TRABAJO PRÁCTICO Nº 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio 1: Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=-10 \\ -\dfrac{3}{2}y+z-5=x \end{cases}$$

a) Determine si las ternas (-4, 0, 1); (-6, 1,-1); (-3, 0, 2) y (-8, 2, 0) son solución del sistema.
b) Muestre que toda terna de la forma (t – 5, 0, t), donde t es un número real, es solución del sistema.
c) Indique si se puede afirmar que el conjunto solución del sistema es S = {(t – 5, 0, t) $\in$ R^3}. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2: Dadas las siguientes matrices ampliadas en forma escalonada correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema de Rouché – Frobenius: https://photos.app.goo.gl/GxgXyMSvucq12H486

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **iii)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **v)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Escriba el sistema por medio de sus ecuaciones.

b) Clasifique el sistema según el Teorema de Rouché-Fröbenius.

d) Determine, <u>si existen</u>, las incógnitas principales y libres.

e) Encuentre el conjunto solución.

<u>SOLUCIÓN:</u>

i) **https://photos.app.goo.gl/6QKRJf3GuW9NeUcD9**

ii) **https://photos.app.goo.gl/JSRBKidDFqkJFPcx5**

iv) **https://photos.app.goo.gl/WzXfopejXki5LxND7 y https://photos.app.goo.gl/FQS4AtE3W671CWKd9**

vi) https://photos.app.goo.gl/9D77gfearQBfXmYs7

Ejercicio 3: Analice y resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=2 \\ x+3y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_5+2x_2-4x_3+2=0 \\ 3x_4=-3 \\ 3x_1-x_3-x_2+5x_5-3x_4=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=-2 \\ -x_1+3x_2-2x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z-w=2 \\ 2x+w-y=5 \\ 3x+z+w=1 \\ 2x+2y+2z-w=3 \end{cases}$

SOLUCIÓN: **https://drive.google.com/open?id=1Q7p5rfA7c6_Sgby57x420nooiDwR0Far**

Ejercicio 4: Resuelva los sistemas homogéneos asociados a los sistemas del ejercicio anterior.

SOLUCIÓN: **https://drive.google.com/file/d/19hqRP78yaZLopqU95kp_gyxv9BSCNaNd/view**

Ejercicio 5: ¿Cuál es la relación entre los sistemas lineales cuyas matrices aumentadas son las siguientes?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

SOLUCIÓN: **https://photos.app.goo.gl/uYcd9yedmRTTS3WC6**

Ejercicio 6: Sea el sistema dado por:

$$\begin{cases} x+k.y+z=1 \\ k.x+y+(k-1).z=k \\ x+y+z=k+1 \end{cases}$$

a) Plantee el sistema en forma matricial
b) Construya la matriz ampliada y analice para que valor o valores de k el sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado.

Ejercicio 7: Sea el sistema dado por:

$$\begin{cases} ax+y+z=b^2 \\ x+y+2az=b \\ x+y+2az=2 \end{cases}$$

a) Plantee el sistema en forma matricial
b) Construya la matriz ampliada y analice para que valor o valores de b el sistema es incompatible
c) En el caso de que *b = 2* y *a = 1* determine la o las soluciones del sistema.

SOLUCIÓN: *PARTE 1*

https://drive.google.com/file/d/10ni6s4bo9-vkr2IGGNF1u0NKuIl_XUOc/view

PARTE 2

https://drive.google.com/file/d/1eIou6pU9PmecpFOIaKOiz5z8PngjZuNd/view

Ejercicio 8: Para la siguiente matriz ampliada determine los posibles valores de *a* y *b* para que el sistema A X = B no tenga solución, tenga infinitas soluciones o tenga solución única.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2-b & b \end{array}\right]$$

Ejercicio 9: Determine qué valores pueden tomar *a*, *b* y *c* para que estos sistemas tengan solución.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & -4 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & a \\ -4 & 8 & -12 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$

SOLUCIÓN: https://drive.google.com/file/d/1pPgt2XLtdGWYKbmHgunRNQbvUA7yZX15/view

Ejercicio 10: Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1/3 & -1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, plantear el sistema de ecuaciones que corresponda en cada caso para encontrar una matriz B tal que:

a) A B_{2x1} = O (O es la matriz nula)
b) A B_{2x2} = I (I es la matriz identidad)

Ejercicio 11: Complete los siguientes enunciados de manera tal que resulten verdaderos:

a) Si A X = B con A invertible entonces X = $A^{-1}.B$

Partimos de	A.B = X
Como A es inversible, existe A^{-1} y podemos premultiplicar ambos miembros por A^{-1}	$A^{-1}.AX = A^{-1}B$
Asociamos	$(A^{-1}.A)X = A^{-1}B$

Y resolvemos I. X = $A^{-1}B$

X = $A^{-1}B$

b) Según el Teorema de Rouché-Fröbenius si A X = B, con A_{mxn}, tiene solución única entonces podemos afirmar que *el rango de la matriz de coeficientes (ρ(A)), es igual al rango de la matriz ampliada (ρ(A´)), e igual al número de incógnitas (n). En símbolos* $\rho(A) = \rho(A') = n$

c) Dadas las proposiciones *p: "Sea A_{nxn} tal que A X = B es un SCD"* y *q: "det(A) ≠ 0"*. Entonces p es condición *necesaria y suficiente* para q.

d) Si A es la matriz identidad de 3x3, entonces el conjunto solución de A X = 0 es *S= {(0, 0, 0}*

e) Si la solución de un SEL de 5x4 es S = $\{(t, 3-s, 2+2s, s) \in R^4\}$ entonces la matriz ampliada del SEL en forma escalonada reducida *es* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & . & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & . & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{bmatrix}$

f) Si A es de orden 3 x 4 y el rango de A es 2 entonces el sistema A X = 0 *es tiene solución infinita*

g) Si A es de orden 4 x 3 y ρ(A) = 3 entonces A X = B tiene solución *única o no tiene solución*

h) Un ejemplo de SELH en R^5 con 3 grados de libertad *es* $\begin{cases} 2x + y - 3w = 0 \\ 4x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

i) Si A es la matriz nula de 5x3, el conjunto solución de A X = 0 es IR^3

j) La cantidad de variables libres de un SEL, A X = B, con A ≠ 0 y A_{4x10} puede tomar los valores 9, *10, ...23*

k) Si A X = B con A $\neq$ O, es un SEL (3 x 7), entonces el rango de la matriz ampliada del sistema puede tomar los valores *1, 2, 3*

l) Si A X = B es un SEL (8 x 5), incompatible, entonces el rango de la matriz ampliada del sistema puede tomar los valores *1, 2, 3, 4, 5*

Ejercicio 12: Indique si las siguientes proposiciones son (V) o (F). Si son verdaderas, argumente su veracidad. Si son falsas, de un contraejemplo.

a) **( )** Si A es una matriz rectangular y el sistema A X = O es compatible determinado, el sistema A^T X = O también es compatible determinado.

https://drive.google.com/file/d/1mLJxSK4xhaFVHHtEspY2XaKPeiR4qgoZ/view?usp=drivesdk

b) **( )** Dado un sistema de ecuaciones lineales que tiene solución única siempre es posible añadir otra ecuación para que el sistema sea incompatible.

https://drive.google.com/file/d/1ZeCC--KE6QqE7mO4-9a_IBay8AiLxf82/view?usp=drivesdk

c) **( )** Si *S* es solución de A X = O entonces *k S* también es solución, siendo *k* un número real.
https://drive.google.com/file/d/1mQGZhLhX96wiWNHEo61G8btKgTHTlahd/view?usp=drivesdk

d) **( )** Si S es solución de A X = B entonces *k S* es solución, con k real.
https://drive.google.com/file/d/1ZnnSLVsP0G-1aecP3QgSgGAysF1jn1Zz/view?usp=drivesdk

e) **( )** Si S_1 y S_2 son soluciones del sistema A X = O entonces (S_1+S_2) también es solución del mismo sistema.
https://drive.google.com/file/d/1ZutihGHZta8j3PMd7xQWqlRlDv407yIV/view?usp=drivesdk

f) **( )** El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y el del sistema homogéneo asociado siempre es el mismo.
https://drive.google.com/file/d/1ZwAMGWsqvWpMF4P1vIa2bQyYlplHYx6m/view?usp=drivesdk

g) **( )** Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, cualquier otro sistema de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes también tiene solución.
https://drive.google.com/file/d/1_7S0wN4B623sK1XNNXObr-oxCJC0gTw_/view?usp=drivesdk

Ejercicio 13: Plantee, resuelva e interprete los siguientes problemas matemáticos:

a) Un fabricante produce reveladores de película de 2, 6 y 9 minutos. La fabricación de cada tonelada del revelador de 2 minutos requiere 6 minutos en la planta A y 24 minutos en la planta B. Para manufacturar cada tonelada del revelador de 6 minutos son necesarios 12 minutos en la planta A y 12 minutos en la planta B. Por último, para producir cada tonelada del revelador de 9 minutos se utiliza 12 minutos la planta A y 12 minutos la planta B. Si la planta A está disponible 10 horas al día y la planta B 16 horas diarias, ¿cuántas toneladas de cada tipo de revelador de película pueden producirse por día de modo que las plantas operen a toda su capacidad?

b) Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1, la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos en un día empleando las máquinas durante 8 horas completas.