BORQUEZ PEREZ Juan Manuel — Ingeniería Industrial 42784892

$\alpha = 2$, $I_2 = 8$

a) D_1: $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{(a_1)^2} - \frac{(y-2)^2}{(b_1)^2} = 1 \\ z=0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \\ z=0. \end{cases}$ D_1

D_2: $\begin{cases} y=0 \\ \frac{(z-5)^2}{5^2} + \frac{(x-5)^2}{3^2} = 1 \end{cases} = \begin{cases} y=0 \\ \frac{(z-5)^2}{25} + \frac{(x-5)^2}{9} = 1 \end{cases}$ D_2

L_1:

b) Consideramos las ecuaciones de traslación para D_1.

$\begin{cases} x' = x-5 \\ y' = y-2 \\ z' = z \end{cases}$ Los vértices tienen coordenadas:

$V_1(a_1, 0, 0)_{x'y'z'}$; $V_2(-a_1, 0, 0)_{x'y'z'}$

Luego: para V_1 tenemos: para V_2 tenemos:

$\begin{cases} a_1 = x-5 \\ 0 = y-2 \\ 0 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1+5 = 4+5 = 9. \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5-a_1 = 5-4 = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Luego: $V_1(9,2,0)$ y $V_2(1,2,0)$

$V_1(9,2,0)$ es el vértice de mayor abscisa de la curva D_1

Así, L_1 pasa por V_1 en la dirección de $\vec{v} = (1,2,4)$

Luego su ecuación vectorial paramétrica en término de sus componentes es:

$$\boxed{L_1: \quad (x,y,z) = (9,2,0) + \alpha \cdot (1,2,4) \;;\; \alpha \in \mathbb{R}.}$$

L_2: Los cuatro vértices de la curva D_2 los obtenemos reemplazando primero $x=5$ y luego $z=5$.

Si $x=5$:

obtenemos: $\begin{cases} \frac{(z-5)^2}{25} = 1 \\ y=0 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \text{ o } z=10 \\ y=0 \\ x=5 \end{cases}$

Luego dos vértices son $A(5,0,0)$; $B(5,0,10)$

BORQUEZ PEREZ Juan Manuel
Ingeniería Industrial
41 284 842

Si $z=5$. obtenemos:
$$\begin{cases} \dfrac{(x-5)^2}{9}=1 \\ y=0 \\ z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=8 \quad \text{o} \quad x=2 \\ y=0 \\ z=5 \end{cases}$$

Así, los otros vértices son $C(8,0,5)$ y $D(2,0,5)$

El vértice de D_2 de mayor cota es el punto $B(5,0,10)$

Así, L_2 pasa por $B(5,0,10)$ y por $V(1,10,8)$

$\bar{u}=k\cdot(\overline{OB}-\overline{OV})=k\cdot(4,-10,2)$, con $k\in\mathbb{R}$

Si $k=1/2$ obtenemos $\bar{u}=(2,-5,1)$ y $\bar{u}$ es director de la recta L_2.

Luego la ecuación de L_2 es

$$\boxed{L_2:\ (x,y,z)=(5,0,10)+\beta\,(2,-5,1)\ ;\ \beta\in\mathbb{R}}$$

~~Llamamos $\bar{w}=\overline{V_1B}=\overline{OB}-\overline{OV_1}=(5,0,10)-(9,2,0)=(-4,-2,10)$~~

Llamamos $\bar{w}=r\cdot\overline{V_1B}=r\cdot(\overline{OB}-\overline{OV_1})=r\cdot[(5,0,10)-(9,2,0)]=r\cdot(-4,-2,10)$, $r\in\mathbb{R}$

Si $r=-1/2$ obtenemos: $\bar{w}=(2,1,-5)$

Ahora consideramos el producto mixto:

$$(\bar{u}\wedge\bar{v})\cdot\bar{w}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-40+1-20-25-8-4.$$

$$(\bar{u}\wedge\bar{v})\cdot\bar{w}=-96\neq 0$$

Luego L_1 y L_2 son alabeados.

La distancia entre L_1 y L_2 es entonces la medida en dirección normal a ambas rectas. Luego puede calcularse como ~~la pro~~ el módulo de la proyección de $\overline{BV_1}$ (vector que tiene un extremo en cada recta) sobre la dirección de $\bar{u}\wedge\bar{v}$ (vector normal a $\bar{u}$ y a $\bar{v}$, y por lo tanto normal a las rectas L_1 y L_2).

Luego la distancia h entre las rectas es:

$$h=\left|\frac{(\bar{u}\wedge\bar{v})\cdot\overline{V_1B}}{\|\bar{u}\wedge\bar{v}\|}\right|=\left|\frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 & 10 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\left\|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right\|}\right|=\frac{|-96\cdot(-2)|}{\|-20\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}+5\hat{k}-8\hat{j}-2\hat{i}\|}$$

BORQUEZ PEREZ Juan Manuel — Ingeniería Industrial — 41 784 892

$$h = \frac{|192|}{\|-22\hat{i}-7\hat{j}+9\hat{k}\|} = \frac{192}{\sqrt{(22)^2+49+81}} \approx \boxed{7{,}75\ [L]}$$

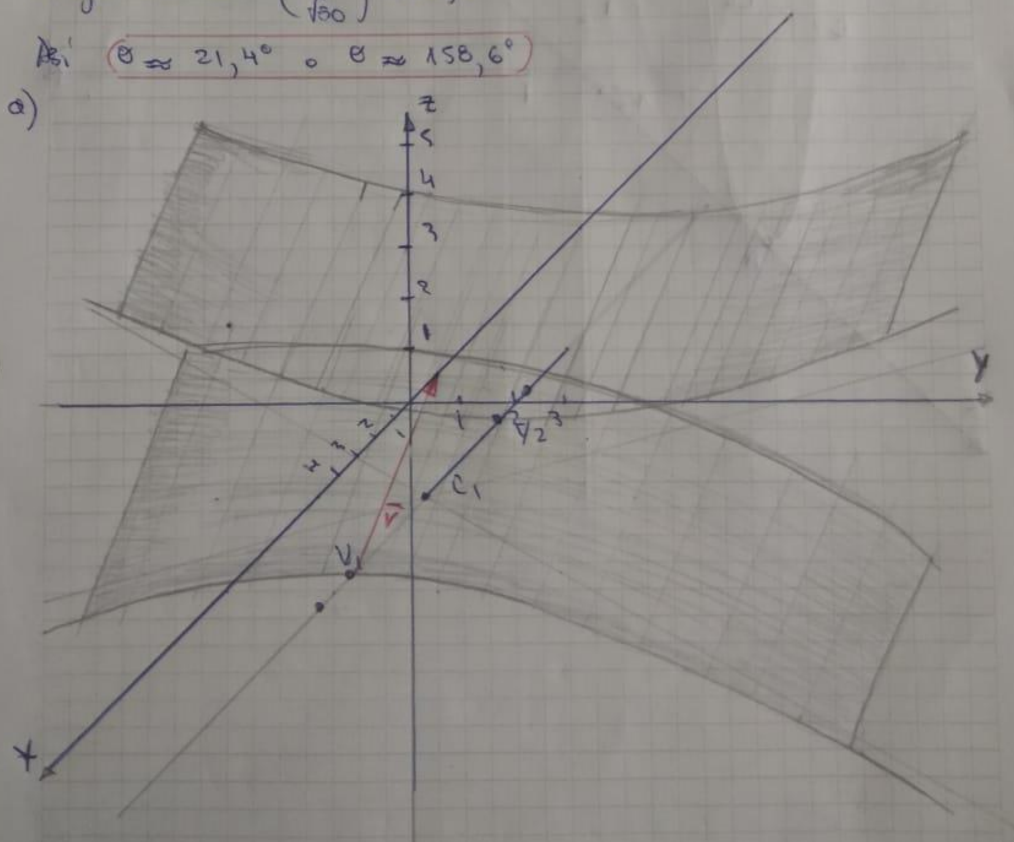
c) Un vector director de L_2 es $\bar{u}=(2,-5,1)$ y el versor $\hat{i}$ es normal al plano yz. Luego: α es el ángulo complementario a θ, y θ es el ángulo entre L_2 y el plano yz:

$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{u}\cdot\hat{i}}{\|\hat{i}\|\cdot\|\bar{u}\|} = \frac{(2,-5,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{4+25+1}} = \frac{2}{\sqrt{30}}$$

Luego $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \approx 68{,}6°$

Así $\theta \approx 21{,}4°$ o $\theta \approx 158{,}6°$

a)



BORQUEZ, Juan Manuel
Ingeniería Industrial
41734892