Análisis Matemático I
Clase 24: Series numéricas y criterios de convergencia

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2020

Criterios de Convergencia

Como se mencionó en la clase anterior, en muy pocos casos es posible hallar una expresión de las sumas parciales de una serie. En vista de lo estudiado anteriormente, la serie geométrica es uno de esos casos.
Para la gran mayoría de las series, la convergencia se analiza mediante criterios. En este curso veremos los siguientes:

1. Criterio del término n-ésimo.
2. Criterio de la integral.
3. Criterio de comparación.
4. Criterio de la convergencia absoluta.
5. Criterio del cociente y la raíz.
6. Criterio de Leibnitz para series alternantes.

Criterio del término n-ésimo

Comenzamos con la siguiente observación: supongamos que la serie

$$\sum_n a_n$$

converge. Entonces se espera que a medida que n aumenta, los términos a_n que se están sumando sean cada vez más chicos (si no, no tendríamos *suma* finita). De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Teorema

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

La forma más útil del resultado anterior es la siguiente, que constuye su contrarrecíproco y que llamaremos **Criterio del término n-ésimo.**

Criterio del término n-ésimo

Criterio del término n-ésimo

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es cero o no existe, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge.

Criterio del término n-ésimo

Criterio del término n-ésimo

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es cero o no existe, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge.

Ejemplo 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

En este caso $a_n = n^2$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$ por lo que la serie diverge por el criterio del término enésimo.

Ejemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

En este caso $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ por lo que la serie diverge por el criterio del término enésimo.

Ejemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

En este caso $a_n = \dfrac{n+1}{n}$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ por lo que la serie diverge por el criterio del término enésimo.

Ejemplo 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

En este caso $a_n = \dfrac{1}{n}$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ por lo que el criterio del término enésimo no asegura nada.

Observación: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces no podemos emplear el criterio para decir que la serie dada converge o diverge. es necesario aplicar un criterio diferente.

Criterio de la integral

Criterio de la integral

Sea a_n una sucesión de términos positivos. Supongamos que:

$$a_n = f(n),$$

donde $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función positiva, decreciente y continua para todo $x \geq 1$. Entonces:

- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ converge, entonces $\sum_n a_n$ converge.
- Si $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_n a_n$ diverge.

Ejemplo 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, con $p > 0$

En este caso $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ por lo que tomamos $a_n = f(n)$ con $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Claramente f es positiva y continua, además como $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ es negativa en el intervalo $(1, \infty)$, también es f decreciente por lo tanto podemos aplicar el criterio de la integral. Consideramos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

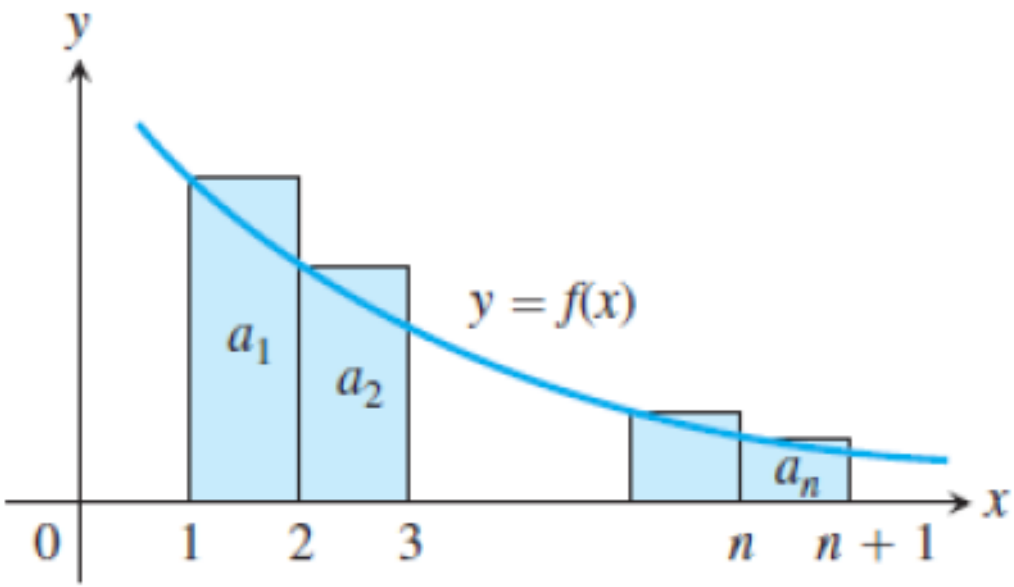
En la clase de integrales impropias vimos que si $0 < p \leq 1$ la integral diverge pero si $p > 1$ la integral converge, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge en otro caso.

Por lo que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge al ser una serie p con $p = 1$.

Criterio de la integral: demostración.

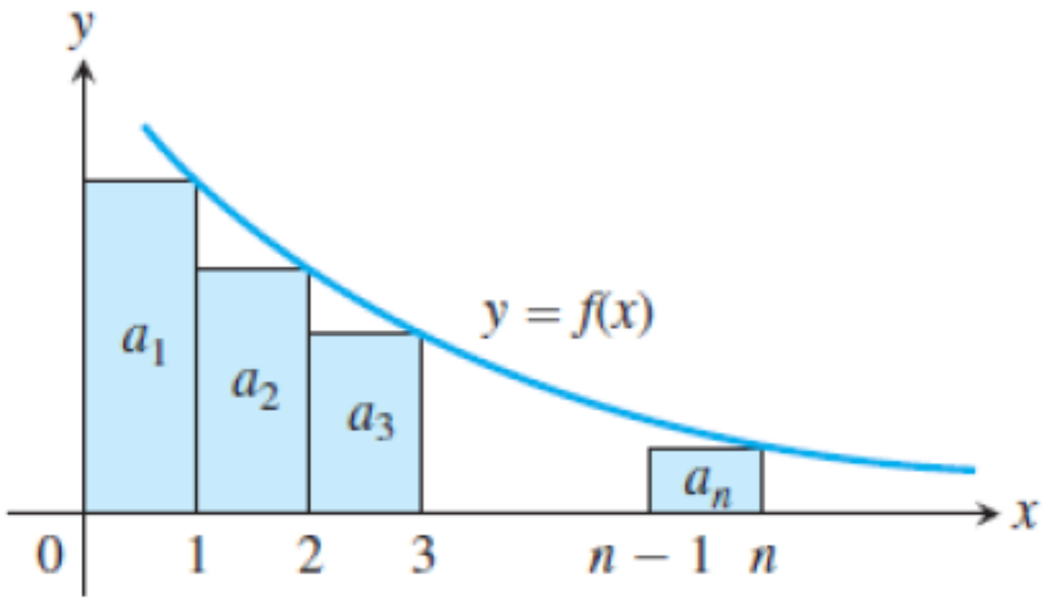
De acuerdo con la hipótesis, f es una función decreciente con $f(n) = a_n$ para toda n. Esto lleva a observar que los rectángulos de la siguiente figura encierran, entre todos, más área de la que está debajo de la curva $y = f(x)$ desde $x = 1$ hasta $x = n + 1$. Es decir:

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (1)$$



Criterio de la integral: demostración.

En la siguiente figura, los rectángulos se han colocado a la izquierda en vez de a la derecha.



Si, por el momento, no se considera el área, a_1, del primer rectángulo, puede verse que

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\, dx$$

Criterio de la integral: demostración.

Si ahora se suma a_1 a ambos miembros, se tendrá

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant a_1 + \int_1^n f(x)\,dx. \tag{2}$$

Notemos que $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ es la suma parcial n-ésima. Como cada término de la sucesión $\{a_n\}$ es positivo, la sucesión $\{S_n\}$ es monótona no decreciente.

Vamos a probar ahora la primera implicación del criterio..

Supongamos que la integral

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

converge. Como f es positiva, tenemos:

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego, usando (2), deducimos que

Criterio de la integral: demostración.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant a_1 + \int_1^n f(x)\ dx \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\ dx, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $\{S_n\}$ está acotado por arriba por el número:

$$a_1 + \int_1^\infty f(x)\ dx.$$

Además, como $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos así que $\{S_n\}$ está acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. Recordando que $\{S_n\}$ es monótona creciente, se obtiene que $\{S_n\}$ converge. Por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ya que sus sumas parciales S_n convergen. Obtenemos así la primera conclusión del criterio.

Criterio de la integral: demostración.

Ahora probaremos la segunda implicación del criterio.
Supongamos que la integral

$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

diverge. La desigualdad (1) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$ diverge y f es positiva, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\, dx = +\infty.$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, ya que sus sumas parciales S_n no convergen.

Análisis Matemático I
Clase 24: Series numéricas y criterios de convergencia

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2020

Criterio de Comparación

Teorema de comparación de series

Sean a_n, b_n y c_n sucesiones de términos no negativos. Supongamos que:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \qquad \text{para todo } n \geq 1. \tag{3}$$

Entonces:

- Si $\sum_n c_n$ converge, entonces $\sum_n b_n$ converge.
- Si $\sum_n a_n$ diverge, entonces $\sum_n b_n$ diverge.

Observación: el criterio de comparación se utiliza para series de términos no negativos.

Ejemplo 5: Analizar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$$

.

En este caso podemos considerar $b_n = \dfrac{5}{5n-1}$ y tenemos que encontrar una sucesión contra la cual compararla. Proponemos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y vemos que, para todo $n \geq 1$:

$$\frac{5}{5n-1} >^? \frac{1}{n} \to 5n >^? 5n-1 \to 0 > -1$$

Como esta última desigualdad es válida, podemos asegurar que la primera también lo es.

Y como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge entonces por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{5n-1}$ también diverge.

Convergencia absoluta

Convergencia absoluta

- Decimos que una serie $\sum_n a_n$ converge absolutamente si:

$$\sum_n |a_n|$$

  es una serie convergente.

Criterio de la convergencia absoluta

Si una serie converge absolutamente, entonces converge.

Ejemplo 6: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Para este caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Luego es una serie absolutamente convergente porque converge la serie de los valores absolutos al ser una serie p con $p = 2 > 1$.

Criterio de la razón

Cuando los términos de una serie contienen potencias n'-ésimas o factoriales, el siguiente criterio es muy útil.

Criterio de la razón

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no decide.

Para $\rho = 1$ considerar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n/n}{(n+1)/n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1+1/n} \right| = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = 1$$

Ejemplo 7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{5^n}$$

Al aplicar el criterio del cociente obtenemos:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{2^{n+1}+1}{5^{n+1}}}{\dfrac{2^n+1}{5^n}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(2^{n+1}+1\right) 5^n}{\left(2^n+1\right) 5^{n+1}} \right| = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(2^{n+1}+1\right)}{\left(2^n+1\right)} \right| =$$

$$\frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(2^{n+1}+1\right)/2^n}{\left(2^n+1\right)/2^n} \right| = \frac{2}{5} < 1$$

Luego por el criterio del cociente la serie converge.

Criterio de la raíz

Alternativamente al criterio del cociente, también se puede utilizar el siguiente criterio cuando aparecen potencias n-ésimas en la expresión de los a_n.

Criterio de la raíz

Sea $\sum_n a_n$ una serie dada. Sea:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Entonces:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge.
- Si $\rho = 1$, entonces el criterio no es concluyente.

Para los siguientes ejemplos utilizamos el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Thomas G., 'Cálculo una variable', Ed. 12, Cap. 7.5, Pag. 400 y Clase 23)

Para $\rho = 1$ considerar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n|}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Ejemplo 8:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

Al aplicar el criterio de la raíz tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^3}} = 2 > 1$$

Luego por el criterio de la raíz la serie diverge.

Para la última igualdad utilizamos el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Criterio de Leibniz

Cuando la serie considerada tiene términos que alternan en signos, el siguiente criterio es de gran utilidad.

Criterio de Leibniz

Sea la siguiente serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots .$$

Entonces esta serie converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Todos los términos u_n son positivos.
- u_n es una sucesión decreciente.
- $u_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Criterio de Leibniz

El criterio de Leibniz también se aplica si la serie está escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n., \quad o \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n.$$

Ejemplo 9:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

En este caso $u_n = \dfrac{1}{n}$ y satisface las tres hipótesis del criterio, por lo tanto la serie converge.