Análisis Matemático I
Clase 22: técnicas de integración (continuación) e integrales impropias

Pablo Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2020

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Seguiremos procedimientos de acuerdo a los siguientes casos:

- m es impar (y no importa si n es par o impar).
- m es par y n es impar.
- m es par y n es par.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es impar, entonces $m = 2k+1$, para algún $k \geq 0$. Escribir en la integral:

$$sen^m(x) = sen^{2k+1}(x) = sen^{2k}(x).sen(x) = (sen^2(x))^k.sen(x)$$

y usar: $sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$ en el último término.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es impar, entonces $m = 2k + 1$, para algún $k \geq 0$. Escribir en la integral:

$$sen^m(x) = sen^{2k+1}(x) = sen^{2k}(x).sen(x) = (sen^2(x))^k.sen(x)$$

y usar: $sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$ en el último término.

Ejemplo: calcular:

$$\int sen^3(x)cos^2(x)dx.$$

Para calcular la integral, observemos que la potencia del seno $m = 3$ es impar. Luego, reescribimos:

$$\int sen^3(x)cos^2(x)dx = \int sen(x).sen^2(x).cos^2(x)\,dx$$

$$= \int sen(x).(1 - cos^2(x)).cos^2(x)\,dx$$

$$= \int sen(x).cos^2(x)\,dx - \int sen(x).cos^4(x)\,dx.$$

Para calcular la integral, observemos que la potencia del seno $m = 3$ es impar. Luego, reescribimos:

$$\int sen^3(x)cos^2(x)dx = \int sen(x).sen^2(x).cos^2(x)\,dx$$

$$= \int sen(x).(1 - cos^2(x)).cos^2(x)\,dx$$

$$= \int sen(x).cos^2(x)\,dx - \int sen(x).cos^4(x)\,dx.$$

En ambas integrales, hacemos la sustitución $u = cos(x)$ $(du = -sen(x)dx)$ y obtenemos:

$$\int sen^3(x)cos^2(x)dx = -\int u^2\,du + \int u^4\,du = -\frac{1}{3}cos^3(x) + \frac{1}{5}cos^5(x) + C.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es impar, entonces $n = 2k+1$, para algún $k \geq 0$.

Escribir en la integral:

$$cos^n(x) = cos^{2k+1}(x) = cos^{2k}(x).cos(x) = (cos^2(x))^k.cos(x)$$

y usar: $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ en el último término.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es impar, entonces $n = 2k + 1$, para algún $k \geq 0$.
Escribir en la integral:

$$cos^n(x) = cos^{2k+1}(x) = cos^{2k}(x).cos(x) = (cos^2(x))^k.cos(x)$$

y usar: $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ en el último término.

Ejemplo: calcular:

$$\int sen^2(x).cos^3(x)dx.$$

Para calcular $\int sen^2(x).cos^3(x)dx$ aplicamos el procedimiento anterior:

$$\int sen^2(x).cos^3(x)dx = \int sen^2(x).cos^2(x).cos(x)\,dx$$

$$= \int sen^2(x).(1 - sen^2(x))cos(x)\,dx$$

$$= \int sen^2(x).cos(x)\,dx - \int sen^4(x).cos(x)\,dx.$$

El estudiante puede resolver ambas integrales haciendo la sustitución $u = sen(x)$.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es par, entonces utilizar las identidades:

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \qquad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

para reescribir la integral en términos de $cos(2x)$.

Integrales trigonométricas: productos de potencias de senos y cosenos

El objetivo de esta sección, es calcular integrales de la forma:

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad n, m \geq 0.$$

Integrales trigonométricas: productos de potencias de seno y coseno

- Si m es par y n es par, entonces utilizar las identidades:

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \qquad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

para reescribir la integral en términos de $cos(2x)$.

Ejemplo: calcular:

$$\int sen^2(x).cos^2(x)dx.$$

$$\int sen^2(x).cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right).\left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-cos^2(2x))dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int cos^2(2x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \int \left(\frac{1+cos(4x)}{2}\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen(4x)}{4}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen(4x) + C.$$

Integrales trigonométricas: productos de senos y cosenos

Para calcular integrales de la forma:

$$\int sen(mx)cos(nx)dx, \quad \int sen(mx)sen(nx)dx, \; y \; \int cos(mx)cos(nx)dx$$

se pueden utilizar las siguientes identidades:

$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[sen(m-n)x + sen(m+n)x\right]$$

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x - cos(m+n)x\right]$$

$$cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x + cos(m+n)x\right].$$

Integrales trigonométricas: productos de senos y cosenos

Para calcular integrales de la forma:

$$\int sen(mx)cos(nx)dx, \quad \int sen(mx)sen(nx)dx, \ y \ \int cos(mx)cos(nx)dx$$

se pueden utilizar las siguientes identidades:

$$sen(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[sen(m-n)x + sen(m+n)x\right]$$

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x - cos(m+n)x\right]$$

$$cos(mx)cos(nx) = \frac{1}{2}\left[cos(m-n)x + cos(m+n)x\right].$$

Ejemplo: calcular

$$\int sen(3x)cos(5x)dx.$$