Análisis Matemático I
Clase 21: Regla de L'Hopital. Técnicas de integración: Integración por partes.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2020

Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde f y g son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en $x = x_0$ (indeterminación $'0/0'$).

Introducción a regla de L'Hopital

Supongamos que queremos calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

donde f y g son funciones continuas y derivables. El límite no puede calcularse por evaluación pues el numerador y el denominador se anulan en $x = x_0$ (indeterminación '$0/0'$). Sin embargo, si dividimos ambos miembros por $x - x_0$ se obtiene (usando teorema del valor medio):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}$$

donde c_x y d_x están entre x y x_0.
Esto sugiere que uno podría calcular un límite 'indeterminado' a través de un cociente de derivadas.

Regla de L'Hopital

Supongamos que el límite:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe o es $+\infty$ o $-\infty$. Entonces:

(1) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) Si $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regla de L'Hopital

Observaciones

- La regla de L'Hopital vale para cualquier tipo de límite: límites ordinarios (digamos $x \to a$), laterales , $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.
- En la hipótesis de que:
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
exista **está implícito** que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y que $g'(x) \neq 0$ para todo x en un intervalo de la forma $(a, a+r)$, con $r > 0$. Lo mismo sucede con otros tipos de límites. Por ejemplo si el límite es cuando $x \to +\infty$, entonces lo que se está asumiendo de forma implícita es que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen y que $g'(x) \neq 0$ para todo x suficientemente grande. De todas formas, el estudiante no tiene que preocuparse por corroborar estas condiciones. Las únicas hipótesis que debe verificar es que:
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
exista o sea $\pm\infty$, y que estemos dentro de las condiciones (1) o (2) de la diapositiva anterior.

Regla de L'Hopital

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x}$$

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x}$$

Solución: sean $f(x) = x - sen(x)$ y $g(x) = x$. Observar que f y g tienden a 0 cuando $x \to 0$ (tenemos un límite indeterminado, estamos en la condición (1) de la regla de L'Hopital). Para aplicar la regla de L'Hopital, verificamos si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{1} = 0.$$

Luego, aplicando la regla de L'Hopital obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{1} = 0.$$

Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Regla de L'Hopital

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.
Ejemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Solución: sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$. Observar que el denominador tiende a infinito cuando $x \to +\infty$ (estamos en el ítem (2) de la regla de L'Hopital). Sin embargo, el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}$$

vuelve a ser indeterminado (el denominador tiende a infinito). Intentamos aplicar la regla de L'Hopital a ese límite. Analizamos el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Regla de L'Hopital

Así por la regla de L'Hopital aplicada a e^x y $2x$, se obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a e^x y x^2, que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

Así por la regla de L'Hopital aplicada a e^x y $2x$, se obtiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

lo que a su vez nos dice, nuevamente por regla de L'Hopital aplicada a e^x y x^2, que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty.$$

El ejercicio anteror se realizó paso a paso. El estudiante puede hacerlo así directamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

siempre y cuando diga que está usando la regla de L'Hopital y esté corroborando que en cada paso esté en las condiciones (1) o (2) de la regla. Veamos un ejemplo donde se aplica la regla de L'Hopital sin cuidado.

Supongamos que queremos calcular el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}.$$

Observar que el denominador es cero en $x=1$ por ende no podemos aplicar la regla del cociente de límites. Pero podemos factorizar y obtener:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x-2)} = -4.$$

Sin embargo, podríamos haber usado la regla de L'Hopital dado que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

¿Dónde está el error?

Regla de L'Hopital

En otros casos, es necesario primero transformar el límite para que pueda expresarse en la forma de cociente. Por ejemplo:

- Para el límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,ln(x)$$

hay dos alternativas:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

o:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

La mejor alternativa es la primera.

Técnicas de integración

Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Integración por partes

La integración por partes es una técnica que se utiliza para calcular integrales de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx.$$

Por ejemplo, vamos a utilizarla para calcular:

$$\int x.cos(x)dx, \int ln(x)dx, \int e^x sen(x)dx, etc.$$

Integración por partes

Idea: sean f y g funciones derivables. Entonces la regla del producto para derivadas implica:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f' \cdot g + f \cdot g')(x).$$

Así, la función $f \cdot g$ es una antiderivada de $f' \cdot g + f \cdot g'$. Luego:

$$\int \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right) dx = f \cdot g + C.$$

Obtenemos entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Cuando calculemos $\int f'(x)g(x)dx$ colocaremos una constante C, luego podemos reescribir la igualdad anterior en la forma:

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx.$$

Para recordar mejor la fórmula anterior, se suele llamar:

$$u = f(x), \qquad v = g(x)$$

así:

$$du = f'(x)dx, \qquad dv = g'(x)dx$$

y entonces la fórmula de integración por partes se puede escribir:

Integración por partes

Sean f y g funciones derivables. Entonces:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Integración por partes

Observación: para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir u y dv en la integral, luego calcular du y v y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.
Ejemplos:

- $$\int x.cos(x)dx =$$

Observación: para calcular una integral de la forma:

$$\int F(x)G(x)dx$$

por integración por partes, se deben elegir u y dv en la integral, luego calcular du y v y finalmente aplicar la fórmula de integración por partes.
Ejemplos:

-
$$\int x.cos(x)dx =$$

  Solución: tenemos dos posibilidades para u y para dv. Para u elegimos la que es fácil de derivar y cuya derivada es más simple que u. Y para dv la que es fácil de integrar y cuya antiderivada no es mucho más compleja que v. Así:

$$u = x \Rightarrow du = 1\, dx.$$

$$dv = cos(x)\, dx \Rightarrow v = sen(x).$$

Integración por partes

Reemplazando en la fórmula de integración por partes, se obtiene:

$$\int x.cos(x)\,dx = x.sen(x) - \int sen(x)\,dx = x.sen(x) + cos(x) + C.$$

Integración por partes para integrales definidas

Sean f y g funciones derivables en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Cuidado: la variable de integración sigue siendo x, así que no hay que cambiar los extremos de integración.

Integración por partes

- $$\int_1^2 ln(x)dx =$$

- $$\int_1^2 ln(x)dx =$$

  Solución: en este caso no podemos elegir $dv = ln(x)dx$ pues deberíamos integrar $ln(x)$ que es justamente lo que se quiere hacer. Entonces tomamos:

  $$u = ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

  $$dv = 1\,dx \Rightarrow v = x$$

  Luego:

  $$\int_1^2 ln(x)dx = x.ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 x.\frac{1}{x}\,dx = 2ln(2) - 1.$$