CIRCUNFERENCIAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

54. Determine analíticamente la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el C (2,-1) y es tangente a la recta L: x – y + 1 = 0. Represente gráficamente.

Respuestas:

Considerando el Centro de la Circunferencia C (2,-1), podemos determinar la ecuación canónica de la Circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

Se debe hallar el valor del radio **r**, el cual se puede obtener utilizando el concepto de distancia de un punto a una recta en R^2. Para ello necesitamos determinar el vector normal a la recta dada, $\boldsymbol{nL}$ = (A,B) = (1,-1) y un punto de la recta, por ejemplo Po (0,1), para poder aplicar la ecuación:

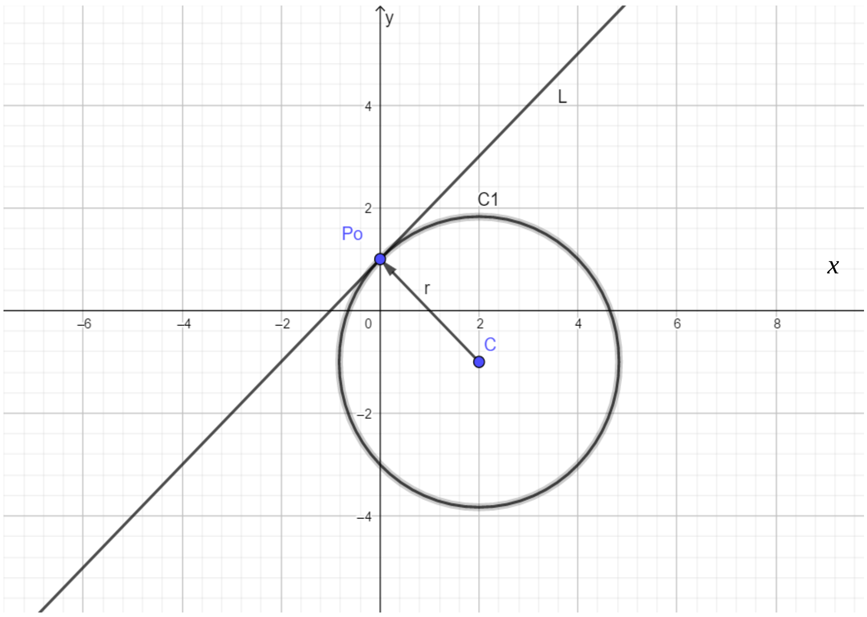
$$r = h = \frac{|\boldsymbol{CPo} \cdot \boldsymbol{nL}|}{\|\boldsymbol{nL}\|} \quad \text{o también} \quad r = h = \frac{|A\,xo + B\,yo + C|}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

$$r = h = \frac{|(-2,2).(1,-1)|}{\sqrt{(1^2+(-1)^2}} \quad \text{o también} \quad r = h = \frac{|1\,.\,2 - 1.(-1) + 1|}{\sqrt{(1^2+(-1)^2}}$$

$$r = h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,.\sqrt{2}$$

$$r^2 = 8$$

Entonces la ecuación canónica de la circunferencia queda: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$



55. Halle la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A (0,0), B (2,3) y C (5,1). Represente gráficamente.

La ecuación general de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando las coordenadas de los puntos dados en dicha ecuación, podemos armar un sistema de ecuaciones:

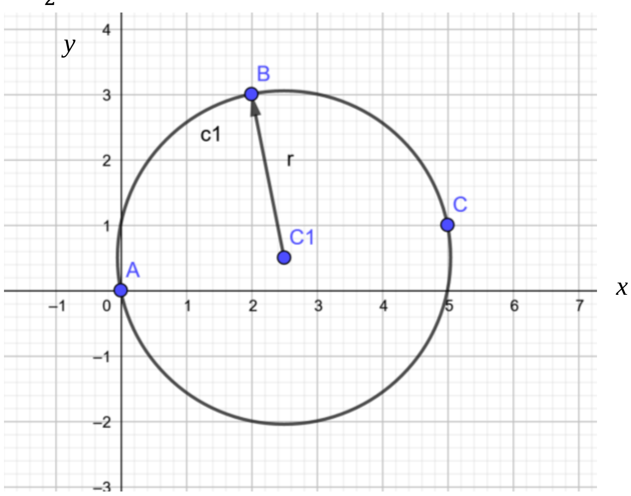
Punto A: $\quad 0 + 0 + 0 + 0 + F = 0 \quad$ (1)
Punto B: $\quad 4 + 9 + 2D + 3E + F = 0 \quad$ (2)
Punto C: $\quad 25 + 1 + 5D + E + F = 0 \quad$ (3)

De la (1), se determina que F = 0
De la (2), $\quad 2D + 3E = -13 \quad$ (4)
De la (3), $\quad 5D + E = -26 \quad$ implica que $\quad E = -26 - 5D \quad$ (5)

Reemplazando (5) en (4) $\quad 2D + 3(-26 - 5D) = -13$
$2D - 78 - 15D + 13 = 0$
$-65 - 13D = 0$

implica que D = -5 y reemplazando D en (5), se obtiene E = -1
entonces la ecuación general de la circunferencia queda: $\quad x^2 + y^2 - 5x - y = 0$
Para poder representar gráficamente, se debe determinar el centro y radio, para ello aplicamos:
C(h,k) y $\quad h^2 + k^2 - F = r^2$

Siendo h = -D/2 = 5/2 entonces el centro es C (5/2 , 1/2)
k = -E/2 = ½
y $\quad r = \sqrt{((\frac{5}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)} = 2.55$



Este gráfico ilustra que una circunferencia se puede trazar por 3 puntos no alineados.

56. Determine un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$, carezca de términos lineales. Identifique el lugar geométrico de los puntos que cumplen con dicha ecuación y encuentre sus elementos fundamentales. Represente gráficamente.

Los elementos fundamentales de la circunferencia, se pueden determinar cómo:

h = -D/2 = -2 entonces el centro es C (-2 , 3)

k = -E/2 = 3

Aplicando las ecuaciones de traslación: $x = x' + h = x' - 2$

$$y = y' + k = y' + 3$$

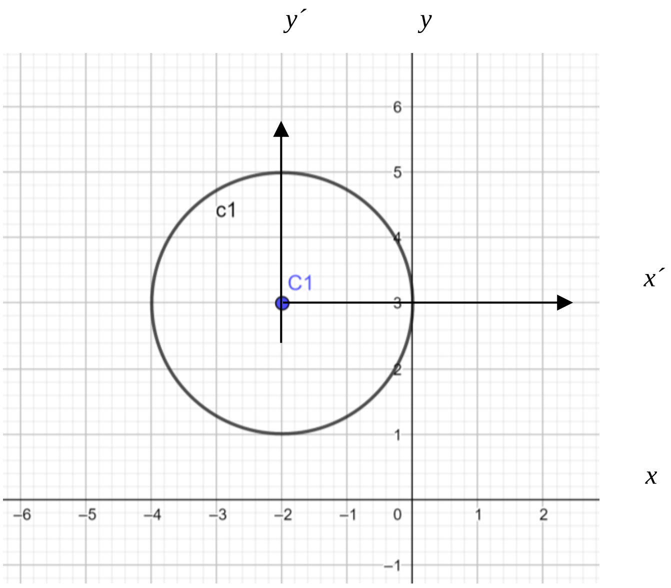
Reemplazando estas ecuaciones en la ecuación general de la circunferencia dada

$$(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 4(x' - 2) - 6(y' + 3) + 9 = 0$$

$$x'^2 - 4x' + 4 + y'^2 + 6y + 9 + 4x' - 8 - 6y' - 18 + 9 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 = 4$$

De esta ecuación se puede determinar que el radio r = 2



57. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta L de ecuación: L: 2x – y - 14 = 0, y pasa por la intersección de las circunferencias:

C1: $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ y C2: $2x^2+2y^2-8x+8y-16=0$

Utilice el concepto de *familia de circunferencias*. Represente gráficamente. Determine la longitud de la cuerda común de las circunferencias dadas.

Se puede a la ecuación de la circunferencia C2, dividir ambos miembros por 2, entonces trabajamos con la ecuación:

C2: $x^2+y^2-4x+4y-8=0$

Aplicando el concepto de familia de circunferencias, la ecuación de la familia reducida de la circunferencia es:

$$x^2+y^2-8x-4y+11+\ \lambda(x^2+y^2-4x+4y-8)=0$$

$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(-8-4\lambda)x+(-4-4\lambda)y+11-8\,\lambda=0$ dividimos todo por $(1+\lambda)$

Ecuación de la C3: $x^2+y^2+\frac{(-8-4\lambda)}{(1+\lambda)}x+\frac{(-4-4\lambda)}{(1+\lambda)}y+\frac{11-8\,\lambda}{(1+\lambda)}=0$

Ahora como el centro de la circunferencia C3, está sobre la recta L, el centro C(h,k) de dicha circunferencia satisface la ecuación de la recta L

L: 2x – y - 14 = 0, entonces 2h – k – 14 = 0 (1)

h = -D/2 $=\frac{-(-8-4\lambda)}{2(1+\lambda)}=\frac{(4+2\lambda)}{(1+\lambda)}$ (2)

k = -E/2 = $\frac{-(-4-4\lambda)}{2(1+\lambda)}=\frac{(2-2\lambda)}{(1+\lambda)}$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1): $2\left[\frac{(4+2\lambda)}{(1+\lambda)}\right]+\frac{(2-2\lambda)}{(1+\lambda)}-14\frac{(1+\lambda)}{(1+\lambda)}=0$

$$\frac{8+4\lambda+2+2\lambda-14-14\lambda}{(1+\lambda)}=0$$

$$\frac{-4-12\lambda}{(1+\lambda)}=0$$

$$-4-12\lambda=0$$

$$\lambda=-1/3$$

Reemplazando este valor en la siguiente ecuación

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)y^2+\left(-8-4\left(-\frac{1}{3}\right)\right)x+\left(-4-4\left(-\frac{1}{3}\right)\right)y+11-8\left(-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2-\frac{20}{3}x-\frac{16}{3}y+\frac{41}{3}=0$$

Dividimos todo por $\left(-\frac{2}{3}\right)$ y obtenemos la ecuación de la circunferencia

$$\text{C3: } x^2+y^2-10x-8y+20.5=0$$

Para poder representarlas gráficamente, se pueden obtener los elementos fundamentales como:

C1	h = -D/2 = 4	C1(4,2)	y	r = 3
	k = -E/2 = 2			
C2	h = -D/2 = 2	C1(2,-2)	y	r = 4
	k = -E/2 = −2			
C3	h = -D/2 = 5	C1(4,4)	y	r = 4.53
	k = -E/2 = 4			

Para la determinación de la longitud de la cuerda común, primero se debe determinar la ecuación del eje radical, esto es para cuando λ = -1

$$x^2+y^2-8x-4y+11+(-1)(x^2+y^2-4x+4y-8)=0$$

$$-4x-8y+19=0$$

Ecuación del eje radical: $y=\frac{-1}{2}x-\frac{19}{8}=0$

Ahora se puede determinar los puntos de intersección de dicho eje radical con alguna de las circunferencias, por ejemplo, con la circunferencia C1, entonces:

$$x^2+\left(\frac{-1}{2}x-\frac{19}{8}\right)^2-8x-4\left(\frac{-1}{2}x-\frac{19}{8}\right)+11=0$$

$$x^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{19}{8}x-8x+2x+\frac{361}{64}-\frac{19}{2}+11=0$$

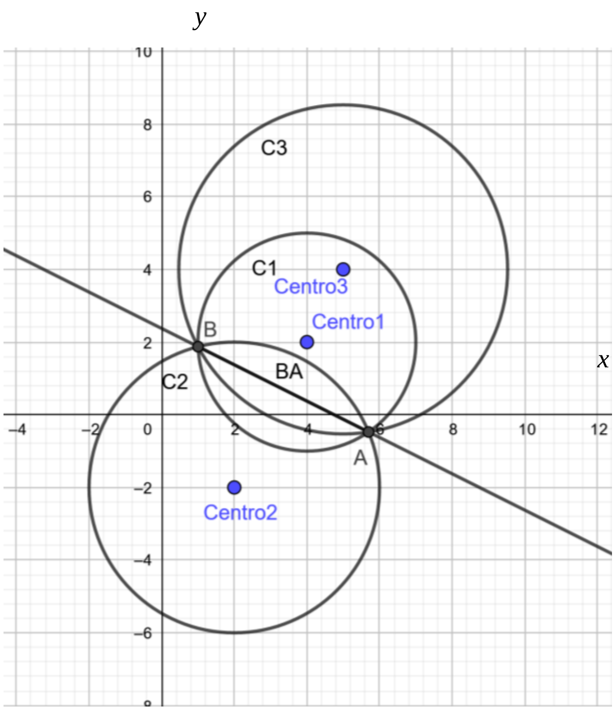
$$\frac{5}{4}x^2-\frac{67}{8}x+\frac{457}{64}=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en una variable, se determinan los puntos de intersección:

A(5.7,-0.47) y B(1,1.87)

Entonces la longitud de la cuerda común de las circunferencias dadas, se determina como:

$$\| AB \| = \sqrt{(5.7-1)^2+((-0.47-1.87)^2} = 5.25$$



58. Determine los puntos de intersección entre la circunferencia C: $(x+4)^2+y^2=9$ y cada una de las siguientes rectas. Represente gráficamente.

L1: y + x – 5 = 0
L2 y - x – 1 = 0
L3: x + 7 = 0,

1- Para la determinar los puntos de intersección entre ambos lugares geométricos, se plantean el siguiente sistema de dos ecuaciones, una cuadrática y una lineal:

C: $(x+4)^2+y^2=9$
L1: y + x – 5 = 0, y = 5 - x

2- Resolvemos el sistema, despejando de la ecuación de la recta cualquiera de las dos variables y la sustituimos en la otra ecuación.

$$(x+4)^2+(5-x)^2=9$$
$$x^2+8\text{x}+16+25-10x+x^2=9$$
$$2x^2-2\text{x}+32=0$$

3- Obtenemos de este modo una ecuación de segundo grado en una única variable, de la forma:

$ax^2+\text{bx}+\text{c}=0$, para encontrar las raíces planteamos $x1{,}2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y estudiamos el valor del discriminante Δ = b^2-4ac (radicando), si es mayor, igual o menor a 0.

4- Para el caso de la recta L1: Δ = -252, implica que no hay intersección, ya que se obtienen raíces complejas conjugadas y por lo tanto no existe intersección en los reales entre la recta y la circunferencia dada. Se dice que la recta es **exterior** a la circunferencia.

Repetimos los distintos pasos para las otras dos rectas:

L2:
C: $(x+4)^2+y^2=9$
L2: y - x – 1 = 0, y = x + 1

$$(x+4)^2+(x+1)^2=9$$
$$x^2+8\text{x}+16+x^2+2x+1=9$$
$$2x^2+10\text{x}+8=0$$
$$\Delta = 36 > 0$$

Obtenemos dos soluciones reales y distintas, que nos conducen a dos puntos de solución del sistema de ecuaciones lineales. Es así que la recta y la circunferencia tienen dos puntos en común. Por lo tanto, se dice que la recta es **secante** a la circunferencia.

Las raíces son: x1 = -4 y x2 = -1 reemplazando en la ecuación de la recta:
y1 = -3 y y2 = 0
Entonces los puntos de intersección son: I1(-4,-3) y I2(-1,0)

L3:

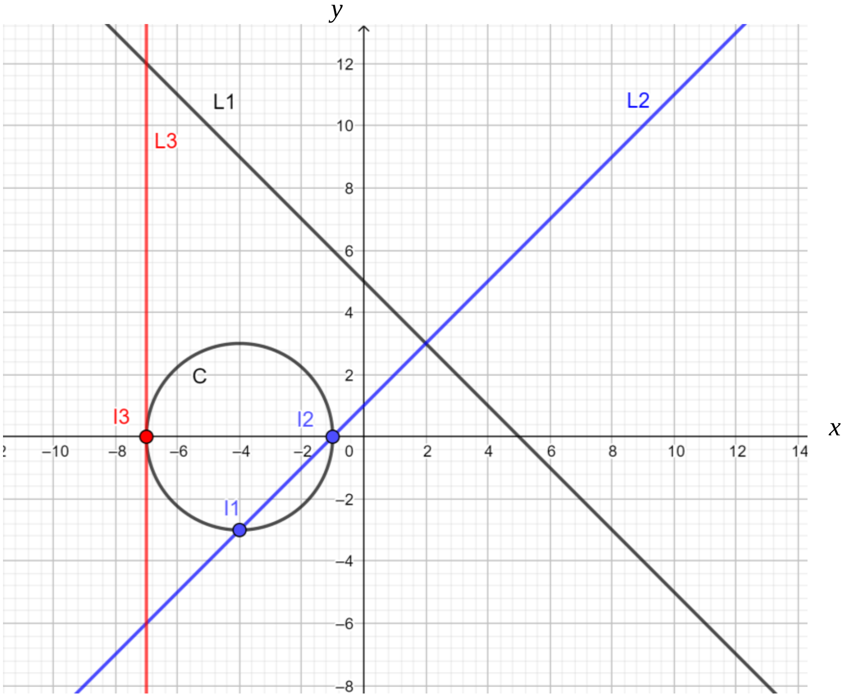
C: $(x+4)^2 + y^2 = 9$

L2: x + 7 = 0, x = -7

$$((-7)+4)^2 + y^2 = 9$$
$$9 + y^2 = 9$$
$$y = 0$$

Obtenemos un punto de intersección, lo que nos conduce a un único punto solución del sistema de ecuaciones lineales. Es decir, la recta y la circunferencia tienen un único punto en común, o sea, la recta L3 es **tangente** a la circunferencia.

Entonces el punto de intersección es: I3(-7,-0)



59. Halle la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia:
C: $2x^2 + 2y^2 + 4x + 2y - 22 = 0$ y que tengan pendiente m = -3/2. Represente gráficamente.

Para hacer A=C=1, dividimos por 2, ambos miembros de la ecuación de la circunferencia:

C: $x^2 + y^2 + 2x + y - 11 = 0$

La ecuación de las rectas tangentes sería de la forma L: y = m . x + b, quedando y = -3/2 x + b

Como las rectas son tangentes, quiere decir, que corta a la circunferencia en un punto, para ello determinaremos el punto de intersección, ya que, teniendo un punto y la pendiente, se puede escribir la ecuación de la recta tangente.

Para ello reemplazamos en la ecuación de la circunferencia, la variable y de la ecuación de la recta:

$$x^2 + \left(-\frac{3}{2}x + b\right)^2 + 2x + \left(-\frac{3}{2}x + b\right) - 11 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 3xb + b^2 + 2x - \frac{3}{2}x + b - 11 = 0$$

$$\frac{13}{4}x^2 - 3xb + b^2 + \frac{1}{2}x + b - 11 = 0$$

$$\frac{13}{4}x^2 + \left(-3b + \frac{1}{2}\right)x + (b^2 + b - 11) = 0$$

Obtenemos de este modo una ecuación de segundo grado en una única variable. Para que sea recta tangente, es decir que corte a la circunferencia en un punto, el valor de $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces:

$$\left(-3b + \frac{1}{2}\right)^2 - 4.\frac{13}{4}.(b^2 + b - 11) = 0$$

$$9b^2 - 3b + \frac{1}{4} - 13b^2 - 13b + 143 = 0$$

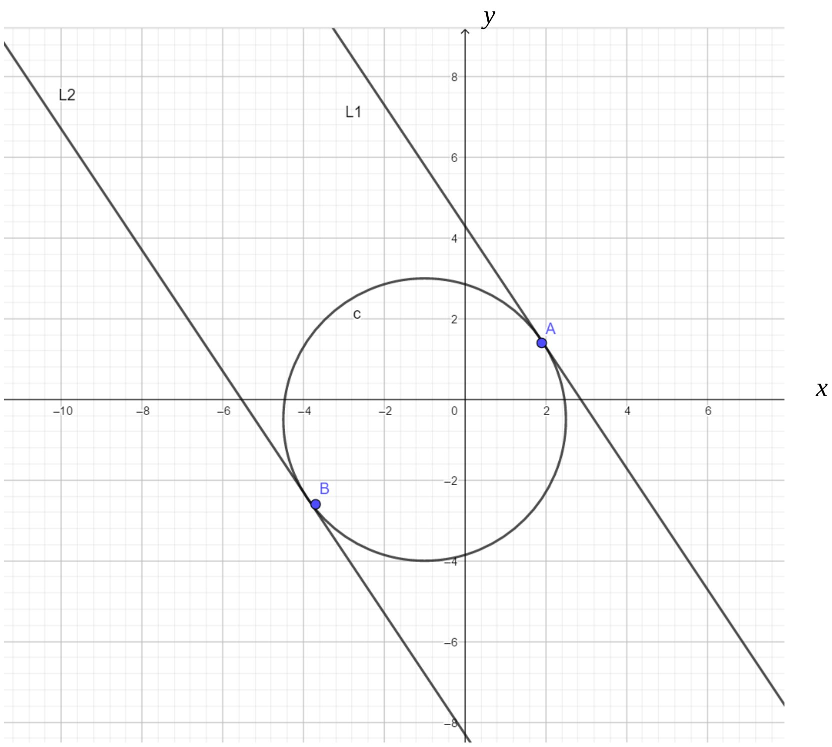
$-4b^2 - 16b + 573/4 = 0$ multiplicamos miembro a miembro por (-4)

$$16b^2 + 64b - 573 = 0$$

Obtenemos de este modo otra ecuación de segundo grado, donde las raíces reales y distintas son:

b1 = 4.3 y b2 = -8.3

Reemplazando en la ecuación de la recta tangente, obtenemos las dos ecuaciones de recta tangentes paralelas y con distinta ordenada al origen: L_1: y= -3/2 + 4.3 y L_2: y = -3/2 x – 8.3



60. Indique las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 4 y centro en C(-1,3)

La ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia descentrada y radio r es:

(x,y) = (h,k) + (r cos α + r sen α)

Reemplazando las coordenadas del centro y radio obtenemos:

(x,y) = (-1,3) + (4 cos α + 4 sen α)

Entonces las ecuaciones cartesianas paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -1 + 4\cos\alpha \\ y = 3 + 4\cos\alpha \end{cases} \quad \text{con } \alpha\ [0; 2\pi)$$