RECTAS

Respuestas a los Ejercicios 41 a 45

41. Rectas en $\mathbb{R}^2$. Halle las ecuaciones de las siguientes rectas y represente gráficamente:

a) La recta que pasa por el punto A (3,1) y es paralela a la recta determinada por los puntos B (4,1) y C (-2,2).

b) La recta que pasa por el punto Q (2,2) y es perpendicular a la recta dada en el inciso anterior.

Respuestas:

a) La recta L_1 que pasa por el punto A (3,1), y es paralela a la recta determinada por los puntos B y C:

$$A\ (3,1) \epsilon\ L_1$$

$$\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{OC} - \boldsymbol{CB} = (-2,2) - (4,1) = (-6,1)$$

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, resulta:

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{BC}\ ; t\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

en términos de sus componentes:

$$(x, y) = (3,1) + t(-6,1)\ ; t\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = 1 + t \end{cases} ; t\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

Eliminando el parámetro, se llega a la ecuación cartesiana:

$$\frac{x-3}{-6} = \frac{y-1}{1}$$

Reordenando y reagrupando tenemos la ecuación punto pendiente:

$$-\frac{1}{6}(x-3) = (y-1)$$

y la ecuación explicita:

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$$

Finalmente, pasando todo hacia un lado de la igualdad, resulta la ecuación general:

$$x + 6y - 9 = 0$$

b) La recta L_2 que pasa por el punto Q (2,2), y es perpendicular a la recta L_1 determinada en el inciso anterior:

$$Q\ (2,2) \epsilon\ L_2$$

$$\boldsymbol{d}_{L2} \perp \boldsymbol{d}_{L1}$$

Un vector perpendicular a $\boldsymbol{d}_{L1} = (-6,1)$ se obtiene intercambiando las componentes de lugar y cambiándole el signo a una de ellas, luego:

$$\boldsymbol{d}_{L2} = (1,6)$$

(Nota: En R^2, hay una única dirección perpendicular a un vector, que podemos encontrar rápidamente mediante el procedimiento anterior. Pero si estamos en R^3, tener en cuenta que hay infinitas direcciones perpendiculares a un vector).

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, resulta:

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + k\boldsymbol{d}_{L2}\ ; k \in \mathbb{R}$$

en término de sus componentes:

$$(x, y) = (2,2) + k(1,6)\ ; k \in \mathbb{R}$$

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 + 6k \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$$

Eliminando el parámetro, se llega a la ecuación cartesiana:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{6}$$

Reordenando y reagrupando tenemos la ecuación punto pendiente:

$$\frac{6}{1}(x-2) = (y-2)$$

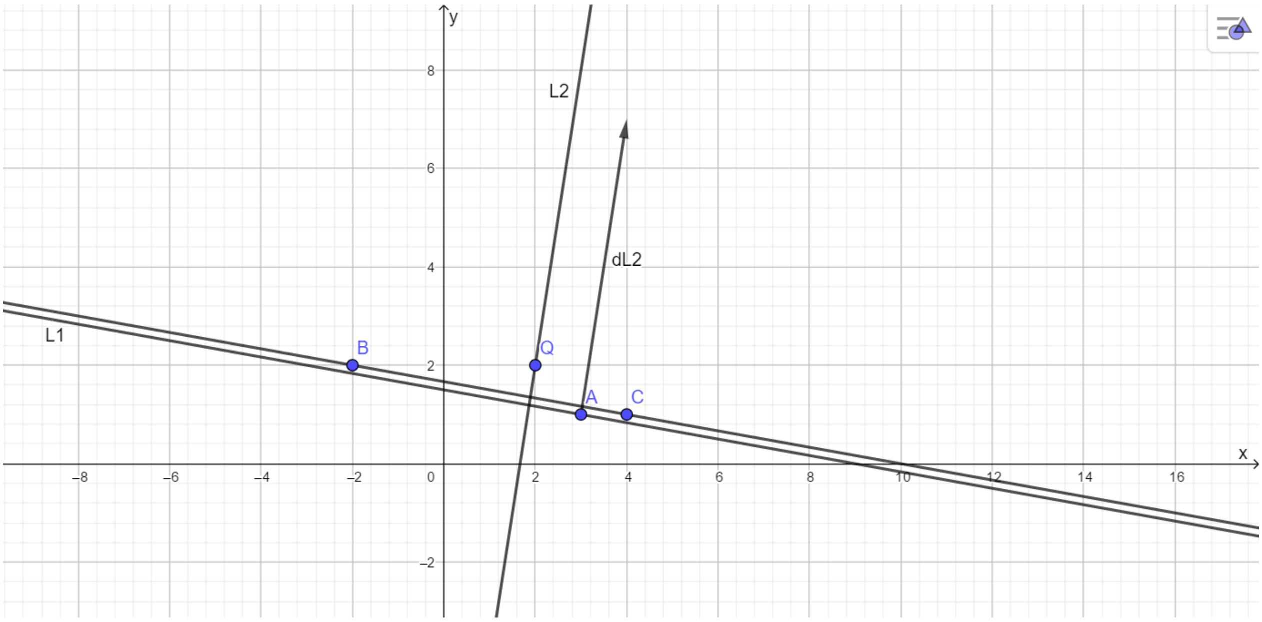
y la ecuación explicita:

$$y = 6x - 10$$

Finalmente, pasando todo hacia un lado de la igualdad, resulta la ecuación general:

$$6x - y - 10 = 0$$

Graficamos:



42. Familia de rectas en $\mathbb{R}^2$:

a) Obtenga la ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen $b = -4$.

b) Calcule el ángulo entre las rectas L_1: $3x - 3y + 1 = 0$ y L_2: $x = -y - 3$.

c) Encuentre la ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior.

d) Represente gráficamente y verifique las respuestas anteriores.

Respuestas:

a) La ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen $b = -4$ resulta:

$$y = mx - 4\,; m \in \mathbb{R}$$

Observe que el parámetro de la familia es $m \in \mathbb{R}$, la pendiente de dicha recta, que se encuentra expresada en su forma explícita. Todas las rectas que pertenecen a esta familia, tienen como ordenada al origen a $b = -4$, es decir que pasan por el punto $B(0, -4)$

b) Para determinar el ángulo entre las rectas se determinarán en primer lugar los vectores directores de las mismas, y luego el ángulo entre ellos:

Siendo L_1: $3x - 3y + 1 = 0$:

Se identifica la ecuación general (por estar igualada a cero), es decir que un vector normal a L_1 resulta:

$$\boldsymbol{n}_{L1} = (3, -3)$$

En tanto que un vector director de L_1, se obtiene a partir de un vector perpendicular a $\boldsymbol{n}_{L1} = (3, -3)$. Luego:

$$\boldsymbol{d}_{L1} = (3,3)$$

Siendo L_2: $x = -y - 3$

La ecuación punto pendiente resulta:

$$-x = y - 3$$

Siendo la pendiente $m = -1 = \frac{-1}{1} = \frac{u_y}{u_x}$, y un vector director de L_2 $\boldsymbol{d}_{L2} = (u_x, u_y) = (1, -1)$.

Se determina el ángulo a partir de la definición de producto escalar:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{d}_{L1}.\boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\|.\|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{(3,3).(1,-1)}{\sqrt{3^2 + 3^2}\,\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$cos\theta = \frac{3 - 3}{\sqrt{18}\,\sqrt{2}} = 0$$

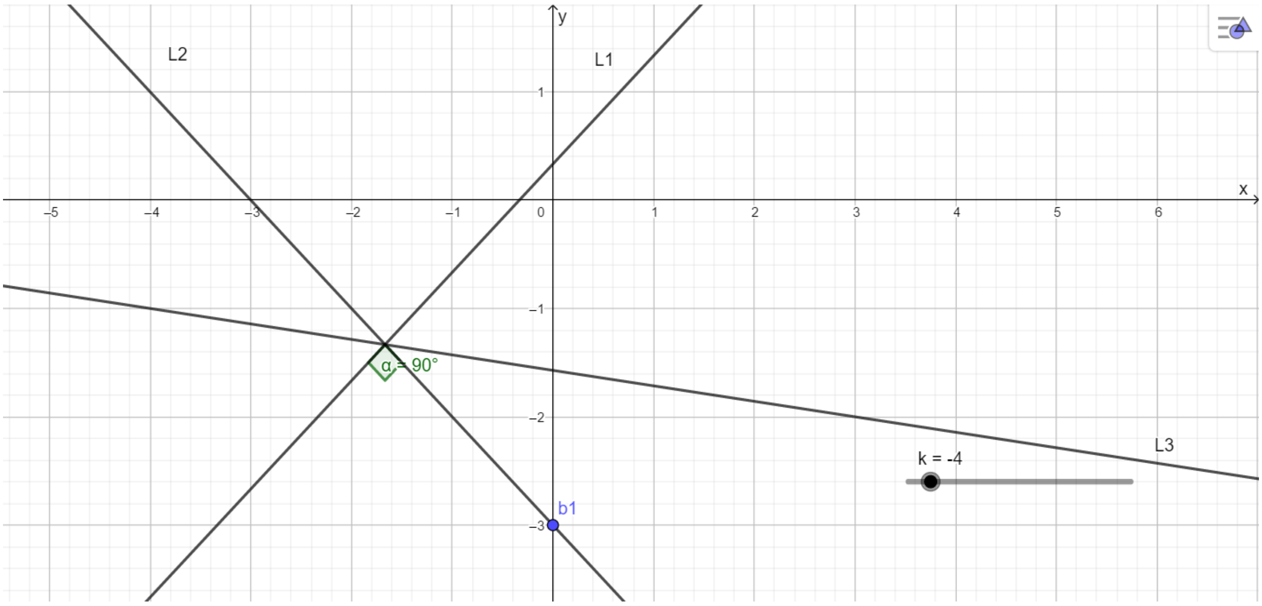
$$\theta = arc\cos(0) = 90°$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares.

c) La ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior resulta:

$$(3x - 3y + 1) + k(x + y + 3) = 0\,; k \in \mathbb{R}$$

d) Graficando:



43. Rectas en $\mathbb{R}^3$:

a) Halle la ecuación vectorial paramétrica, cartesianas paramétricas y simétricas de la recta $\boldsymbol{L_1}$.que pasa por el punto $\boldsymbol{Q}\ (2,2,-2)$ y es paralela al vector $\boldsymbol{v} = (2,-1,3)$.

b) Halle la intersección de la recta L_1 con los planos coordenados.

c) Encuentre dos puntos de la recta L_1, distintos a los determinados en el inciso anterior.

d) Determine el ángulo que forma la recta $\boldsymbol{L_1}$ con la recta:

$x = 4 - 2t, y = 3 + 2t, z = -7 + 3t, t \in \mathbb{R}$

e) Calcule la distancia de la recta $\boldsymbol{L_1}$ al punto **M** $(4,-1,3)$

Respuestas:

a) La recta L_1 que pasa por el punto Q (2,2,-2), paralela al vector $\boldsymbol{v} = (2,-1,3)$:

$$Q\ (2,2,-2) \in L1$$

$$\boldsymbol{d}_{L1} // \boldsymbol{v}$$

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, y tomando a $\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{v}$, resulta:

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + k\boldsymbol{d}_{L1}\ ; k \in \mathbb{R}$$

en término de sus componentes:

$$(x, y, z) = (2,2,-2) + k(2,-1,3)\ ; k \in \mathbb{R}$$

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \end{cases} , k \in \mathbb{R}$$

Eliminando el parámetro, se llega a las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

b) Intersección de la recta L_1 con los planos coordenados:

Ecuación de los planos coordenados:
Plano $\pi_{xy}: z = 0$
Plano $\pi_{xz}: y = 0$
Plano $\pi_{yz}: x = 0$

Para encontrar la intersección entre lugares geométricos, se resuelve el sistema de ecuaciones con las ecuaciones de dichos lugares geométricos, entonces:

- Intersección entre L_1 y el plano π_{xy}:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego,

$$z = -2 + 3k = 0$$
$$k = \frac{2}{3}$$

Siendo,

$$x = 2 + 2k = 2 + 2.\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$
$$y = 2 - k = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

La intersección de L_1 con π_{xy} es el punto $I_{xy}\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$

- Intersección entre L_1 y el plano π_{xz}:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \\ y = 0 \end{cases}$$

Luego,

$$y = 2 - k = 0$$
$$k = 2$$

Siendo,

$$x = 2 + 2k = 2 + 2.2 = 6$$
$$z = -2 + 3k = -2 + 3.2 = 4$$

La intersección de L_1 con π_{xz} es el punto $I_{xz}(6,0,4)$

- Intersección entre L_1 y el plano π_{yz}:

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \\ x = 0 \end{cases}$$

Luego,

$$x = 2 + 2k = 0$$
$$k = -1$$

Siendo,

$$y = 2 - k = 2 - (-1) = 3$$
$$z = -2 + 3.k = -2 + 3.(-1) = -5$$

La intersección de L_1 con π_{yz} es el punto $I_{yz}(0,3,-5)$

c) Una manera de determinar dos puntos de la recta, distintos a los determinados en el inciso anterior, es trabajar desde las ecuaciones vectoriales paramétricas y adoptar cualquier valor de k distinto a los obtenidos en el inciso anterior. Los valores de k determinados previamente son $k = \frac{2}{3}$, $k = 2$ y $k = -1$.

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -2 + 3k \end{cases} , k \in \mathbb{R}$$

Podemos darle cualquier valor a l parámetro, por ejemplo, para $k = 1$ resulta:

$$x = 2 + 2k = 2 + 2.1 = 4$$
$$y = 2 - k = 2 - 1 = 1$$
$$z = -2 + 3k = -2 + 3.1 = 1$$
$$I_1(4,1,1)$$

Y para $k = 10$ resulta:

$$x = 2 + 2k = 2 + 2.10 = 22$$
$$y = 2 - k = 2 - 10 = -8$$
$$z = -2 + 3k = -2 + 3.10 = 28$$
$$I_2(22,-8,28)$$

d) Ángulo entre la receta L_1 y la recta L_2:

$$L_2 : \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = -7 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Para encontrar el ángulo entre las rectas, se determinará el ángulo entre sus vectores directores. Sabemos que:

$$\boldsymbol{d}_{L1} = \boldsymbol{v} = (2,-1,3)$$

El director de la otra recta se obtiene directamente de las ecuaciones vectoriales paramétricas. El valor que acompaña al parámetro es la componente asociada a la variable presente en la ecuación. Es decir, el director de L_2 es:

$$\boldsymbol{d}_{L2} = (-2,2,3)$$

El ángulo entre ellas resulta:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{d}_{L1}.\boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\|.\|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{(2,-1,3).(-2,,2,3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 3^2}}$$

$$cos\theta = \frac{-4 - 2 + 9}{\sqrt{14}\sqrt{17}} = 0{,}1945$$

$$\theta = arc\cos(0{,}1945) = 78°47'12{,}32'$$

e) Para determinar la distancia entre la recta L_1 y el punto $\boldsymbol{M}(4,-1,3)$ utilizamos la siguiente expresión, correspondiente a la distancia entre un punto y una recta en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$:

$$h = \frac{\|\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}}\|}{\|\boldsymbol{d_{L1}}\|}$$

siendo $\boldsymbol{QM}$ un vector con origen en un punto cualquiera de la recta L_1 (en nuestro caso el punto Q) y el punto al cual se pretende obtener la distancia.

El vector $\boldsymbol{QM}$ resulta:

$$\boldsymbol{QM} = \boldsymbol{OQ} - \boldsymbol{OM} = (2,-3,5)$$

$$\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \big((-3).3 - 5.(-1)\big)i - (2.3 - 5.2)j + (2.(-1) - (-3).2)k =$$

$$\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}} = (-4,4,4)$$

$$\|\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}}\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48}$$

$$\|\boldsymbol{d_{L1}}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{\|\boldsymbol{QM} \wedge \boldsymbol{d_{L1}}\|}{\|\boldsymbol{d_{L1}}\|} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{14}} = 1{,}85\ [L]$$

La distancia entre la recta L_1 y el punto M es de 1,85 unidades de longitud.

44. Sean las rectas: $L_1\!:\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad L_2\!:\begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ -6y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

a) Encuentre la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta $\boldsymbol{L_2}$. Identifique los números directores.

b) Indique justificando su respuesta si las rectas dadas son paralelas, secantes (incidentes) o alabeadas. Determine la distancia entre ambas o el punto de intersección, según corresponda.

c) Determine la ecuación de la recta L_3 que es perpendicular simultáneamente a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto $\mathbf{Q}\ (1,-5,3)$.

Respuestas:

a) La recta L_2 se encuentra expresada como la intersección del plano $-x + y + 1 = 0$ y el plano $-6y + 3z - 3 = 0$. Es posible obtener las ecuaciones simétricas de la recta, reordenando términos como se muestra a continuación:

Recordando la forma de las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

Siendo $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto perteneciente a la recta, y $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ el vector director de la misma.

Luego, despejando una de las variables (la misma) de las ecuaciones asociadas, e igualando:

$$y = \frac{x-1}{1}$$

$$y = \frac{3z-3}{6} = \frac{z-1}{2}$$

Igualando:

$$y = \frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Para mayor claridad, se completan términos de manera de llegar a la misma forma de las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Determinamos el vector director de la recta:

$$\boldsymbol{d}_{L2} = (1,1,2)$$

Y un punto de la misma:

$$P(1,0,1)$$

La ecuación vectorial paramétrica resulta:

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OP} + k\boldsymbol{d}_{L2} \,;\, k \in \mathbb{R}$$

en término de sus componentes:

$$(x, y, z) = (1,0,1) + k(1,1,2) \,;\, k \in \mathbb{R}$$

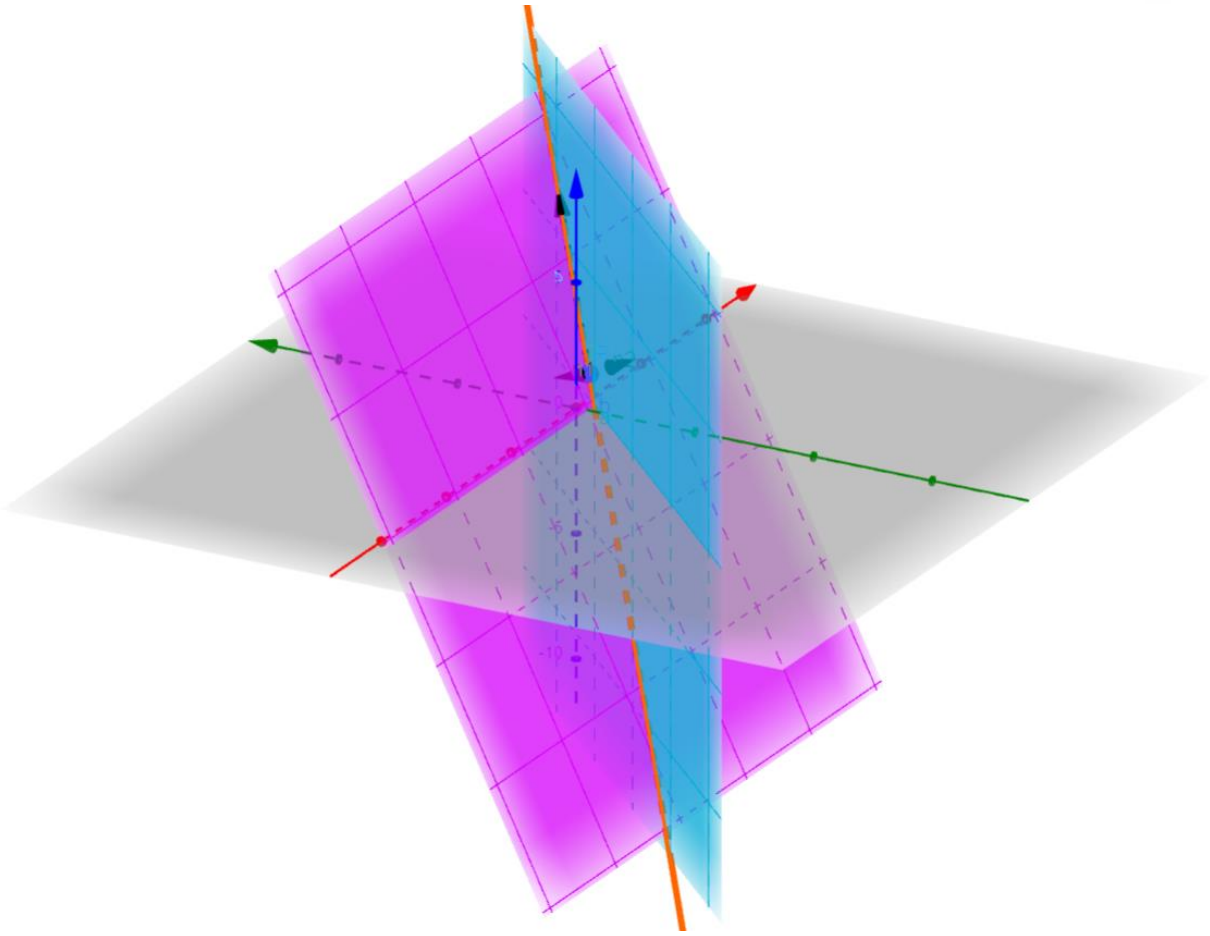
<u>Otra estrategia de resolución</u>:

Para obtener la ecuación de la recta, necesitamos conocer su vector director y un punto de la misma.

Podemos determinar un vector director a partir del producto vectorial de las normales de los planos asociados.

$$\boldsymbol{n}_{\pi 1} = (-1,1,0)$$
$$\boldsymbol{n}_{\pi 2} = (0,-6,3)$$

$$\boldsymbol{n}_{\pi 1} \wedge \boldsymbol{n}_{\pi 2} = (3,3,6) = 3(1,1,2)$$



Para determinar un punto que pertenezca simultáneamente a los dos planos, basta con encontrar una de las infinitas soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ -6y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Para ello es necesario adoptar aleatoriamente el valor de alguna de las tres coordenadas, y determinar mediante las ecuaciones las otras dos coordenadas.

Siendo la ecuación del primer plano:

$$-x + y + 1 = 0$$

Se asigna aleatoriamente un valor a la coordenada $y = 0$, y se encuentra de la ecuación del primer plano el valor de la coordenada $x = 1$.

Con el valor de $y = 0$ y de $x = 1$ determinados a partir de la primera ecuación, vamos a la segunda ecuación correspondiente a π_2 para encontrar un valor de la coordenada z que cumpla con dicha condición.

La ecuación del segundo plano es:

$$-6y + 3z - 3 = 0$$

$$z = \frac{6y + 3}{3} = \frac{6.(0) + 3}{3} = 1$$

Por lo tanto, un punto perteneciente al plano resulta:

$$P(1,0,1)$$

Con el vector director y el punto se plantea la ecuación vectorial paramétrica.

b) Para determinar la posición relativa entre las rectas L_1 y L_2 seguimos el siguiente procedimiento analítico:

En primer lugar, se evalúa si las rectas son paralelas. Para ello se debe determinar si sus vectores directores son paralelos (proporcionales).

$$¿\,\boldsymbol{d}_{L1}//\boldsymbol{d}_{L2}?$$

O lo que es lo mismo:

$$¿\,\boldsymbol{d}_{L1}=k\boldsymbol{d}_{L2}?\ k\in\mathbb{R}$$

Luego:

$$(-2,2,4)=k(1,1,2)=(k,k,2k)$$

igualando componente a componente:

$$\begin{cases}-2=k\\ 2=k\\ 4=2k\end{cases}$$

Se observa que no existe un valor de k que verifique estas igualdades simultáneamente. Por lo tanto, los vectores no son paralelos (o proporcionales) y las rectas tampoco lo son.

Si no son paralelas, podrían ser entonces secantes o alabeadas. Para determinarlo, se aplica la definición de producto mixto. El producto mixto está asociado al volumen de un paralelepípedo, cuyos lados quedan determinados por los vectores asociados al mismo. Si el producto mixto es cero, decimos que el conjunto de vectores no genera volumen, ya que se encuentran contenidos los tres en el mismo plano (es decir son coplanares). En caso de que el producto mixto sea distinto de cero, dicho resultado significaría que los vectores generan volumen, y que los vectores no se encuentran contenidos en el mismo plano.

Los vectores a utilizar para este análisis son los vectores directores de cada recta, y un vector con origen en cualquier punto de una de las rectas y con fin en cualquier otro punto de la otra recta.

Identificando la ecuación vectorial paramétrica que define la recta L_1, decimos que su vector director resulta.

$$\boldsymbol{d}_{L1}=(-2,2,4)$$

Un punto de la recta L_1 es el punto:

$$P_1(2,-1,-1)$$

El vector director de la recta L_2, previamente determinado, es el vector:

$$\boldsymbol{d}_{L2}=(1,1,2)$$

Un punto perteneciente a la misma:

$$P_2(1,0,1)$$

Un vector con origen en L_1 y fin en L_2 resulta el vector $\boldsymbol{P_1P_2}=(-1,1,2)$

Evaluando el producto mixto $(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{P_1P_2}$:

$$(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2).(1.2 - 2.1) - 2.(1.2 - 2.(-1) + 4.\big(1.1 - 1.(-1)\big) =$$

$$(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\boldsymbol{P_1P_2} = 0 - 8 + 8 = 0$$

El resultado del producto mixto es cero, por lo tanto, los vectores son coplanares. Esto implica que las rectas L_1 y L_2 son rectas secantes, y se intersecan en un punto.

Obtenemos el punto de intersección resolviendo un sistema de ecuaciones que incluya las ecuaciones de ambas rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: (x, y, z) = (1,0,1) + k(1,1,2)\, ; k \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad L_2: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = k \\ z = 1 + 2k \end{cases} ; \; k \in \mathbb{R}$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 4t \\ x = 1 + k \\ y = k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

Entonces:

$$x = 2 - 2t = 1 + k$$
$$y = -1 + 2t = k$$
$$z = -1 + 4t = 1 + 2k$$

Con solo dos ecuaciones nos alcanza para determinar los valores de t o de k que verifican estas igualdades:

Resulta el valor de $t = \frac{1}{2}$. Remplazando dicho valor en las ecuaciones paramétricas de L_1:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ y = -1 + 2t = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ z = -1 + 4t = -1 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Finalmente, el punto de intersección entre L_1 y L_2 es el punto $I(1,0,1)$

c) Ecuación de la recta L_3 perpendicular simultáneamente a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto $Q(1, -5,3)$.

Conociendo el punto Q, solo nos falta determinar el vector director $\boldsymbol{d}_{L3}$. Necesitamos un vector que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\boldsymbol{d}_{L1}$ y $\boldsymbol{d}_{L2}$, por lo tanto, lo obtenemos a partir del producto vectorial entre ellos. Luego:

$$\boldsymbol{d}_{L3} = (\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = (0{,}8,-4)$$

Planteando la ecuación vectorial paramétrica, resulta:

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + n\boldsymbol{d}_{L3}\ ; n \in \mathbb{R}$$

en término de sus componentes:

$$(x, y, z) = (1,-5{,}3) + n(0{,}8,-4)\ ; n \in \mathbb{R}$$

45. Encuentre la proyección del punto Q (2,2,2) sobre el plano $2x + y - z + 6 = 0$ paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v} = (1{,}1,-2)$.

Respuestas:

Para encontrar la proyección del punto $Q(2{,}2{,}2)$ sobre el plano $2x + y - z + 6 = 0$ paralela a la dirección de $\boldsymbol{v}$, se determinará en primer lugar la ecuación de una recta auxiliar L_A que pase por Q y que tenga la dirección de $\boldsymbol{v}$. Luego, se buscará la intersección de la recta L_A sobre el plano correspondiente. Dicha intersección representa la proyección buscada.

La ecuación vectorial paramétrica de la recta auxiliar L_A resulta:

$$L_A: \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OQ} + t\boldsymbol{v}\ ; t \in \mathbb{R}$$

$$L_A: (x, y, z) = (2{,}2{,}2) + t(1{,}1,-2)\ ; t \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones vectoriales paramétricas:

$$L_A: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Para encontrar la intersección, resolvemos el sistema de ecuaciones que incluye las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - 2t \\ 2x + y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

Sustituimos las expresiones para x, y y z en la última ecuación. Luego:

$$2(2 + t) + (2 + t) - (2 - 2t) + 6 = 0$$

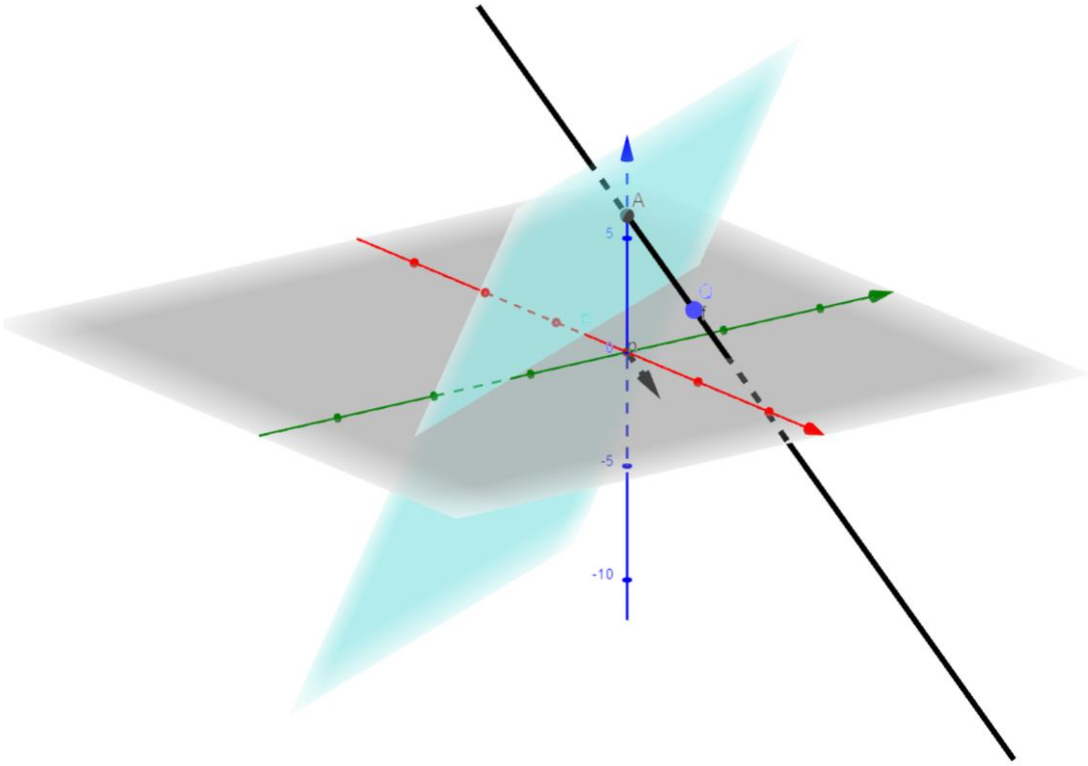
Resolviendo, se llega a determinar el valor de t :

$$t = -2$$

Finalmente, para encontrar la intersección, reemplazamos el valor de t en la ecuación de la recta:

$$: \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 2 - 2(-2) = 6 \end{cases} \Longrightarrow I(0{,}0{,}6)$$

El punto $I(0{,}0{,}6)$ es la proyección buscada.



Opción 2