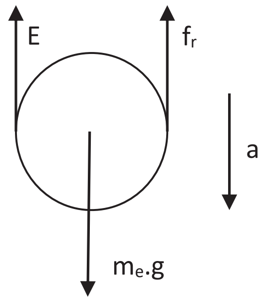
APLICACIONES DE LEYES DE NEWTON
VELOCIDAD LÍMITE

Es la velocidad máxima que alcanza un cuerpo moviéndose en el seno de un fluido infinito bajo la acción de una fuerza constante. Prosiguiendo según Stokes, se supone un cuerpo esférico totalmente sumergido en el seno de un fluido viscoso.



Siendo el peso del cuerpo: $m_e.g = \rho_e.V_e.g = \rho_e.\frac{4}{3}.\pi.R^3.g$

Según Arquímedes todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso de fluido desalojado. El empuje resultante: $E = \rho_f.V_s.g = \rho_f.\frac{4}{3}.\pi.R^3.g$

Según la Ley de Stokes, para flujo laminar; la resistencia del fluido o fuerza de arrastre será:

$$f_r = 6.\pi.R.\eta.v = K.v$$

Aplicando la segunda ley del movimiento de Newton: $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$

$$m_e.a = m_e.g - E - f_r$$

La velocidad límite se alcanza cuando la aceleración es cero→ $0 = m_e.g - E - f_r$

$$m_e.g - E = f_r$$

$$\rho_e.\frac{4}{3}.\pi.R^3.g - \rho_f.\frac{4}{3}.\pi.R^3.g = 6.\pi.R.\eta.v_1 \;;\; \rho_e.\frac{4}{3}.R^2.g - \rho_f.\frac{4}{3}.R^2.g = 6.\eta.v_1$$

$$\frac{4}{3}.R^2.g.(\rho_e - \rho_f) = 6.\eta.v_1 \rightarrow v_1 = \frac{2.g.(\rho_e - \rho_f).R^2}{9.\eta}$$

Llamando F a la diferencia entre el peso y el empuje (m_e.g-E)→ $m_e.a = F - f_r$

$$m_e.\frac{dv}{dt} = F - K.v$$

Resolviendo:

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{F}{m} - \frac{K}{m}.v} = \int_0^t dt$$

En el caso de aceleración=0→ $v_1 = \frac{F}{K}$. Despejando m y K:

$$\frac{m}{K}.\int_0^v \frac{dv}{\left(\frac{F}{K} - v\right)} = \int_0^t dt$$; reemplazando por v_l y multiplicando ambos miembros por -1:

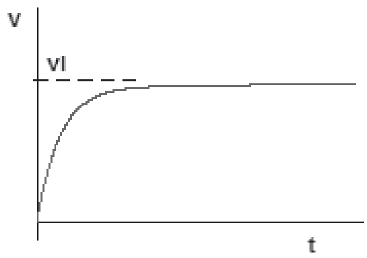
$$\int_0^v \frac{dv}{-(v_1 - v)} = -\frac{K}{m}.\int_0^t dt \; ; \; \frac{1}{-v_1}.\int_0^v \frac{dv}{\left(1-\frac{v}{v_1}\right)} = -\frac{K}{m}.\int_0^t dt$$

Haciendo cambio de variable: $z = 1 - \frac{v}{v_1} \Rightarrow dz = -\left(\frac{1}{v_1}.dv\right)$

$$\int \frac{dz}{z} = -\frac{K}{m}.\int_0^t dt \; ; \quad \ln z = -\frac{K}{m}.t \; ; \quad \ln\left(1-\frac{v}{v_1}\right) = -\frac{K}{m}.t$$

$$1 - \frac{v}{v_1} = e^{-\frac{K}{m}.t} \; ; \quad \frac{v}{v_1} = 1 - e^{-\frac{K}{m}.t} \; ; \quad v = v_1.\left(1 - e^{-\frac{K}{m}.t}\right)$$

Graficando:



La velocidad límite v_l , se alcanza después de un tiempo teóricamente infinito según la ecuación. Si representamos: v vs t, la gráfica se hace asintótica en $v=v_l$.

La serie de Taylor de una función $f_{(x)}$ en a: $f_{(x)} = f_{(a)} + \frac{f'_{(a)}}{1!}.(x-a) + \frac{f''_{(a)}}{2!}.(x-a)^2 + \ldots$

La serie de Maclaurin de una función $f_{(x)}$ es la serie de Taylor de una función $f_{(x)}$ en a=0

$$f_{(x)} = f_{(0)} + \frac{f'_{(0)}}{1!}.(x) + \frac{f''_{(0)}}{2!}.(x)^2 + \ldots$$

Siendo $f_{(x)}=e^x$; $x = -\frac{K}{m}.t$ para a=t=0: $e^x = e^0 + \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)\Big|_{t=0}}{1!}x + \frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(e^x\right)\Big|_{t=0}}{2!}x^2 + \ldots$

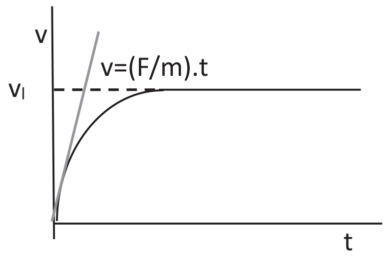
$e^x = 1+x+x^2/2+\ldots$

Aproximando la función exponencial por medio de: $e^x = 1 + x$ habiendo suprimido el tercer término y subsiguientes por ser insignificantes ($x = -\frac{K}{m}.t \le 1$) . O sea cuando $t \Rightarrow 0$, cerca del inicio de la caída.

Reemplazando en la última expresión de v:

$$v = v_1.\left[1 - \left(1 - \frac{K}{m}.t\right)\right] = \frac{F}{K}.\frac{K}{m}.t = \frac{F}{m}.t$$

Graficando:



Obtenemos: v vs t, similar a un cuerpo en caída libre. La recta que lo representa vemos: es directamente proporcional al tiempo.
Pero, realmente la velocidad tiende hacia un valor constante cuando un cuerpo cae en el seno de un fluido viscoso.

Operando para integrar: $v = v_1 . \left(1 - e^{-\frac{K}{m}.t} \right)$

Suponemos que la esfera parte del origen y=0, en el instante inicial t=0.

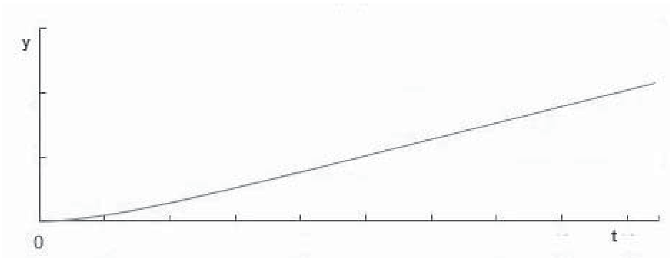
$$\frac{dy}{dt} = v_1 . \left(1 - e^{-\frac{K}{m}.t} \right); \quad \int_0^y dy = v_1 . \left(\int_0^t dt - \int_0^t e^{-\frac{K}{m}.t} .dt \right)$$

$$y = v_1 . \left(t - \int_0^t e^{-\frac{K}{m}.t} .dt \right)$$

Si denominamos: $u = \left(\frac{-K}{m} \right) .t \Rightarrow du = \left(\frac{-K}{m} \right) .dt ; \quad dt = \frac{du}{\left(\frac{-K}{m} \right)}$

$$y = v_1 . \left(t - \frac{1}{\left(\frac{-K}{m} \right)} . \int e^u .du \right); \quad y = v_1 . \left(t + \frac{m}{K} .e^u \right) = v_1 . \left| t - \frac{m}{K} .e^{\left(-\frac{K}{m} \right).t} \right|$$

Obtenemos la posición en función del tiempo t.
Graficando:



Obtenemos: y vs t. Donde el desplazamiento de un cuerpo en el seno de un fluido viscoso se hace proporcional al tiempo (la curva inicial se vuelve lineal con el transcurso del tiempo). En cambio; recordemos que en la caída libre el desplazamiento es proporcional al cuadrado del tiempo.

Derivando la expresión:

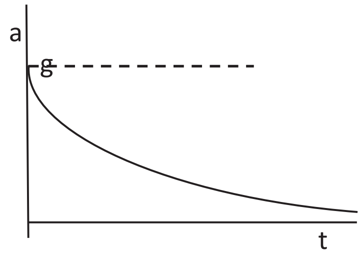
$$v = v_1.\left(1 - e^{-\frac{K}{m}.t}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_1 - v_1.e^{-\frac{K}{m}.t}\right) = -v_1.\left(\frac{-K}{m}\right).e^{\left(\frac{-K}{m}\right).t}$$

siendo $v_1 = \frac{F}{K} \therefore a = -\frac{F}{K}.\left(\frac{-K}{m}\right).e^{\left(\frac{-K}{m}\right).t}$

$$a = \frac{F}{m}.e^{\left(\frac{-K}{m}\right).t} = g.e^{\left(\frac{-K}{m}\right).t}$$

Graficando:

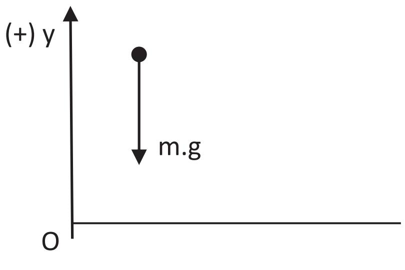


Obtenemos: a vs t. Y en línea de trazos, sin resistencia del fluido la aceleración se mantendría constante.

Para flujo turbulento se utiliza el criterio de Rayleigh y se obtiene: $v = \sqrt{\frac{2.F}{\rho_f.A.C_d}}$, siendo C_d el coeficiente de resistencia aerodinámica y A la sección del objeto en dirección transversal a la de movimiento.

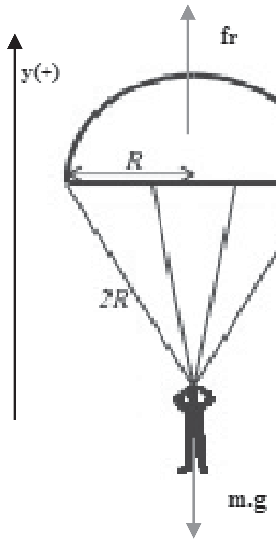
DESCENSO DEL PARACAIDISTA EN UNA ATMÓSFERA UNIFORME

Al lanzarse desde el avión suponemos caída libre con el peso como única fuerza que actúa sobre el paracaidista (g es la aceleración constante presente).



El empuje del aire se considera despreciable ya que la densidad del aire es mucho menor que la del cuerpo. Además, se considera que el rozamiento del paracaidista con el aire es sumamente pequeño como para ser despreciado.

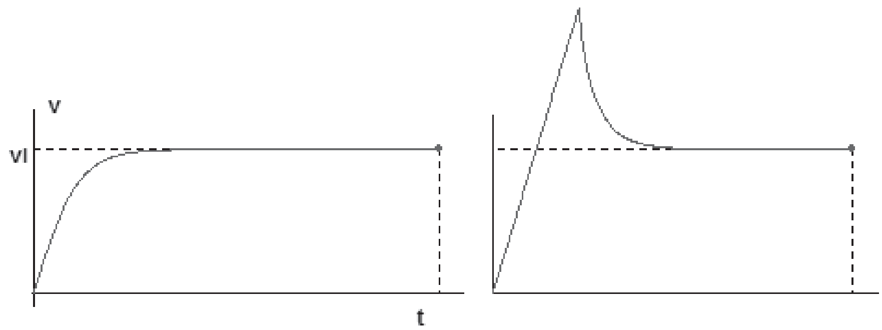
v=-m.g ; $y = y_o - ½ . g. t^2$



Al abrir el paracaídas además del peso actúa una fuerza de resistencia denominada arrastre del aire proporcional al cuadrado de la velocidad: $m.\,a = -m.g + K.\,v^2$; $K = \rho_{aire}.A.\dfrac{\delta}{2}$

Siendo A el área de la sección transversal frontal expuesta al aire y δ es un coeficiente que depende de la forma del objeto.
Nuevamente la velocidad límite se alcanza cuando la aceleración sea cero→

$$0 = -m.g + K.v^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{m.g}{K}}$$



$$m.\frac{dv}{dt} = -m.g + K.v^2 \qquad \frac{dv}{dt} = -g + \tfrac{K}{m}.v^2$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-g + \frac{K}{m}.v^2} = \int_{t_0}^{t} dt \qquad \frac{1}{\frac{K}{m}}.\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\frac{-m.g}{K} + v^2} = \int_{t_0}^{t} dt$$

En el caso de a=0→ $v_1^2 = \dfrac{m.g}{K} \Rightarrow \dfrac{v_1^2}{g} = \dfrac{m}{K}$

$$\frac{m}{K}.\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{-v_1^2+v^2}=\int_{t_0}^{t}dt \qquad \frac{v_1^2}{g}.\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2-v_1^2}=\int_{t_0}^{t}dt \qquad \frac{1}{g}.\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\frac{v^2-v_1^2}{v_1^2}}=\int_{t_0}^{t}dt$$

$$\frac{1}{g}.\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\frac{v^2}{v_1^2}-1}=\int_{t_0}^{t}dt$$

Haciendo cambio de variable: $z=\frac{v}{v_1}\Rightarrow dz=\frac{dv}{v_1}$

$$\frac{1}{g}.\frac{v_1}{v_1}.\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\frac{v^2}{v_1^2}-1}=\frac{v_1}{g}.\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v_1.\left(\frac{v^2}{v_1^2}-1\right)}=\frac{v_1}{g}.\int_{v_0}^{v}\frac{dz}{z^2-1}=\frac{v_1}{g}.\int_{v_0}^{v}\frac{dz}{(z-1).(z+1)}=\int_{t_0}^{t}dt$$

Utilizando el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z-1).(z+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}\Rightarrow 1=A.(z+1)+B.(z-1)$$

$$\text{Si} \quad z=1\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$\text{Si} \quad z=-1\Rightarrow -2B=1\Rightarrow B=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}=\frac{1/2}{z-1}+\frac{(-1/2)}{z+1}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$\frac{v_1}{2.g}.\left(\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z-1}-\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z+1}\right) \qquad \frac{v_1}{2.g}.\left\{\ln(z-1)\Big|_{z_0}^{z}-\ln(z+1)\Big|_{z_0}^{z}\right\}$$

$$\frac{v_1}{2.g}.\left|\ln(z-1)-\ln(z_0-1)-[\ln(z+1)-\ln(z_0+1)]\right| \qquad \frac{v_1}{2.g}.\left|\ln\left(\frac{z-1}{z_0-1}\right)-\ln\left(\frac{z+1}{z_0+1}\right)\right|$$

$$\frac{v_1}{2.g}.\ln\left|\left(\frac{z-1}{z_0-1}\right):\left(\frac{z+1}{z_0+1}\right)\right|=\frac{v_1}{2.g}.\ln\left|\frac{(z-1).(z_0+1)}{(z+1).(z_0-1)}\right|=\int_{t_0}^{t}dt$$

$$\frac{v_1}{2.g}.\ln\left|\frac{(z-1).(z_0+1)}{(z+1).(z_0-1)}\right|=t-t_0$$

$$z=\frac{v}{v_1} \quad y \quad z_0=\frac{v_0}{v_1}$$

$$\ln\left|\frac{\left(\frac{v}{v_1}-1\right).\left(\frac{v_0}{v_1}+1\right)}{\left(\frac{v}{v_1}+1\right).\left(\frac{v_0}{v_1}-1\right)}\right|=(t-t_0).\frac{2.g}{v_1}$$

$$\ln\left|\frac{\left(\frac{v-v_1}{v_1}\right).\left(\frac{v_0+v_1}{v_1}\right)}{\left(\frac{v+v_1}{v_1}\right).\left(\frac{v_0-v_1}{v_1}\right)}\right| = \ln\left|\frac{(v-v_1).(v_0+v_1)}{(v+v_1).(v_0-v_1)}\right| = (t-t_0).\frac{2.g}{v_1}$$

$$\frac{(v-v_1).(v_0+v_1)}{(v+v_1).(v_0-v_1)} = e^{(t-t_0).\frac{2.g}{v_1}} \qquad \frac{(v.v_0+v.v_1)-(v_1.v_0+v_1^2)}{(v.v_0-v.v_1)+(v_1.v_0-v_1^2)} = e^{(t-t_0).\frac{2.g}{v_1}}$$

$$\frac{v.(v_0+v_1)-v_1.(v_0+v_1)}{v.(v_0-v_1)+v_1.(v_0-v_1)} = \left|e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}\right|^2 = e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}.e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}$$

$$\frac{v.(v_0+v_1)-v_1.(v_0+v_1)}{e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}} = v.(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}} + v_1.(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}$$

$$\left|v.(v_0+v_1)-v_1.(v_0+v_1)\right|.e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} = v.(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}} + v_1.(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}$$

$$v.(v_0+v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} - v_1.(v_0+v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} = v.(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}} + v_1(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}$$

$$v.(v_0+v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} - v.(v_0+v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}} = v_1.(v_0-v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} + v_1.(v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}$$

$$v.\left|(v_0+v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} - (v_0+v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}\right| = v_1.\left|(v_0-v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} + (v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}\right|$$

$$v = v_1.\left|\frac{(v_0-v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} + (v_0-v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}}{(v_0+v_1).e^{-(t-t_0).\frac{g}{v_1}} - (v_0+v_1).e^{(t-t_0).\frac{g}{v_1}}}\right|$$

Expresión de la posición del paracaidista en función del tiempo.

Ahora desarrollamos la expresión de la posición del paracaidista en función de la velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}.v$$

Sabiendo que: $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{K}{m}.v^2 \Rightarrow v.\frac{dv}{dy} = -g + \frac{K}{m}.v^2$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v.dv}{-g + \frac{K}{m}.v^2} = \int_{y_0}^{y} dy$$

Siendo: $v_1^2 = \frac{m.g}{K}$

$$\frac{m}{K}.\int_{v_0}^{v} \frac{v.dv}{-\frac{m.g}{K} + v^2} = \int_{y_0}^{y} dy \qquad \frac{v_1^2}{g}.\int_{v_0}^{v} \frac{v.dv}{-v_1^2 + v^2} = \int_{y_0}^{y} dy \qquad \frac{v_1^2}{g}.\int_{v_0}^{v} \frac{v.dv}{v^2 - v_1^2} = \int_{y_0}^{y} dy$$

$$z = \frac{v}{v_1} \Rightarrow dz = \frac{dv}{v_1}$$

$$\frac{1}{g}.\int_{v_0}^{v} \frac{v.dv}{\frac{v^2}{v_1}-1} = \frac{1}{g}.\int_{v_0}^{v} \frac{z.\,v_1.dz.v_1}{z^2-1} = \frac{v_1^2}{g}.\int_{v_0}^{v} \frac{z.dz}{z^2-1} = \int_{y_0}^{y} dy$$

Haciendo: $u = z^2 - 1$ $\quad du = 2.z.dz \quad \frac{du}{2} = z.dz$

$$\frac{v_1^2}{2.g}.\int_{v_0}^{v} \frac{du}{u} = \int_{y_0}^{y} dy \qquad \frac{v_1^2}{2.g}.\ln u\Big|_{v_0}^{v} = \int_{y_0}^{y} dy \qquad \frac{v_1^2}{2.g}.\ln\left(z^2-1\right)\Big|_{v_0}^{v} = \int_{y_0}^{y} dy$$

$$\frac{v_1^2}{2.g}.\ln\left(\frac{v^2}{v_1^2}-1\right)\Bigg|_{v_0}^{v} = \int_{y_0}^{y} dy$$

$$\frac{v_1^2}{2.g}.\left|\ln\left(\frac{v^2}{v_1^2}-1\right) - \ln\left(\frac{v_0^2}{v_1^2}-1\right)\right| = y - y_0$$

$$\frac{v_1^2}{2.g}.\ln\frac{\frac{v^2-v_1^2}{v_1^2}}{\frac{v_0^2-v_1^2}{v_1^2}} = y - y_0 \qquad \frac{v_1^2}{2.g}.\ln\frac{v^2-v_1^2}{v_0^2-v_1^2} = y - y_0 \qquad \ln\frac{v^2-v_1^2}{v_0^2-v_1^2} = \frac{2.g}{v_1^2}.-\left(y_0-y\right)$$

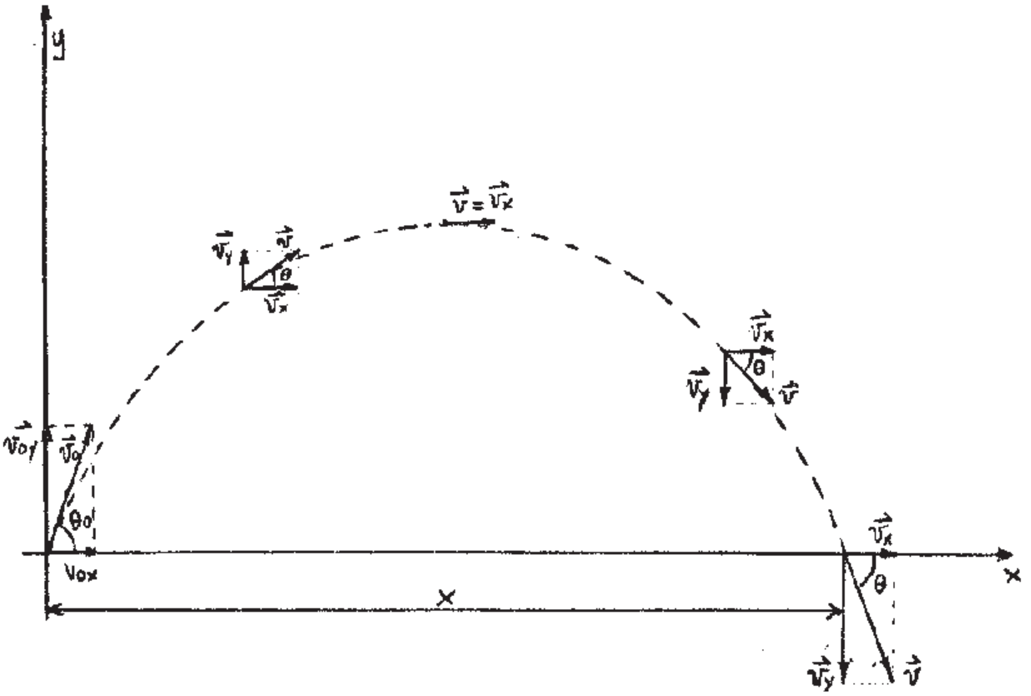
$$\frac{v^2-v_1^2}{v_0^2-v_1^2} = e^{\frac{-2.g}{v_1^2}.(y_0-y)} \qquad v^2 = v_1^2 + \left(v_0^2-v_1^2\right).e^{\frac{-2.g}{v_1^2}.(y_0-y)}$$

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL EN EL VACÍO

Estudiaremos a continuación el movimiento de un proyectil sobre la superficie de un planeta en el vacío, es decir, en ausencia de las fuerzas de rozamiento provocadas por la atmósfera del planeta. Llamaremos proyectil a cualquier objeto arrojadizo, o que se pueda lanzar, no importa el tamaño o peso que posea, y además que no se impulse por si. De ésta definición podemos deducir que un cohete, mientras es impulsado por sus motores no es un proyectil; solo se transforma en proyectil al terminársele el combustible. El movimiento de caída libre, ya estudiado, es un caso particular de este movimiento. La curva descripta por el proyectil en su movimiento se denomina trayectoria. Cuando un proyectil es lanzado, el mecanismo de impulso le transmite una velocidad que llamaremos velocidad inicial del proyectil. Por efecto de la atracción gravitacional del planeta en el que se mueve el proyectil, este cambia constantemente la dirección de su movimiento, regresando nuevamente a la superficie del planeta. Es conveniente aclarar aquí, que el estudio que realizaremos vale para movimientos cuyas trayectorias sean suficientemente cortas como para considerar "g" como constante en magnitud y dirección. Por otro lado, el sistema de referencia desde el cual se estudiará el movimiento, estará fijo a la superficie del planeta, con lo cual el movimiento se realizará en el vacío y sobre un planeta "plano" y carente de movimiento de rotación.

Comenzaremos nuestro estudio eligiendo nuestro sistema de referencia. Tomaremos un sistema cartesiano, con el eje y vertical y el eje x horizontal, eligiendo como origen el punto desde el cual el proyectil comienza su movimiento libre. Esto quiere decir que comenzaremos a estudiar el movimiento del proyectil cuando toda fuerza de empuje ha cesado sobre él. La velocidad $\vec{v}_0$ del

proyectil tendrá una componente a lo largo de cada eje. Como la única aceleración presente en el sistema es "g" y está dirigida en la dirección del eje y, modificará la componente $\vec{v}_{0y}$ de $\vec{v}_0$. Así, $\vec{v}_{0y}$ va disminuyendo a medida que el proyectil se mueve, lo que origina la curvatura de la trayectoria. Por otro lado al no haber aceleración a lo largo del eje x $\vec{v}_{0x}$ permanece constante.
Así, el movimiento del proyectil resulta una combinación de dos movimientos: uno uniforme a lo largo del eje x y otro uniformemente acelerado a lo largo del eje y. En la figura siguiente, mostramos un esquema de la trayectoria de un tiro oblicuo (como también se lo llama al tiro del proyectil) donde se han dibujado las velocidades para varios instantes de tiempo.
La velocidad $\vec{v}_0$ es la velocidad del proyectil para t = 0 y θ_0, es el ángulo de tiro o ángulo de elevación. Las componentes rectangulares de $\vec{v}_0$ son: $\vec{v}_{0y} = \vec{v}_0.\text{sen}\theta_0$ y $\vec{v}_{0x} = \vec{v}_0.\cos\theta_0$
Como ya dijimos, al no haber aceleración según el eje x la velocidad para cualquier tiempo t, según el eje x será: $\vec{v}_x = \vec{v}_{0x} = \vec{v}_0.\cos\theta_0$



La velocidad según y para t =0, es, como ya dijimos $\vec{v}_{0y}$, pero según este eje hay una aceleración $-\vec{g}$, resulta entonces para cualquier tiempo t:

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{0y} - \vec{g}.t = \vec{v}_0.\text{sen}\theta_0 - \vec{g}.t$$

De las velocidades componentes, puede obtenerse la velocidad $\vec{v}$ para cualquier t, cuyo módulo es:

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

y su dirección respecto al eje x está dado por el ángulo θ, a través de:

$$\text{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

Dado que el movimiento según el eje x es uniforme, la abscisa vendrá dada por:

$\vec{x} = \vec{v}_{0x}.t = (\vec{v}_0.\cos\theta_0).t$ $\qquad t = \dfrac{\vec{x}}{\vec{v}_0.\cos\theta_0}$

y para el movimiento en el eje y, tendremos:

$\vec{y} = \vec{v}_{0y}.t - \frac{1}{2}.\vec{g}.t^2 = (\vec{v}_0.\text{sen}\theta_0).t - \frac{1}{2}.\vec{g}.t^2$

Téngase en cuenta que la primera mitad del movimiento del proyectil, es decir, hasta que este alcanza su altura máxima, es uniformemente retardado y la segunda mitad es uniformemente acelerado.

Las ecuaciones de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dan las posiciones según cada eje en función de t. Despejando t de $\vec{x}$ y reemplazando en $\vec{y}$ resulta:

$$\vec{y} = \vec{v}_0.\text{sen}\theta_0.\frac{\vec{x}}{\vec{v}_0.\cos\theta_0} - \frac{1}{2}.\vec{g}.\left(\frac{\vec{x}}{\vec{v}_0.\cos\theta_0}\right)^2$$

$$\vec{y} = (\text{tg}\theta_0).\vec{x} - \frac{\vec{g}}{2.v_0^2.\cos^2\theta_0}.x^2$$

Como $\vec{v}_0$, tg θ_0, cos θ_0 y g son constantes, podemos rescribir la expresión anterior como: y= n.x-m.x^2, cuya gráfica es una parábola, que es precisamente la forma que tiene la trayectoria. El alcance R del proyectil es la distancia que el proyectil recorre sobre el eje x. El proyectil recorre R cuando y = 0. Luego:

$v_{0y}.t = \frac{1}{2}.g.t^2$ $\qquad$ con y = 0

De donde: $\qquad t = \dfrac{2.v_{0y}}{g}$

Este tiempo t es el tiempo que tarda el proyectil en recorrer R. De la ecuación:

$$x = v_{0x}.t = v_{0x}.\frac{2.v_{0y}}{g} = \frac{v_0.\cos\theta_0.2.V_0.\text{sen}\theta_0}{g} = \frac{2.v_0^2.\text{sen}\theta_0.\cos\theta_0}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\text{sen}2\theta_0$$

El alcance será máximo cuando sen 2 θ_0 sea máximo. Esto ocurre para 2 θ_0 =90º, o sea:

θ_0 = 90º / 2 = 45º

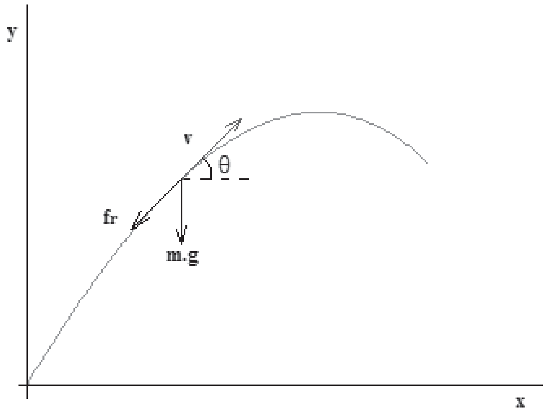
Es decir, para una velocidad inicial $\vec{v}_0$ dada, el proyectil alcanzará la máxima distancia horizontal cuando el ángulo de elevación sea 45º. Por otro lado, dada la expresión del alcance en función del ángulo θ_0: $x = \dfrac{2.v_0^2.\text{sen}\theta_0.\cos\theta_0}{g}$ se ve que hay dos valores de θ_0 que darán el mismo valor de x, ya que el producto sen θ_0. cos θ_0 es el mismo para dos valores de θ_0, es decir, aquellos ángulos que son complementarios .Por ello, habrá dos ángulos de tiro que proporcionen el mismo alcance. Obviamente tanto el tiempo de recorrido como la altura máxima alcanzada serán mayores para la trayectoria correspondiente al ángulo mayor.

La altura de culminación se obtiene de $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.g.(y - y_0) = v_0^2.\text{sen}^2\theta_0 - 2.g.h_c$

Siendo la velocidad a la altura máxima v_y=0 nos queda $h_c = \dfrac{{v_0}^2}{2.g}.\text{sen}^2\theta_0$

<u>MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL CON ROZAMIENTO</u>

Tenemos la trayectoria en el plano de un proyectil disparado en el vacío con un ángulo θ.



El modelo idealizado como ya sabemos representa el proyectil como una partícula con aceleración g, y su movimiento se analiza como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.
Despreciando la curvatura de la Tierra, inevitable en el vuelo de misiles intercontinentales (de largo alcance) y la rotación terrestre, incorporamos solamente la fuerza de rozamiento la cual es proporcional a la velocidad: $f_r = m.b.v$ que graficamos tangente a la trayectoria. Siendo b el coeficiente de fricción con el aire.

Despreciando el Empuje, la ecuación de movimiento queda:

$$(1) \quad m.\frac{dv_x}{dt} = -m.b.v_x$$

$$(2) \quad m.\frac{dv_y}{dt} = -m.g - m.b.v_y$$

De (1): $\frac{dv_x}{dt} = -b.v_x$; $\quad \frac{dv_x}{v_x} = -b.dt$

Integrando para condiciones iniciales → t=0 $\Rightarrow v_{0x} \quad y \quad v_{0y}$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -b.\int_0^t dt; \qquad \ln v_x\Big|_{v_{0x}}^{v_x} = -b.t \Rightarrow \ln v_x - \ln v_{0x} = -b.t$$

$$\ln \frac{v_x}{v_{0x}} = -b.t; \qquad \frac{v_x}{v_{0x}} = e^{-b.t} \Rightarrow v_x = v_{0x}.e^{-b.t}$$

$$\frac{d_x}{dt} = v_{0x}.e^{-b.t} \quad (3)$$

A partir de (2):

$$\frac{dv_y}{\left(-g - b.v_y\right)} = dt$$

Recordemos que en la caída en un fluido con fricción, la velocidad límite se alcanza cuando la a_y=0, en este caso de (2):

$$0 = -g - b.v_y \therefore \quad v_{1y} = \frac{-g}{b} = v_1$$

$$\frac{dv_y}{-b.\left(\frac{g}{b}+v_y\right)}=dt\,; \qquad \frac{dv_y}{\frac{g}{b}+v_y}=-b.dt\,;$$

Integrando: $\int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{dv_y}{\frac{g}{b}+v_y}=-b.\int_0^t dt\,; \qquad \int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{dv_y}{-v_1+v_y}=-b.\int_0^t dt\,;$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{dv_y}{v_1.\left(\frac{v_y}{v_1}-1\right)}=-b.t\,; \quad \text{haciendo}: \ z=\frac{v_y}{v_1}-1\Rightarrow dz=\frac{1}{v_1}.d_{vy}$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{dz}{z}=-b.t\Rightarrow \ln z\Big|_{v_{0y}}^{v_y}=-b.t; \qquad \ln\left(\frac{v_y}{v_1}-1\right)\Bigg|_{v_{0y}}^{v_y}=-b.t$$

$$\ln\left(\frac{v_y}{v_1}-1\right)-\ln\left(\frac{v_{0y}}{v_1}-1\right)=-b.t; \qquad \ln\left(\frac{\frac{v_y}{v_1}-1}{\frac{v_{0y}}{v_1}-1}\right)=-b.t; \qquad \left(\frac{v_y}{v_1}-1\right)=\left(\frac{v_{0y}}{v_1}-1\right).e^{-b.t}$$

$$\left(\frac{v_y-v_1}{v_1}\right)=\left(\frac{v_{0y}-v_1}{v_1}\right).e^{-b.t}\Rightarrow v_y-v_1=(v_{0y}-v_1).e^{-b.t} \ \text{recordando} \ v_1=\frac{-g}{b}$$

$$v_y+\frac{g}{b}=\left(v_{0y}+\frac{g}{b}\right).e^{-b.t}\,; \qquad v_y=\left(v_{0y}+\frac{g}{b}\right).e^{-b.t}-\frac{g}{b}\,; \qquad \frac{dy}{dt}=\left(v_{0y}+\frac{g}{b}\right).e^{-b.t}-\frac{g}{b} \quad (4)$$

Integrando nuevamente, con condiciones iniciales: t=0, x=0 , y=0.

De (3): $\int dx=v_{0x}.\int e^{-b.t}.dt$ cambiando u=-b.t du=-b.dt $\int dx=\frac{v_{0x}}{-b}.\int e^{u}.du$

$$x=-\frac{v_{0x}}{b}.e^{u}+C \quad \text{reemplazando cond. iniciales}: \ 0=-\frac{v_{0x}}{b}.e^{0}+C\Rightarrow C=\frac{v_{0x}}{b}$$

$$x=-\frac{v_{0x}}{b}.e^{-b.t}+\frac{v_{0x}}{b}\therefore x=\frac{v_{0x}}{b}\left(-e^{-b.t}+1\right) \quad (5) \qquad x=\frac{v_{0x}}{b}\left(1-e^{-b.t}\right) \quad (5)$$

De (4): $\int dy=\int\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).e^{-b.t}.dt-\int\frac{g}{b}.dt$ cambiando u=-b.t, du=-b.dt

$$\int dy=\int\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{-b}.e^{u}.du-\int\frac{g}{b}.dt$$

$$y=\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{-b}.e^{u}-\frac{g}{b}.t+C \qquad y=-\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}.e^{-b.t}-\frac{g}{b}.t+C$$

Para condiciones iniciales: $0=-\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}.e^{-b.0}-\frac{g}{b}.0+C\Rightarrow C=\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}$

$$y=-\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}.e^{-b.t}-\frac{g}{b}.t+\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b} \qquad y=\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}.\left(1-e^{-b.t}\right)-\frac{g}{b}.t \quad (6)$$

Para un proyectil disparado con velocidad v_0 y con ángulo de lanzamiento θ_0 con la horizontal:

$$v_{0x} = v_0.\cos\theta_0$$

$$v_{0y} = v_0.\text{sen}\theta_0$$

El proyectil llega al suelo (y=0), a una distancia x=R (alcance) medida desde el origen.

En (5) con x=R: despejando t:

$$1-\frac{R.b}{v_{0x}} = e^{-b.t}; \qquad \ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right) = \ln e^{-b.t}; \qquad \ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right) = -b.t \;\Rightarrow t = -\frac{1}{b}.\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación (6) con y=0:

$$0 = \left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}.\left(1-e^{-b.t}\right)+\frac{g}{b^2}.\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right)$$

Para cuando x=R, reemplazando en (5):

$$R = \frac{v_{0x}}{b}\left(1-e^{-b.t}\right) \Rightarrow \frac{R}{v_{0x}} = \frac{1}{b}.\left(1-e^{-b.t}\right)$$

Entonces, en la ecuación que estábamos desarrollando queda:

$$\left(\frac{g}{b}+v_{iy}\right).\frac{R}{v_{0x}}+\frac{g}{b^2}.\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{ix}}\right) = 0 \qquad (7)$$

Una ecuación trascendente en R, que se resuelve por métodos numéricos.

La altura máxima se da cuando $v_y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$, despejando t en la ecuación (4) e introduciéndolo en (6):

$$0 = \left(v_{0y}+\frac{g}{b}\right).e^{-b.t} - \frac{g}{b} \quad ; \qquad \frac{g}{b} = \left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).e^{-b.t} \quad (8)$$

$$\frac{g}{b} = \frac{g}{b}.e^{-b.t}+v_{0y}.e^{-b.t} \Rightarrow 1 = e^{-b.t}+\frac{v_{0y}.b}{g}.e^{-b.t} \Rightarrow e^{-b.t} = 1-\frac{v_{0y}.b}{g}.e^{-b.t}$$

$$1 = \frac{1}{e^{-b.t}}-\frac{v_{0y}.b}{g} \Rightarrow \frac{1}{e^{-b.t}} = 1+\frac{v_{0y}.b}{g} \text{ sacando denominado r común } \frac{1}{e^{-b.t}} = \frac{g+v_{0y}.b}{g}$$

$$e^{-b.t} = \frac{g}{g+v_{0y}.b} = \frac{1}{1+\frac{v_{0y}.b}{g}}; \qquad \ln e^{-b.t} = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{v_{0y}.b}{g}}\right)$$

$$-b.t = \ln 1-\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{b}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)$$

$$y = \left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}.\left(1-e^{-b.t}\right)-\frac{g}{b}.\frac{1}{b}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)$$

$$y = \left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}-\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).e^{-b.t}.\frac{1}{b}-\frac{g}{b}.\frac{1}{b}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)$$

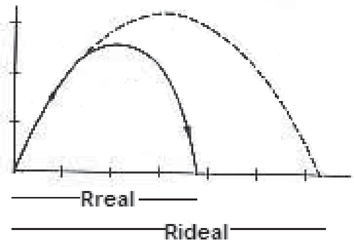
El segundo término del segundo miembro lo reemplazamos por el equivalente que nos da (8):

$$y=\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{1}{b}-\frac{g}{b}.\frac{1}{b}-\frac{g}{b}.\frac{1}{b}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)$$

$$y=\frac{1}{b}.\left|\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right)-\frac{g}{b}-\frac{g}{b}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)\right|=\frac{1}{b}.\left|v_{0y}-\frac{g}{b}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)\right|$$

$$y=\frac{v_{0y}}{b}-\frac{g}{b^2}.\ln\left(1+\frac{v_{0y}.b}{g}\right)$$

Cuando hay rozamiento, el alcance máximo no se obtiene para un θ= 45° sino para un ángulo ligeramente inferior.



Si la resistencia del aire es pequeña b~0, el término $\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right)$ se puede desarrollar en serie hasta potencias de tercer orden en b. Recordando serie de Taylor:

$$f_{(x)}=f_{(a)}+\frac{f'_{(a)}}{1!}.(x-a)+\frac{f''_{(a)}}{2!}.(x-a)^2+...$$

Siendo $f_{(x)}=\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right)$; la variable x es b y el valor de a=0:

$$\ln\left(1-\frac{b.R}{v_{0x}}\right)\approx\ln(1)+\frac{-\frac{R}{v_{0x}}}{\left.\left(1-\frac{b.R}{v_{0x}}\right)\right|_{b=0}.1!}.b+\frac{\frac{R^2}{v_{0x}^2}}{\left.\left(1-\frac{b.R}{v_{0x}}\right)^2\right|_{b=0}.2!}.b^2+\frac{-\frac{2.R^3}{v_{0x}^3}}{\left.\left(1-\frac{b.R}{v_{0x}}\right)^3\right|_{b=0}.3!}.b^3+...=$$

$$=-\frac{R}{v_{0x}}.b+\frac{1}{2}.\frac{R^2}{v_{0x}^2}.b^2-\frac{1}{3}.\frac{R^3}{v_{0x}^3}.b^3+...$$

En la expresión del tiempo $t=-\frac{1}{b}.\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right)$; si consideramos b muy pequeño, podríamos reemplazar: $\ln\left(1-\frac{b.R}{v_{0x}}\right)$ por la aproximación al primer término de la serie: $-\frac{R}{v_{0x}}.b$

$$t=\frac{1}{b}.\frac{R}{v_{0x}}.b\Rightarrow v_{0x}=\frac{R}{t}$$

Valor de la velocidad en el eje x cuando no existe rozamiento.

De la expresión (7) despejamos:

$$\ln\left(1-\frac{R.b}{v_{0x}}\right)=-\frac{b^2}{g}.\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{R}{v_{0x}}$$

Reemplazamos el primer miembro por el equivalente de la serie $-\frac{R}{v_{0x}}.b+\frac{1}{2}.\frac{R^2}{v_{0x}^2}.b^2-\frac{1}{3}.\frac{R^3}{v_{0x}^3}.b^3+\ldots$ y operando:

$$-\frac{b^2}{g}.\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right).\frac{\cancel{R}}{\cancel{v_{0x}}}=-\frac{\cancel{R}}{\cancel{v_{0x}}}.\cancel{b}+\frac{1}{2}.\frac{R^2}{v_{0x}^2}.b^2-\frac{1}{3}.\frac{R^{\cancel{3}2}}{v_{0x}^{\cancel{3}2}}.b^{\cancel{3}2}+\ldots$$

$$-\frac{b}{g}.\left(\frac{g}{b}+v_{0y}\right)=-1+\frac{1}{2}.\frac{R}{v_{0x}}.b-\frac{1}{3}.\frac{R^2}{v_{0x}^2}.b^2+\ldots$$

$$\left(-1-\frac{b}{g}.v_{0y}\right).v_{0x}=-v_{0x}+\frac{R.b}{2}-\frac{R^2.b^2}{3.v_{0x}}+\ldots$$

Agrupando en un solo miembro: $\frac{v_{0x}.v_{0y}.b}{g}+\frac{R.b}{2}-\frac{R^2.b^2}{3.v_{0x}}+\ldots=0$

Multiplicando ambos miembros por: $\frac{2}{b}$ obtenemos la ecuación de segundo grado en R:

$$\frac{2.v_{0x}.v_{0y}}{g}+R-\frac{2.R^2.b}{3.v_{0x}}+\ldots=0\Rightarrow\frac{2.b}{3.v_0.\cos\theta}.R^2+R-\frac{2.v_{0x}.v_{0y}}{g}=0$$

Precisamente su función describe la trayectoria; de menor alcance que el modelo idealizado.

BIBLIOGRAFÍA

1. Física Universitaria. Volumen 1 y 2- 12ª edición. Young-Freedman.2009.-
2.- Física- Volumen I – II, Resnick, R. Halliday, D. & Krane, K. 2004, C.E.C.S.A.
4. Ingeniería Mecánica "ESTÁTICA", 12ª edición. R. C. Hibeler. 2010.-
5. Ingeniería Mecánica "DINÁMICA", 12ª edición. R. C. Hibeler. 2010.-
6. Física - Tomo I – II, Serway – Jewett. Thompson 2005.
7. Física Conceptual, Jewett, 2009.
8. Física para la Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología Vol 1A y C, Tippler,Mosca, 2005.
9. Física. Alonso M. & Finn E. 1995, Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid.
10. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/stokes/stokes.html.
11. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/paracaidista/paracaidista.html.
12. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/stokes2/stokes2.htm.