EJERCICIOS DE REPASO: Planos – Rectas - Circunferencias

Ejercicio 1

Dadas las siguientes rectas: L_1: (x, y, z) = (-2, 0, 3) + γ (2, 0, 2) $\gamma \in \Re$
L_2: (x, y, z) = (4, 10, 1) + β (-1, 0, 3) $\beta \in \Re$

a) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son secantes, paralelas, coincidentes o alabeadas.
b) Determine, según corresponda, la distancia entre las rectas dadas L_1 y L_2 o el punto de intersección entre las dos rectas dadas.
c) Calcule el ángulo que forma la recta L_2 con el plano xy.

Resolución del Ejercicio 1

a) $L_1:\ (x,y,z)=(-2,0,3)+\gamma(2,0,2) \quad \gamma \in R \qquad \vec{d}_{L1}=(2,0,2) \qquad \vec{d}_{L2}=(-1,0,3)$

$\mathrm{L}_2:\ (x,y,z)=(4,10,1)+\beta(-1,0,3) \quad \beta \in R$

$\overrightarrow{P_1P_2}=(6,10,-2)$

$$\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(0,-8,0)$$

$$(\vec{\mathrm{d}}_{L1}\wedge\vec{\mathrm{d}}_{L2}).\overrightarrow{P_1P_2}=(0,-8,0).(6,10,-2)=-80$$

El producto mixto $(\vec{\mathrm{d}}_{L1}\wedge\vec{\mathrm{d}}_{L2}).\overrightarrow{P_1P_2}$ es no nulo, implica los vectores no son coplanares. Por lo tanto las rectas L_1 y L_2 son alabeadas

Otra forma de evaluar el producto mixto:

$$(\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2})\,\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 10 & -2 \end{vmatrix}=-80$$

b) Calculamos la distancia entre las rectas dadas L_1 y L_2

$$h=\frac{\left|(\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2})\,\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left\|(\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2})\right\|}$$

$\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2}=(0,-8,0) \qquad \|\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2}\|=8 \quad ; \quad (\vec{\mathrm{d}}_{L1}\wedge\vec{\mathrm{d}}_{L2}).\overrightarrow{P_1P_2}=-80$

$$h=\frac{\left|(\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2})\,\overrightarrow{P_1P_2}\right|}{\left\|(\vec{d}_{L1}\wedge\vec{d}_{L2})\right\|}=\frac{|-80|}{8}=10 \qquad \boxed{h=10\ [\mathrm{L}]}$$

c) Ángulo que forma la recta L_2 con el plano *xy*

$\vec{d}_{L2}=(-1,0,3) \qquad \vec{n}_{\pi xy}=(0,0,1)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{\mathrm{d}}_{L2}\,.\,\vec{\mathrm{n}}_{\pi xy}}{\|\vec{\mathrm{d}}_{L2}\|\|\vec{\mathrm{n}}_{\pi xy}\|}=\frac{(-1,0,3).(0,0,1)}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

θ = 18°26’06”

α = 90°- θ $\qquad \alpha$ = 90°-18°26’06” = 71°33’54.18” $\qquad \boxed{\alpha = 71°33’54.18”}$

Ejercicio 2

Dados los planos: π_1: $2x + z = 0$; π_2: $x - 2z + 5 = 0$

a) Escriba la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de los dos planos dados.
b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de los dos planos dados.
c) Halle la ecuación del plano π_3 que pasa por la intersección de los dos planos dados y además es paralelo al vector **u** = (1, 1, 1).

Resolución del Ejercicio 2

π_1: $2x + z = 0$

π_2: $x - 2z + 5 = 0$

a) $(2x + z) + k\,(x - 2z + 5) = 0$ $\quad k \in \mathbf{R}$

b) Ecuación vectorial paramétrica de la recta intersección de los dos planos dados

$\vec{n}_{\pi 1} = (2,0,1)$ $\quad \vec{n}_{\pi 2} = (1,0,-2)$

Luego evaluamos el vector director de la recta intersección de los dos planos dados:

$$\vec{d}_L = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0,5,0)$$

$Q \in \begin{Bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{Bmatrix}$ $\quad z = -2x \quad x + 4x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad z = 2$ Elegimos y

$= 2$ y obtenemos: $Q(-1, 2, 2)$

$$\boxed{L: (x, y, z) = (-1, 2, 2) + \lambda\,(0, 5, 0) \quad \lambda \epsilon R}$$

c) $(2x + z) + k(x - 2z + 5) = 0$ $\quad k \in \mathbf{R}$

$(2 + k)\,x + (1 - 2k)\,z + 5k = 0$

$\vec{n}_{\pi 3} = (2 + k, 0, 1 - 2k)$ $\quad (2 + k, 0, 1 - 2k).(1, 1, 1) = 0$ de donde se obtiene: $k = 3$

$\boxed{x - z + 3 = 0}$

Otra forma de obtener la ecuación general del plano:

$$\vec{n}_{\pi 3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-5,0,5)$$

$-5x + 5z + D = 0$ para determinar el valor de D consideramos que el punto $Q(-1, 2, 2) \epsilon \pi$

$5 + 10 + D = 0$ $\quad D = -15$ $\quad -5x + 5z - 15 = 0$ $\boxed{x - z + 3 = 0}$

Otra posible respuesta es plantear la ecuación vectorial paramétrica del plano. Para ello consideramos dos vectores linealmente independientes paralelos al plano:

$$\boxed{(x, y, z) = (-1, 2, 2) + \lambda\,(0, 5, 0) + \rho\,(1, 1, 1) \quad \lambda \epsilon R,\ \rho \epsilon R}$$

Ejercicio 3

Dada la siguiente recta: L_1: $(x, y, z) = (0, -1, 2) + t\,(0, 2, 0)$ $t \in \Re$

a) Determine la posición relativa de la recta L_1 y el eje y. Justifique.

b) Determine la ecuación de un plano π perpendicular a la recta L_1 y tal que la distancia del punto Q (-1, 3, 1) a dicho plano es igual a 10. ¿Es único dicho plano?. Grafique.

c) Halle el punto R de intersección de la recta L_1 con el plano xz. Grafique.

d) Calcule el ángulo que forma la recta L_1 con la recta $L_2: \begin{cases} -x + 5y - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

e) Complete las expresiones de modo tal que resulten verdaderas:

L_1 es ……………………… al plano xy

L_1 es ……………………… al plano xz

Resolución del Ejercicio 3

a) El vector director de la recta L_1 $\vec{d}_{L1} = (0,2,0)$, y es proporcional al versor **j** por lo tanto son paralelos. Como el eje y contiene a (0,0,0) verificamos si (0,0,0) pertenece a L_1 para clasificarlos en coincidentes o no coincidentes: $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -1 + 2t \\ 0 \neq 2 \end{cases}$

(0,0,0) no pertenece a L_1. Podemos concluir que la recta L_1 y el eje y son paralelos no coincidentes.

b) Si L_1: $(x, y, z) = (0, -1, 2) + t\,(0, 2, 0)$ $t \epsilon R$, entonces, π perpendicular a L_1 es tal que $\vec{n}_\pi = (0,2,0)$

π: $2y + D = 0$; $Q(-1, 3, 1)$

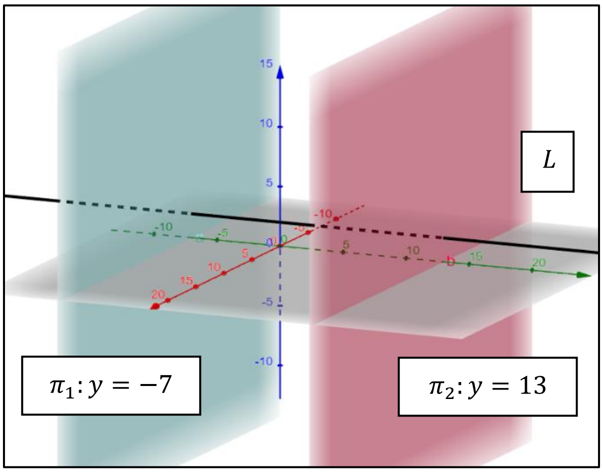
$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2.3 + D|}{2} = 10\ [L]$$

$|6 + D| = 20$ $D_1 = 14$ $D_2 = -26$

Existen dos planos posibles:

$\boxed{\pi_1:\ 2y + 14 = 0}$

$\boxed{\pi_2:\ 2y - 26 = 0}$



c) Intersección de la recta L_1 con el plano xz

L_1 $(x, y, z) = (0, -1, 2) + t\,(0, 2, 0)$ $t \epsilon R$

$L_1 \cap$ plano xz → $y = 0$

-1+2t = 0 $t = \frac{1}{2}$ $x = 0$ $z = 2$ $\boxed{R(0, 0, 2)}$

d) Para calcular el ángulo entre las rectas L_1 y L_2, obtenemos el director de L_2:

$\vec{d}_{L2} = (-1, 5, -2) \wedge (0, 1, -1)$; $\vec{d}_{L2} = (-3, -1, -1)$

El ángulo comprendido entre ellas será: $\cos\theta = \frac{\vec{d}_{L2} \cdot \vec{d}_L}{\|\vec{d}_{L2}\|\|\vec{d}_L\|} = \frac{(-3,-1,-1).(0,2,0)}{2\sqrt{11}} = \frac{-2}{2\sqrt{11}}$

$\boxed{\theta = 107° \, 32' \, 54.2''}$

e)

L_1 es PARALELA al plano xy ; L_1 es PERPENDICULAR al plano xz

Ejercicio 4

a) . Escriba la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2:

$C_1:\ x^2 + y^2 - 25 = 0$ $\qquad$ $C_2:\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

b) Halle la ecuación del eje radical de las dos circunferencias dadas.

c) Verifique, gráfica y analíticamente, que el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias dadas.

d) Determine la ecuación de la circunferencia C_3 que pertenece a la familia de circunferencias dadas y cuyo centro tiene ordenada 5/2.

e) Evalúe la longitud de la cuerda común a las circunferencias dadas.

Resolución del Ejercicio 4

a) $x^2 + y^2 - 25 + \delta(x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25) = 0 \qquad \delta \epsilon R$

---

b) ER: $\delta = -1$: $\qquad x^2 + y^2 - 25 - x^2 - y^2 + 10x + 10y - 25 = 0$

$-25 + 10x + 10y - 25 = 0$

$10x + 10y - 50 = 0$

$x + y - 5 = 0 \qquad \boxed{y = -x + 5}$

---

c)

$C_1(0,0) \qquad C_2\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right) \qquad C_2(5,5)$

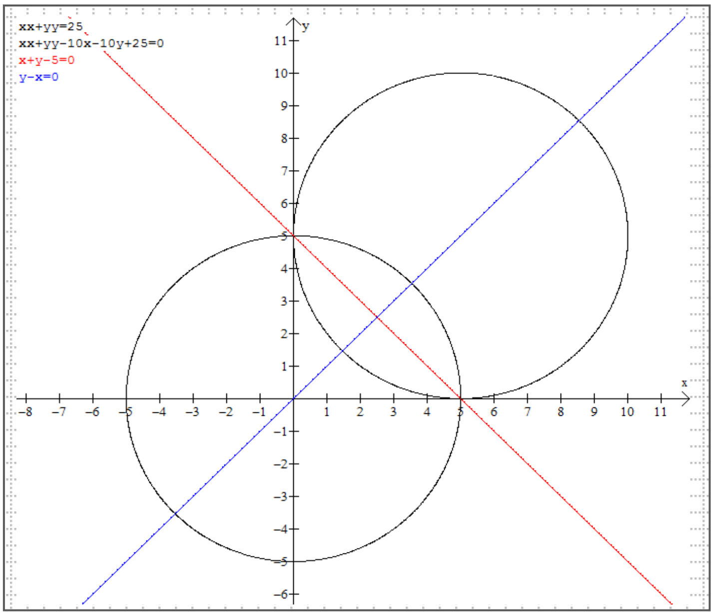
$\vec{d}_{ler} = (1,-1) \qquad \vec{d}_{lC_1C_2} = (5,5)$

$\vec{d}_{ler}.\vec{d}_{lC_1C_2} = (1,-1).(5,5) = 0$

⇨Las rectas son perpendiculares

Otra forma: $\vec{n}_{ler} = (1,1)$

$\vec{d}_{lC_1C_2} = (5,5) = 5\,\vec{n}_{ler}$ por lo tanto las rectas son perpendiculares



---

d)

$y_{C3} = \frac{5}{2} \qquad L_{c1c2}: \quad y = x \ \rightarrow x_{C3} = \frac{5}{2}$

$x^2(1+\delta) + y^2(1+\delta) - 10\delta x - 10\delta y +$
$+25(\delta - 1) = 0$

$$x_{C3} = h_3 = -\frac{D}{2} = \frac{10\delta}{2(1+\delta)} = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \delta = 1$$

$2x^2 + 2y^2 - 10x - 10y = 0$

---

e) Buscamos los puntos de intersección entre la circunferencia C_1 y el eje radical. La longitud de la cuerda común es la distancia entre ambos puntos de intersección.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + (-x+5)^2 - 25 = 0$

$x^2 + x^2 - 10x + 25 - 25 = 0$

$2x^2 - 10x = 0$

$x(2x - 10) = 0$

$x_1 = 0 \ \rightarrow \ y_1 = 5 \qquad I_1(0,5)$

$x_2 = 5 \ \rightarrow \ y_2 = 0 \qquad I_2(5,0)$

$d_{I1\,I2} = \sqrt{(0-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50} \cong 7.07$ [L]

Ejercicio 5

Para cada uno de los siguientes lugares geométricos, represente gráficamente, indique la *ecuación vectorial paramétrica,* y los resultados obtenidos para un valor específico elegido del parámetro indicado.

a) Recta paralela al eje *y*, que pasa por el punto Q(0,2,2).
b) Plano paralelo al plano *xz*, que pasa por el punto R(8,8,8).
c) Plano perpendicular al eje *x*, que pasa por el punto S(10,0,10).
d) Circunferencia de centro C(5,-7), tangente al eje *x*.
e) Plano π: $2x + 3z - 6 = 0$

Resolución del Ejercicio 5:

a) Recta paralela al eje *y*, que pasa por el punto Q(0,2,2): L: $(x,y,z) = (0,2,2)+ t\,(0,1,0)$; $t \epsilon R$
Por ejemplo, para t=1 se obtiene un punto de la recta de coordenadas: $P_{t=1}(0,3,2)$

b) Plano paralelo al plano *xz*, que pasa por el punto R(8,8,8):

$$\pi: \ (x,y,z)=(8,8,8)+t_1(1,0,0)+ t_2(0,0,1); \ t_1; \ t_2 \ \epsilon R$$

Por ejemplo, para $t_1=1$ $t_2=0$, se obtiene un punto del plano de coordenadas: P(9,8,8)

c) Plano perpendicular al eje *x*, que pasa por el punto S(10,0,10):

$$\pi: (x,y,z)=(10,0,10)+t_1(0,1,0)+t_2(0,0,1) \ ; t_1; t_2 \ \epsilon R$$

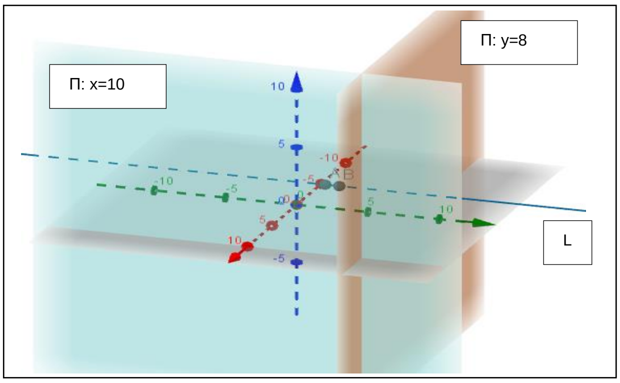
Por ejemplo, para $t_1=1$ $t_2=1$, se obtiene un punto del plano de coordenadas: P(10,1,10)

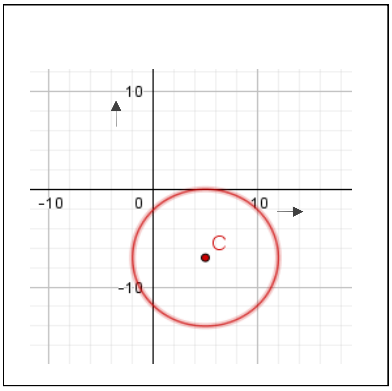
d) Circunferencia de centro C(5,-7), tangente al eje *x*: Al ser tangente al eje *x,* la distancia del centro al eje *x* es el radio. Es decir, el radio coincide con el valor absoluto de la ordenada del centro.

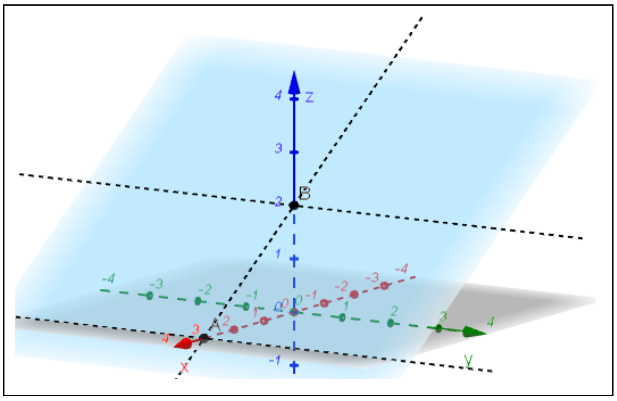
$$(x,y)=(5+7\cos\propto , -7 + 7\,\text{sen}\propto) \ ; \ \ 2\pi > \propto \geq 0$$

Por ejemplo, para $\propto = \pi/2$, se obtiene el punto de la circunferencia de coordenadas: (5,0), que coincide con el punto de tangencia entre la circunferencia y el eje *x*.

e) Buscamos puntos de intersección con los ejes coordenados: A(3,0,0) y B(0,0,2). El plano es paralelo al eje y. Luego, dos vectores posibles LI que definen la inclinación del plano son: (3,0,-2) y (0,1,0). Para representar, graficar las trazas. π: $(x,y,z) = (3,0,0) + t_1\,(3,0,-2) + t_2\,(0,1,0)$; t_1; $t_2 \ \epsilon R$







Ejercicio 6

a) Escriba la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos O (0,0), A (4, 8) y B (-4 ,2).
b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a dicha circunferencia y que pasan por el punto Q (0,15).
c) Represente gráficamente las respuestas dadas en los incisos anteriores.

Resolución del Ejercicio 6

a) La ecuación general de la circunferencia es :

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia satisfacen la ecuación de C , sustituyendo los valores obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} F = 0 \\ 20 - 4D + 2E + F = 0 \\ 80 + 4D + 8E + F = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que: $D = 0$; $E = -10$ y $F = 0$, luego la ecuación general de C es: $C: x^2 + y^2 - 10y = 0$. Completamos cuadrados y obtenemos la ecuación cartesiana:

$$C:\ x^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

b) El punto Q(0,15) no pertenece a la circunferencia. Llamamos T(x_T, y_T) al punto de tangencia.

El vector **CT** es perpendicular al vector **QT**, siendo C(0,5) el centro de la circunferencia.
Por lo tanto: **CT. QT** = 0

Es decir, $(x_T, y_T-5)\ (x_T, y_T-15) = 0$

Desarrollando: $x_T{}^2 + (y_T-5)\ (y_T-15) = 0$ (I)

Por otra parte, el punto T(x_T, y_T) pertenece a la circunferencia: $C:\ x_T^2 + (y_T-5)^2 = 5^2$

De donde se obtiene: $x_T^2 = -(y_T-2)^2 + 5^2$ (II)

Sustituyendo (II) en (I) se llega a : y_T=15/2, que sustituido en (II) permite obtener dos valores de x_T:

$x_{T1} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; $x_{T2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Los puntos de tangencia son:

$\boxed{T_1\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{15}{2}\right) y\ T_2\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{15}{2}\right)}$

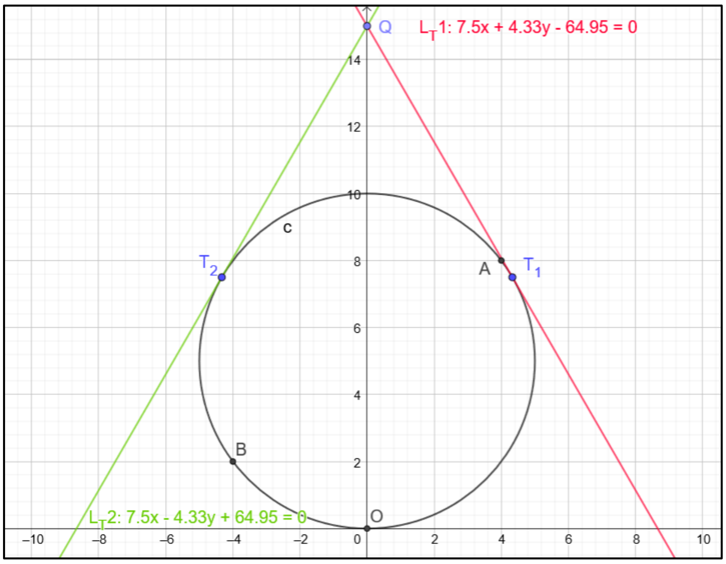
Las ecuaciones de las rectas tangentes se obtienen de considerar que:

Tangente L_{T1} pasa por Q y por T_1 $\boxed{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{15}{2}\right)}$:

7.5x - 4.33y + 64.95=0

Tangente L_{T2} pasa por Q y por T_2 $\boxed{\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2},\frac{15}{2}\right)}$:

7.5x + 4.33y - 64.95=0



c)

Ejercicio 7.

a) Indique la ecuación de la familia de planos con traza común en el plano xz la recta $2x + z - 10 = 0$. Represente gráficamente dos planos de dicha familia.

b) Indique la ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a).

c) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente:

c.1. Plano paralelo al plano *xz* que pasa por el punto Q(2,3,-6)

c.2. Plano perpendicular al plano *xz* que pasa por los puntos A(0,0,10) y B(5,0,0)

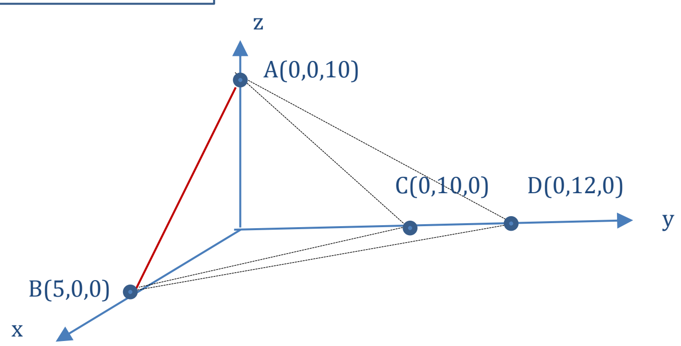
Respuestas:

a) En la traza común, *y*=0 por estar en el plano *xz*. Planteamos:

Si *x*=0 se obtiene *z*=10. Es decir: A(0,0,10) ; Si *z*=0 se obtiene *x*=5. Es decir: B(5,0,0)

La ecuación de la familia de planos que pasa por dicha intersección es:

$$\boxed{\frac{x}{5} + \frac{y}{k} + \frac{z}{10} = 1 \qquad k \in R - \{0\}}$$



b) Ecuación vectorial paramétrica de la traza dada en el inciso(a): la recta pasa por el punto A(0,0,10) (o el punto B) y tiene como vector director al vector BA (o AB). Es decir:

$$\boxed{\text{L: } (x, y, z) = (0,0,10) + t\,(-5,0,10) \quad t \in R}$$

c) c.1. Plano paralelo al plano *xz* que pasa por el punto Q(2,3,-6) $\boxed{\pi_1: \ y=3}$

c.2. Plano perpendicular al plano *xz*, entonces $\vec{n}_\pi = (\text{nx}, 0, \text{nz})$ de forma tal que $\vec{n}_\pi . \boldsymbol{j} = 0$. Es decir la ecuación general del plano es de la forma: $n_x\, x + n_z\, z + D=0$. Luego determinamos los valores de las incógnitas planteando que los punto A(0,0,10) y B(5,0,0) pertenecen al plano. Es decir:

$n_z\, 10 + D=0$ y $n_x\, 5 + D=0$. La ecuación del plano queda entonces: $-D/5\, x - D/10\, z + D = 0$. Adoptando por ejemplo D= 10, resulta:

$$\boxed{\pi_2: 2x + z - 10 = 0}$$