Análisis Matemático I
Clase 6: Teorema del valor intermedio. Asíntotas.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2020

Propiedades de las funciones continuas: Teorema del Valor Intermedio

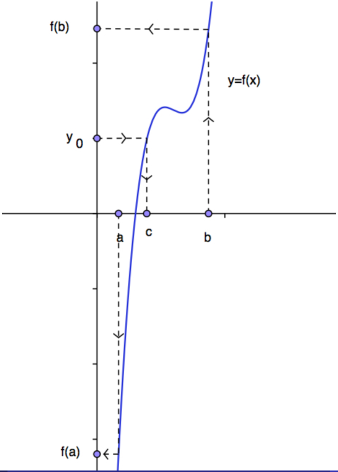
Motivación:

- ¿Existe x tal que:
$$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
- ¿Existe x tal que la ecuación:
$$\sqrt{2x+5} = 4 - x^2$$
se satisface?

Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Sea y_0 un número real entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) = y_0.$$

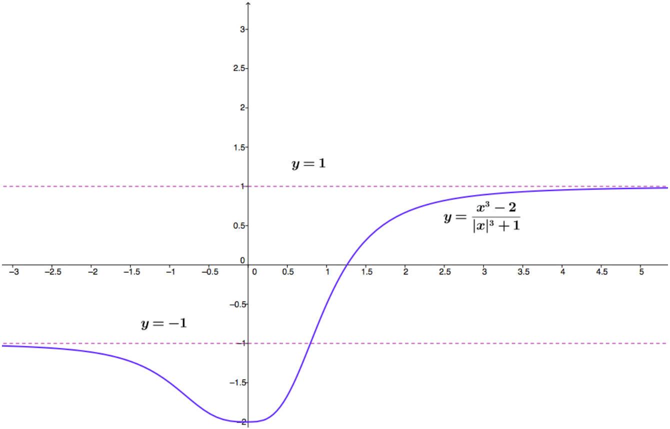


Teorema del valor intermedio

Ahora podemos aplicar el Teorema del Valor Intemedio para la resolución de las preguntas de motivación. Más adelante veremos otras aplicaciones del teorema.

- ¿Existe x tal que:
  $$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0?$$
  Introducimos la función:
  $$f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x - 1$$
  que es continua en $\mathbb{R}$. Observar que:
  $$f(0) < 0 \quad \text{y} \quad f(3) > 0.$$
  Tomando $y_0 = 0$ en el teorema del valor intermedio, se tiene la existencia de $c \in [0, 3]$ tal que:
  $$f(c) = 0.$$
  Así, $x = c$ resuelve la ecuación:
  $$x^5 - 10x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Considere el siguiente gráfico:



La distancia (vertical) entre las imágenes de $y = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ **y de la recta** $y = 1$ **tiende a cero a medida que** x **se hace cada vez mayor.**

Asíntotas horizontales

Definición de Asíntota Horizontal

Decimos que la recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,$$

o:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Observación: los dos límites anteriores se pueden escrbir como:

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - b| = 0,$$

o:

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x) - b| = 0.$$

Así, la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$ si la distancia entre b y los valores de la función $f(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Asíntotas horizontales

Ejemplo: determine las asíntotas horizontales de:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Solución: cuando se desea obtener un límite de la forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios, entonces se divide el numerador y el denominador por x elevada al grado del denominador. Este procedimiento permite eliminar potencias y simplificar los términos. Apliquemos lo anterior para calcular el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Asíntotas horizontales

Primero observe que como $x \to +\infty$, se tiene que $|x| = x$ y entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^3-2}{x^3}}{\dfrac{x^3+1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}.$$

Cuando x tiende a $+\infty$, los cocientes:

$$\frac{1}{x^3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{x^3}$$

tienden a cero. Así:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = 1.$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales

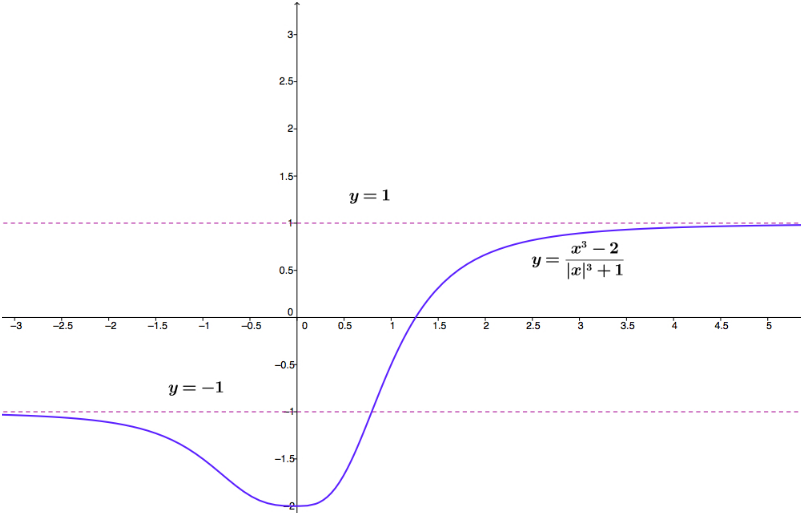
En forma similar y observando que cuando $x \to -\infty$ el valor absoluto de x es $-x$, se obtiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{|x|^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{(-x)^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{-x^3+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{-1+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{-1+0} = -1.$$

Así, $y=-1$ es otra asíntota horizontal de f.

Asíntotas horizontales



Observar que la gráfica de una función puede cortar a la asíntota.

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} =$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Asíntotas verticales

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

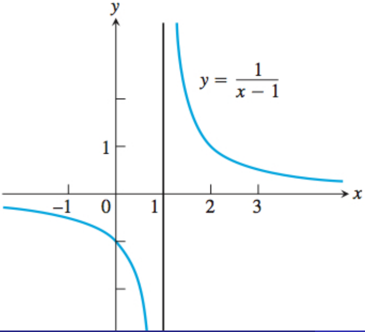
- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} =$$

Evalúe los siguientes límites dándole valores a x:

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



Definición de Asíntota Vertical

Decimos que $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty)$$

o:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty (\text{ o } -\infty).$$

Así, la función:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$.

Ejemplo. Encontrar las asíntotas verticales de:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}.$$

Solución. Primero buscamos los puntos de discontinuidad de la función. Como f es una función racional, los puntos de discontinuidad se dan donde el denominador en la expresión de f se anula. En este caso:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Ahora vamos a estudiar que pasa con los límites laterales en $x = 1$ y $x = 2$. Comenzamos con $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Cuando $x \to 1^-$, el producto $(x-1)(x-2)$ es positivo y tiende a cero. Luego, si dividimos 2 por $(x-1)(x-2)$, el resultado es positivo pero cada vez más grande.

Así:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical. No es necesario ver que el otro límite lateral cuando $x \to 1^+$ tambien es infinito, ya que en la definición de asíntota vertical tenemos disyunciones.
Para $x = 2$ tenemos:

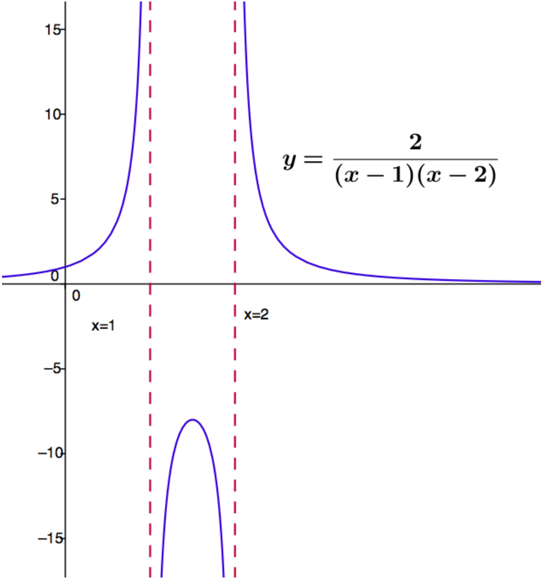
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Razonando como en el caso anterior, se concluye que:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = -\infty.$$

Así, $x = 2$ es asíntota vertical de f.

Asíntota oblicua



Asíntota oblicua

Asíntota oblicua

Una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

o:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Ejemplo: determine la asíntota oblicua de:

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} \qquad \text{(aplicar división de polinomios)}$$

Asíntota oblicua

Para determinar la asíntota oblicua de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

aplicamos división de polinomios. Recordar que si P y Q son polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde R es el resto y C el cociente de la división. En este caso:

$$R(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad C(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2x - 4}.$$

Asíntota oblicua

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-4}=0$$

por lo que la recta $y = 1/2x + 1$ cumple la definición de asíntota oblicua.