OSCILACIONES

Introducción:

Se denomina oscilación a una variación, perturbación o fluctuación en el tiempo de un medio o sistema. Que si es repetitiva la denominamos periódica.

En particular un sistema (mecánico, eléctrico o neumático), es un oscilador armónico si, cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia ella describiendo oscilaciones sinusoidales, o sinusoidales amortiguadas en torno a dicha posición estable. $Fx_{(x)}$ y x siempre tienen signos opuestos.

La característica principal de un oscilador armónico es que está sometido a una fuerza recuperadora (en este caso lineal, es decir, proporcional a la primera potencia de x), que tiende a retornarlo al punto de equilibrio estable, con una intensidad proporcional a la separación respecto de dicho punto: $Fx_{(x)} = -k.\Delta x = -k.(x - x_0)$ donde k es la constante de recuperación, y x_0 es la posición de equilibrio, que sin pérdida de generalidad podemos tomar $x_0=0$.

La fuerza recuperadora es conservativa (no hay fricción), por lo que tiene asociado una energía potencial:

$$Fx_{(x)} = \frac{-dU_{(x)}}{dx}$$

Siendo $Fx_{(x)} = -k.x \Rightarrow -k.x.dx = -dUx_{(x)}$. Integrando: $Ux = \frac{1}{2}.k.x^2$.

Como podemos ver nuestra fuerza actúa en el eje x y varía con la posición. Si aplicamos la segunda Ley de Newton: $\Sigma Fx = m.a_x \Rightarrow -k.x = m.\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0$$

Esta es la ecuación de movimiento del oscilador armónico simple, donde la aceleración no es constante.

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0} \quad (1)$$

Movimiento armónico simple:

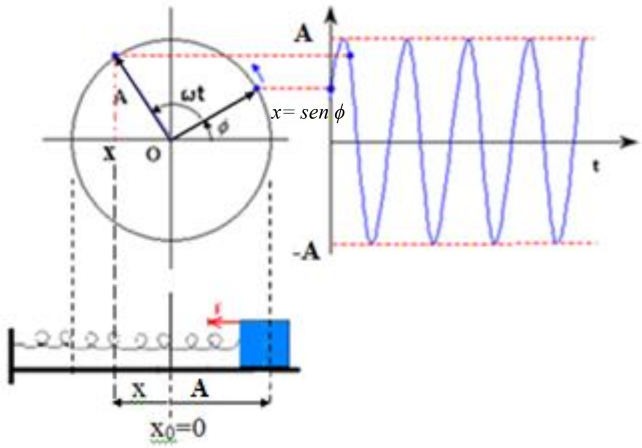
El movimiento armónico simple (M.A.S), es un movimiento periódico, y vibratorio en ausencia de fricción, producido por la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional al desplazamiento si éste es lo suficientemente pequeño, quedando referido en función del tiempo $x_{(t)}$. Si la descripción de un movimiento requiriese más de una función armónica, en general sería un movimiento armónico, pero no un M.A.S.

De la ecuación (1): la segunda derivada $\frac{d^2x}{dt^2}$ de la función x(t), debe ser igual a *(-K/m)* multiplicada por la función misma.

No pudiendo utilizar las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado porque ahora la aceleración no es constante; aprovechando la similitud entre el movimiento armónico de un cuerpo y el movimiento circular uniforme de un punto auxiliar nos vamos a permitir hallar la ecuación del M.A.S sin tener que recurrir a cálculos matemáticos complejos.

Para su solución utilizaremos como modelo el sistema masa resorte ideal. Donde tenemos una trayectoria rectilínea de un cuerpo que al realizar un M.A.S, oscila alejándose y acercándose de un punto, situado en el centro de su trayectoria, de tal manera que su posición en función del tiempo con respecto a ese punto es una sinusoide.

En la figura, se observa la interpretación de un M.A.S como proyección sobre el eje x, del extremo de un vector rotatorio de longitud igual a la amplitud A, que gira con rapidez angular $\omega=\theta/t$, igual a la frecuencia angular $\omega=2.\pi.f$ del M.A.S, en el sentido contrario a las agujas del reloj.



La componente x del vector en el instante t es la coordenada x del extremo del vector: $x = \mathrm{A}.\cos(\omega.\mathrm{t}+\phi)$

De la relación entre cinemática angular y lineal: $a_{rad.}=\omega^2.r$, reemplazando el radio r por A→ $a_{rad.}=\omega^2.A$.

Y de la ecuación (1): $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}.x \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{m}.x$ comparando : $\dfrac{dv}{dt} = -\omega^2.x$

Si multiplicamos y dividimos por dx: $\dfrac{dv}{dt}.\dfrac{dx}{dx} = -\omega^2.x$, reordenando:

$$\frac{dx}{dt}.\frac{dv}{dx} = -\omega^2.x$$

$$\mathrm{v}.\frac{dv}{dx} = -\omega^2.x \Rightarrow v.dv = -\omega^2.x.dx \text{ Integrando : } \int v.dv = -\omega^2.\int x.dx$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{x^2}{2}.\omega^2 + C(cte) \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2}.\omega^2 = C$$

Si : $\omega^2 = K/m$

$$\frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{2}.x^2.\frac{k}{m} = C \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2 = C$$

Verificando la conservación de la energía.

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{2.C - \omega^2.x^2} = \omega\sqrt{\frac{2.C}{\omega^2} - x^2}$$

Llamando A^2 a $2.C/\omega^2$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \omega.\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega.dt \text{ Integrando : } \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega\int dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{A.\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}}; \text{haciendo cambiode variable}: \mu = \frac{x}{A} \Rightarrow d\mu = \frac{dx}{A}$$

$$\int \frac{d\mu}{A.\sqrt{1-\mu^2}} = \text{arc.sen}\mu \therefore \text{arc. sen}\frac{\text{x}}{\text{A}} = \omega.t + \phi$$

$$\boxed{\text{x} = \text{A.sen}(\omega.\text{t} + \phi)}$$

A y ϕ son constantes indeterminadas. La determinación de la amplitud A y la constante de fase ϕ de las oscilaciones dependen de la posición y de la velocidad inicial de la partícula de masa.

Si desarrollamos el seno de la suma:

$$\text{x} = \text{A.}(\text{sen}\omega.\text{t.cos}\phi + \cos\omega.\text{t.sen}\phi) = (A.\cos\phi).sen\omega.t + (A.\text{sen}\phi).\cos\omega.t$$

La identidad *cosα=sen(α+π/2)* nos permite pasar de utilizar la razón trigonométrica seno a coseno avanzando *π/2* radianes.

$$\text{x} = (A.\cos\phi).sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right) + (A.\text{sen}\phi).\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{x} = A.\cos\phi.\cos\omega.t + A.sen\phi.(-sen\omega.t) = A.(\cos\phi.\cos\omega.t - sen\phi.sen\omega.t)$$

$$\boxed{\text{x} = A.\cos(\omega.t + \phi)} \quad (2)$$

Si aumentando el tiempo en *2.π/ω* en la ecuación (2), la función se repite a si misma, ocurre que se cumple: $x_{(t+T)}=x_{(t)}$.

$$\text{x} = A.\cos(\omega.\frac{2.\pi}{\omega} + \phi) = A.(\cos 2.\pi.\cos\phi - sen2.\pi.sen\phi) = A.\cos\phi$$

En conclusión *2.π/ω* es el período T.

$$\text{T} = \frac{2.\pi}{\omega} = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La frecuencia del oscilador *f* es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo, y siempre es positiva:

$$\text{f} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2.\pi} \Rightarrow \omega = 2.\pi.f$$

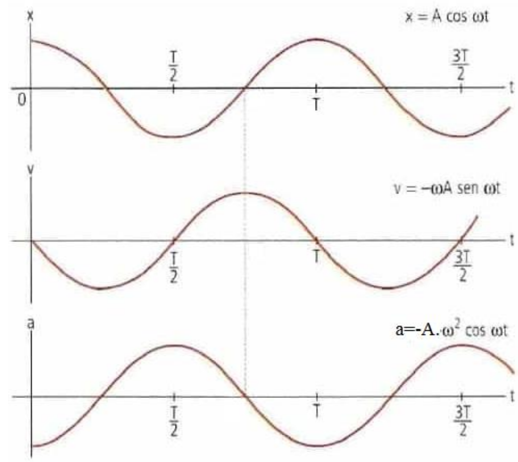
La frecuencia angular *ω* representa la rapidez de cambio de una cantidad angular no necesariamente relacionada con un movimiento rotacional. Nos dice a cuántos radianes por unidad de tiempo se realiza el movimiento en el círculo de referencia.

La velocidad y la aceleración de una partícula que describe un movimiento armónico simple se obtiene derivando la ecuación de la posición en función del tiempo.

$$\text{v}_\text{x} = \frac{dx}{dt} = -A.\omega.sen(\omega.t + \phi)$$

$$\text{a}_\text{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A.\omega^2.\cos(\omega.t + \phi)$$

Graficando las ecuaciones suponiendo ϕ=0. Cuando el desplazamiento alcanza su máximo en ambas direcciones, la rapidez es cero porque ahora la velocidad debe cambiar de dirección. En ese instante la aceleración, como la fuerza restauradora, presenta su máxima magnitud pero sigue una dirección contraria al desplazamiento.



Cuando el desplazamiento es cero, la rapidez llega a su valor máximo y la aceleración se hace nula, igual que la fuerza restauradora. La rapidez crece para acercarse a la posición de equilibrio, y luego disminuye a medida que se aleja del desplazamiento máximo.

Conociendo la posición y la velocidad inicial del cuerpo oscilante, podemos determinar la amplitud y el ángulo de fase. Partiendo de la ecuación (2), desarrollando el coseno de la suma de dos ángulos:

$$x_{(t)} = A.\cos\phi.\cos\omega.t - A.sen\phi.sen\omega.t$$

En el inicio, cuando t=0:

$$x_{(0)} = A.\cos\phi.\cos 0 - A.sen\phi.sen 0 = A\cos\phi \quad (3)$$

Derivando $x_{(t)}$, y desarrollando el seno de la suma de dos ángulos:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A.\omega.sen(\omega.t + \phi) = -\omega.A.(sen\omega.t.\cos\phi + sen\phi.\cos\omega.t)$$

$$\frac{dx_{(t)}}{dt} = -A.\omega.\cos\phi.sen\omega.t - A.\omega.sen\phi.\cos\omega.t$$

En el inicio, cuando t=0:

$$v_{(x_0)} = -A.\omega.\cos\phi.sen0 - A.\omega.sen\phi.\cos 0 = -A.\omega.sen\phi \quad (4)$$

Dividiendo (4) en (3), obtendremos el ángulo de fase del M.A.S:

$$\frac{v_{(x_0)}}{x_{(0)}} = \frac{-A.\omega.sen\phi}{A.\cos\phi} \Rightarrow tg\phi = \frac{-v_{(x_0)}}{\omega.x_{(0)}} \quad \text{o sea :} \boxed{\phi = \text{arc. tg}\left(\frac{-v_{(x_0)}}{\omega.x_{(0)}}\right)}$$

Ahora, elevando al cuadrado la igualdad (3): $x^2_{(0)} = A^2\cos^2\phi$

Dividiendo (4) por ω: $\frac{v_{(x_0)}}{\omega} = -\frac{A.\omega.sen\phi}{\omega}$

Elevando al cuadrado: $\frac{v^2_{(x_0)}}{\omega^2} = (-A)^2.sen^2\phi$

Sumando $\frac{v^2_{(x_0)}}{\omega^2} + x^2_{(0)} = A^2.(sen^2\phi + \cos^2\phi)$ o sea : $\boxed{A = \sqrt{x^2_{(0)} + \frac{v^2_{(x_0)}}{\omega^2}}}$

Energía en el Movimiento armónico simple:

En nuestro modelo masa resorte ideal; el cuerpo de masa *m* sometido a un movimiento armónico simple posee una energía mecánica que podemos descomponer en: energía cinética (debido a que esta en movimiento) y energía potencial (debido a que el movimiento armónico es producido por una fuerza conservativa).

Si tenemos en cuenta el valor de la energía cinética en cualquier momento:

$K=\frac{1}{2}.m.v_x^2$. Con velocidad $\mathrm{v_x}=-A.\omega.sen(\omega.t+\phi)$ (el subíndice se debe a que el movimiento es unidimensional). Reemplazando: $K=\frac{1}{2}.m.A^2.\omega^2.sen^2(\omega.t+\phi)$

Sabiendo que $\omega^2=k/m$:

$$K=\frac{1}{2}.k.A^2.sen^2(\omega.t+\phi)$$

Observamos que *K* tiene un valor periódico, con un máximo cuando la partícula se encuentra en la posición de equilibrio, y un mínimo en el extremo de la trayectoria.

La energía potencial en una posición *x* vendrá dada por el trabajo necesario para llevar el cuerpo desde la posición de equilibrio hasta el punto de elongación *x*.

$$U=\int_0^x \vec{F}.\vec{d}x=\int_0^x k.x.dx=\frac{1}{2}.k.x^2$$

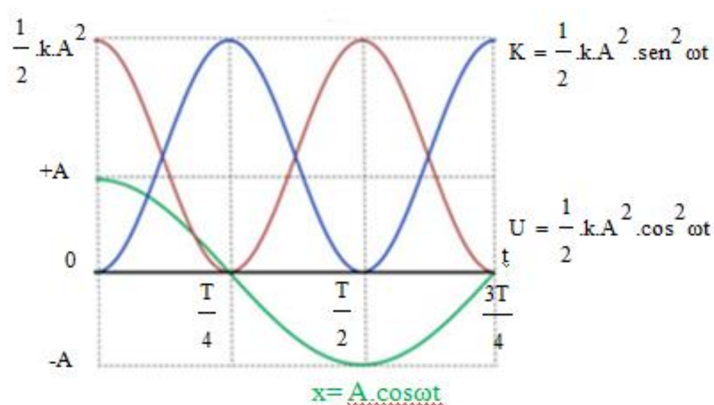
Reemplazando $x=A.\cos(\omega.t+\phi)$, en $U=\frac{1}{2}.k.A^2.\cos^2(\omega.t+\phi)$

Teniendo en cuenta que la energía mecánica es la suma de la cinética y la potencial: *E=K+U.*

$$E=\frac{1}{2}.k.A^2.sen^2(\omega.t+\phi)+\frac{1}{2}.k.A^2.\cos^2(\omega.t+\phi)=\frac{1}{2}.k.A^2\left[sen^2(\omega.t+\phi)+\cos^2(\omega.t+\phi)\right]$$

$$E=\frac{1}{2}.k.A^2$$

En el M.A.S la energía mecánica permanece constante si no hay rozamiento, por ello su amplitud permanece también constante, como podemos observar en la gráfica siguiente:



Podemos usar la igualdad:

$$\frac{1}{2}.m.v_x^2+\frac{1}{2}.k.x^2=\frac{1}{2}.k.A^2$$

Para calcular la velocidad del cuerpo v_x para determinada posición x.

$$\frac{1}{2}.m.v_x^2=\frac{1}{2}.k.\left(A^2-x^2\right)\Rightarrow v_x=\sqrt{\frac{k}{m}.\left(A^2-x^2\right)}=\sqrt{\frac{k}{m}}.\sqrt{\left(A^2-x^2\right)}=\omega.\pm\sqrt{\left(A^2-x^2\right)}$$

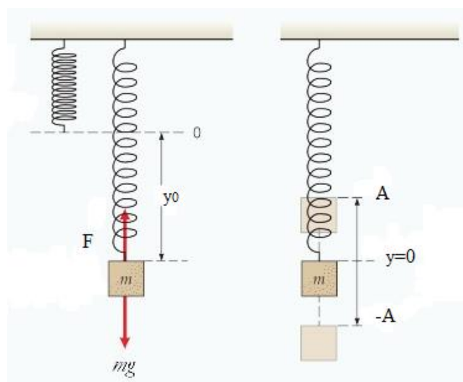
Los signos ± de la raíz cuadrada indican que para un valor de x dado el cuerpo se puede estar moviendo en cualquiera de los dos sentidos.

Aplicaciones del Movimiento armónico simple:

a) Oscilador masa-resorte vertical:

Como se puede observar; tenemos un resorte empotrado en el techo y una masa m unida en su otro extremo, el peso de dicho cuerpo estira el resorte hasta una nueva posición de equilibrio. La posición de equilibrio se determina a partir de la condición de que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo sea nula.

La posición y_0 será tal que $m.g=-k.y_0$



Puesto que las fuerzas están equilibradas ($F=-k.y_0$, $P=m.g$), es posible calcular la constante elástica del resorte.

Partiendo de la situación anterior estirando con la mano estamos añadiendo una fuerza que produce una nueva situación de equilibrio con una elongación y.

$F_{neta}=-k.(y_0+y)+m.g=-k.y_0-k.y+m.g=-k.y$

Aplicando la segunda Ley de Newton:

$$\Sigma Fy=m.a\Rightarrow -k.y=m.g\ \therefore\ g+\frac{k}{m}.y=0\ \text{ de forma general : }\ddot{y}+\frac{k}{m}.y=0$$

Por similitud con la ecuación (1) podemos decir que realiza un M.A.S vertical.

b) Péndulo Simple:

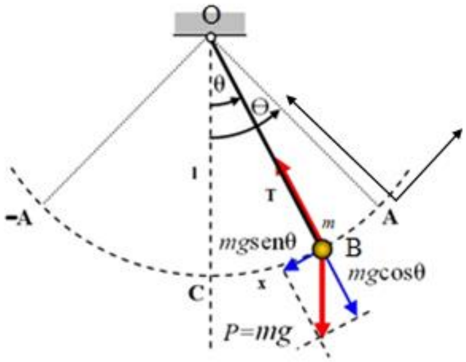
El péndulo simple (también llamado péndulo matemático o péndulo ideal) es un sistema idealizado constituido por una lenteja de masa puntual m que está suspendida de un punto fijo O mediante un hilo inextensible y sin peso.

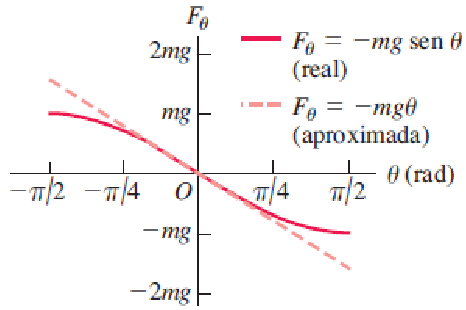
En la figura, la lenteja se mueve sobre un arco de circunferencia $x=\theta.l$, bajo la acción de dos fuerzas: su propio peso mg y la tensión del hilo T, siendo la fuerza motriz (fuerza de restitución) la componente tangencial del peso: $F_\theta=-m.g.sen\theta$

Nótese que la fuerza de restitución no es proporcional al desplazamiento angular θ, sino a seno de θ y no podría analizarse como un movimiento armónico.

Para θ pequeño, $sen\ \theta$ es casi igual a θ en radianes, El error para $sen\ \theta\approx\theta$ es de 1% alrededor de los 14 grados sexagesimales (0,244 radianes); en consecuencia:

$$F_\theta = -m.g.\theta = -\left(\frac{m.g}{l}\right).x$$





Si aplicamos la segunda Ley de Newton:

$$\Sigma Fx = m.a \Rightarrow m.a = -m.g.\frac{x}{l} \therefore a = -\frac{g}{l}.x$$

$$a + \frac{g}{l}.x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}.x = 0$$

Si comparamos con (1), estamos en presencia de un movimiento armónico.

Donde: $\omega^2 = \dfrac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{q}{l}}$

Y basado en las relaciones de frecuencia y período, obtendremos:

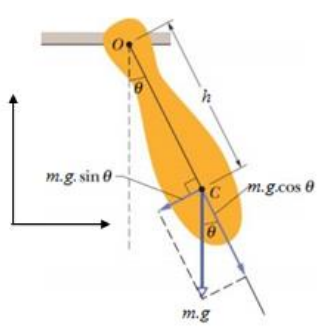
$$f = \frac{\omega}{2.\pi} = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{g}{l}} \quad ; \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{f} = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si la amplitud no es pequeña, la divergencia con respecto al M.A.S puede ser importante, y la ecuación general del período puede expresarse con una serie infinita (Fourier), siendo Θ el desplazamiento angular máximo:

$$\mathrm{T} = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}.sen^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.sen^4\frac{\Theta}{2} + ...\right)$$

b) Péndulo Físico:

Un péndulo físico o péndulo compuesto es cualquier cuerpo rígido que pueda oscilar libremente alrededor de un eje horizontal fijo *z*, que no pasa por su centro de masa *C*.



Cuando el péndulo está desviado de su posición de equilibrio (estable) un ángulo θ, actúa sobre él un momento de restitución con respecto al eje de rotación z que pasa por O: $\tau_z = -h \times F_{tg} = -h.(m.g.sen\theta)$

Como vemos τ_z es proporcional al seno de θ y no a θ, y no se cumpliría la condición del M.A.S. Sin embargo, si los desplazamientos angulares son pequeños como hemos visto, *sen* θ es casi igual a θ en radianes, en consecuencia: $\tau_z = -h.(m.g.\theta)$

Recordando la ecuación de movimiento: $\Sigma\tau_z = I_O.\alpha_z$

$$-h.(m.g.\theta) = I_O.\alpha_z = I_O.\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m.g.h}{I_O}.\theta = 0$$

Si comparamos con la ecuación (1) vemos que :

$$\omega^2 = \frac{m.gh}{I_O} \quad \text{siendo } \omega = \frac{2.\pi}{T} \Rightarrow \frac{2.\pi}{T} = \sqrt{\frac{m.g.h}{I_O}} \quad \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{I_O}{m.g.h}}$$

Aplicando el teorema de los ejes paralelos: $I_0 = I_C + m.h^2$

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{I_C + m.h^2}{m.g.h}} \quad (5) \qquad \omega^2 = \frac{m.gh}{I_O} \;;\; \frac{4.\pi^2}{T^2} = \frac{m.gh}{I_O} \Rightarrow I_O = \frac{m.g.h.T^2}{4.\pi^2}$$

Usando el concepto de radio de giro (i_g): distancia desde el eje de rotación que pasa por O a un punto donde podríamos suponer concentrada toda la masa del cuerpo de modo que el momento de inercia respecto a dicho eje se obtenga como el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado del radio de giro: $I_C = m.i_g^2$

Reemplazando en (5): $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{m.i_g^2 + m.h^2}{m.g.h}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{i_g^2 + h^2}{g.h}}$

Comparando con el péndulo simple, por su similitud: $\mathrm{T} = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$

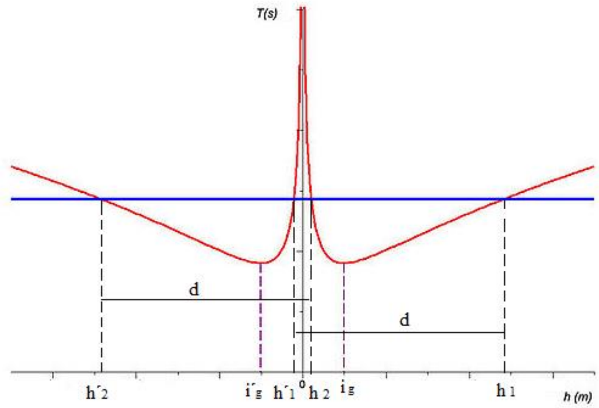
$$l = \frac{i_g^2 + h^2}{h} \Rightarrow h^2 - l.h + i_g^2 = 0$$

Por las propiedades de las raíces (h_1 y h_2) obtenemos:

$$h_1.h_2 = \frac{c}{a} = i_g^2 \;;\; h_1 + h_2 = \frac{-b}{a} = l$$

Esto permite comprobar que existen dos puntos del cual se puede suspender un péndulo físico y obtener el mismo período de oscilación.

El período *T*en función de *h* proporciona una curva con dos ramas, que corresponden a colocar el eje de suspensión a un lado u otro del centro de gravedad *C* del cuerpo. Como ambas ramas son simétricas respecto al eje vertical, en la práctica bastará con hacer observaciones a un sólo lado del C. La función $T_{(h)}$ del periodo de oscilación dada por: $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{i_g^2 + h^2}{g.h}}$ presenta un valor mínimo para un cierto valor de la distancia *h*. A partir de la expresión es fácil demostrar que el valor mínimo del periodo se presenta cuando $h = i_g$, esto es, cuando la distancia entre C y el eje de suspensión coincide con el radio de giro.



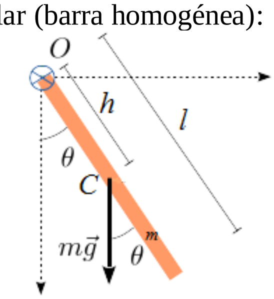
La gráfica también pone de manifiesto que para un valor del periodo $T > T_{\text{mín}}$ existen cuatro puntos (h_1, h_1', h_2, h_2') tales que al hacer pasar por ellos el eje de suspensión paralelo entre sí, las oscilaciones del péndulo físico tendrán el mismo periodo. Además, dado que la distancia que separa los puntos h_1 y h_1', *d*, es la misma que separa los puntos h_2 y h_2' decimos que los puntos h_1 y h_1' son conjugados entre sí; y lo mismo sucede para los puntos h_2 y h_2'. Veamos a que obedece tal denominación.

Cuando el péndulo oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto h_1, dicho punto recibe el nombre de centro de suspensión, y el punto h_1', que se encuentra a una distancia *d* del punto O, recibe el nombre de centro de oscilación.

El centro de oscilación recibe también el nombre de centro de percusión porque cuando se aplica a él una percusión (impulso producido por una fuerza de corta duración) su conjugado, esto es, el centro de suspensión, no acusa percusión alguna. El cuerpo tiende a girar alrededor del centro de suspensión aun cuando no pase por él ningún eje fijo. Si ahora hacemos pasar el eje de suspensión por el punto h_1', de modo que sea paralelo al anterior eje de suspensión, el punto h_1' pasa a ser el punto de suspensión, en tanto que el punto h_1 pasa a ser el centro de oscilación. Ambos puntos han permutado entre sí sus papeles; por eso se dice que son conjugados. Lo mismo podemos decir para los puntos h_2 y h_2'. Los resultados anteriores constituyen el llamado Teorema de Huygens (1629-1695), que podemos enunciar en la forma siguiente:

La longitud reducida de un péndulo físico no varía cuando el centro de oscilación pasa a ser centro de suspensión, pues ambos puntos permutan entre sí sus papeles. El periodo del péndulo será el mismo en ambos casos.

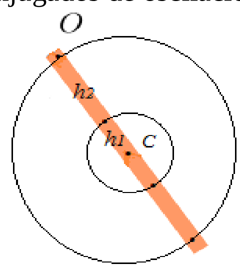
Veamos un ejemplo particular (barra homogénea):



$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{I_C + m.h^2}{m.g.h}} \quad \text{siendo } \mathrm{I_C} = \frac{1}{12}.m.l^2 \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{\frac{1}{12}.\cancel{m}.l^2 + \cancel{m}.h^2}{\cancel{m}.g.h}}$$

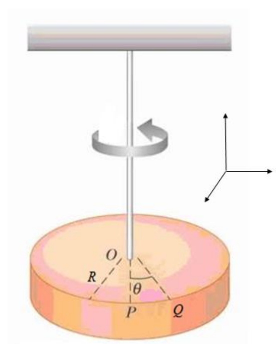
Comparando con: $T = 2.\pi.\sqrt{\dfrac{i_g^2 + h^2}{g.h}}$ .Vemos que: $i_g = \sqrt{\dfrac{l^2}{12}}$

En la figura siguiente indicamos cuatro puntos de donde podemos suspender la barra y obtener el mismo período de oscilación. En otras palabras la superficie cilíndrica de radio h_1 (raíz) determina el lugar geométrico de los ejes alrededor de los cuales puede oscilar el péndulo compuesto y también h_2 (raíz) determina otra superficie cilíndrica coaxial con la primera que tiene la misma propiedad, verificar el Teorema de Huygens. Si se interseca las superficies cilíndricas con un plano que pertenezca al eje común que pasa por el centro de masa *C*, dos ejes que correspondan a semi-planos opuestos respecto del eje que pasa por *C*, son los ejes conjugados de oscilación.



c) Péndulo de torsión:

Constituido por en un alambre de aleación de acero, sección recta circular suspendido verticalmente, con su extremo superior fijo y del inferior se cuelga un cuerpo de momento de inercia *I* conocido o fácil de calcular (disco o cilindro). Cualquier movimiento puede descomponerse como combinación de movimientos lineales y de rotación.



Con el disco fijo se traza una línea radial del centro a un punto P, el alambre se tuerce llevando el punto P al Q. La línea OP oscila entre OQ y OR describiendo un ángulo 2θ , siendo θ la amplitud del movimiento. El alambre se opone al momento de la cupla con un momento torsor restaurador y para pequeñas torsiones se observa que la torca restauradora es proporcional al desplazamiento angular (Ley de Hooke).

$\tau_z = -\kappa.\theta$ .Siendo κ la constante torsional.

La ecuación de movimiento aplicando la segunda Ley de Newton en su forma angular resulta la siguiente ecuación:

$$\Sigma\tau_z = I.\alpha_z = I.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-\kappa.\theta = I.\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}.\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I}.\theta = 0 \quad (6)$$

Desde el punto de vista matemático es semejante a la ecuación (1) relativa a un movimiento armónico simple. En este caso armónico rotacional.

$$\text{Comparando : } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y ahora : } \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

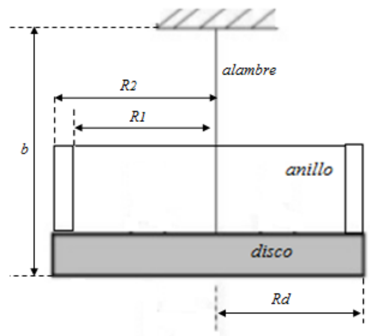
$$f = \frac{\omega}{2.\pi} = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

De la solución del M.A.S, inferimos la solución de la ecuación (6):

$$\theta = \theta_{máx.}.\cos(\omega.t + \phi) \quad \text{siendo } \omega \neq \frac{d\theta}{dt}$$

Veamos un ejemplo particular (disco mas anillo)

En corte vemos el disco anterior suspendido del techo y concéntrico sobre él un anillo del mismo material. El momento de Inercia será: $I_{conjunto}=I_{disco}+I_{anillo}$



$$I_a = \frac{1}{2}.m_a.(R_2^2\text{-}R_1^2) \; I_d = \frac{1}{2}.m_d.R_d^2$$

$$T_a = 2.\pi.\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \Rightarrow \frac{T_a^2.\kappa}{4.\pi} = I_a \qquad T_d = 2.\pi.\sqrt{\frac{I_d}{\kappa}} \Rightarrow \frac{T_d^2.\kappa}{4.\pi} = I_d$$

$$I_a = I_c - I_d = \frac{T_c^2.\kappa}{4.\pi} - \frac{T_d^2.\kappa}{4.\pi} \Rightarrow \kappa = \frac{4.\pi.I_a}{T_c^2 - T_d^2}$$

<u>Movimiento armónico amortiguado:</u>

Hasta ahora hemos aplicado un modelo de oscilador que respetando la ley de Hooke no es realista pues desprecia la presencia del rozamiento. La experiencia nos muestra que un oscilador se va frenando progresivamente hasta llegar a detenerse en la posición de equilibrio.

La fricción pude ser por rozamiento con una superficie (rozamiento seco) o por la viscosidad del aire o líquido que rodea al oscilador (rozamiento viscoso). A este último caso pertenecen los amortiguadores de los vehículos, como el de la figura. Un amortiguador posee un pistón dentro de un cilindro con aceite, y exteriormente empaquetado por un resorte.

La fuerza de rozamiento que experimenta se opone siempre a la velocidad: $\vec{F} = -b.\vec{v}_x$. Donde b (coeficiente de amortiguamiento) es una constante positiva que depende de las propiedades del fluido, así como tamaño y forma del objeto en el fluido.

Aplicando la segunda ley de Newton para movimiento rectilíneo, ahora con amortiguamiento:

$$\sum \vec{F}_x = -k.x - b.v_x$$

$$m.a = -k.x - b.v_x$$

$$\boxed{m.\ddot{x} + b.\dot{x} + k.x = 0} \quad \text{(ecuación del oscilador armónico amortiguad o)}$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + b.\frac{dx}{dt} + \omega^2.m.x = 0 \quad \text{al reemplazar } K = \omega^2.m$$

Siendo ω la frecuencia de oscilación natural sin fricción.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}.\frac{dx}{dt} + \omega^2.x = 0$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por 2.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2.\beta.\frac{dx}{dt} + \omega^2.x = 0$$. Constante de amortiguamiento: $\beta = \frac{b}{2.m}$

Si invertimos obtenemos la vida media de oscilación: $\tau = \frac{2.m}{b}$

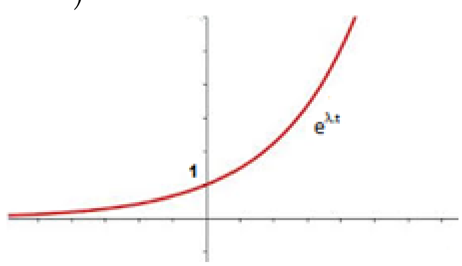
El factor 2 incluido acá simplificará expresiones posteriores:

$$\boxed{\ddot{x} + 2.\beta.\dot{x} + \omega^2.x = 0}$$

Al inicio del tema resolvimos la ecuación de un M.A.S con la ayuda de un M.C.U, ahora recurriremos al procedimiento matemático para obtener la solución de la ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden (contiene derivadas segundas) y homogénea. Lo primero es construir el polinomio característico sustituyendo:

x por $e^{\lambda.t}$, $\dot{x}$ por $\lambda.e^{\lambda.t}$ y $\ddot{x}$ por $\lambda^2.e^{\lambda.t}$

Obtendremos: $\left(\lambda^2 + 2.\beta.\lambda + \omega^2\right).e^{\lambda.t} = 0$



En la gráfica, cuando λ=1, vemos que nuestra función seleccionada nunca se anula. Por lo cual debe ser el paréntesis.

A continuación obtendremos las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial: $\lambda^2 + 2.\beta.\lambda + \omega^2 = 0$

$$\lambda_{1\text{-}2} = \frac{-2.\beta \pm \sqrt{4.\beta^2 - 4.\omega^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

Analizando el discriminante, distinguiremos tres tipos de regímenes:

a) Sobreamortiguamiento:

Si: $\beta > \omega$, la ecuación característica tendrá 2 raíces reales y distintas, como vemos; ambas negativas:

$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \qquad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$

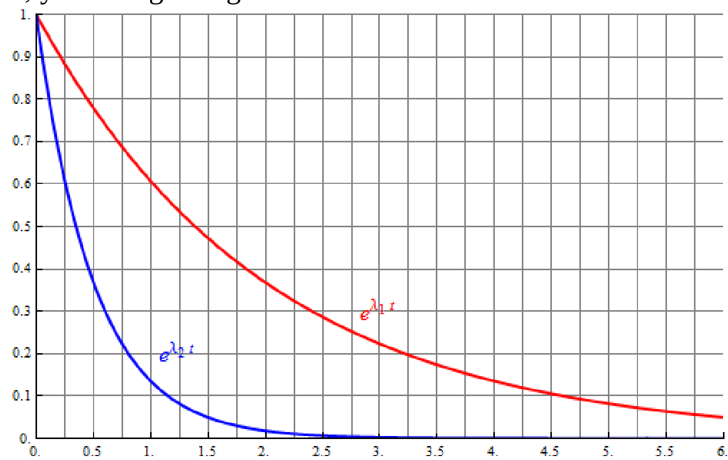
Puesto que existen dos valores, la solución de la ecuación diferencial se escribe como la siguiente combinación: $x_{(t)} = C_1.e^{\lambda_1.t} + C_2.e^{\lambda_2.t}$

Siendo por lo tanto una suma de dos exponenciales decrecientes:

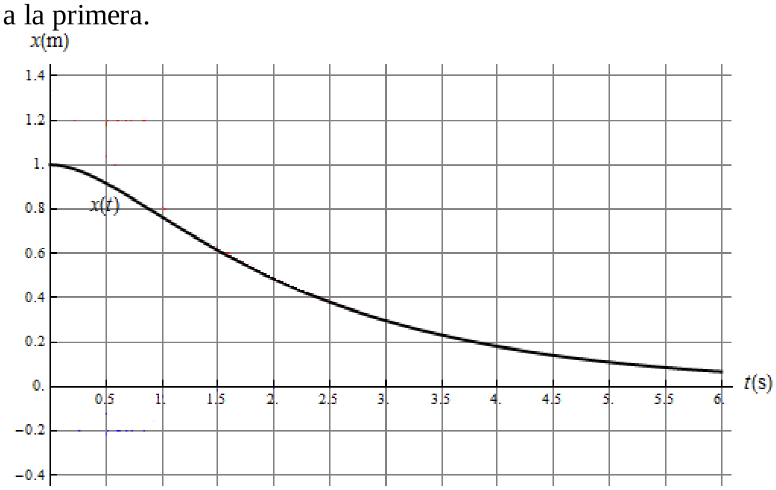
$x_{(t)} = C_1.e^{-|\lambda_1|.t} + C_2.e^{-|\lambda_2|.t}$

Puesto que $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ la segunda exponencial decae más rápidamente, y la primera de las dos determina el tiempo en decaer.

Veamos la gráficas, primero con C_1 y C_2 constantes que dependen de las condiciones iniciales, y tienen igual signo.



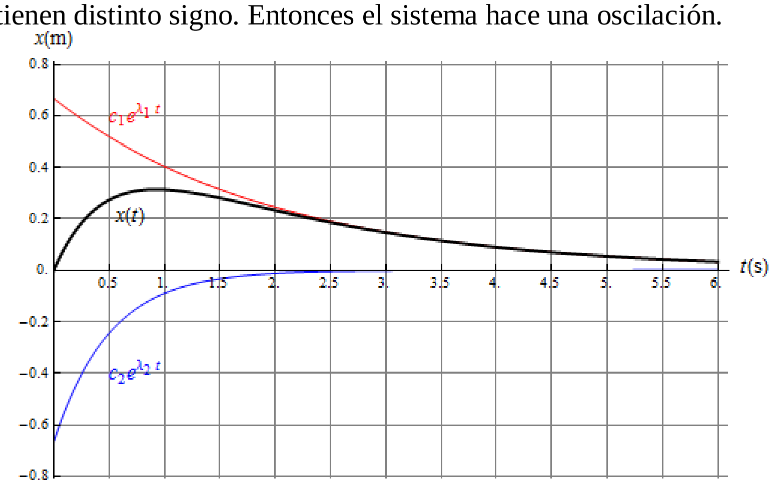
La solución completa es la combinación de las dos aunque rápidamente se asemeja mucho a la primera.



El caso de esta figura representa la situación en que se aparta el oscilador de su posición de equilibrio para liberarlo desde el reposo (siendo nula su velocidad inicial, lo que corresponde a una tangente horizontal). El oscilador tiende lentamente a la posición de equilibrio. El sistema no oscila.

El que la solución sea una combinación de exponenciales decrecientes no quiere decir que la solución sea decreciente en todo instante. Por ejemplo, imaginemos el caso de un muelle que es golpeado en la posición de equilibrio. La masa se aleja originalmente de la posición de equilibrio, para luego retornar lentamente a ella.

Acá C_1 y C_2 son constantes que dependen como siempre de las condiciones iniciales, y tienen distinto signo. Entonces el sistema hace una oscilación.



b) Amortiguamiento crítico:

Si: β = ω. Tendremos una solución real doble, $\lambda_{1\text{-}2} = -\beta$

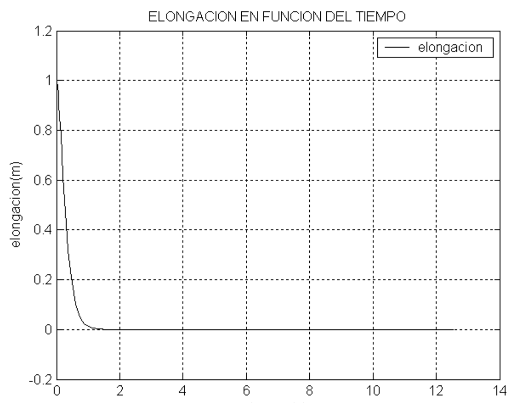
La solución de la ecuación diferencial se escribe como la siguiente combinación:

$$x_{(t)} = C_1.e^{-\beta.t} + C_2.e^{-\beta.t} = (C_1 + C_2).e^{-\beta.t}$$

$$\text{Teniendo en cuenta que}: \beta = \omega \Rightarrow \frac{b}{2.m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow b = 2.\sqrt{k.m}\,(\text{valor crítico})$$

$$\text{La vida media de oscilación: } \tau = \frac{2.m}{b} = \frac{2.m}{2.\sqrt{k.m}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\beta}$$

El amortiguamiento crítico corresponde a la tendencia más rápida hacia la situación de equilibrio cuando no sobrepasa esa posición. La frecuencia de oscilación es cero y el sistema se aproxima gradualmente a su posición de equilibrio.



Si se disminuye un poco el amortiguamiento el sistema se acerca más rápidamente a la posición de equilibrio, pero sobrepasando la posición oscila en torno a ese punto (tomando valores positivos y negativos).

Observemos que en este caso: $b = 2.\sqrt{k.m}$

Para el sobreamortiguamiento debería ser: $b > 2.\sqrt{k.m}$

Para el subamortiguamiento debería ser: $b < 2.\sqrt{k.m}$

c) Subamortiguado:

Si: β < ω. Tendremos soluciones complejas conjugadas.

$$\lambda_{1\text{-}2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} = -\beta \pm \sqrt{-1}.\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

Donde: $i = \sqrt{-1}$ (unidad imaginaria) $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ (frecuencia real del sistema)

$$\lambda_{1\text{-}2} = -\beta \pm i.\omega'$$

La solución de la ecuación diferencial será:

$$x_{(t)} = C_1.e^{(-\beta + i.\omega').t} + C_2.e^{(-\beta - i.\omega').t}$$

$$x_{(t)} = e^{-\beta.t}.\left(C_1.e^{i.\omega'.t} + C_2.e^{-i.\omega'.t}\right)$$

Tenemos como parte real: $e^{-\beta.t}$.

Esta solución se puede escribir de forma más sencilla usando la ecuación de Euler que dice:

$$e^{i.\phi} = \cos\phi + i.sen\phi$$

$$e^{(-\beta+i.\omega').t} \Rightarrow e^{-\beta.t}.e^{i.\omega'.t} \Rightarrow e^{-\beta.t}.\left[\cos(\omega'.t) + i.\text{sen}(\omega'.t)\right]$$

$$e^{(-\beta-i.\omega').t} \Rightarrow e^{-\beta.t}.e^{-i.\omega'.t} \Rightarrow e^{-\beta.t}.\left[\cos(\omega'.t) - i.\text{sen}(\omega'.t)\right]$$

La solución general puede escribirse como combinación lineal de las dos nuevas soluciones:

$$x_{(t)} = C_1.e^{-\beta.t}.\left[\cos(\omega'.t) + i.\text{sen}(\omega'.t)\right] + C_2.e^{-\beta.t}.\left[\cos(\omega'.t) - i.\text{sen}(\omega'.t)\right]$$

$$x_{(t)} = e^{-\beta.t}\left[C_1.(\cos\omega'.t + i.\text{sen}\omega'.t) + C_2.(\cos\omega'.t - i.\text{sen}\omega'.t)\right]$$

$$x_{(t)} = e^{-\beta.t}.\left[(C_1 + C_2).\cos(\omega'.t) + i.(C_1 - C_2).\text{sen}(\omega'.t)\right]$$

$$b_1 = C_1 + C_2 \qquad b_2 = i.(C_1 - C_2)$$

$$x_{(t)} = e^{-\beta.t}.\left[b_1.\cos(\omega'.t) + b_2.\text{sen}(\omega'.t)\right]$$

Retomando la ecuación (2) del movimiento armónico simple:

$$x_{(t)} = A.\cos(\omega.t + \phi) = A.\cos\phi.\cos\omega.t - A.sen\phi.sen\omega.t$$

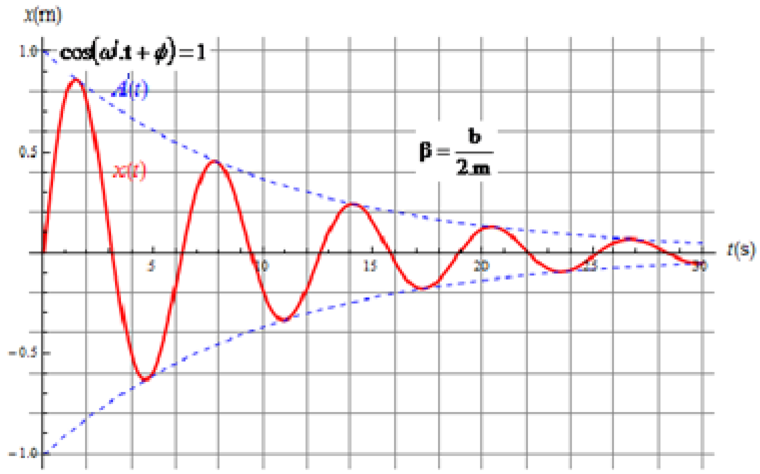
Por comparación entre ecuaciones: $b_1 = A.\cos\phi$ y $b_2 = A.\text{sen}\phi$

Entonces podemos reescribir la ecuación diferencial, de modo que:

$$x_{(t)} = e^{-\beta.t}.\left[A.\cos\phi.\cos(\omega'.t) + A.sen\phi.sen(\omega'.t)\right]$$

$\boxed{x_{(t)} = e^{-\beta.t}.A.\cos(\omega'.t + \phi)}$. Ahora la amplitud será: $A' = e^{-\beta.t}.A$

Dejó de ser constante, disminuye con el tiempo con una amplitud que decae exponencialmente. $C_1 + C_2 = A.\cos\phi$ e $i.(C_1 - C_2) = A.\text{sen}\phi$



Gráfica N° 1

La amplitud de la oscilación decae lentamente. Este es el caso opuesto al anterior; lo obtenemos cuando el rozamiento es débil (incluyendo el caso en que no hay rozamiento). Este comportamiento se dice cuasiperiódico, porque no llega a repetirse (al completar una oscilación no se encuentra en la misma posición que al iniciarla). El cuasiperiodo es mayor que el del oscilador sin rozamiento, porque la fuerza que lo amortigua, frena la masa y la retarda.

$$\omega' \leq \omega \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{\omega'} \geq T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{siendo } \omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

Otra manera de expresar el efecto resistivo es mediante el tiempo transcurrido hasta que su amplitud decae desde su valor inicial A, hasta un valor: $A' = e^{-1}.A = 0{,}368.A$, fruto de reemplazar $e^{-\beta.\tau}$ por e^{-1} en la ecuación $A' = e^{-\beta.t}.A$. O sea cuando $-1 = -\beta.\tau \rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$.

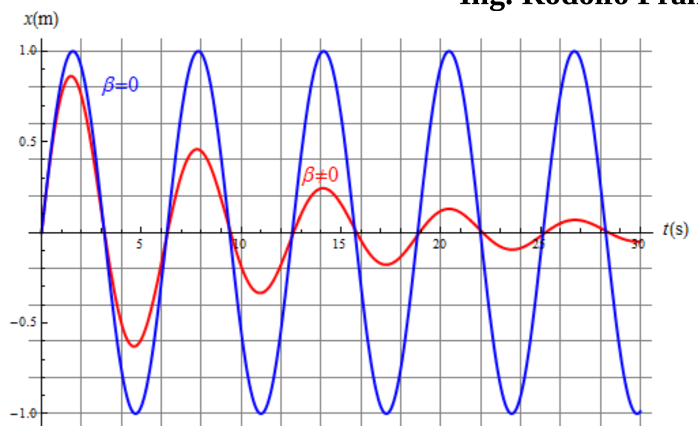
Ese tiempo es llamado vida media de la oscilación y es característico de todos los sistemas con comportamiento exponencial

Esta amplitud que se logra en un tiempo $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2.m}{b}$ se reduce en un factor e (a un 36.8% de la que tuviera).

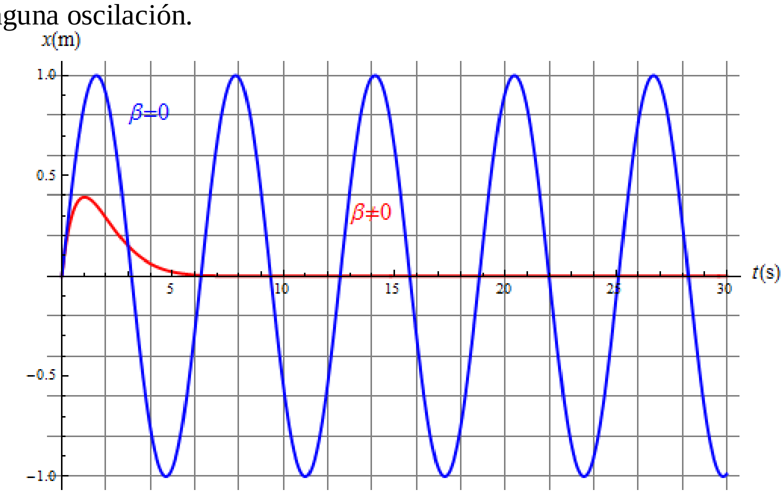
Medir el decaimiento natural en términos de la fracción e^{-1} del valor original es un procedimiento normal en Física. El tiempo para que el proceso natural de decaimiento llegue a cero es, por supuesto, teóricamente infinito.

Tenemos entonces dos escalas de tiempo: *T* nos mide el tiempo que tarda en oscilar, τ el tiempo que tarda en amortiguarse. El cociente adimensional: $\frac{\tau}{T} = \frac{\omega}{2.\pi.\beta}$ nos mide la importancia del amortiguamiento pues nos da el número de oscilaciones en un tiempo típico de decaimiento. Si este número es grande quiere decir que el oscilador es muy poco amortiguado.

Comparando las oscilaciones con y sin rozamiento vemos que si éste es pequeño se nota un cambio apreciable en la amplitud, pero muy pequeño en el periodo



Si el rozamiento es grande, de forma que $\beta \cong \omega$ el decaimiento es muy importante y el periodo de oscilación es tan largo que prácticamente la partícula no llega a realizar ninguna oscilación.



En el ejemplo de la figura (β = 0.9ω) el primer mínimo está por debajo del eje solo -0.0006 m y es inapreciable en la gráfica.

<u>Energía en un oscilador amortiguado</u>

Una de las consecuencias del amortiguamiento es la disipación de energía mecánica. Recordando el teorema del trabajo y la energía: $\delta W = dK$. Y la potencia:

$$P = \frac{dK}{dt} = P_{FC} + P_{FNC}$$

Sabiendo que la potencia de las fuerzas conservativas cumple: $P_{FC} = -\frac{dU}{dt}$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} + P_{FNC} \Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = P_{FNC} \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{d(K+U)}{dt} = P_{FNC}$$

Obtenemos la variación de energía mecánica. Que como podemos apreciar: *E(K+U)≠cte*, y nos dice; que la fuerza amortiguadora no es conservativa.

Calculemos la rapidez de cambio de la energía mecánica, derivando con respecto al tiempo:

$$E = \frac{1}{2}.m.v_x^2 + \frac{1}{2}.k.x^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = m.v_x.\frac{dv_x}{dt} + k.x.\frac{dx}{dt} \text{ siendo } a_x = \frac{dv_x}{dt} \text{ y } v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = v_x.(m.a_x + k.x) = v_x.(m.\ddot{x} + k.x)$$

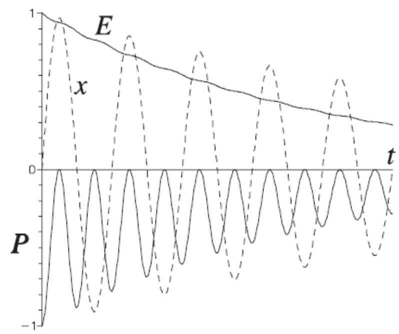
Comparando con la ecuación del oscilador armónico amortiguado:

$$m.\ddot{x}+b.\dot{x}+k.x=0 \;\therefore\; m.\ddot{x}+k.x = -b.\dot{x} \;\Rightarrow \frac{dE}{dt} = v_x.(-b.\dot{x}) = v_x.(-b.v_x) = -b.v_x^2$$

El negativo de v_x indica que conforme el cuerpo oscila la energía siempre disminuye, aunque no con una rapidez uniforme: $v_x.(-b.v_x) = v_x.F_x = P_{FNC}$

El producto: $v_x \,.\, F_x$, es la rapidez con que la fuerza amortiguadora efectúa trabajo (negativo) sobre el sistema (es decir la potencia amortiguadora, la de rozamiento).

En el caso del amortiguamiento débil, la energía disipada por unidad de tiempo será máxima cuando el oscilador adquiera su velocidad máxima, cosa que ocurre cuando está cerca (pero no exactamente) de la posición de equilibrio. Será nula cuando, en cada oscilación, el oscilador alcanza las posiciones de elongación máxima, ya que su velocidad es nula.



Calcularemos ahora el valor de la energía que se disipa en cada oscilación. A partir de la expresión correspondiente a la elongación:

$$x_{(t)} = e^{-\beta.t}.A.\cos(\omega'.t + \phi)$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$v_{(t)} = -A.\beta.e^{-\beta.t}.\cos(\omega'.t + \phi) - A.\omega'.e^{-\beta.t}.\mathrm{sen}(\omega'.t + \phi)$$

$$v_{(t)} = A.e^{-\beta.t}.(-1).\left[\beta.\cos(\omega'.t + \phi) + \omega'.\mathrm{sen}(\omega'.t + \phi)\right]$$

Reemplazando $x_{(t)}$ y $v_{(t)}$ en las ecuaciones de las energías cinética y potencial:

$$K = \frac{1}{2}.m.v_x^2 \;\; ; \qquad U = \frac{1}{2}.k.x^2 \qquad \text{tendremos:}$$

$$K = \frac{1}{2}.m.A^2.e^{-2.\beta.t}.(-1)^2.\left[\beta.\cos(\omega'.t + \phi) + \omega'.\mathrm{sen}(\omega'.t + \phi)\right]^2$$

El corchete es un binomio cuadrático; desarrollándolo:

$$\beta^2.\cos^2(\omega'.t + \phi) + 2.\beta.\omega'.\cos(\omega'\mathrm{t} + \phi).\mathrm{sen}(\omega'.t + \phi) + \omega'^2.sen^2(\omega'.t + \phi)$$

Incorporándolo a K:

$$K = \frac{1}{2}.m.A^2.e^{-2.\beta.t}\left[\beta^2.\cos^2(\omega'.t + \phi) + 2.\beta.\omega'.\cos(\omega'\mathrm{t} + \phi).\mathrm{sen}(\omega'.t + \phi) + \omega'^2.sen^2(\omega'.t + \phi)\right]$$

Recordando la identidad trigonométrica: sen $2.\alpha$ = 2.senα.cosα. Reemplazando en la igualdad anterior:

$$K = \frac{1}{2}.m.A^2.e^{-2.\beta.t}\left[\beta^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)+\omega'^2.sen^2(\omega'.t+\phi)\right]$$

La energía potencial, al remplazar $x_{(t)}$ queda:

$$U = \frac{1}{2}.k.A^2.e^{-2.\beta.t}.\cos^2(\omega'.t+\phi)$$

$$\text{con } k = \omega^2.m \Rightarrow U = \frac{1}{2}.\omega^2.m.A^2.e^{-2.\beta.t}.\cos^2(\omega'.t+\phi)$$

Si sumamos las energías→ *E(K+U)*.

$$\frac{1}{2}.m.A^2.e^{-2.\beta.t}\left[\beta^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)+\omega'^2.sen^2(\omega'.t+\phi)+\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)\right]$$

Si reemplazamos: $\beta^2 = \omega^2 - \omega'^2$, en el corchete:

$$\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)-\omega'^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)+\omega'^2.sen^2(\omega'.t+\phi)+\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)$$

$$2.\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)-\omega'^2.[\cos^2(\omega'.t+\phi)-sen^2(\omega'.t+\phi)]+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)$$

$$2.\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)-\omega'^2.\{\cos^2(\omega'.t+\phi)-[1-\cos^2(\omega'.t+\phi)]\}+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)$$

$$2.\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)-\omega'^2.[-1+2\cos^2(\omega'.t+\phi)]+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)$$

$$2.\omega^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\omega'^2-2.\omega'^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)$$

$$\omega'^2+2.\left(\omega^2-\omega'^2\right).\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi) = \omega'^2+2.\beta^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.\mathrm{sen}2.(\omega'.t+\phi)$$

Quedando la expresión de E:

$$E = \frac{1}{2}.m.A^2.e^{-2.\beta.t}.[\omega'^2+2.\beta^2.\cos^2(\omega'.t+\phi)+\beta.\omega'.sen2.(\omega'.t+\phi)]$$

Despreciando el término β^2, porque el amortiguamiento es débil: $\beta < \omega$.

$$E = \frac{1}{2}.m.A^2.e^{-2.\beta.t}.\omega'^2[1+\frac{\beta}{\omega'}.sen2.(\omega'.t+\phi)]$$

La energía decrece exponencialmente con el tiempo, pero con una pequeña ondulación debida al segundo término entre paréntesis, tal como apreciamos en la figura anterior.

Los picos de la gráfica N° 1 de posición en función del tiempo para oscilaciones subamortiguadas representan tiempos en donde $\cos\left(\omega'.t+\phi\right)=1$

Como sabemos son los puntos de retorno en el movimiento donde la velocidad es cero.

En esos momentos la energía del oscilador es toda energía potencial.

$$E = U = \frac{1}{2}.k.x^2 = \frac{1}{2}.k.A^2.e^{-2.\beta.t}$$

$$\text{Siendo } \beta = \frac{1}{\tau} \Rightarrow E_{(t)} = \frac{1}{2}.K.A^2.e^{-2.\frac{t}{\tau}} = E_i.e^{-2.\frac{t}{\tau}}$$

La energía mecánica del oscilador disminuye exponencialmente con el tiempo con el doble de la rapidez que la amplitud.

La energía mecánica cae a 1/e de su valor inicial en un tiempo τ/2.

<u>Oscilaciones forzadas</u>

Un oscilador amortiguado aislado dejará de moverse en el transcurso del tiempo.

Podemos mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza externa que varía con el tiempo periódica o cíclicamente, con frecuencia angular ω_d (drive: impulsora) que haga trabajo positivo en el sistema.

Consideraremos el caso de que la fuerza aplicada oscile sinusoidalmente:

$F_x(t) = F_{máx.}.\cos\omega_d.t$, con $F_{máx}$ constante y ω_d variable.

La ecuación de movimiento de un oscilador forzado se deduce aplicando la segunda Ley de Newton:

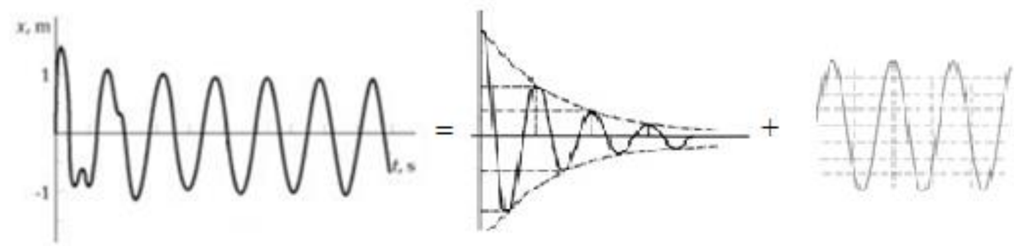
$$\Sigma F_x = -k.x - b.v_x + F_{máx.}.\cos\omega_d.t = m.a_x$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + b.\frac{dx}{dt} + k.x = F_{máx.}.\cos\omega_d.t \qquad (7)$$

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal y no homogénea.

El lado izquierdo depende de la variable x y el derecho no.

La solución general que esta graficada abajo muestra que al principio el movimiento queda dominado por términos transitorios de vida breve que se extinguen en un tiempo característico del valor de τ, cuando se alcanza el estado estacionario implica que la frecuencia de la masa coincide con ω_d de la fuerza impulsora.



Eso se debe a la combinación de dos estados; uno transitorio debido a la oscilación amortiguada con $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, cuya frecuencia natural ω es fija, suponiendo que su amortiguamiento β es tan pequeño que no modifica la frecuencia natural en forma considerable; más un estado estacionario provocado por la fuerza impulsora, que asemeja un M.A.S de frecuencia angular ω_d.

Como ya vimos la solución de la ecuación diferencial homogénea $\ddot{x} + \frac{b}{m}.\dot{x} + \frac{k}{m}.x = 0$ es $x_{(t)} = e^{-\beta.t}.A.\cos(\omega'.t + \phi)$. Sumada ahora a la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (7): $x = A_d.sen(\omega_d.t - \delta)$

Donde A y ϕ son constantes que dependen de las condiciones iniciales pero A_d y δ no dependen de las condiciones iniciales; A_d depende de la relación entre la frecuencia natural y la fuerza aplicada, δ es el desfasaje con la fuerza aplicada (que no tiene por qué ser nulo; el que oscile con la misma frecuencia no quiere decir que esté sincronizado, puede ocurrir que cuando la fuerza sea máxima el desplazamiento sea nulo, por ejemplo). Como se dijo la amplitud y el desfase pueden cambiar mucho según sea la frecuencia de la fuerza aplicada, aunque esta sea siempre de la misma intensidad.

Calculemos δ y A_d:

$$x = A_d.sen(\omega_d.t - \delta)$$

$$x = A_d.(sen\omega_d.t.\cos\delta - \cos\omega_d.t.sen\delta)$$

$$\frac{dx}{dt} = A_d.\omega_d.\cos(\omega_d.t - \delta)$$
$$\frac{dx}{dt} = A_d.\omega_d.(\cos\omega_d.t.\cos\delta + sen\omega_d.t.sen\delta)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A_d.\omega_d^2.sen(\omega_d.t - \delta)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A_d.\omega_d^2.(sen\omega_d.t.\cos\delta - \cos\omega_d.t.sen\delta)$$

Reemplazando en (7):

$$m.A_d.(-\omega_d^2).(sen\omega_d.t.\cos\delta - \cos\omega_d.t.sen\delta) + b.A_d.\omega_d.(\cos\omega_d.t.\cos\delta + sen\omega_d.t.sen\delta) +$$
$$+ k.A_d.(sen\omega_d.t.\cos\delta - \cos\omega_d.t.sen\delta) = F_{máx.}\cos\omega_d.t$$
$$- m.A_d.\omega_d^2.sen\omega_d.t.\cos\delta + m.A_d.\omega_d^2\cos\omega_d.t.sen\delta + b.A_d.\omega_d.\cos\omega_d.t.\cos\delta + b.A_d.\omega_d sen\omega_d.t.sen\delta +$$
$$+ k.A_d.sen\omega_d.t.\cos\delta - k.A_d.\cos\omega_d.t.sen\delta - F_{máx.}\cos\omega_d.t = 0$$
$$[(-m.A.\omega_d^2 + k.A_d).\cos\delta + b.\omega_d.A_d.sen\delta].sen\omega_d.t +$$
$$+[(m.A_d.\omega_d^2 - k.A_d).sen\delta + b.A_d.\omega_d.\cos\delta - F_{máx.}].\cos\omega_d.t = 0$$
$$[(-m.\omega_d^2 + k).\cos\delta + b.\omega_d.sen\delta].sen\omega_d.t +$$
$$+[(m.\omega_d^2 - k).sen\delta + b.\omega_d.\cos\delta - \frac{F_{máx.}}{A_d}].\cos\omega_d.t = 0 \qquad (8)$$

Esta ecuación debe cumplirse en cada instante:

a) En $t = \dfrac{\pi}{2.\omega_d} \Rightarrow \cos\omega_d.t = \cos\omega_d.\left(\dfrac{\pi}{2.\omega_d}\right) = 0$ y $sen\omega_d.t = 1$

Para satisfacer la ecuación (8), se anularía el primer corchete:

$$(-m.\omega_d^2 + k).\cos\delta + b.\omega_d.sen\delta = 0 \Rightarrow (-m.\omega_d^2 + k).\cos\delta = -b.\omega_d.sen\delta$$

$$\frac{-m.\omega_d^2 + k}{-b.\omega_d} = \frac{sen\delta}{\cos\delta} = tg\delta = \frac{m.\omega_d^2 - k}{b.\omega_d}$$

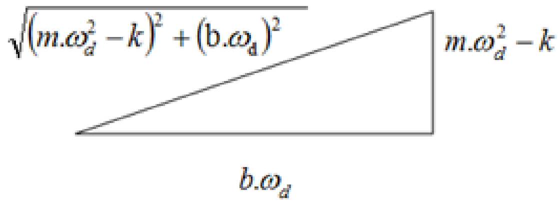
$$\delta = arc.tg\left(\frac{m.\omega_d^2 - k}{b.\omega_d}\right)$$

b) En $t = 0 \Rightarrow sen\omega_d.t = 0$ y $\cos\omega_d.t = 1$

Se anularía ahora el segundo corchete para satisfacer la ecuación (8):

$$(m.\omega_d^2 - k).sen\delta + b.\omega_d.\cos\delta - \frac{F_{máx.}}{A_d} = 0$$

$$(m.\omega_d^2 - k).sen\delta + b.\omega_d.\cos\delta = \frac{F_{máx.}}{A_d} \qquad (9)$$



$$sen\delta = \frac{m.\omega_d^2 - k}{\sqrt{(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2}} \quad ; \quad \cos\delta = \frac{b.\omega_d}{\sqrt{(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2}}$$

Reemplazando en (9):

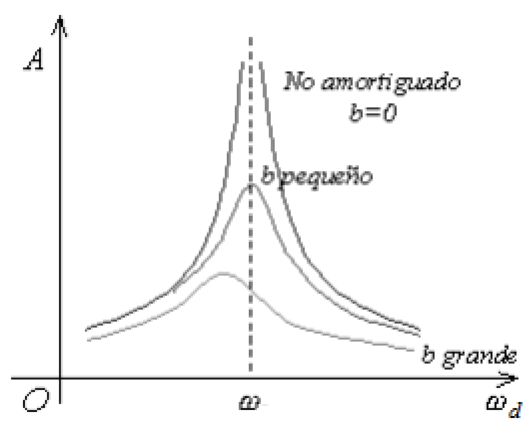
$$\frac{F_{máx.}}{A_d} = \frac{(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2}{\sqrt{(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2}} = \left[(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2\right]^{1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$$

$$A_d = \frac{F_{máx.}}{\sqrt{(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2}}$$

Y sustituyendo en: $x = A_d.sen(\omega_d.t - \delta)$

$$x = \frac{F_{máx.}}{\sqrt{(m.\omega_d^2 - k)^2 + b^2.\omega_d^2}}.sen(\omega_d.t - \delta)$$

En la figura se muestra la respuesta de la amplitud de la oscilación forzada, en el estado estacionario, en función de la frecuencia ω_d.



Las tres curvas corresponden a diversos niveles de amortiguamiento.

La curva más pronunciada se debe a un amortiguamiento pequeño ($b>0$), donde la oscilación forzada alcanza su máxima amplitud de desplazamiento si la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural.

En el caso ideal que no exista rozamiento ($b=0$), la amplitud de la oscilación forzada se hace muy grande, tiende a infinito, cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω_d se hace próxima a la frecuencia propia del oscilador ω.

A este estado se lo conoce como resonancia y a la frecuencia correspondiente ω_d, como frecuencia angular resonante.

$\omega_d = \omega$ (condición de resonancia)

La característica esencial del estado estacionario, es que la velocidad de la partícula $v_x = \frac{dx}{dt} = -A_d.\omega_d.\cos(\omega.t - \delta)$ está en fase *δ=0* con la fuerza oscilante (cuando $\omega_d = \omega$), o sea cuando la velocidad alcanza su mayor nivel.

En el amortiguamiento máximo (*b* grande), la frecuencia resonante queda un poco desplazada de la frecuencia natural.

En conclusión en estado estacionario, la rapidez con que la fuerza impulsora suministra energía equivale exactamente a la rapidez con que la fuerza amortiguadora disipa energía. En efecto, el oscilador transfiere energía de la fuerza impulsora externa al medio amortiguador; el oscilador no recibe un incremento neto de energía.

<u>Bibliografía</u>

1.- Física Universitaria. Volumen 1 y 2- 12ª edición. Young-Freedman.2009.-
2.- Física- Volumen I – II, Resnick, R. Halliday, D. & Kr
ane, K. 2004, C.E.C.S.A.-
4.- Física - Tomo I – II, Serway – Jewett. Thompson 2005.
5.- Física para la Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología Vol 1A y C, Tippler,Mosca, 2005.
6.- Física. Alonso M. & Finn E. 1995, Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid.
7.- Serway – Jewett - Soutas Little – Inman - Balint Física e Ingeniería Mecánica CENGAGE Learning 2010.
8.- Tippens Física: Conceptos y aplicaciones Mc Graw Hill 2005
9.-https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_arm%C3%B3nico_simple
10.-https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_simple
11.- https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_f%C3%ADsico
12.- http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_amortiguadas_y_forzadas_(CMR)