MATRICES

https://proyectodescartes.org/Un_100/materiales_didacticos/_Un_037_OperacionesConMatrices/index.html

TEOREMA

Si A_{nxn} es inversible, entonces su inversa es única.

PROPIEDADES

1) Si A_{nxn} es inversible, entonces A^{-1} también es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) Si A_{nxn} es inversible, entonces A^T también es inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3) Si A_{nxn} y B_{nxn} son inversibles, entonces A.B es inversible y $(A.B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

4) Si $k \in IR - \{0\}$ y A_{nxn} es inversible, entonces kA también es inversible y

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Aclaración: Decir que A es inversible es lo mismo que decir que A es regular o que A es no singular. De igual manera, una matriz singular es una matriz no inversible,

Matriz elemental

Una matriz cuadrada A_n será una matriz elemental si puede obtenerse a partir de la matriz identidad I_n, aplicando sólo una operación elemental.

Ejemplos de matrices elementales:

Todas ellas se obtuvieron aplicando una sola operación elemental

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó la 2da fila de la I_2 por - 3

Se permutaron la 2da y la 4ta fila de I_4

Se le sumó a la fila 1 de I_3 el triple de la fila 3

Se multiplicó una fila de I_3 por 1.

.

PROPIEDAD DE LAS MATRICES ELEMENTALES

- Si premultiplicamos una matriz elemental E de orden n por una matriz A del mismo orden, la matriz elemental E, le transfiere a la matriz A, la operación elemental que le dio origen por filas.

- Si postmultiplicamos una matriz elemental E de orden n por una matriz A del mismo orden, la matriz elemental E, le transfiere a la matriz A, la operación elemental que le dio origen por columnas.

Ejemplo:

I_n : matriz identidad de orden nxn

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Observa que al premultiplicar E,(la cual se obtuvo permutando las filas de I_2), por A la nueva matriz E.A se obtener permutando las filas de A.

Observa que al postmultiplicar E,(la cual se obtuvo permutando las filas de I_2), por A la nueva matriz A.E se puede obtener permutando las columnas de A.

MATRICES EQUIVALENTES

Una matriz B de orden mxn es equivalente a otra matriz A del mismo orden, si B puede obtenerse a partir de la matriz A aplicándole a ésta una cantidad finita de operaciones elementales por filas.

Propiedad

- Las matrices elementales son equivalentes por filas a la matriz identidad.
- Todas las matrices elementales son invertibles.
- La inversa de una matriz elemental también es matriz elemental.

MATRIZ EN FORMA ESCALONADA

Una matriz de orden m x n está expresada en forma escalonada si cumple lo siguiente:

- Si tiene filas nulas, estas deben ubicarse en la parte inferior de la matriz.
- Si tiene filas no nulas, en ellas el primer elemento no nulo debe ser 1.
- Si tiene dos o más filas consecutivas no nulas, el primer elemento no nulo de la fila inferior debe ubicarse a la derecha del primer elemento no nulo de la fila superior.

MATRIZ EN FORMA ESCALONADA REDUCIDA

Una matriz de orden m x n estará expresada en su forma escalonada reducida si además de ser escalonada, cumple:

- Si una fila es no nula, en la columna donde se encuentra el primer elemento no nulo, los elementos restantes de dicha columna deben ser ceros.

EJEMPLOS: ¿Las siguientes matrices están escalonadas ? ¿y escalonadas reducidas?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

a) La matriz es **escalonada y escalonada reducida** .

b) La matriz **NO es escalonada ni escalonada reducida**. ya que el primer elemento no nulo de la fila 3, se ubica a la izquierda del primer elemento no nulo de la fila 2, debería estar a la derecha. Al no ser escalonada tampoco puede ser escalonada reducida.

c) La matriz es **escalonada** y **escalonada reducida** .

EJEMPLOS: ¿Las siguientes matrices están escalonadas ? ¿y escalonadas reducidas?

$$d)\ \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) La matriz es **escalonada** pero **NO es escalonada reducida** ya que en la 2da columna en la que se encuentra el primer elemento no nulo de la fila 2, el resto de los elementos no son ceros. (si el -7 fuese cero, la matriz sería escalonada reducida)

e) La matriz **NO es escalonada** ya que el primer elemento no nulo de la fila 2 no está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila 1. Al no ser escalonada tampoco puede ser escalonada reducida.

f) La matriz es **escalonada** y **escalonada reducida**.

IMPORTANTE:

- Toda matriz se puede llevar a la forma escalonada o escalonada reducida mediante la aplicación de operaciones elementales a sus filas.
- La forma escalonada reducida de una matriz es única no ocurre lo mismo con la forma escalonada.

RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama rango de una matriz A_{mxn} al número de filas no nulas que tiene la matriz expresada en su forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rango de A $\rho(A) = 2$ Rango de B $\rho(B) = 1$

1)El rango de la matriz nula es cero.
2)El rango de la matriz identidad de orden n, es n.
3)Si A es de orden m x n , tal que $m \leq n$, entonces el $\rho(A) \leq m$.
4)Si A es de orden m x n , tal que $n \leq m$, entonces el $\rho(A) \leq n$.

Si A es una matriz nxn, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- A es invertible.
- A tiene su rango es n.
- A es equivalente por filas a la identidad.
- La forma escalonada reducida de A es la In.
- A se puede expresar como producto de matrices elementales.