ELIPSES E HIPÉRBOLAS

Respuestas Ejercicios 79 a 86

79. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) cuya suma de sus distancias a los puntos fijos (4, 3) y (–2, 3) sea igual a 10. Represente gráficamente.

Respuesta:

Sabemos que el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es igual a una constante es justamente la definición de elipse, entonces esos puntos fijos serán los focos de la misma y la suma de las distancias será $2a$, es decir el doble de la medida del semieje mayor.

Entonces, sabemos que:

$2a = 10$

$F_1(-2, 3)$

$F_2(4, 3)$

Por lo que podemos deducir que al ser las ordenadas de ambos focos iguales (3) el eje focal será paralelo al eje *x*, y además $a = 5$.

Podemos encontrar el centro de la elipse como el punto medio entre los focos:

$$\boldsymbol{OF_1} = (-2, 3)$$
$$\boldsymbol{OF_2} = (4, 3)$$
$$\boldsymbol{F_1C} = \frac{\boldsymbol{OF_2} - \boldsymbol{OF_1}}{2} = \frac{(4, 3) - (-2, 3)}{2} = (3, 0)$$
$$\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OF_1} + \boldsymbol{F_1C} = (1, 3)$$
$$c = ||\boldsymbol{F_1C}|| = 3$$

Conocemos que la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes mayor y menor es:

$a^2 = b^2 + c^2$

Entonces:

$5^2 = b^2 + 3^2$

$b = 4$

Teniendo en cuenta que el eje focal es $y = 3$ (paralelo al eje x) y el centro $C(1,3)$. Podemos escribir la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

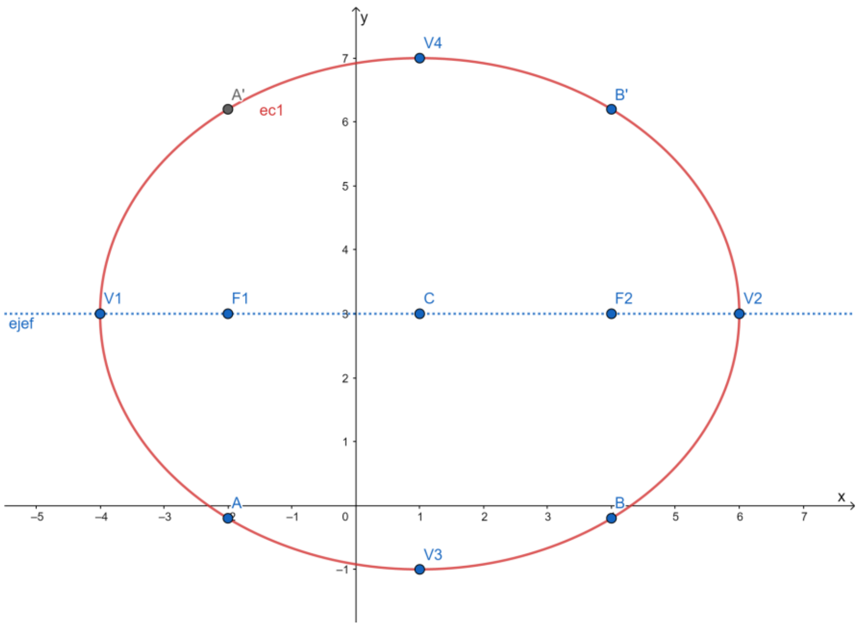
Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir:

$$|LR| = 2 \,.\, \frac{16}{5} = \frac{32}{5} = 6{,}4$$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(1,3)$			
Eje focal	Paralelo al eje *x: y=3*			
Focos	$F_1(-2,3)$		$F_2(4,3)$	
Vértices	$V_1(-4,3)$	$V_2(6,3)$	$V_3(1,-1)$	$V_4(1,7)$
Lado recto	$\lvert LR\rvert = 6{,}4$			
Extremos del lado recto	$A(-2,-0{,}2)$	$A'(-2,6{,}2)$	$B(4,-0{,}2)$	$B'(4,6{,}2)$

Representación gráfica:



80. Dada la *elipse* 3*x*² + *y*² + 4*x* – 2*y* – 3 = 0, halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que son perpendiculares a la recta L: *x* + *y* – 5 = 0. Grafique.

Respuesta:

La resolución de este ejercicio está dividida en 2 partes, en la primera trabajaremos para hallar las rectas tangentes perpendiculares a la recta dada y otra parte será encontrar la ecuación cartesiana de la elipse y todos sus elementos para poder graficarla.

Empezaremos hallando las rectas tangentes, para ello conociendo la ecuación de la elipse:

$$3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$$

Derivamos implícitamente la ecuación de la cónica para encontrar la expresión de la pendiente de la recta tangente a la elipse en cualquier punto $P(x, y)$:

$$3.2\,x \;+\; 2y.y' \;+\; 4 - 2y' \;=\; 0$$

Despejamos y´:

$$2y.y' - 2y' = -(6x + 4)$$

$$y' = \frac{-(6x + 4)}{2y - 2}$$

$$y' = \frac{-(3x + 2)}{y - 1}$$

Sabemos que las rectas tangentes deberán ser perpendiculares a la recta L: $y = -x + 5$, si la pendiente de la recta L es $m_L = -1$, por lo tanto, la pendiente de las rectas tangentes deberá ser:

$$m_T = -\frac{1}{m_L}$$

$$m_T = 1$$

Igualamos este resultado a la pendiente de la recta tangente para cada punto $P(x, y)$ que pertenece a la elipse:

$$y' = 1$$

$$\frac{-(3x + 2)}{y - 1} = 1$$

$$-(3x + 2) = y - 1$$

$$y = -\,3x - 1$$

Esta última ecuación nos da la relación que deben cumplir los puntos $P(x, y)$ de la elipse para que la pendiente sea $m_T = 1$.

Para hallar cuales son esos puntos, remplazamos esta condición en la ecuación de la elipse:

$$3x^2 \;+\; (-\,3x - 1)^2 \;+\; 4x - 2(-\,3x - 1) - 3 = \;0$$

Resolvemos el cuadrado de un binomio y asociamos términos semejantes:

$$3x^2 \;+\; 9x^2 \;+ 6x + 1 \;+\; 4x \;+ 6x \;+ 2 - 3 = \;0$$

$$12x^2 \;+ 16x \;=\; 0$$

Resolvemos la ecuación:

$4x\ (3x + 4)\ =\ 0$

Tenemos 2 soluciones posibles para que ese producto sea 0. Primer solución: $x_1\ = 0$.

Segunda solución: $3x_2 + 4 = 0$, es decir : $x_2\ = -\frac{4}{3}$

Remplazamos en la ecuación que establece la condición que deben cumplir los puntos de la elipse para que la pendiente de la curva en ellos sea $m_T\ = 1$:

$y = -\ 3(x) - 1$

$y_1\ = -\ 3\ .\ (0) - 1$

$y_1\ = - 1$

Por lo que hemos encontrado el primer punto donde la pendiente es $m_T\ = 1$: $T_1(0, -1)$

Luego la ecuación de la recta de pendiente $m_T\ = 1$ que pasa por dicho punto es:

$L_{T1}:\ y =\ x - 1$

Realizamos el mismo procedimiento para x_2:

$y = -\ 3x - 1$

$y_2\ = -\ 3\ .\left(-\frac{4}{3}\right) - 1$

$y_2\ =\ 3$

Por lo que hemos encontrado el segundo punto donde la pendiente es $m_T\ = 1$: $T_2\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$

Buscamos la ecuación de la recta que pasa por dicho punto:

$L_{T2}:\ y =\ \left(x + \frac{4}{3}\right) + 3$

$L_{T2}:\ y =\ x + \frac{13}{3}$

Hemos concluido que las rectas tangentes a la elipse y que son perpendiculares a L son:

$L_{T1}:\ y =\ x - 1$ y $L_{T2}:\ y =\ x + \frac{13}{3}$.

Para la segunda parte del ejercicio que es graficar la cónica, partimos de la ecuación general de la elipse $3x^2\ +\ y^2\ +\ 4x - \ 2y - \ 3 =\ 0$, completaremos cuadrados para determinar sus semiejes y centro:

Asociamos términos con variables iguales: $(3x^2+4x)+(y^2-2y)-3=0$

Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)+(y^2-2y)-3=0$$

Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+(y^2-2y+1-1)-3=0$$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{3}+(y^2-2y+1)-1\ -3=0$$

Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2-\frac{16}{3}=0$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{16}{3}$$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica:

$$\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$$

$$\frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{(2{,}31)^2}=1$$

A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a=4\sqrt{3}/3$ y $b=4/3$, sabiendo que $a^2=b^2+c^2$ determinamos el valor de c:

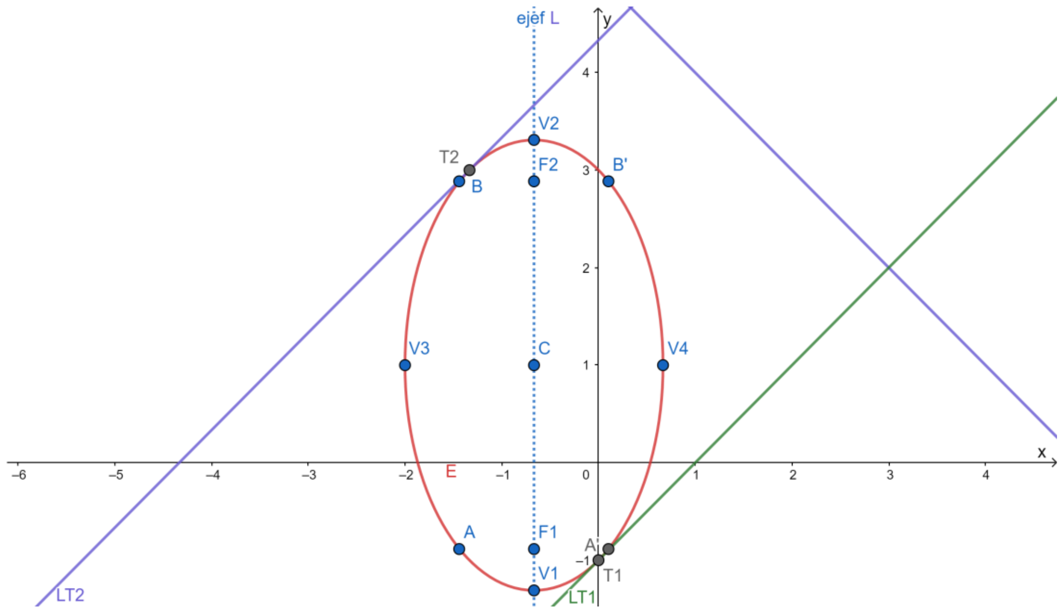
$$c=\sqrt{\frac{16}{3}-\frac{16}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR|=\frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR|=2\,.\frac{16/9}{4\sqrt{3}/3}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\approx 1{,}54$

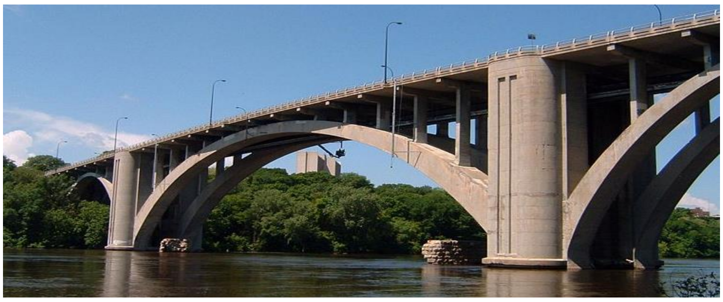
Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C\left(-\frac{2}{3},1\right)$			
Eje focal	Paralelo al eje y: $x=-\frac{2}{3}$			
Focos	$F_1\left(-\frac{2}{3},-0{,}8856\right)$		$F_2\left(-\frac{2}{3},2{,}8856\right)$	
Vértices	$V_1\left(-\frac{2}{3},-1{,}31\right)$	$V_2\left(-\frac{2}{3},3{,}31\right)$	$V_3(-2,1)$	$V_4\left(\frac{2}{3},1\right)$
Lado recto	$\lvert LR\rvert=\frac{8\sqrt{3}}{9}\approx 1{,}54$			
Extremos del lado recto	$A(-1{,}44,-0{,}8856)$	$A'(0{,}103,-0{,}8856)$	$B(-1{,}44,2{,}8856)$	$B'(0{,}103,2{,}8856)$

Representación gráfica:



81. Un río es cruzado por una carretera por medio de un puente cuyo arco central tiene la forma de media *elipse*. En el centro del arco la altura es de 20 m. El ancho total del arco elíptico es de 50m.



a) Determine la ecuación de la elipse que describe este puente.

b) A una distancia de 5m de cada uno de los pilares, se encuentran estructuras de protección para los mismos. ¿Cuál es la altura del arco del puente en correspondencia con estos elementos?

c) Represente gráficamente.

Respuestas:

a) Del enunciado podemos obtener la información que $2a = 50$, debido a que el ancho del arco elíptico tiene esa medida. También podemos deducir que $b = 20$, debido a que es la altura del arco. Por lo que:

$$a = 25$$

$$b = 20$$

Debemos proponer un sistema de referencia respecto al cuál referenciaremos nuestros datos y plantearemos la ecuación de la elipse. Las alternativas más convenientes serían situar el origen del sistema en el vértice izquierdo del semieje mayor o situarlo en el centro. Optaremos por la segunda opción, es decir lo situaremos en el centro del arco elíptico.

En este sistema de referencia, la ecuación cartesiana del arco semielíptico será:

$$\frac{(x)^2}{25^2} + \frac{(y)^2}{20^2} = 1 \quad ; \quad y \geq 0$$

b) Para calcular la altura del arco a una distancia de 5 m de los pilares debemos remplazar en la ecuación el valor de x=20 o x= -20.

$$\frac{(20)^2}{25^2} + \frac{(y)^2}{20^2} = 1$$

$$(y)^2 = 20^2\left(1 - \frac{(20)^2}{25^2}\right)$$

$$y = +\sqrt{20^2\left(1 - \frac{(20)^2}{25^2}\right)}$$

$$y = 12$$

(Se descarta la solución negativa por tratarse un arco semielíptico con y ≥ 0)

Entonces la altura del arco en correspondencia con las estructuras de protección que se sitúan a 5m de los pilares es 12m

c) Para graficar la elipse que describe al puente debemos terminar de hallar los elementos de la misma:

Sabiendo que $a^2 = b^2 + c^2$ determinamos el valor de c:

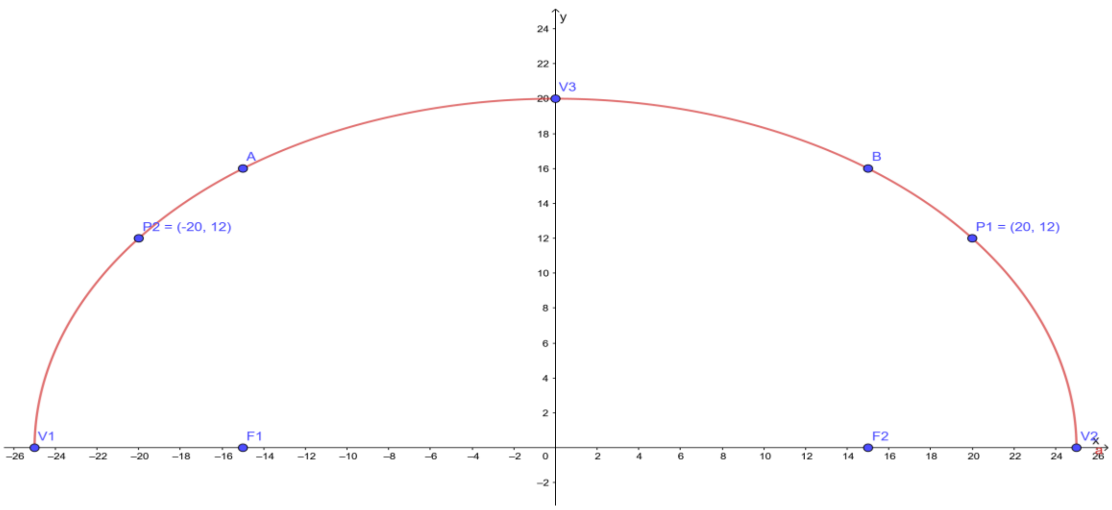
$$c = \sqrt{625 - 400} = 15$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR| = 2 \cdot \frac{400}{25} = 32$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(0{,}0)$			
Eje focal	Coincidente con el eje x			
Focos	$F_1(15, 0)$		$F_2(-15, 0)$	
Vértices	$V_1(-25, 0)$	$V_2(25, 0)$	$V_3(0, 20)$	
Lado recto	$\|LR\| = 32$			
Extremos del lado recto	$A(-15, 16)$		$B(15, 16)$	

Representación gráfica:



82. Indique las ecuaciones paramétricas de la *elipse* con centro C(-2,0), semiejes *a*=5 y *b*=4, y eje focal paralelo al eje *x*.

Respuesta:

Con los datos del enunciado podemos decir que la ecuación cartesiana de la elipse es:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{(I)}$$

Pero nos pide las ecuaciones paramétricas de la cónica por lo que siguiendo el procedimiento desarrollado en la sección *3.5.6 Ecuaciones paramétricas de una elipse,* del Libro *Geometría Analítica* *para Ciencias e Ingenierías* (página 127), tenemos que la parametrización para la elipse del enunciado es:

$$\begin{cases} x = -2 + 5\cos\theta \\ y = 4\, sen\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0\,, 2\pi)$$

Observación: Vamos a demostrar que las ecuaciones paramétricas de la elipse describen el mismo lugar geométrico que la ecuación (I).

Despejaremos las funciones trigonométricas y luego las elevaremos al cuadrado y las sumaremos buscando la identidad trigonométrica fundamental.

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)}{5} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{4} = sen\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0\,, 2\pi)$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos miembros

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{5^2} = \cos^2\theta \\ \dfrac{y^2}{4^2} = sen^2\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0\,, 2\pi)$$

Luego sumamos a ambos miembros:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = \cos^2\theta + sen^2\,\theta$$

Remplazamos por la identidad trigonométrica fundamental y llegamos finalmente a la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\frac{(x+2)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

83. El centro de una *hipérbola* es el punto C(4, 2), uno de sus focos es F(−6, 2) y su excentricidad es *e*=5/4.

a) Halle su ecuación general.

b) Indique todos sus elementos y represente gráficamente.

c) Obtenga los puntos de intersección con el eje *x*.

Respuesta:

a) Empezaremos planteando la ecuación cartesiana de la hipérbola. Para ello necesitamos conocer los valores de los semiejes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Tenemos como dato el centro y un foco de la hipérbola, entonces podemos calcular la distancia focal $\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{OF_1} = (\boldsymbol{-6, 2})$
$\boldsymbol{OC} = (4, 2)$
$\boldsymbol{F_1C} = \boldsymbol{OC} - \boldsymbol{OF_1} = (10, 0)$
$c = \|\boldsymbol{F_1C}\| = 10$

A partir de la excentricidad podemos conocer el valor del semieje real:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

Despejamos a:

$$a = \frac{c}{5/4} = \frac{10}{5/4} = 8$$

Conocemos que la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes real e imaginario es:

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Entonces:

$$10^2 = b^2 + 8^2$$

$$b = 6$$

Como el centro y el foco tienen la misma ordenada, sabemos que el eje focal es paralelo al eje *x* cuya ecuación es $y = 2$.

Planteamos entonces la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{(x-4)^2}{8^2} - \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$$

Para llegar a la ecuación general, comenzamos desarrollando los cuadrados de los binomios:

$$\frac{(x^2 - 8x + 16)}{8^2} - \frac{(y^2 - 4y + 4)}{6^2} = 1$$

Luego sacamos denominador común y despejamos el mismo:

$$\frac{9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 - 4y + 4)}{576} = 1$$

$$(9x^2 - 72x + 144) - (16y^2 - 64y + 64) = 576$$

$$9x^2 - 72x + 144 - 16y^2 + 64y - 64 - 576 = 0$$

Así llegamos finalmente a la ecuación general de la hipérbola:

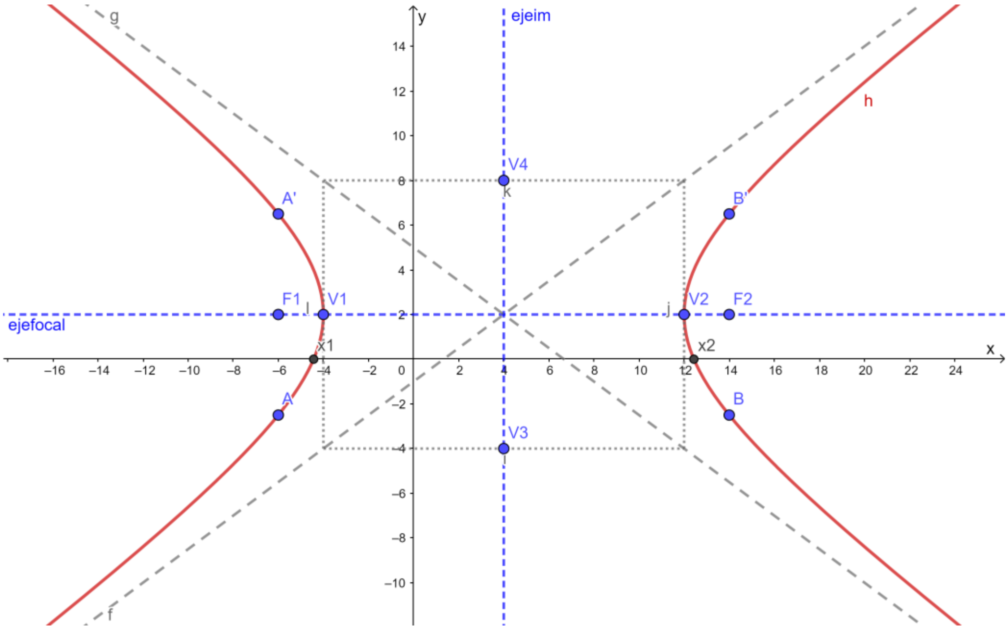
$$9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y - 496 = 0$$

b) Encontramos los elementos de la cónica para poder representar gráficamente:

Centro	$C(4, 2)$			
Eje focal	Paralelo al el eje *x*: *y*=2			
Focos	$F_1(-6, 2)$		$F_2(14, 2)$	
Vértices	$V_1(-4, 2)$	$V_2(12, 2)$	$V_3(4, -4)$	$V_4(4, 8)$

Lado recto	$\lvert LR\rvert = 2\frac{6^2}{8} = 9$			
Extremos del lado recto	$A(-6,-2{,}5)$	$A'(-6,6{,}5)$	$B(14,-2{,}5)$	$B'(14{,}6{,}5)$
Asíntotas	$y = \frac{3}{4}x - 1$		$y = -\frac{3}{4}x + 5$	
excentricidad	$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$			

Representación gráfica:



c) Para obtener los puntos de intersección con el eje x podemos resolver un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y - 496 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Reemplazamos $y = 0$ en la ecuación general de la hipérbola y resolvemos la ecuación cuadrática:

$$9x^2 - 72x - 496 = 0$$

Resolviendo, encontramos entonces que las intersecciones con el eje x (o raíces) son:

$x_1 = 12{,}43$

$x_2 = -4{,}43$

84. Halle la ecuación de la recta normal a la *hipérbola* cuya ecuación general es $3x^2 - 4y^2 - 18x - 40y - 85 = 0$ en un punto de la misma de ordenada -2 y abscisa negativa. Represente gráficamente.

Respuesta:

Comenzaremos derivando implícitamente la ecuación general de la hipérbola:

$6x - 8\,y\,y' - 18 - 40y' = 0$

Luego despejamos y':

$$y' = \frac{6x\ - 18}{8\,y + 40}$$

Ahora necesitamos conocer el punto de la hipérbola donde queremos calcular la pendiente que tendría una recta tangente a la misma, para ello remplazamos el valor $y = -2$ en la ecuación general:

$3x^2 - 4(-2)^2 - 18x - 40\,(-2) - \ 85 = 0$

$3x^2 - 16 - 18x + 80\ - \ 85 = 0$

$3x^2 - 16 - 18x + 80\ - \ 85 = 0$

$3x^2 - 18x - \ 21 = 0$

Encontramos dos valores de x que satisfacen la ecuación:

$x_1 = 7$

$x_2 = -1$

El enunciado nos dice que la abscisa es negativa, por lo que el punto donde debemos calcular la pendiente y luego plantear la recta normal es $T(-1,-2)$**.**

Remplazamos T en la ecuación de y':

$$y' = \frac{6\,(-1) - 18}{8\,(-2) + 40}$$

$y' = -1$

Entonces la recta normal tendrá pendiente $m_N = -\frac{1}{y'} = 1$

La ecuación normal a la hipérbola que pasa por el punto $T(-1,-2)$ es:

$L_N\!:\ \ y = x - 1$

Para representar gráficamente debemos calcular los elementos de la hipérbola, para ello comenzamos conociendo su ecuación cartesiana.

Completamos cuadrados en la ecuación general:

$3x^2 - 4y^2 - 18x - 40\,y - \ 85 = 0$

$3(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 10\,y) - \ 85 = 0$

$3(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4(y^2 + 10y + 25 - 25) = \ 85$

Extraemos los términos que agregamos para completar cuadrados y despejamos:

$3(x^2 - 6x + 9) - 27 - 4(y^2 + 10y + 25) + 100 = \ 85$

$3(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 10y + 25) = \ 85 + 27 - 100$

Expresamos los cuadrados que representan los trinomios cuadrados perfectos:

$3(x-3)^2-4(y+5)^2 = 12$

Dividimos ambos miembros por el termino independiente:

$$\frac{3(x-3)^2}{12}-\frac{4(y+5)^2}{12} = 1$$

Dividimos ambos denominadores por los coeficientes que acompañan a los paréntesis para llegar finalmente a la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{(x-3)^2}{(2)^2}-\frac{(y+5)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Conocemos que la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes real e imaginario es:

$c^2 = b^2 + a^2$

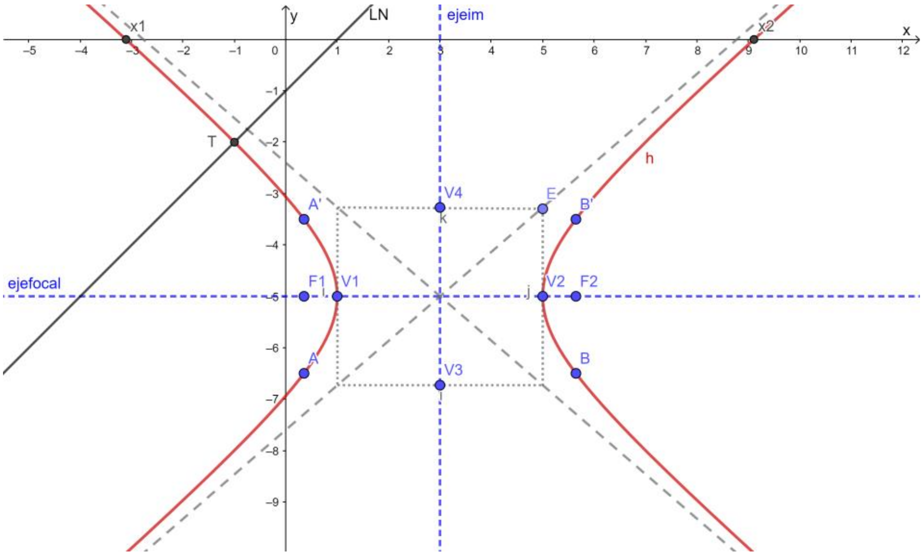
Entonces:

$c = \sqrt{7} \approx 2{,}646$

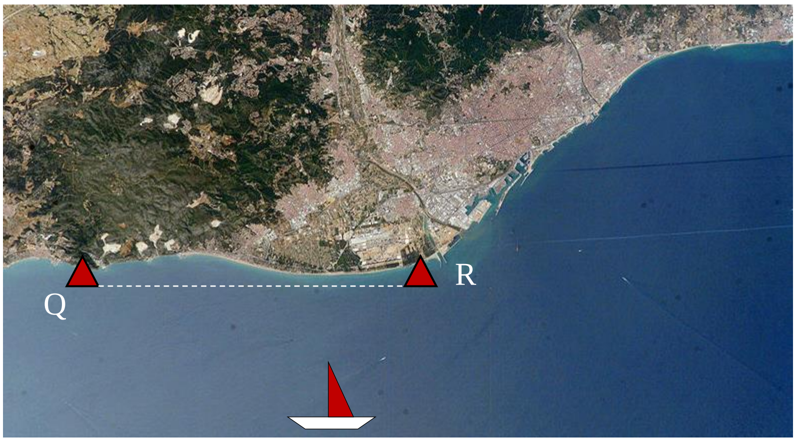
Encontramos los elementos de la cónica para poder representar gráficamente:

Centro	$C(3,-5)$			
Eje focal	Paralelo al eje x*:* y=−5			
Focos	$F_1(\,0{,}354,-5)$		$F_2(5{,}646\,,-5)$	
Vértices	$V_1(1,-5)$	$V_2(5\,,-5)$	$V_3(3,-6{,}73)$	$V_4(3,-3{,}27)$
Lado recto	$\lvert LR\rvert = 2\frac{3}{2} = 3$			
Extremos del lado recto	$A(0{,}354,-3{,}5)$	$A'(0{,}354,-6{,}5)$	$B(5{,}646,-3{,}5)$	$B'(5{,}646,-6{,}5)$
Asíntotas **($m = \mp b/a$)**	$y = 0{,}866\,x - 7{,}6$		$y = -0{,}866x - 2{,}4$	
excentricidad	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32$			

Representación gráfica:



85. Una embarcación envía una señal en el momento en el que se encuentra a 194 km de la costa. Dos estaciones guardacostas designadas como Q y R, que se encuentran ubicadas a 354 km de distancia entre sí, reciben dicha señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la misma, se determina que la nave se encuentra 258 km más cerca de la estación R que de la estación Q. Elija un sistema de referencia apropiado e indique las coordenadas correspondientes a la ubicación de la embarcación. Represente gráficamente.



Respuesta:

Sabemos que una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos es una constante, entonces esos puntos fijos serán los focos (Q y R) de la misma y la diferencia de las distancias será $2a$, es decir el doble de la medida del semieje real.

Entonces, sabemos:

$2a = 258$

$2c = \|\boldsymbol{QR}\| = 354$

Conocemos que la relación entre la distancia focal, y las medidas de los semiejes real e imaginario es:

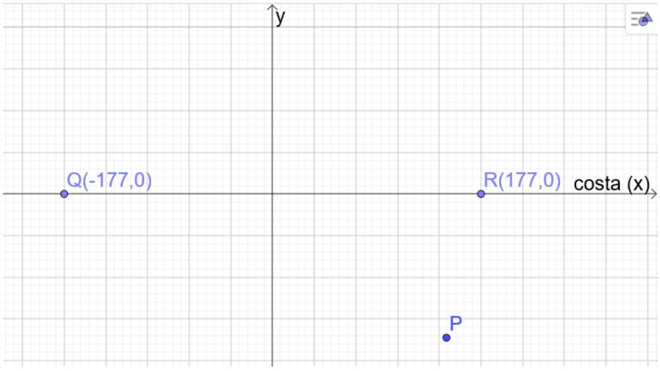
$c^2 = a^2 + b^2$

Entonces:

$177^2 = 129^2 + b^2$

$b = 12\sqrt{102} \approx 121{,}194$

Plantearemos un sistema de referencia donde el origen se situará en el centro entre los dos focos, Q y R, y el eje x será la línea costera donde se sitúan los mismos. Realizamos la siguiente figura de análisis para comprender mejor el problema, siendo P la ubicación de la embarcación:



Entonces según el sistema de referencia elegido:

$Q(-177, 0)$

$R(177, 0)$

Podemos escribir la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{129^2} - \dfrac{y^2}{(121{,}194)^2} = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Esta ecuación nos da todas las posibles posiciones que puede tener la embarcación estando 354 km más cerca de alguna de las 2 estaciones costeras que de la otra. Para conocer la posición de la embarcación, debemos introducir en la ecuación la distancia de la misma a la línea costera, que es de 194 km, por lo que en nuestro sistema de referencia corresponde a una ordenada (-194). Remplazamos este valor en la ecuación de la hipérbola para obtener la abscisa:

$$\frac{x^2}{129^2} - \frac{(-194)^2}{(121{,}194)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{129^2} - 2{,}56 = 1$$

$$x = \pm 129\sqrt{3{,}56}$$

Encontramos dos valores de x que satisfacen la ecuación:

$x_1 = 243{,}5$

$x_2 = -243{,}5$

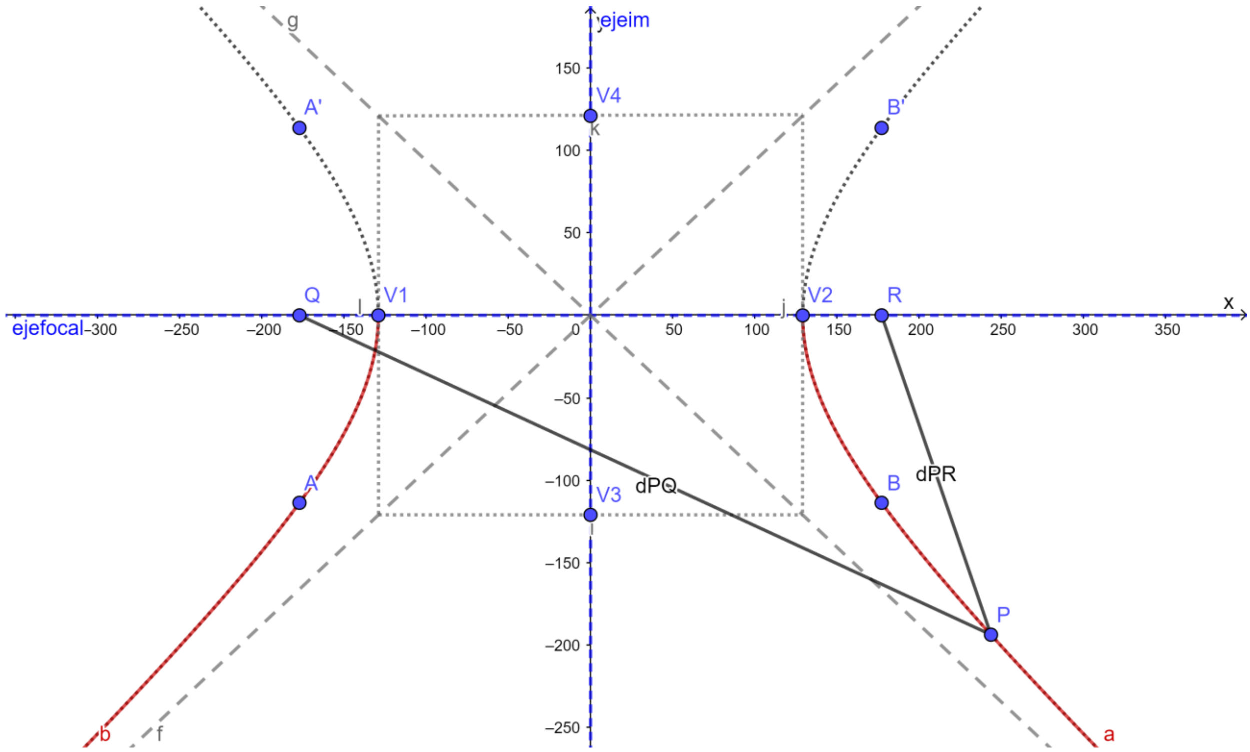
La posición que satisface el enunciado es el valor positivo de los encontrados debido a que los puntos con abscisa positiva corresponden a la rama que está mas cerca del foco R que del foco Q.

Entonces la posición del barco en el momento que mandó la señal es: $P(243{,}5, -194)km$.

Para representar gráficamente la cónica necesitamos calcular el resto de los elementos:

Centro	$C(0,0\ )$			
Eje focal	Coincidente con el eje x			
Focos	$Q(-177,0)$		$R(177,0)$	
Vértices	$V_1(-129,0)$	$V_2(129,0)$	$V_3(0,-121{,}19)$	$V_4(0,121{,}19)$
Lado recto	$\lvert LR\rvert = 2\,.\dfrac{(121{,}194)^2}{129} = 2\,.\,113{,}86 = 227{,}72$			
Extremos del lado recto	$A(-177,-113{,}86)$	$A'(-177,113{,}86)$	$B(177,-113{,}86)$	$B'(177,113{,}86)$
Asíntotas ($\boldsymbol{m = \mp b/a}$)	$y = 0{,}94\,x$		$y = -0{,}94x$	
Excentricidad	$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{177}{129} = 1{,}372$			

Representación gráfica:



86. Verifique que las siguientes ecuaciones representan los puntos de una hipérbola de centro C(0,0) y semiejes a y b:

$$\begin{cases} x = a\, sec\ (t) \\ y = b\, tg\ (t) \end{cases} \qquad t\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Respuesta:

Despejaremos las funciones trigonométricas y luego las elevaremos al cuadrado y las restaremos buscando llegar a una identidad trigonométrica.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{cos\ (t)} \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{sen\ (t)}{cos\ (t)} \end{cases} \qquad t\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos miembros

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{cos^2\ (t)} \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \dfrac{sen^2\ (t)}{cos^2\ (t)} \end{cases} \qquad t\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Luego restamos ambos miembros:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{cos^2\ (t)} - \frac{sen^2\ (t)}{cos^2\ (t)}$$

Restamos las fracciones del segundo miembro:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1 - sen^2\ (t)}{cos^2\ (t)}$$

Sabemos por la identidad trigonométrica fundamental que $cos^2\,\theta + sen^2\,\theta = 1$, de donde despejamos:

$cos^2\,\theta = 1 - sen^2\,\theta$, remplazamos y llegamos finalmente a la ecuación cartesiana de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{cos^2\ (t)}{cos^2\ (t)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$