Análisis Matemático I
Clase 12: concavidad. Puntos de inflexión. Trazado de gráficas.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2020

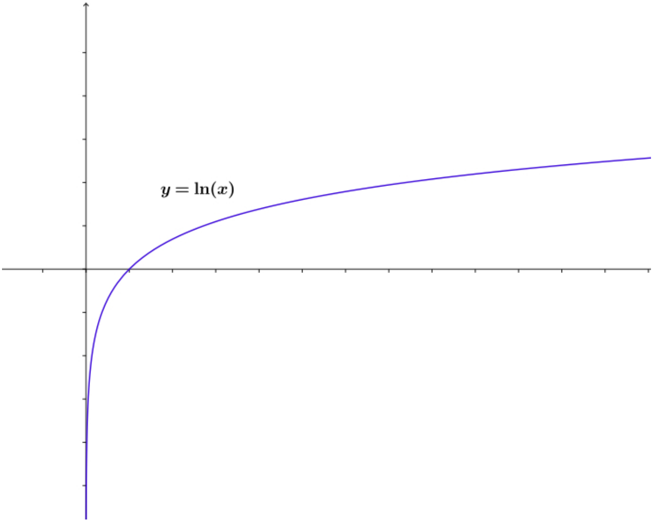
Uso de la primera derivada

Recordar: la primera derivada de una función nos sirve para:

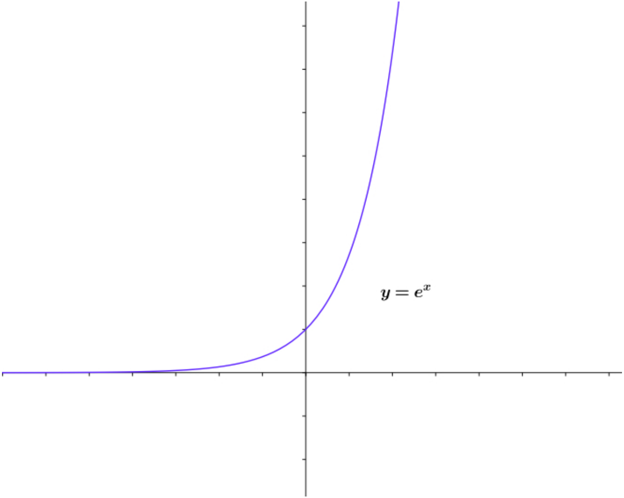
- determinar los intervalos donde la función crece y/o decrece.
- decidir si en un determinado punto crítico se tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos.

Concavidad

Para introducir el concepto de concavidad de funciones, vamos a comenzar observando las siguientes gráficas:



Concavidad

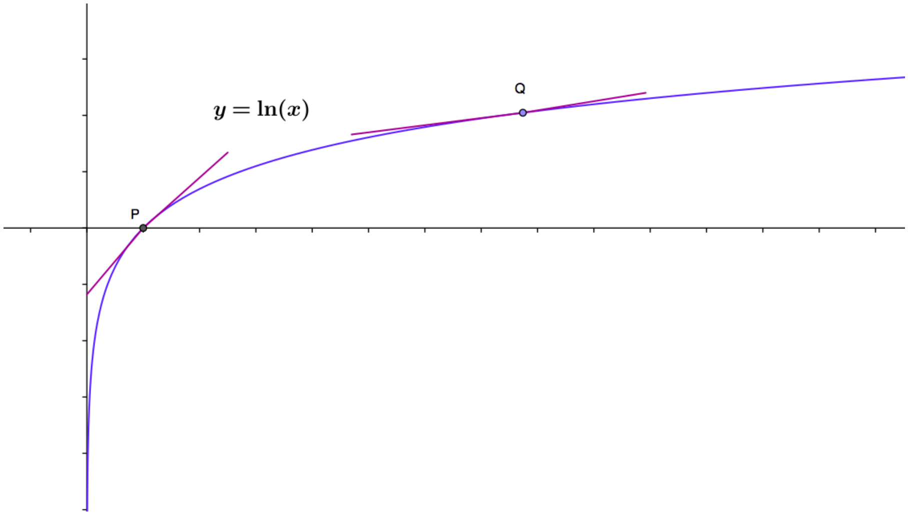


Concavidad

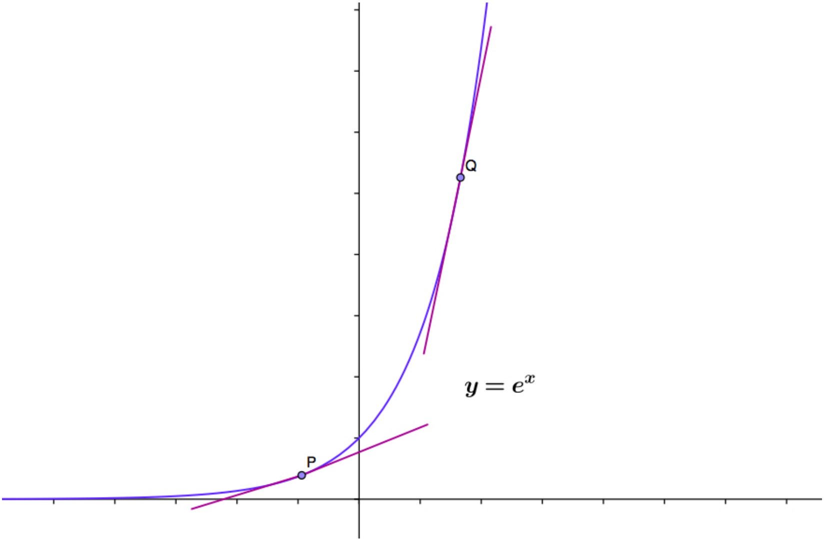
Tanto la función logarítmica como la exponencial son funciones crecientes. Sin embargo, la función $y = \ln(x)$ **desacelera** su crecimiento a medida que x aumenta, mientras que $y = e^x$ **acelera** su crecimiento cuando nos movemos en la dirección de las x positivas. En ambos casos las derivadas son positivas, pero no permiten distinguir el **ritmo** de crecimiento (o decrecimiento) de una función. Veremos que esta distinción la brinda la derivada segunda.

Comencemos trazando algunas rectas tangentes a las funciones logarítmica y exponencial.

En el caso de $y = \ln(x)$, se observa a partir de la comparación de las pendientes de las rectas tangentes en P y Q que a medida que x aumenta, la derivada de $y = \ln(x)$ decrece.



Por otro lado, en el caso de $y = e^x$, se deduce que la derivada de la función exponencial es creciente.



Concavidad

Concavidad: el comportamiento de la derivada de una función (en cuanto a si es creciente o decreciente) nos indica si la gráfica se *curva* hacia arriba o hacia abajo. Definimos entonces el concepto de concavidad como sigue:

Definición de Concavidad

Sea f una función derivable en (a, b). Tenemos:

- si f' es creciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia arriba en (a, b),
- si f' es decreciente en (a, b), entonces decimos que f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Concavidad

Criterio de la segunda derivada para concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en (a, b), Entonces:

- Si $f'' > 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
- Si $f'' < 0$ en el intervalo (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Observación: la notación f'' indica derivada segunda de f. Otras formas de escribir la derivada segunda son:

$$y'' \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Concavidad: ejemplo

Dado que para determinar los intervalos de concavidad de una función f se deben analizar los signos de f'', tenemos que encontrar los puntos alrededor de los cuales f'' cambia de signo. Estos puntos se localizan en:

- los puntos interiores del dominio de f donde f'' es cero o no existe;
- los puntos de discontinuidad de f;
- los extremos o *bordes* del dominio.

Ejemplo: determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la función:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}.$$

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los unicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f' es cero o no existe.

Concavidad: ejemplo

Solución: observar que el dominio de f es $\mathbb{R}$, por ende no hay puntos *borde* para el dominio. También, f es continua en $\mathbb{R}$ pues es función racional y no hay ningún x que anule el denominador. Así, los unicos puntos a considerar para obtener los intervalos de concavidad son los puntos donde f' es cero o no existe. Calculamos f'':

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x.2(x^2+3).2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

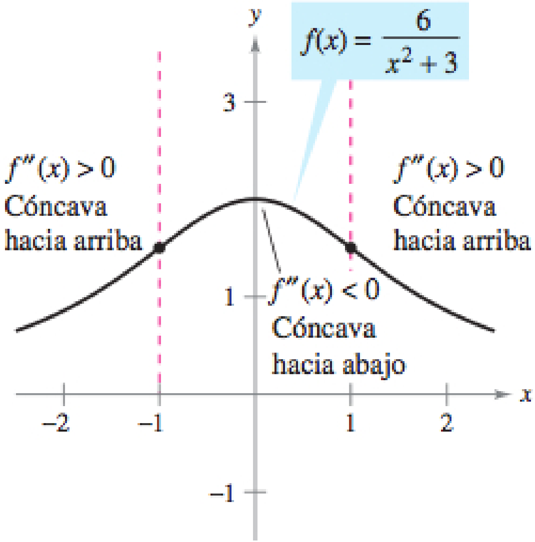
Observar que f'' siempre existe. Luego los únicos puntos de interés son aquellos donde:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 1, -1.$$

Construimos una tabla con los intervalos definidos por 1 y -1:

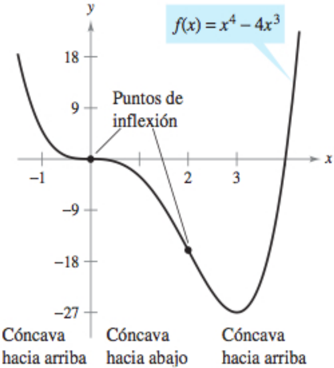
intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
punto muesta	-2	0	2
signo de f''	$+$	-	$+$
Conclusión	Conc. hacia arriba	Conc. hacia abajo	Conc. hacia arriba

Concavidad: ejemplo



Punto de inflexión

Sea f una función continua en (a, b) y sea c un punto de ese intervalo. Decimos que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f si es posible trazar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$, y si la gráfica de f cambia de concavidad en $(c, f(c))$.



Punto de inflexión

El siguiente teorema nos dice dónde se deben buscar los puntos de inflexión:

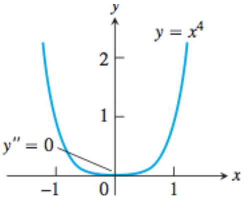
Teorema

En un punto de inflexión $(c, f(c))$, o bien $f''(c)$ no existe, o bien $f''(c) = 0$.

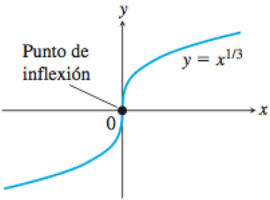
PRECAUCIÓN: NO SIEMPRE QUE $f''(c) = 0$, TENEMOS UN PUNTO DE INFLEXIÓN. TAMBIÉN, NO SIEMPRE QUE $f''(c)$ NO EXISTA HAY UN PUNTO DE INFLEXIÓN. Ver ejemplos en las próximas dos diapositivas.

Punto de inflexión

- **Un ejemplo donde** $f''(0) = 0$ **pero** $(0, f(0))$ **no es punto de inflexión.**

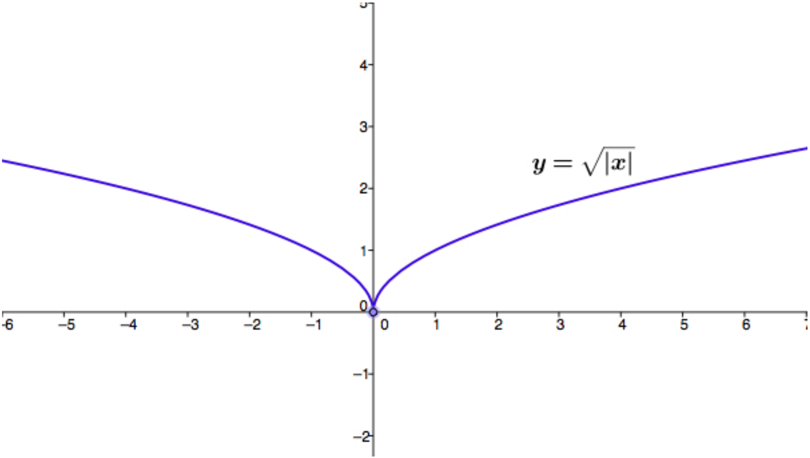


- **Un ejemplo donde** $f''(0)$ **no existe y** $(0, f(0))$ **es punto de inflexión.**



Puntos de inflexión

· **Un ejemplo donde $f''(0)$ no existe y $(0, f(0))$ no es punto de inflexión.**



Ejemplo: $f(x) = x^{5/3}$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} \text{ y } f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}.$$

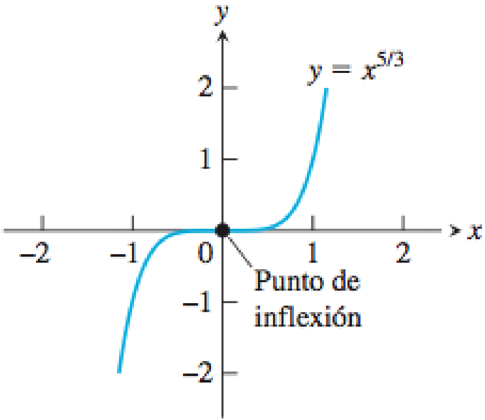
Observar que f'' no existe en $x = 0$. **No hay puntos donde f'' sea cero**. Así, $(0, f(0))$ es candidato a ser punto de inflexión. Observar que:

$$f''(x) < 0 \text{ cuando } x < 0 \rightarrow \ f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 0).$$

$$f''(x) > 0 \text{ cuando } x > 0 \rightarrow \ f \text{ es cóncava hacia arriba en } (0, +\infty).$$

Hay cambio de concavidad en $(0, f(0))$ y además, es posible trazar la recta tangente en ese punto ya que $f'(0) = 0$. **Luego, $(0, f(0))$ es un punto de inflexión.**

Puntos de inflexión



Criterio de la derivada segunda para extremos

Criterio de la derivada segunda para extremos

Supongamos que f es una función tal que f'' es continua en (a, b) y que $f'(c) = 0$ para algún c en (a, b). Entonces:

- Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.
- Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
- Si $f''(c) = 0$, entonces f puede tener un máximo local en c, un mínimo local en c, o ninguno de éstos.

El criterio de la derivada segunda para extremos se ejemplificará en la próxima clase en el contexto de problemas de optimización.

Trazado de gráficas de funciones

Resumen:

- **Límites:** permiten determinar:
  - Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
  - Regiones donde la función es continua.
  - Discontinuidades y el tipo de discontinuidad.
- **Primera derivada:** permite determinar:
  - regiones donde la función crece y/o decrece.
  - máximos o mínimos locales de la función.
- **Segunda derivada:** permite detectar:
  - Concavidad hacia arriba o hacia abajo.
  - Puntos de inflexión.
  - máximos y mínimos locales.

Trazado de gráficas de funciones

Procedimiento para trazar la gráfica de una función $y = f(x)$:

1. Determine el dominio de f, si f es par o impar, y las intersecciones con los ejes coordenados.
2. Determine las asíntotas de la función (verticales, horizontales y oblicuas).
3. Encuentre las discontinuidades de f y clasifíquelas.
4. Calcule la derivada primera.
5. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
6. Usando la información anterior, determine dónde f tiene máximos o mínimos locales.
7. Encuentre la derivada segunda.
8. Determine dónde $f'' = 0$ y dónde f'' no existe, y localice los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
9. Localice los puntos de inflexión de f.
10. Esboce la gráfica de f.

Trazado de gráficas de funciones

Ejemplo: aplique el procedimiento anterior para trazar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9}.$$

Análisis:

- **Dominio:** f no está definida en los x tales que:

$$x^2 - 9 = 0.$$

  Luego:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

- **Simetría:** Observar que f es par:

$$f(-x) = \frac{2((-x)^2 - 4)}{(-x)^2 - 9} = f(x).$$

- **Intersecciones con los ejes coordenados:** con el eje x:

$$\frac{2(x^2-4)}{x^2-9}=0,$$

así:

$$x=2, \qquad x=-2.$$

Intersecciones con el eje x: $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Con el eje y: ponemos $x=0$ y obtenemos:

$$y=\frac{8}{9}.$$

Así: la intersección con el eje y es: $(0,8/9)$.

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-4)}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=2.$$

- **Asíntotas Horizontales:**
  Así, $y = 2$ es una asíntota horizontal. De forma similar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = 2.$$

- **Asíntota vertical:** el denominador se anula en $x = 3$ y en $x = -3$. Analizamos el comportamiento de f en ambos puntos.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty.$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = \infty, \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x^2 - 9} = -\infty.$$

  Así, $x = 3$ y $x = -3$ son asíntotas verticales de f.

- **Discontinuidades de f:** la función es discontinua en $x = -3$ y en $x = 3$, y presenta, en ambos casos, discontinuidades esenciales.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** calculamos f':

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-9) - 2(x^2-4)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}.$$

Puntos críticos de f: en $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$. Obtenemos cuatro intervalos a analizar:

$$(-\infty, -3),\ (-3, 0),\ (0, 3),\ (3, \infty).$$

Analizamos el signo de f' en cada subintervalo:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
punto muestra	-4	-1	1	4
signo de f'	$+$	$+$	-	-
conclusión	creciente	creciente	decreciente	decreciente

- **Extremos relativos de f:** en base a la tabla, f tiene un máximo local en $x = 0$.
- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** determinamos la deriva segunda:

$$f''(x) = \frac{-20(x^2-9)^2 - (-20x)(2(x^2-9)2x)}{(x^2-9)^4} = \frac{60x^2+180}{(x^2-9)^3}.$$

Observar que f'' no existe en $x = -3$ y $x = 3$. No hay puntos donde f'' sea cero. Luego, los intervalos a analizar son:

$$(-\infty, -3), \ (-3, 3), \ (3, \infty).$$

- **Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo:** obtenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
punto muestra	-4	0	4
signo de f''	$+$	-	$+$
conclusión	cónc. arriba	conc. abajo	conc. arriba

- **Puntos de inflexión:** basados en la tabla anterior,los canditados a ser puntos de inflexión son $(-3, f(-3))$ y $(3, f(3))$. Sin embargo, como f no está definida en -3 y en 3, concluimos que no hay puntos de inflexión.
- **Graficar**.

Trazado de gráficas de funciones