EJERCICIO N° 5

TP Nº5 Ej 5

Datos $\begin{cases} T(1,2,1)=(2,1) \\ T(2,3,1)=(5,2) \\ T(1,0,0)=(0,1) \end{cases}$ Incógnitas $\begin{cases} \bullet \text{ Ley de la transf.} \\ T(x,y,z)=? \\ \bullet\ T(-3,2,0)=? \end{cases}$

Se observa que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y que $\{(1,2,1),(2,3,1),(1,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces cualquier vector genérico $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal única de los vectores de la base, es decir existen escalares k_1, k_2 y k_3 tales que

$$(x,y,z) = k_1(1,2,1) + k_2(2,3,1) + k_3(1,0,0) \quad (1)$$

$$(x,y,z) = (k_1+2k_2+k_3,\ 2k_1+3k_2,\ k_1+k_2)$$

Por igualdad de vectores:

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3 = x \\ 2k_1+3k_2 = y \\ k_1+k_2 = z \end{cases}$$

SEL de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: k_1, k_2, k_3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \underset{\substack{F_2+(-2)F_1 \to F_1 \\ F_3+(-1)F_1 \to F_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -2 & y-2x \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{array}\right] \underset{F_3+(-1)F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & -2 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & z-x-y+2x \end{array}\right] \underset{F_2(-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-y+z \end{array}\right] \underset{\substack{F_2+(-2)F_3 \to F_2 \\ F_1+(-1)F_3 \to F_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x-(x-y+z) \\ 0 & 1 & 0 & 2x-y-2(x-y) \\ 0 & 0 & 1 & x-y+z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & 0 & y-2z \\ 0 & 0 & 1 & x-y+z \end{array}\right]$$

$$\underset{F_1+(-2)F_2 \to F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y-z-2(y-2z) \\ 0 & 1 & 0 & y-2z \\ 0 & 0 & 1 & x-y+z \end{array}\right]$$

$$k_1 = -y+3z$$
$$k_2 = y-2z$$
$$k_3 = x-y+z$$

En (1): $(x,y,z) = (-y+3z)(1,2,1) + (y-2z)(2,3,1) + (x-y+z)(1,0,0)$

transformando ambos miembros:

$$T(x,y,z) = (-y+3z)\cdot T(1,2,1) + (y-2z)\cdot T(2,3,1) + (x-y+z)\cdot T(1,0,0)$$

$$= (-y+3z)(2,1) + (y-2z)\cdot(5,2) + (x-y+z)(0,1)$$

$$= (-2y+6z, -y+3z) + (5y-10z, 2y-4z) + (0, x-y+z)$$

$$= (-2y+6z+5y-10z, -y+3z+2y-4z+x-y+z)$$

$$\boxed{T(x,y,z) = (3y-4z, x)}$$ Ley de la transf. lineal

$$T(-3,2,0) = (3.2-4.0, -3) ; \boxed{T(-3,2,0) = (6,-3)}$$

Observación importante: se ha podido encontrar la ley de la transf. lineal porque los vectores del dominio cuya transformada es dato, forman una base del dominio.

Se ha considerado que la transf. lineal de una combinación lineal de vectores es igual a la combinación lineal de los transformados de dichos vectores, esto es

$$T(x,y,z) = T(\overbrace{k_1(1,2,1) + k_2(2,3,1) + k_3(1,0,0)}^{\text{C.L de vectores}})$$

$$T(x,y,z) = \underbrace{k_1\cdot T(1,2,1) + k_2\cdot T(2,3,1) + k_3\, T(1,0,0)}_{\text{C.L de transformaciones en } \mathbb{R}^2}$$