SUPERFICIES

Respuestas Ejercicio 96 a 104

96. a) Halle la ecuación de la *superficie esférica* de centro C(3,0,4) y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Halle la ecuación general del plano tangente a dicha esfera en el punto Q (8,0,4).

Respuestas:

a) La superficie esférica buscada responde a la siguiente ecuación cartesiana:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \qquad [1]$$

Las coordenadas del centro $C(3, 0, 4)$, permiten obtener los valores h=3, k=0, l=4, los cuales se reemplazan en la ecuación [1] para obtener:

$$(x-3)^2+(y-0)^2+(z-4)^2=r^2 \qquad [2]$$

El radio de la superficie esférica debe ser hallado a partir de la utilización de un punto conocido de la misma. En este caso a partir de la lectura de los datos del problema sabemos que el origen de coordenadas es un punto de la superficie buscada, por lo cual sus coordenadas deben satisfacer la ecuación [2].

$$(0-3)^2+(0-0)^2+(0-4)^2=r^2 \qquad [3]$$

$$9+16=r^2 \qquad [4]$$

$$r=5 \qquad [5]$$

Con lo cual la superficie esférica buscada responde a la siguiente ecuación:

$$\boxed{(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=25} \qquad [6]$$

b) En primer lugar, verificamos que el punto Q pertenezca a la esfera, sustituyendo sus coordenadas en la ecuación [6]:

$$(8-3)^2+0^2+(0-4)^2=25$$

El plano tangente a una esfera en un punto de la misma tal como el punto Q posee un vector normal cuya dirección coincide con la dirección de un vector con origen en el centro de la esfera y extremo en el punto de tangencia. Por esto, para el punto de tangencia dado $Q(8, 0, 4)$, tendremos:

$$\boldsymbol{n_\pi} = CQ = (8-3, 0-0, 4-4) = (5, 0, 0) \quad [7]$$

A partir de dicho vector normal es posible escribir la ecuación general del plano buscado y reemplazando luego el punto conocido, que en este caso coincide con el punto de tangencia, a los efectos de hallar el coeficiente D. Es decir,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ queda:} \qquad 5x + D = 0 \quad [8]$$

$$5.8 + D = 0 \quad [9]$$

$$D = -40 \quad [10]$$

Con lo cual la ecuación del plano tangente buscado es:

$$\boxed{x - 8 = 0} \quad [11]$$

La Figura 1 muestra dos vistas de la representación gráfica de la superficie esférica y del plano tangente hallados.

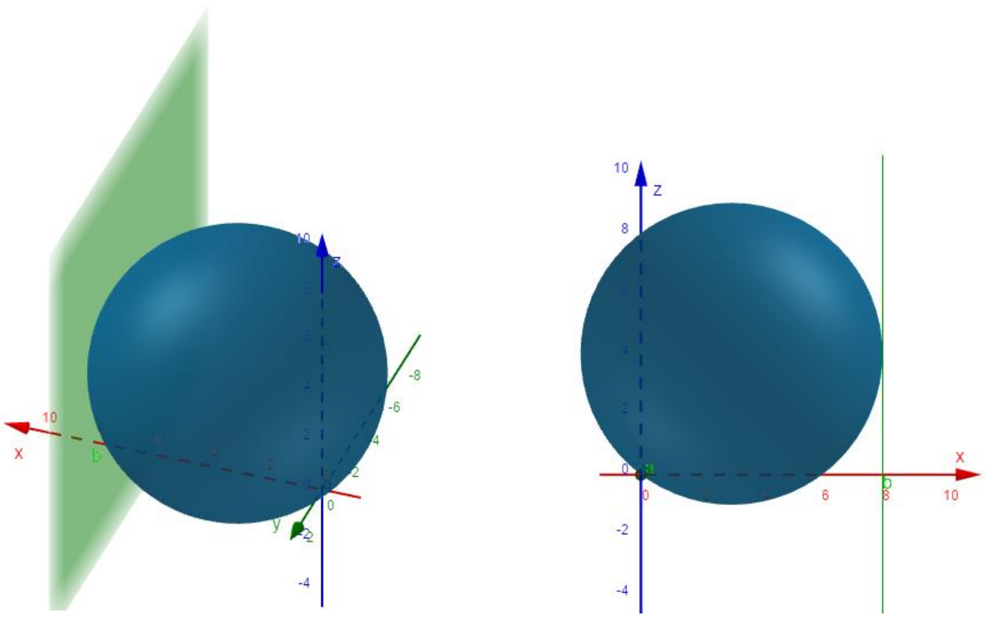


Figura 1: Superficie esférica y plano tangente

97. a) Dada la *superficie esférica* de centro en el origen de coordenadas y radio 2, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección de dicha esfera con el plano $x + z - 2 = 0$. Represente gráficamente.

b) Indique la ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica que tiene por intersección con la superficie esférica, la curva encontrada en el inciso anterior.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano xy de la curva hallada en el inciso (a) y grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

Respuestas:

a) Obtenemos la intersección entre ambas superficies (superficie esférica y plano), analizando la solución del sistema de ecuaciones que comprende las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Despejamos la variable z de la segunda ecuación, $z = -x + 2$, y reemplazamos dicha expresión en la primera ecuación:

$$x^2 + y^2 + (-x + 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 = 4$$

$$2x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Llevamos la ecuación a la forma cartesiana para identificar sus elementos:

$$2(x^2 - 2x + 1 - 1) + y^2 = 0$$

$$2(x - 1)^2 - 2 + y^2 = 0$$

$$2(x - 1)^2 + y^2 = 2$$

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

Observamos que la expresión corresponde a una elipse en términos de x e y (que está contenida en el plano $x + z - 2 = 0$). La elipse tiene semiejes $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$. Las coordenadas en x e y del centro (h y k) se obtienen por observación de la ecuación: h=1 y k= 0. Teniendo en cuenta que se trata de una elipse en el plano $x + z - 2 = 0$, la coordenada en z del centro (l)se obtiene de la expresión $z = -x + 2$, dando a la variable x el valor$h = 1$. Las coordenadas del centro por lo tanto son: C(1,0,1).

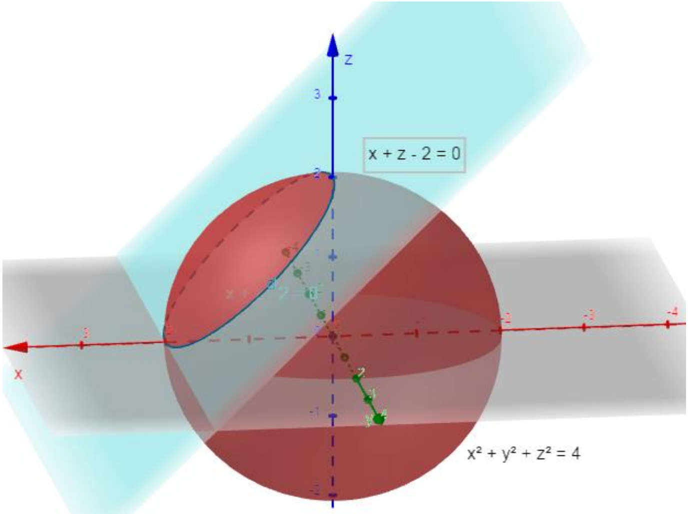
Ahora podemos parametrizar a la curva solución, obteniendo expresiones para x, y y z en función de un parámetro. Como se trata de una elipse en las variables x e y, utilizamos la parametrización ya estudiada en términos del parámetro θ, para estas dos variables Para parametrizar la componente en z, usamos la expresión $z = -x + 2$, ya que la elipse está en dicho plano. En esta expresión para la variable z reemplazamos la expresión parametrizada de x. Es decir:

$$\begin{cases} x = cos\theta \ + 1 \\ y = \sqrt{2}sen\theta \qquad ; \ \theta \epsilon [0,2\pi) \\ z = -cos\theta - 1 + 2 \end{cases}$$

Por último, llevamos las ecuaciones cartesianas paramétricas a la forma vectorial paramétrica:

$(x, y, z) = (\cos\theta\ +1 \qquad , y = \sqrt{2}sen\theta\ , \qquad -\cos\theta + 1)\ ;\ \theta\epsilon[0,2\pi)$

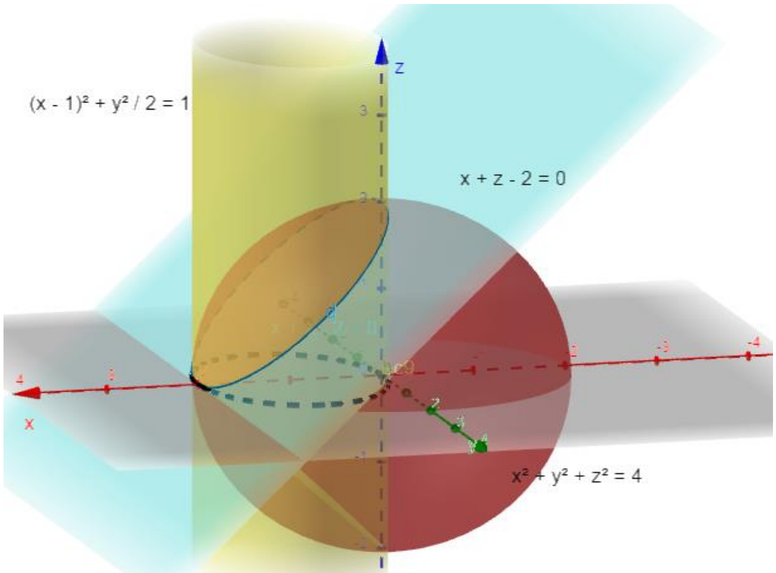
O bien: $\qquad (x, y, z) = (\,1{,}0{,}1) + (\cos\theta\ , \sqrt{2}sen\theta\ , -\cos\theta\ )\ \ ; \theta\epsilon[0,2\pi)$



b) Hay infinitas superficies cilíndricas que intersecan al casquete esférico en la curva encontrada. Sin embargo, podemos encontrar fácilmente un *cilindro elíptico recto*, paralelo al eje z, cuya ecuación está dada por:

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

En esta ecuación, la variable z es libre, por lo tanto, la superficie es paralela al eje z.



Observación: La diferencia que existe entre la ecuación del cilindro y la ecuación de la curva elíptica, es que para la segunda tenemos la restricción $z = -x + 2$. Es decir, la expresión para la curva elíptica es:

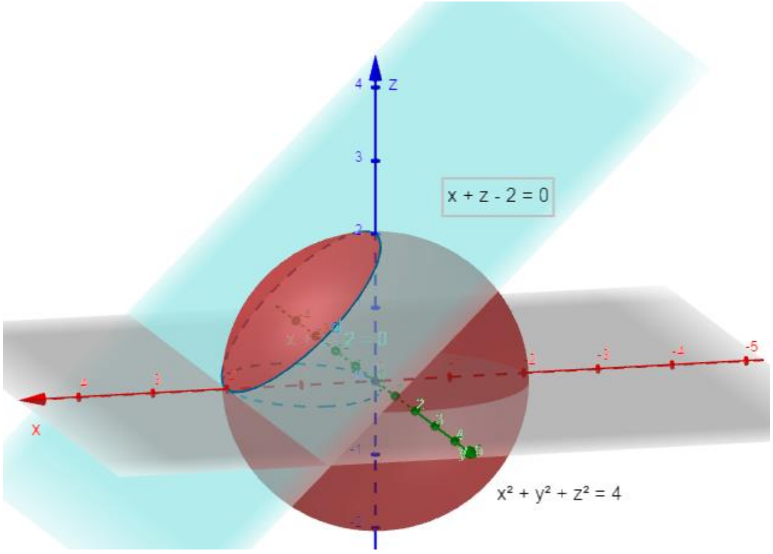
$$\begin{cases}(x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1\\ z=-x+2\end{cases}$$

c) Para proyectar la curva sobre el plano xy, basta con anular la componente en z, entonces:

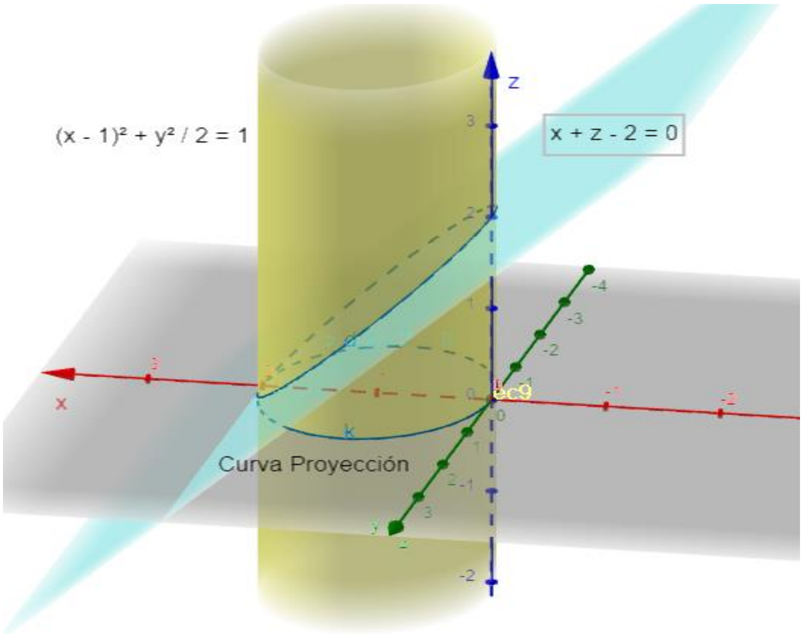
$$\begin{cases}(x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1\\ z=0\end{cases}$$

La ecuación vectorial paramétrica es:

$(x,y,z)=(1,0,0)+(cos\theta\ ,\sqrt{2}sen\theta\ ,0)\ \ ;\theta\epsilon[0,2\pi)$



Para una mejor visualización de la curva proyectada, podemos ocultar la superficie esférica:



98. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $9y^2 + 4z^2 = 36$, con $x = 0$ y su vértice es el punto V(12,0,0). Realice un gráfico cualitativo.

Respuestas:

A partir de los datos del problema es posible escribir la ecuación de la curva directriz de la superficie cónica:

$$D: \begin{cases} 9y^2 + 4z^2 = 36 \\ x = 0 \end{cases} \qquad [12]$$

Considerando el vértice (12, 0, 0), y un punto *P'* ubicado por definición en la intersección de la generatriz y la directriz, las ecuaciones simétricas de la recta generatriz responden a la siguiente expresión:

$$\frac{x-12}{x'-12} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \qquad [13]$$

El punto *P'* debe satisfacer la ecuación de la directriz, por lo cual tendremos:

$$D: \begin{cases} 9y'^2 + 4z'^2 = 36 \\ x' = 0 \end{cases} \qquad [14]$$

Sustituyendo la segunda ecuación [14] (x'=0) en [13] se obtiene:

$$\frac{x-12}{-12} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \qquad [15]$$

A partir de la expresión [15] es posible obtener dos expresiones para *y'* y *z'*:

$$y' = \frac{-12y}{x-12} \qquad [16]$$

$$z' = \frac{-12z}{x-12} \qquad [17]$$

Sustituyendo las ecuaciones [16] y [17] en la ecuación [12], se obtiene:

$$9\left(\frac{-12y}{x-12}\right)^2 + 4\left(\frac{-12z}{x-12}\right)^2 = 36 \qquad [18]$$

Desarrollando la expresión [18] se obtiene la ecuación general de la superficie buscada:

$$1296y^2 + 576z^2 = 36(x-12)^2 = 36x^2 - 864x + 5184 \qquad [19]$$

$$36x^2 - 1296y^2 - 576z^2 - 864x + 5184 = 0 \qquad [20]$$

$x^2 - 36y^2 - 16z^2 - 24x + 144 = 0$ [21]

El eje de una superficie cónica es la recta que pasa por el centro de la curva directriz y el vértice de la superficie. En la ecuación [21] no aparecen términos de producto cruzado ya que la superficie tiene por eje al eje x, es decir la superficie no está rotada respecto de los ejes coordenados. Aparece un término lineal en la ecuación de la superficie cónica, que está asociado a la posición del vértice de la misma, que en este caso, no coincide con el origen de coordenadas.

La Figura 2 muestra un gráfico cualitativo de la superficie y la Figura 3 una representación computacional desarrollada con el uso del programa Geogebra.

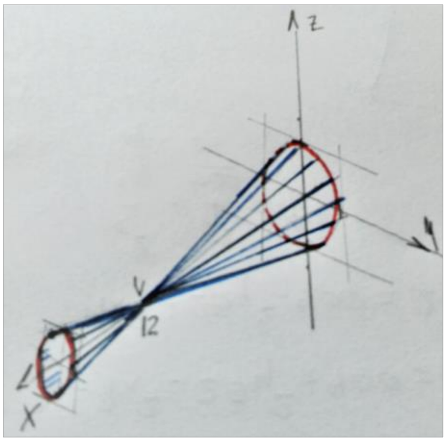


Figura 2: Gráfico cualitativo

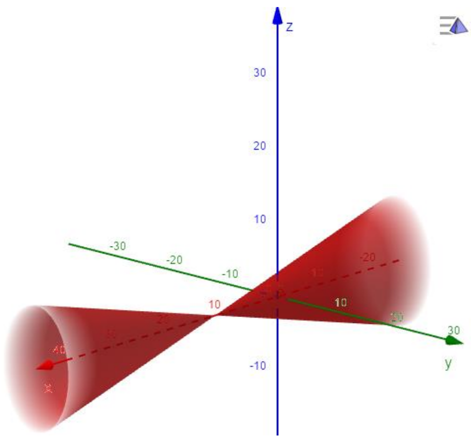


Figura 3: Representación Geogebra

99. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* de generatriz paralela al vector $\boldsymbol{v}$=(2,1,3) y cuya directriz es: $\begin{cases}(x-1)^2+(z-1)^2=16\\ y=0\end{cases}$. Realice un gráfico cualitativo.

Respuestas:

A partir de los datos del problema es posible escribir la ecuación de la curva directriz de la superficie cilíndrica:

$$D:\begin{cases}(x-1)^2+(z-1)^2=16\\ y=0\end{cases}$$ [22]

Considerando el vector $\boldsymbol{v}$=(2, 1, 3), y un punto *P'* ubicado en la intersección de la recta generatriz y la curva directriz, las ecuaciones simétricas de la recta generatriz resultan:

$$\frac{x-x'}{2}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{3} \qquad [23]$$

El punto *P'* debe satisfacer la ecuación de la directriz, por lo cual tendremos:

$$D:\begin{cases}(x'-1)^2+(z'-1)^2=16\\ y'=0\end{cases} \qquad [24]$$

Sustituyendo la segunda ecuación [24] ($y'=0$) en [23] se obtiene:

$$\frac{x-x'}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-z'}{3} \qquad [25]$$

A partir de la expresión [25] es posible obtener dos expresiones para *x'* y *z'*:

$$x'=x-2y \qquad [26]$$

$$z'=z-3y \qquad [27]$$

Sustituyendo [26] y [27] en la ecuación [24], se obtiene:

$$(x-2y-1)^2+(z-3y-1)^2=16 \qquad [28]$$

Desarrollando adecuadamente la expresión [28] se obtiene la ecuación general de la superficie buscada:

$$x^2+4y^2+1-4xy-2x+4y+z^2+9y^2+1-6yz-2z+6y-16=0 \qquad [29]$$

$$\boxed{x^2+13y^2+z^2-4xy-6yz-2x+10y-2z-14=0} \qquad [30]$$

La presencia de los términos rectangulares (-4xy; -6yz) se debe a que la superficie está rotada respecto de los ejes coordenados. Esto es así ya que el vector $\boldsymbol{v}$ paralelo a las generatrices, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del centro de la curva directriz respecto del origen de coordenadas.

La Figura 4 muestra un gráfico cualitativo de la superficie y la Figura 5 una representación computacional desarrollada con el uso del programa Geogebra.

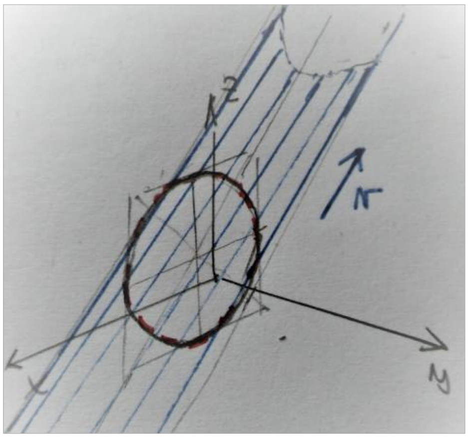


Figura 4: Gráfico cualitativo

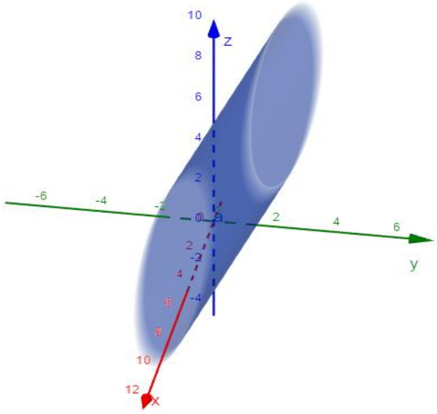


Figura 5: Representación Geogebra

100. Se desea construir una cubierta de generatriz parabólica para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio. Grafique.

Respuestas:

A partir de la lectura cuidadosa del problema, es posible interpretar que la cubierta del estadio constituye una superficie de revolución. En primer lugar, es necesario definir la ecuación de la curva generatriz de la superficie. Para ello se selecciona un sistema de referencia cartesiano tridimensional ubicado de tal manera que el eje z constituya el eje de revolución de la misma.

En dichas condiciones, la ecuación de la generatriz parabólica tendrá la forma:

$$y^2 = 2p(z - l); \quad y \in [-50, 50] \qquad [31]$$

Siendo en este caso: l=40m la altura en el centro del estadio.

$$y^2 = 2p(z - 40); \quad y \in [-50, 50] \qquad [32]$$

A los efectos de hallar el valor del parámetro geométrico de la generatriz, reemplazamos en la ecuación [32], las coordenadas de un punto conocido, por ejemplo Q(0, 50, 0).

$$50^2 = -2p(0 - 40) \qquad [33]$$

$$p = -31{,}25 \qquad [34]$$

Con lo cual la ecuación de la curva generatriz resulta:

$$\begin{cases} y^2 = -62.50(z-40); \ \ y \in [-50, 50] \\ x = 0 \end{cases} \quad [35]$$

A los efectos de hallar la superficie de revolución definida por la generatriz parabólica hallada y el eje de revolución z, es necesario realizar el reemplazo de la variable y (variable que no corresponde al eje de revolución ni a la variable nula en la ecuación de la generatriz), por la expresión: $\sqrt{x^2+y^2}$. De esta manera, reemplazando y luego desarrollando la expresión hallada:

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = -62.50(z-40) \quad [36]$$

$$x^2 + y^2 + 62.5z - 2500 = 0 \quad [37]$$

$$\boxed{\frac{x^2}{62.5} + \frac{y^2}{62.5} = -(z-40)} \quad [38]$$

Las ecuaciones [37] y [38] constituye la ecuación general y cartesiana respectivamente de un paraboloide elíptico de revolución, con vértice no coincidente con el origen de coordenadas y cuyo eje de revolución es el eje z.

La Figura 6 muestra una representación de la superficie de revolución hallada.

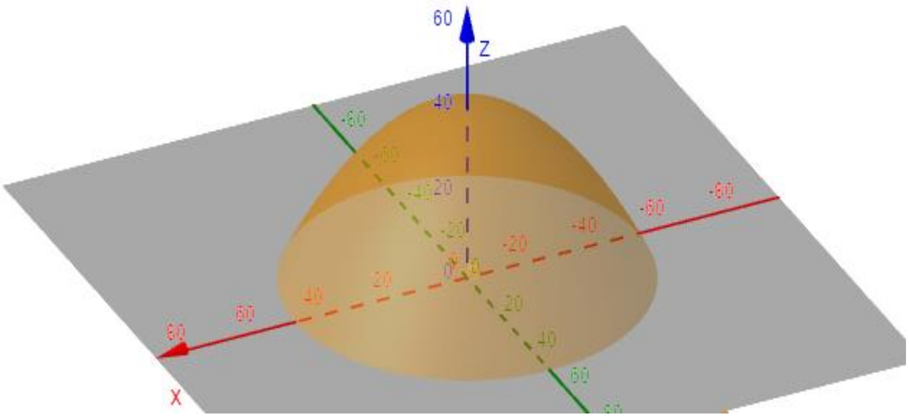


Figura 6: Superficie de revolución. Cubierta del estadio.

101. Dadas las ecuaciones:

i) $x^2 - y^2 - 6z = 0$; *ii)* $-49x^2 - 49y^2 + 25z^2 - 1225 = 0$; *iii)* $4y^2 + 36z^2 - 288x = 0$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (*trazas*) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

Respuestas:

Analizaremos en primer lugar indicando todo el procedimiento completo para el caso i) y luego plantearemos las soluciones para todos los casos del ejercicio 101 en una Tabla.

Caso *i*) paraboloide hiperbólico dado por la ecuación $x^2 - y^2 - 6z = 0$.

1º) <u>*Intersecciones con los ejes*</u>

- Intersección con el eje x *(y=z=0)*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 & \to x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La intersección con el eje *x* es el origen O(0,0,0)

- Intersección con el eje *y (x=z=0)*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 & \to y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La intersección con el eje *x* es el origen O(0,0,0)

- Intersección con el eje *z (y=x=0)*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 & \to z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La intersección con el eje *x* es el origen O(0,0,0)

2º) <u>*Trazas*</u>

- Traza en el plano xy $(z = 0)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

La traza en el plano xy es un par de rectas cuyas ecuaciones son: $y_1 = x$; $y_2 = -x$.

- Traza en el plano xz $(y = 0)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6z = 0 \Rightarrow x^2 = 6z$$

La traza en el plano xz es una parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje z y el parámetro $p > 0$.

- Traza en el plano yz $(x = 0)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow -y^2 - 6z = 0 \Rightarrow y^2 = -6z$$

La traza en el plano yz es una parábola con vértice en el origen, eje focal sobre el eje z y el parámetro $p < 0$.

3º) *Intersección con planos paralelos a los coordenados*

- Intersección con planos paralelos al plano xy $(z = k)$:

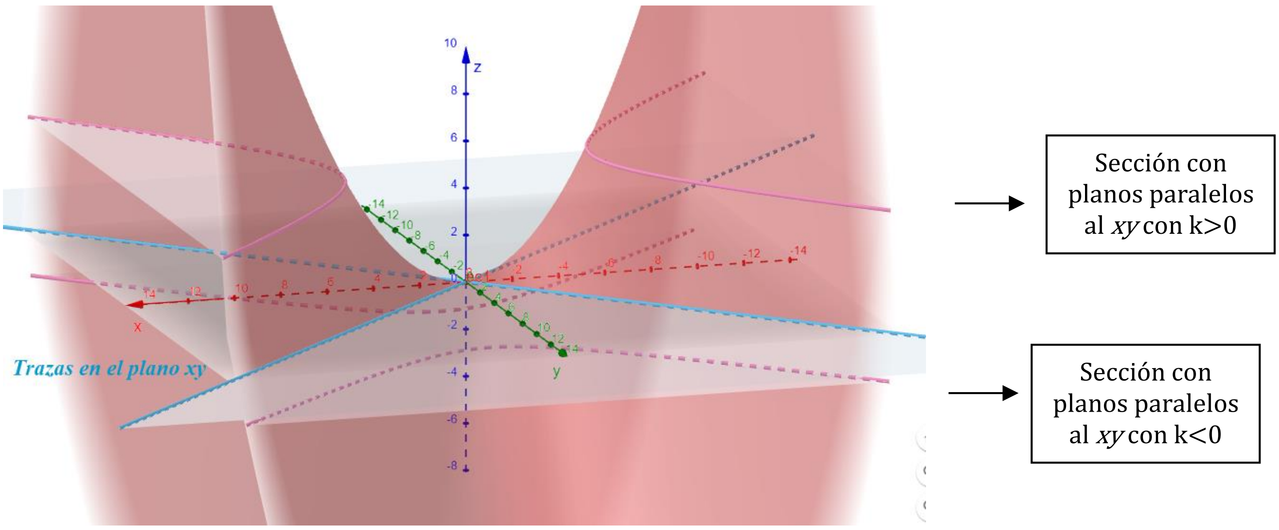
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ z = k \end{cases} \Longrightarrow x^2 - y^2 = 6k$$

Para analizar la ecuación resultante, debemos tener en cuenta que el miembro de la derecha de la igualdad puede ser positivo, negativo o nulo, según cómo varía el parámetro k.

- Si $k > 0$ obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $z = k$), todas centradas respecto del eje z y con eje focal paralelo al eje x.

Si $k < 0$ obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $z = k$), todas centradas respecto del eje z y con eje focal paralelo al eje y.

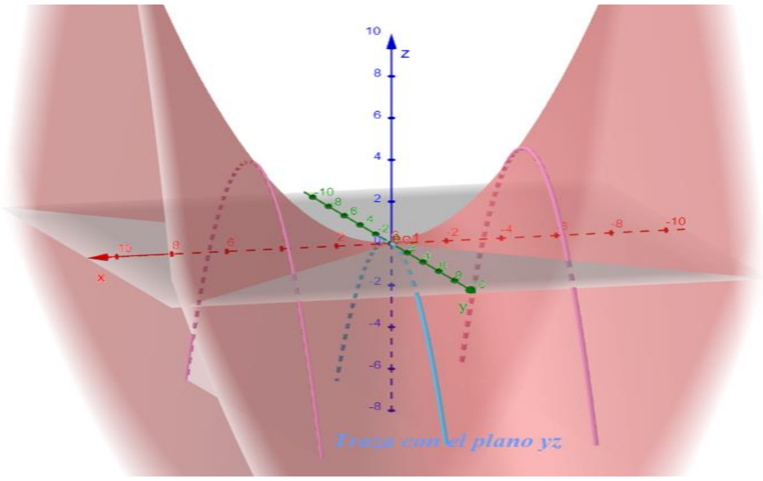
- Si k=0 es el caso analizado en la traza del plano xy.



- Intersección con planos paralelos al plano yz $(x = k)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ x = k \end{cases} \Longrightarrow k^2 - y^2 = 6z \Longrightarrow y^2 = -6z + k^2 \Longrightarrow y^2 = -6(z - \frac{k^2}{6})$$

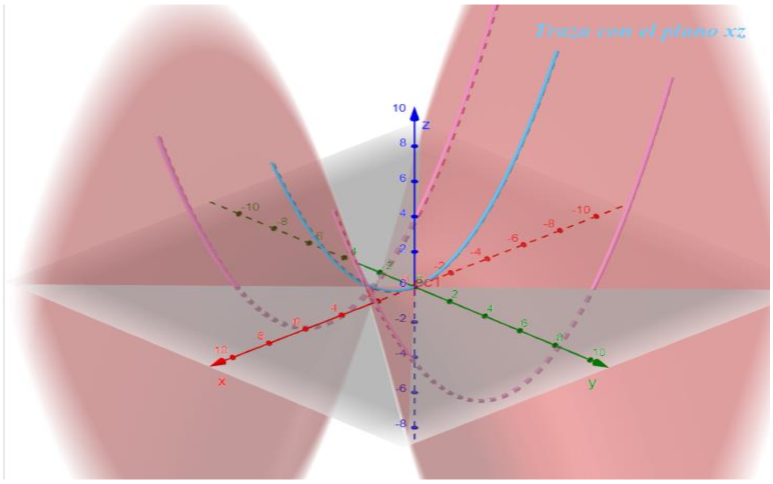
Las secciones con planos paralelos al plano yz es una familia de parábolas con eje focal paralelo al eje z y el parámetro geométrico p es negativo, independientemente del valor que tome $k \in R$.



- Intersección con planos paralelos al plano xz $(y = k)$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6z = 0 \\ y = k \end{cases} \Longrightarrow\ x^2 - k^2 = 6z \Longrightarrow x^2 = 6z + k^2 \Longrightarrow x^2 = 6\left(z + \frac{k^2}{6}\right)$$

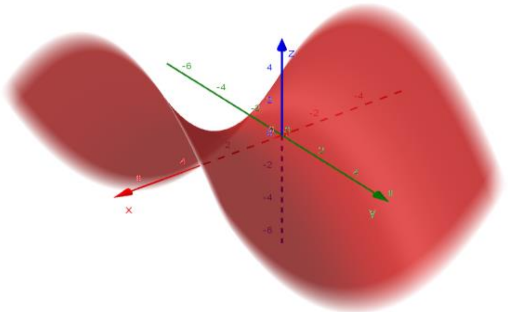
Las secciones con planos paralelos al plano xz es una familia de parábolas con eje focal paralelo al eje z y el parámetro geométrico p es positivo, independientemente del valor que tome $k \in R$.



Análisis de simetría para superficie en estudio: $x^2 - y^2 - 6z = 0$

Simetría con respecto a los ejes coordenados.		Simetría con respecto a los planos coordenados.		Simetría con respecto al origen de coordenadas.	
Eje x	*No (ya que al sustituir z por –z la ecuación cambia)*	*Plano xz*	*Si*	*O(0, 0, 0)*	*No (ya que al sustituir z por –z la ecuación cambia)*
Eje y	*No (ya que al sustituir z por –z la ecuación cambia)*	*Plano yz*	*Si*		
Eje z	*Si*	*Plano xy*	*No (ya que al sustituir z por –z la ecuación cambia)*		

La superficie analizada es un *paraboloide hiperbólico*.Es una superficie cuádrica sin centro de simetría.



a) En la siguiente Tabla se sintetizan las *intersecciones* con los ejes coordenados, con los planos coordenados y con planos paralelos a los planos coordenados correspondientes a los casos *i*), *ii*) y *iii*):

Ecuación	Intersección con los ejes coordenados.		Intersección con los planos coordenados. Trazas		Intersección con planos paralelos a los planos coordenados	
i	x	$x = 0$	xz	$x^2 - 6z = 0$ parábola	y=k	$x^2 - 6z = k^2$ familia de parábolas
	y	$y = 0$	yz	$-y^2 - 6z = 0$ parábola	x=k	$y^2 + 6z = k^2$ familia de parábolas
	z	$z = 0$	xy	$x^2 - y^2 = 0$ dos rectas	z=k	$x^2 - y^2 = 6k$ familia de hipérbolas
ii	x	$\nexists \cap$	xz	$-49x^2 + 25y^2 - 1225 = 0$ hipérbola	x=k	$-49y^2 + 25z^2 = 1225 + 49k^2$ familia de hipérbolas
	y	$\nexists \cap$	yz	$-49y^2 + 25z^2 - 1225 = 0$ hipérbola	y=k	$-49x^2 + 25z^2 = 1225 + 49k^2$ familia de hipérbolas
	z	$z = \pm 7$	xy	$-49x^2 - 49y^2 - 1225 = 0$ No existe intersección	z=k	$-49x^2 - 49y^2 = 1225 - 25k^2$ familia de elipses $k \in (-\infty, -7] \cup [7, \infty)$

Ecuación	Intersección con los ejes coordenados.		Intersección con los planos coordenados. Trazas		Intersección con planos paralelos a los planos coordenados	
iii	x	$x = 0$	xz	$z^2 - 8x = 0$ parábola	x=k	$y^2 + 9z^2 = 72k$ familia de elipses k>0
	y	$y = 0$	yz	$y^2 + 9z^2 = 0$ punto en el origen de coordenadas	y=k	$36z^2 - 288x = 4k^2$ familia de parábolas
	z	$z = 0$	xy	$y^2 - 72x = 0$ parábola	z=k	$4y^2 - 288x = -36k^2$ familia de parábolas

a) A los efectos de analizar la *simetría* de las superficies dadas, es necesario evaluar si las ecuaciones de las mismas se modifican o no al reemplazar una variable con respecto a la misma cambiada de signo. El cuadro siguiente muestra los reemplazos posibles y su significado:

Simetría respecto a:	Reemplazo de variables		
		Variable	Se reemplaza por:
Ejes coordenados	Eje *x*	*y* *z*	-*y* -*z*
	Eje *y*	*x* *z*	-*x* -*z*
	Eje *z*	*x* *y*	-*x* -*y*
Planos coordenados	Plano *xy*	*z*	-*z*
	Plano *xz*	*y*	-*y*
	Plano *yz*	*x*	-*x*
Origen de coordenadas	O	*x* *y* *z*	-*x* -*y* -*z*

De esta manera, se procede a reemplazar cada uno de los casos indicados en la Tabla anterior, en las expresiones de las ecuaciones dadas. En caso de no sufrir variación, significa que existe simetría y en caso contrario no existe la simetría considerada. La siguiente Tabla resume el análisis para las superficies dadas.

Ecuación superficie	Simetría con respecto a los ejes coordenados.		Simetría con respecto a los planos coordenados.		Simetría con respecto al origen de coordenadas.	
i	*Eje x*	*No*	*Plano xz*	*Si*	*O(0, 0, 0)*	*No*
	Eje y	*No*	*Plano yz*	*Si*		
	Eje z	*Si*	*Plano xy*	*No*		
ii	*Eje x*	*Si*	*Plano xz*	*Si*	*O(0, 0, 0)*	*Si*
	Eje y	*Si*	*Plano yz*	*Si*		
	Eje z	*Si*	*Plano xy*	*Si*		
iii	*Eje x*	*Si*	*Plano xz*	*Si*	*O(0, 0, 0)*	*No*
	Eje y	*No*	*Plano yz*	*No*		
	Eje z	*No*	*Plano xy*	*Si*		

En forma adicional y a partir del análisis realizado podemos indicar que en cada caso las superficies corresponden a:

i)	Paraboloide hiperbólico.	Superficie cuádrica sin centro.
ii)	Hiperboloide de dos hojas.	Superficie cuádrica con centro.
iii)	Paraboloide elíptico.	Superficie cuádrica sin centro

c) Las Figuras 7, 8 y 9, permiten observar la representación gráfica de las superficies estudiadas.

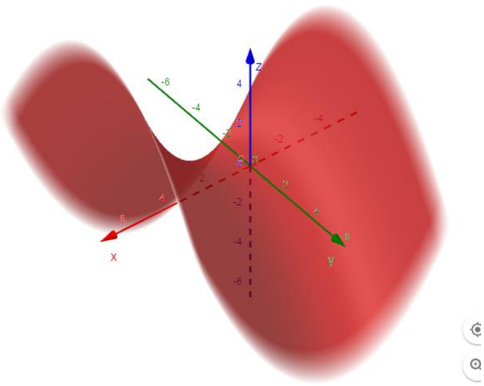


Figura 7: Paraboloide hiperbólico

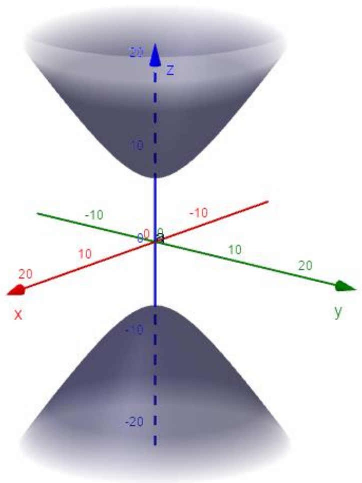


Figura 8. Hiperboloide de dos hojas

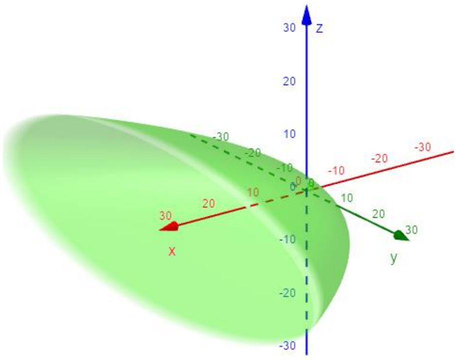


Figura 9. Paraboloide elíptico

102. Indique *ecuaciones vectoriales paramétricas* de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $-25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

i) $z = 10$; *ii)* $x + z = 0$

Respuestas:

Se plantea en cada caso la intersección correspondiente a los efectos de hallar las ecuaciones vectoriales paramétricas solicitadas:

i)

$$\begin{cases} -25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0 \\ z = 10 \end{cases} \quad [37]$$

Resolviendo el sistema planteado, se obtiene:

$$-25x^2 - 25y^2 + 16.(10)^2 + 400 = 0 \quad [38]$$

$$-25x^2 - 25y^2 + 2000 = 0 \quad [39]$$

$$x^2 + y^2 = 80 \quad [40]$$

Observamos que la intersección en este caso es una circunferencia de radio $\sqrt{80}$, en el plano z=10, con centro C(0,0,10). Parametrizamos la circunferencia y obtenemos las siguientes ecuaciones cartesianas paramétricas:

$$\begin{cases} x = \sqrt{80}cos\theta \\ y = \sqrt{80}sen\theta \quad \theta \in (0,2\pi] \\ z = 10 \end{cases} \quad [41]$$

Con lo cual la ecuación vectorial paramétrica resulta:

$$\boxed{(x,y,z) = \left(\sqrt{80}cos\theta, \sqrt{80}sen\theta, 10\right); \quad \theta \in (0,2\pi]} \quad [42]$$

La representación gráfica del problema está dada por la Figura 10.

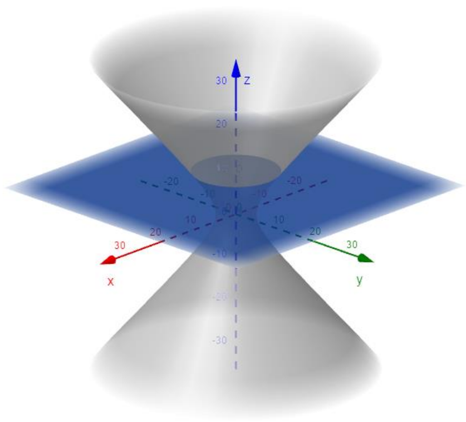


Figura 10.

ii)

$$\begin{cases} -25x^2 - 25y^2 + 16z^2 + 400 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad [43]$$

Resolviendo el sistema planteado, se obtiene:

$$z = -x \quad [44]$$

$$-25x^2 - 25y^2 + 16.(-x)^2 + 400 = 0 \quad [45]$$

$$-25x^2 - 25y^2 + 16x^2 + 400 = 0 \quad [46]$$

$$-9x^2 - 25y^2 + 400 = 0 \quad [47]$$

$$\frac{x^2}{\frac{400}{9}} + \frac{y^2}{\frac{400}{25}} = 1 \quad [48]$$

En este caso la intersección es una elipse ubicada en el plano *z*=-*x*. Las coordenadas *x* e *y* de los puntos de dicha elipse estarán dados por la ecuación [47] o [48]. Por ello parametrizamos la ecuación del lugar geométrico generado por la intersección de la superficie y el plano de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{400}{9}} cos\theta \\ y = \sqrt{\frac{400}{9}} sen\theta; \quad \theta \in (0,2\pi] \\ z = -x \end{cases} \quad [49]$$

Con lo cual la ecuación vectorial paramétrica resulta:

$$\boxed{(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{400}{9}} cos\theta, \sqrt{\frac{400}{9}} sen\theta, -\sqrt{\frac{400}{9}} cos\theta\right); \quad \theta \in (0,2\pi]} \quad [50]$$

La representación gráfica del problema resulta dada por la Figura 11.

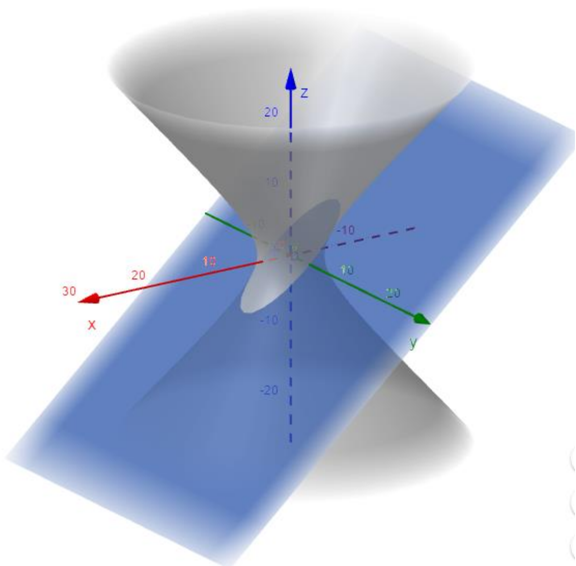


Figura 11.

103. Dadas las siguientes *representaciones vectoriales paramétricas de superficies*, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen:

Respuestas:

a) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5sen\alpha\ cos\beta\ ,\ 5sen\alpha\ sen\beta\ ,\ 5cos\alpha) \rightarrow \begin{cases} x = 5sen\alpha\ cos\beta \\ y = 5sen\alpha\ sen\beta \\ z = 5cos\alpha \end{cases}$

$0 \leq \alpha \leq \pi\,; 0 \leq \beta \leq 2\pi$

Elevando al cuadrado, sumando miembro a miembro y operando algebraicamente las 3 expresiones cartesianas paramétricas, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25sen^2\alpha cos^2\beta + 25sen^2\alpha sen^2\beta + 25cos^2\alpha \qquad [51]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25sen^2\alpha(cos^2\beta + sen^2\beta) + 25cos^2\alpha \qquad [52]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25sen^2\alpha + 25cos^2\alpha \qquad [53]$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 25} \qquad [54]$$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación cartesiana de una *esfera* con centro en el origen de coordenadas y radio 5.

b) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (4\ cos\alpha\ sen\beta\ ,6\ sen\alpha\ sen\beta\ ,3\ cos\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 4\ cos\alpha\ sen\beta \\ y = 6\ sen\alpha\ sen\beta \\ z = 3\ cos\beta \end{cases}$ $\alpha \in [0, 2\pi]\ ;\ \ \beta \in [0, \pi]$

Reordenando, elevando al cuadrado, sumando miembro a miembro y operando algebraicamente las 3 expresiones cartesianas paramétricas, se obtiene:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = cos^2\alpha\ sen^2\beta + sen^2\alpha\ sen^2\beta + cos^2\beta \qquad [55]$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = sen^2\beta(cos^2\alpha + sen^2\alpha) + cos^2\beta \qquad [56]$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = sen^2\beta + cos^2\beta \qquad [57]$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1} \qquad [58]$$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación cartesiana de un *elipsoide* con centro en el origen de coordenadas.

c) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5\ cos\alpha\ ch\beta\ ,2\ sen\alpha\ ch\beta\ ,7\ sh\beta) \rightarrow \begin{cases} x = 5\ cos\alpha\ ch\beta \\ y = 2\ sen\alpha\ ch\beta \\ z = 7\ sh\beta \end{cases}$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad ; \quad -\infty < \beta < \infty$

Reordenando las tres expresiones cartesianas paramétricas de forma tal de dejar en el segundo miembro las funciones trigonométricas, elevando luego al cuadrado cada una de ellas, sumando miembro a miembro la primera y segunda y restando miembro a miembro la tercera, se obtiene:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{7}\right)^2 = cos^2\alpha\ ch^2\beta + sen^2\alpha\ ch^2\beta - sh^2\beta \qquad [59]$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{7}\right)^2 = ch^2\beta(cos^2\alpha + sen^2\alpha) - sh^2\beta \qquad [60]$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{7}\right)^2 = ch^2\beta - sh^2\beta \qquad [61]$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49} = 1} \qquad [62]$$

La expresión obtenida corresponde a la ecuación cartesiana de un ***hiperboloide de una hoja*** con centro en el origen de coordenadas.

104. Describa 5 aplicaciones en la ingeniería y/o en computación, de acuerdo a su carrera, de superficies en el espacio tridimensional.

Respuestas:

Las aplicaciones de las superficies cuádricas en el campo práctico son numerosas y de variada índole. Citamos a continuación algunos ejemplos ilustrativos.

Arquitectura: Las superficies cuádricas configuran las envolventes de múltiples edificios en altura y configuran la geometría de cubiertas de techos de variadas características.

Ingeniería Civil: Grandes estructuras de hormigón armado, acero o madera. Torres de enfriamiento de Centrales Nucleares. Estructuras resistentes de grandes depósitos y reservorios de fluidos y materiales granulares.

Arte: Esculturas geométricas. Combinación de formas a partir de superficies definidas. Desarrollo de patrones geométricos.

Realidad Virtual. Generación de escenarios virtuales a partir de un uso intensivo de geometrías basadas en superficies geométricas. Aplicación a video juegos.

Desarrollo de vehículos terrestres, aéreos y acuáticos. Generación de superficies geométricas de alto desempeño fluidodinámico.