

Asignación 1, Mecánica Clásica

Deivy Olago, Juan D. Vega^{*}
Universidad Industrial de Santander
Calle 9 Número 27

31 de agosto de 2024

Índice

1. El Problema	2
1.1. Análisis Vectorial	2
2. Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema	3
2.1. El Lagrangiano y su Aplicación al Problema de los Péndulos	4
2.2. Representación Vectorial	4
2.2.1. Vectores de posición	4
2.2.2. Vectores Velocidad	5
2.3. Energía	5
2.3.1. Energía Cinética	5
2.3.2. Energía Potencial Gravitatoria	6
2.3.3. Energía Potencial Elástica	7
3. Planteamiento del Lagrangiano	8
3.1. Derivar ecuaciones de movimiento	9
3.2. Derivación de las ecuaciones de movimiento	9
3.2.1. Ecuación para θ_1	9
3.2.2. Ecuación para θ_2	9
4. Integración Numérica	11
5. Modificación de Parámetros y ubicaciones	12
5.1. Resorte a la mitad para ángulos generales	12
5.2. Vectores ajustados para la nueva configuración	13
5.3. Energía del sistema	13

^{*} e-mail:

6. Sistema Caótico	15
7. Análisis del Comportamiento del Sistema	15
7.1. Resolución Numérica y Gráficas	15
7.2. Análisis en el Dominio de la Frecuencia	16
8. Ecuaciones Simplificadas para Péndulos Acoplados con Aproximación de Ángulos Pequeños	17
8.1. Ecuación para θ_1	17
8.2. Ecuación para θ_2	18
8.3. Simplificación del Lagrangiano y las Ecuaciones de Movimiento con Resorte Acoplado a la Mitad de los Péndulos	18

Resumen

El siguiente proyecto pertenece a la materia de Mecánica Clásica enfocado en el uso de la Mecánica Lagrangiana. El objetivo de nuestro trabajo será resolver el problema de dos péndulos que en cuyos extremos cuelgan masas iguales, estos son fijos y oscilan, además están unidos por un resorte.

Para ello realizaremos un análisis vectorial del sistema para encontrar el sistema de ecuaciones que describe la posición de ambos péndulos en el tiempo, encontraremos con el uso del Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones diferenciales que posteriormente resolveremos. Además de eso, analizaremos distintos casos en los que el resorte tiene una u otra posición. También, revisaremos las condiciones y los momentos en los que se obtiene un sistema caótico y analizaremos como llegamos a ciertas conclusiones sobre sistemas de este tipo. Revisaremos el comportamiento de la señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. Finalmente, simplificaremos el problema y analizaremos condiciones y aproximaciones simples como ángulos pequeños en los que aproximamos el seno y el coseno.

Finalmente, este trabajo tiene como objetivo mejorar nuestra comprensión de distintos fenómenos físicos y permitir a los estudiantes del curso mejorar en sus habilidades de análisis y aplicación de matemática en problemas físicos en particular con la aplicación de la Mecánica lagrangiana.

1. El Problema

Considere el caso de dos péndulos de igual masa m y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud l . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica k .

1.1. Análisis Vectorial

En este trabajo, se establecieron las siguientes definiciones:

- El origen del sistema de referencia se ubica en el Pivote₁.
- θ_1 se define como el ángulo entre la vertical y el péndulo 1.
- θ_2 se define como el ángulo entre la vertical y el péndulo 2.

- El vector \vec{r}_1 representa el vector que va desde el origen del sistema de coordenadas hasta la Masa 1.
- El vector \vec{r}_2 representa el vector que va desde el origen del sistema hasta la Masa 2.
- Se introduce un vector adicional \vec{c} , que va desde el pivote del péndulo 2 hasta la Masa 2.
- La distancia que separa las dos masas se denota por el vector \vec{a} .
- La longitud fija de ambos péndulos es b .
- La distancia y_1 se define como la distancia vertical desde el origen hasta la proyección vertical de la Masa 1. Para $\theta_1 = 0$, se tiene que $y_1 = b$.
- Finalmente, x_1 se define como la distancia horizontal desde la proyección vertical del péndulo 1 hasta un punto final x_n .

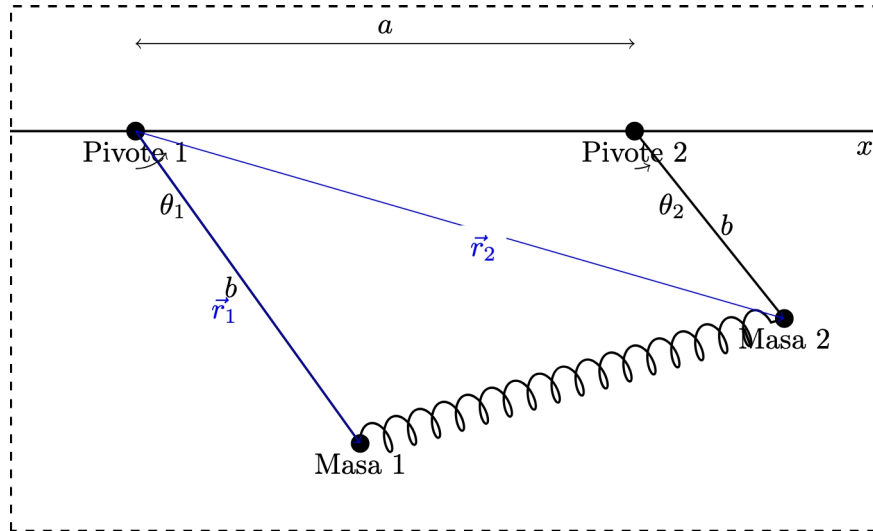


Figura 1: Análisis vectorial para describir la posición de las masas en el sistema

2. Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema

Vamos a analizar el problema con el uso de la Mecánica Lagrangiana. Para ello se realizará un estudio juicioso de las energías presentes en el sistema y en los movimientos involucrados. El primer paso es entender como se aplican los principios matemáticos a la idea de solución que proponemos, entonces:

2.1. El Lagrangiano y su Aplicación al Problema de los Péndulos

El lagrangiano es una función fundamental en la mecánica clásica que se utiliza para describir la dinámica de un sistema físico. Se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V del sistema:

$$L = T - V \quad (1)$$

En el contexto del problema de los péndulos, el lagrangiano nos permite derivar las ecuaciones de movimiento a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

donde q_i representa las coordenadas generalizadas y \dot{q}_i sus derivadas con respecto al tiempo.

Para el sistema de dos péndulos unidos por un resorte, cada péndulo tiene su propia energía cinética y potencial, y el resorte introduce una energía potencial adicional asociada a su elongación o compresión. Al formular el lagrangiano para este sistema, se consideran todas estas contribuciones, y las ecuaciones de Euler-Lagrange se aplican a las coordenadas generalizadas, que en este caso son los ángulos θ_1 y θ_2 .

El uso del lagrangiano es particularmente útil en sistemas como este, donde múltiples fuerzas y movimientos están involucrados, ya que permite un enfoque sistemático para encontrar las ecuaciones de movimiento sin necesidad de analizar directamente las fuerzas. La estructura del lagrangiano en nuestra aplicación es útil, ya que permitirá (y se demostrará más adelante) obtener una solución más elegante y general del problema, brindando una mayor comprensión de los fenómenos físicos involucrados.

2.2. Representación Vectorial

2.2.1. Vectores de posición

Para el sistema de dos péndulos, podemos expresar los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 de la siguiente manera:

El vector \vec{r}_1 se define como el vector desde el origen del sistema de coordenadas hasta la Masa 1:

$$\vec{r}_1 = b \sin(\theta_1) \hat{i} - b \cos(\theta_1) \hat{j} \quad (3)$$

El vector \vec{r}_2 se define como el vector que va desde el origen del sistema hasta la Masa 2. Este vector se puede obtener sumando la distancia \vec{a} al vector \vec{c} , que se expresa como:

$$\vec{r}_2 = \vec{a} + \vec{c} \quad (4)$$

Donde \vec{a} es el vector desde el pivote del péndulo 1 hasta el pivote del péndulo 2, y \vec{c} es el vector desde el pivote del péndulo 2 hasta la Masa 2. En términos de componentes, esto se puede escribir como:

$$\vec{r}_2 = \vec{a} + (b \sin(\theta_2) \hat{i} - b \cos(\theta_2) \hat{j}) \quad (5)$$

Donde \vec{a} es el vector:

$$\vec{a} = a \hat{i} \quad (6)$$

Por lo tanto, combinando todos los términos, obtenemos:

$$\vec{r}_2 = (a + b \sin(\theta_2)) \hat{i} - b \cos(\theta_2) \hat{j} \quad (7)$$

2.2.2. Vectores Velocidad

Y, para las expresiones de los vectores velocidad:

$$\vec{r}_1 = b \sin(\theta_1) \hat{i} - b \cos(\theta_1) \hat{j} \quad (8)$$

La derivada temporal de \vec{r}_1 se obtiene aplicando la regla de la derivada a cada componente:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = b \cos(\theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} \hat{i} + b \sin(\theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} \hat{j} \quad (9)$$

Donde $\frac{d\theta_1}{dt} = \dot{\theta}_1$ es la velocidad angular del primer péndulo. Entonces:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = b \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \hat{i} + b \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \hat{j} \quad (10)$$

A continuación, calculamos la derivada temporal del vector \vec{r}_2 :

$$\vec{r}_2 = (a + b \sin(\theta_2)) \hat{i} - b \cos(\theta_2) \hat{j} \quad (11)$$

La derivada temporal de \vec{r}_2 se calcula como sigue:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = b \cos(\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \hat{i} + b \sin(\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \hat{j} \quad (12)$$

Donde $\frac{d\theta_2}{dt} = \dot{\theta}_2$ es la velocidad angular del segundo péndulo. Entonces:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = b \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \hat{i} + b \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \hat{j} \quad (13)$$

2.3. Energía

2.3.1. Energía Cinética

Para calcular la energía cinética del sistema, primero determinamos las derivadas temporales de los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 que ya hemos encontrado. La energía cinética de cada masa se calcula usando la fórmula general para la energía cinética de una partícula: $T = \frac{1}{2} m \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2$.

Dado que las masas m_1 y m_2 son iguales, las llamamos m .

Primero, calculamos la energía cinética de la masa 1:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = b\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \hat{i} + b\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \hat{j} \quad (14)$$

Por lo tanto, la energía cinética de la masa 1 es:

$$T_1 = \frac{1}{2}m \left| \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right|^2 = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_1^2 \quad (15)$$

A continuación, calculamos la energía cinética de la masa 2:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = b\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \hat{i} + b\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \hat{j} \quad (16)$$

Por lo tanto, la energía cinética de la masa 2 es:

$$T_2 = \frac{1}{2}m \left| \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right|^2 = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_2^2 \quad (17)$$

Finalmente, la energía cinética total del sistema es la suma de las energías cinéticas de las dos masas:

$$T = T_1 + T_2 \quad (18)$$

$$T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_2^2 \quad (19)$$

Entonces:

$$T = \frac{1}{2}mb^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \quad (20)$$

2.3.2. Energía Potencial Gravitatoria

En este caso, el sistema lo vamos a describir con dos energías potenciales, tanto la gravitatoria como la potencial elástica que aparece por el resorte.

La energía potencial gravitatoria V se calcula sumando las contribuciones de ambas masas. La energía potencial gravitatoria de cada masa es:

Para la masa 1:

$$V_1 = mg(-b \cos(\theta_1)) \quad (21)$$

Para la masa 2:

$$V_2 = mg(-b \cos(\theta_2)) \quad (22)$$

Sumando las energías potenciales de ambas masas:

$$V = V_1 + V_2 \quad (23)$$

$$V = mg(-b \cos(\theta_1) - b \cos(\theta_2)) \quad (24)$$

Factorizando $-mgb$:

$$V = -mgb(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \quad (25)$$

2.3.3. Energía Potencial Elástica

Para calcular la energía potencial elástica V_e del resorte, utilizamos la fórmula:

$$V_e = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (26)$$

donde Δx es la elongación del resorte, y k es la constante del resorte.

Para hallar la elongación Δx , definimos:

$$\Delta x = L - L_0 \quad (27)$$

donde:

- L_0 es la longitud natural del resorte en reposo, que será igual a la magnitud del vector \vec{a} . - L es la longitud actual del resorte, que se calcula como la distancia entre las masas.

La longitud actual del resorte L se obtiene usando la distancia euclidiana entre los puntos correspondientes a las posiciones de las masas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . La distancia L se calcula como:

$$L = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (28)$$

Donde:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left[(a + b(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)))\hat{i} + (b(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)))\hat{j} \right] \quad (29)$$

La longitud L es entonces:

$$L = \sqrt{(a + b(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)))^2 + (b(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)))^2} \quad (30)$$

La elongación del resorte Δx es:

$$\Delta x = \sqrt{(a + b(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)))^2 + (b(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)))^2} - L_0 \quad (31)$$

Donde L_0 es la magnitud del vector \vec{a} :

$$L_0 = |\vec{a}| = a \quad (32)$$

Finalmente, la energía potencial elástica es:

$$V_e = \frac{1}{2}k(\sqrt{(a + b(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)))^2 + (b(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)))^2} - a)^2 \quad (33)$$

Simplificando dentro de la raíz cuadrada, tenemos:

$$L^2 = [a + b(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))]^2 + [b(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))]^2 \quad (34)$$

$$= a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))^2 + b^2(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))^2 \quad (35)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))^2 + (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))^2 = 2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (36)$$

La expresión para L se simplifica a:

$$L^2 = a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2 [2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)] \quad (37)$$

$$L = \sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2 [2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)]} \quad (38)$$

Es posible entonces reescribir la energía potencial más simplificada como:

$$V_e = \frac{1}{2}k(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2 [2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)]} - a)^2 \quad (39)$$

Luego de encontrar las expresiones, es necesario encontrar el lagrangiano.

3. Planteamiento del Lagrangiano

El lagrangiano L del sistema se define como la diferencia entre la energía cinética T y la suma de las energías potenciales, gravitatoria y elástica:

$$L = T - (V_{\text{gravitatoria}} + V_{\text{elástica}}) \quad (40)$$

Sustituyendo las ecuaciones correspondientes:

$$T = \frac{1}{2}mb^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (20)$$

$$V_{\text{gravitatoria}} = -mgb(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \quad (25)$$

$$V_{\text{elástica}} = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2 [2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)]} - a \right)^2 \quad (33)$$

Entonces, el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}mb^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgb(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}k \left(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2 [2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)]} - a \right)^2 \quad (41)$$

3.1. Derivar ecuaciones de movimiento

Considerando el Lagrangiano dado por:

$$L = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgb(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2[2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)]} - a\right)^2 \quad (42)$$

Utilizaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (43)$$

3.2. Derivación de las ecuaciones de movimiento

3.2.1. Ecuación para θ_1

Derivando parcialmente el Lagrangiano respecto a $\dot{\theta}_1$ y luego θ_1 , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= mb^2\dot{\theta}_1, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -mgb\sin(\theta_1) + \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left[-\frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + b^2[2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)]} - a\right)^2\right]. \end{aligned}$$

La derivada temporal de $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}$ es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = mb^2\ddot{\theta}_1. \quad (44)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para θ_1 se convierte en:

$$mb^2\ddot{\theta}_1 - \left(-mgb\sin(\theta_1) + \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left[-\frac{1}{2}k\left(\sqrt{\dots} - a\right)^2\right]\right) = 0. \quad (45)$$

3.2.2. Ecuación para θ_2

Repetimos el procedimiento para θ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= mb^2\dot{\theta}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -mgb\sin(\theta_2) + \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left[-\frac{1}{2}k\left(\sqrt{\dots} - a\right)^2\right]. \end{aligned}$$

La derivada temporal de $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}$ es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = mb^2\ddot{\theta}_2. \quad (46)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para θ_2 es:

$$mb^2\ddot{\theta}_2 - \left(-mgb \sin(\theta_2) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[-\frac{1}{2}k (\sqrt{\dots} - a)^2 \right] \right) = 0. \quad (47)$$

Despejando en forma de ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{1}{mb^2} & \left(-mgb \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}k \left[2ab \cos(\theta_1) + 2b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right. \right. \\ & + a \left(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + 2b^2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1))} \right)^{-1} \\ & \left. \left. (-2ab \cos(\theta_1) - 2b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) \right] \right) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{1}{mb^2} & \left(-mgb \sin(\theta_2) + \frac{1}{2}k \left[-2ab \cos(\theta_2) - 2b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right. \right. \\ & + a \left(\sqrt{a^2 + 2ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + 2b^2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1))} \right)^{-1} \\ & \left. \left. (2ab \cos(\theta_2) + 2b^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) \right] \right) \end{aligned} \quad (49)$$

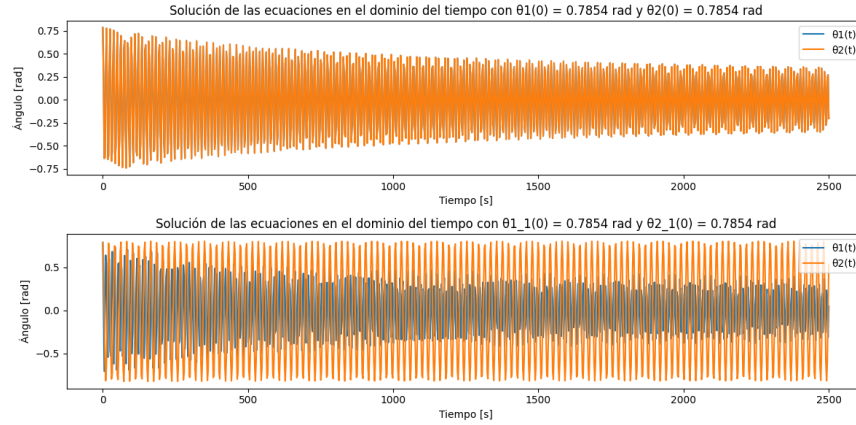


Figura 2: Solución de las ecuaciones diferenciales con parámetros iniciales

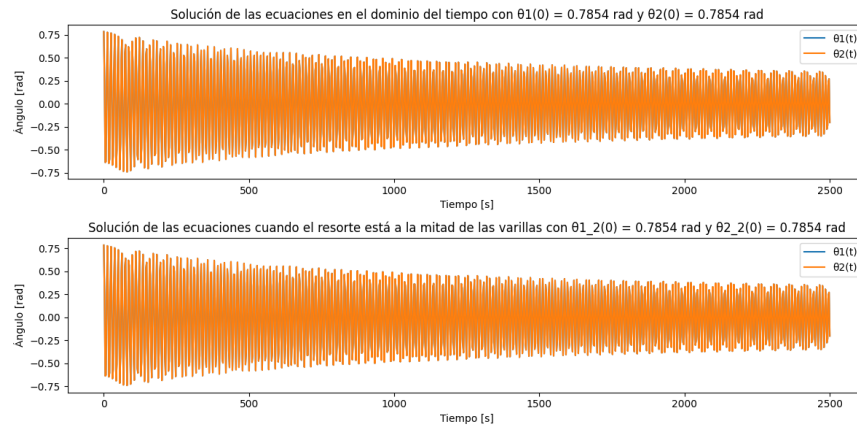


Figura 3: Solución de las ecuaciones diferenciales con parámetros iniciales

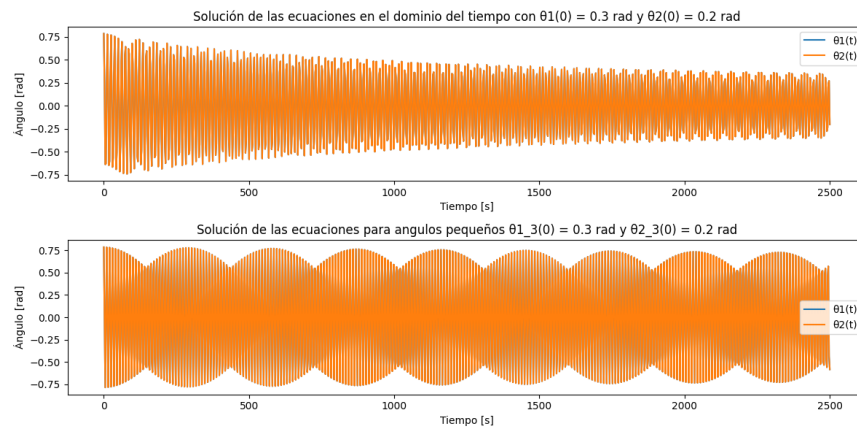


Figura 4: Solución de las ecuaciones diferenciales con parámetros iniciales

4. Integración Numérica

En esta sección, utilizamos la integración numérica para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales planteado en el problema de los dos péndulos unidos por un resorte. Para ello, se hace uso de las librerías `numpy`, `scipy.fft`, y `scipy.integrate.solve_ivp` en Python.

```

import numpy as np
from scipy.fft import fft
from scipy.integrate import solve_ivp

# Definimos la ecuación diferencial
def sistema_ecuaciones(t, y):
    theta1, dtheta1_dt, theta2, dtheta2_dt = y

    # Ecuación para el primer péndulo

    d2tetha1_dt2 = ((-1)*m*g*b*(np.sin(theta1))-(0.5)*k*(-2*a*b*(np.cos(theta1))-2*(b**2)*(np.cos(theta1))))
    d2tetha2_dt2 = ((-1)*m*g*b*(np.sin(theta2))-(0.5)*k*(2*a*b*(np.cos(theta2))+2*(b**2)*(np.cos(theta2))))

    return [dtheta1_dt, d2tetha1_dt2, dtheta2_dt, d2tetha2_dt2]

solucion = solve_ivp(sistema_ecuaciones, t_span, condiciones_iniciales, t_eval=t_eval)

# Se obtienen los thetas para el primer SED
theta1 = solucion.y[0]
theta2 = solucion.y[2]

```

Figura 5: Código para resolver el sistema de ecuaciones con Python y `scipy`

5. Modificación de Parámetros y ubicaciones

La pregunta que se plantea es: ¿Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas? ¿Cómo influye la relación m_1/m_2 si consideramos que las masas son diferentes? ¿Cómo influye la relación l_1/l_2 si consideramos que el largo de las varillas es diferente? Vamos a analizarlo:

5.1. Resorte a la mitad para ángulos generales

Consideremos la siguiente gráfica:

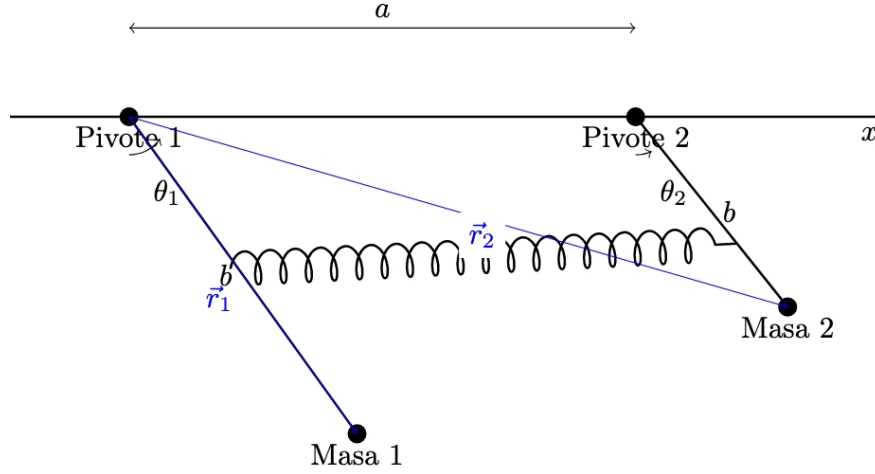


Figura 6: Análisis vectorial para describir la posición de las masas en el sistema con el resorte en la mitad de los péndulos

5.2. Vectores ajustados para la nueva configuración

Dado que ahora el resorte está unido a ambas mitades de los péndulos, ajustamos las expresiones vectoriales de \vec{r}_2 y \vec{c} en consecuencia.

5.3. Energía del sistema

La energía cinética total del sistema sigue siendo:

$$T = \frac{1}{2}mb^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (50)$$

La energía potencial total incluye tanto la energía potencial gravitatoria como la energía potencial elástica:

$$V_{\text{total}} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mgb [(1 - \cos(\theta_1)) + (1 - \cos(\theta_2))] \quad (51)$$

Para calcular Δx , consideramos que la elongación es la diferencia entre la longitud del resorte en un momento dado y su longitud natural L_0 . Esto se obtiene utilizando las expresiones vectoriales de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a^2 + ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) - \frac{b^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1)} - a \quad (52)$$

Obtenemos el Lagrangiano:

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}mb^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) - mgb(1 - \cos(\theta_1)) - mgb(1 - \cos(\theta_2)) \\
- \frac{k}{2} \left[\left(\frac{1}{2}b^2 + a^2 + ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) - \frac{b^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) \right. \\
\left. - \left(\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + a^2 + ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) - \frac{b^2}{2} \cos(\theta_2 - \theta_1)} - a \right)^2 \right] \quad (53)
\end{aligned}$$

Y esto nos da las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
mb^2\ddot{\theta}_1 = -mgb\sin(\theta_1) \\
- \frac{k}{2} \left[-ab\cos(\theta_1) - \frac{b^2}{2}\sin(\theta_2 - \theta_1) \right. \\
\left. - 2a \left(\frac{1}{2}b^2 + a^2 + ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) - \frac{b^2}{2}\cos(\theta_2 - \theta_1) \right)^{-1/2} \cdot \left(ab\cos(\theta_1) + \frac{b^2}{2}\sin(\theta_2 - \theta_1) \right) \right] \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
mb^2\ddot{\theta}_2 = -mgb\sin(\theta_2) \\
- \frac{k}{2} \left[-ab\cos(\theta_2) - \frac{b^2}{2}\sin(\theta_2 - \theta_1) \right. \\
\left. - 2a \left(\frac{1}{2}b^2 + a^2 + ab(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) - \frac{b^2}{2}\cos(\theta_2 - \theta_1) \right)^{-1/2} \cdot \left(ab\cos(\theta_2) + \frac{b^2}{2}\sin(\theta_2 - \theta_1) \right) \right] \quad (55)
\end{aligned}$$

6. Sistema Caótico

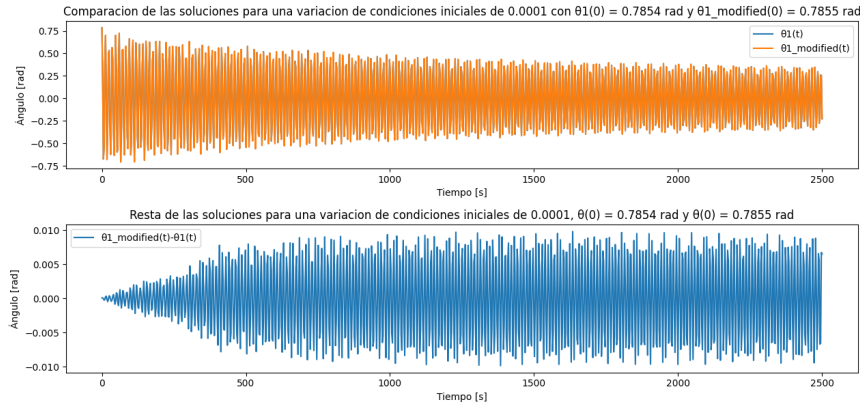


Figura 7: Comparativa entre soluciones con condiciones iniciales de ángulo ligeramente modificadas (0.0001)

En la gráfica superior, se mapea la solución θ_1 para dos ángulos iniciales que distan entre sí en 4 cifras decimales, (0.7854 y 0.7855) y en la gráfica inferior se muestra la resta de estas dos soluciones. Esta última gráfica permite observar una clara diferencia entre las dos soluciones con el paso del tiempo, aún frente a que las condiciones iniciales de estas solo varían en 4 cifras decimales. Esto de algún modo es un indicio de que estamos al frente de un sistema caótico, ya que, como vemos, presenta una gran sensibilidad ante una variación de las condiciones iniciales.

7. Análisis del Comportamiento del Sistema

Se nos propone lo siguiente: Analice el comportamiento de su señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

Para analizar el comportamiento del sistema de dos péndulos conectados por un resorte, se resolvieron las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de los péndulos utilizando Python. Las ecuaciones de movimiento se resolvieron numéricamente para obtener las trayectorias de los ángulos θ_1 y θ_2 en función del tiempo. Los resultados obtenidos fueron luego analizados en términos del espectro de potencias de Fourier y del espectrograma.

7.1. Resolución Numérica y Gráficas

Las ecuaciones diferenciales se resolvieron utilizando el método de integración numérica disponible en la librería `scipy` de Python. Se obtuvo la solución temporal para θ_1 y θ_2 que describe el comportamiento dinámico del sistema. La solución numérica se visualizó mediante gráficos que muestran cómo varían los ángulos en función del tiempo.

7.2. Análisis en el Dominio de la Frecuencia

Se llevó a cabo un análisis espectral de las señales obtenidas. Este análisis incluyó dos aspectos principales:

- **Espectro de Potencias de Fourier:** El espectro de potencias de Fourier proporciona una representación en frecuencia de la señal. Permite identificar las frecuencias dominantes en el sistema y observar cómo la energía de la señal se distribuye entre diferentes frecuencias. Se analizaron tanto las señales correspondientes a grandes amplitudes como a pequeñas amplitudes para identificar las diferencias en el contenido espectral.

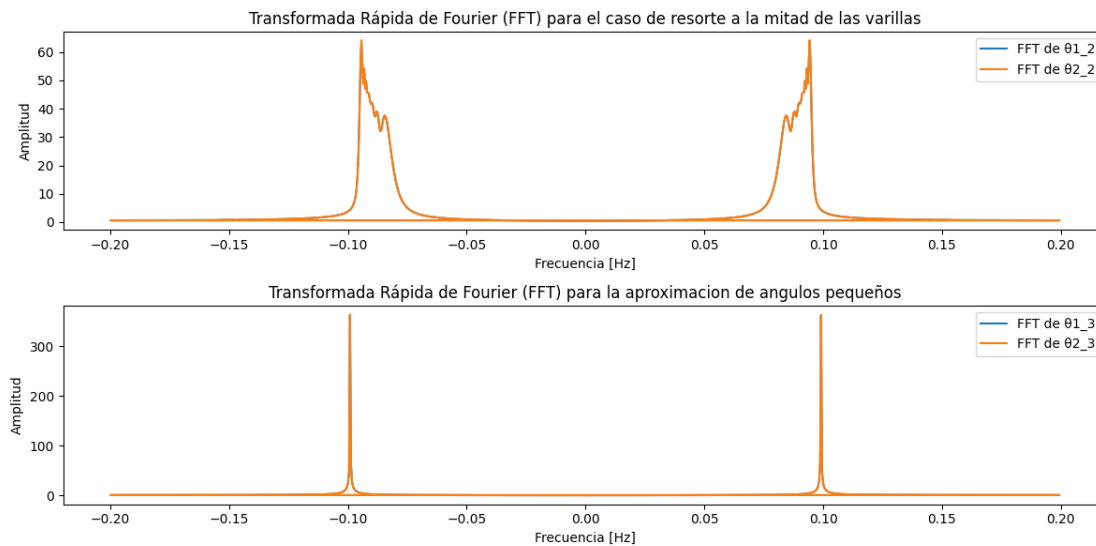


Figura 8: Transformada de Fourier para resorte a la mitad de las varillas y para aproximación de ángulos pequeños

- **Espectrograma:** El espectrograma muestra cómo el contenido en frecuencia de la señal cambia con el tiempo. Se utilizó para observar cómo las frecuencias presentes en la señal evolucionan durante el tiempo. El espectrograma fue calculado y visualizado para diferentes amplitudes, permitiendo una comprensión más profunda de la dinámica temporal del sistema.

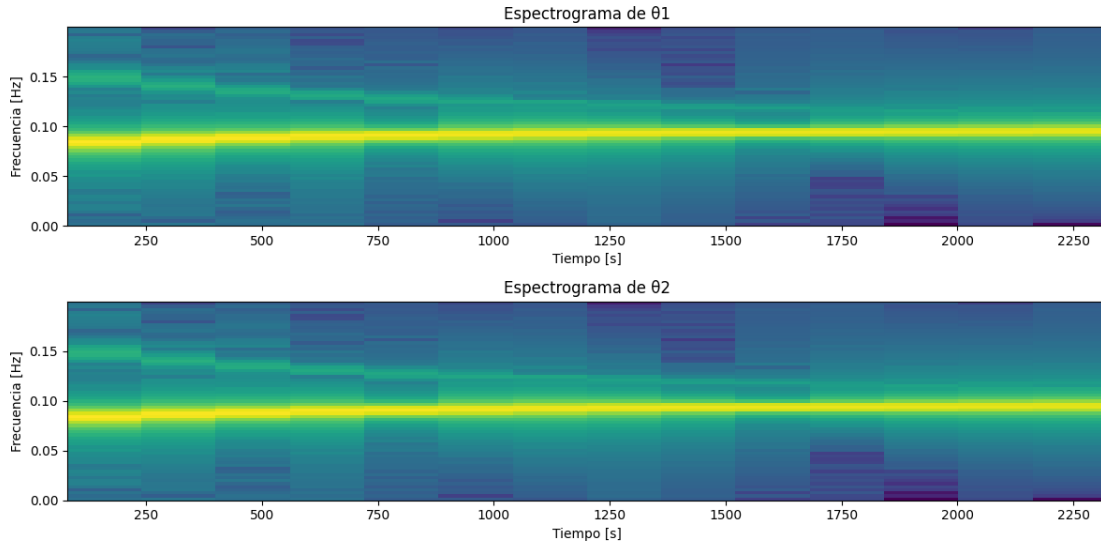


Figura 9: Espectrograma de la frecuencia

8. Ecuaciones Simplificadas para Péndulos Acoplados con Aproximación de Ángulos Pequeños

Se propone: Simplifique las ecuaciones suponiendo pequeñas oscilaciones. Esto es: considere $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$ y $\theta_1^2 \sim \theta_2^2 \sim 0$, $\sin \theta_1 \sim \theta_1$, $\sin \theta_2 \sim \theta_2$, $\cos \theta_1 \sim 1$ y $\cos \theta_2 \sim 1$.

Bajo la aproximación de ángulos pequeños, donde se asume que $\sin(\theta) \approx \theta$ y $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$, podemos simplificar las ecuaciones del movimiento de dos péndulos acoplados por un resorte, como sigue:

8.1. Ecuación para θ_1

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \approx \frac{1}{mb^2} \left(-mgb\theta_1 + \frac{1}{2}k \left[2ab + 2b^2(\theta_2 - \theta_1) - 2ab\theta_1^2 + a \left(\sqrt{a^2 + 2ab(\theta_2 - \theta_1) + b^2(\theta_2 - \theta_1)^2} \right)^{-1} (-2ab - 2b^2(\theta_2 - \theta_1)) \right] \right) \quad (56)$$

8.2. Ecuación para θ_2

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} \approx \frac{1}{mb^2} \left(-mgb\theta_2 + \frac{1}{2}k \left[-2ab - 2b^2(\theta_2 - \theta_1) + 2ab\theta_2^2 + a \left(\sqrt{a^2 + 2ab(\theta_2 - \theta_1) + b^2(\theta_2 - \theta_1)^2} \right)^{-1} (2ab + 2b^2(\theta_2 - \theta_1)) \right] \right) \quad (57)$$

Estas ecuaciones reflejan las dinámicas de los péndulos acoplados bajo la suposición de pequeñas desviaciones angulares desde la vertical, lo que simplifica considerablemente el análisis sin tener que resolver las ecuaciones completas no lineales.

8.3. Simplificación del Lagrangiano y las Ecuaciones de Movimiento con Resorte Acoplado a la Mitad de los Péndulos

Para el caso en que el resorte esté acoplado a la mitad de ambos péndulos y asumiendo ángulos pequeños con $\sin(\theta) \approx \theta$ y $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, el Lagrangiano simplificado es:

$$L = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}mgb(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{k}{2} \left(\frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 \right) \quad (58)$$

Las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$mb^2\ddot{\theta}_1 = -mgb\theta_1 - \frac{k}{2} \left(-ab - \frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right) - a \left(\frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + a^2 \right)^{-1/2} (ab + \frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)) \quad (59)$$

$$mb^2\ddot{\theta}_2 = -mgb\theta_2 - \frac{k}{2} \left(-ab - \frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1) \right) - a \left(\frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + a^2 \right)^{-1/2} (ab + \frac{b^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)) \quad (60)$$

Referencias

1. Maianti, M., Pagliara, S., Galimberti, G., & Parmigiani, F. (2009). Mechanics of two pendulums coupled by a stressed spring. *Am. J. Phys.*, 77(9), 834-838.
2. Guzev, M., & Dmitriev, A. (2016). Stability analysis of two coupled oscillators. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 4(2), 139-152.
3. Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). San Francisco: Addison Wesley.

4. Marion, J. B., & Thornton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (4th ed.). Harcourt College Publishers.
5. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (Vol. 1 of A Course of Theoretical Physics). Pergamon Press.
6. Symon, K. R. (1971). *Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley.
7. Fowles, G. R., & Cassiday, G. L. (1999). *Analytical Mechanics* (6th ed.). Saunders College Publishing.
8. Taylor, J. R. (2005). *Classical Mechanics*. University Science Books.
9. José, J. V., & Saletan, E. J. (1998). *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press.
10. Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2nd ed.). Springer.