# Análisis Matemático I
# Clase 21: complemento a regla de L'Hopital

Pablo Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Mayo, 2020

El siguiente resultado será utilizado en los ejercicios 2 j) y 2k) de la sección 4 del Trabajo Práctico 5 en relación a la regla de L'Hopital:

## Teorema

Si $f$ es continua en $b$ y

$$\lim_{x \to c} g(x) = b,$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right).$$

El teorema también es válido para límites laterales y cuando $x \to \pm\infty$.

La conclusión dice que, bajo las condiciones del teorema, se pueden intercambiar los símbolos de $f$ y del límite

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right).$$

También, observar que no se pide la continuidad de $g$ en $c$, sino simplemente que el límite:

$$\lim_{x \to c} g(x) = b$$

exista.

Como aplicación, supongamos que queremos calcular el límite

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Observar que hay una indeterminación del tipo $0^0$. Vamos a aplicar la regla de L'Hopital. Para ello, necesitamos transformar la expresión $x^x$ en cociente. Con el fin de *bajar* la potencia $x$, vamos a calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Observar que se ha elegido la alternativa de dejar el logaritmo en el numerador, ya que así será más sencilla de aplicar la regla de L'Hopital. Estamos en la situación (2) de la regla, pues el denominador tiende a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$. Ahora corroboramos que el límite del cociente de las derivadas existe

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.(-x^2) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Así, por la regla de L'Hopital tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = 0.$$

Sin embargo, queríamos calcular el límite de $x^x$. Para revertir el efecto del logaritmo, aplicamos la función exponencial

$$e^0 = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)}$$

donde en la última igualdad hemos usado el teorema de la diapositiva 2 con $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x^x)$. Así ya que $e^{\ln(x^x)} = x^x$ obtenemos

$$e^0 = \lim_{x\to 0^+} x^x,$$

es decir

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$