Análisis Matemático I
Clase 1: Presentación de la Cátedra-Introducción a Funciones

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2020

Cuerpo Docente y horarios de consulta (oficina de Análisis Matemático):

- Profesor Titular: Dr. Pablo Ochoa (jueves 10-11 hs.) e-mail: pablo.ochoa@ingenieria.uncuyo.edu.ar
- Profesor Adjunto: Lic. Martin Matons (Lunes 11-12 hs.)
- Auxiliares:
    - Ing. Paula Acosta (miércoles de 13:30 a 14:30)
    - Ing. Julián Martínez (miércoles 11-12 hs.)
    - Lic. Verónica Nodaro (miércoles 11-12 hs.)
    - Dra. Dalía Bertoldi (miércoles de 11 a 12 hs y jueves de 18 a 19 hs.)
    - Lic. Marcela Garriga (miércoles de 18 a 19 hs.)
    - Dr. Hernán Garrido (viernes 11-13 hs.)
    - Dr. Ángel Villanueva (Martes 14-15 hs.)
- Profesores Colaboradores: Dra. Mercedes Larriqueta (Jueves de 10 a 11hs.) y Mgter. Noemí Vega (Jueves de 11 a 12 hs).

Horarios de Cursado:

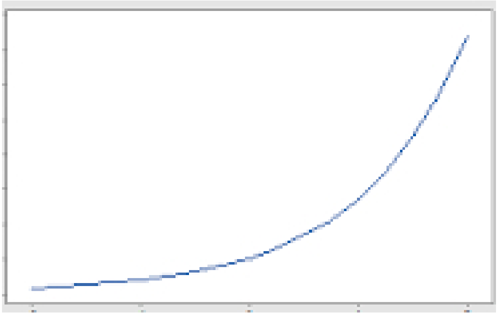
- Comisión de Teoría I: Lunes 08-11 hs/ Jueves 8-10 hs.
  1. Aula 17: todos los recursantes de industrial y de Licenciatura en Cs. de la Computación.
  2. Aula 15: todos los recursantes de Civil y Petróleos.
  3. Aula 14: ingresantes de Insdustrial con apellidos de la A a la C.
  4. Anfiteatro Oeste: ingresantes de Civil y Petrleos. Ingresantes de Industrial con apellidos de la D a la F inclusive.
- Comisión de Teoría II: Lunes 17-19 hs/ Viernes 17-19 hs.
  1. Aula 16: ingresantes de Industrial con apellidos de la N a la Z.
  2. Anfiteatro Oeste: Ingresantes de Licenciatura en Cs. de la Computación. Ingresantes de Insdustrial con apellidos de la G a la M.

- Comisión de Práctica I: Lunes de 14 a 17 hs:
  - Aula 3: recursantes de Civil y de Licenciatura en Ciencias de la Computacin.
- Comisión de Práctica II: Miércoles de 8 a 11 hs:
  - aula 15: recursantes de industrial con apellidos de la N a la Z.
  - Aula 14: recursantes de industrial con apellidos de la A a la M.
  - Anfiteatro oeste: ingresantes de industrial con apellidos de la A a la C inclusive.
  - Aula 11: Ingresantes de Civil. Ingresantes de Industrial con apellidos de la D a la F.
  - Aula 4: ingresantes de Petróleo.
- Comisión de Práctica III: Miércoles de 15 a 18 hs:
  - Aula 11: recursantes petróleos.
- Comisión de Práctica IV: Jueves de 14 a 18 hs::
  - Aula 15: ingresantes de Industrial con apellidos desde la G hasta Mastroprieto inclusive.
  - Anfiteatro oeste: ingresantes de Industrial desde Milet hasta apellidos terminados en R inclusive.
  - Aula 5: ingresantes de Licenciatura en Cs. de la Computación.
  - Aula 17: ingresantes de industrial con apellidos desde la S a la Z.

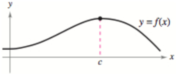
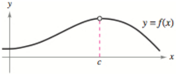
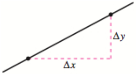
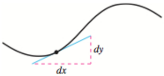
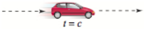
Objetivos:

- Promover el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, reflexivo y crítico.
- Desarrollar la modelización matemática de problemas propios de la ingeniería y de la Computación.
- Estimular el aprendizaje de herramientas analíticas para resolver diversas situaciones prácticas.
- Estimular la interpretación y análisis de los resultados obtenidos como primer indicador de la válidez de estos.
- Fomentar el aprendizaje significativo de la Matemática a través de su aplicación a la resolución de problemas prácticos.

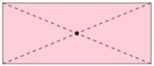
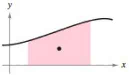
EXPECTATIVA: Curva de aprendizaje



PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

Without Calculus		With Differential Calculus	
Value of $f(x)$ when $x = c$		Limit of $f(x)$ as x approaches c	
Slope of a line		Slope of a curve	
Secant line to a curve		Tangent line to a curve	
Average rate of change between $t = a$ and $t = b$		Instantaneous rate of change at $t = c$	
Curvature of a circle		Curvature of a curve	

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

Without Calculus		With Integral Calculus	
Area of a rectangle		Area under a curve	
Work done by a constant force		Work done by a variable force	
Center of a rectangle		Centroid of a region	
Length of a line segment		Length of an arc	
Surface area of a cylinder		Surface area of a solid of revolution	

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA:

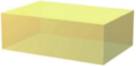
Mass of a solid of constant density		Mass of a solid of variable density	
Volume of a rectangular solid		Volume of a region under a surface	
Sum of a finite number of terms	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	Sum of an infinite number of terms	$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$

Diagrama tomado de: Edwards, B. and Larson, R. Calculus of a single variable. Ed. 10. 2014.

Presentación de la Cátedra

Otras aplicaciones que se verán en el curso:

- calcular la fuerza ejercida por un fluido sobre la pared de una presa
- detectar rapidez de convergencia de algoritmos y órdenes de complejidad
- determinar dimensiones para vigas con la mayor resistencia posible
- control de calidad en líneas de ensamble
- cálculo de coeficientes especiales para optimizar la extracción de hidrocarburos
- selección del mejor sensor para realizar mediciones de velocidad, de vibraciones, etc.
- aplicaciones a telecomunicaciones (radiación de antenas de telefonía celular)
- construcción de canales de riego con flujo lento, rápido o torrencial.

Bibliografía

Libro principal:
Título: Cálculo: una variable.
Autor: George Thomas.
Editorial: PEARSON.
Edición: 12.
Año: 2010.
Disponible en fotocopiadora de la Facultad de Ingeniería.

Cronograma de exámenes:

- Primer examen parcial: 06 de Abril
- Segundo examen parcial: 06 y 07 de Mayo
- Tercer examen parcial: 30 de Mayo (sábado)
- Recuperatorios/ Global: sábado 13 de Junio.

Presentación de la Cátedra: régimen de aprobación

Durante el semestre, se tomarán 3 evaluaciones parciales escritas para definir la regularidad del estudiante. Cada una consistirá de ejercicios teórico-prácticos del mismo estilo y nivel de dificultad que los de las guías de trabajos prácticos. El contenido de cada examen será informado durante el cuatrimestre con la antelación adecuada. **Un alumno queda regular cuando aprueba los tres exámenes en cualquiera de sus instancias.**

Presentación de la Cátedra: régimen de aprobación

Durante el semestre, se tomarán 3 evaluaciones parciales escritas para definir la regularidad del estudiante. Cada una consistirá de ejercicios teórico-prácticos del mismo estilo y nivel de dificultad que los de las guías de trabajos prácticos. El contenido de cada examen será informado durante el cuatrimestre con la antelación adecuada. **Un alumno queda regular cuando aprueba los tres exámenes en cualquiera de sus instancias.** Cada evaluación tendrá un puntaje máximo de 100 puntos y se aprobará con un mínimo de 60 puntos. La inasistencia a un examen implica que el alumno tiene 0 puntos en dicho examen. Para el caso en que no se obtenga el puntaje mínimo, se van a considerar instancias de recuperación al final del cursado. Estas instancias son únicas y la fecha es inamovible, aún si la inasistencia es justificada.

Presentación de la Cátedra: régimen de aprobación

Durante el semestre, se tomarán 3 evaluaciones parciales escritas para definir la regularidad del estudiante. Cada una consistirá de ejercicios teórico-prácticos del mismo estilo y nivel de dificultad que los de las guías de trabajos prácticos. El contenido de cada examen será informado durante el cuatrimestre con la antelación adecuada. **Un alumno queda regular cuando aprueba los tres exámenes en cualquiera de sus instancias.**
Cada evaluación tendrá un puntaje máximo de 100 puntos y se aprobará con un mínimo de 60 puntos. La inasistencia a un examen implica que el alumno tiene 0 puntos en dicho examen. Para el caso en que no se obtenga el puntaje mínimo, se van a considerar instancias de recuperación al final del cursado. Estas instancias son únicas y la fecha es inamovible, aún si la inasistencia es justificada.
Como regla general, el alumno recupera aquello que no ha aprobado (incluyendo inasistencias). Es decir, si en un parcial no obtuvo el mínimo de puntaje, entonces recuperará solamente esa evaluación. Si el alumno no aprueba dos evaluaciones parciales, entonces rendirá un recuperatorio con los contenidos de las dos evaluaciones.

Si el alumno no obtiene el puntaje mínimo en las tres evaluaciones parciales, entonces rendirá un global asociado a los contenidos de los tres exámenes no aprobados, con la siguiente excepción: si no asiste a las tres evaluaciones parciales, quedará libre sin posibilidad de recuperar.

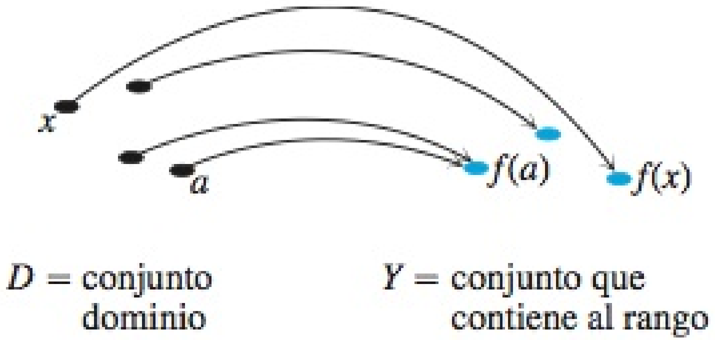
Clase 1: contenidos.

Contenidos Clase 1:

- Concepto de función, dominio, rango y gráficas.
- Tipos de funciones: polinómicas, exponenciales, trigonométricas, racionales y funciones definidas por partes.
- Clasificación de funciones y simetría.

Noción de función

Concepto de función:



Producto cartesiano de conjuntos. Si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ de A y B se define como:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Ejemplos. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, -2, -3\}$, entonces $A \times B = \cdots$

Noción de función

Producto cartesiano de conjuntos. Si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ de A y B se define como:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Ejemplos. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, -2, -3\}$, entonces $A \times B = \cdots$

Definición de función

Sean A y B conjuntos de números reales. Una función f es un subconjunto de $A \times B$, tal que: si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$. El **dominio** de f es el conjunto de todos los $a \in A$ tales que existe $b \in B$ con la propiedad: $(a, b) \in f$. La **imagen** de f es el conjunto de los $b \in B$ tales que existe $a \in A$ con $(a, b) \in f$. El **conjunto de llegada o codominio** de f es el conjunto B.

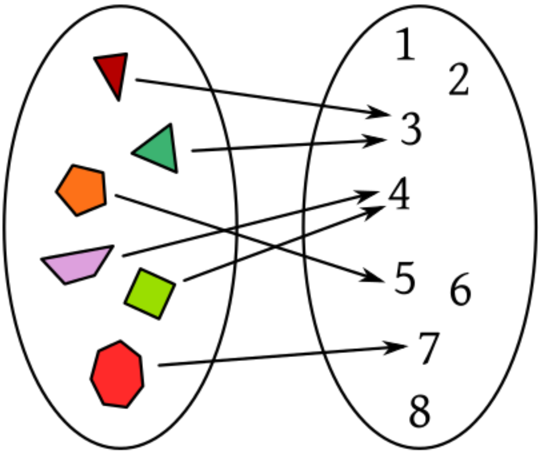
Notación: Si D es el dominio de f y C su conjunto de llegada, entonces escribimos:

$$f : D \to C.$$

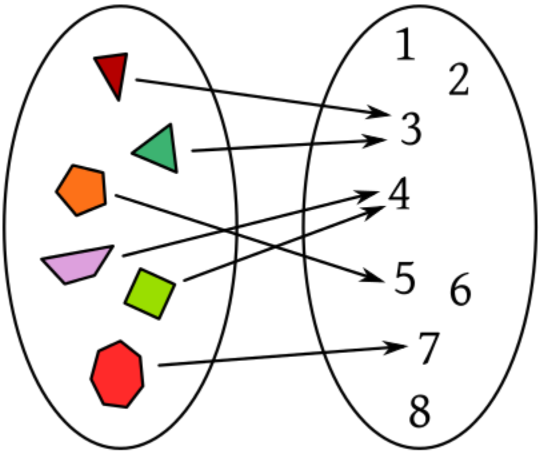
Si en una situación intervienen más de una función, por ejemplo f, g, etc., entonces distinguimos los dominios como sigue: $D(f)$ =dominio de f, $D(g)$ = dominio de g, etc.

Observación: la definición de función es diferente de la dada en el libro. La única válida para nosotros es la dada en la diapositiva 15.

Noción de función: ejemplo



Noción de función: ejemplo



Dominio: el conjunto de las 6 figuras geométricas que se ilustran.
Imagen $= \{3, 4, 5, 7\}$.
Conjunto de llegada o codominio $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{4 - x}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$4 - x \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$4 - x \geq 0$$

$$4 \geq x.$$

Así, el dominio de f es $D = (-\infty, 4]$.

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Dominio de una función

Ejemplo: determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Solución: para determinar el dominio vamos a encontrar todos los x que cumplen

$$2 - x^2 \geq 0.$$

Despejando x se obtiene:

$$2 - x^2 \geq 0$$

$$2 \geq x^2.$$

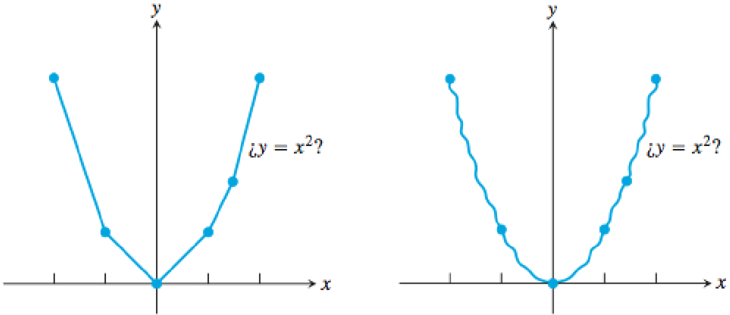
Tomando raíces cuadradas a ambos miembros y recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$, se obtiene:

$$\sqrt{2} \geq \sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{2} \geq |x|.$$

Así, el dominio de f es $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Gráfica de una función: sea $y = x^2$. Exactitud en el trazado del gráfico?



El Análisis Matemático da herramientas para determinar con gran detalle el comportamiento de la gráfica de una función, facilitando así la descripción y representación de la misma.

Construcción de un modelo matemático

TABLA 1.1 Datos del diapasón

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

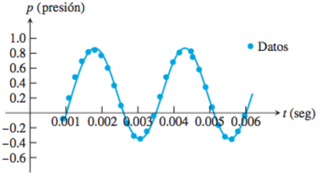
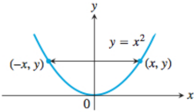


FIGURA 1.6 La curva suave que pasa por los puntos trazados según la tabla 1.1 forma una gráfica que representa a la función de presión (ejemplo 3).

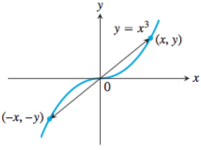
Clasificación de funciones en pares e impares

Funciones pares e impares

- Una función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f.
- Una función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x en el dominio de f.

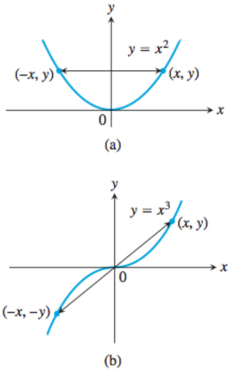


(a)



(b)

Observación: la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y y la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas



Clasificación de funciones en pares e impares

Para probar que una función f es par se debe verificar que:

$$f(x) = f(-x)$$

PARA TODA x en el dominio de f. Si, por el contrario, quiere mostrar que una función no es par, puede hacerlo encontrando **ALGÚN** x_0 en el dominio de f donde se cumpla:

$$f(x_0) \neq f(-x_0).$$

Lo mismo se aplica al concepto de función impar.
Veamos algunos ejemplos.

Clasificación de funciones en pares e impares

Ejemplo: analizar si la función $f(x) = x^2 - 3$ es par.
Solución: tomemos cualquier x en el dominio D de f (en este caso, $D = \mathbb{R}$). Entonces:

$$f(x) = x^2 - 3$$

y:

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = (-x)(-x) - 3 = x^2 - 3.$$

Así:

$$f(x) = f(-x).$$

Como x es arbitraria, se tiene que f es par.

Ejemplo: analizar si la función $f(x) = x^3 - 3$ es par.
Solución: dado que el exponente de x en la expresión de f es 3, es probable que f no sea par. Para comprobarlo buscamos un contraejemplo. Tomamos $x_0 = 1$, entonces:

$$f(x_0) = f(1) = -2$$

y

$$f(-x_0) = f(-1) = -4.$$

Como $f(x_0) \neq f(-x_0)$ se tiene que f no es par.
Observar que, tomando el mismo $x_0 = 1$, se llega a que f tampoco es impar.

Funciones crecientes y decrecientes

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es creciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I es decreciente en I si para todo par de puntos x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Interpretación geométrica y ejemplos.

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

Hacer gráfico, dar ejemplos.

Función afín y función polinómica

Función afín

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, se denomina función afín. El gráfico de una función afín es una recta. El número m es la pendiente de dicha recta y b es la ordenada al origen.

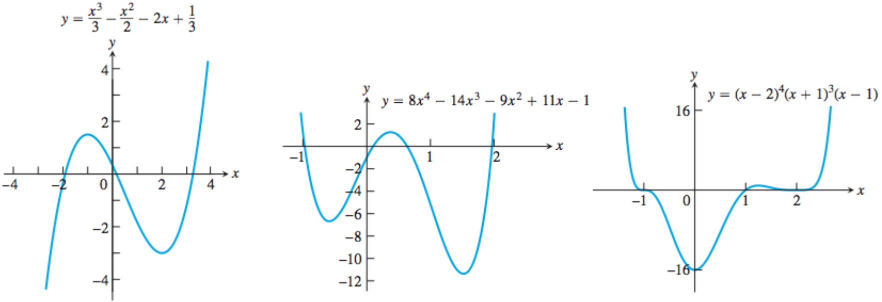
Hacer gráfico, dar ejemplos.

Funciones polinómicas

Una función polinómica es una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Ejemplos de funciones polinómicas



Observación: el gráfico de una función polinómica es *suave*, sin *picos* ni *saltos*.

Funciones racionales

Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

es una función racional.

Funciones racionales

Una función racional R es un cociente de funciones polinómicas. Es decir, si P y Q son funciones polinómicas, entonces $R : D_R \to \mathbb{R}$ tal que:

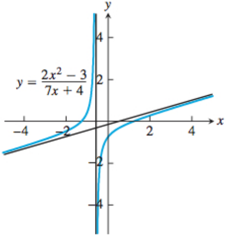
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in D_R$$

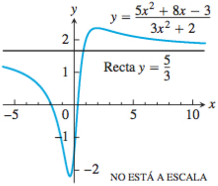
es una función racional. Observar que el dominio D_R de R es :

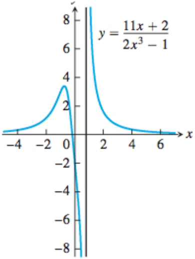
$$D_R = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Funciones racionales

Ejemplos:



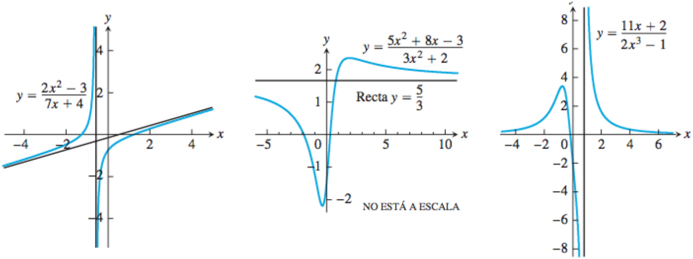




Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.

Funciones racionales

Ejemplos:



Calcular el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.
Solución: dado que f es una función racional, para determinar su dominio observamos cuándo se anula el denominador

$$7x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{7}.$$

Luego, $D(f) = (-\infty, -4/7) \cup (-4/7, +\infty)$.

Función valor absoluto y funciones definidas por partes

Función valor absoluto

La función $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se denomina función valor absoluto.

Realizar gráfico.

Observación: la función valor absoluto es un ejemplo de una función definida por partes. Veamos otro ejemplo: graficar la siguiente función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$