Actividades a desarrollar en Clases de Aula-Taller

24. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (4, -2, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (2, 0, -1)$:

a) Calcule el vector ***w*** resultado del producto vectorial entre los vectores ***a*** y ***b***.

b) Compruebe que el vector ***w*** es perpendicular a cada uno de los vectores dados.

c) Identifique el espacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

c.i) $\{ \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} \}$; c.ii) $\{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} , \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \}$

Respuestas:

a) Calculamos el producto vectorial entre ***a*** y ***b:***

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i(2-0) - j(-4-6) + k(0+4) = (2,10,4)$$

Como $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, concluimos que $\boldsymbol{w} = (2,10,4)$.

b) Verificamos que el vector resultante del producto vectorial entre los vectores ***a*** y ***b*** es perpendicular a los vectores dados, planteando los siguientes productos escalares:

$\boldsymbol{w} . \boldsymbol{a}$ = [(2, 10, 4) . (4, -2, 3)] = 8-20+12=0

$\boldsymbol{w} . \boldsymbol{b}$ = [(2, 10, 4) . (2, 0, -1)] = 4+0-4=0

c)

c.i) Como los vectores ***a*** y ***b*** no son proporcionales, son *LI* y el espacio generado por $\{ \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} \}$ será un plano de R^3, es decir:

$$S = \{\boldsymbol{u} \in R^3 / \boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} \; con \; k_1 \in R \;\wedge\; k_2 \in R\}$$

c.ii) Expresamos al $\vec{\mathbf{0}}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} , \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, veamos:

$$(0,0,0) = k_1(4,-2,3) + k_2(2,0,-1) + k_3(2,10,4)$$

$$\begin{cases} 0 = 4k_1 + 2k_2 + 2k_3 \\ 0 = -2k_1 + 10k_3 \\ 0 = 3k_1 - k_2 + 4k_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que la *única* solución es:

$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$

Siendo los tres escalares *únicamente nulos*, los tres vectores son LI y por lo tanto el espacio generado por $\{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} , \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \}$ es R^3.

25. Para los vectores dados: $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, 0)$ y $\boldsymbol{c} = (1, 3, 0)$,

a) Verifique la siguiente identidad: $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$

b) Interprete geométricamente la identidad dada en el inciso anterior e indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}), \,\}$ es base de R^3

Respuestas:

a) Trabajamos con el primer miembro de la igualdad planteada en el enunciado:

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\breve{\boldsymbol{\imath}} + 0\breve{\boldsymbol{\jmath}} + (9-1)\breve{\boldsymbol{k}} = (0,0,8)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (8-0)\breve{\boldsymbol{\imath}} - (-16-0)\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 0\breve{\boldsymbol{k}} = (8,16,0)$$

Por lo tanto, el primer miembro resulta:

$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (8,16,0)$ (I)

Evaluamos a continuación el segundo miembro de la igualdad planteada en el enunciado:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} = [(-2,1,2)\,.\,(1,3,0)] = -2 + 3 = 1$$
$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} = 1.(3,1,0) = (3,1,0)$$

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = [(-2,1,2)\,.\,(3,1,0)] = -6 + 1 = -5$$
$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} = -5\,(1,3,0) = (-5,-15,0)$$

Luego:

$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} = (3,1,0) - (-5,-15,0) = (8,16,0)$ **(II)**

A partir de los resultados en (I**)** y **(**II**)** podemos concluir que se verifica la identidad planteada para los vectores dados: $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$.

b)

El doble producto mixto **a** $\wedge$ (**b** $\wedge$ **c**) es un nuevo vector que es *combinación lineal* de los vectores **b** y **c:**

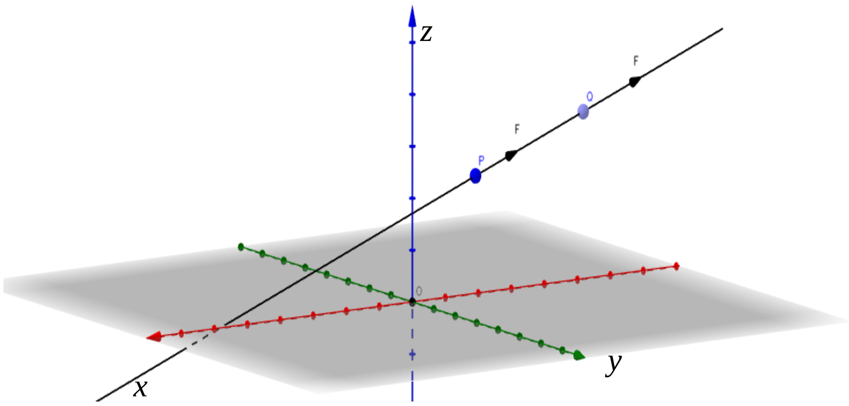
$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$$

donde los escalares de la *combinación lineal* son: $k_1 = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}$ y $k_2 = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}$.

Por lo tanto $\{\, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}), \,\}$ es LD, y no forma una base de R^3.

---

26. Una fuerza puede trasladarse sobre su recta de acción. Teniendo en cuenta ello, demuestre que el vector momento de una fuerza no depende del punto de aplicación de la misma.



Consideramos dos posibles puntos de aplicación del vector fuerza $\boldsymbol{F}$, ubicados sobre la misma recta de acción de la fuerza, y los llamamos P y Q.

Designamos $\boldsymbol{M_1}$ al momento $\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{F}$, (I) siendo $\boldsymbol{OP}$ el vector posición del punto P de aplicación de la fuerza $\boldsymbol{F}$.

Designamos $\boldsymbol{M_2}$ al momento $\boldsymbol{M_2} = \boldsymbol{OQ} \wedge \boldsymbol{F}$, (II) siendo $\boldsymbol{OQ}$ el vector posición del punto Q de aplicación de la fuerza $\boldsymbol{F}$.

Pero los puntos P y Q están sobre la misma recta de acción. Por lo tanto*:*

$\boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{OP}$**.** (III)

Sustituimos (III) en (I) y obtenemos:

$\boldsymbol{M_1} = (\boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{QP}) \wedge \boldsymbol{F}$

Aplicamos propiedad distributiva del producto vectorial con respecto a la suma de vectores:

$\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{OQ} \wedge \boldsymbol{F} + \boldsymbol{QP} \wedge \boldsymbol{F}$

Pero los vectores $\boldsymbol{QP}$ *y* $\boldsymbol{F}$ son paralelos y por lo tanto el producto vectorial es nulo. Es decir, $\boldsymbol{M_1}$ resulta :

$\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{OQ} \wedge \boldsymbol{F}$ **,** pero esta expresión coincide con (II).

Por lo tanto $\boldsymbol{M_1} = \boldsymbol{M_2}$

---

27. Dados los vectores $\boldsymbol{a} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{b} = (3,-2,1)$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} - 6\,\boldsymbol{k}$,

a) Determine el vector $\boldsymbol{v}$, sabiendo que $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y satisface además la condición $\boldsymbol{v}.\ \boldsymbol{c} = 40$

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{v}$ forman una base de R^3.

Respuestas:

a) Siendo $\boldsymbol{v}$ perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, calculamos el producto vectorial:

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=i(2+6)-j(1-9)+k(-2-6)=(8,8,-8),$$

El vector resultante $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ es proporcional al vector $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$, ya que tienen la misma dirección (son paralelos), por lo tanto:

$$(8,8,-8)=k(v_x,v_y,v_z)$$

$$\left(\frac{8}{k},\frac{8}{k},-\frac{8}{k}\right)=(v_x,v_y,v_z) \quad \textit{(1)}$$

La otra condición que cumple el vector $\boldsymbol{v}$ es: $\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{c}$ = 40, por lo tanto sabemos que:

$(v_x,v_y,v_z).(1,3,-6)=40$, es decir:

$$v_x+3v_y-6v_z=40 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) obtenemos:

$$\frac{8}{k}+3\frac{8}{k}-6\left(-\frac{8}{k}\right)=40$$

$$\frac{8+24+48}{40}=k;k=2$$

Entonces $\mathbf{v}=(4,4,-4)$ y la solución es única.

b) $\{a,b,v\}$ es una *base* de R^3 porque **a**,**b** y **v** son tres vectores de R^3 LI. Veamos*:*

$$(0,0,0)=k_1(1,2,3)+k_2(3,-2,1)+k_3(1,3,-6)$$

$$\begin{cases} 0=k_1+3k_2+k_3 \\ 0=2k_1-2k_2+3k_3 \\ 0=3k_1+k_2-6k_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que la única solución es $k_1=k_2=k_3=0$.

Siendo los tres escalares *únicamente nulos*, los tres vectores son LI y por lo tanto el espacio generado por $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}\}$ es R^3. Al ser conjunto LI y conjunto generador de R^3, forman base de R^3.

---

28. Sean los vectores $\boldsymbol{a}$ = (2, 3, 5), $\boldsymbol{b}$ = (2, 3, 2) y $\boldsymbol{c}$ = (– 4, α, –10).

a) Halle el valor de α de modo que el producto mixto de los tres vectores dados sea nulo.

b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ forman una base de R^3.

Respuestas:

a) Calculamos el producto vectorial entre **b** y **c**:

$$\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & \alpha & -10 \end{vmatrix}=i(-30-2\alpha)-j(-20+8)+k(2\alpha+12)=(-30-2\alpha,12,2\alpha+12)$$

Luego, evaluamos $\boldsymbol{a}.(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$ y resulta:

$$(2,3,5).(-30-2\alpha,12,2\alpha+12)=-60-4\alpha+36+10\alpha+60=36+6\alpha$$

Como sabemos que el producto mixto es nulo, se tiene: $36+6\alpha=0$

Por lo tanto $\alpha=-6$.

b) Siendo nulo el producto mixto, los vectores son coplanares, y por lo tanto linealmente dependientes. Entonces, $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ no forman una base de R^3.

Otra forma de justificar:

$$(0,0,0)=k_1(2,3,5)+k_2(2,3,2)+k_3(4,-6,-10)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=2k_1+2k_2+4k_3 \Rightarrow \dfrac{k_1+k_2}{2}=k_3 \\ 0=3k_1+3k_2-6k_3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3k_1+3k_2-3k_1-3k_2 \Rightarrow k_1,k_2 \text{ pueden tomar}$$

$$0=5k_1+2k_2-10k_3$$

cualquier valor real y k_3 depende de ellos, por lo tanto, existen infinitas soluciones. Es decir, los vectores son LD y por lo tanto no forman una base de R^3.

---

29. Dados los puntos A(9,0,0), B(0,9,0), C(0,0,9) y D(0,0,0):

a) Calcule el volumen del tetraedro *ABCD*.

b) Represente gráficamente.

Respuesta:

Expresamos los vectores asociados a las tres aristas no paralelas:

$$\mathbf{DA}=(9,0,0)$$
$$\mathbf{DB}=(0,9,0) \text{ y calculamos el producto mixto } \mathbf{DA}.(\mathbf{DB}\wedge\mathbf{DC})=\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=729$$
$$\mathbf{DC}=(0,0,9)$$

El volumen del tetraedro es igual a 1/6 del volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores como aristas adyacentes. Por lo tanto: $Vol_{tetraedro}=\frac{729}{6}\,[L]^3=121.5\,[L]^3$