Análisis Matemático I
Clase 4: Concepto de límite

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2020

Definición informal de límite

Supongamos que f está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en el punto x_0. Decimos que f tiende a L cuando x tiende a x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si y solo si los valores $f(x)$ de la función f están arbitrariamente cerca de L, para toda x en el dominio de f tal que $x \neq x_0$ y que está suficientemente cerca de x_0.

Definición de distancia

Sean a y b números reales. La distancia $d(a,b)$ entre a y b se define por:

$$d(a,b) = |a-b|.$$

Propiedades de valor absoluto: sea $k \geq 0$.

1. $|x| \leq k$ si y solo si $-k \leq x$ y $x \leq k$.
2. $|x| \geq k$ si y solo si $x \geq k$ o $x \leq -k$.
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).

Mediante la noción de distancia es posible definir intervalos simétricos. Supongamos que estamos interesados en encontrar todos los x que cumplen la siguiente desigualdad:

$$|x-2|<1.$$

En otros palabras, buscamos los x tales que su distancia a 2 es menor a 1. Para resolver la desigualdad analíticamente, usamos la propiedad (1) de valor absoluto:

$$|x-2|<1$$

$$-1<x-2<1$$

$$-1+2<x<1+2$$

$$1<x<3.$$

Así, el conjunto solución es el intervalo $(1,3)$. Observar que el intervalo $(1,3)$ tiene centro en 2 y radio 1. Esto es exactamente lo que representa la desigualdad:

$$|x-2|<1.$$

En general, si tenemos una desigualdad de la forma:

$$|x - a| < r$$

el conjunto solución será el intervalo abierto (es decir, sin los extremos) centrado en a de radio r, es decir, $(a - r, a + r)$.
Si en cambio se tiene:

$$|x - a| \leq r$$

el conjunto solución es el intervalo cerrado (es decir, con los extremos) centrado en a de radio r, es decir, $[a - r, a + r]$.

Volvamos a la definición de límite:

- Distancia de $f(x)$ a L:
$$|f(x) - L|.$$
- Distancia de x a x_0:
$$|x - x_0|.$$

Definición informal de límite

Decimos que f tiende a L cuando x tiende a x_0, y escribimos:

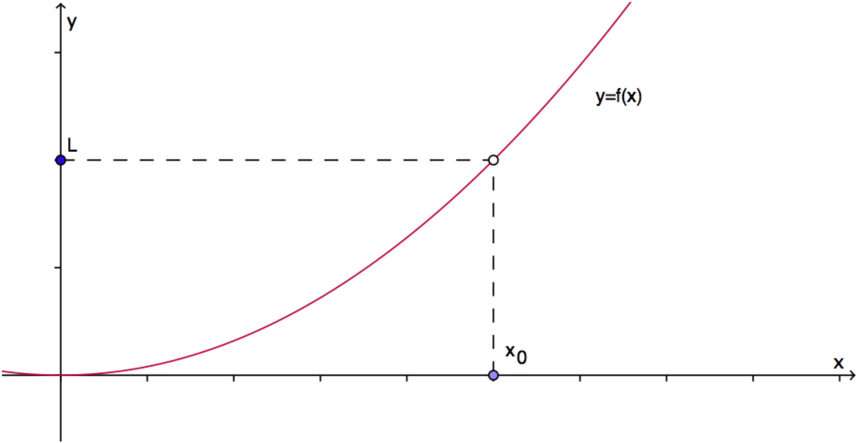
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si y solo si $|f(x) - L|$ se puede hacer arbitrariamente pequeña para toda x en el dominio de f tal que $x \neq x_0$ y $|x - x_0|$ es suficientemente pequeña.

Nota: observar que $x \neq x_0$ puede escribirse también como $0 < |x - x_0|$.

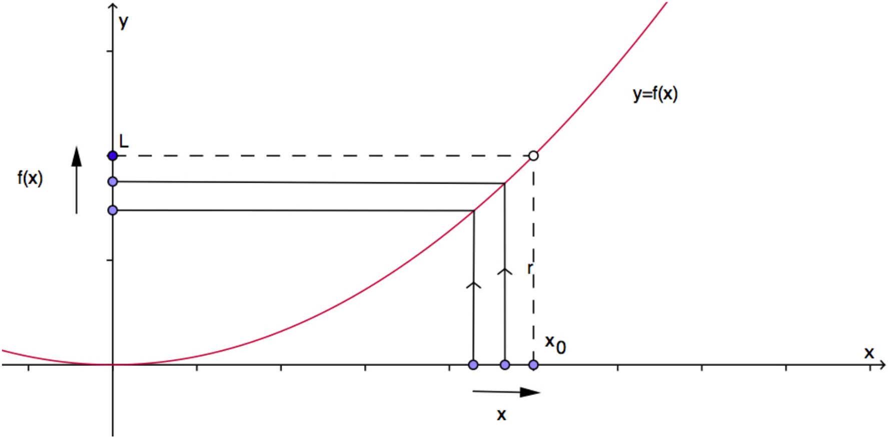
Formalización del concepto de límite

Problema: Consideremos una función $f : \mathbb{R} - \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Queremos ver que el número L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0.



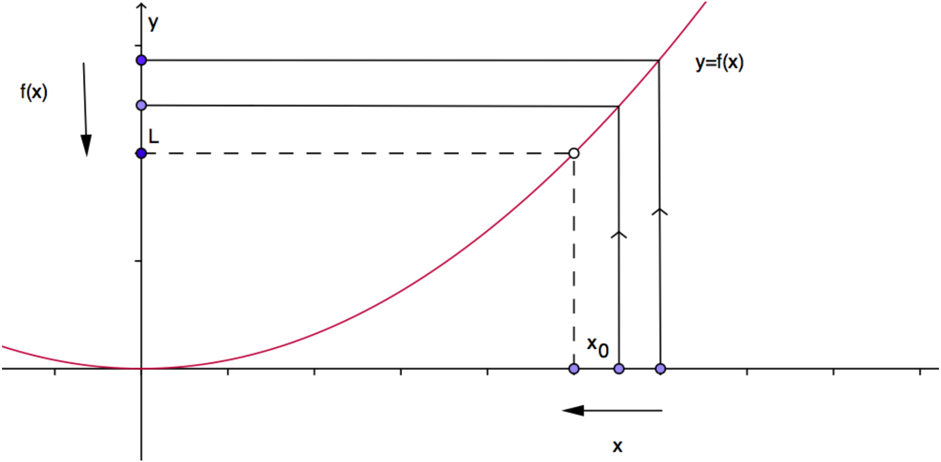
Formalización del concepto de límite

Observe que la función $y = f(x)$ no está definida en x_0. Sin embargo, cuando x tiende a x_0 se infiere que $f(x)$ tiende a L, ya sea que x tienda a x_0 por izquierda:



Formalización del concepto de límite

como por derecha:



Formalización del concepto de límite

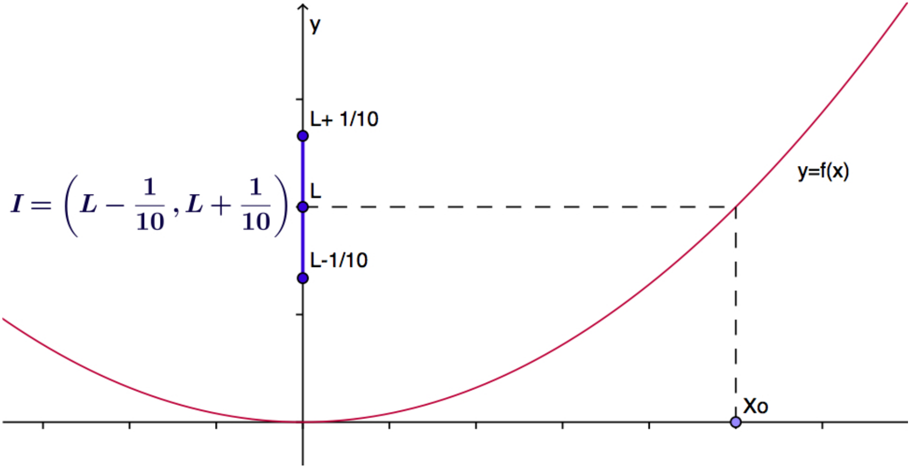
Vamos a corroborar lo anterior analíticamente y plantear una definición formal de límite. Queremos que $|f(x) - L|$ se pueda hacer arbitrariamente pequeña para toda $x \neq x_0$ tal que $|x - x_0|$ sea suficientemente chica.

Vamos a corroborar lo anterior analíticamente y plantear una definición formal de límite. Queremos que $|f(x) - L|$ se pueda hacer arbitrariamente pequeña para toda $x \neq x_0$ tal que $|x - x_0|$ sea suficientemente chica.
Entonces, supongamos que queremos hacer:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{10}.$$

Es decir, queremos que la distancia entre los valores de la función y L sea menor a $1/10$. Ver gráfico en la próxima diapositiva.

$$I = \left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$$



Formalización del concepto de límite

Ahora bien, ¿qué tan cerca deben estar las x de x_0 para que $f(x) \in I$? Es decir, ¿podremos encontrar un número $\delta > 0$ tal que para toda x que satisfaga:

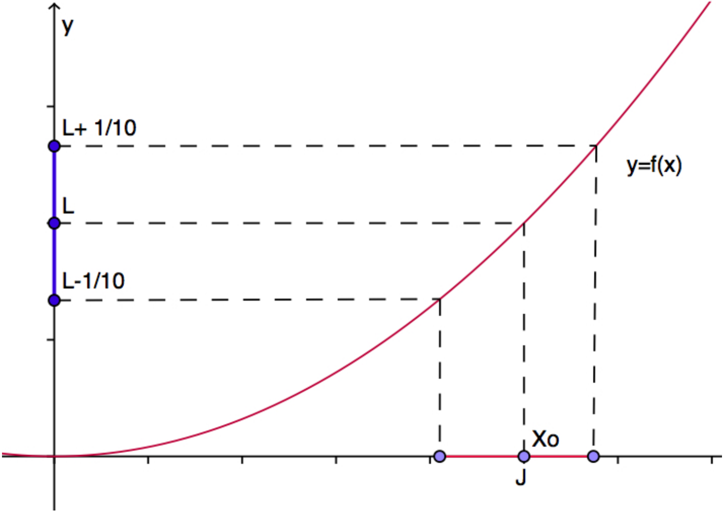
$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

se cumpla:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{10}?$$

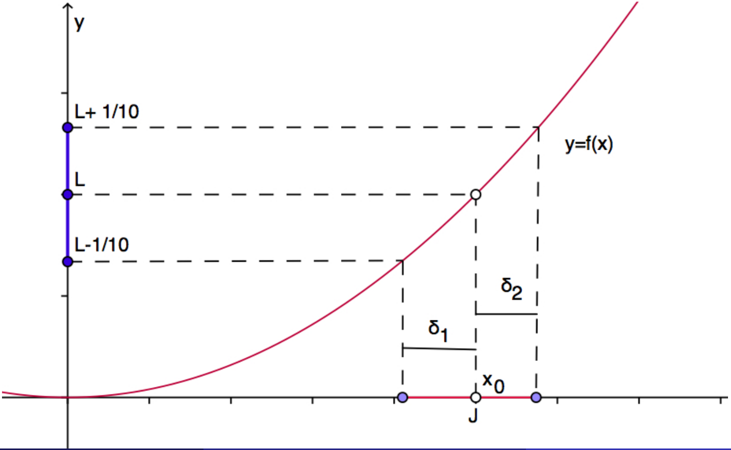
Formalización del concepto de límite

Gráficamente, podemos responder esta pregunta como muestra la figura:



Formalización del concepto de límite

Se observa que si tomamos todas las x en el intervalo J, entonces $f(x) \in (L - 1/10, L + 1/10)$. Sin embargo, el intervalo J no es simétrico. Para hacerlo simétrico, tomamos la menor de las distancias δ_1 y δ_2 de x_0 a los extremos del intervalo J:



Formalización del concepto de límite

De los dos números δ_1 y δ_2 vamos a elegir el menor (en este caso δ_2), lo llamaremos δ y definiremos el intervalo:

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Hemos encontrado un radio $\delta > 0$ tal que si x cumple:

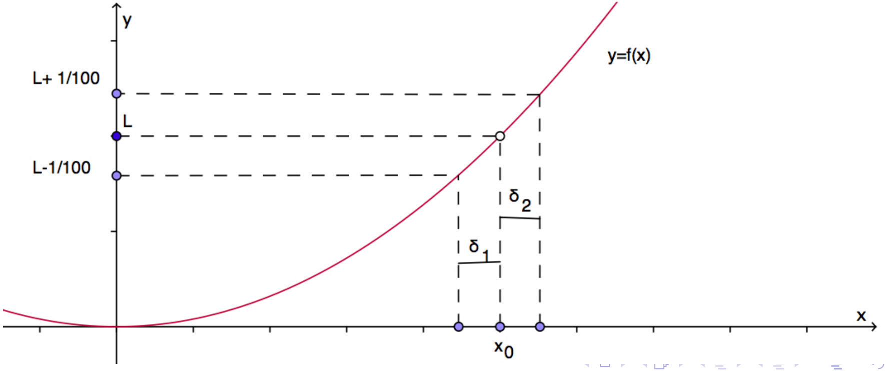
$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

entonces:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{10}.$$

Problema: ¿Qué sucede si ahora queremos que la distancia entre $f(x)$ y L sea menor a $1/100$? Es decir, ¿en qué intervalo centrado en x_0 debemos tomar x para que sus imágenes $f(x)$ cumplan:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{100}?$$



Formalización del concepto de límite

Eligiendo el menor de los números δ_1 y δ_2, y llamándolo δ se obtiene que para toda x que cumpla:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

se satisface:

$$|f(x) - L| < \frac{1}{100}.$$

Formalización del concepto de límite

Problema: en general, **dado cualquier** $\epsilon > 0$ **¿existirá** $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

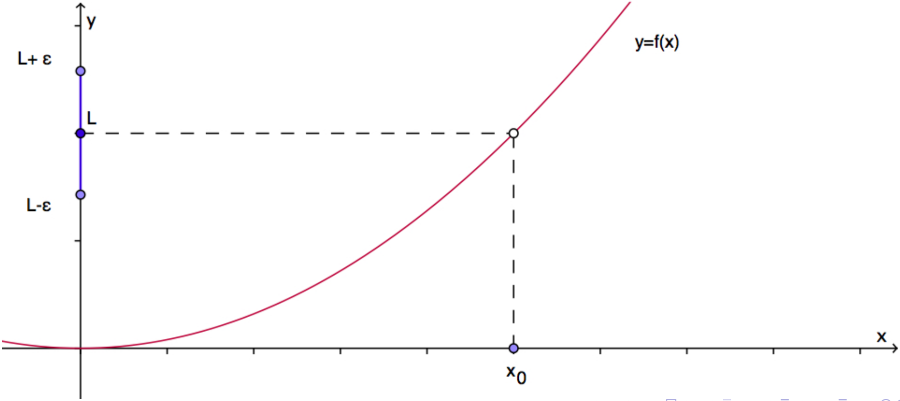
para toda $x \neq x_0$ que cumpla: $|x - x_0| < \delta$?

Problema: en general, **dado cualquier** $\epsilon > 0$ **¿existirá** $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

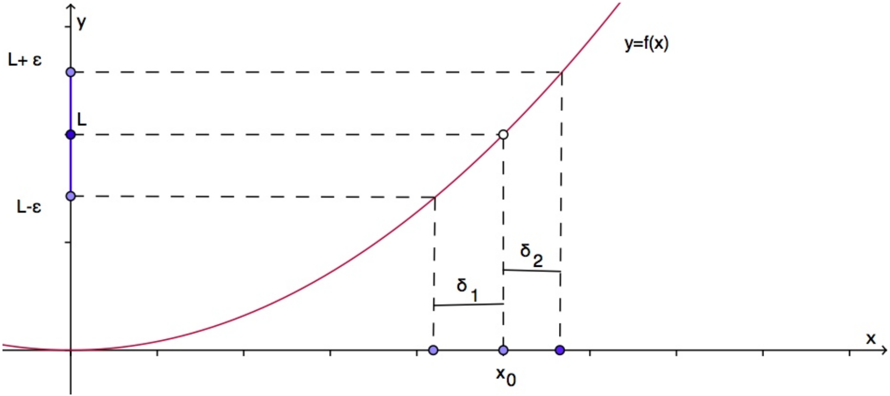
para toda $x \neq x_0$ que cumpla: $|x - x_0| < \delta$?

Solución:

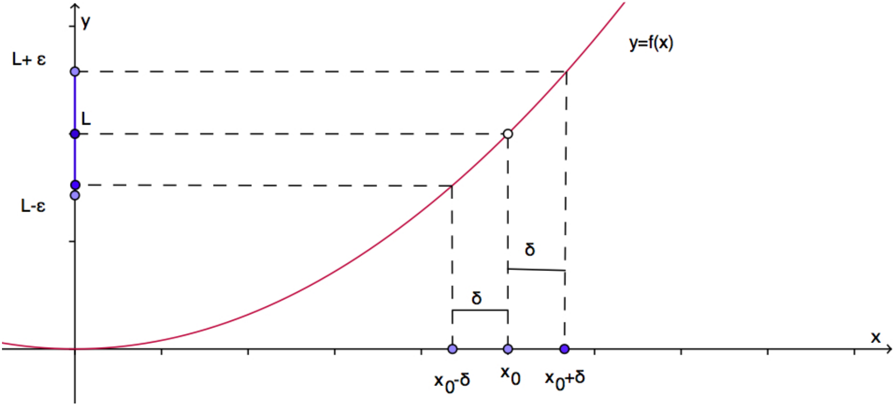


Formalización del concepto de límite

Realizando el procedimiento ilustrado anteriormente obtenemos números positivos δ_1 y δ_2 como se muestran:



Tomamos como δ el menor de entre δ_1 y δ_2:



Formalización del concepto de límite

Así, para toda x que cumpla:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

se verifica:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Así, para toda x que cumpla:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

se verifica:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

En conclusión, dado cualquier intervalo centrado en L (con radio digamos ϵ), es posible encontrar un intervalo centrado en x_0 (de radio δ) tal que las imágenes de todas las $x \neq x_0$ en el intervalo centrado en x_0 pertenecen al intervalo de centro L. Esta es la esencia de la definición formal de límite.

Formalización del concepto de límite

Definición formal de límite

Decimos que f tiende a L cuando x tiende a x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

para toda x en el dominio de f tal que $0 < |x - x_0| < \delta$.

Algunas observaciones sobre la definición formal de límite

- ϵ en la definición anterior es el radio del intervalo centrado en L y es una medida de qué tan cerca queremos que esté $f(x)$ del número L. Si L es el límite, entonces ϵ debe poder hacerse tan chico como queramos.
- δ representa el radio del intervalo centrado en x_0 y nos dice que tan pequeño se debe tomar dicho intervalo para que las x tengan sus imágenes en el intervalo de centro L y radio ϵ.
- La cuantificación *para todo* $\epsilon > 0$ nos dice que podemos imponer que la distancia entre $f(x)$ y L sea tan chica como queramos. Por otro lado, la expresión *existe* $\delta > 0$ nos dice que el intervalo simétrico centrado en x_0 que encontremos va a depender (en general) del ϵ elegido.

Formalización del concepto de límite

Ejemplo A: demuestre que $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

Ejemplo A: demuestre que $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.
Solución. Dado cualquier $\epsilon>0$, queremos encontrar $\delta>0$ tal que para toda x:

$$0<|x-1|<\delta \quad\Rightarrow\quad |(5x-3)-2|<\epsilon.$$

Primer paso: realizamos operaciones algebraicas en la desigualdad:

$$|(5x-3)-2|<\epsilon$$

para determinar un intervalo abierto centrado en $x_0=1$. Entonces:

$$|(5x-3)-2|<\epsilon \text{ si y solo si } |5x-5|<\epsilon,$$

Es decir: $5|x-1|<\epsilon$. De aquí obtenemos:

$$|x-1|<\frac{\epsilon}{5}.$$

Podemos tomar $\delta=\frac{\epsilon}{5}$

Formalización del concepto de límite

Segundo paso: corroborar. Si $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$, entonces:

$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon.$$

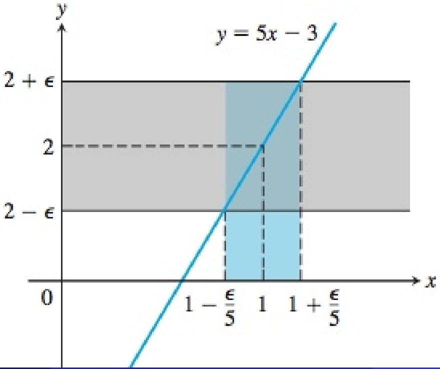
Así, una solución es $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$**.**

Segundo paso: corroborar. Si $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$, entonces:

$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon.$$

Así, una solución es $\delta = \frac{\epsilon}{5}$**.**

Resolución gráfica:



Formalización del concepto de límite

Ejemplo B: para $f(x) = \sqrt{x-1}$, determine el límite L de f cuando x tiende a 5. Además, dado $\epsilon = 1$, encuentre $\delta > 0$ tal que la siguiente implicación sea verdadera

$$0 < |x-5| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |\sqrt{x-1} - L| < 1.$$

Ejemplo B: para $f(x) = \sqrt{x-1}$, determine el límite L de f cuando x tiende a 5. Además, dado $\epsilon = 1$, encuentre $\delta > 0$ tal que la siguiente implicación sea verdadera

$$0 < |x-5| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |\sqrt{x-1} - L| < 1.$$

Solución: Observar que $L = 2$. Para encontrar δ, primero trabajamos la desigualdad:

$$|\sqrt{x-1} - L| < 1$$

para obtener un intervalo abierto que contenga a $x_0 = 5$. Entonces:

$$|\sqrt{x-1} - 2| < 1 \text{ si y solo si } -1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1.$$

$$1 < \sqrt{x-1} < 3$$

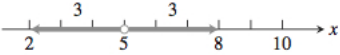
$$1 < x-1 < 9$$

$$2 < x < 10.$$

El intervalo que contiene a 5 **es:** $(2, 10)$

Formalización del concepto de límite

Finalmente, representamos el intervalo $(2, 10)$ y determinamos un intervalo simétrico con centro en $x_0 = 5$ contenido en $(2, 10)$:



La distancia más corta de $x_0 = 5$ a los extremos del intervalo es 3. Luego, si tomamos $\delta = 3$ (o cualquier número positivo menor), entonces las $x's$ que cumplan:

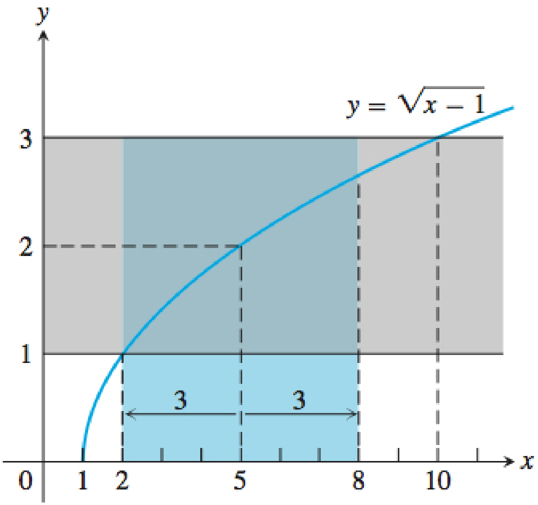
$$0 < |x - 5| < 3$$

estarán contenidas en el intervalo $(2, 10)$ y entonces:

$$|\sqrt{x - 1} - 2| < 1.$$

Así, una solución es $\delta = 3$.

Resolución gráfica del ejemplo B.



Un límite trigonométrico útil

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Un límite trigonométrico útil

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Ejemplo 1: compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Un límite trigonométrico útil

Teorema

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$$

La demostración de este resultado se verá en el capítulo 7.

Ejemplo 1: compruebe que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} 2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

Ejemplo 2: determine el siguiente límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tan\, t \sec\, 2t}{3t}.$$