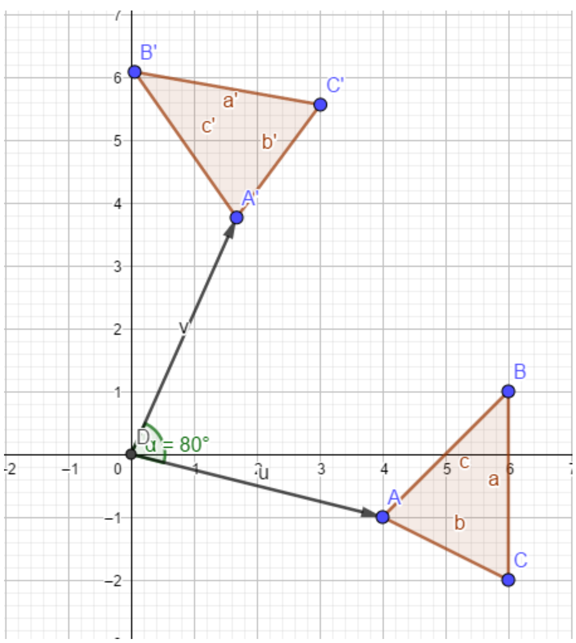
Ejercicio 6: Complete las siguientes proposiciones: "La ley de la transformación lineal en R^2 que corresponde a una:

a) Rotación de 45° respecto del origen en sentido antihorario es …………………….

El operador rotación, hace girar a todo vector de R^2 hasta describir un ángulo φ. Si el ángulo es positivo, la rotación será en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario) En el siguiente ejemplo, vemos un triángulo ABC, al que se le ha aplicado una rotación de 80°. El operador rotación en este caso "transforma" a cada vector OA, OB y OC en OA´OB´y OC´respectivamente



Podemos observar que el operador rotación asigna como imagen de un triángulo, otro triángulo. Es decir que conserva la forma de la figura.

¿Cómo hacemos para hallar las coordenadas de OA´, es decir, cómo le encontramos la imagen, por la transformación rotación, al vector OA?
La transformación rotación está dada de R^2, en R^2 /
T((x,y))= (x cos φ – y sen φ,   xsen φ +y cos φ)

En forma matricial:

$$T(X) = A.X = W, \text{ siendo } A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -sen\phi \\ sen\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad W=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Volviendo al ejercicio, tenemos
Rotación de 45° respecto del origen en sentido antihorario es ……………………………..
En este caso, el ángulo es 45°, por lo tanto, queda:

A = $\begin{bmatrix} cos\,45° & -sen45 \\ sen45° & cos45 \end{bmatrix}$ X=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ W= $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

Realizando los cálculos correspondientes, podemos reescribir a A.X=W de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt[2]{2}}{2} & -\frac{\sqrt[2]{2}}{2} \\ \frac{\sqrt[2]{2}}{2} & \frac{\sqrt[2]{2}}{2}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt[2]{2}}{2}x - \frac{\sqrt[2]{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt[2]{2}}{2}x + \frac{\sqrt[2]{2}}{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

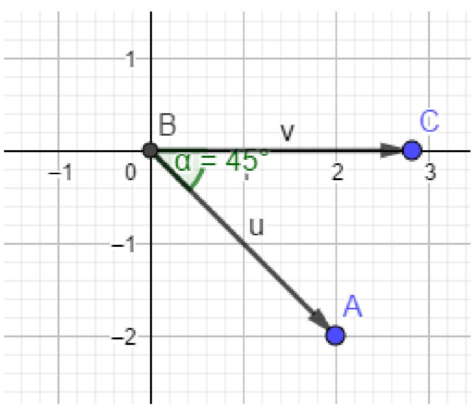
Por lo tanto, podemos decir que T((x, y)) = ($\frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,x - \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,y\,, \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,x + \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,y$)

Ejemplo

Tomemos un vector BA = (2,-2), si le aplicamos una rotación de 45° en sentido antihorario, tenemos

T((2, -2)) = ($\frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,2 - \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,(-2)\,, \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,2 + \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\,(-2)$)

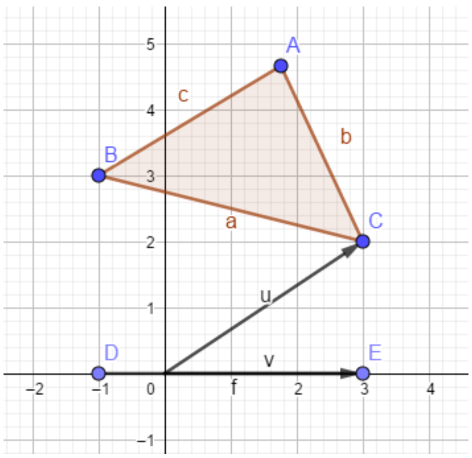
= $(2\sqrt[2]{2}, 0)$ Vector BC en el gráfico



b) Proyección sobre el eje x es T((x, y)) = …………………….

El operador proyección ortogonal, transforma cada vector en su proyección ortogonal sobre una recta o sobre un plano (según estemos trabajando en IR^2 o en IR^3). A su vez, podemos tener una proyección ortogonal sobre el eje x o sobre el eje y, si estamos trabajando en el plano.

Veamos un ejemplo primero en forma gráfica.



El operador proyección ortogonal sobre el eje x, transformó en este caso un triángulo en un segmento. Al aplicarle la transformación "operador proyección ortogonal" al triángulo ABC, obtenemos el segmento DE. Es decir, que no conserva la forma de la figura

Podemos observar que el vector OC = (3, 2), lo transformó en el vector OE = (3, 0)

¿Cómo trabajamos analíticamente con esta transformación?

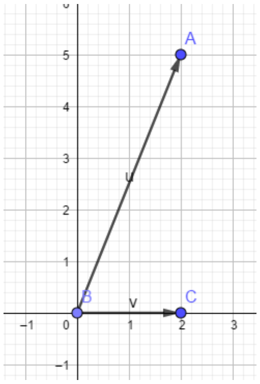
La transformación proyección ortogonal sobre el eje x, está dada de IR2 en IR2 , tal que:

T((x,y)) = (x, 0)

Si queremos expresarlo en forma matricial, su matriz asociada será $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

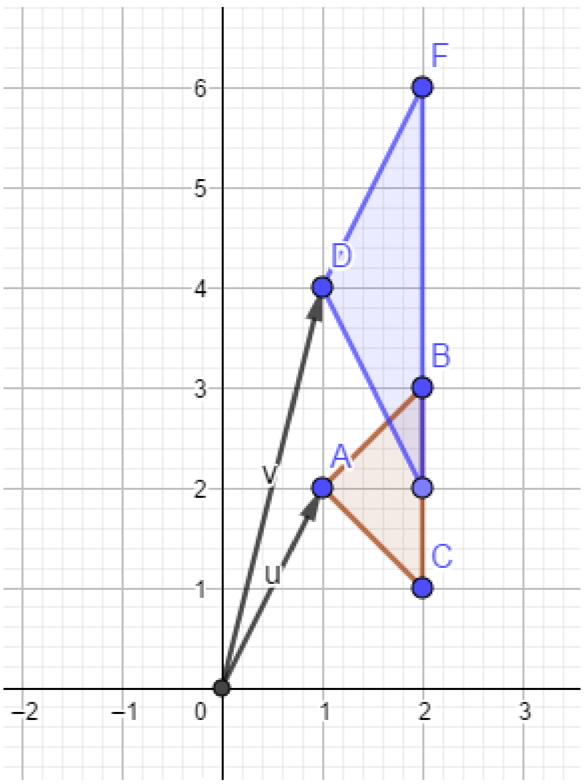
Ejemplo

Tomemos un vector u= (2, 5), le aplicamos la proyección sobre el eje x, nos queda: T((2, 5)) = (2, 0)



c) Contracción vertical de k = 1/2 es T((x,y)) = ………………………

Veamos un ejemplo geométrico



Esta transformación, asignó como imagen del triángulo ABC (rojo en el gráfico), el triángulo DFG (azul en el gráfico). Podemos ver que conservó la forma de triángulo, pero un agrandamiento en dirección vertical. Esta transformación, es un operador de factor k = 2, en dirección vertical (o en dirección del eje y), por lo que produce un agrandamiento. Si k es positivo, menor que uno, el operador, produce una compresión de la figura.

En este gráfico, podemos ver que la imagen del vector OA = (1,2), es el vector OD = (1, 2)

Tenemos expansiones y contracciones, tanto en dirección del eje x o del eje y (si estamos en el plano). Supongamos que trabajemos en dirección del eje de ordenadas. Si a la ordenada de cada punto del plano la multiplicamos por una constante, entonces la figura se verá expandida o contraída, según el valor de la constante lo que tenemos.

Esta transformación está definida de IR^2 en IR^2, tal que:

T((x,y)) = (x, 1/2 y)

Si quisiéramos expresarla en forma matricial, su matriz asociada es A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Ejemplo

Vector u= (-1, 3) le aplicamos la contracción vertical (en dirección de y), con k=1/2, tenemos:

T((-1, 3))= (-1, 3/2)