TRABAJO PRÁCTICO N°5 TRANSFORMACIONES LINEALES

EJERCICIO N°2 a)

TP N°5. Ej 2 a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T(x,y) = (x+2y,\ 3y,\ x)$

Una notación rigurosa para T es considerar que los vectores son columnas, es decir $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3y \\ x \end{bmatrix}$

Definición de núcleo o kernel de una transf. lineal: Sea $T: V \to W$ una transf lineal, se llama núcleo de T al conjunto $N(T) = \{u \in V \,/\, T(u) = 0\}$

Se puede probar que $N(T)$ es subespacio de V, por lo tanto se puede determinar una base y la dimensión de $N(T)$

Cálculo de $N(T)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in N(T) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ 3y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por definición de igualdad de vectores

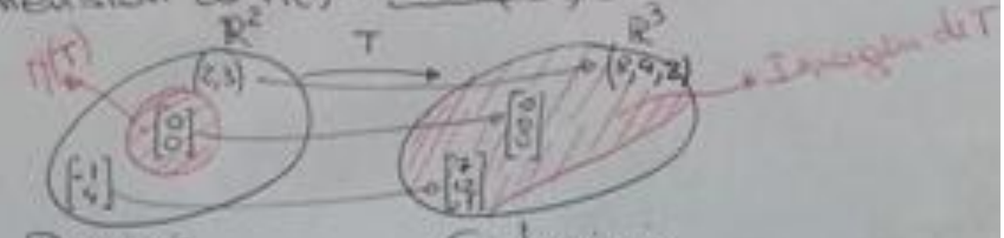
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \quad \boxed{y = 0} \\ \boxed{x = 0} \end{cases}$$

SEL Homogéneo de 3x compatible determinado

$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ subespacio nulo (trivial) de $\mathbb{R}^2$

No existe base. Por convención los espacios nul no tienen base

Dimensión de $N(T)$: $\dim(N(T)) = 0$



Dominio Codominio

TP1 Pág. 6. Ej 2, a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3y \\ x \end{bmatrix}$

Definición de imagen o recorrido de una transf. lineal: Sea $T: V \to W$ una transf. lineal. El conjunto de todos los vectores en W que son imágenes bajo T de por lo menos un vector en V es la imagen de T, $Im(T)$.

En símbolos $Im(T) = \{ w \in W \,/\, \exists\, u \in V \wedge T(u) = w \}$

Cálculo de la imagen de T

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in Im(T) \underset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \wedge T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ 3y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y = b_1 \\ \quad 3y = b_2 \\ x \quad\;\; = b_3 \end{cases}$$

Este SEL debe analizarse por el Teorema de Rouché-Frobenius para ver qué condición deben cumplir los vectores $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ para que el SEL sea compatible.

$$\overbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & B \\ 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{array}\right]}^{A'} \underset{F_3+(-1)F_1 \to F_3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & b_2 \\ 0 & -2 & b_3-b_1 \end{array}\right]_{F_2 \frac{1}{3}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & -2 & b_3-b_1 \end{array}\right] \underset{F_3+2F_2 \to F_3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 0 & b_3-b_1+\frac{2}{3}b_2 \end{array}\right]$$

Se observa que rango$(A) = 2$. Para que el SEL sea compatible, rango$(A') = 2$. Luego $\underline{b_3 - b_1 + \frac{2}{3} b_2 = 0}$ o bien $\underline{b_3 = b_1 - \frac{2}{3} b_2}$ (o cualquier otra opción de "despeje")

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, b_3 = b_1 - \frac{2}{3} b_2 \right\} \text{ o } Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 - \frac{2}{3} b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$Im(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ → "incluido"

Cálculo de una base de $Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 - \frac{2}{3} b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Se observan dos variables libres: b_1 y b_2

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 - \frac{2}{3} b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ -\frac{2}{3} b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \ b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

vectores generadores de $Im(T)$ y LI

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $Im(T)$

$\dim(Im(T)) = 2$ (número de vectores de cualquier base de $Im(T)$)

Teorema de la dimensión: Sea $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transf lineal, entonces

$$\underbrace{\dim(N(T))}_{\text{nulidad de } T} + \underbrace{\dim(Im(T))}_{\text{rango de } T} = \dim(\mathbb{V})$$

- En este ejercicio: $\dim(N(T)) = 0$, $\dim(Im(T)) = 2$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}$
  $0 + 2 = 2$ ✓

Clasificación de transf lineales

T es endomorfismo $\iff \mathbb{V} = \mathbb{W}$

T es monomorfismo $\iff$ T es inyectiva

T es epimorfismo $\iff$ T es suryectiva

T es isomorfismo $\iff$ T es biyectiva

- En este ejercicio, el núcleo de T sólo tiene el vector nulo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En consecuencia, T es inyectiva (monomorfismo)

Ejercicio 2 e)

TP Nº 5. Ej 2 e) $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1 \,/\, T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$

Cálculo del núcleo de T

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in N(T) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \underbrace{T(a_2x^2 + a_1x + a_0)}_{2a_2x + a_1} = \underbrace{0x + 0}_{0}$

$2a_2x = 0 \ \wedge \ a_1 = 0 \ \wedge \ a_0 \in \mathbb{R}$

$a_2 = 0 \ \wedge \ a_1 = 0 \ \wedge \ a_0 \in \mathbb{R}$

$N(T) = \{p(x) = 0x^2 + 0x + a_0 \in \mathcal{P}_2\} \subseteq \mathcal{P}_2$

$N(T) = \{p(x) = a_0 \in \mathcal{P}_2\}$ Conjunto de funciones polinómicas constantes

Observación: El núcleo de las "Derivadas" tiene las funciones cuya derivada es 0, en efecto el núcleo contiene las funciones polinómicas constantes ($a_0 \in \mathbb{R}$).

Determinación de una base de N(T)

Para generar todos los vectores del núcleo de la forma $p(x) = 0x^2 + 0x + a_0$ basta el polinomio $q(x) = 0x^2 + 0x + 1 = 1 \in \mathcal{P}_2$ y un conjunto con un solo vector no nulo es L I. Luego, una base es

$B = \{1\} \subseteq N(T) \subseteq \mathcal{P}_2$ | "$\subseteq$" se lee "incluido"

$\dim(N(T)) = 1$ ✓ NULIDAD de T

Imagen de T (es subespacio del codominio $\mathcal{P}_1$)

Por simple inspección se observa que la imagen de T ("Derivada") está formada por todos los polinomios de 1º grado que son "las derivadas" de los polinomios de 2do grado

$Im(T) = \{p'(x) = 2a_2x + a_1 \,;\, a_2, a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_1$; T es epimorfismo

Para generar los polinomios de $Im(T)$ bastarán los polinomios $q(x) = x + 0 = x$ y $r(x) = 0x + 1 = 1$ que son L I

$B = \{x, 1\}$ base de $Im(T)$; $\dim(Im(T)) = 2$ ✓ RANGO de T

Se verifica el Teorema de la dim.

Ejercicio 2 f)

TP Nº5 Ej 2 f) $T: M_{2x2} \to M_{2x2} \,/\, T(A) = A - A^T$

• Cálculo núcleo de T

$A \in N(T) \overset{def}{\Longleftrightarrow} T(A) = O$; $O \in M_{2x2}$ (matriz nula de 2x2)

$A - A^T = O \Rightarrow A = A^T$ (A es simétrica)

$N(T) = \{A \in M_{2x2} \,/\, A = A^T\} \subseteq M_{2x2}$

(N(T) es el espacio vectorial de matrices simétricas de 2x2)

Determinación de una base de N(T)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $a,b,c \in \mathbb{R}$

$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ → matrices generadoras de N(T) y L I

Una base de N(T) es $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subseteq N(T)$

$\dim(N(T)) = 3$ NULIDAD de T

• Cálculo de la imagen de T

$B \in Im(T) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists A \in M_{2x2} \,/\, T(A) = B$; $A - A^T = B$

$Im(T) = \{B = A - A^T \in M_{2x2}\}$ Espacio vectorial de matrices antisimétricas de 2x2

$B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ → Matriz generadora de Im(T)

$B_1 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ es base de Im(T) ; $\dim(Im(T)) = 1$ RANGO de T

• Teo. dimensión: $\underbrace{\dim(N(T))}_{3} + \underbrace{\dim Im(T)}_{1} = \underbrace{\dim(M_{2x2})}_{4}$ ✓

• $N(T) \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, T no es inyectiva. $Im(T) \neq M_{2x2}$, T no es sury.

T es endomorfismo (V = W)