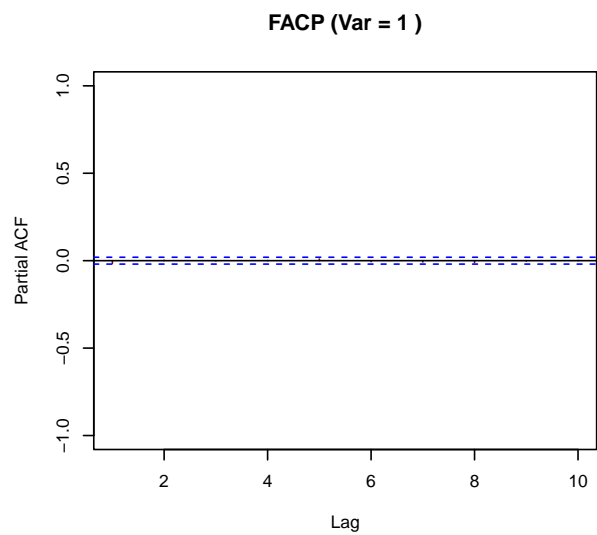
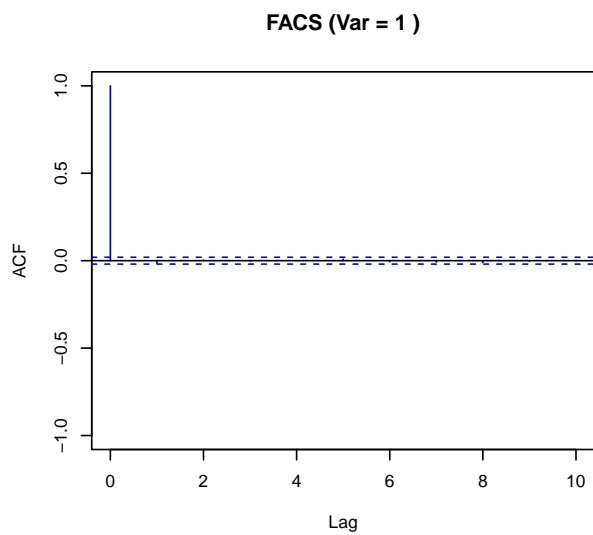
$$\varepsilon_t \sim iidN(0, (1)^2) \quad \varepsilon_t \sim iidN(0, (2)^2) \quad \varepsilon_t \sim iidN(0, (3)^2)$$

- Para cada proceso calcule la media, la varianza, la FACS y FACP muestral con 100, 10000 y 1000000 observaciones.
- Presente una tabla comparativa de las estadísticas de cada proceso para las 3 muestras y sus respectivas FACS y FACP para 10 rezagos.
- Compare los resultados.

5.1 a) Simulación de los procesos y cálculo de estadísticas

Table 5: Convergencia de Estadísticas Muestrales según Tamaño de Muestra (N)

Tamaño (N)	Var. Poblacional	Media Muestral	Varianza Muestral
100	1	0.0904	0.8332
10.000	1	-0.0024	0.9973
1.000.000	1	-0.0005	0.9999



5.2 c) Comparación de resultados

Los datos de la tabla demuestran que a mayor número de observaciones, más precisión hay en los cálculos, acercándose la media a 0 y la varianza a 1 tal como dicta la teoría. Este comportamiento es el esperado bajo la Ley de los Grandes Números. Además, la estructura de las gráficas de autocorrelación simple y parcial no presenta correlaciones importantes, lo cual es coherente con un proceso que no tiene persistencia en el tiempo, como es el caso de un proceso de ruido blanco. En resumen, los resultados muestran que a medida que aumentamos el tamaño de la muestra, las estadísticas muestrales convergen a sus valores poblacionales y se confirma la ausencia de autocorrelación en el proceso simulado.

6 Código Github

Para ver el código completo del taller, puede acceder al siguiente enlace: [Taller 2 - Procesos Estocásticos](#)