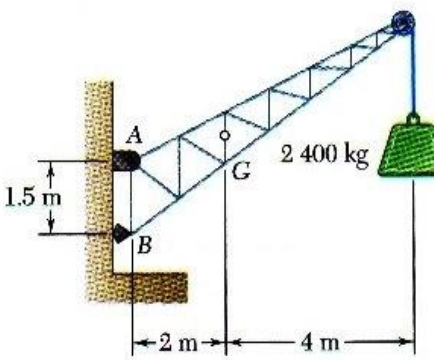
EL MOVIMIENTO DE ROTACION

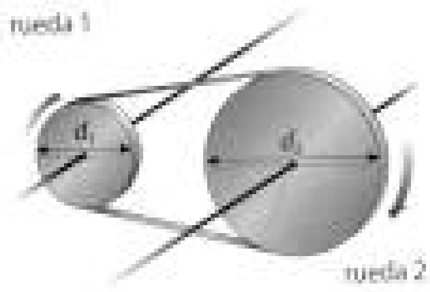
EL CUERPO RIGIDO

- ***ES AQUEL QUE TIENE UNA FORMA DEFINIDA QUE NO CAMBIA, POR LO QUE LAS PARTICULAS QUE LO COMPONEN PERMANECEN EN POSICIONES FIJAS ENTRE SI.***

- ESTÁTICA *Condiciones de equilibrio:*
  $\Sigma Fx=0$
  $\Sigma Fy=0$
  $\Sigma\ T= 0$



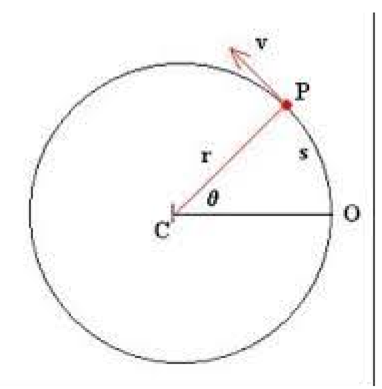
- CINEMÁTICA:
  Es la descripción del movimiento rotacional en términos de posición (θ), velocidad (ω) y aceleración (α)

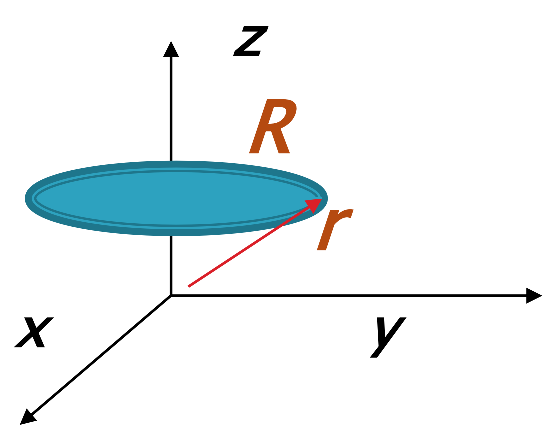


- DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO:
  estudia las causas que provocan el movimiento de rotación

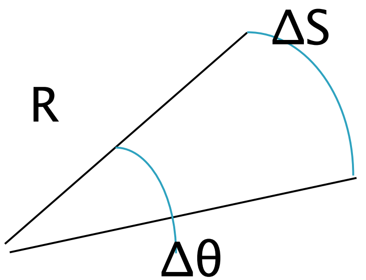
Velocidad y aceleración angular

- El *movimiento rotacional puro* de un objeto alrededor de un eje fijo significa que todos los puntos en el objeto se mueven en círculos y que los centros de tales círculos se encuentran todos sobre una línea llamada *eje de rotación*
-
-
- *r=R*



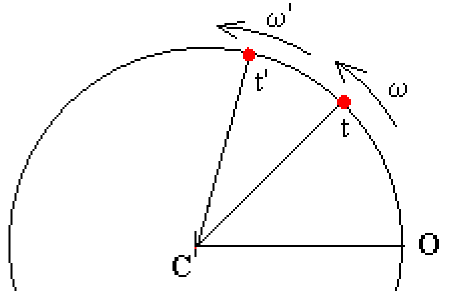


Cantidades angulares



$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{R}$$

$$[\theta] = \text{rad}$$

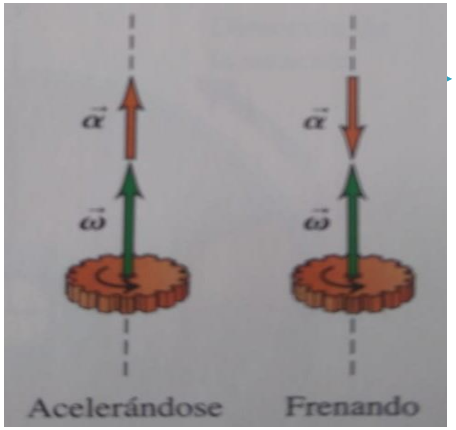


Si un punto sobre un objeto gira desde una posición angular θ_1 hasta una posición θ_2, su desplazamiento angular será:$\Delta\theta$. En un lapso de tiempo Δt la velocidad angular media que adquiere

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

y su velocidad instantánea

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}; \qquad [\omega] = \frac{\text{rad}}{seg}$$



Si ahora lo que cambia es la velocidad angular desde ω1 hasta ω2 en un lapso de tiempo Δt, entonces la aceleración media será: $\alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Y su aceleración instantánea:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{seg^2}$$

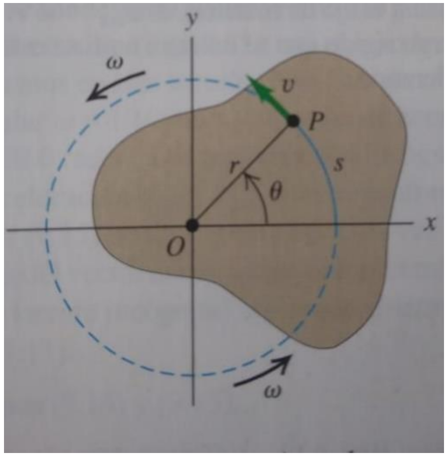
Rotación con aceleración angular constante

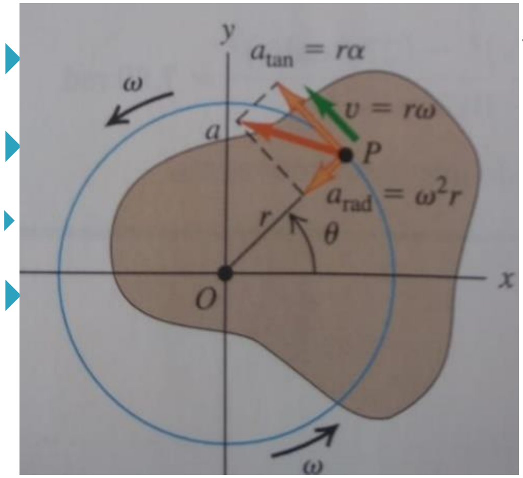
- Como $\alpha = \frac{dw}{dt}$ entonces al integrar se obtiene: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ (1)
- Y como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ al integrar, sabiendo que por (1) reemplazamos ω, se obtiene:
- $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + ½ \alpha t^2$ (2)
- Combinando (1) y (2), se obtiene: $\omega^2 = \omega^2_0 + 2\alpha\theta$
- comparando

Movimiento de traslación (dirección fija) con a = cte.	**Movimiento de rotación (eje fijo) con α = cte.**
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$
$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2} t$	$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$
$x = x_0 + vt - \frac{1}{2} a t^2$	$\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2$

Relación entre cinemática lineal y angular

- Como $\Delta\theta$ R= ΔS, al derivar respecto de t
- **v=R ω** (relación entre rapidez lineal y angular)
- la dirección de v es siempre
- tangente a la trayectoria





- v=R ω, al derivar respecto de t se
- obtiene: $a_T = R\alpha$ (la aceleración es la razón de
- cambio de la rapidez lineal)
- $a_c = v^2/R = \omega^2 R$ $\quad a = a_T + a_c$

Energia cinética de rotación

La cantidad $K=½\,mv^2$ es la energía cinética traslacional.
Un objeto en rotación tendrá una energía cinética rotacional. Si este objeto está formado por muchas partículas pequeñas de masa m_i, cada una tendrá una energía cinética:

$$½\,m_i v^2_i = ½ m_i r^2_i\,\omega^2$$

La energía cinética total será la suma de todas las energías cinéticas de cada partículas:

$$K=\Sigma(½\,m_i v^2_i)=\Sigma(½ m_i r^2_i\,\omega^2)= ½\,(\Sigma m_i r^2_i\,)\,\omega^2$$

$$I=\Sigma m_i r^2_i$$

(**momento de inercia** y representa la medida “de la oposición “ del cuerpo que rota a modificar su velocidad angular)

por lo que la energía cinética del cuerpo rígido será:

$$K=½\,I\,\omega^2$$

Momentos de inercia

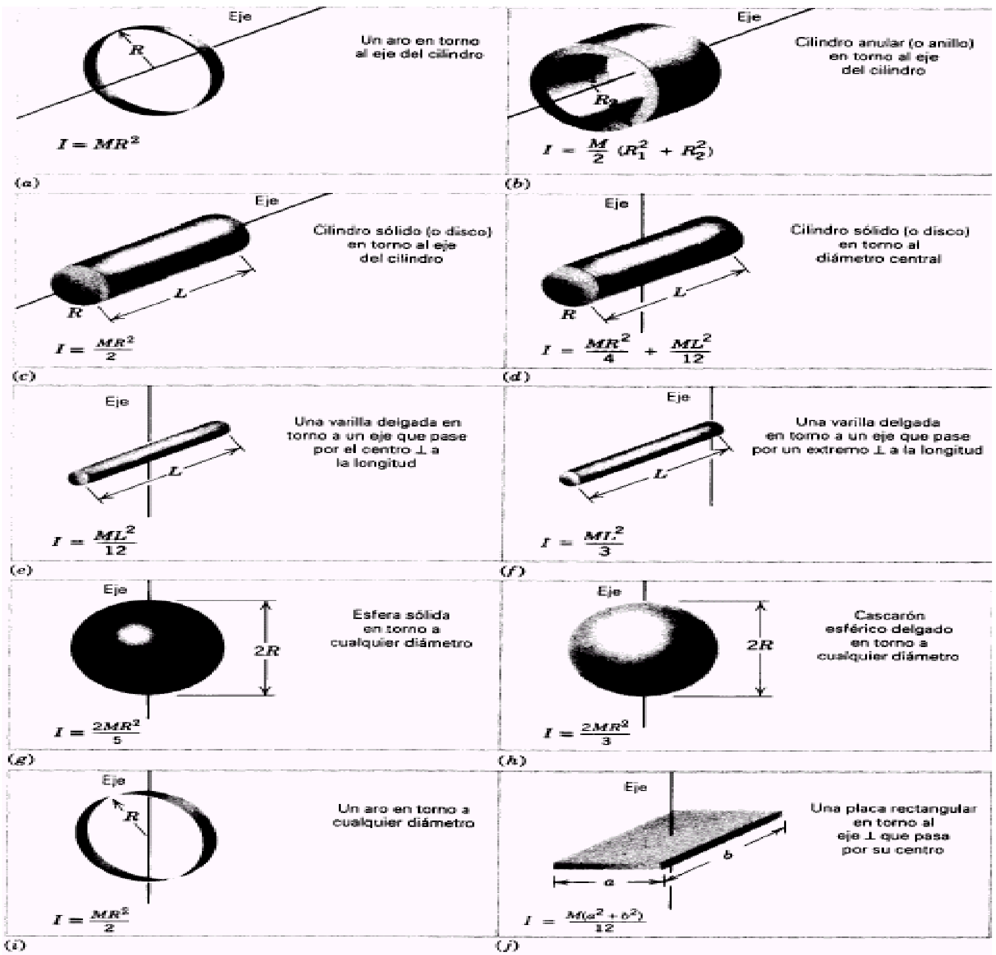
El momento de inercia: $I=\Sigma m_i r^2_i$

$$I = \int R^2\, dm$$

$[I] = [m][r2]$, entonces $[I]=\mathrm{kgm}^2$

"La inercia rotacional no solo depende de su masa, sino cómo esta está distribuida con respecto al eje de rotación"

Algunos momentos de inercia



Teorema de los ejes paralelos

"el momento de inercia de un cuerpo respecto de cualquier eje es igual al momento de inercia del mismo respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de masa, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes"

$$I = I_0 + md^2$$

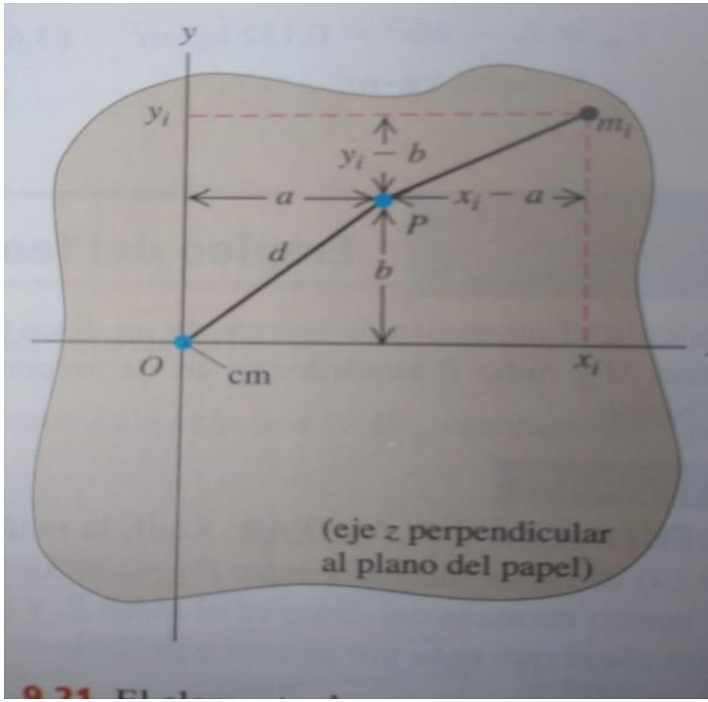
Fig. 7

Teorema de los ejes paralelos

- *$Ip = I_0 + md^2$*
- El cuerpo gira con respecto al eje z
- Las coordenadas del centro de masa:
- $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$

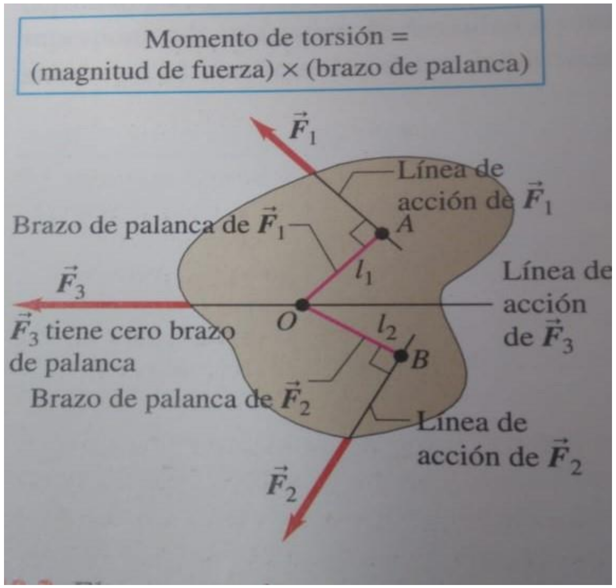
- El eje paralelo pasa por P
- $d^2 = a^2 + b^2$

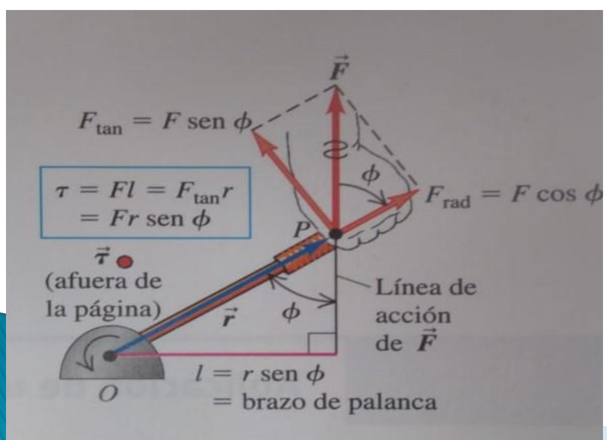
- $I_{cm} = \sum_i m_i (x^2{}_i + y^2{}_i)$ (momento de inercia con
- respecto a una tajada alrededor del eje que pasa
- por el centro de masa)
- $I_p = \sum_i m_i ((x_i - a)^2 + (y_i - b)^2)$
- $I_p = \sum_i m_i (x^2{}_i + y^2{}_i) \; - 2a \sum_i m_i \, x_i \; - {}_2 b \sum_i m_i \, y_i + (a^2 + b^2) \sum_i m_i$



- *$Ip = I_0 + md^2$*

Dinámica del cuerpo rígido: torca



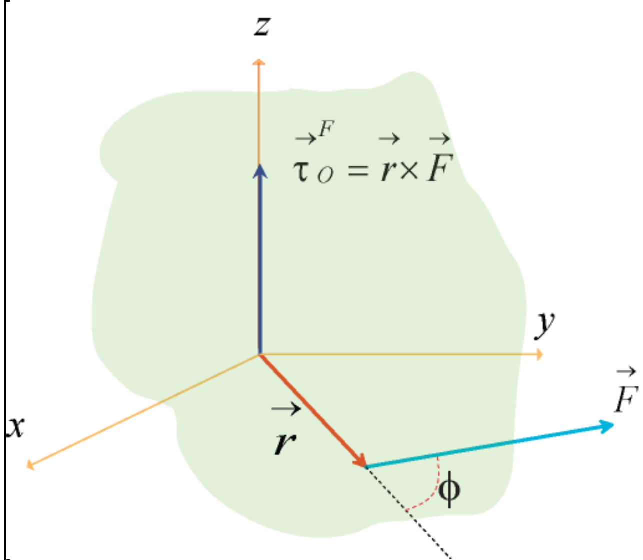


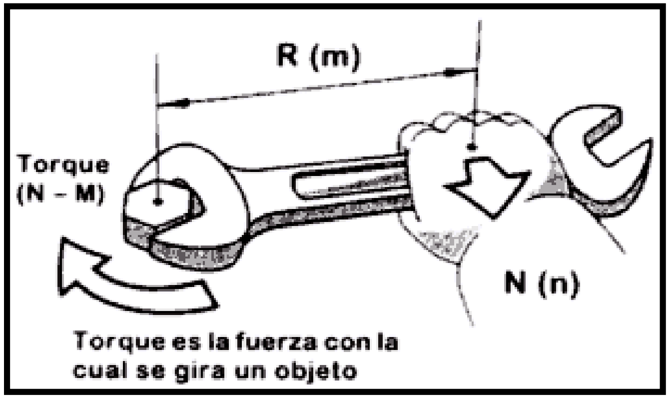
T=Fl F es la fuerza aplicada
l es el brazo de palanca
T es el momento de torsión o momento con respecto al punto O

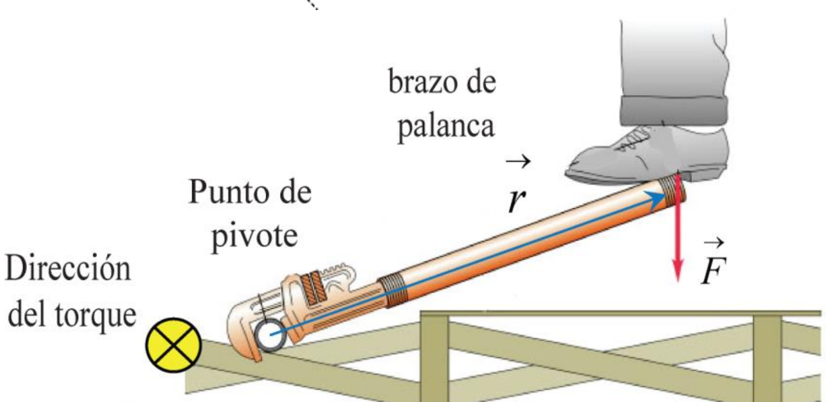
El torque o torca es la medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo.

$[T]=[F][l]$ **$[T]$=Nm**

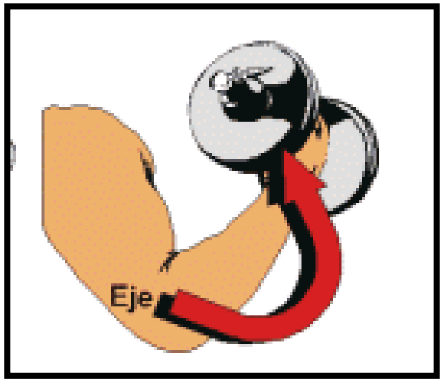
Y su dirección?
Si descomponemos la fuerza F en una componente radial y otra tangencial:
T=Fl= r Fsenϕ= F_{tg} r *T*= r x F





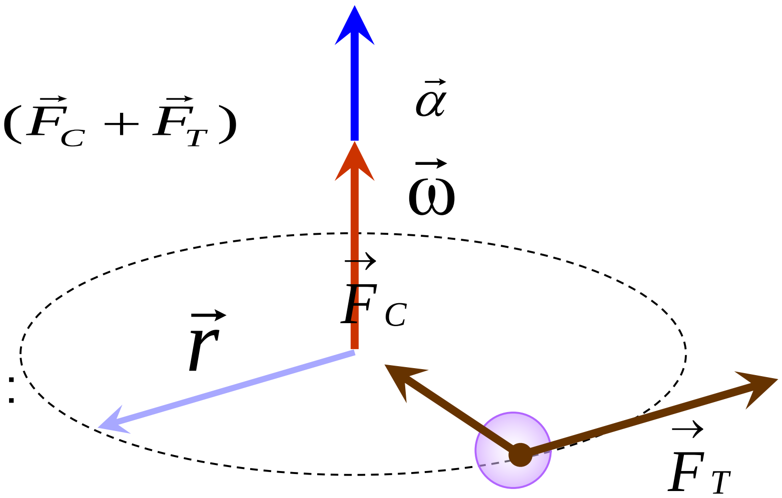


$$\vec{\tau}_O^{\,F} = \vec{r} \times \vec{F}$$



La torca y la aceleración angular

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_C + \vec{F}_T)$$



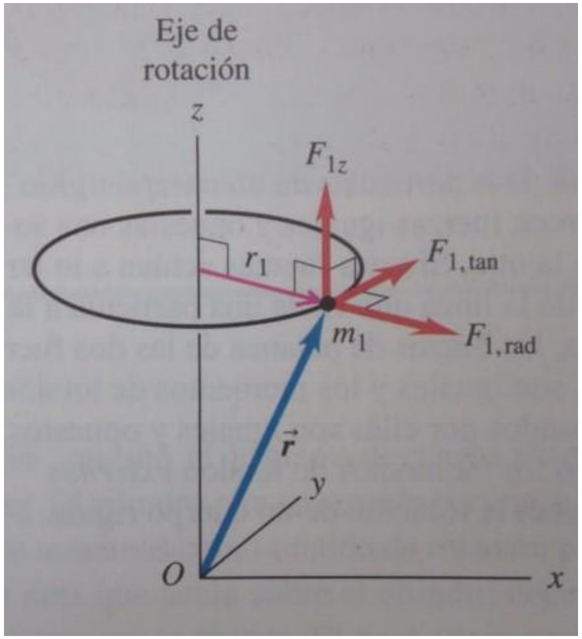
La fuerza F la podemos descomponer en 3: radial, tangencial y en z.

Sabemos que $a_T = R\alpha$, siendo F=ma, entonces $Ftg = miRi\alpha$

La torca $\tau i = Ri\ Fitg = miRi^2\ \alpha$

Si consideramos un sistema de partículas, la torca total será la suma de las diferentes torcas de cada partícula, por lo que

$$\Sigma\tau = \Sigma m_i R^2{}_i\ \alpha$$



Por lo que:

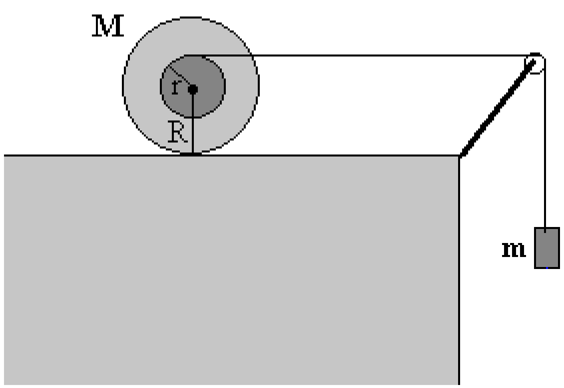
$$\Sigma\tau = I\,\alpha$$

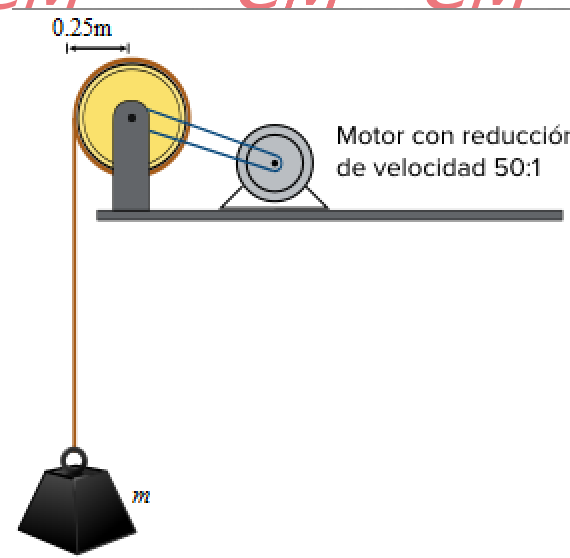
$$\Sigma\tau = \Sigma\tau_{int} + \Sigma\tau_{ext}$$

y es el equivalente rotacional a la 2ª ley de Newton, válida para la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo.

$$\Sigma\tau_{CM} = I_{CM}\alpha_{CM}$$

E

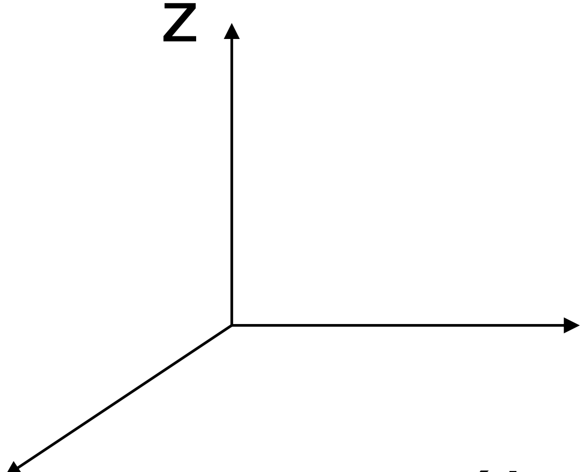




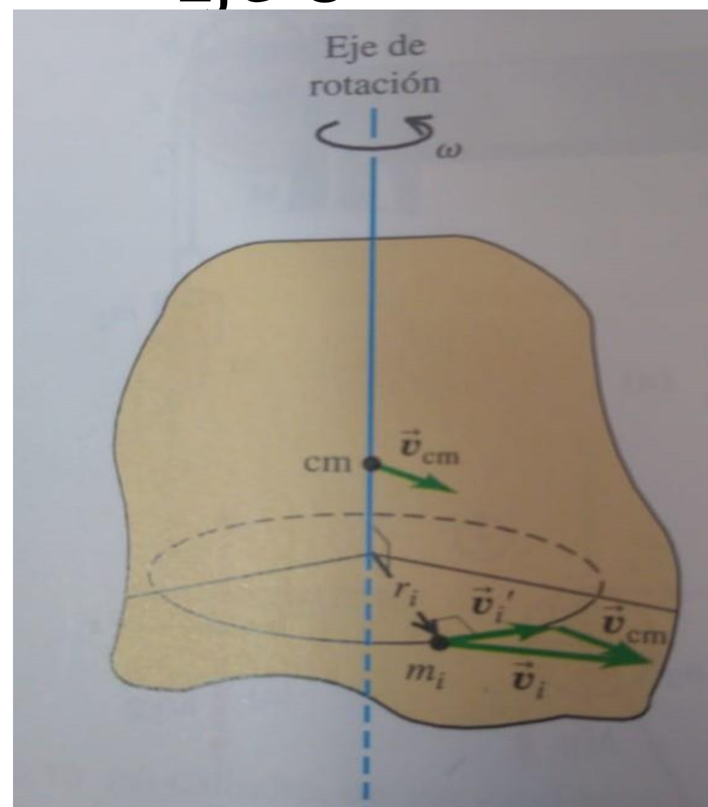
Rotación de un cuerpo rigido sobre un eje móvil

- Traslación y rotación combinados: relaciones de energía

- Eje O　　　　Eje O´
- z



- y
- X　　　en O´la $v_{cm}=0$
- y　　$v_{cm}=\frac{\sum_i m_i v'_i}{M}$



Energía cinética en la rodadura

- $\mathbf{v_i = v_{cm} + v\acute{}_i}$

La $K_i = ½\ m_i\ v^2_i = ½\ m_i\ (\mathbf{v_{cm}} + \mathbf{v\acute{}_i})^2 =$

$½m_i\ (v_{cm} + v\acute{}_i)(v_{cm} + v\acute{}_i) = ½\ m_i\ (v^2_{cm} + 2\mathbf{v_{cm}}.\mathbf{v\acute{}_i} + v\acute{}^2_i)$

La energía cinética total:

$K = \Sigma Ki = \Sigma ½\ m_i\ (v^2_{cm} + 2\mathbf{v_{cm}}.\mathbf{v\acute{}_i} + v\acute{}^2_i) =$

$= \Sigma ½\ m_i\ v^2_{cm} + \Sigma ½\ m_i 2\mathbf{v_{cm}}.\mathbf{v\acute{}_i} + \Sigma ½\ m_i\ v\acute{}^2_i$

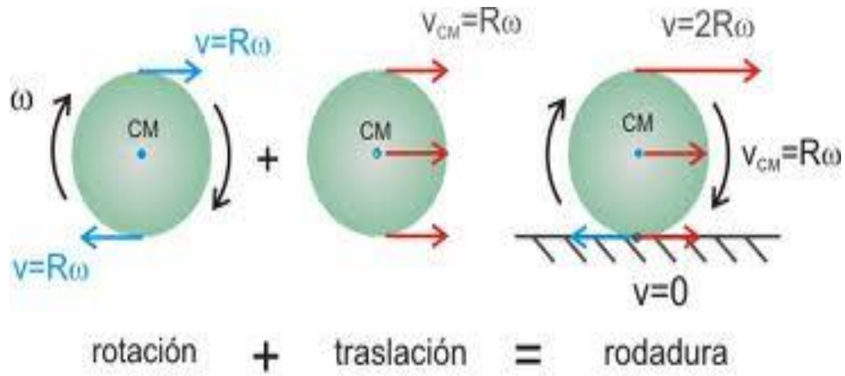
$$K = ½\ M\ v^2_{cm} + ½\Sigma\ m_i\ r_i^2 \omega^2$$

$K = K_{tras} + K_{rot}$

$K_{tras} = ½\ M\ v^2_{cm}$

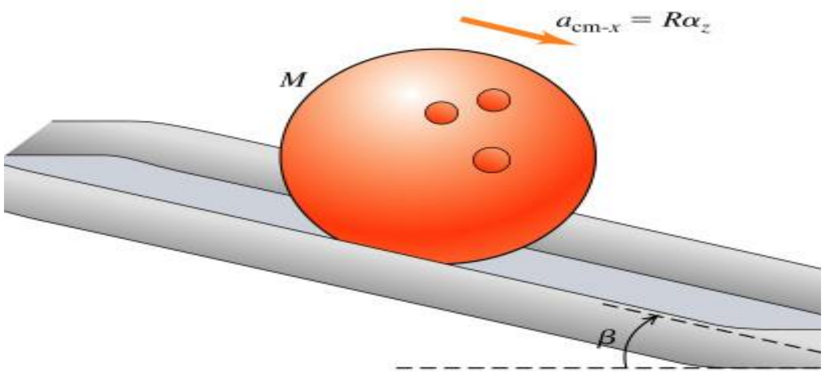
$K_{rot} = +\ ½ I\omega^2$

MOVIMIENTOS ROTACIONAL Y TRASLACIONAL COMBINADOS: RODADURA



Eje instantáneo: el punto de contacto de la rueda se encuentra momentáneamente en reposo.

$$v_{cm} = R\,\omega$$



(a)

En la dinámica del objeto rodante, se analiza la traslación del CM más la rotación con respecto al CM, considerando la 2° ley de Newton:

$\Sigma F = ma$

$\Sigma\ \tau = I\alpha$

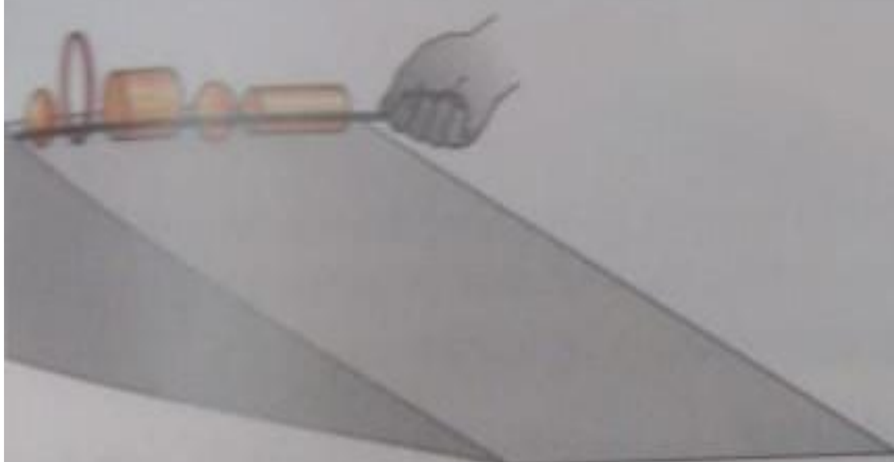
La energía cinética del movimiento será:

$K_T = K_{tral} + K_{rot}$

si consideramos el rodamiento sin deslizamiento en un plano inclinado, la energía mecánica permanece constante.

Carrera de los cuerpos rodantes: consideraciones energéticas

ción 5.3, si los cuerpos y la superficie sobre la que ruedan
mente rígidos. (Más adelante explicaremos por qué.)



¿Cuál cuerpo baja más rápidamente y por qué?

EJECUTAR: Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

así que la rapidez en la base de la pendiente es

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton

$$Mg \operatorname{sen}\theta - F_{\mathrm{fr}} = Ma,$$

y en la dirección y

$$F_N - Mg\cos\theta = 0$$

ya que no hay aceleración perpendicular al plano. Esta última ecuación meramente nos da la magnitud de la fuerza normal,

$$F_N = Mg\cos\theta.$$

Para el movimiento rotacional con respecto al CM, usamos la segunda ley de Newton para rotación $\Sigma\tau_{\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}}\alpha_{\mathrm{CM}}$ (ecuación 10-15), calculada con respecto a un eje que pasa por el CM, pero fijo en dirección:

$$F_{\mathrm{fr}} r_0 = \left(\tfrac{2}{5}Mr_0^2\right)\alpha.$$

Las otras fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_N$ y $M\vec{\mathbf{g}}$, apuntan a través del eje de rotación (CM), por lo que sus brazos de palanca son cero y no aparecen aquí. Como vimos en el ejemplo 10-16 y en la figura 10-30, $\omega = v/r_0$, donde v es la rapidez del CM. Derivando $\omega = v/r_0$ con respecto al tiempo tenemos $\alpha = a/r_0$ y sustituyendo en la última ecuación, encontramos

$$F_{\mathrm{fr}} = \tfrac{2}{5}Ma.$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y obtenemos

$$Mg \operatorname{sen}\theta - \tfrac{2}{5}Ma = Ma,$$

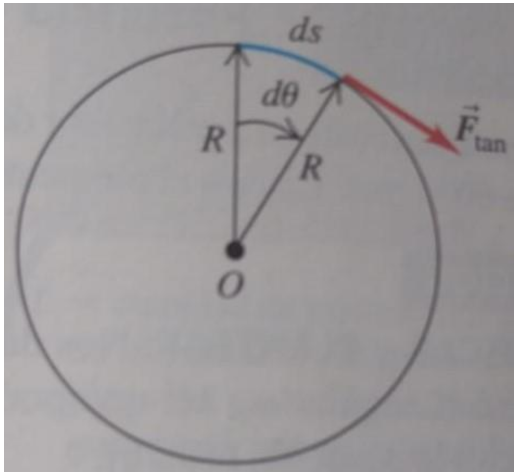
o bien,

$$a = \tfrac{5}{7}g \operatorname{sen}\theta.$$

Vemos así que la aceleración del CM de una esfera rodante es menor que la de un objeto deslizándose sin fricción ($a = g \operatorname{sen}\theta$). La esfera partió del reposo en la parte su-

Energia y potencia

- Energía Potencial de un cuerpo extendido:
- $U_i = m_i g y_i \quad U = \Sigma_i m_i g y_i = (\Sigma_i m_i y_i) g$
- **$U = mgy_{cm}$**



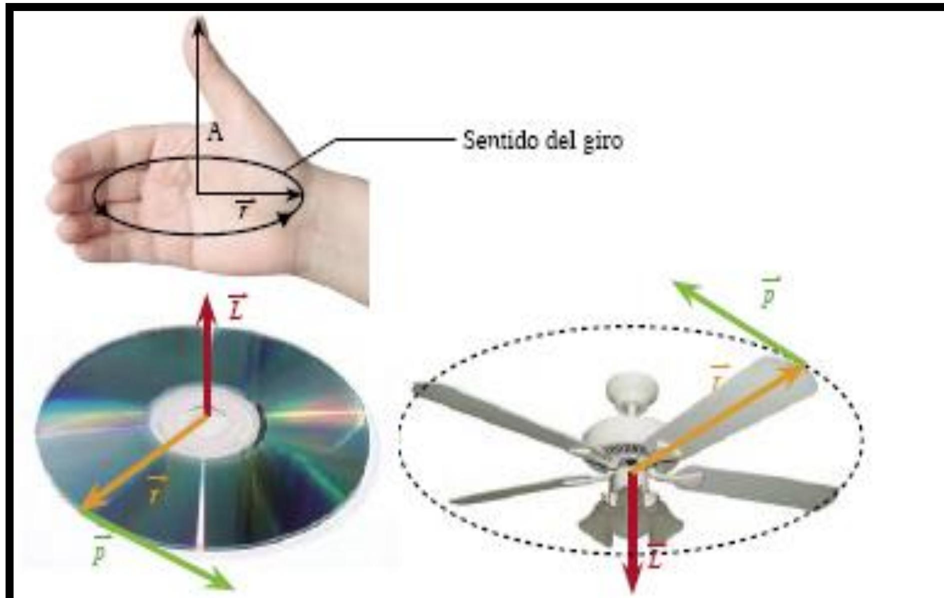
- Imagine que un cuerpo gira,
- sobre el que se realiza un trabajo
- por F_{tag}: $dW = F_{tag}\, ds = F_{tag}\, R d\theta$
- $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Ftag\, R\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta$
- $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} mR^2 \alpha d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{mR^2\, d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega 1}^{\omega 2} I\omega d\omega =$
- $= \frac{1}{2} I\omega^2{}_{2} - \frac{1}{2} I\omega^1{}_1$

$W = \Delta K$ si derivamos **$P = T\omega$**

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Los objetos que giran experimentan una “inercia de rotación” que los mantiene girando hasta que “algo” los detiene o cambia su velocidad.

Una medida de esta propiedad es lo que llamamos **momento angular (L).**



$$L = I\,\omega$$

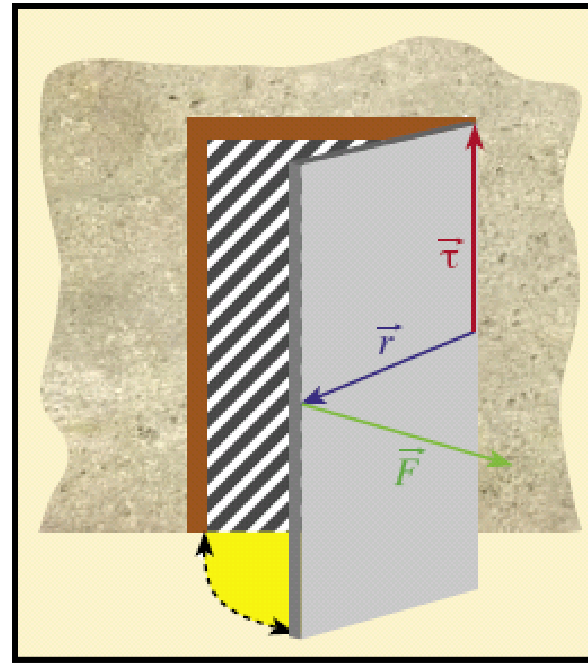
- $[L] = [I][\omega]$
- $[L] = \text{kgm}^2 1/\text{s}$

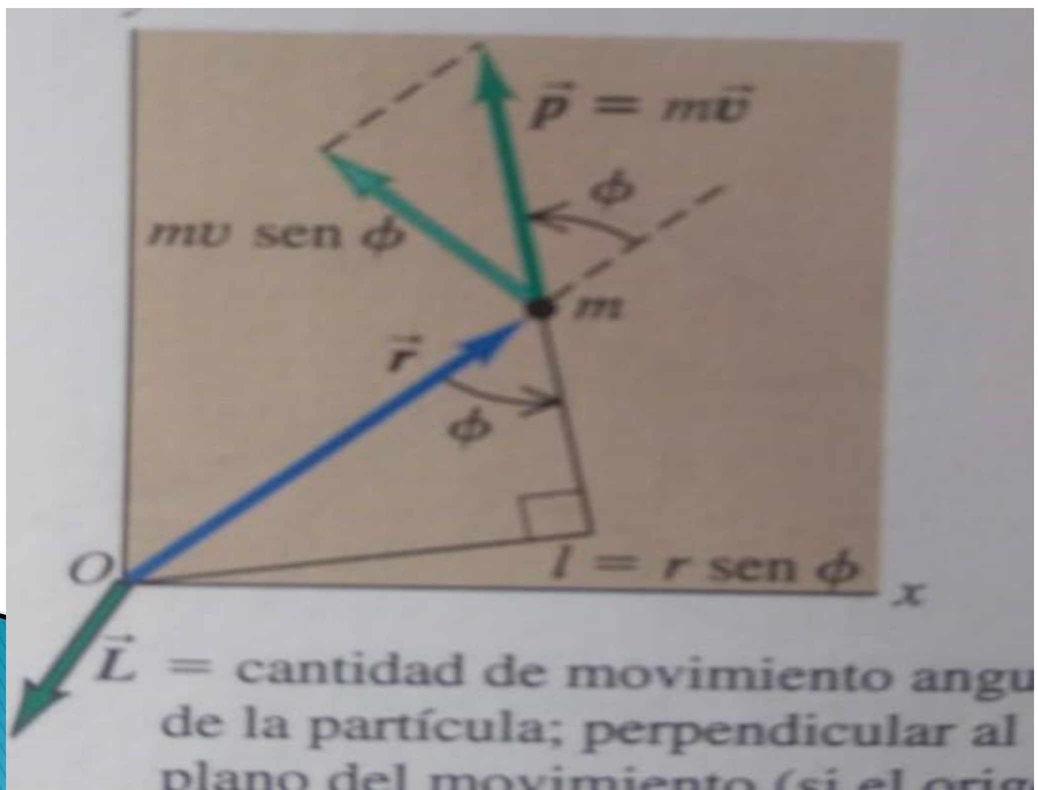
Si recordamos que para masas puntuales que giran en un circulo de radio R

$I = M R^2$

Entonces → $\underline{L = M R^2 \omega}$ ó

$L = M R v$ $\qquad$ $L = r x p$

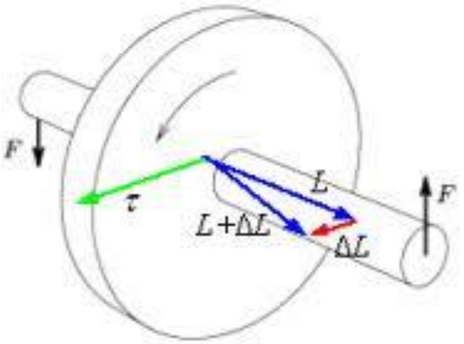




La torca y cantidad de movimiento

- L=rxp si derivamos
- dL/dt = dr/dt x p + r x dp/dt

dL/dt = v x p + r x F

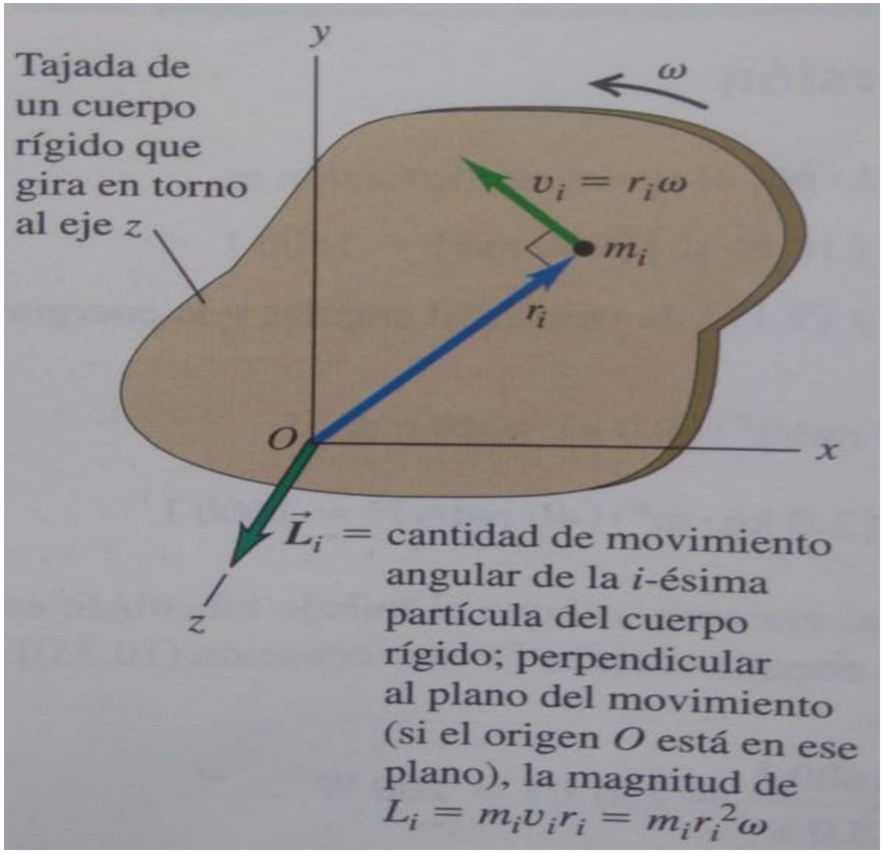


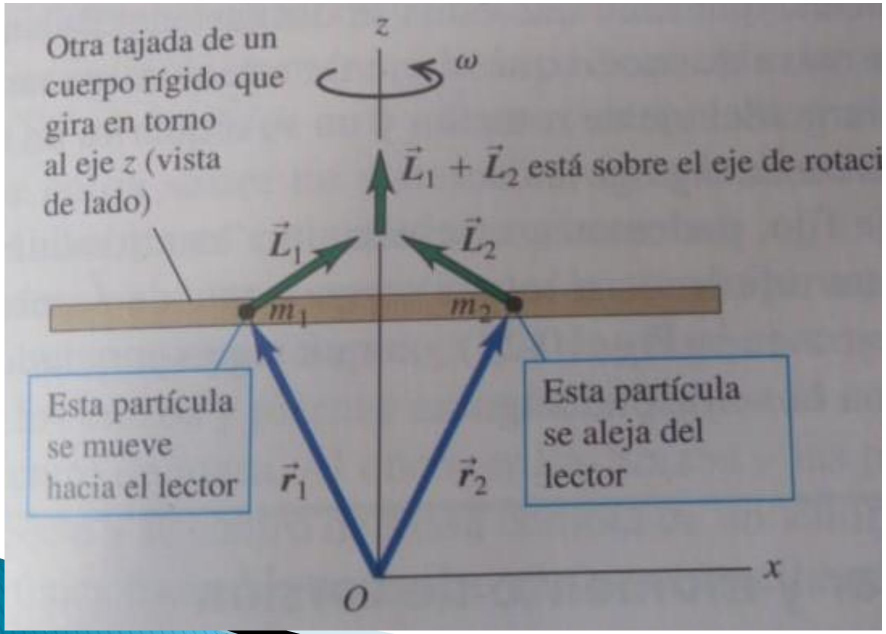
Σ τ =dL/dt

LA RAPIDEZ DE CAMBIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA PARTICULA ES IGUAL AL MOMENTO DE TORSION DE LA FUERZA NETA QUE ACTUA SOBRE ELLA

Cantidad de movimiento

- $Li = m_i v_i r_i = m_i(\omega r_i) r_i =$
- $= m_i \omega r^2{}_i$
- $L = \Sigma L_i = \Sigma\ m_i r^2{}_i \omega = I\ \omega$
- $L = I\omega$
-



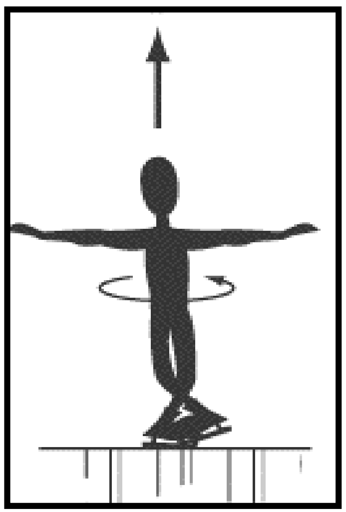


naturaleza vectorial de L

$L = I\ \omega$

Conservación de cantidad de movimiento angular

Si el momento de torsión externo neto que actua sobre un sistema es cero, entonces la cantidd de movimiento angular total del sistema permance constante

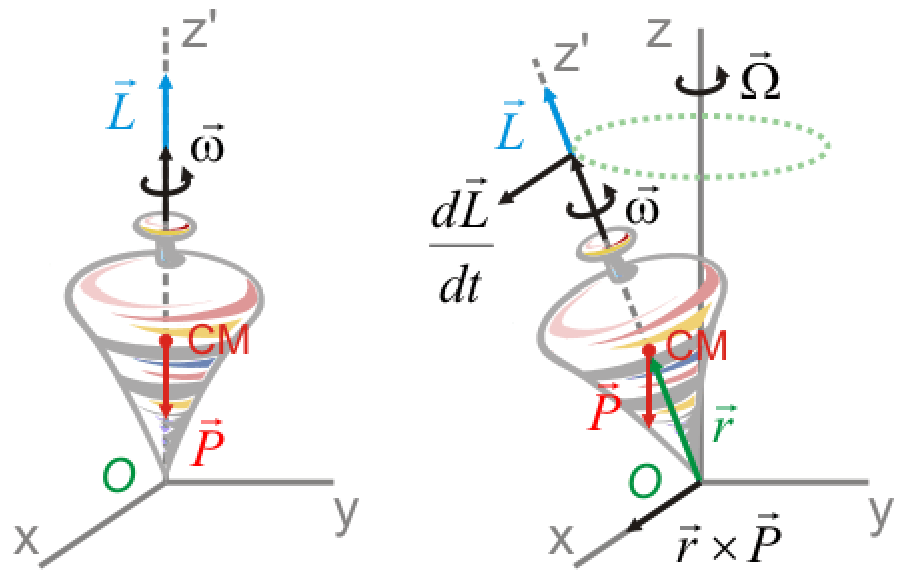


dL/dt=0

L=Iw=cte

El trompo y el giróscopo

Cuando la cantidad de movimiento no permanece constante, la torca produce un cambio en el eje de rotación, produciendo un nuevo movimiento llamado precesión



EL MOVIMIENTO DE PRECESIÓN

Si actúa una torca neta sobre el sistema, entonces:

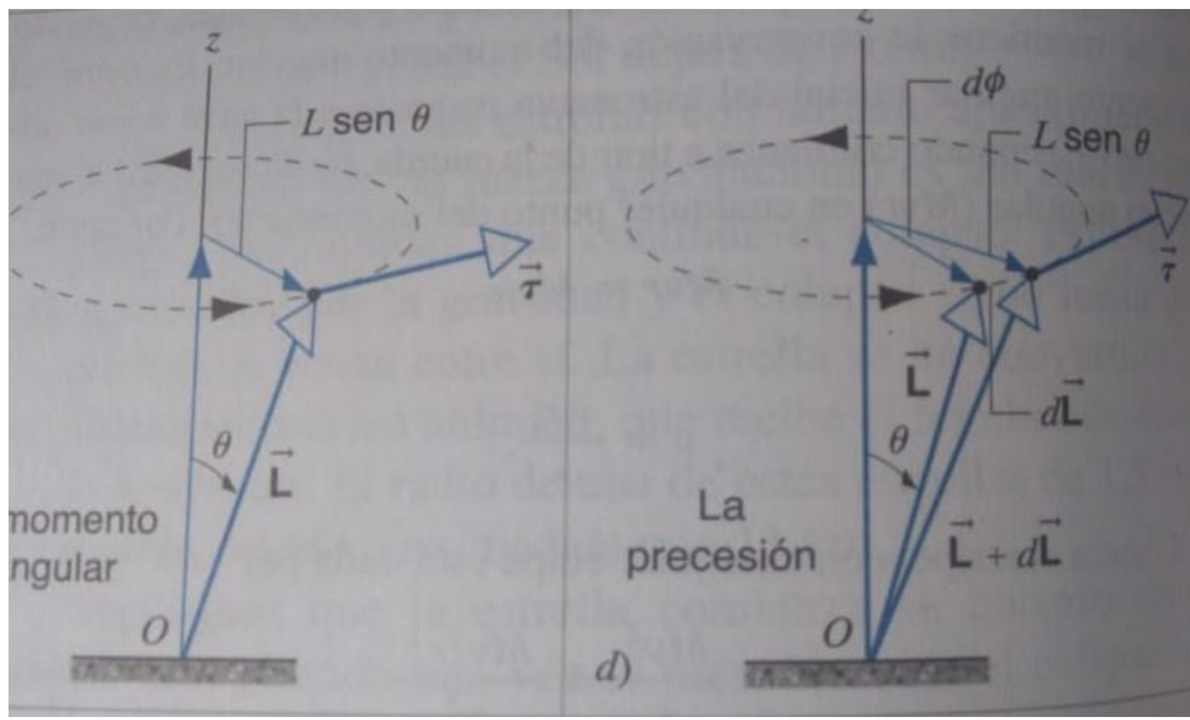
$dL = \tau_{net}\, dt$

Ώ $= d\phi/dt$ y como $d\phi = dL/L\mathrm{sen}\theta$ entonces

Ώ$= (dL/L\mathrm{sen}\theta)\, dt = Mgr\mathrm{sen}\,\theta\ /Iw\mathrm{sen}\theta$

Ώ$= Mgr/Iw$

Ώ$= T_{net}/L$



Ejemplos de movimientos de precesión