Ejercicio 4. Para $T(X) = A\cdot X$. Determine $Im(T)$ y $N(T)$ ①
y encuentre una base para cada conjunto.

a). Para la resolución de este ejercicio es preciso recordar la definición de T.L. matricial:

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ tal que}$$
$$T(X) = A\,X \quad , \text{con } A_{m\times n} \text{ fija}$$

. De modo que la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ representa la matriz fija de una T.L. definida de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$.

Es decir: $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A\cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

o también:

$$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que}$$
$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_4 \end{pmatrix}$$

• N(T):

Por definición de $N(T)$, todos los $u \in \mathbb{R}^4$ deben cumplir $T(u) = 0$, con $0 \in \mathbb{R}^2$, es decir $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
De otra forma, los elementos del $N(T)$ deben satisfacer:

$$T(u) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de vectores: se tiene:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Es decir, para encontrar el $N(T)$, se debe hallar la solución del S.E.L.H. que ha quedado determinado

Ejercicio 4

Usando las herramientas (método de Gauss o Gauss-Jordan) se busca la solución del S.E.L:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El S.E.L.H. equivalente es:

$$\{ \underline{x_1} - 2\boxed{x_2} \quad - 3\boxed{x_4} = 0$$

Considerando a $\underline{x_1}$ variable principal y a $\boxed{x_2}$ y $\boxed{x_4}$ variables libres o independientes. Y obsérvese que la variable x_3 puede tomar cualquier valor de $\mathbb{R}$ que satisface el SELH.

Luego: x_1 depende de x_2 y de x_4 del siguiente modo:

- $x_1 = 2x_2 - 3x_4$
- $x_2 \in \mathbb{R}$
- $x_4 \in \mathbb{R}$
- $x_3 \in \mathbb{R}$

Por lo tanto:

$$\boxed{N(T) = \{ (2x_2 + 3x_4 \,;\, x_2 \,;\, x_3 \,;\, x_4) \in \mathbb{R}^4 \}}$$

Si asignamos a
$\to x_2 = s$
$\to x_3 = t$
$\to x_4 = w$

También se puede anotar $N(T) = \{ (2s + 3w, s, t, w), s, t, w \in \mathbb{R} \}$

Es útil comprobar: ejemplo: si $s = 1$, $w = 1$ y $t = 2$ un elemento s_1 del $N(T)$ será la váterne:

$$(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 ; 1 ; 2 ; 1) = (5, 1, 2, 1)$$

Ejercicio 4

De modo que: $T\left(\underbrace{\begin{pmatrix}5\\1\\2\\1\end{pmatrix}}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 0 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\2\\1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$

Con lo cual, corroboramos la respuesta hallada.

Base para el N(T)

De:

$(2x_2+3x_4;\ x_2;\ x_3;\ x_4)=$

$x_2\cdot(2,1,0,0)+x_3\cdot(0,0,1,0)+x_4\cdot(3,0,0,1)$

Estos 3 vectores generan al N(T) y son L.I.

Luego una base para el N(T) es:

$$\boxed{B_{N(T)}=\{(2,1,0,0),(0,0,1,0),(3,0,0,1)\}}$$

Dimensión del N(T)

$$\boxed{\dim N(T)=3}$$

- Im(T)

El conjunto Im(T) estará constituido por todos vectores $w\in W=\mathbb{R}^2$, es decir, $w=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, tal que existen vectores $u\in V$, $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ que satisfacen:

$$\underbrace{w=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}=T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 0 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}-x_1+2x_2+3x_4\\ 2x_1-4x_2-6x_4\end{pmatrix}}$$

Por igualdad de vectores:

Ej 4 $\begin{cases} a = -x_1 + 2x_2 + 3x_4 \\ b = 2x_1 - 4x_2 - 6x_4 \end{cases}$ S.E.L.

Se resuelve el S.E.L.:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 & a \\ 2 & -4 & 0 & -6 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & -a \\ 2 & -4 & 0 & -6 & b \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right]$$

Este S.E.L. será compatible siempre que $\boxed{2a+b=0}$

o de otra forma si $\boxed{b=-2a}$

Luego: $\mathrm{Im}(T) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / b = -2a\}$

o también $\boxed{\mathrm{Im}(T) = \{(a,-2a), a \in \mathbb{R}\}}$

Base para Im(T)

Una base: $B_{\mathrm{Im}(T)} = \{(1,-2)\}$

Dimensión de Im(T)

$$\dim \mathrm{Im}(T) = \rho(T) = 1$$

Comprobación del Teorema de la dimensión

$$\dim V = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

$$4 = 3 + 1$$