



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

Proyecto integrador

Automática y Máquinas Eléctricas

Juan Stella – 12552

Juan Francisco Huertas – 12620

1. Resumen

En este trabajo se aborda el modelado, análisis, diseño y simulación de un sistema de control automático para un accionamiento eléctrico de corriente alterna (CA), basado en un motor síncrono de imanes permanentes (PMSM). La aplicación considerada corresponde al control de movimiento de un eje rotacional asociado a la articulación de un manipulador robótico elemental de un grado de libertad, sometido a la acción de la gravedad y a perturbaciones externas.

A partir de especificaciones técnicas simplificadas, se desarrolla un modelo dinámico completo del sistema electromecánico, integrando los subsistemas mecánico, electromagnético y térmico. Sobre la base de dicho modelo, se obtiene un modelo lineal equivalente que permite el análisis dinámico y el diseño de un sistema de control de movimiento en cascada, basado en control vectorial de corriente y control externo de posición.

El desempeño del sistema controlado se evalúa mediante simulaciones en Matlab/Simulink, analizando el seguimiento de consignas, el rechazo a perturbaciones y el comportamiento térmico bajo distintas condiciones de operación.

2. Introducción

Los accionamientos eléctricos controlados constituyen un componente fundamental en sistemas mecatrónicos que requieren control preciso de movimiento y buen desempeño dinámico. En particular, los motores síncronos de imanes permanentes (PMSM) son ampliamente utilizados en aplicaciones de control de posición y velocidad debido a su elevada densidad de potencia y eficiencia.

El presente Proyecto Global Integrador tiene como objetivo el modelado, análisis y diseño de un sistema de control automático para un accionamiento de corriente alterna basado en un motor PMSM, aplicado al control de movimiento de un eje rotacional correspondiente a la articulación de un manipulador robótico elemental de un grado de libertad. El sistema se encuentra sometido a la acción de la gravedad y a perturbaciones externas, lo que introduce un comportamiento no lineal que debe ser considerado en el modelado y en el diseño del control.

A lo largo del trabajo se desarrolla el modelo dinámico completo del sistema físico a lazo abierto, integrando la carga mecánica, el tren de transmisión, la máquina eléctrica, el inversor trifásico y los sensores de realimentación. Posteriormente, se obtienen modelos lineales equivalentes adecuados para el análisis dinámico y el diseño del sistema de control. Sobre esta base, se diseña un controlador de movimiento en cascada, cuya performance es evaluada mediante simulaciones en el dominio del tiempo. El informe se organiza presentando en primer lugar el modelado del sistema físico, seguido del análisis dinámico, el diseño del control, la simulación del sistema completo y, finalmente, las conclusiones obtenidas.

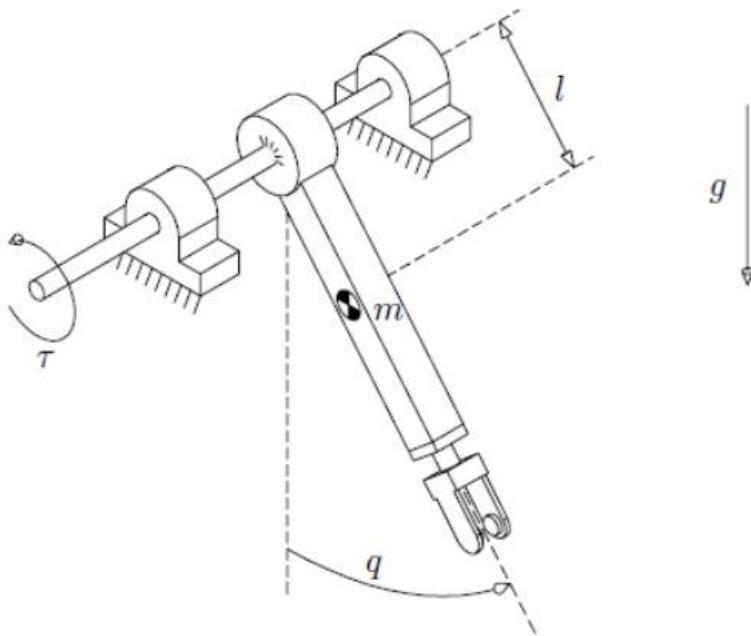


Figura 1: Modelo físico del problema

3. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a lazo abierto

3.1. Carga mecánica

Se considera un modelo dinámico equivalente simplificado no lineal, con parámetros variables, referido al eje de salida del tren de transmisión. La coordenada articular del eje de la articulación $q(t) \equiv \theta_l(t)$, es medida respecto de la vertical hacia abajo y positiva en sentido horario. El torque impulsor aplicado por el accionamiento se define como $\tau(t) \equiv T_q(t)$. La perturbación externa principal corresponde a la aceleración de la gravedad, considerada constante y vertical.

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} = T_q(t) - b_l \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt} = \omega_l(t) \Leftrightarrow \theta_l(t) = \theta_l(0) + \int_0^t \omega_l(\xi) d\xi \quad (2)$$

Donde $T_l(t) = T_{ld}(t) + g \cdot k_l \cdot \sin(\theta_l)$

Parámetros equivalentes variables (valor nominal ± variación máx.):

- Coeficiente de fricción viscosa en articulación: $b_l \approx (0.1 \pm 0.03) \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}/\text{s}}$
- Masa del brazo manipulador: $m = 1.0 \text{ kg}$
- Aceleración de gravedad: $g = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- Longitud e inercia equivalente (centro de masa): $l_{cm} = 0.25 \text{ m}; J_{cm} = 0.0208 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- Longitud total (extremo): $l_l = 0.50 \text{ m}$
- Masa de carga útil en el extremo (variable): $m_l = [0 \dots 1.5] \text{ kg}$
- Momento de inercia total (a eje de rotación):

$$J_l = (m \cdot l_{cm}^2 + J_{cm}) + m_l \cdot l_l^2 = 0.0833 + [0 \dots 0.75] \text{ kg}\cdot\text{m}$$

- Coeficiente de torque recuperador gravitacional: $k_l = m \cdot l_{cm} + m_l \cdot l_l = 0.25 + [0 \dots 0.75] \text{ kg}\cdot\text{m}$

Especificaciones de operación (carga o perturbación, valor límite):

- Torque de perturbación por contacto: $T_{ld}(t) \approx (0 \pm 5.0) \text{ N}\cdot\text{m}$ (se asume función escalón)

3.2. Tren de transmisión

La transmisión mecánica del sistema se modela como una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, asumiendo un acoplamiento rígido entre el eje del motor y el eje de la carga. Se desprecia la presencia de elasticidad torsional, holguras o juego mecánico (backlash); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejadas al eje de entrada y analizadas en conjunto con el motor. Bajo estas hipótesis, la carga mecánica y el motor pueden considerarse como un único sistema rígidamente acoplado.

Modelo equivalente rígido:

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (3)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (4)$$

Parámetro constante:

- Relación de reducción total: $r = 120.0:1$

Especificaciones de operación (valores límites):

- Velocidad nominal (salida): $n_{l\ nom} = 60 \text{ rpm}$ ($\omega_{l\ nom} = 6.28 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$)
- Torque nominal (salida): $T_{q\ nom} = 17.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ (régimen continuo)
- Torque pico (salida): $T_{q\ max} = 45.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ (corta duración, aceleración)

3.3. Máquina eléctrica. Subsistema mecánico

La máquina eléctrica considerada es un motor de corriente alterna trifásico, síncrono con excitación por imanes permanentes (PMSM), de estator con conexión estrella simétrica y equilibrada, accesible en bornes de fase abc . El centro de estrella (punto neutro) se asume flotante y no accesible.

El subsistema mecánico del motor corresponde al rotor referido al estator estacionario, y se modela mediante un sistema dinámico equivalente de parámetros concentrados. Bajo estas hipótesis, el comportamiento dinámico mecánico del motor queda descrito por las siguientes ecuaciones.

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_m \omega_m(t) - T_d(t) \quad (5)$$

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \theta_m(t) = \theta_m(0) + \int_0^t \omega_m(\zeta) d\zeta \quad (6)$$

Donde:

- $T_m(t)$ es el torque electromagnético

Parámetros (valores nominales medidos):

- Momento de inercia (motor y caja): $J_m \approx 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Amortiguamiento viscoso (motor y caja): $b_m \approx 15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$

Especificaciones de operación (valores límites):

- Velocidad nominal motor: $n_{m\ nom} = 6600 \text{ rpm}$ ($\omega_{m\ nom} = 691.15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$)

Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo

El sistema mecánico completo está constituido por la carga mecánica (Ec. (1) y (2)), la transmisión rígida (Ec. (3) y (4)) y el subsistema mecánico del motor (Ec. (5)). El objetivo es obtener un modelo dinámico equivalente referido al eje de salida del motor.

Para ello, se expresan las variables mecánicas de la carga en función de las variables del motor mediante las relaciones de la transmisión. En particular, en la ecuación dinámica de la carga se reemplazan las expresiones obtenidas para la velocidad angular $\omega_l(t)$ y para el torque impulsor $T_q(t)$.

$$\frac{J_l}{r} \dot{\omega}_m(t) = r T_d(t) - \frac{b_l}{r} \omega_m(t) - T_l(t) \quad (7)$$

$$T_d(t) = \frac{1}{r} \left(\frac{J_l}{r} \dot{\omega}_m(t) + \frac{b_l}{r} \omega_m(t) + T_l(t) \right)$$

$$T_d(t) = \frac{J_l}{r^2} \dot{\omega}_m(t) + \frac{b_l}{r^2} \omega_m(t) + \frac{1}{r} T_l(t) \quad (8)$$

Luego reemplazando (8) en (5):

$$\begin{aligned} J_m \dot{\omega}_m(t) &= T_m(t) - b_m \omega_m(t) - \left(\frac{J_l}{r^2} \dot{\omega}_m(t) + \frac{b_l}{r^2} \omega_m(t) + \frac{1}{r} T_l(t) \right) \\ \left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \dot{\omega}_m(t) &= - \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \omega_m(t) + \left(T_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Definiendo parámetros equivalentes: $J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2}$; $b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2}$

Se obtienen el siguiente subsistema mecánico:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ J_{eq} \ddot{\theta}_m(t) = -b_{eq} \omega_m(t) + T_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \\ y(t) = \theta_m(t) \end{cases} \quad (10)$$

Estados: $x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix}$ Entradas: $u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ \frac{1}{r} T_l(t) \end{bmatrix}$ Salida: $y(t) = \theta_m(t)$

Luego, la representación matricial en espacio de estados:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} \end{bmatrix} T_l(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} T_m(t) \\ y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Y el diagrama de bloques correspondiente:

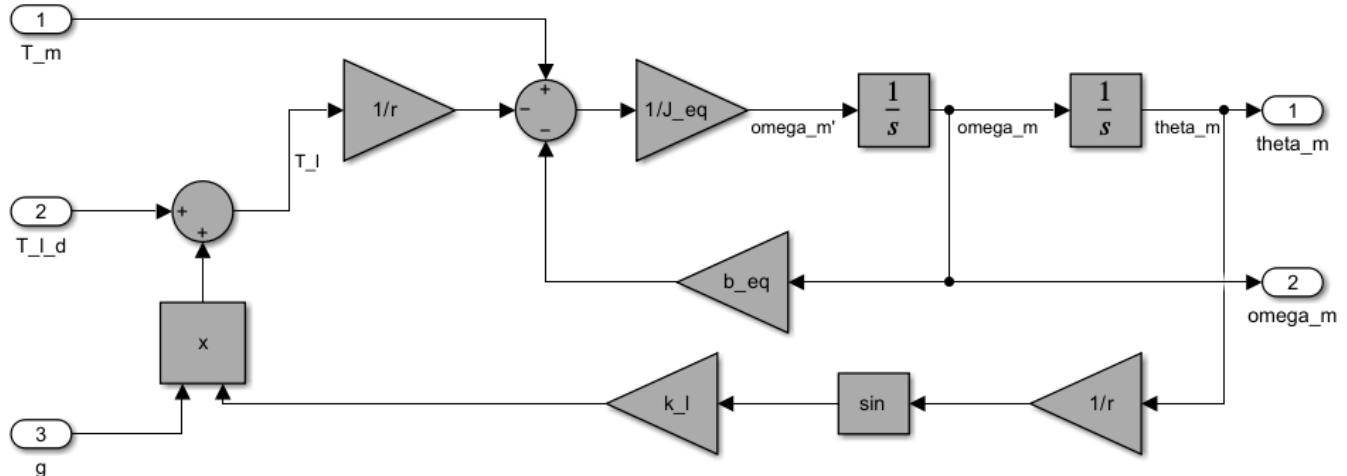


Figura 2: Subsistema mecánico

3.4. Modelo dinámico del sistema físico completo

A continuación, los subsistemas electromagnético y térmico son incorporados al subsistema mecánico previamente obtenido.

3.4.1. Subsistema electromagnético de la máquina eléctrica

Para modelar el subsistema electromagnético de la máquina síncrona de imanes permanentes (PMSM) resulta conveniente introducir algunos conceptos. Dado que se trata de una máquina síncrona, la velocidad angular del rotor ω_r coincide con la velocidad del campo magnético rodante. Además, esta velocidad depende del número de pares de polos magnéticos P_p y de la frecuencia de las señales eléctricas aplicadas al estator ω_m .

$$\omega_r(t) = P_p \omega_m(t) \quad (11)$$

$$\dot{\theta}_r(t) = \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r(t) = \theta_r(0) + \int_0^t \omega_r(\xi) d\xi \quad (12)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \theta_m(t) \quad (13)$$

Donde: θ_r es el ángulo de fase de la señal eléctrica “a”.

Se emplea la transformación directa de Park para convertir el sistema trifásico estacionario “abc” a un sistema ortogonal “qd0r” que gira a la velocidad eléctrica $\omega_r(t) = 2\pi f$. De este modo, señales sinusoidales en “abc” se transforman en variables aproximadamente constantes en “qd0r” en régimen permanente. La transformación inversa permite volver del marco “qd0r” al sistema “abc”.

Transformada directa de Park:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \theta_r(t) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Transformada inversa de Park:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Las expresiones de $f(t)$ se puede representar tensión $v(t)$, corriente $i(t)$, flujo concatenado $\lambda(t)$, etc.

Para simular adecuadamente, se desarrollan dos bloques en Simulink que contienen las funciones de las transformadas de Park directa e inversa:

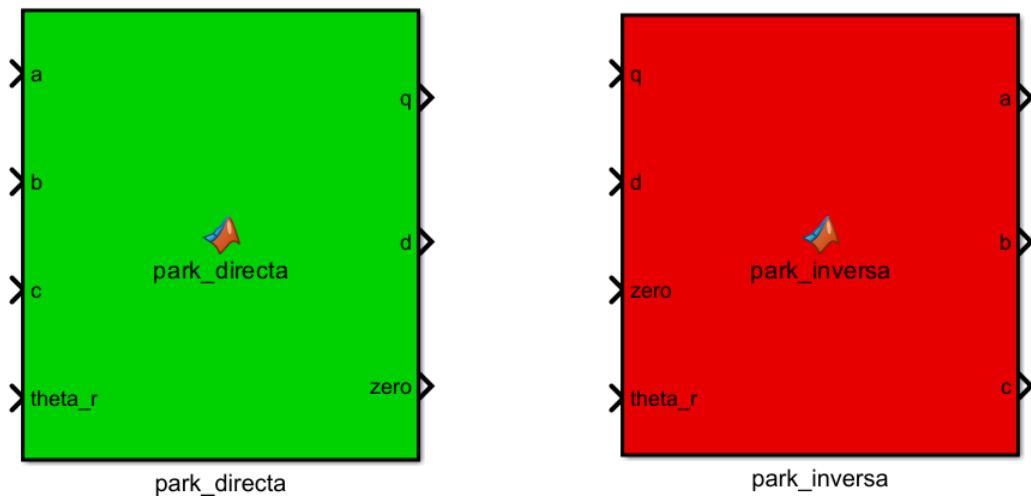


Figura 3: Bloques de transformaciones de Park

Por lo tanto, ahora es posible plantear el balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator referido a coordenadas "qd0^r":

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \\ v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \\ v_{0s}(t) = R_s(t) \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \end{cases} \quad (16)$$

Donde la resistencia del estator $R_s(t)$ varía con la temperatura del estator de la siguiente manera:

$$R_s(t) = R_{SREF} \left(1 + \alpha_{cu} (T_s(t) - T_{SREF}(t)) \right) \quad (17)$$

Los parámetros constantes con valores nominales medidos son los siguientes:

- Pares de polos magnéticos: $p = 3$ pares
- Flujo magnético concatenado por espiras del bobinado de estator: $\lambda_m^r = 0.016 \text{ Wb} - t$
- Inductancia de estator (eje en cuadratura): $L_q \approx 5.8 \text{ mH}$
- Inductancia de estator (eje directo): $L_d \approx 6.6 \text{ mH}$
- Inductancia de dispersión de estator: $L_{ls} \approx 0.8 \text{ mH}$
- Resistencia del estator por fase: $R_s \approx 1.02 \Omega = R_{SREF}$ (@ $T_{SREF} = 20^\circ\text{C}$)
- Coeficiente de aumento de R_s con T_s : $\alpha_{cu} = 3.9 \cdot 10^{-3} \text{ } 1/\text{ } ^\circ\text{C}$

Especificaciones de operación en bornes abc del estator:

- Velocidad nominal del rotor: $n_{m,nom} = 6600 \text{ rpm}$; $w_{m,nom} = 691.15 \text{ rad/s}$
- Tensión nominal de línea: $V_{sl,nom} = 30 \text{ V}_{CA rms}$
- Corriente nominal: $I_{s,nom} = 0.4 \text{ A}_{CA rms}$ (régimen continuo)
- Corriente máxima: $I_{s,max} = 2.0 \text{ A}_{CA rms}$ (corta duración, aceleración)

Por último, reemplazando $\omega_r(t)$ de (Ec.11) y despejando las derivadas correspondientes, obtenemos la expresión para el modelo del subsistema electromagnético del motor:

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} [-R_s(t) \cdot i_{qs}(t) - [\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds}(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t)] \\ \frac{di_{ds}(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [-R_s(t) \cdot i_{ds}(t) + L_q \cdot i_{qs}(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{ds}^r(t)] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} [-R_s(t) \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t)] \end{cases} \quad (18)$$

Y el diagrama correspondiente en Simulink:

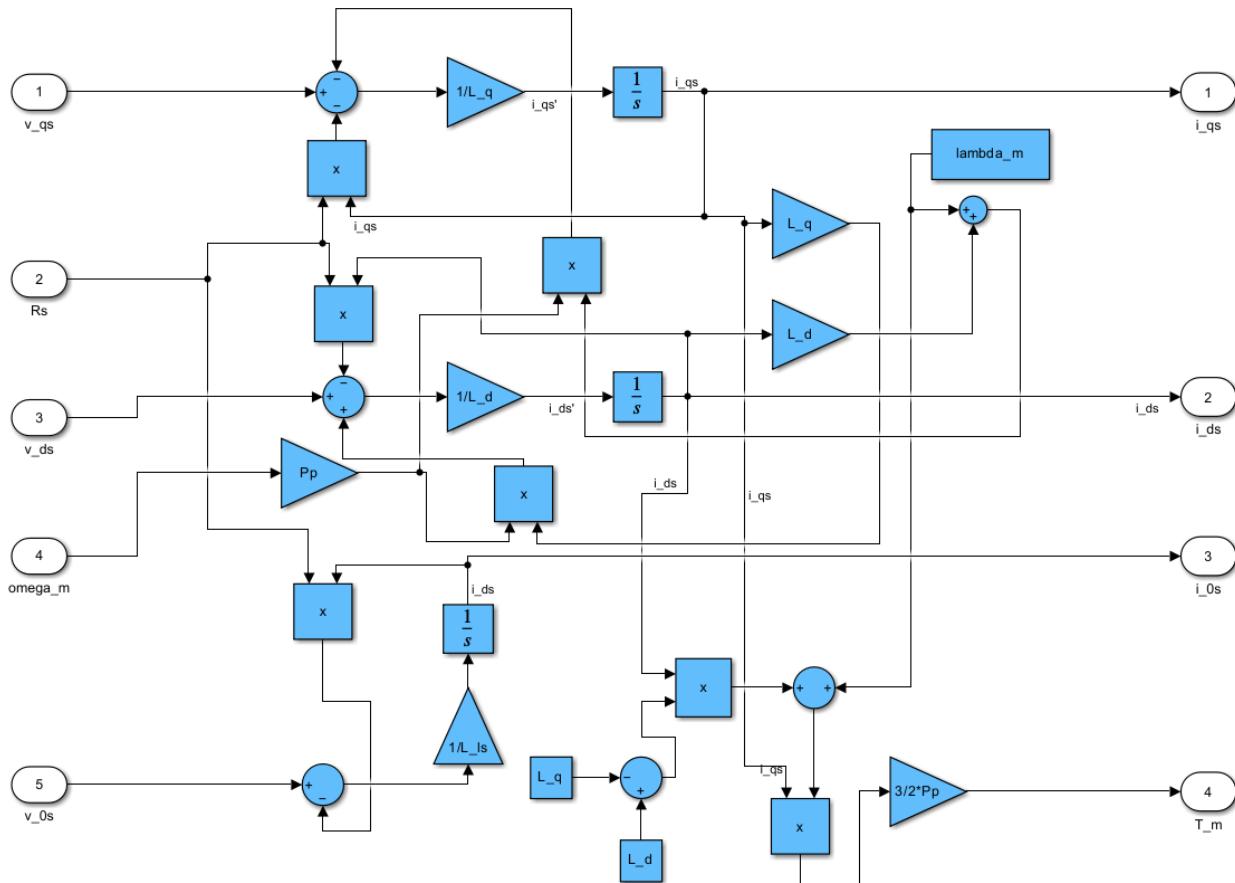


Figura 4: Subsistema electromagnético

3.4.2. Subsistema térmico de la máquina eléctrica

El modelo térmico del motor considera un sistema simplificado de primer orden que representa el comportamiento térmico del bobinado del estator. Se tienen en cuenta únicamente las pérdidas eléctricas resistivas generadas por efecto Joule en los devanados, despreciando las perdidas magnéticas en el núcleo ferromagnético. La transferencia de calor hacia el ambiente se modela mediante conducción y convección natural, sin considerar ventilación forzada.

En cuanto a la potencia perdida en el estator, tenemos las pérdidas caloríficas generadas en el bobinado de éste, que se calculan mediante la disipación resistiva en las tres fases. En coordenadas de fase (*abc*), la potencia disipada está dada por:

$$P_{s,perd}(t) = R_s(T_s^o) \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t))$$

Aplicando la transformación de Park y considerando la invarianza de la potencia, la expresión equivalente en coordenadas qd0 resulta:

$$P_{s,perd}(t) = \frac{3}{2} R_s(T_s^o) \cdot (i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}^r(t)^2) \quad (19)$$

Aclarando que en un sistema trifásico equilibrado con conexión en estrella y neutro flotante, la componente homopolar es nula $i_{0s}(t) \equiv 0$.

El balance energético en el bobinado del estator establece que la potencia de pérdidas debe igualar la energía almacenada internamente más la energía disipada hacia el ambiente

$$P_{s,perd}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^o(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot ((T_s^o(t) - T_{amb}^o(t))) \quad (20)$$

Donde C_{ts} representa la capacitancia térmica del estator y R_{ts-amb} es la resistencia térmica entre el estator y el ambiente.

Igualando las expresiones (19) y (20), y despejando la derivada de la temperatura, se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la dinámica térmica del sistema:

$$\frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} R_s(T_s^o) \cdot (i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \right] \quad (21)$$

Los parámetros constantes con valores nominales medidos son los siguientes:

- Capacitancia térmica del estator: $C_{ts} \approx 0.818 \text{ W}/(\text{°C}/\text{s})$
- Resistencia térmica estator-ambiente: $R_{ts-amb} \approx 146.7 \text{ °C/W}$
- Constante de tiempo térmica: $\tau_{ts-amb} = R_{ts-amb} \cdot C_{ts} \approx 120 \text{ s}$

Y las especificaciones de operación:

- Temperatura máxima de bobinado del estator: $T_{s,max} = 115 \text{ °C}$
- Rango de temperatura ambiente de operación: $-15 \text{ °C} \leq T_{amb} \leq 40 \text{ °C}$

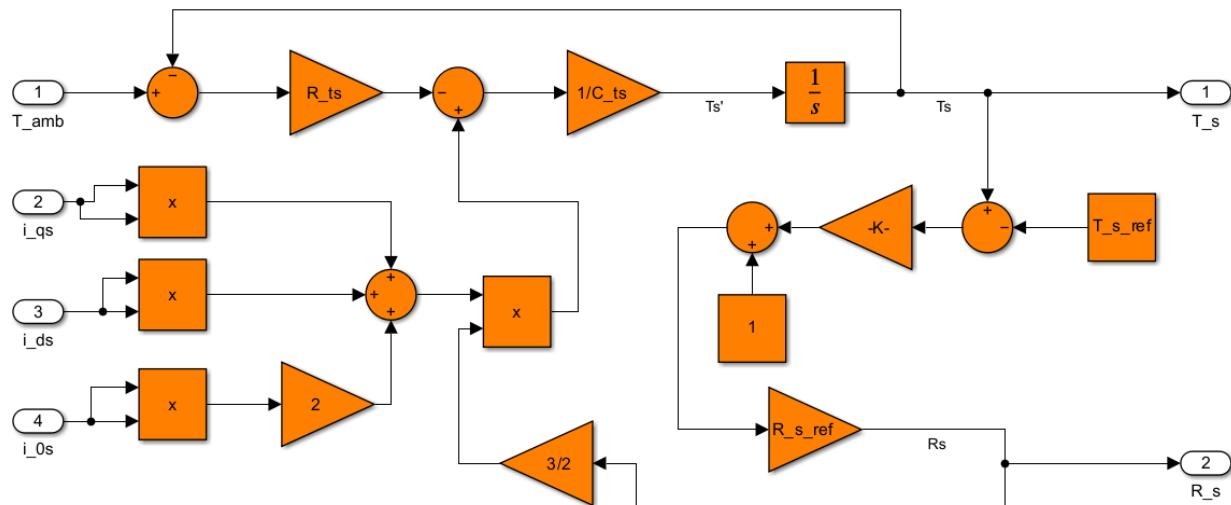


Figura 5: Subsistema térmico

3.5. Inversor trifásico de alimentación

La alimentación de la máquina eléctrica se realiza mediante un inversor trifásico de cuatro cuadrantes, implementado como un puente trifásico con llaves electrónicas semiconductoras, alimentado desde una fuente ideal de corriente continua. El inversor se asume comutado mediante modulación por ancho de pulso (PWM).

Para el análisis dinámico del sistema se adopta un modelo promediado del inversor, considerando únicamente la componente fundamental de las tensiones sintetizadas (sin armónicos). De este modo, el conjunto “fuente ideal de CC + inversor” puede modelarse como un modulador idealizado de tensión trifásica vectorial que aplica al estator un sistema de tensiones senoidales equilibradas de secuencia positiva en coordenadas abc , de igual módulo y desfasadas 120° eléctricos. Estas tensiones pueden variar en módulo $V_{sl}(t)$ y en frecuencia eléctrica $\omega_e(t)$

$$\begin{aligned} v_{as}(t) &\approx V_p(t)\sqrt{2} \cos(\theta_v(t)) \\ v_{bs}(t) &\approx V_p(t)\sqrt{2} \cos\left(\theta_v(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{cs}(t) &\approx V_p(t)\sqrt{2} \cos\left(\theta_v(t) - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \omega_e(t) \equiv 2\pi f_e(t) &\equiv \frac{d\theta_{ev}(t)}{dt} \Leftrightarrow \theta_{ev}(t) = \theta_{ev}(0) + \int_0^t \omega_e(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Parámetros variables: $V_{sl}(t)$ y $\omega_e(t) \equiv 2\pi f_e(t)$ pueden variarse a voluntad, dentro de ciertos límites, a partir del control por PWM.

Especificaciones de operación (valores límites, no sobrepasar):

- Módulo de tensión de línea: $V_{sl} = [0.0 \dots 48] V_{CA\ rms}$
- Frecuencia sincrónica: $f_e = [-330.0 \dots +330.0] \text{ Hz}$. El signo determina la secuencia de fases positiva abc o negativa acb y, por lo tanto, el sentido de giro \pm del campo magnético rodante y del rotor.

3.6. Sensores

El sistema de accionamiento cuenta con distintos dispositivos de sensado destinados a la medición y acondicionamiento de las variables necesarias para la realimentación del control. Se consideran sensores ideales, sin errores de cuantificación ni retardos, salvo indicación en contrario.

En particular, se dispone de los siguientes sensores:

- Sensor de posición angular: Se utiliza un sensor de posición angular incremental (encoder) montado sobre el eje del motor. Se asumen idealizados los procesos de referencia inicial (homing) y decodificación. La variable medida corresponde a la posición angular mecánica del eje del motor $\theta_m(t)$, la cual se considera absoluta, aun cuando el eje complete más de una revolución.
- Sensores de corriente de fase: Se emplean tres sensores de corriente instantánea, uno por cada fase del estator, ubicados a la salida trifásica del inversor. Las variables medidas corresponden a las corrientes de fase $i_{abc}(t)$.

- Sensor de temperatura del estator: se dispone de un sensor de temperatura embebido en el bobinado del estator. La variable medida es la temperatura del estator $T_s(t)$, la cual se emplea para la supervisión del calentamiento y para la estimación de la resistencia del estator $R_s(T_s(t))$, que es dependiente de la temperatura.

Inicialmente, los sensores se modelan como sistemas ideales, con ganancia unitaria y ancho de banda infinito. En términos de función de transferencia, se adopta:

$$G(s) \equiv 1$$

Posteriormente, en caso de requerirse un análisis más realista, el modelo de los sensores podrá modificarse para incluir efectos dinámicos mediante filtros de ancho de banda finito.

3.6.1. Modelo global no lineal

La expresión del torque electromagnético del motor síncrono de imanes permanentes permite acoplar los subsistemas electromagnético y mecánico del accionamiento:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (22)$$

Luego reemplazando en las ecuaciones del sistema mecánico:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_m(t) &= -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p (\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)) i_{qs}^r(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \right] \\ \dot{\omega}_m(t) &= \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p (\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)) i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

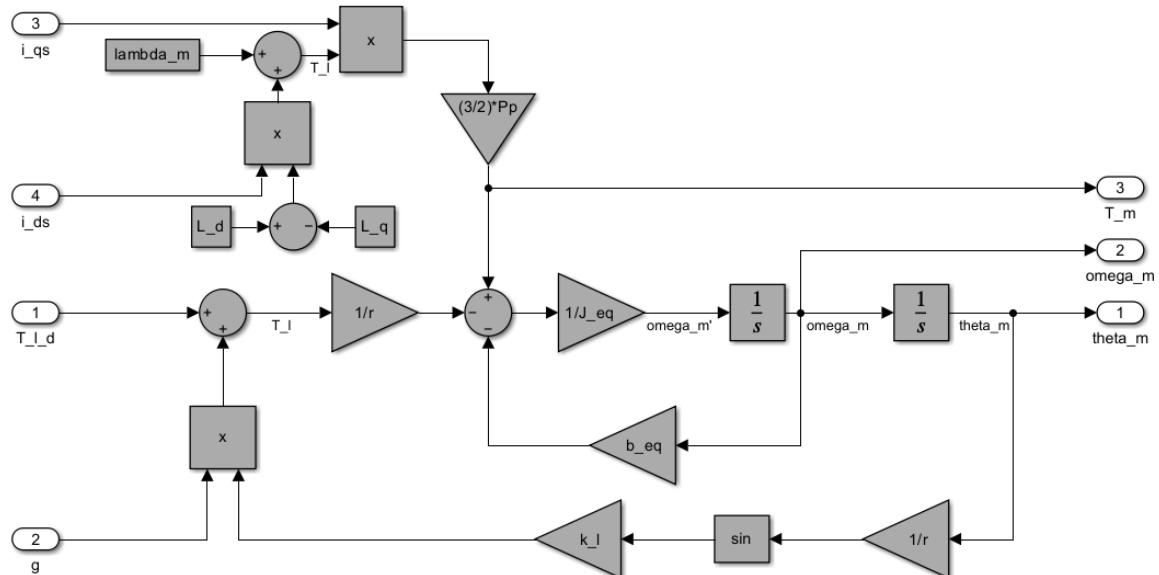


Figura 6: Subsistema mecánico completo

Se combinan las ecuaciones correspondientes a los subsistemas mecánico, electromagnético y térmico ya desarrollados, obteniéndose el siguiente modelo dinámico no lineal para el sistema físico completo:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p (\lambda'_m + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)) i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{1}{r} (T_{ld}(t) + g k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)) \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s(T_s^o(t)) i_{qs}^r(t) - (\lambda'_m + L_d i_{ds}^r(t)) P_p \omega_m(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [v_{ds}^r(t) - R_s(T_s^o(t)) i_{ds}^r(t) + L_q i_{qs}^r(t) P_p \omega_m(t)] \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} [v_{0s}^r(t) - R_s(T_s^o(t)) i_{0s}^r(t)] \\ \frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} R_s(T_s^o(t)) ((i_{qs}^r)^2 + (i_{ds}^r)^2 + 2(i_{0s}^r)^2) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \right] \end{cases} \quad (24)$$

A partir del modelo no lineal obtenido, se definen los vectores de estado, entradas de control y perturbaciones externas, junto con las condiciones iniciales, a fin de disponer una formulación compacta para simulación y posterior linealización.

- Variables de estado: posición angular del eje del motor $\theta_m(t)$, velocidad angular $\omega_m(t)$, corrientes virtuales equivalentes del estator en el marco $qd0^r$ y temperatura del estator $T_s^o(t)$.

$$x(t) = [\theta_m(t) \quad \omega_m(t) \quad i_{qs}^r(t) \quad i_{ds}^r(t) \quad i_{0s}^r(t) \quad T_s^o(t)]^T$$

- Variables de entrada:

- De control: tensiones virtuales equivalentes del sistema trifásico en coordenadas $qd0^r$.

$$u(t) = [v_{qs}^r(t) \quad v_{ds}^r(t) \quad v_{0s}^r(t)]$$

- De perturbación: torque externo equivalente aplicado (suma de carga mecánica y componente gravitacional del péndulo), y temperatura ambiente.

$$d(t) = \begin{bmatrix} T_{ld}(t) \\ T_{amb}^o(t) \end{bmatrix}$$

- Variables de salida, para realimentación: posición angular, corrientes de fase medidas y temperatura del estator.

$$y(t) = [\theta_m(t) \quad i_{qs}^r(t) \quad i_{ds}^r(t) \quad i_{0s}^r(t) \quad T_s^o(t)]^T \quad (25)$$

Se observa que el modelo dinámico obtenido no admite una representación matricial lineal, debido a la presencia de no linealidades introducidas por términos producto entre variables del sistema. No obstante, resulta posible describir el comportamiento del sistema mediante una representación en diagrama de bloques, considerando cada subsistema por separado.

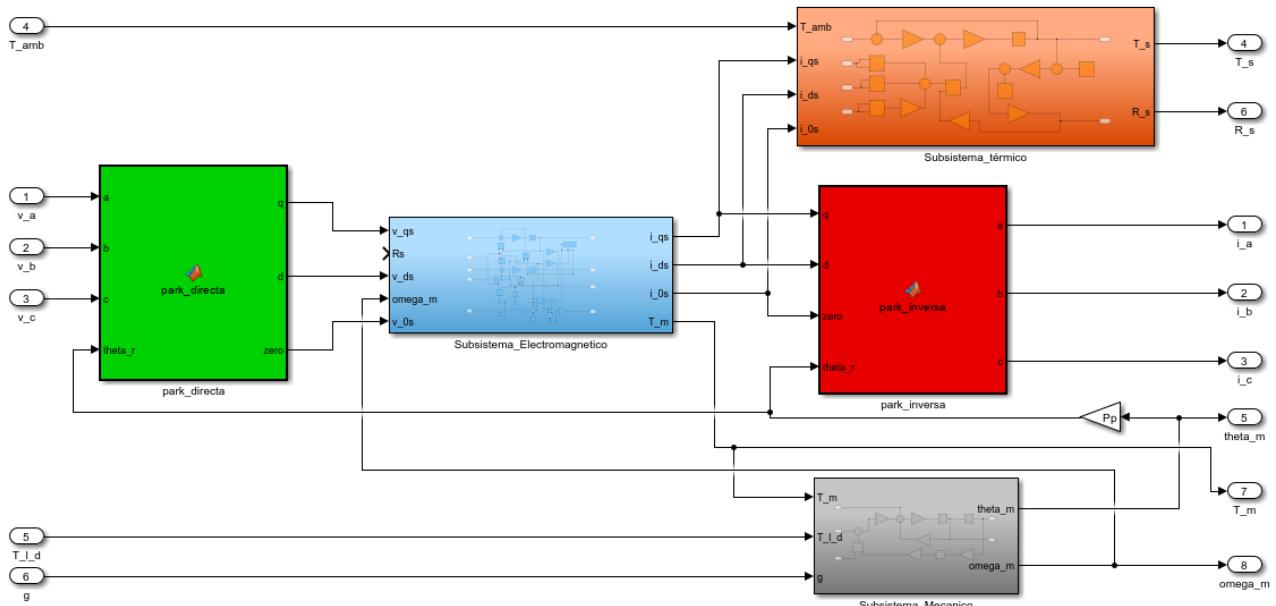


Figura 7: Sistema físico completo

3.6.2. Linealización jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

El sistema bajo estudio presenta un comportamiento no lineal debido a la presencia de productos entre variables de estado y al acoplamiento existente entre los ejes “d” (directo) y “q” (en cuadratura). Estas características impiden su tratamiento directo mediante las herramientas clásicas del control lineal.

De manera general, un sistema dinámico no lineal puede describirse mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales, donde la dinámica está representada por una función vectorial f , dependiente del vector de estado $x(t)$ y de la entrada de control $u(t)$. La salida del sistema se considera, en este caso, como una combinación lineal de las variables de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{26}$$

Con el objetivo de analizar el comportamiento dinámico del sistema utilizando técnicas de control lineal, se procede a realizar una linealización del modelo no lineal. Para ello, se asume que todas las variables del sistema pueden descomponerse en una componente quasi-estacionaria, de variación lenta en el tiempo, y una perturbación de pequeña magnitud asociada a variaciones rápidas alrededor del punto de operación.

$$z(t) = Z_0(t) + \Delta z(t) \tag{27}$$

Donde $Z_0(t)$ representa el valor de operación o componente quasi-estacionaria de la variable considerada, caracterizada por una variación lenta en el tiempo, mientras que $\Delta z(t)$ corresponde a una perturbación de pequeña magnitud asociada a variaciones rápidas alrededor de dicho punto de operación.

Luego, el sistema no lineal queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{X}_0(t) + \Delta x(t) = f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \\ X_0(0) + \Delta x(0) = x_0 \Rightarrow X_0(0) \equiv x_0, \quad \Delta x(0) \equiv 0 \\ Y_0(t) + \Delta y(t) = C X_0(t) + C \Delta x(t) \end{cases} \quad (28)$$

Aproximando mediante serie de Taylor truncada a 1º orden:

$$f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \approx f(X_0(t), U_0(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0(t) \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_0(t) \cdot \Delta u(t) \quad (29)$$

De este modo, el modelo dinámico del sistema puede descomponerse en dos componentes claramente diferenciadas, asociadas a escalas temporales distintas del comportamiento del sistema.

La primera componente corresponde al conjunto de puntos de operación $X_0(t)$, los cuales pueden considerarse quasi-estacionarios debido a su lenta variación en el tiempo. Esta parte del modelo conserva el carácter no lineal del sistema original y describe la evolución global del comportamiento dinámico.

El comportamiento de esta componente se describe mediante la ecuación no lineal del sistema, evaluada en el punto de operación correspondiente.

$$\dot{X}_0(t) = f(X_0(t), U_0(t)) \approx cte \quad (30)$$

Esta condición establece que en un punto de operación el sistema se encuentra en equilibrio dinámico, es decir, las derivadas de las variables de estado son nulas o constantes.

La segunda componente representa las variaciones dinámicas de pequeña magnitud $\Delta x(t)$ alrededor del punto de operación. Para estas perturbaciones, el comportamiento del sistema puede aproximarse mediante un modelo lineal obtenido a través de la expansión de Taylor truncada en primer orden.

Entonces, separamos el sistema en las dos componentes mencionadas:

1. Espacio global de puntos de operación:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{m0}(t) = \omega_{m0}(t) = cte \\ \dot{\omega}_{m0}(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p \left(\lambda'_m + (L_d - L_q) i_{ds0}^r(t) \right) i_{qso}^r(t) - b_{eq} \omega_{m0}(t) - \frac{1}{r} \left(T_{ld}(t) + g k_l \sin \left(\frac{\theta_{m0}(t)}{r} \right) \right) \right] = 0 \\ \frac{di_{qso}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \left[v_{qso}^r(t) - R_{s0}(T_{s0}^o(t)) i_{qso}^r(t) - (\lambda'_m + L_d i_{ds0}^r(t)) P_p \omega_{m0}(t) \right] = 0 \\ \frac{di_{ds0}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \left[v_{ds0}^r(t) - R_s(T_{s0}^o(t)) i_{ds0}^r(t) + L_q i_{qso}^r(t) P_p \omega_{m0}(t) \right] = 0 \\ \frac{di_{0s0}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left[v_{0s0}^r(t) - R_s(T_{s0}^o(t)) i_{0s0}^r(t) \right] = 0 \\ \frac{dT_{s0}(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} R_s(T_{s0}^o(t)) \left((i_{qso}^r)^2 + (i_{ds0}^r)^2 + 2(i_{0s0}^r)^2 \right) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_{s0}^o(t) - T_{amb}^o(t)) \right] = 0 \end{cases} \quad (31)$$

2. Modelo dinámico local de pequeñas desviaciones $\Delta x(t)$:

$$\Delta \dot{x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) \quad (32)$$

Donde las matrices jacobianas se definen como:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_0, \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_0 \quad (33)$$

Este modelo recibe el nombre de modelo lineal con parámetros variables (LPV). A diferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), las matrices A y B varían según el punto (X_0, U_0) alrededor del cual se realiza la linealización.

Donde evaluando las matrices A y B, se obtiene el sistema de ecuaciones para el modelo lineal con parámetros variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\dot{\theta}_m(t) = \Delta\omega_m(t) \\ \Delta\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[-b_{eq} \cdot \Delta\omega_m(t) + \frac{3}{2} P_p \cdot \lambda_m^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + \frac{3}{2} P_p \cdot (L_d - L_q) \left(i_{ds0}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + i_{qso}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \right) - \frac{1}{r} \cdot (g \cdot k_l \cdot \Delta\theta_m(t) + \Delta T_{ld}(t)) \right] \\ \frac{\partial \Delta i_{qs}^r(t)}{\partial t} = \frac{1}{L_q} \left(\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(T_s^\circ) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot \Delta\omega_m(t) - P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot \Delta i_{ds}^r(t)) \cdot \omega_{m0}(t) \right), \\ \frac{\partial \Delta i_{ds}^r(t)}{\partial t} = \frac{1}{L_d} \left(\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(T_s^\circ) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot P_p (i_{qso}^r \cdot \Delta\omega_m(t) + \Delta i_{qs}^r(t) \cdot \omega_{m0}(t)) \right), \\ \frac{\partial \Delta i_{0s}(t)}{\partial t} = \frac{1}{L_{ls}} (\Delta v_{0s}(t) - R_s(T_s^\circ) \cdot \Delta i_{0s}(t)), \\ \frac{\partial \Delta T_s^\circ(t)}{\partial t} = \frac{1}{C_{ts}} \left[3 \cdot R_s(T_s^\circ) \left(i_{qso}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + i_{ds0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{0s0} \cdot \Delta i_{0s}(t) \right) - \frac{\Delta T_s^\circ(t) - \Delta T_{amb}^\circ(t)}{R_{ts-amb}} \right] \end{array} \right. \quad (34)$$

Considerando la dependencia térmica de la resistencia de estator $R_s(T_{s,op}^\circ)$, el sistema de ecuaciones en variables de estado queda estructurado mediante los siguientes vectores x y u :

$$X = \begin{pmatrix} \Delta\theta_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^\circ(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \Delta T_{ld}(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}^\circ(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{gk_l}{rJ_{eq}} & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p}{J_{eq}} (\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds0}^r) & \frac{3}{2} \frac{P_p}{J_{eq}} (L_d - L_q) i_{qso}^r & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p}{L_q} (\lambda_m^r + L_d i_{ds0}^r) & -\frac{R_{s0}}{L_q} & \frac{P_p L_d i_{qso}^r}{L_q} & 0 & -\frac{R_{s,REF} \alpha_{Cu} i_{qs0}^r}{L_q} \\ 0 & -\frac{P_p L_q i_{qso}^r}{L_d} & \frac{P_p L_q \omega_{m0}}{L_d} & -\frac{R_{s0}}{L_d} & 0 & -\frac{R_{s,REF} \alpha_{Cu} i_{ds0}^r}{L_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{s0}}{L_{ls}} & -\frac{R_{s,REF} \alpha_{Cu} i_{0s0}^r}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & \frac{3R_{s0} i_{qso}^r}{C_{ts}} & \frac{3R_{s0} i_{ds0}^r}{C_{ts}} & \frac{6R_{s0} i_{0s0}^r}{C_{ts}} & -\frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{rJ_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} \end{bmatrix}$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_m(0) \\ \Delta\omega_m(0) \\ \Delta i_{qs}^r(0) \\ \Delta i_{ds}^r(0) \\ \Delta i_{0s}^r(0) \\ \Delta T_s(0) \end{bmatrix}$$

3.6.3. Linealización por realimentación: Modelo simplificado lineal invariante en el tiempo (LTI)

Se busca obtener un modelo lineal invariante en el tiempo (LTI) equivalente del accionamiento, a partir del modelo global no lineal. Para ello se introducen hipótesis de operación y restricciones que permiten eliminar los principales acoplamientos no lineales y reducir el orden efectivo del sistema, manteniendo una representación adecuada para el diseño de controladores.

1) Restricción $i_{ds}^r(t) = 0$ mediante FOC

En primer lugar, se impone la condición $i_{ds}^r(t) = 0$ mediante una estrategia de control vectorial orientado al flujo (FOC). Esta elección permite desacoplar aproximadamente el control del flujo (eje d) del control del par electromagnético (eje q), de modo que el par queda principalmente asociado a $i_{qs}^r(t)$. Con esta restricción se simplifican los términos de acoplamiento “d–q” del modelo electromagnético y se obtiene una dinámica más cercana a la linealidad en el rango de operación considerado.

2) Desacople del subsistema térmico

En segundo lugar, se desprecia el acoplamiento no lineal entre el subsistema térmico y electromagnético, es decir, no se considera la variación de la resistencia del estator con la temperatura dentro del modelo eléctrico. Bajo esta hipótesis, el subsistema térmico se modela de forma independiente (sin realimentación hacia las ecuaciones eléctricas), conservando una dependencia lineal del intercambio térmico con el ambiente.

$$\frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ls}} \left[\frac{3}{2} R_s (i_{qs}^r(t))^2 - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s(t) - T_{amb}(t)) \right]$$

3) Corriente homopolar nula por neutro flotante

Finalmente, dado que el estator se encuentra conectado en estrella y el sistema trifásico es simétrico y equilibrado con neutro no accesible (neutro flotante), la suma instantánea de corrientes de fase resulta nula por ley de nodos de Kirchhoff. Al aplicar la transformación de Park, esto implica que la componente homopolar $i_{0s}(t)$ es nula, por lo que puede eliminarse del modelo.

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0$$

Aplicando transformación de Park:

$$i_{0s}(t) = \frac{1}{3}(i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) = 0$$

Y dada la condición de equilibrio, entonces:

$$i_{0s}(t) \equiv 0 \therefore \frac{di_{0s}(t)}{dt} \equiv 0, \quad v_{0s}(t) \equiv 0 \quad (35)$$

Aplicando las hipótesis de simplificación ($i_{ds}(t) = 0$, desacople térmico, y eliminación de la componente homopolar) al modelo global no lineal, se obtiene un modelo reducido que evita productos entre variables de estado y resulta adecuado para representar el comportamiento dinámico principal del accionamiento en torno al punto de operación.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r P_p \omega_m(t)] \end{cases} \quad (36)$$

Finalmente, el modelo puede expresarse en forma matricial en espacio de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p\lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{rJ_{eq}} \end{bmatrix} T_l(t) \quad (37)$$

Como podemos observar, los coeficientes de las matrices son constantes, por lo que se obtiene un modelo lineal invariante en el tiempo (LTI) equivalente.

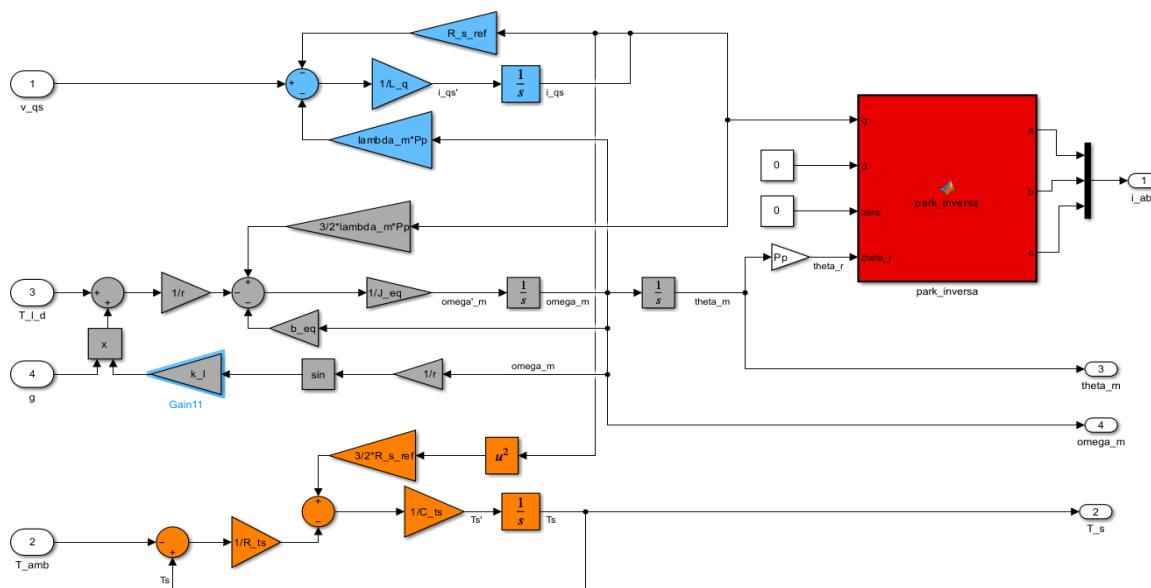


Figura 8: Sistema completo LTI

3.6.4. Restricción o ley de control mínima

El modelo LTI equivalente obtenido en la sección anterior se fundamenta en el desacople entre los canales de flujo magnético y de torque. Dicho desacople se logra imponiendo la condición $i_{ds}^r(t) = 0$ en todo instante.

Para garantizar que esta condición se cumpla, no resulta suficiente con suponerla en el modelo, sino que es necesario imponer una ley de control adecuada sobre las variables manipuladas del sistema. En particular, debe determinarse la tensión asociada al eje directo que asegure la anulación de la corriente $i_{ds}^r(t)$.

Al considerar simultáneamente $i_{ds}^r(t)$ y $\frac{di_{qs}^r(t)}{dt}$ en la ecuación correspondiente al eje directo del modelo global no lineal (Ec. 24), y despejando la tensión $v_{ds}^r(t)$, se obtiene la restricción mínima que dicha tensión debe satisfacer para mantener el desacople deseado.

$$v_{ds}^r(t) = -L_q P_p i_{qs}^r(t) \omega_m(t) \quad (38)$$

Esta expresión define la **ley de control mínima** asociada al eje directo, ya que establece el valor que debe tomar la tensión $v_{ds}^r(t)$ para mantener nula la corriente $i_{ds}^r(t)$ durante la operación. De este modo, $v_{ds}^r(t)$ no se considera una variable manipulable directamente.

Dado que no se actúa físicamente sobre tensiones en coordenadas $qd0$, sino sobre las tensiones aplicadas a los bornes del estator, resulta necesario expresar la ley de control en términos de las tensiones trifásicas abc . Estas tensiones dependen de las componentes v_{qs}^r , v_{ds}^r y v_{0s}^r , por lo que se recurre a la transformación inversa de Park para su implementación práctica.

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t)) & 1 \\ \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Y resolviendo producto matricial:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t)) v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) v_{qs}^r(t) + \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) v_{qs}^r(t) + \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \end{cases}$$

Reemplazando v_{ds}^r por su expresión anterior (Ec. 38) y $v_{0s}^r \equiv 0$ (Ec. 35):

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t)) L_q P_p i_{qs}^r(t) \omega_m(t) \\ v_{bs}(t) = \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) v_{qs}^r(t) - \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) L_q P_p i_{qs}^r(t) \omega_m(t) \\ v_{cs}(t) = \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) v_{qs}^r(t) - \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) L_q P_p i_{qs}^r(t) \omega_m(t) \end{cases} \quad (40)$$

Al esquema del modelo global no lineal se le incorpora la realimentación necesaria para implementar la ley de control obtenida previamente. De esta manera, el modelo completo deja de ser puramente descriptivo y pasa a representar el sistema en lazo cerrado.

La implementación práctica de la ley de control dentro del modelo no lineal integral se realiza mediante una estrategia de realimentación directa parcial del estado. Esto permite efectuar el desacople dinámico y la linearización buscada sin modificar la estructura física del modelo original. En otras palabras, la no linealidad no se elimina del modelo, sino que se compensa a través de la acción del controlador.

Para concretar esta implementación, se incorporan al diagrama de bloques:

- Inversor trifásico equivalente (modelado como modulador de tensión)
- Transformaciones directa e inversa de Park
- Bloque de sensores que proporciona realimentación ideal de las variables de estado necesarias para el control

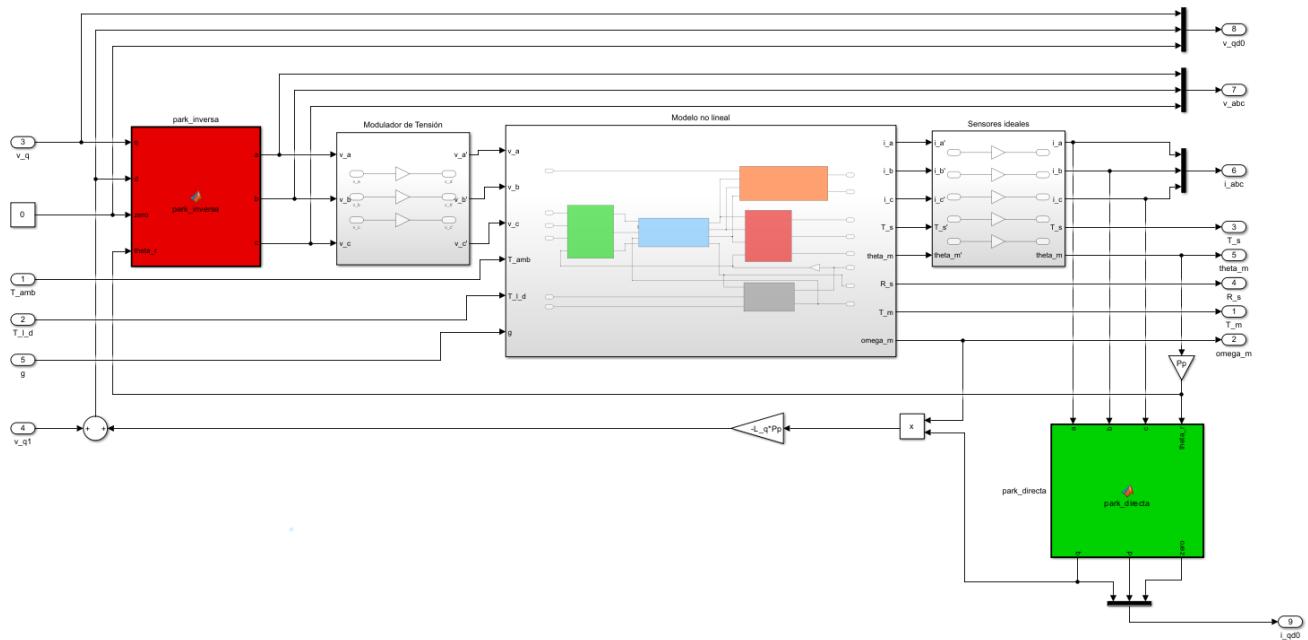


Figura 9: Modelo global NL con ley de control mínima en el eje d

3.6.5. Modelo de la dinámica residual

Para lograr el desacople entre los ejes q y d se impuso como condición que la corriente del eje directo $i_{ds}^r(t)$ fuera nula. Sin embargo, resulta relevante analizar el comportamiento del sistema cuando dicha condición inicial no se cumple estrictamente, es decir, cuando $i_{ds}^r(t) \neq 0$.

Al aplicar la ley de control mínima sobre $v_{ds}^r(t)$ en la ecuación correspondiente al eje directo del modelo no lineal, se obtiene una dinámica autónoma asociada exclusivamente a la corriente $i_{ds}^r(t)$.

$$L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -R_s(t)i_{ds}^r(t)$$

$$R_s(t)i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$$

Esta ecuación corresponde a un sistema lineal de primer orden, cuya solución analítica es:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0)e^{-\frac{R_s}{L_d}t} \quad (41)$$

La corriente $i_{ds}^r(t)$ presenta un decaimiento exponencial determinado por la constante de tiempo eléctrica $\tau_d = \frac{L_d}{R_s}$. Esto implica que, aun cuando la condición inicial no sea exactamente nula, la componente directa tenderá naturalmente a extinguirse con el tiempo.

Si $i_{ds}^r(t) = 0$, el desacople entre ejes se mantiene de manera exacta. En cambio, si existe una perturbación inicial, se genera transitoriamente un acoplamiento hacia el eje q , el cual desaparecerá progresivamente conforme la corriente se atenúe.

Se puede implementar una restricción o Ley de Control complementaria mínima en el eje q para eliminar completamente el acoplamiento, y obtener un modelo equivalente lineal, independiente del estado inicial de $i_{ds}^r(t)$. Partiendo de la ecuación diferencial del eje q (Ec. 24), podemos despejar $v_{qs}^r(t)$:

$$v_{qs}^r(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s(t)i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r P_p \omega_m(t) + L_d i_{ds}^r(t) P_p \omega_m(t) \quad (42)$$

Como $i_{ds}^r(t)$ es distinto de cero, hay un término no lineal, que representa al acoplamiento entre el eje q y d . Se debe sumar esta expresión a $v_{qs}^r(t)$ para anularlo y evitar la no linealidad:

$$v_{qs}^r(t) + L_d i_{ds}^r(t) P_p \omega_m(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r P_p \omega_m(t) + L_d i_{ds}^r(t) P_p \omega_m(t)$$

$$v_{qs}^r(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r P_p \omega_m(t)$$

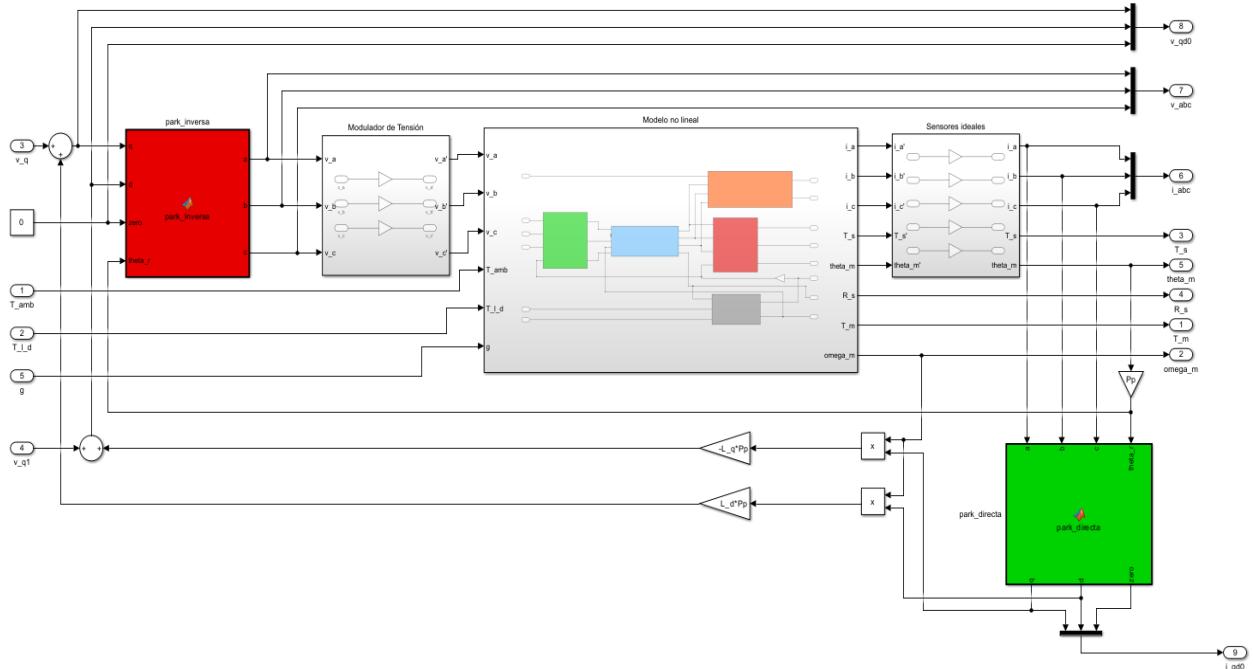


Figura 10: Modelo global NL con ley de control mínima en el eje d y q

De este modo, nuestro sistema simplificado lineal e invariante en el tiempo presenta un error transitorio, que resulta despreciable en régimen forzado. Agregando la dinámica residual y despreciando el mencionado acoplamiento se obtienen las ecuaciones del modelo completo LTI equivalente aumentado:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{1}{r} T_l \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r P_p \omega_m(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(t)}{L_d} i_{ds}^r(t) \\ \frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} R_s \left((i_{qs}^r(t))^2 + (i_{ds}^r(t))^2 \right) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s(t) - T_{amb}(t)) \right] \end{cases} \quad (43)$$

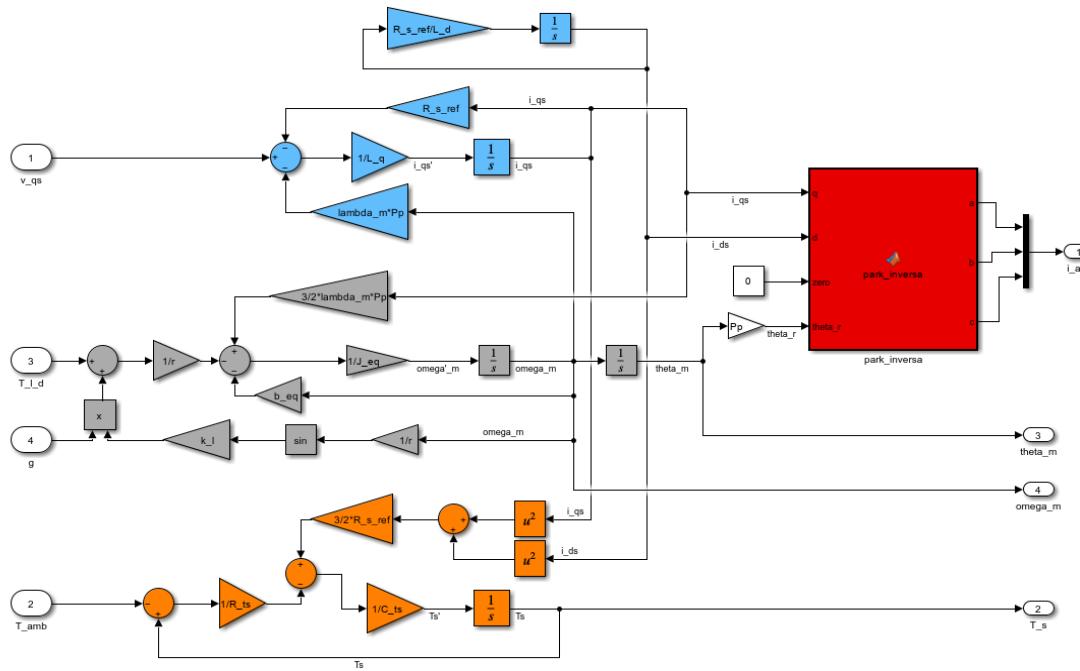


Figura 11: Sistema LTI equivalente aumentado

3.6.6. Comparación entre modelo dinámico LTI aumentado y modelo global LPV

El modelo global LPV, al no imponer $i_{ds}^r(t) = 0$, representa con mayor fidelidad el comportamiento del sistema real, ya que conserva los principales acoplamientos y no linealidades del accionamiento. Además, al permitir que $i_{ds}^r(t)$ adopte distintos valores, amplía el conjunto de regímenes de operación posibles frente al modelo LTI equivalente.

Por otra parte, el modelo LTI equivalente aumentado puede interpretarse como una simplificación del modelo general, construida a partir de fijar el eje directo a un valor objetivo (típicamente $i_{ds}^r(t) \approx 0$) para desacoplar las dinámicas $d - q$. Esta elección reduce el espacio de puntos de operación y omite parte del comportamiento no lineal, pero a cambio facilita el análisis y el diseño de controladores mediante herramientas lineales.

Dado que el modelo LTI se obtuvo imponiendo una corriente directa nula, resulta relevante estudiar cómo una componente $i_{ds}^r(t) \neq 0$ impacta sobre las variables de interés del accionamiento. En particular, la corriente en el eje directo modifica el flujo efectivo del motor y, por ende, afecta tanto el torque electromagnético como la evolución de la velocidad. A continuación, se justifica esta influencia a partir de las ecuaciones del modelo.

El torque electromagnético $T_m(t)$ se definió como:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] i_{qs}^r(t) \quad (44)$$

Para analizar la velocidad de rotación, se observa la ecuación diferencial para $i_{ds}^r(t)$:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} (v_{ds}^r(t) - R_s(T_s) i_{ds}^r(t) + L_q i_{qs}^r(t) P_p \omega_m(t))$$

Y, considerando $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$, es posible despejar $\omega_m(t)$:

$$\omega_m(t) = \frac{R_s(T_s^\circ) i_{ds}^r(t) - v_{ds}^r(t)}{L_q i_{qs}^r(t) P_p} \quad (45)$$

Al analizar las expresiones obtenidas y considerando una máquina de polos salientes $L_d > L_q$, puede observarse que la corriente directa $i_{ds}^r(t)$ influye de manera directa sobre el flujo magnético total y, por lo tanto, sobre el torque y la velocidad de la máquina.

- Si $i_{ds}^r(t) > 0$, se incrementa el flujo magnético efectivo en el entrehierro (refuerzo de campo), lo que conduce a un aumento del torque disponible y a una reducción de la velocidad para una misma potencia transmitida.
- Si $i_{ds}^r(t) < 0$, se produce un debilitamiento del flujo magnético, lo que disminuye el torque y permite alcanzar mayores velocidades de rotación.
- Si $i_{ds}^r(t) = 0$, el flujo concatenado queda determinado únicamente por los imanes permanentes, es decir, por el término λ_m^r .

La relación inversa entre torque y velocidad asociada a la corriente directa puede interpretarse considerando que la potencia mecánica transmitida satisface:

$$P_e(t) = T_m(t) \omega_m(t) \quad (46)$$

En los accionamientos PMSM suele buscarse que la corriente del estator no contribuya al establecimiento del flujo magnético, dado que este es provisto por los imanes permanentes del rotor. De esta manera, toda la corriente puede destinarse a la producción de torque, eliminando efectos de reluctancia y simplificando el comportamiento dinámico.

Sin embargo, los modos de operación con refuerzo o debilitamiento de campo pueden resultar ventajosos dependiendo de la aplicación:

- El refuerzo de campo es útil cuando se requiere elevado torque a bajas velocidades, como en sistemas de tracción, grúas o ascensores.
- El debilitamiento de campo es apropiado en aplicaciones donde se prioriza alcanzar altas velocidades con torque moderado, como en ventiladores o compresores.

3.6.7. Funciones de transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado

Para caracterizar completamente la dinámica del sistema lineal invariante en el tiempo, resulta fundamental obtener las funciones de transferencia que relacionan las entradas de control y perturbación con la salida de interés.

Las funciones de transferencia permiten analizar el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia. Para su obtención, se aplica la transformada de Laplace al modelo LTI simplificado, considerando condiciones iniciales nulas.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

Considerando condiciones iniciales nulas, el modelo LTI simplificado (con $i_{ds}^r \equiv 0$, $i_{0s} \equiv 0$ y $R_s = \text{constante}$) está compuesto por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[-b_{eq}\omega_m(t) + \frac{3}{2}P_p\lambda'_m i_{qs}^r(t) - \frac{1}{r}T_l(t) \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s i_{qs}^r(t) - P_p\lambda'_m \omega_m(t)] \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación:

$$\begin{cases} s\Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s\Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \left(-b_{eq}\Omega_m(s) + \frac{3}{2}P_p\lambda'_m I_{qs}^r(s) - \frac{T_l(s)}{r} \right) \\ sI_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} (V_{qs}^r(s) - R_s I_{qs}^r(s) - P_p\lambda'_m \Omega_m(s)) \end{cases} \quad (47)$$

Donde las variables en mayúsculas representan las transformadas de Laplace de las variables temporales correspondientes.

Despejando $I_{qs}^r(s)$ de la tercera ecuación:

$$I_{qs}^r(s) = \frac{V_{qs}^r(s) - P_p\lambda'_m \Omega_m(s)}{sL_q + R_s}$$

Reemplazando en la segunda ecuación y reagrupando términos:

$$\Theta_m(s) \left[s^3 J_{eq} L_q + s^2 (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) + s \left(b_{eq} R_s + \frac{3}{2} P_p (\lambda'_m)^2 \right) \right] = \frac{3}{2} P_p \lambda'_m V_{qs}^r(s) - \frac{s L_q + R_s}{r} T_l(s)$$

Ahora despejando $\Theta_m(s)$:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda'_m V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} (s L_q + R_s) T_l(s)}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p (\lambda'_m)^2) s} \quad (48)$$

Por lo tanto, las funciones de transferencia resultan:

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda'_m}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + b_{eq} L_q) s^2 + b_{eq} R_s + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda'_m)^2 s} \quad (49)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} (s L_q + R_s)}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + b_{eq} L_q) s^2 + b_{eq} R_s + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda'_m)^2 s} \quad (50)$$

Entonces la respuesta completa del sistema queda expresada como:

$$\Theta_m(s) = G_{V_{qs}^r}(s) \cdot V_{qs}^r(s) + G_{T_l}(s) \cdot T_l(s) \quad (51)$$

3.7. Análisis de estabilidad a lazo abierto para modelo LTI equivalente aumentado

El denominador de las funciones de transferencia coincide con el polinomio característico del sistema. Por lo tanto, los polos del modelo LTI equivalente aumentado a lazo abierto se determinan imponiendo que dicho polinomio sea nulo. De esta forma se identifican los modos dinámicos dominantes del sistema y se evalúa su estabilidad.

$$J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s^2 + \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda'_m)^2 \right) s = 0$$

$$s \left(J_{eq} L_q s^2 + (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) s + R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda_m^r)^2 \right) = 0$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = \frac{-(L_q b_{eq} + R_s(T_s^\circ) J_{eq}) \pm \sqrt{(L_q b_{eq} + R_s(T_s^\circ) J_{eq})^2 - 4(J_{eq} L_q)(R_s(T_s^\circ) b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda_m^r)^2)}}{2(J_{eq} L_q)} \end{cases} \quad (52)$$

Observando las funciones de transferencia, vemos que la única que introduce ceros en el sistema es la relacionada con la entrada T_l . Entonces, igualando el numerador a cero:

$$\begin{aligned} s L_q + R_s &= 0 \\ s_z &= -\frac{R_s}{L_q} \end{aligned} \quad (53)$$

En este modelo se consideran constantes todos los parámetros, con excepción de la resistencia estatórica $R_s(T_s^\circ)$, la cual varía con la temperatura del estator $T_s^\circ(t)$. Tomando como condiciones nominales $m_l = 0$ y $b_l = 0.1 \frac{N \cdot m}{rad/s}$, se obtienen los parámetros equivalentes que se utilizarán en el análisis.

$$J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2} = 1.9785 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2} = 2.1944 \times 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$$

$$L_q = 5.8 \times 10^{-3} \text{ H}$$

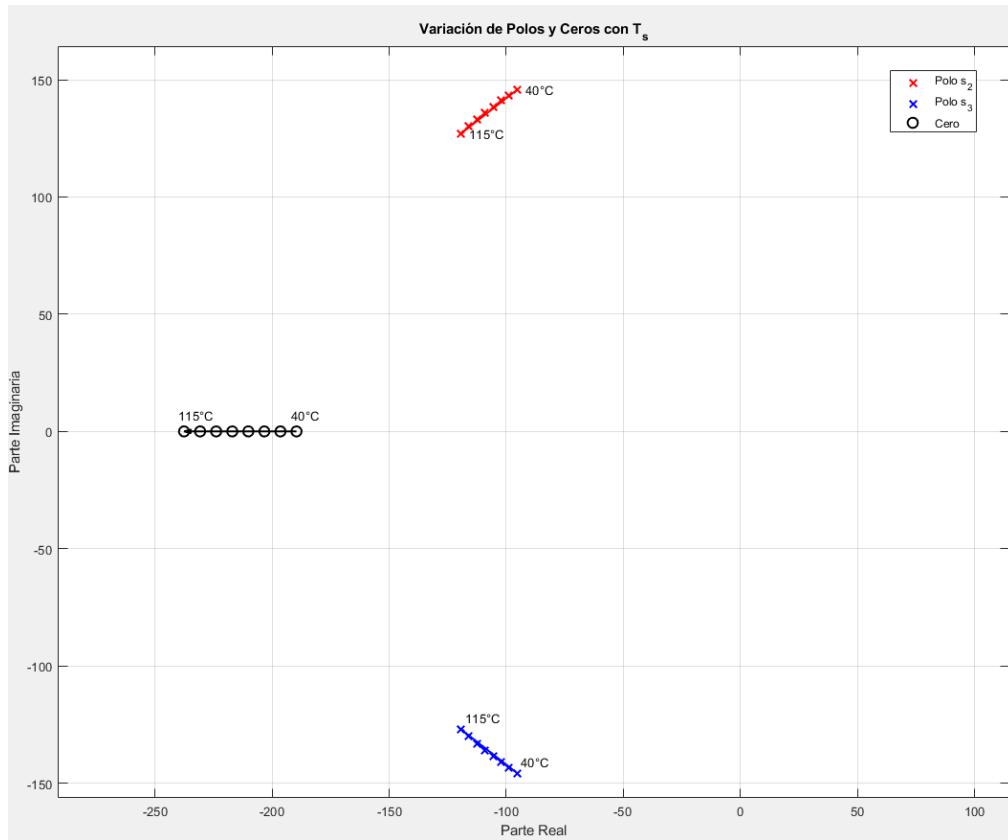
$$P_p = 3$$

$$\lambda_m^r = 0.016 \text{ Wb}$$

A partir de estos valores, se estudiará cómo cambian los polos y ceros del sistema cuando $R_s(T_s^\circ)$ varía dentro del intervalo de temperaturas $40^\circ\text{C} \leq T_s^\circ \leq 115^\circ\text{C}$

$R_s[\Omega]$	P1	P2	P3	Ceros	$\omega_n[\text{rad/s}]$	ζ
1.0996	0	95.34423	95.34423	189.5793	174.1481	0.5475
1.1393	0	98.77355	98.77355	-196.4379	174.1670	0.5671
1.1791	0	102.2028	102.2028	203.29655	174.1918	0.5867
1.2189	0	105.6322	105.6322	210.1551	174.2136	0.6063
1.2587	0	109.0615	109.0615	217.0138	174.2354	0.6260
1.2985	0	112.4908	112.4908	223.8724	174.257	0.6455
1.3382	0	115.9201	115.9201	230.7310	174.2791	0.6651
1.3780	0	119.3494	119.3494	237.5896	174.3009	0.6847

Tabla 1: Valores de R_s , Polos, ceros, frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento.

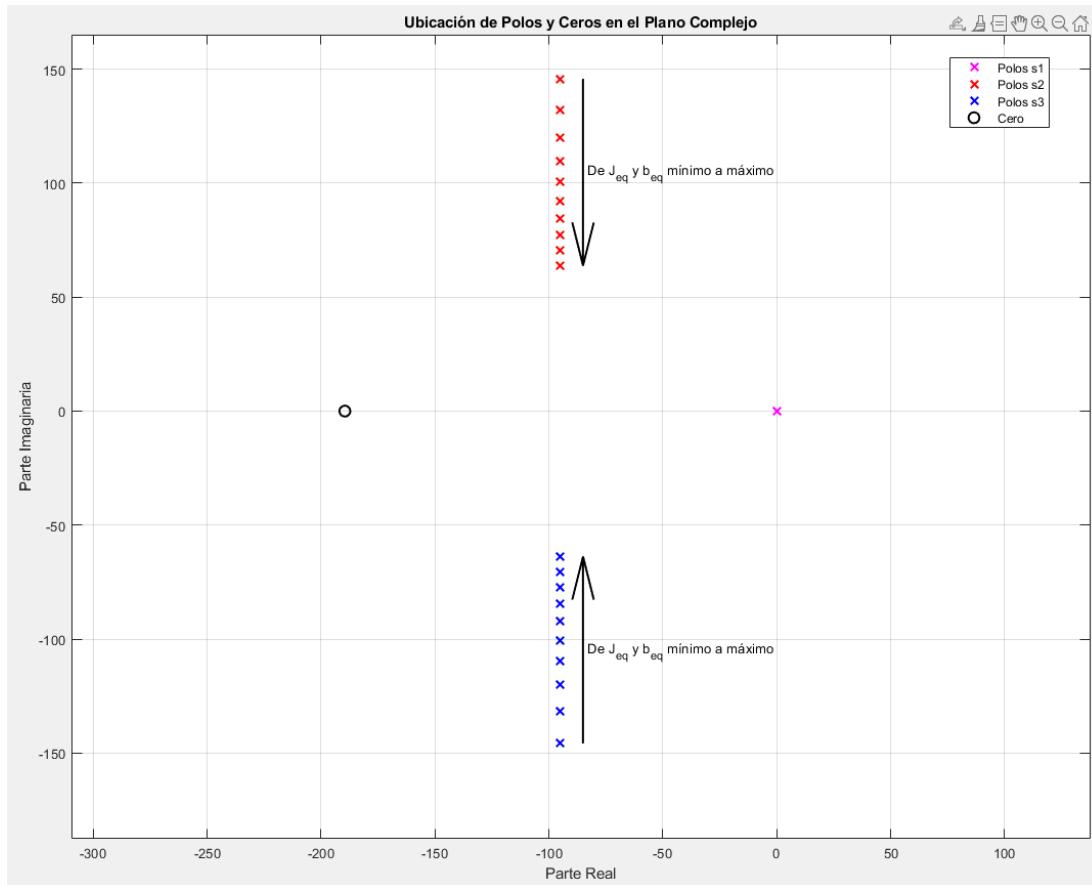
Figura 12: Variación de polos y ceros con T_s^o

El sistema presenta polos con parte real negativa en todos los casos analizados, lo que indica que el modelo es estable en las condiciones consideradas. Se observa que el incremento de la resistencia estatórica R_s produce un aumento del amortiguamiento del sistema, disminuyendo la magnitud de las oscilaciones y mejorando el comportamiento transitorio. No obstante, la frecuencia natural ω_n permanece prácticamente inalterada ante estas variaciones. Si el valor de R_s se incrementa excesivamente, el sistema puede tender a un comportamiento sobreamortiguado, lo que implicaría una reducción en la rapidez de respuesta. Por este motivo, resulta importante contemplar la variabilidad de este parámetro durante el diseño del controlador.

Asimismo, es posible estudiar la influencia de las variaciones en los parámetros mecánicos equivalentes b_{eq} y J_{eq} . Para ello, se consideran los valores nominales, mínimos y máximos asociados a la carga y fricción del sistema, manteniendo fija la temperatura de referencia en 40°C.

Condición	$J_{eq} [kg \cdot m^2]$	$b_{eq} [N \cdot m/rad]$	P1	P2	P3	Cero	$\omega_n [rad/s]$	ζ
Nominal	1,978E-05	1,98611E-05	0	95,2916	95,2916	189,5793	174,0908	0,5474
Mínimos	1,978E-05	1,98611E-05	0	95,2916	95,2916	189,5793	174,0908	0,5474
Máximos	4,583E-05	2,40278E-05	0	95,0518	95,0518	189,5793	114,4639	0,8304

Tabla 2: Tabla de parámetros en condiciones nominales, máximos y mínimos

Figura 13: Variación de polos y ceros con b_{eq} y J_{eq}

Los resultados muestran que un incremento en J_{eq} y b_{eq} provoca una disminución de la frecuencia natural ω_n , lo que se traduce en una respuesta dinámica más lenta. Por otro lado, un aumento en ζ reduce la amplitud de las oscilaciones.

3.7.1. Frecuencia natural y amortiguamiento

Se puede comparar el polinomio característico obtenido con la ecuación característica de un sistema de segundo orden, y resolver para hallar la frecuencia natural ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ζ .

El sistema de segundo orden puede expresarse como:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Por otra parte, el polinomio característico obtenido del modelo desarrollado resulta:

$$s^2 + \frac{L_q b_{eq} + R_s(T_s^\circ) J_{eq}}{J_{eq} L_q} s + \frac{R_s(T_s^\circ) b_{eq} + \frac{3}{2} p_p^2 (\lambda_m'^r)^2}{J_{eq} L_q} = 0$$

Comparando ambas expresiones, se obtiene que la frecuencia natural está dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s(T_s^\circ) b_{eq} + \frac{3}{2} p_p^2 (\lambda_m'^r)^2}{J_{eq} L_q}}$$

Y el coeficiente de amortiguamiento resulta:

$$\zeta = \frac{L_q b_{eq} + R_s(T_s^\circ) J_{eq}}{2 J_{eq} L_q \omega_n}$$

Podemos observar que los valores de ω_n y de ζ también dependen de los parámetros equivalentes J_{eq} y b_{eq} , así como de la resistencia del estator R_s , la cual varía con la temperatura.

Condición	$\omega_n [rad/s]$	ζ
Manteniendo valores equivalentes nominales		
$R_s = 1.0996$ (40°C)	174,1481	0,5475
$R_s = 1.3979$ (115°C)	174,3118	0,6945
Manteniendo R_s a 40°C y modificando J_{eq}, b_{eq}		
J_{eq}, b_{eq} mínimos (R_s 40°C)	174,0908	0,5474
J_{eq}, b_{eq} máximos (R_s 40°C)	114,4640	0,8304
Manteniendo R_s a 115°C y modificando J_{eq}, b_{eq}		
J_{eq}, b_{eq} mínimos (R_s 115°C)	174,2390	0,6945
J_{eq}, b_{eq} máximos (R_s 115°C)	114,5817	1,05402

Tabla 3: Comparación de ω_n y ζ bajo diferentes condiciones

Se aprecia que, al aumentar la temperatura del estator, lo que implica un incremento en la resistencia R_s , el coeficiente de amortiguamiento ζ crece, mientras que la frecuencia natural ω_n prácticamente no presenta variaciones apreciables. En cambio, al alterar los parámetros equivalentes asociados a la inercia y a la fricción, ω_n sí experimenta cambios importantes, particularmente en el caso de valores máximos, donde disminuye de manera notable. Esto pone en evidencia que los parámetros mecánicos equivalentes influyen de forma directa en la dinámica del sistema, afectando tanto la frecuencia natural como el nivel de amortiguamiento.

3.8. Análisis de observabilidad completa de estado para el modelo LTI aumentado equivalente