Análisis Matemático I
Clase 10: teorema de Rolle. Teorema del valor medio

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2020

Observar que los puntos c tales que

$$f'(c) = 0$$

son muy importantes en Análisis, pues nos ayudan a determinar extremos de funciones (entre otras aplicaciones que veremos más adelante). El siguiente teorema da una condición suficiente para localizar tales puntos:

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos que:

$$f(a) = f(b).$$

Entonces existe c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = 0.$$

Hipótesis:

$$f \text{ continua en } [a,b]$$
$$f \text{ derivable en } (a,b)$$
$$f(a) = f(b)$$

Tesis:

$$\text{existe } c \text{ en } (a,b) \text{ tal que } f'(c) = 0$$

Hipótesis:

$$f \text{ continua en } [a,b]$$
$$f \text{ derivable en } (a,b)$$
$$f(a) = f(b)$$

Tesis:

$$\text{existe } c \text{ en } (a,b) \text{ tal que } f'(c) = 0$$

Demostración. Como f es continua en $[a,b]$, por el teorema de *valores extremos* sabemos que existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

y

$$f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x),$$

es decir, f alcanza su valor máximo absoluto y su valor mínimo absoluto en $[a,b]$. Estos valores se pueden alcanzar en:

Caso 1. **Los extremos del intervalo, es decir,** a **y** b. Si el valor máximo y el valor mínimo se alcanzan en los extremos, puesto que $f(a) = f(b)$ por hipótesis, los valores máximos y mínimos absolutos son iguales, de modo que f es constante en $[a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y el punto c puede ser cualquiera en (a, b).

Caso 1. **Los extremos del intervalo, es decir, a y b.** Si el valor máximo y el valor mínimo se alcanzan en los extremos, puesto que $f(a) = f(b)$ por hipótesis, los valores máximos y mínimos absolutos son iguales, de modo que f es constante en $[a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y el punto c puede ser cualquiera en (a, b).

Caso 2. **Puntos interiores donde f' es cero**. Si el máximo o el mínimo se alcanza en un punto $c \in (a, b)$ entre a y b, entonces **por lo expuesto en la diapositiva 31 de la clase 9 y dado que c es un punto donde f es derivable y es interior al dominio**, sabemos que $f'(c) = 0$ y queda determinado un punto c en que se garantiza el teorema.

Caso 1. **Los extremos del intervalo, es decir, a y b.** Si el valor máximo y el valor mínimo se alcanzan en los extremos, puesto que $f(a) = f(b)$ por hipótesis, los valores máximos y mínimos absolutos son iguales, de modo que f es constante en $[a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y el punto c puede ser cualquiera en (a, b).

Caso 2. **Puntos interiores donde f' es cero**. Si el máximo o el mínimo se alcanza en un punto $c \in (a, b)$ entre a y b, entonces **por lo expuesto en la diapositiva 31 de la clase 9 y dado que c es un punto donde f es derivable y es interior al dominio**, sabemos que $f'(c) = 0$ y queda determinado un punto c en que se garantiza el teorema.

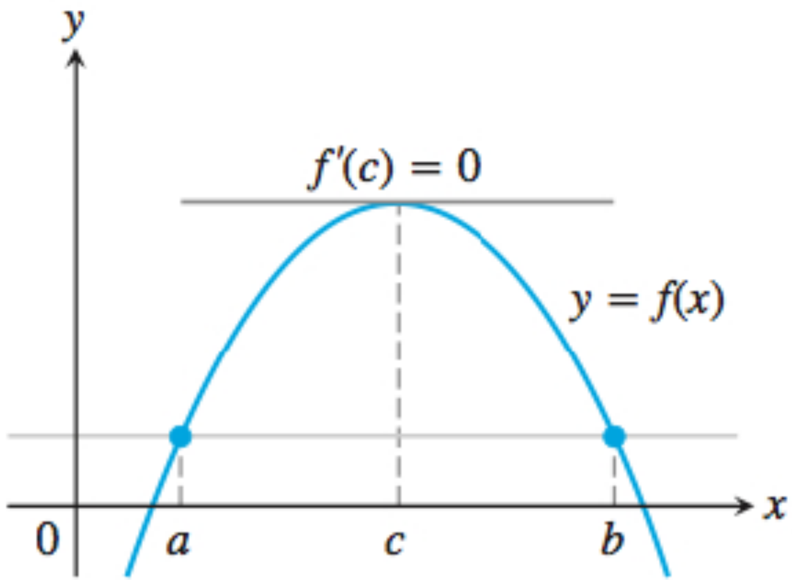
Caso 3. **Puntos interiores donde f' no existe**. Como, por hipótesis, f tiene derivada en (a, b), entonces este caso queda eliminado.

Caso 1. **Los extremos del intervalo, es decir, a y b.** Si el valor máximo y el valor mínimo se alcanzan en los extremos, puesto que $f(a) = f(b)$ por hipótesis, los valores máximos y mínimos absolutos son iguales, de modo que f es constante en $[a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y el punto c puede ser cualquiera en (a, b).

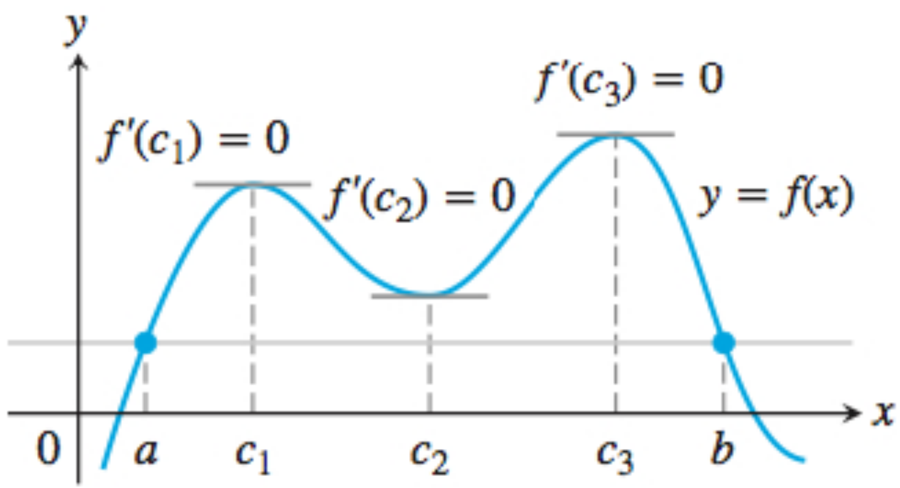
Caso 2. **Puntos interiores donde f' es cero**. Si el máximo o el mínimo se alcanza en un punto $c \in (a, b)$ entre a y b, entonces **por lo expuesto en la diapositiva 31 de la clase 9 y dado que c es un punto donde f es derivable y es interior al dominio**, sabemos que $f'(c) = 0$ y queda determinado un punto c en que se garantiza el teorema.

Caso 3. **Puntos interiores donde f' no existe**. Como, por hipótesis, f tiene derivada en (a, b), entonces este caso queda eliminado.

De esta manera, los posibles escenarios son los casos 1 y 2, y en ambas situaciones hemos encontrado al menos un c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Esto concluye la demostración del teorema de Rolle.

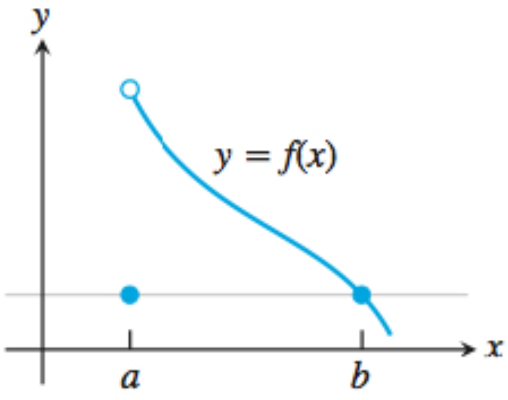


(a)

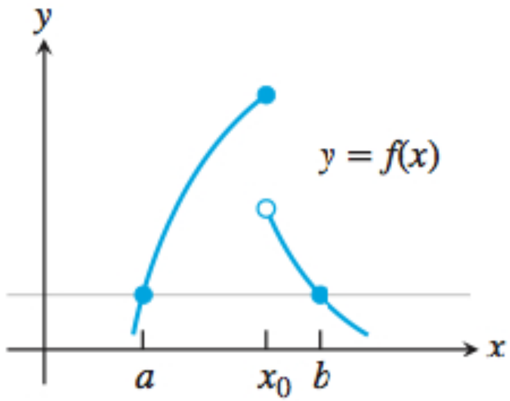


(b)

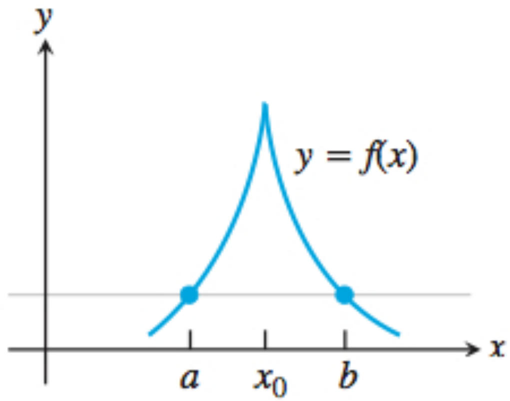
Las hipótesis en el Teorema de Rolle son esenciales:



(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$



(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$



(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

Observar que en los gráficos (a), (b) y (c) no existe ningún punto en el intervalo (a, b) donde la derivada de la función se anule.

Teorema del Valor Medio: una generalización del Teorema de Rolle

Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema del Valor Medio: una generalización del Teorema de Rolle

Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe c en (a, b) tal que:

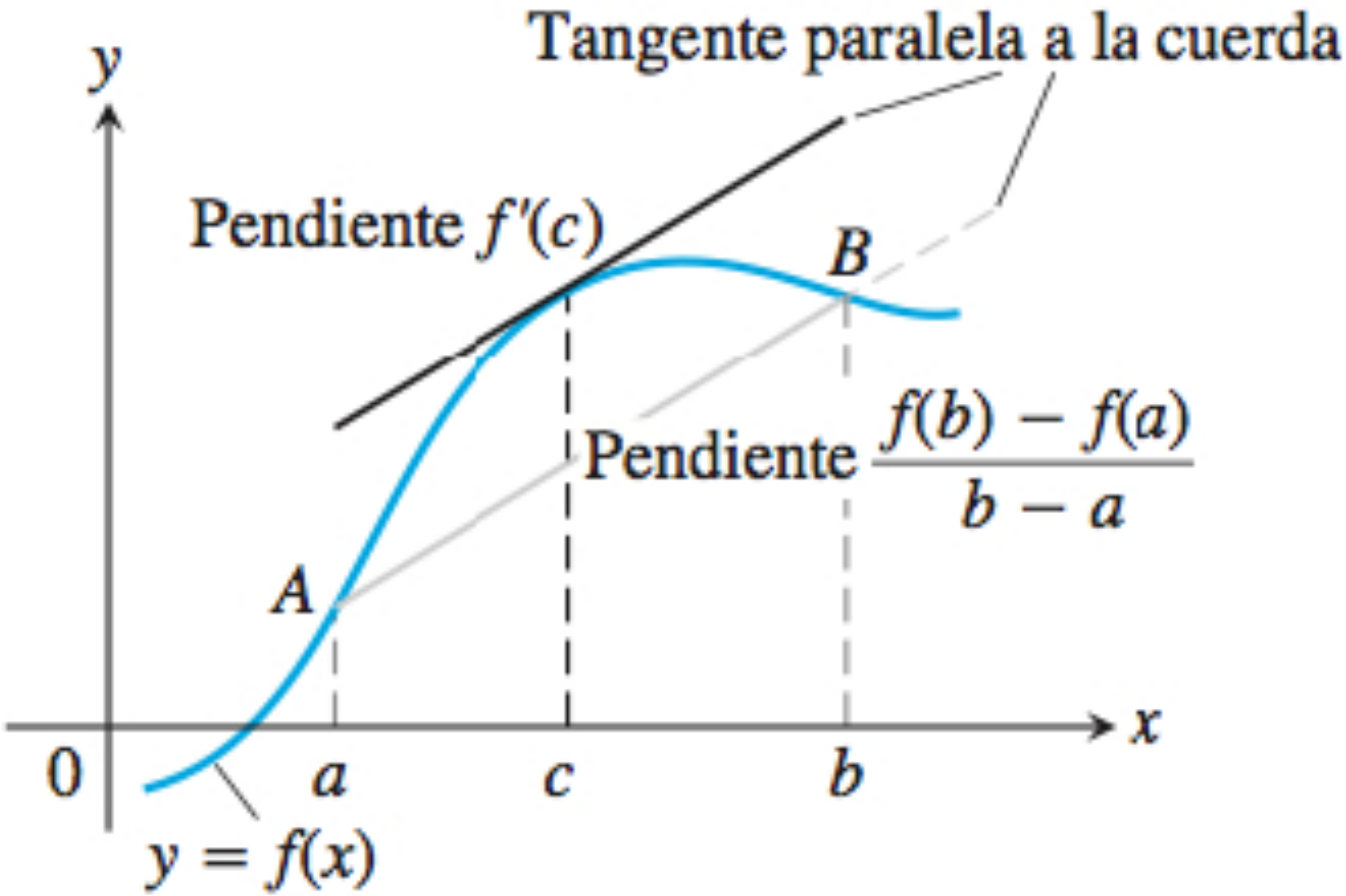
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Hipótesis:

$$\begin{gathered} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \end{gathered}$$

Tesis:

$$\text{existe } c \text{ en } (a, b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


Tangente paralela a la cuerda
y
Pendiente $f'(c)$
B
Pendiente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
A
x
0
a
c
b
$y = f(x)$

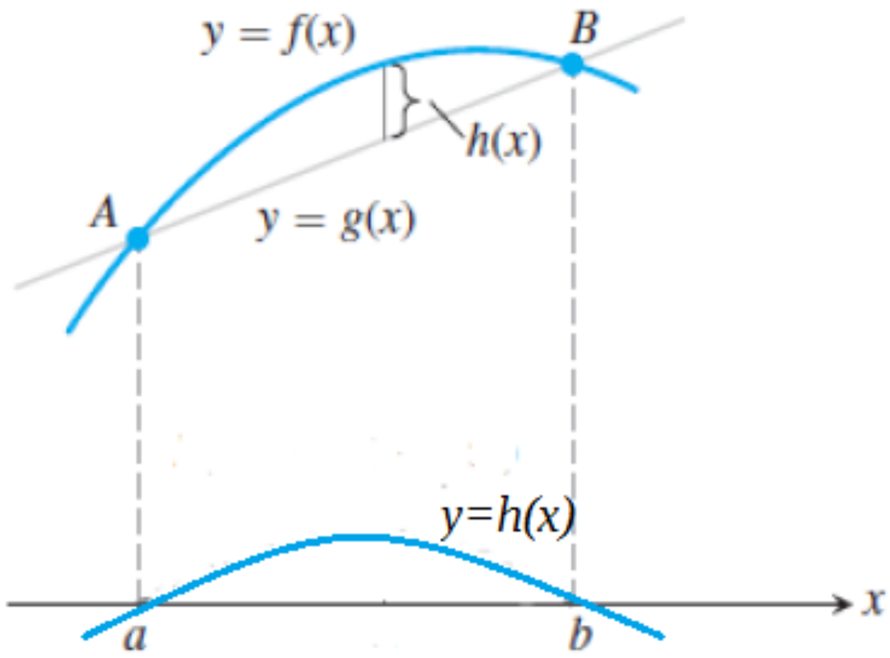
Demostración del Teorema del Valor Medio: trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. Utilizando la ecuación punto pendiente, resulta que la ecuación de dicha recta es

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Construimos una nueva función h definida como la diferencia entre las funciones f y g para cada x en $[a, b]$, así

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1) \end{aligned}$$

Las funciones f, g y h se muestran en el siguiente gráfico.



Ahora, veamos que la función h satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$.

- Por hipótesis la función f es continua en $[a, b]$ y la función g es continua en $[a, b]$ por ser una función polinómica. Luego, por la *propiedad de la resta de funciones continuas*, h resulta continua en $[a, b]$.
- Por hipótesis la función f es derivable en (a, b) y la función g es derivable en (a, b) por ser una función polinómica. Luego, por la *regla de la derivada de la diferencia*, h resulta derivable en (a, b).
- Como en a y en b las funciones f y g coinciden, se tiene

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) = 0 \\ h(b) &= f(b) - g(b) = 0 \end{aligned}$$

  Luego, $h(a) = h(b) = 0$.

Por lo tanto, la función h cumple las hipótesis del teorema de Rolle, entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0 \tag{2}$$

Derivemos, ahora, en ambos lados la ecuación (1) con respecto a x

$$h'(x) \;=\; f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Luego, evaluando en $x = c$ resulta

$$h'(c) \;=\; f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3}$$

Utilizando (2) y (3) se obtiene

$$0 \;=\; f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Reordenando, obtenemos

$$f'(c) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Que es lo que queríamos probar.