COORDENADAS POLARES CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Respuestas Ejercicios 119 a 125

119. Determine la forma polar de las siguientes ecuaciones:

$y = 8x$; $x^2 + y^2 = 49$; $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

Respuestas:

La ecuación $y = 8x$ corresponde a una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente $m = 8$. Si situamos el polo de un sistema de coordenadas polares coincidente con el origen de coordenadas y el eje polar coincidente con el eje positivo de las abscisas x, entonces los puntos de la recta con la que estamos trabajando serán todos los puntos tales que el vector que se extiende desde el polo hasta el punto tendrá un ángulo igual que la recta en coordenadas cartesianas

$$tan(\varphi) = 8$$
$$\varphi = arctan(8)$$

Tenemos dos opciones de ángulos que tienen tangente igual 8, una es un ángulo del primer cuadrante y la otra es un ángulo del tercer cuadrante.
$\varphi = 82°52'30''$ y $\varphi = 262°52'30''$
Debemos considerar los dos ángulos debido a que el valor de ρ no puede ser negativo, por ende si solo consideráramos $\varphi = 82°52'30''$ estaríamos expresando una semirrecta, es decir la mitad de los puntos que componen la recta $y = 8x$.
Por ende, la forma polar de dicha recta es:

$$\varphi = 82°52'30'' \ \cup \ \varphi = 262°52'30''$$

<u>*Observación*</u>: Otra ecuación en coordenadas polares para la recta $y = 8x$ se puede obtener aplicando las ecuaciones de transformación de coordenadas y la ecuación sería:

$$\rho \ sen \ \varphi = 8\rho \cos \varphi$$
$$0 = \rho(8cos\varphi - sen \ \varphi)$$

La ecuación: $x^2 + y^2 = 49$ corresponde a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 7.

Recordamos que la ecuación en coordenadas polares de una circunferencia es:

$$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$

Donde r es el radio y las coordenadas del centro son $C(\rho_1, \varphi_1)$. Si situamos el polo de un sistema de coordenadas polares coincidente con el origen de coordenadas y el eje polar coincidente con el eje positivo de las abscisas x, entonces las coordenadas del centro serán: $C(0,0)$. Remplazamos esta información en la ecuación de la circunferencia y obtenemos:

$$7^2 = \rho^2 + 0 - 2\rho(0)\cos(\varphi)$$

Entonces la forma polar de la ecuación de la circunferencia de radio 7 y centro en el origen de coordenadas será:

$$\rho = 7$$

La ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ corresponde a una circunferencia. Debemos encontrar la ecuación canónica de la misma para poder encontrar las coordenadas del centro y el radio que es la información que necesitamos para poder escribir la forma polar de dicha ecuación.
Completamos cuadrado y despejamos:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 9 = 0$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 10$$

Entonces el radio es $\sqrt{10}$ las coordenadas del centro en coordenadas cartesianas son: $C_c(1{,}0)$. En coordenadas polares corresponderá $\rho_1 = 1\ y\ \varphi_1 = 0$, entonces: $C(1{,}0)$. Remplazamos esta información en la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares:
$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)$ y obtenemos la forma polar de la ecuación de la circunferencia.

$$10 = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\varphi)$$

$$9 = \rho^2 - 2\rho\cos(\varphi)$$

Observación: Otra forma de obtener a la ecuación en coordenadas polares es aplicando las ecuaciones de transformación de coordenadas y se llega a la misma ecuación anterior.

---

120. En coordenadas polares la expresión analítica de cierta curva es: $\rho = \frac{6}{1-cos\theta}$

Halle la expresión cartesiana rectangular de la misma e indique el nombre de la curva correspondiente.

Respuesta:

Recordemos que la ecuación de una cónica en coordenadas polares es de la forma:

$\rho = \frac{e\,p}{1-e\,cos\theta}$ realizando una comparación con la ecuación del enunciado podemos extraer la siguiente información: e = 1, $e.p = 6$ y por lo tanto, $p = 6$.

Sabemos que, si la excentricidad es 1, estamos en presencia de una parábola. Si ubicamos un sistema de ejes cartesianos que tenga origen en el foco de la parábola y el eje positivo de las abscisas x coincidente con el eje polar, las coordenadas de algunos puntos significativos de la parábola en ambos sistemas son:

Punto	θ	$\cos\theta$	ρ	Coord. Polares	Coord. Cartesianas
-	0	1	-	-	-
Extremo LR	π/2	0	6	A(6, π/2)	A(0, 6)
Vértice	π	-1	3	V(3, π)	V(-3, 0)
Extremo LR	3π/2	0	6	A’(6, 3π/2)	A’(0, -6)

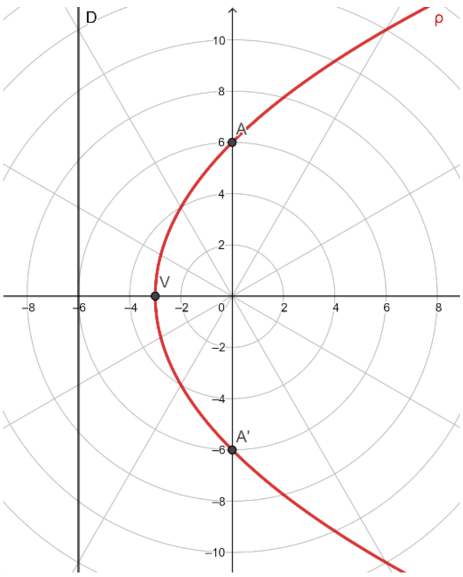
Según el sistema elegido y teniendo en cuenta que el significado del parámetro p es el mismo en ambos sistemas, es decir sigue siendo la distancia entre el foco y la directriz, podemos plantear la ecuación de la parábola con foco en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de las x.

Partiendo de la ecuación cartesiana de la parábola con eje focal paralelo al eje x:

$$(y-k)^2 = 2\,.\,6\;(x-h)$$

Remplazamos $V(-3,0)$ y $p\;=\;6$:

$$y^2 = 12\;(x+3)$$



---

121. Dada las funciones en coordenadas polares:

$\rho = \frac{6}{1+\frac{1}{2}\,cos\theta}$ $\qquad \rho = \frac{6}{1+cos\theta}$ $\qquad \rho = \frac{12}{2-sen\theta}$ $\qquad \rho = \frac{12}{2-4cos\theta}$

a) Indique para cada una de ellas, de qué cónica se trata, justificando su respuesta.

b) Represente gráficamente las cónicas, en coordenadas polares, indicando las coordenadas polares del centro y de los focos en cada uno de los casos.

Respuestas:

- $\rho = \frac{6}{1+\frac{1}{2}\,cos\theta}$

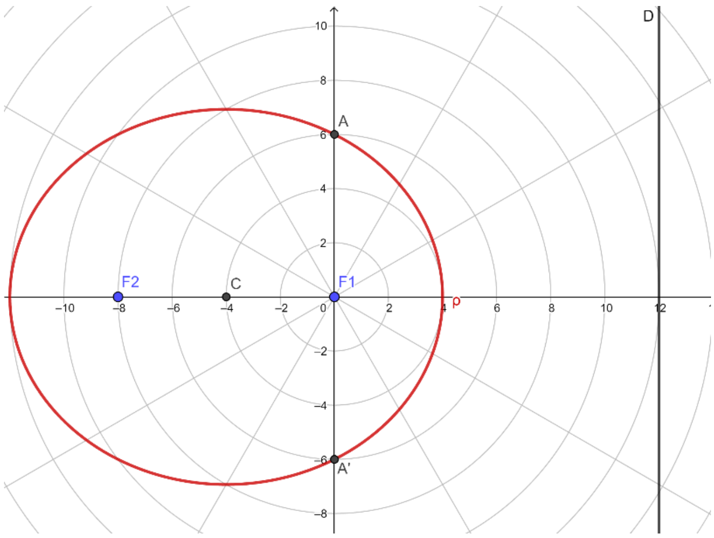
Recordamos que en coordenadas polares, la ecuación de una cónica con eje focal paralelo al eje x es $\rho = \frac{e\,p}{1+e\,cos\theta}$, entonces por comparación con la ecuación del enunciado, podemos deducir la excentricidad es $e = 1/2$, se trata de una elipse por ser $e < 1$.

El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 12$ y $|LR| = 2ep = 12$.

La función coseno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta paralelo o coincidente al eje polar, y el signo positivo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra a la derecha del mismo, siendo ésta por definición perpendicular al eje focal. Esto surgirá de la tabla de valores que planteamos a continuación:

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

θ	cosθ	ρ
0	1	4
π/2	0	6
π	-1	12
3π/2	0	6



Identificamos las coordenadas polares de los vértices $V_1(4;0)$, $V_2(12;\pi)$ y los extremos del lado recto $A\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$ y $A´\left(6;\frac{3\pi}{2}\right)$.

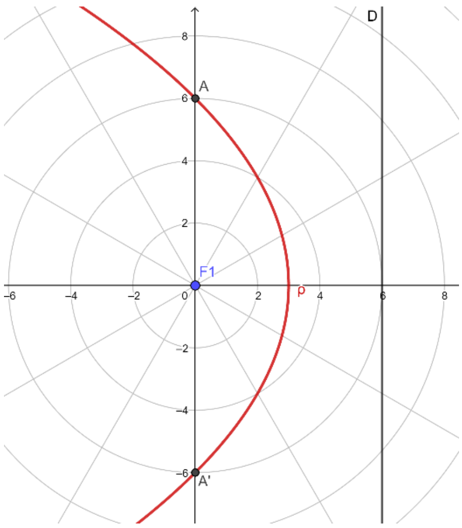
Buscamos las coordenadas polares de los focos y del centro, que no pertenecen a la curva. La distancia entre los vértices V_1 y V_2 que se sitúan sobre el eje focal es 16, por lo que el semieje mayor mide 8, podemos deducir que la distancia del centro al foco es 4, por lo que: $F_1(0;0)$, $F_2(8;\pi)$, $C(4;\pi)$.

- $\rho = \frac{6}{1 + cos\theta}$

Podemos deducir la excentricidad es $e = 1$, por lo tanto, estamos en presencia de una parábola. El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 6$ y $|LR| = 2ep = 12$.
La directriz es perpendicular al eje polar y se encuentra a la derecha del polo, lo cual surgirá también de la tabla de valores que planteamos a continuación:

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

θ	cosθ	ρ
0	1	3
π/2	0	6
π	-1	-
3π/2	0	6



Identificamos las coordenadas del vértice $V(3;0)$ y los extremos del lado recto $A\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$ y $A´\left(6;\frac{3\pi}{2}\right)$

- $\rho = \frac{12}{2 - sen\theta}$

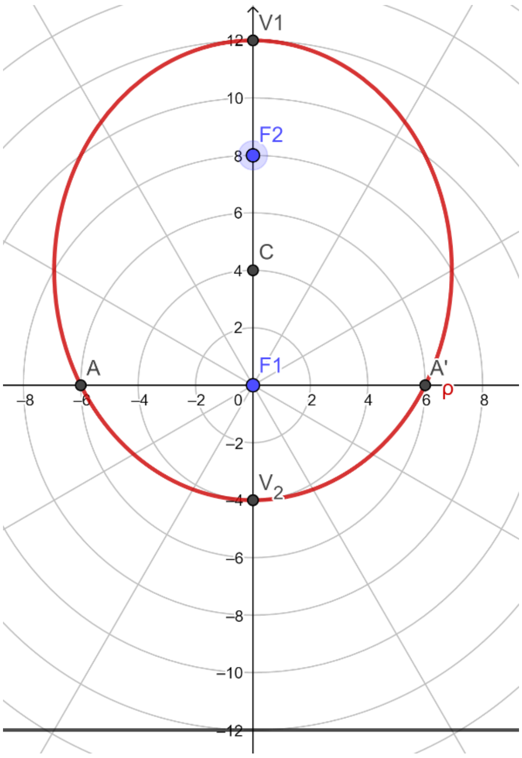
Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{12}{2\left(1 - \frac{1}{2}sen\theta\right)} = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}sen\theta}$$

Podemos deducir la excentricidad es $e = 1/2$, por lo tanto, estamos en presencia de una elipse. El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 12$ y $|LR| = 2ep = 12$. La directriz es paralela al eje polar, por ser la función trigonométrica del denominador $sen\theta$ y se encuentra abajo del polo, por ser el binomio del denominador una resta, lo cual surgirá a partir de la tabla de valores que planteamos a continuación.

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

θ	$sen\theta$	ρ
0	0	6
π/2	1	12
π	0	6
3π/2	-1	4



Identificamos las coordenadas de los vértices $V_1\left(12; \frac{\pi}{2}\right)$, $V_2\left(4; \frac{3\pi}{2}\right)$ y los extremos del lado recto $A(6; 0)$ y $A´(6; \pi)$. Buscamos las coordenadas de los focos y del centro, que no pertenecen a la curva. La distancia entre los vértices V_1 y V_2 que se sitúan sobre el eje auxiliar a 90° del eje focal es 16, por lo que el semieje mayor mide 8, podemos deducir que la distancia del centro al foco es 4, por lo que: $F_1(0; 0)$, $F_2\left(8; \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(4; \frac{\pi}{2}\right)$.

- $\rho = \frac{12}{2 - 4\,cos\theta}$

Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{12}{2(1 - 2\,cos\theta)} = \frac{6}{1 - 2\,cos\theta}$$

Podemos deducir que la excentricidad es $e = 2$, por lo tanto, estamos en presencia de una hipérbola. El producto $pe = 6$, por lo tanto, el parámetro es $p = 3$ y $|LR| = 2ep = 12$. La directriz es perpendicular al eje polar, por ser la función trigonométrica del denominador $cos\theta$ y se encuentra a la izquierda del polo, por ser el binomio del denominador una resta, lo cual quedará determinado a partir de la tabla de valores que planteamos a continuación.

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje auxiliar a 90°:

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{cos\theta}$	$\boldsymbol{\rho}$
0	1	(-6)!
π/2	0	6
π	-1	2
3π/2	0	6

Debemos prestar atención al valor negativo de ρ que obtuvimos para un valor de $\theta = 0$. Como vimos al inicio de coordenadas polares, ρ por definición no puede ser negativo. Lo que está sucediendo es que la ecuación nos está reproduciendo el vértice de la otra rama, es decir, ese punto lo encontraremos en $(6; \pi)$. Podemos observar que hay un intervalo de valores de θ que nos reproducen valores negativos de ρ. Observando la expresión de ρ en función de θ, vemos que la única forma de que ρ sea negativo es si el denominador lo es.

$$1 - 2\,cos\theta < 0$$

$$2\,cos\theta > 1$$

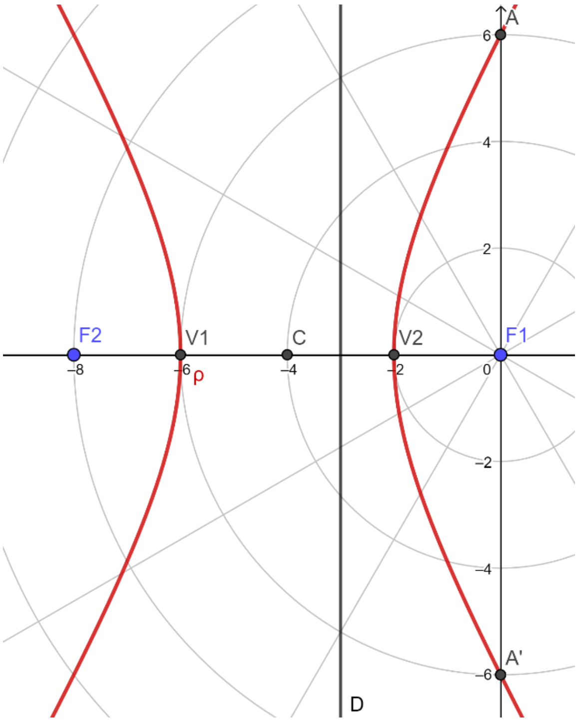
$$cos\theta > \frac{1}{2}$$

buscamos el valor de θ que tiene coseno igual a un medio.

$$\theta = arcos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 60° \;\; o \;\; \theta = -60°$$

Es decir, que para todos los ángulos comprendidos entre $-60° < \theta < 60°$ los valores de ρ son negativos, por lo que la ecuación estará reproduciendo puntos de la otra rama de la hipérbola.



Para $\theta = 60° \;\; y \;\; \theta = -60°$ no existe valor de ρ debido a la indeterminación en el denominador de la ecuación.

Entonces haciendo un cambio apropiado en el primer punto obtenido en la tabla de valores, identificamos las coordenadas de los vértices $V_1(6; \pi)$, $V_2(2; \pi)$ y los extremos del lado recto $A\left(6; \frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(6; \frac{3\pi}{2}\right)$. Buscamos las coordenadas de los focos y del centro, que son puntos que no pertenecen a la curva. La distancia entre los vértices V_1 y V_2 que se sitúan sobre el eje focal es 4, por lo que el semieje real mide 2, podemos deducir que la distancia del centro al foco es 4, por lo que: $F_1(0; 0)$, $F_2(8; \pi)$, $C(4; \pi)$.

122. Determine la ecuación en coordenadas cartesianas, en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas del plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector normal a (3, 2, 1).

Respuesta:

Comenzaremos determinando la ecuación del plano en coordenadas cartesianas. Sabemos que el vector normal es $\boldsymbol{n} = (3, 2, 1)$. Sólo nos queda determinar el valor de D, pero como el plano pasa por el origen de coordenadas, podemos deducir que D = 0.

Entonces, en *coordenadas cartesianas* la ecuación del plano es:

$$\pi: 3x \ + \ 2y \ + \ z = 0$$

Para plantear la ecuación en *coordenadas cilíndricas* usaremos las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \, cos\theta \\ y = \rho \, sen\theta \quad \rho \in [0, \infty) \ ; \ \theta \in [0, 2\pi) \\ \quad z = z \end{cases}$$

Remplazamos en la ecuación cartesiana del plano y obtenemos la ecuación del plano en *coordenadas cilíndricas*:

$$\pi: 3\rho \, cos\theta \ + \ 2\rho \, sen\theta \ + \ z = 0 \, ; \rho \in [0, \infty) \ ; \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Hacemos el mismo trabajo para encontrar la ecuación del lugar geométrico en *coordenadas esféricas*, conociendo las ecuaciones de transformación*:*

$$\begin{cases} x = \rho \, sen\varphi \, cos\theta \\ y = \rho \, sen\varphi \, sen\theta \quad \rho \in [0, \infty) \ ; \ \theta \in [0, 2\pi); \varphi \ \in [0, \pi] \\ \quad z = \rho \, cos\varphi \end{cases}$$

Tenemos que la ecuación del plano en *coordenadas esféricas* es*:*

$$\pi: 3\rho \, sen\varphi \, cos\theta \ + \ 2\rho \, sen\varphi \, sen\theta \ + \rho \, cos\varphi = 0 \ \text{ con } \rho \in [0, \infty) \ ; \ \theta \in [0, 2\pi); \varphi \ \in [0, \pi]$$

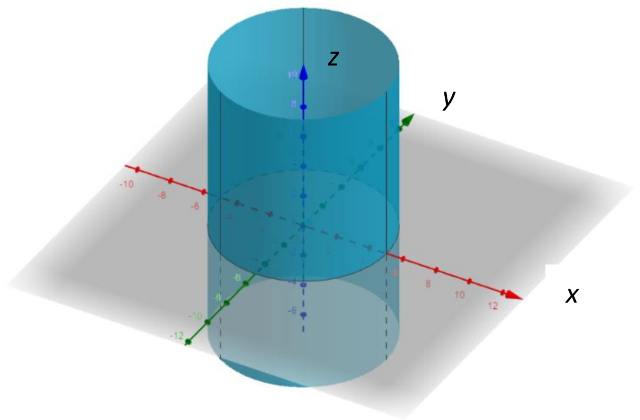
---

123. Represente gráficamente las siguientes ecuaciones en coordenadas cilíndricas:

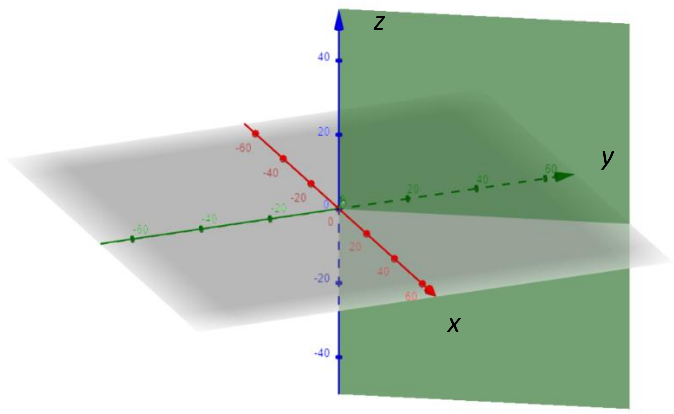
a) $\rho = 5$
b) $\theta = \pi/3$
c) $z = 5$

Respuestas:

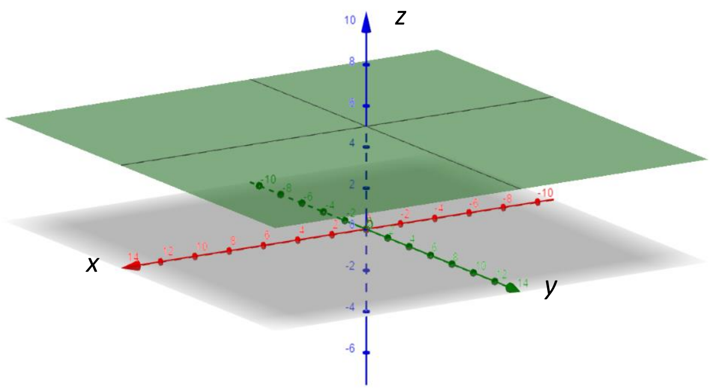
a) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación $\rho = 5$ son aquellos cuyas coordenadas cilíndricas son $P(5, \theta, z)$, es decir que las coordenadas θ y z son libres. El conjunto de dichos puntos es cilindro recto de radio 5 con eje el eje z.



b) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación $\theta = \pi/3$ son aquellos cuyas coordenadas cilíndricas son $P(\rho, \pi/3, z)$, es decir que las coordenadas ρ y z son libres. El conjunto de dichos puntos es un semiplano que contiene al eje z y que forma un ángulo de $\theta = \pi/3$ con el eje *polar* (coincidente con el eje x).



c) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación z=5 son aquellos cuyas coordenadas cilíndricas son $P(\rho, \theta, 5)$, es decir que las coordenadas ρ y θ son libres. El conjunto de dichos puntos es un plano que dista 5 unidades del plano polar.



124. Escriba las ecuaciones en coordenadas polares y represente gráficamente las siguientes curvas:

a) Curvas de trébol.

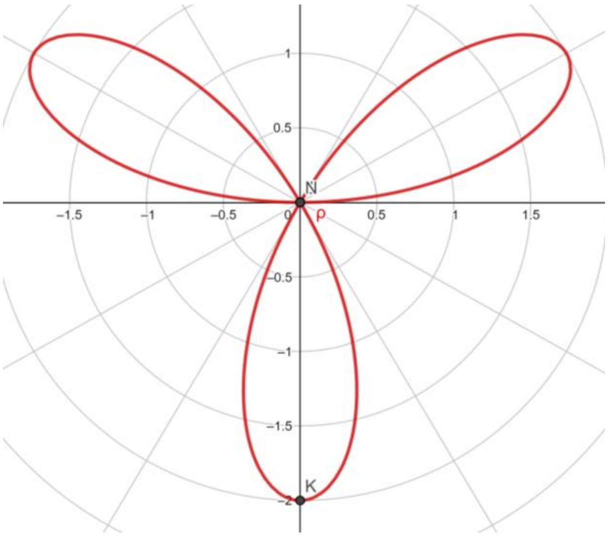
b) Limacon.

c) Lemniscatas.

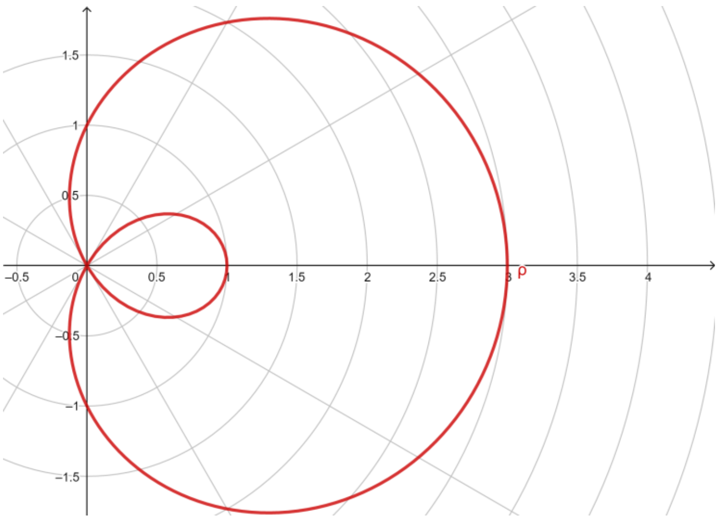
Respuestas:

Se seleccionaron ejemplos de las siguientes curvas:

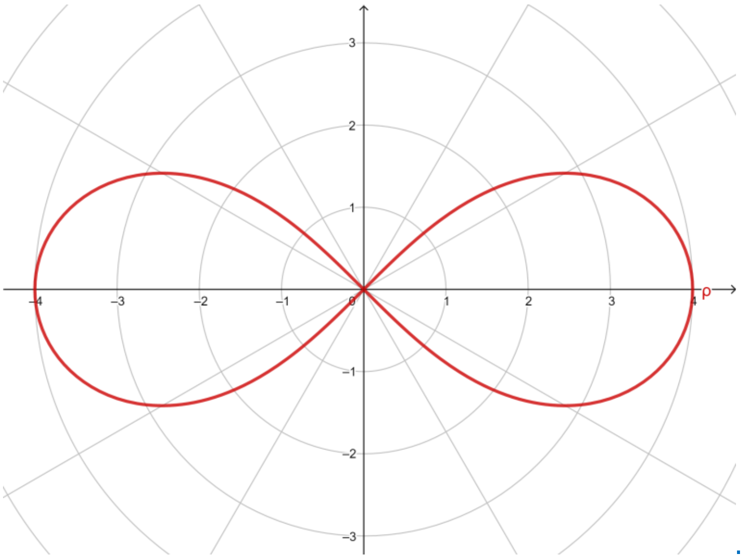
a) Curvas de trébol: $\rho = 2\, sen(3\theta)$



b) Limacon: $\rho = 1 + 2\, cos(\theta)$



c) Lemniscatas: $\rho^2 = 16\,cos(2\theta)$



---

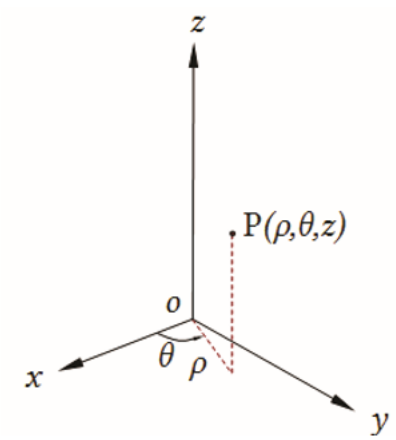
125. Deduzca las fórmulas de transformación que expresen coordenadas cilíndricas en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

Respuesta:

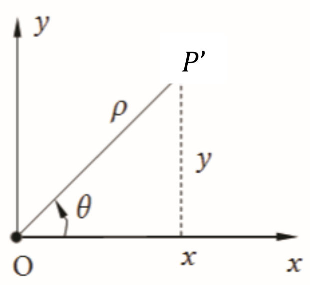
Comenzamos recordando la definición:

Se denominan coordenadas cilíndricas de un punto P del espacio, a la terna (ρ, θ, z), donde ρ y θ son las coordenadas polares de la proyección ortogonal del punto P sobre el plano xy (plano polar), y z es la tercera coordenada cartesiana de P, donde: $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.

Para encontrar las expresiones que nos permiten transformar de un sistema a otro, colocamos los dos sistemas de coordenadas, de modo tal que sus orígenes coincidan y el eje polar se encuentre a lo largo del eje positivo x, tal como puede observarse en la figura:



Si trabajamos en el plano xy donde hemos proyectado el punto P podemos observar el triángulo rectángulo que se forma en el plano en la siguiente figura la figura:



Sean $P'(x, y, 0)$, las coordenadas rectangulares de la proyección en el plano xy del punto P y $P'(\rho, \theta, 0)$ las coordenadas polares de la misma proyección del mismo punto P. De la figura, podemos expresar x e y en función de ρ y θ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta, \rho \in [0, \infty)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi) \\ \quad z = 0 \end{cases}$$

Luego, para el punto $P(\rho, \theta, z)$, las coordenadas cartesianas o rectangulares son:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta, \rho \in [0, \infty)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi) \\ \quad z = z \end{cases}$$

También es posible determinar las coordenadas polares de la proyección en el plano xy , $P'(\rho, \theta, 0)$, en términos de las coordenadas rectangulares, a partir de las expresiones dadas por:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad x \neq 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

A los efectos de obtener valores de θ en todos los cuadrantes, consideraremos las siguientes relaciones, que toman en cuenta los signos correspondientes a x y a y (ambos no nulos simultáneamente):

$sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Luego, para el punto $P(x, y, z)$, las coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad x \neq 0 \\ z = z \end{cases}$$