Análisis Matemático I
Clase 16: método de sustitución. Área entre curvas

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2020

Método de sustitución para calcular integrales

En esta clase, estudiaremos un primer método para calcular antiderivadas de funciones relacionado a la operación de composición. Otros métodos relacionados al cálculo de antiderivadas para productos y cocientes de funciones serán analizados en clases posteriores.

Método de sustitución para calcular integrales

Supongamos que queremos calcular:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

Método de sustitución para calcular integrales

Supongamos que queremos calcular:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

cambiando variables, elegimos $u = g(x)$ y entonces $du = g'(x)dx$.
Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int f(u)du$$

que es mucho más simple que la integral original. Este método se denomina método de sustitución:

Fórmula de sustitución

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$. Supongamos además que g' es continua en $[a, b]$. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = .$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)dx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 + x$.

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 + x$. Luego, elegimos $u = x^3 + x$ y entonces $du = (3x^2 + 1)dx$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C.$$

Como nuestro integrando original depende de x, reemplazamos u por $x^3 + x$:

$$\int (x^3 + x)^5 (3x^2 + 1) dx = \frac{(x^3 + x)^6}{6} + C.$$

Método de sustitución para calcular integrales

Ejemplos. Calcule:

$$\int (2x^2 - 1)xdx = .$$

Solución: observar que la integral anterior es similar a una de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

donde $f(x) = x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$.Elegimos

$$u = 2x^2 - 1$$

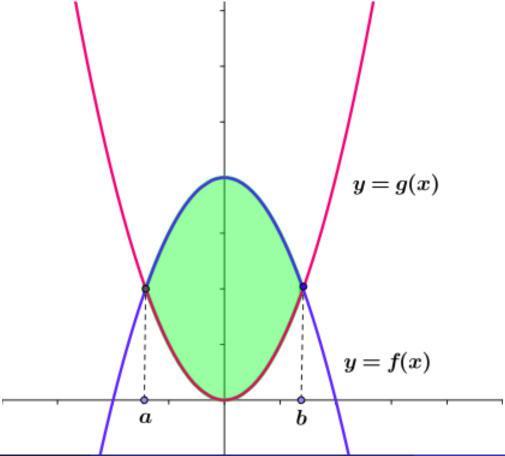
y entonces

$$du = 4xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{4}du.$$

Sustituyendo:

$$\int (2x^2 - 1)xdx = \frac{1}{4}\int udu = \frac{u^2}{8} + C = \frac{(2x^2-1)^2}{8} + C.$$

Problema: Considere dos funciones continuas f y g en $[a, b]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$. Se desea determinar el área de la región comprendida entre los gráficos de $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$:



Cálculo de áreas entre curvas

Para calcular el área buscada, vamos a aproximar la región de interés mediante rectángulos. Así, tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y elegimos puntos:

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$

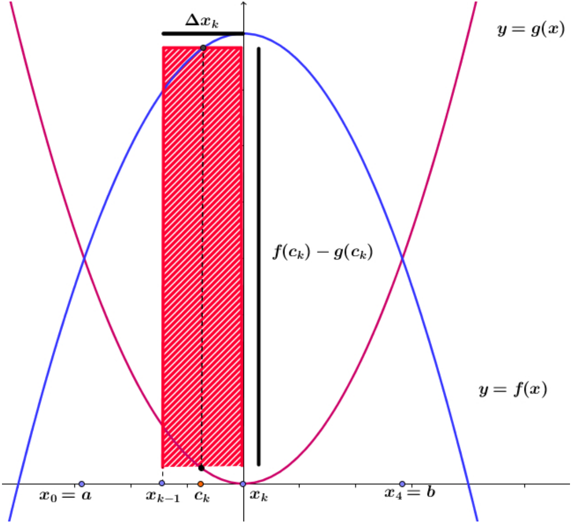
$$c_2 \in [x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

para construir los rectángulos.

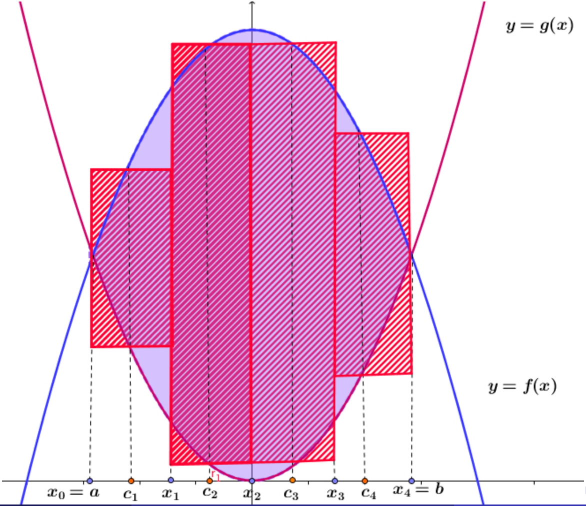
En el siguiente gráfico se puede ver la construcción de un rectángulo genérico de aproximación con su base y altura:



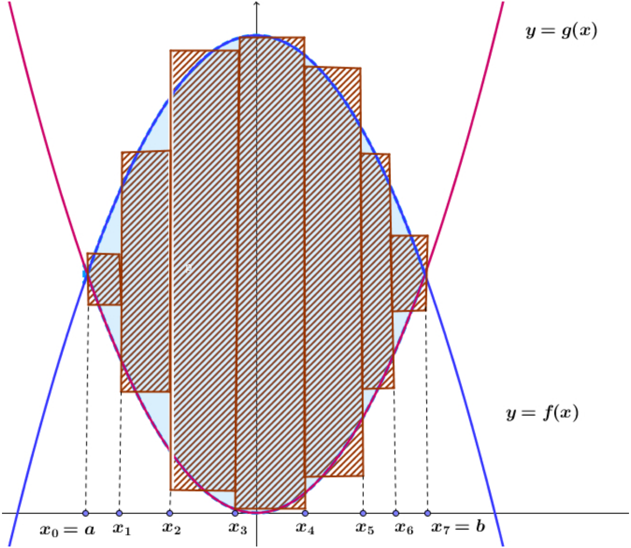
Observando la figura anterior obtenemos que el área ΔA_k del rectángulo genérico es:

$$\Delta A_k = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k.$$

A continuación se visualiza el procedimiento de aproximación con $n = 4$:



Aumentando la cantidad de rectángulos y haciendo que sus bases sean todas cada vez más finas se obtiene una mejor aproximación.



Cálculo de áreas entre curvas

Luego, una aproximación del área de la región considerada viene dada por la suma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k.$$

Cuando $||P||$ tiende a cero, la suma anterior tiende a:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

ya que ambas funciones son continuas en $[a, b]$.

Así, tenemos la siguiente definición inspirada en el procedimiento anterior.

Definición

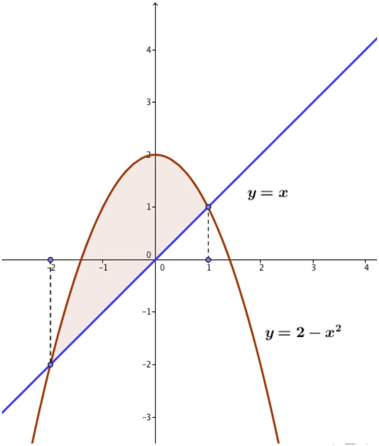
Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ tales que:

$$f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Entonces, el área de la región comprendida entre el gráfico de ambas funciones y las rectas $x = a$ y $x = b$ es:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Ejemplo: calcule el área comprendida entre los gráficos de las funciones $g(x) = x$ y $f(x) = 2 - x^2$.
Para calcular el área buscada, realizamos un gráfico de ambas funciones para determinar cuál de las dos es mayor a la otra.



En este caso:

$$g(x) \leq f(x) \quad \text{ para todo } x \in [-2, 1].$$

Por ende, el área es:

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^{1} [2 - x^2 - x] dx = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo: determine el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^4 - 2x^2$.
Para calcular el área, no vamos a graficar. Primero determinados los puntos de intersección de las curvas:

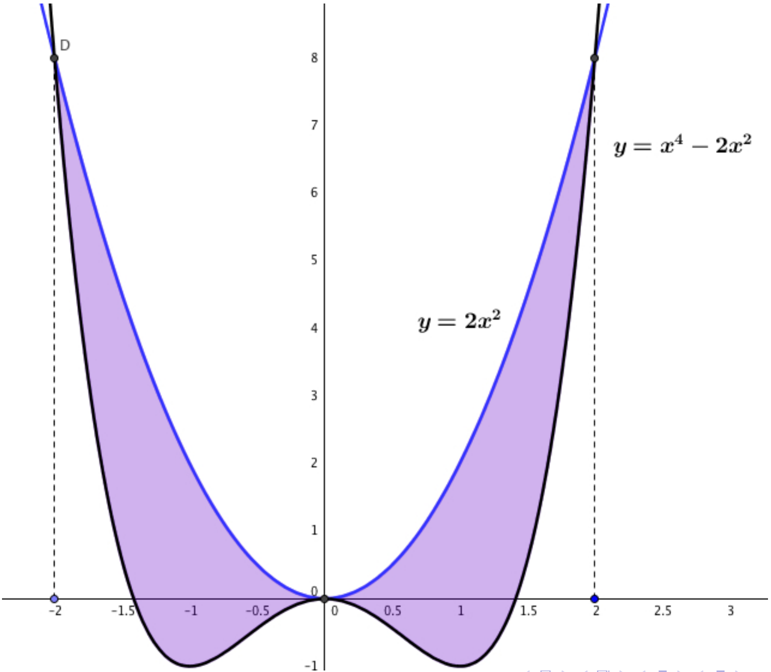
$$x^4 - 2x^2 = 2x^2$$

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

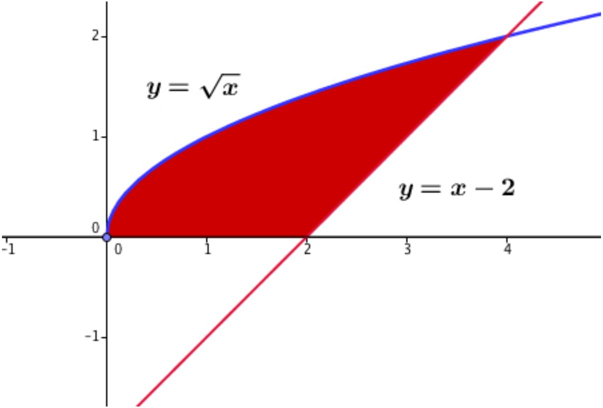
Así, las soluciones son $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -2$. Quedan determinados dos intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$. Como no sabemos cuál de las funciones es mayor en dichos intervalos para calcular el área comprendida entre los gráficos vamos a utilizar valor absoluto:

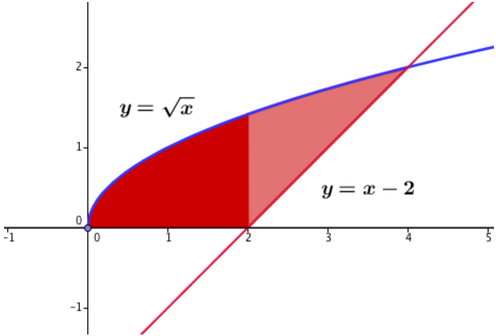
$$A = \left| \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx \right| + \left| \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx \right| = \frac{128}{15}$$


D
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$y = x^4 - 2x^2$
$y = 2x^2$

Ejemplo: Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la función $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.

Ejemplo: Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la función $y = \sqrt{x}$, y por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.





Para resolver el ejemplo anterior,podemos plantear dos integrales:

$$A = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right]\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]\Big|_2^4$$

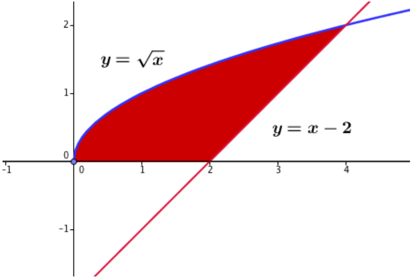
$$= \frac{10}{3}.$$

En ejemplo anterior, calcular el área requirió escribir dos integrales. Sin embargo, la resolución puede simplificarse si se trabaja con funciones en términos de la variable y.

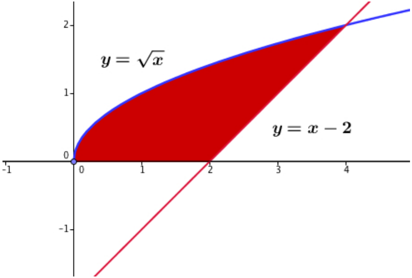
Cálculo de áreas para funciones de y

Si ahora las curvas se dan como funciones de y: $x = f(y)$, $x = g(y)$, $g(y) \leq f(y)$ en $[c, d]$, entonces el área de la región comprendida entre las curvas y las rectas $y = c$, $y = d$ es:

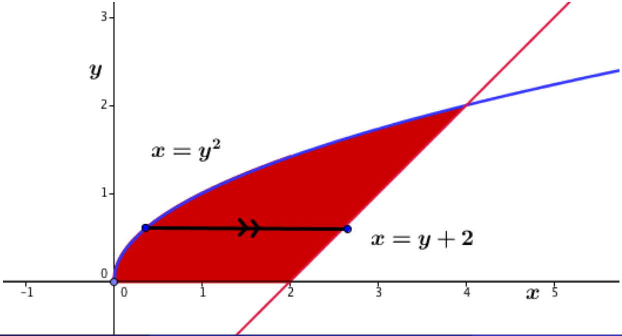
$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$



En términos de y:



En términos de y:



Luego:

$$A = \int_0^2 \left(y + 2 - y^2\right)\, dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}.$$