Análisis Matemático I
Clase 8: derivadas de funciones trigonométricas, derivadas laterales, derivación implícita y tasas relacionadas.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2020

Algunas derivadas

- Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces f es derivable en $(0, \infty)$ y su derivada en cualquier $x \in (0, \infty)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \text{(Luego analizaremos qué pasa en } x = 0\text{).}$$

Demostración. Sea $x > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} . \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h.(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

- Si $g(x) = sen(x)$, entonces g es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$g'(x) = cos(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h)+cos(x)sen(h)-sen(x)}{h} \\
&= sen(x) \lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} + cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \\
&= cos(x), \qquad \text{donde se usó que } \lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Algunas derivadas

En forma similar al caso anterior, se puede probar que: si $h(x) = cos(x)$, entonces h es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$h'(x) = -sen(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando la regla del cociente para derivadas, se puede determinar que las funciones *tan*, *cotan*, *sec* y *csc* son derivables en todo su dominio. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(tan\, x) = sec^2(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(sec\, x) = sec(x).tan(x).$$

Derivadas laterales

Para estudiar la derivabilidad de funciones en puntos extremos del dominio o para comprobar si una función es derivable o no en un punto, se utilizan las derivadas laterales:

Derivadas laterales

Sea c un número real. La derivada por derecha de f en c se define como:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista. La derivada por izquierda de f en c se define como:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista.

Observación: f es derivable en c si y sólo si f es derivable por izquierda y por derecha en c y los límites coinciden.

Derivadas laterales

Ejemplo 1: sea $f(x) = |x|$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} == \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

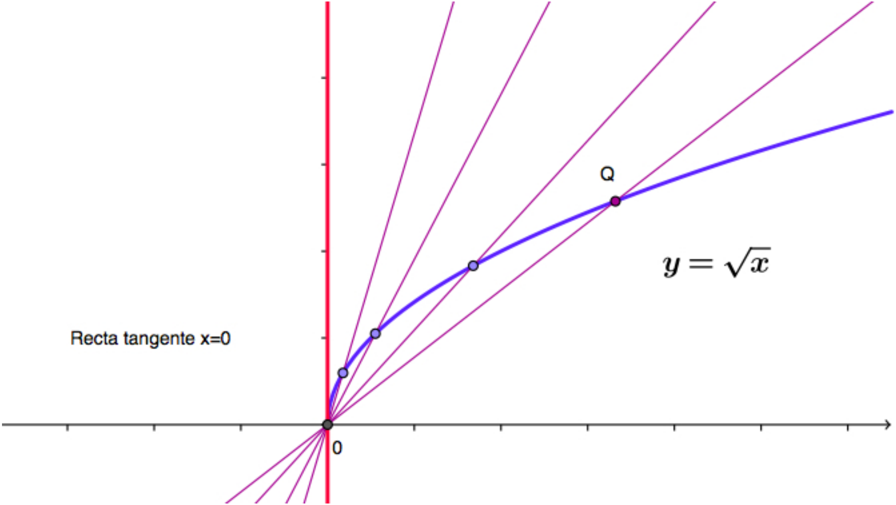
Así la función valor absoluto es derivable por izquierda y por derecha en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.
Ejemplo 2: sea $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Luego, g no es derivable por derecha en $x = 0$. Sin embargo, se puede trazar una recta que puede considerarse como recta *tangente*.

Derivadas laterales

Se observa que a medida que Q tiende al origen, las rectas secantes tienden a la recta de ecuación $x = 0$:



Derivación implícita

Hasta ahora, hemos considerado funciones que se escriben en la forma:

$$y = f(x)$$

donde aparece de forma explícita y en términos de x.
En ocasiones, se desea obtener la derivada y' cuando hay una relación implícita entre las variables x y y. Por ejemplo, cuando:

$$x + y^3 + xy = 0.$$

En algunos casos, es posible despejar y en términos de x y obtener y'. Sin embargo, cuando esto no es posible o no es adecuado, se aplica el método de derivación implícita.

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$x + y^3 + xy = 0.$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x + y^3 + xy) = \frac{d}{dx}(0).$$

Recordando que y es una función de x, aplique las reglas de derivación usuales:

$$1 + 3y^2 y' + 1.y + x.y' = 0.$$

Finalmente, se despeja y':

$$y' = \frac{-(y+1)}{3y^2 + x}.$$

Derivación implícita

Problema: calcular $y'(x)$, sabiendo:

$$y + cos(xy) - y^{10} = xy.$$

Solución: Derive con respecto a x ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(y + cos(xy) - y^{10}) = \frac{d}{dx}(xy).$$

Recordando que y es una función de x, aplique las reglas de derivación usuales:

$$\frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}cos(xy) - \frac{d}{dx}y^{10} = \Big(\frac{d}{dx}x\Big)y + x\frac{d}{dx}y.$$

Observe que:

$$\frac{d}{dx}cos(xy) = -sen(xy).\Big(\Big(\frac{d}{dx}x\Big)y + x\frac{d}{dx}y\Big) = -sen(xy)(y + xy').$$

Derivación implícita

Además:

$$\frac{d}{dx}y^{10} = 10y^9y'.$$

Luego:

$$\frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}cos(xy) - \frac{d}{dx}y^{10} = \left(\frac{d}{dx}x\right)y + x\frac{d}{dx}y,$$

se convierte en:

$$y' - sen(xy)(y + xy') - 10y^9y' = y + xy'.$$

Finalmente, se despeja y':

$$y'(1 - sen(xy)x - 10y^9 - x) = y + sen(xy)y$$

lo cual implica:

$$y' = \frac{y + sen(xy)y}{1 - sen(xy)x - 10y^9 - x}.$$

Observe que y' está bien definida siempre y cuando el denominador no sea 0.

Interpretación de la derivada: introducción a tasas relacionadas

Recordar:

Definición de tasa instantánea de cambio

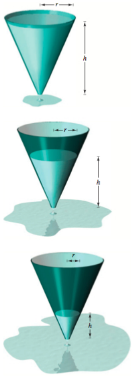
La tasa de cambio instantánea de una función f con respecto a x en x_0 se define por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

siempre que el límite exista.

Así, las tasas de cambio instantáneas son límites de tasas de cambio promedio.

Problema: Suponga que se está drenando un tanque cónico:



Determine la relación entre la tasa de cambio instantánea del volumen V, la tasa de cambio instantánea de la altura h y la tasa de cambio instantánea del radio r con respecto al tiempo.

Tasas relacionadas

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Tasas relacionadas

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Buscamos una relación entre: $V'(t)$, $r'(t)$ y $h'(t)$.

Solución: supongamos que:

- El volumen es una función del tiempo: $V = V(t)$.
- La altura es función del tiempo: $h = h(t)$.
- El radio es una función del tiempo: $r = r(t)$.

Buscamos una relación entre: $V'(t)$, $r'(t)$ y $h'(t)$.

Para establecer la relación entre las tasas instantáneas, primero establecemos la relación entre las variables V, h y r:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Derivamos ambos miembros de esta ecuación con respecto a t:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}(r^2 h)(t) = \frac{\pi}{3}\big(2r(t)r'(t)h(t) + r^2(t)h'(t)\big)$$

Así, la relación entre las tasas instantáneas es:

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}\big(2r(t)r'(t)h(t) + r^2(t)h'(t)\big).$$

Tasas relacionadas

Problema: Supongamos que el nivel del líquido en el tanque cónico del problema anterior disminuye a una tasa de $-0.2cm/min$ y que el radio está cambiando a una tasa de $-0.1cm/min$. Determine la tasa instantánea de cambio del volumen del líquido cuando $h = 0.5cm$ y $r = 0.1cm$.

Problema: Supongamos que se vierte agua en un depósito cónico a una tasa de $9cm^3/min$. Supongamos que la altura del depósito es $90cm$ y que el radio es de $40cm$. Determine la tasa de cambio instantánea del nivel del líquido cuando el nivel es de $10cm$.