RECTAS

Respuestas a los Ejercicios 46 a 53 y C15

46. Halle las distintas formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto Q(2, 1) y es perpendicular a la recta $\boldsymbol{OP} = (2, 4) + t\,(4, -3)\ \ t \in R$. Represente gráficamente.

Respuestas:

La recta solicitada L_2 pasa por el punto Q(2,1) y es perpendicular a L_1: $\boldsymbol{OP} = (2,4) + \mathrm{t}\,(4,-3)\ t \in R$

Encontramos el vector director de la recta L_2 de modo tal que el producto escalar con el vector director de la recta L_1 sea cero. Siendo $\mathbf{d}_{L1} = (4,-3)$, seleccionamos por ejemplo $\mathbf{d}_{L2} = (3,4)$ de forma tal que el producto escalar entre ambos vectores directores es nulo.

Otra forma posible de resolución es la siguiente: podemos trabajar con la ecuación de la recta L_1 y obtener la ecuación general, luego determinar un vector normal a L_1 y sabiendo que el vector director de L_2 es combinación lineal de ese nuevo vector, determinar un posible vector director de L_2. Es decir:

$$\boldsymbol{OP} = (2,4) + \mathrm{t}\,(4,-3)\ t \in R$$

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-3}$$

$$-3x - 4y + 22 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} A = -3 \\ B = -4 \end{matrix}\right\} \boldsymbol{n}_{L1} = (A, B) = (-3, -4)$$

$$\boldsymbol{d}_{L2} = k\,\boldsymbol{n}_{L1} = k(-3,-4), k \in R$$

Adoptamos k=1 y resulta: $\mathbf{d}_{L2} = (-3,-4)$

Ahora expresamos la ecuación vectorial paramétrica de la recta L_2 y a partir de ella todas las demás.

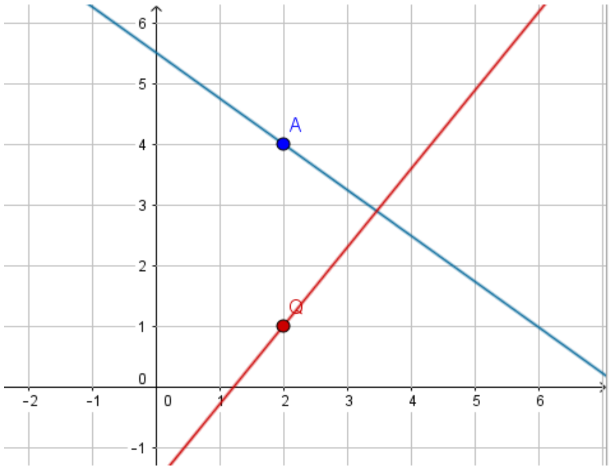
$$\boldsymbol{OP} = (2,1) + k\,(-3,-4)\ k \in R$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 - 4k \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-4}$$

$$-4x + 3y + 5 = 0$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$



47. Dadas las rectas $y=3$ e $y=-x$

a) Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, 5) y por la intersección de las rectas dadas usando el concepto de familia de rectas.

b) Represente gráficamente.

Respuestas:

Escribimos la *ecuación de la familia de rectas* que pasan por la intersección de las rectas
$y - 3 = 0 \quad ; \quad y + x = 0$

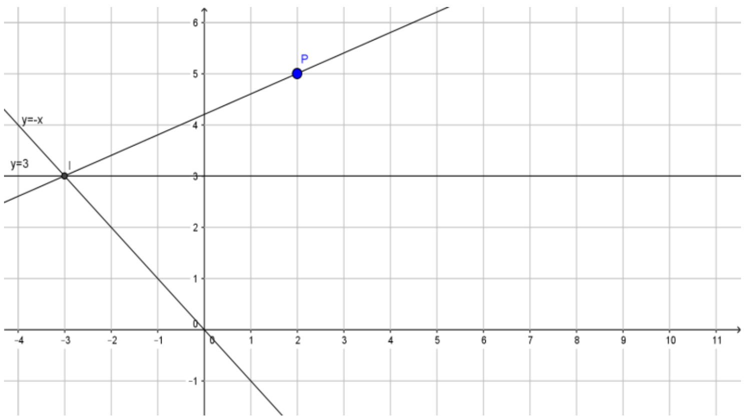
$$y + x + k(y - 3) = 0 \; ; k \in R$$

Sustituimos las coordenadas del punto P(2,5) para determinar el valor de k que corresponde a la ecuación de la recta buscada: $5 + 2 + k(5 - 3) = 0 \quad ; \quad k = -\frac{7}{2}$

Sustituimos el valor de k encontrado en la ecuación de la familia de rectas:

$$y + x + \left(-\frac{7}{2}\right)(y - 3) = 0$$

Desarrollando queda la ecuación general de la recta buscada: $2x - 5y + 21 = 0$

b) 

48. Dadas las siguientes rectas:

L_1: $\boldsymbol{OP}$= (1,1,-1) + t_1 (2,3,1) $t_1 \in R$ y L_2: $\boldsymbol{OP}$= (−1,−2,−2) + t_2 (1,4,2) ; $t_2 \in R$

a) Demuestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan en un punto.
b) Halle las coordenadas del punto de intersección.
c) Determine la ecuación del plano que ellas definen.
d) Calcule el ángulo que forman las dos rectas.

Respuestas:

a) Dos rectas *no paralelas* en R^3 ($\boldsymbol{d}_{L1}$ y $\boldsymbol{d}_{L2}$ son vectores LI), son secantes si y solo si el producto mixto entre los vectores directores de ambas rectas y el vector que tiene como extremos un punto de cada recta , es nulo.

$$\boldsymbol{d}_{L1} = (2,3,1) \quad ; \quad \boldsymbol{d}_{L2} = (1,4,2) \quad ; \quad \mathbf{P_1P_2} = (-2,-3,-1)$$

$\boldsymbol{d}_{L1} = (2,3,1)$; $\boldsymbol{d}_{L2} = (1,4,2)$ no son paralelos, entonces evaluamos el producto mixto:

$$(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\mathbf{P_1P_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 5 = 0$$

El producto mixto nulo indica que las rectas son coplanares.

b) A partir de las ecuaciones vectoriales paramétricas de las dos rectas, determinamos las ecuaciones cartesianas paramétricas:

L_1

$$\begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 1 + 3t_1 \\ z = -1 + t_1 \end{cases}$$

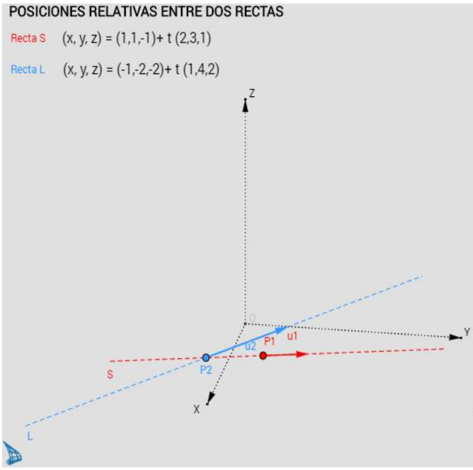
L_2

$$\begin{cases} x = -1 + t_2 \\ y = -2 + 4t_2 \\ z = -2 + 2t_2 \end{cases}$$

Igualando las expresiones para las coordenadas *x*, e *y* se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 1 + 2t_1 = -1 + t_2 \\ 1 + 3t_1 = -2 + 4t_2 \end{cases}$$

La resolución de dicho sistema conduce a los valores: t_1=-1 y t_2 =0. Estos valores verifican la igualdad para la tercera ecuación en *z*. Por lo tanto, el punto de intersección es: $I(-1,-2,-2)$



https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju

c) Escribimos la ecuación vectorial paramétrica del plano definido por las dos rectas dadas, a partir de los vectores directores de ambas rectas, y eligiendo un punto cualquiera de alguna de las dos rectas, o bien el punto de intersección:

$$\boldsymbol{OP} = (-1,-2,-2) + k_1(2,3,1) + k_2(1,4,2) \;\; ; \; k_1 \in R \quad k_2 \in R$$

d) El ángulo entre dos rectas es el ángulo que forman sus vectores directores

$$\frac{\boldsymbol{d}_{L1} . \boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\| . \|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \cos \propto$$

$$\boxed{\frac{16}{7.\sqrt{6}} = \cos \propto \quad ; \propto \sim 21°}$$

---

49. Distancia entre un punto y una recta en R^3

a) Encuentre una expresión que permita calcular la distancia entre un punto y una recta en R^3. Justifique su desarrollo.

b) Calcule la distancia entre el punto Q(−2, 3, 5) y la recta: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ $t \in R$

Respuestas:

a) Desarrollo en el libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, página 62.

b) Un punto de la recta es $P_0(1,2,-1)$; Por lo tanto el vector $\boldsymbol{P_0Q}$ es: $\boldsymbol{P_0Q} = (-3,1,6)$

El vector director de la recta es $\boldsymbol{d}_L = (1,3,4)$

La distancia del punto Q a la recta L se calcula con la expresión

$$h = \frac{\|PoQ \wedge d_L\|}{\|d_L\|} = \frac{\sqrt{620}}{\sqrt{26}} \qquad \boxed{h = 4{,}88 \text{ unidades de longitud.}}$$

---

50. Dado el plano $\pi_1 : 2x - y + z + 3 = 0$

a) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta L_1 que es perpendicular al plano π_1 y pasa por el punto Q(-1,3,6).

b) Determine, justificando su respuesta, si la recta L_2: $(x,y,z) = (0,1,1) + k\,(-4,0,8)$, $k \in R$, y el plano π_1 son paralelos, o se cortan en un punto, o la recta está contenida en el plano.

Respuestas:

a) Siendo la recta L_1 perpendicular al plano π_1, su vector director es paralelo al vector normal al plano.

$$\pi_1: 2x - y + z + 3 = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{n}_{\pi_1} = (2,-1,1) \quad ; \quad \boldsymbol{d}_{L1} = (2,-1,1)$$

Una ecuación vectorial paramétrica de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto Q es:

$$L_1: \;\; OP = (-1,3,6) + k(2,-1,1) \; k \in R$$

b) Calculamos el producto escalar entre el vector director de la recta y el vector normal al plano dado:

$$\boldsymbol{d}_{L2} = (-4,0,8) \quad ; \quad \boldsymbol{n}_{\pi_1} = (2,-1,1) \qquad \boldsymbol{d}_{L2}.\boldsymbol{n}_{\pi_1} = 0$$

El vector director de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares. Por lo tanto, la recta y el plano son paralelos, pueden ser paralelos no coincidentes o puede estar contenida la recta en el plano. Veamos si el punto (0,1,1) de la recta, pertenece o no al plano dado, sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano:

$$2(0) - 1 + 1 + 3 \neq 0$$

Por lo tanto el punto de la recta dada no pertenece al plano, entonces la recta es para lela al plano, sin estar contenida en el mismo. Es posible calcular a qué distancia del plano está:

$$h = \frac{|Axo+Byo+Czo+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \qquad \boxed{h = 1{,}22 \text{ unidades de longitud}}$$

---

51. Una vía férrea pasa por los puntos Q_1 (20, 5, 0) y Q_2 (0, 30, 0.5) en un tramo recto en el que existe una línea aérea de distribución de electricidad que pasa por R_1 (0, 10, 5.5) y R_2 (200, 10, 0.5). Indique si la vía férrea y la línea de distribución de electricidad son paralelas o alabeadas y determine la mínima distancia entre ambas.

Respuestas:

Vector director de la recta correspondiente a la vía férrea:

$\boldsymbol{d}_{L1} = \mathbf{OQ}_2 - \mathbf{OQ}_1 = (-20, 25, 0.5)$

Vector director de la recta correspondiente a la línea de distribución de electricidad:

$\boldsymbol{d}_{L2} = \mathbf{OR}_2 - \mathbf{OR}_1 = (200, 0, -5)$

Vector entre dos puntos de ambas rectas:

$\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{OR}_1 - \mathbf{OQ}_1 = (-20, 5, 5.5)$

Vector normal simultáneamente a las dos rectas dadas:

$\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}$=(-125, 0, -5000) ; $\|\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}\|^2 = 25015625$

$|(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1|$=25000

Siendo no nulo el producto mixto, las dos rectas son alabeadas. Calculamos la distancia entre ambas:

$$h = \frac{|(\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}).\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1|}{\|\boldsymbol{d}_{L1} \wedge \boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{25000}{\sqrt{25015625}} \qquad \boxed{h \sim 5 \text{ m}}$$

---

52. a) Indique la ecuación de la familia de planos con traza común en el plano $\boldsymbol{xy}$ la recta: $2x + y - 8 = 0$. Represente gráficamente dos planos de dicha familia.

b) Indique la ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a).

c) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente:

c.1. plano paralelo al plano xy que pasa por el punto Q(2,-3,5);

c.2. plano perpendicular al plano xy que pasa por los puntos A(4,0,0) y B(0,8,0);

c.3. ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de ambos planos.

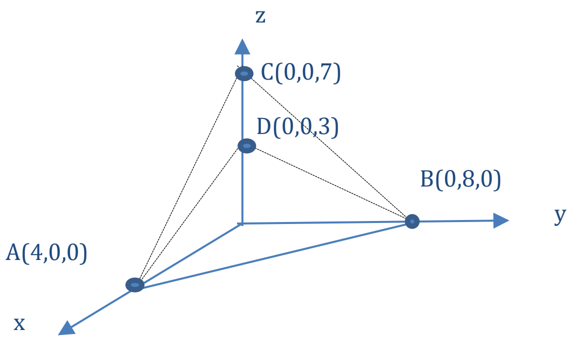
Respuestas:

a) En la traza común, z=0 por estar en el plano xy. Planteamos:

Si y=0 se obtiene x=4. Es decir: A(4,0,0) ; Si x=0 se obtiene y=8. Es decir: B(0,8,0)

La ecuación de la familia de planos que pasa por dicha intersección es:

$$\boxed{\frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{z}{k}=1 \qquad k\in \mathrm{R}-\{0\}}$$



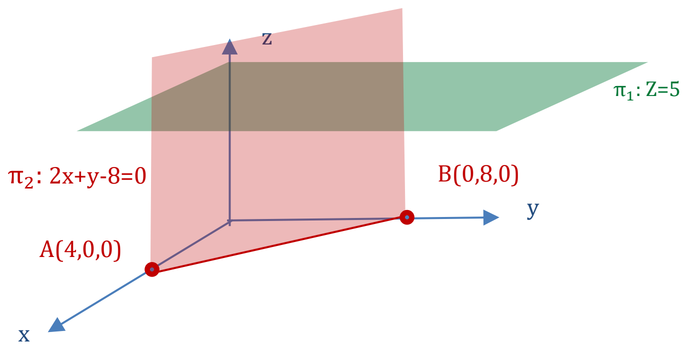
b) Ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a): la recta pasa por el punto A(4,0,0) (o el punto B) y tiene como vector director al vector ***BA*** (o ***AB***). Es decir:

$$\boxed{L: (x,y,z) = (4,0,0) + t\,(4,-8,0) \quad t \in R}$$

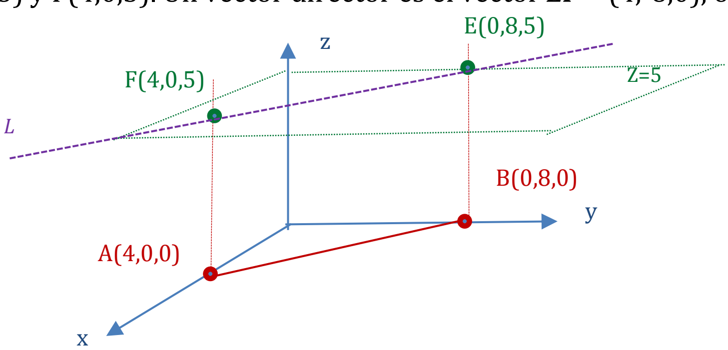
c)

c.1. Plano paralelo al plano xy que pasa por el punto Q(2,-3,5): $\boxed{\pi_1:\ z=5}$

c.2. Plano perpendicular al plano xy que pasa por los puntos A(4,0,0) y B(0,8,0): $\boxed{\pi_2: 2x+y-8=0}$



c.3. Ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de ambos planos: dicha recta pasa por los puntos E(0,8,5) y F(4,0,5). Un vector director es el vector ***EF*** = (4,-8,0), o cualquier vector paralelo.



$$\boxed{L: (x,y,z) = (0,8,5) + t\,(-1,2,0) \quad t \in R}$$

53. Dado el plano π_1 : $4y + 3z - 24 = 0$

a) Determine la posición relativa entre el plano dado y el eje *x*. Represente gráficamente.

b) Calcule la distancia entre el plano dado y el eje *x*, o bien el punto de intersección entre ambos, según corresponda.

Respuestas:

a) Puntos de intersección del plano dado con los ejes *y* y *z*:

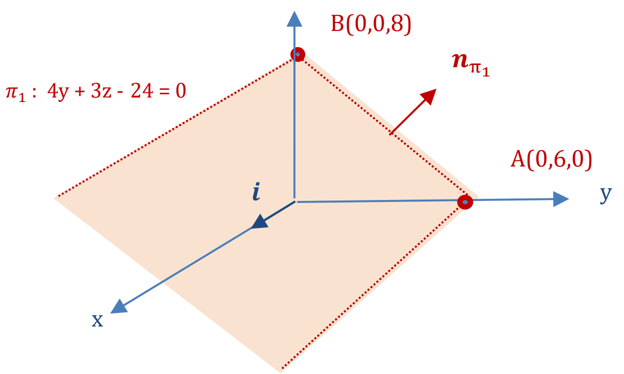
Si z=0 se obtiene y=6. Es decir: A(0,6,0)

Si y=0 se obtiene z=6. Es decir: B(0,0,8)

Vector normal al plano dado: $\boldsymbol{n}_{\pi_1} = (0,4,3)$

Un vector director del eje *x*: : $\boldsymbol{d}_{\mathrm{Lx}} = (1,0,0)$

Por lo tanto, $\boldsymbol{n}_{\pi_1} . \boldsymbol{d}_{\mathrm{Lx}} = 0$



Si el vector normal al plano y el vector director de la recta son perpendiculares, la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Tomamos un punto cualquiera de la recta, por ejemplo (0,0,0) y vemos que dicho punto no pertenece al plano dado. Por lo tanto, el plano es paralelo al eje *x*.

b) Calculamos la distancia del eje *x* al plano dado, a partir de la expresión de distancia de un punto a un plano, tomando como punto de referencia, cualquier punto de la recta, por ejemplo (0,0,0).

$$h = \frac{|4yo+3zo-24|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}} = 4{,}8 \text{ unidades de longitud}$$

C15. Dadas las siguientes rectas: $L_1: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -4-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad L_2: \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

a) Encuentre la ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta L_2. Identifique los números directores.

b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes o alabeadas

c) Determine la ecuación de un plano paralelo a las rectas L_1 y L_2 y que diste $\sqrt{\mathbf{32}}$ del punto Q(1, 0, 0). ¿Es único dicho plano?

d) Determine la proyección del punto R(24, 12, 36) sobre el plano *xy*, paralelamente a la recta L_2

Respuestas:

a) A partir de los vectores normales a los dos planos cuya intersección determina la recta L_2 podemos determinar un vector director de dicha recta, como el resultado del producto vectorial entre ambos vectores normales. Es decir:

$$\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i(-1) - j(-2-1) + k(0-1) = (-1,3,-1)$$

Designamos: $\boldsymbol{d}_{L2} = \boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2$ $\qquad$ $\boldsymbol{d}_{L2} = (-1,3,-1)$

Un punto cualquiera de la recta L_2 lo podemos obtener a partir de seleccionar alguna de las coordenadas, por ejemplo x=0, sustituir en la ecuación dada para la recta y resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resulta:

$$L_2 : \begin{cases} 2.0 + y + z - 1 = 0 \\ 0 - z = 0 \end{cases}$$

De donde z=0 e y=1. Entonces un punto P_2 de la recta L_2 **:** $P_2(0,1,0)$

Entonces podemos escribir una ecuación vectorial paramétrica de L_2

$$\text{L:}\ \ \boldsymbol{OP} = (0,1,0) + \mathrm{k}(-1,3,-1) \qquad k \in R$$

Igualando componentes, obtenemos las ecuaciones cartesianas simétricas de la recta L_2

$$L_2 : \begin{cases} x = -k \\ y = 1 + 3k \\ z = -k \end{cases}$$

Eliminando el parámetro *k* se obtienen las ecuaciones simétricas de la recta L_2

$$\frac{x}{(-1)} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{(-1)}$$

Los números directores son los denominadores en estas ecuaciones simétricas, es decir, cada una de las componentes del vector director de la recta: -1, 3 y -1.

b) Dos rectas *no paralelas* en R^3 ($\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}}$ y $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}}$ son vectores LI), son secantes si y solo si el producto mixto entre los vectores directores de ambas rectas y el vector que tiene como extremos un punto de cada recta , es nulo. Caso contrario son alabeadas. Veamos para los datos del problema:

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}} = (-1,2,-1) \ \ ; \ \ \boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}} = (-1,3,-1) \ \ ; \ \ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (2,2,-4)$$

$\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}} = (-1,2,-1)$; $\boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}} = (-1,3,-1)$ no son paralelos, entonces evaluamos el producto mixto:

$$(\boldsymbol{d}_{\mathrm{L1}} \wedge \boldsymbol{d}_{\mathrm{L2}}).\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6$$

Siendo no nulo el producto mixto las rectas son *alabeadas*.

c) Buscamos un plano paralelo a las rectas L_1 y L_2 . Por lo tanto, el vector normal al plano se puede obtener a partir del producto vectorial entre los vectores directores de las dos rectas dadas. Es decir :

$$\mathbf{d}_{L1} \wedge \mathbf{d}_{L2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i(1) - j(1-1) + k(-3+2) = (1,0,-1)$$

Por lo tanto la ecuación del plano es de la forma:

$$x-z+D=0$$

El valor de D lo podremos determinar a partir de la otra condición dada en el problema: que el plano diste $\sqrt{\mathbf{32}}$ del punto Q(1, 0, 0). A partir de la expresión para calcular la distancia de un punto a un plano:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Reemplazamos los valores conocidos:

$$\sqrt{32} = \frac{|1.1-1.0+D|}{\sqrt{1+1}} \qquad \text{Por lo tanto:} \quad 8=|1+D|$$

De donde surge:

$$1+D_1=8$$

$$1+D_2=-8$$

Entonces: $D_1=7$ y $D_2=-9$

No es único dicho plano ya que existen dos valores posibles de D que satisfacen las condiciones pedidas. Los dos planos son:

$$x-z+7=0$$

$$x-z-9=0$$

d) Determinamos la ecuación de una recta que pasa por el punto R y es paralela a la recta L_2. La intersección de dicha recta con el plano *xy* es el punto buscado, es decir el punto resultado de la proyección del punto R sobre el plano *xy*, paralelamente a la recta L_2.

$\boldsymbol{d}_{L2}$**=** (-1,3,-1) , R (24, 12, 36)

$$L: \ \boldsymbol{OP} = (24, 12, 36) + k(-1,3,-1) \qquad k \in R$$

La ecuación del plano *xy* es: z=0. Planteamos z=0 en la ecuación de la recta y obtenemos el valor de k que nos permite evaluar las otras dos coordenadas del punto intersección. Es decir:

$$L:\begin{cases} x=24-k \\ y=12+3k \\ z=36-k \end{cases}$$ Planteamos z=0 en: $$L:\begin{cases} x=24-k \\ y=12+3k \\ z=36-k=0 \end{cases}$$

Y obtenemos k=36, que sustituido en las dos primeras ecuaciones permite obtener:

x= 24-36=-12

y= 12+3.36=120

Por lo tanto la proyección del punto R sobre el plano *xy* es el punto

I=(-12,120,0)