Análisis Matemático I
Clase 23: Sucesiones e introducción a Series

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2020

Intuitivamente, una sucesión es una lista *infinita* de números:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Observar que al hacer un listado se está ordenando la colección de números. Cada uno de los números a_1, a_2, ... representa un término de la sucesión.

Por ejemplo, la lista de números

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

es una sucesión. De forma genérica, la sucesión puede representarse por su término $n-$ésimo

$$a_n = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De hecho, para distintos valores de n obtenemos

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2$$

$$n = 2 \longrightarrow a_2 = 4$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = 6.$$

$$\vdots$$

Observar que una sucesión puede verse como una función que a cada número natural n le asigna un número a_n.

Definición de sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales. En símbolos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denotamos una sucesón por los símbolos

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{o también} \qquad a_n.$$

Un ejemplo de sucesión es

$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

que puede escribirse también en la forma:

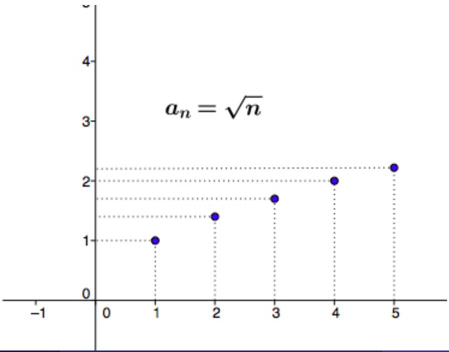
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}, ...\right\}.$$

Gráfica de una sucesión

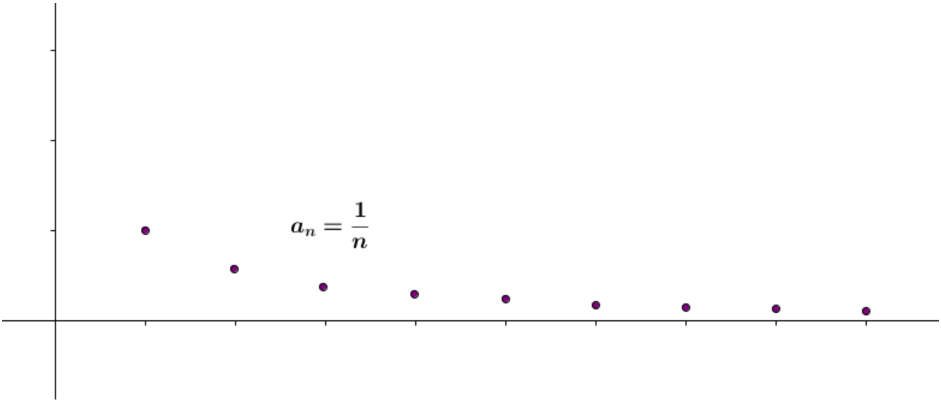
Dado que las sucesiones son funciones, es posible graficarlas. Sin embargo, a diferencia de las funciones que hemos estudiado, los gráficos de las sucesiones no constituyen curvas sino solamente una colección discreta de puntos. Por ejemplo, para la sucesión

$$a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

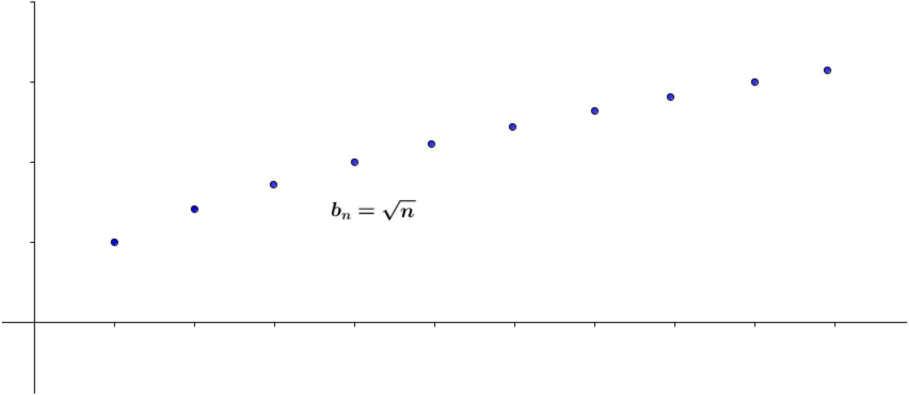
obtenemos el siguiente gráfico



Consideremos los siguientes gráficos de sucesiones



Convergencia de sucesiones



En el primer caso diríamos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

mientras que en el segundo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Si bien es posible definir el límite de sucesiones formalmente, no lo haremos en este curso. Definiremos a continuación la noción de convergencia de sucesiones.

Convergencia de sucesiones

Si el límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

existe y es igual a L, entonces decimos que la sucesión a_n converge a L. Si el límite no existe, decimos que la sucesión diverge.

Álgebra de límites de sucesiones

Propiedades algebraicas de límites de sucesiones

TEOREMA 1 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales, y sean A y B números reales. Las siguientes reglas se cumplen si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Regla de la suma:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$

Ejemplos:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$ Regla del múltiplo constante y el ejemplo 1a

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$ Regla de la diferencia y el ejemplo 1a

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ Regla del producto

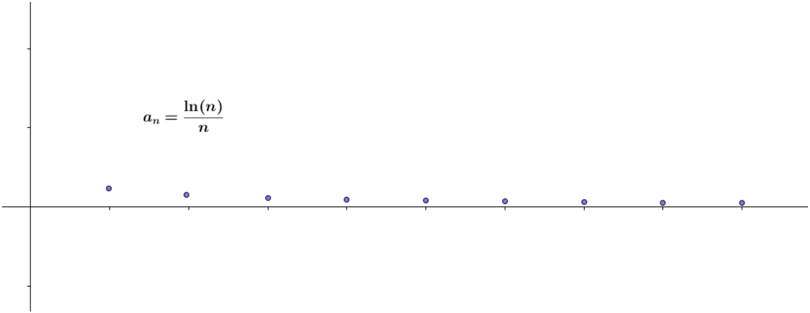
(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4 - 7n^6}{n^6 + 3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4/n^6) - 7}{1 + (3/n^6)} = \frac{0 - 7}{1 + 0} = -7.$ Reglas de la suma y el cociente ■

Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

Considere la sucesión:

$$a_n = \frac{ln(n)}{n}.$$

Su gráfico es



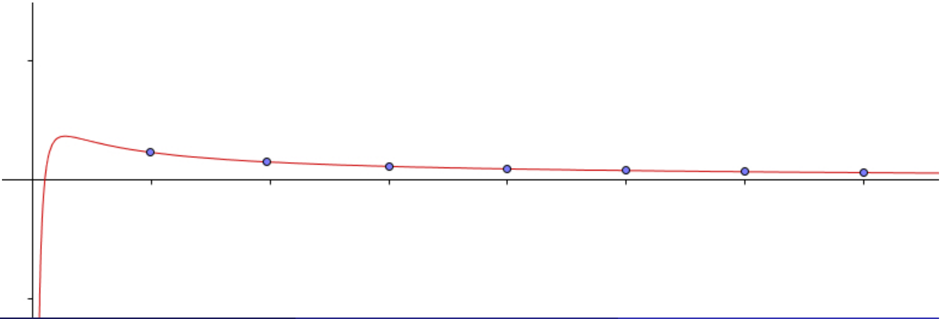
Para estudiar el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n},$$

se puede introducir la función

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x}.$$

Observando el gráfico



Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

podemos concluir que si el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$$

existe, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}.$$

La ventaja de introducir la función f es que podemos usar regla de L'Hopital.

De hecho en el ejemplo anteriore tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

y entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{n} = 0.$$

Cálculo de límites de sucesiones mediante funciones

Ejemplo: calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1}.$$

Para resolver el ejemplo, primero introducimos la función

$$f(x) = \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1}.$$

Cuando $x \to \infty$, el denominador tiende a infinito y estamos en la situación (2) de la regla de L'Hopital. Analizamos si el límite del cociente de las derivadas existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + cos(x)}{9x^2 + 2x} = 0.$$

Luego,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + sen(x) - 1}{3x^3 + x^2 + 1} = 0$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n) - 1}{3n^3 + n^2 + 1} = 0$$

Teorema de la compresión para sucesiones

TEOREMA 2: El teorema de la compresión para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Teorema de la compresión para sucesiones

TEOREMA 2: El teorema de la compresión para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ejemplos:

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ ya que $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(b) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ ya que $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$;

(c) $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ ya que $-\dfrac{1}{n} \leq (-1)^n \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Sucesiones monótonas y acotadas

Sucesión acotada

Decimos que una sucesión a_n es acotada si existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \text{ para todo } n.$$

Sucesión monótona

Sea a_n una sucesión. Entonces

- decimos que a_n es no decreciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.
- decimos que a_n es no creciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

Finalmente, una sucesión es monótona si es o bien no decreciente, o bien, no creciente.

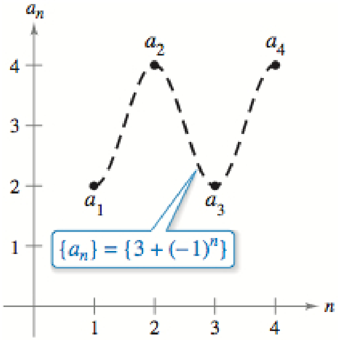


Figure : Sucesión no monótona

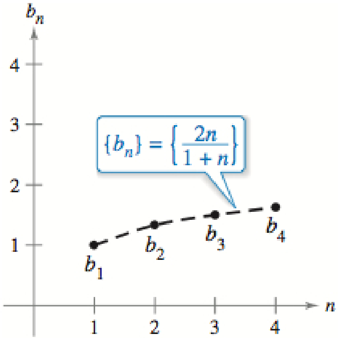


Figure : Sucesión monótona no decreciente

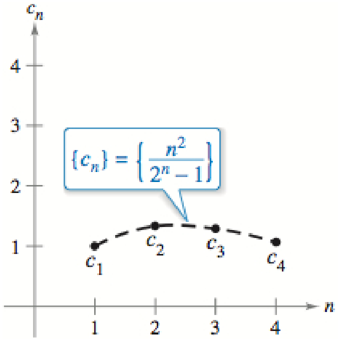
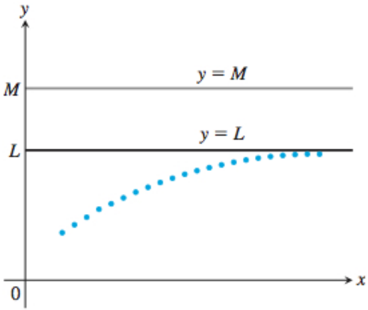


Figure : Sucesión no monótona

El siguiente teorema será utilizado más adelante

Teorema

Si una sucesión es monótona y acotada, entonces es convergente.



SERIES NUMÉRICAS

Comenzamos con una sucesión de números reales

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Deseamos extender el concepto de suma finita de números a **sumas infinitas**.

Idea y definición de Serie: Consideramos las siguientes *sumas parciales*

1. $s_1 = a_1$
2. $s_2 = a_1 + a_2$
3. $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
4. $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
5. $\vdots$
6. $s_N = a_1 + \cdots + a_N$
7. $\vdots$

Así, hemos construído una nueva sucesión

$$\{s_N\}_{N=1}^{\infty},$$

denominada sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se denomina **serie** y se simboliza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si:

$$\lim_{N\to\infty} s_N$$

existe, entonces decimos que la **suma** de $\{a_n\}$ es el valor del límite y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N.$$

En este caso, decimos que la serie converge. Si el límite de las sumas parciales no existe, entonces decimos que la serie diverge.

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

Ejemplo: considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Observar que

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Para saber si converge, planteamos la sucesión de sumas parciales

1. $s_1 = 1 - \frac{1}{2}$
2. $s_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{1}{3}$
3. $s_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 1-\frac{1}{4}$
4. $s_4 = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = 1-\frac{1}{5}$
5. $\vdots$
6. $s_N = 1-\frac{1}{N+1}$
7. $\vdots$

Así

$$\lim_{N\to\infty} s_N = 1$$

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

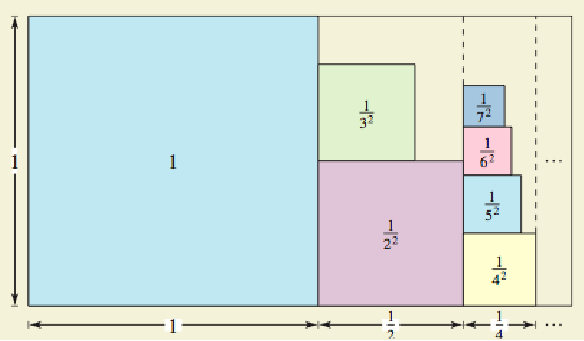
converge y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Existen argumentos geométricos para obtener convergencia de series. Por ejemplo, sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

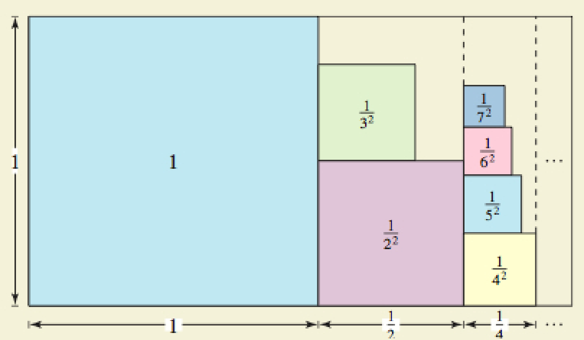
Si bien en la próxima clase veremos que esta serie converge mediante métodos analíticos, nos podemos convencer de esto observando la figura:



Existen argumentos geométricos para obtener convergencia de series. Por ejemplo, sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Si bien en la próxima clase veremos que esta serie converge mediante métodos analíticos, nos podemos convencer de esto observando la figura:



De hecho:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Serie geométrica

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

Serie geométrica

Una serie geométrica tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

El número r recibe el nombre de razón. Este número puede ser positivo, negativo o cero.

Otra forma de escribir la serie geométrica es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots .$$

La serie geométrica es muy importante, veremos algunas aplicaciones más adelante en la teoría de aproximación de funciones.

Serie geométrica: convergencia y divergencia

Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}.$$

Entonces la suma parcial n-ésima es:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por r obtenemos:

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Luego:

$$s_n - rs_n = a - ar^n = a(1 - r^n),$$

así, si $r \neq 1$:

$$s_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Serie geométrica: convergencia y divergencia

Si $|r| < 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}.$$

Luego, si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces la serie diverge.
Pregunta para el estudiante: ¿Qué sucede cuando $r = 1$ o $r = -1$? Debe convencerse que en esos casos también diverge (excepto cuando $a = 0$).

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Ejemplo: analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Solución: observar que la serie es una serie geométrica con $a = 1/3$ y razón

$$r = \frac{1}{5}.$$

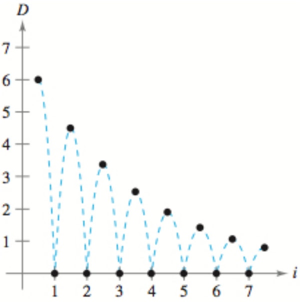
Como $|r| < 1$, la serie dada converge y, de hecho, converge a

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{12}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5}{12}.$$

Ejemplo: suponga que una pelota se suelta desde 6 metros de altura y comienza a rebotar. Además, se sabe que la altura que alcanza al rebotar es de 3/4 la altura que alcanzó en el rebote anterior. Calcule la distancia total recorrida por la pelota.



En el tramo inicial, tenemos que la distancia recorrida es $D_1 = 6$. Para los rebotes, sea D_i la distancia recorrida por la pelota al subir y bajar en el rebote i-ésimo. Por ejemplo

$$D_2 = 6\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

En el tramo inicial, tenemos que la distancia recorrida es $D_1 = 6$. Para los rebotes, sea D_i la distancia recorrida por la pelota al subir y bajar en el rebote i-ésimo. Por ejemplo

$$D_2 = 6\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$D_3 = 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

En el tramo inicial, tenemos que la distancia recorrida es $D_1 = 6$. Para los rebotes, sea D_i la distancia recorrida por la pelota al subir y bajar en el rebote i-ésimo. Por ejemplo

$$D_2 = 6\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$D_3 = 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + 6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Y si sumamos

$$\begin{aligned} D &= 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots \\ &= 6 + 12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\ &= 6 + 12\left(\frac{3}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \\ &= 6 + 9\left[\frac{1}{1-(3/4)}\right] \\ &= 6 + 9(4) \end{aligned}$$

Combinación de series

Volviendo al contexto general de series, tenemos el siguiente resultado.

Teorema

Sean $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ dos series convergentes. Entonces:

- La serie $\sum_n (a_n + b_n)$ converge a $\sum_n a_n + \sum_n b_n$.
- La serie $\sum_n (a_n - b_n)$ converge a $\sum_n a_n - \sum_n b_n$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_n (k a_n)$ converge a $k \sum_n a_n$.