ELIPSES E HIPÉRBOLAS

Respuestas Ejercicios 87 a 95

87. En cada caso indique todos los elementos de las siguientes *elipses* y represente gráficamente:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

c) $4x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 14 = 0$; d) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

Respuestas:

a) A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, sabemos que $a = 5$ y $b = 3$, como $a^2 = b^2 + c^2$ determinamos el valor de c:

$c = \sqrt{25-9} = 4$

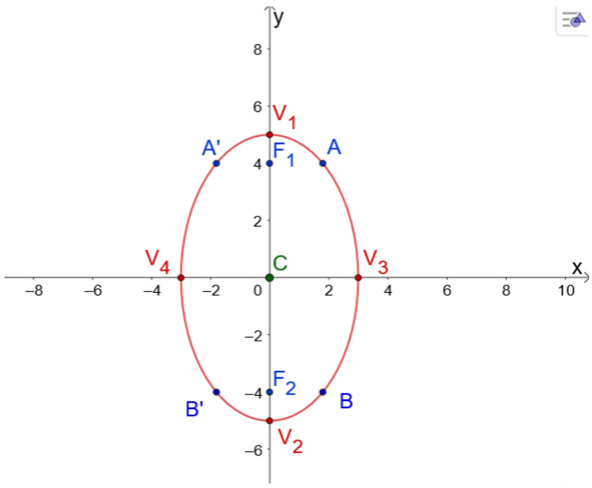
Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir:

$|LR| = 2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(0,0)$			
Eje focal	Coincidente con el eje y			
Focos	$F_1(0,4)$		$F_2(0,-4)$	
Vértices	$V_1(0,5)$	$V_2(0,-5)$	$V_3(0,3)$	$V_4(0,-3)$
Lado recto	$\lvert LR\rvert = 3.6$			
Extremos del lado recto	$A(1.8, 4)$	$A'(-1.8, 4)$	$B(1.8, -4)$	$B'(-1.8, -4)$

Representación gráfica:



b) A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, sabemos que $a=5$ y $b=2$, como $a^2=b^2+c^2$ determinamos el valor de c:

$c=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

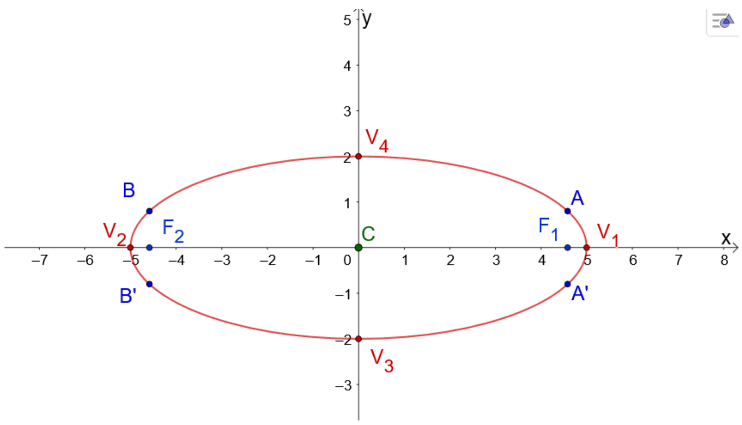
Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR|=\frac{2b^2}{a}$, es decir:

$|LR|=2\,.\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=1.6$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(0,0)$			
Eje focal	Coincidente con el eje x			
Focos	$F_1(\sqrt{21},0)$		$F_2(-\sqrt{21},0)$	
Vértices	$V_1(5,0)$	$V_2(-5,0)$	$V_3(0,-2)$	$V_4(0,2)$
Lado recto	$|LR|=1.6$			
Extremos del lado recto	$A(\sqrt{21},0.8)$	$A'(\sqrt{21},-0.8)$	$B(-\sqrt{21},0.8)$	$B'(-\sqrt{21},-0.8)$

Representación gráfica:



c) Tenemos la ecuación general de la elipse $4x^2+2y^2-8x-12y+14=0$, completaremos cuadrados para determinar sus semiejes y centro:

Asociamos términos con variables iguales: $(4x^2-8x)+(2y^2-12y)+14=0$
Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$4(x^2-2x)+2(y^2-6y)+14=0$
Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$4(x^2-2x+1-1)+2(y^2-6y+9-9)+14=0$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:

$4(x^2-2x+1)-4+2(y^2-6y+9)-18+14=0$
$4(x-1)^2+2(y-3)^2-8=0$

Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:
$4(x-1)^2+2(y-3)^2 \ = 8$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica: $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{4} \ = 1.$

A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a=2$ y $b=\sqrt{2}$, sabiendo que $a^2=b^2+c^2$ determinamos el valor de c:

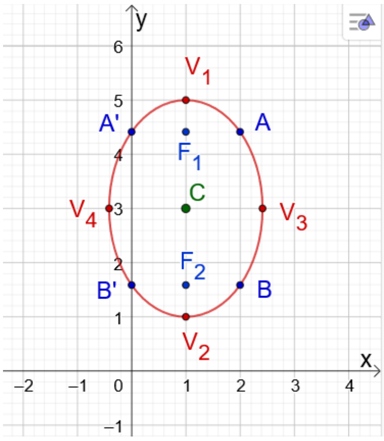
$$c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR|=\frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR|=2\,.\frac{2}{2}=2$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(1{,}3)$			
Eje focal	Paralelo al el eje y			
Focos	$F_1(1,3+\sqrt{2})$		$F_2(1\,,3-\sqrt{2})$	
Vértices	$V_1(1,5)$	$V_2(1,1)$	$V_3(1+\sqrt{2},3)$	$V_4(1-\sqrt{2},3)$
Lado recto	$\|LR\|=2$			
Extremos del lado recto	$A(2,3+\sqrt{2})$	$A'(0,3+\sqrt{2})$	$B(2,3-\sqrt{2})$	$B'(0,3-\sqrt{2})$

Representación gráfica:



d) Tenemos la ecuación general de la elipse $4x^2\ +\ 9y^2-48x+72y\ +\ 144\ =\ 0$, completaremos cuadrados para determinar sus semiejes y centro:

Asociamos términos con variables iguales: $(4x^2-48x)+(\,9y^2\ +72y)+\ 144\ =\ 0$
Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$4(x^2-12x)+9(\,y^2\ +\ 8y)+\ 144\ =\ 0$
Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$4(x^2-12x+36-36)+9(\,y^2\ +8y+16-16)+\ 144\ =\ 0$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:

$4(x^2 - 12x + 36) - 144 + 9(y^2 + 8y + 16) - 144 + 144 = 0$

Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:

$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica: $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$.

A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a = 6$ y $b = 4$, sabiendo que $a^2 = b^2 + c^2$ determinamos el valor de c:

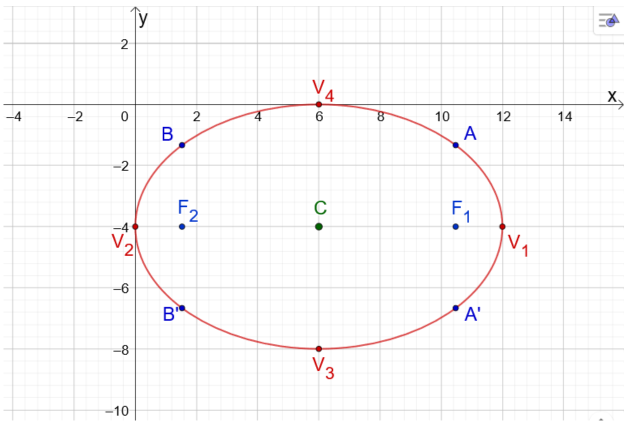
$$c = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR| = 2\frac{\cdot 16}{6} = \frac{16}{3}$.

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(6,-4)$			
Eje focal	Paralelo al el eje x			
Focos	$F_1(6+\sqrt{20},-4)$		$F_2(6-\sqrt{20},-4)$	
Vértices	$V_1(12,-4)$	$V_2(0,-4)$	$V_3(6,-8)$	$V_4(6,0)$
Lado recto	$\|LR\| = 16/3$			
Extremos del lado recto	$A(6+\sqrt{20},-\frac{4}{3})$	$A'(6+\sqrt{20},-\frac{20}{3})$	$B(6-\sqrt{20},-\frac{4}{3})$	$B'(6-\sqrt{20},-20/3)$

Representación gráfica:



---

88. Halle el ángulo formado por la recta L: 2x – 3y +1 = 0 con las rectas tangentes a la *elipse* $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, en los puntos de intersección de la elipse con la recta L.

Respuestas:

Comenzamos determinando los puntos de intersección de la elipse con la recta L, para ello resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$$

Despejamos y de la ecuación de L , $y=\frac{1+2x}{3}$, luego reemplazamos en la ecuación de la elipse y despejamos x:

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{\left(\frac{1+2x}{3}+1\right)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{2x}{9}+\frac{1}{9}+\frac{x^2}{9}+\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}=1$$

$$\frac{2x^2}{9}+\frac{2}{9}x-\frac{4}{9}=0$$

Las soluciones a la ecuación cuadrática son $x_1=1\ y\ x_2=-2$, esto nos indica que la recta es *secante* a la elipse.

Si $x_1=1$, entonces $y_1=1$

Si $x_2=-2$, entonces $y_2=-1$

Por lo tanto los puntos de intersección son $P_1(1,1) y\ P_2(-2,-1)$.

Ahora determinamos las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica en los puntos de intersección. Para ello derivamos implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2(x-1)}{9}+\frac{2(y+1)}{4}.y'=0$$

$$\frac{2x}{9}-\frac{2}{9}+\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)y'=0$$

$$y'=\frac{\frac{2}{9}-\frac{2}{9}x}{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{4x-4}{9y+9}$$

Al evaluar la derivada en $P_1 y\ P_2$ obtendremos las pendientes de las rectas tangentes.

En P_1: $y'=\frac{4-4}{18}=0$ luego la recta tangente a la elipse que pasa por P_1 es horizontal cuya ecuación es: $L_1: y=1$.

En P_2: $y'=\frac{4(-2)-4}{9(-1)+9}$ pero esto es un absurdo, por lo tanto la recta tangente a la elipse que pasa por P_2 es una recta vertical cuya ecuación es: $L_2: x=-2$

Calcularemos el ángulo comprendido entre las rectas L y L_1, recordamos que la ecuación explícita de L es $y=\frac{1+2x}{3}$, conociendo su pendiente podemos considerar como vector director al vector: $\boldsymbol{d_L}=(3,2)$.

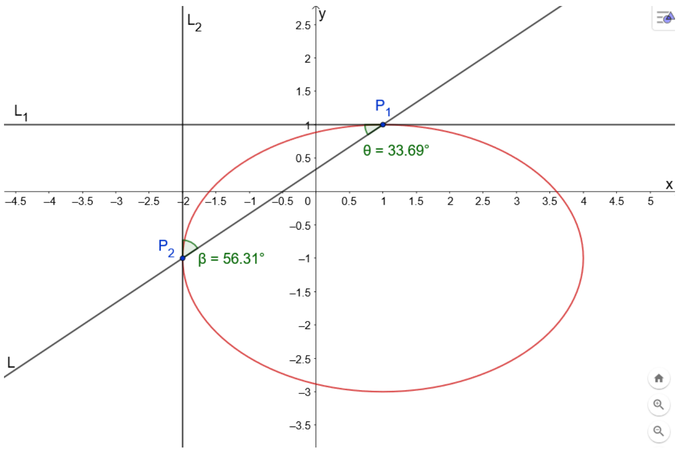
Como L_1 es vertical un vector director de la misma puede ser el $\check{\jmath}$, luego calculamos el ángulo entre ambos vectores directores:

$$cos\theta = \frac{\breve{\boldsymbol{j}}.\boldsymbol{d_L}}{\|\boldsymbol{d_L}\|}$$
$$cos\theta = \frac{(0,1)(2,3)}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$
$$\theta \approx 33.69°$$

Procedemos de igual modo para calcular el ángulo entre L y L_2 ,pero ahora el vector director de L_2 es el versor $\breve{\boldsymbol{\imath}}$. Entonces:

$$cos\beta = \frac{\breve{\boldsymbol{\imath}}.\boldsymbol{d_L}}{\|\boldsymbol{d_L}\|}$$
$$cos\beta = \frac{(1,0)(2,3)}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$
$$\beta \approx 56.31°$$

Representación gráfica:

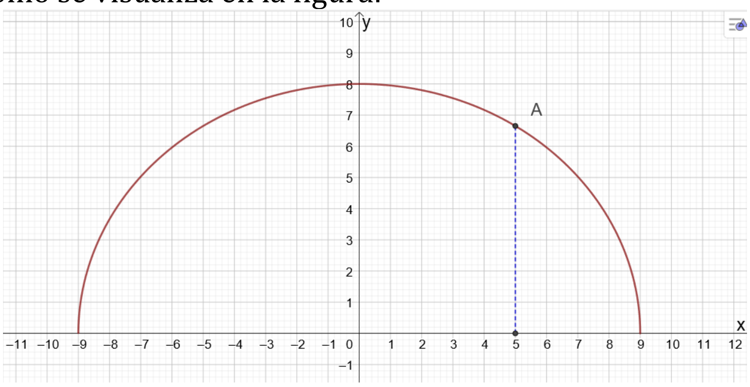


---

89. Un puente de arco *semielíptico* tiene una amplitud de 18 m en su base. En el centro su altura es de 8 m. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas apropiado y determine la altura del puente en un punto que está ubicado a 4 m de los extremos. Represente gráficamente.

Respuestas

Situamos el origen del sistema de coordenadas en el centro del arco semielíptico, con el eje x horizontal. Tal como se visualiza en la figura:



A partir de los datos del problema tenemos que

$a = \frac{18}{2} = 9\ m$

$b = 8\ m$

Luego la ecuación que describe el puente *semielíptico* es:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

A $4m$ de los extremos $x = 5$, por lo tanto reemplazamos en (I) y encontramos la altura del puente: $\frac{5^2}{9^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$

$y^2 = \left(1 - \frac{25}{81}\right).64$

$y \approx 6.65$

Si bien la ecuación tiene dos soluciones, sólo dejamos la cumpla la condición $y \geq 0$. Por lo tanto la altura del puente a $4m$ de los extremos es de $6.65m$ aproximadamente.

---

90. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la *elipse E* por el punto exterior Q (10,0). La elipse *E* es tal que sus focos son los puntos F_1 (-4,0) y F_2 (4,0) y pasa por el punto P_0 (2,3). Verifique sus respuestas con la ayuda del *Escenario Geométrico Interactivo EGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior* [Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica [6.1.2]].

Respuestas:

Obtenemos la ecuación de la elipse con los datos del enunciado. Como F_1 (-4,0) y F_2 (4,0) podemos determinar que el centro de la elipse es C(0,0) y $\boldsymbol{c = 4}$**.**

Sabemos por definición de elipse que es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias de a sus focos es igual a $\boldsymbol{2a}$, por lo tanto teniendo P_0 (2,3) podemos calcular el valor del semieje mayor :

$\boldsymbol{\|P_0F_1\| + \|P_0F_2\| = 2a}$

$\boldsymbol{\|(-6,-3)\| + \|(2,-3)\| = 2a}$

$\boldsymbol{\sqrt{45} + \sqrt{13} = 2a}$

$\boldsymbol{\frac{\sqrt{45} + \sqrt{13}}{2} = a}$

$5.16 \approx a$

Teniendo en cuenta que el eje focal es el eje y y el centro C(0, 0) tenemos $\frac{x^2}{5.16^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Sabiendo que P_0(2,3) pertenece a la elipse, sabemos que satisface a la ecuación anterior:

$$\frac{2^2}{5.16^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$$

Por lo tanto , $b\cong 3.25$. Hemos hallado la ecuación de la elipse con la que vamos a trabajar:

$$\frac{x^2}{5.16^2}+\frac{y^2}{3.25^2}=1 \quad \text{(I)}$$

Para encontrar las tangentes por el punto exterior Q(10,0), plantearemos un sistema de ecuaciones con la ecuación de la elipse y la ecuación de una recta que pase por Q:

$$\begin{cases} y=m(x-10) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Reemplazamos y de la primer ecuación, luego sustituimos en la segunda:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx-10m)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^{\,2}}-\frac{20m^2x}{b^{\,2}}+\frac{100m^2}{b^{\,2}}-1=0$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^{\,2}}\right)x^2-\frac{20m^2}{b^{\,2}}x+\left(\frac{100m^2}{b^{\,2}}-1\right)=0$$

Como buscamos la recta tangente a la elipse, sabemos que el sistema de ecuaciones deberá tener una sóla solución. Por lo tanto, el discriminante ($\Delta= b^2-4ac$) de la ecuación cuadrática que obtuvimos es nulo:

$$\left(-\frac{20m^2}{b^{\,2}}\right)^2-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^{\,2}}\right)\left(\frac{100m^2}{b^{\,2}}-1\right)=0$$

$$\frac{400m^4}{b^{\,4}}-\left(\frac{4}{a^2}+\frac{4m^2}{b^{\,2}}\right)\left(\frac{100m^2}{b^{\,2}}-1\right)=0$$

$$\frac{400m^4}{b^{\,4}}-\left(\frac{400m^2}{a^2\,b^{\,2}}-\frac{4}{a^2}+\frac{400m^4}{b^{\,4}}-\frac{4m^2}{b^{\,2}}\right)=0$$

$$\frac{400m^4}{b^{\,4}}-\frac{400m^2}{a^2\,b^{\,2}}+\frac{4}{a^2}-\frac{400m^4}{b^{\,4}}+\frac{4m^2}{b^{\,2}}=0$$

$$\left(-\frac{400}{a^2\,b^{\,2}}+\frac{4}{b^{\,2}}\right)m^2+\frac{4}{a^2}=0$$

Si sustituímos los valores a y b , y resolvemos la ecuación cuadrática encontramos dos valores posibles de m:

$m_1\approx 0.38 \; y \; m_2\approx -0.38$

Hemos encontrado las pendientes de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto exterior $Q(10,0)$, concluyendo que ecuaciones de las mismas son:

$L_1: y = -0.38(x - 10)$

$L_2: y = 0.38(x - 10)$

(Al trabajar con valores aproximados de a y b, los resultados que encontraremos arrastran la aproximación)

---

91. Indique ecuaciones paramétricas de la *elipse* con centro C(-1,1), semiejes a=6 y b=4 y eje focal paralelo al eje *y.*

Respuestas:

Siguiendo el análisis desarrollado en la sección 3.5.6 *Ecuaciones paramétricas de una elipse*, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías* (página 127), tenemos:

$$\begin{cases} x = -1 + 4\cos\theta \\ y = 1 + 6sen\,\theta \end{cases} con\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

---

92. Dada la ecuación: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

a) Represente la cónica y determine sus elementos fundamentales.

b) Determine los puntos de intersección entre la cónica del inciso anterior y las rectas:

L_1: y - x + 8 = 0 y L_2: 2y – x + 4 = 0

Respuestas:

a) A partir de la ecuación de cartesiana de la hipérbola $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, sabemos que $a = 4$ y $b = 2$, sabiendo que $c^2 = b^2 + a^2$ determinamos el valor de c:

$c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir:

$|LR| = 2 \,.\frac{4}{4} = 2$

Para determinar las asíntotas sabemos que la pendiente de ellas será $\pm\frac{b}{a}$, es decir $\pm 1/2$ como ambas pasan por el centro de la hipérbola $C(2, -1)$ podemos determinar sus ecuaciones:

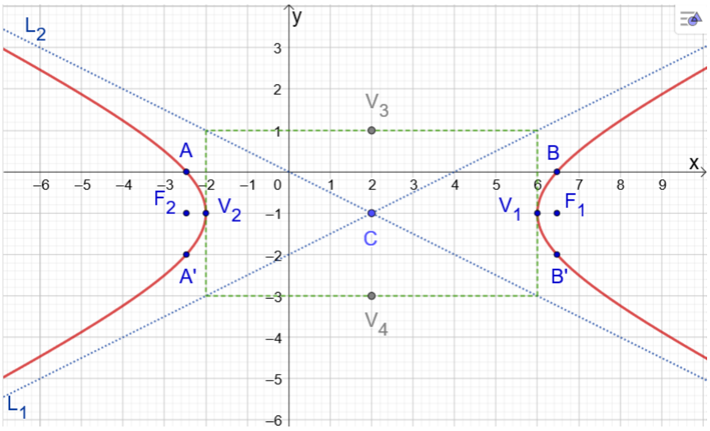
$L_1: y + 1 = 1/2(x - 2)$

$L_2: y + 1 = -1/2(x - 2)$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

<table>
<tr><td>Centro</td><td colspan="4">$C(2,-1)$</td></tr>
<tr><td>Eje focal</td><td colspan="4">Coincidente con el eje x</td></tr>
<tr><td>Focos</td><td colspan="2">$F_1(2+\sqrt{20},-1)$</td><td colspan="2">$F_2(2-\sqrt{20},-1)$</td></tr>
<tr><td>Vértices</td><td>$V_1(6,-1)$</td><td>$V_2(-2,-1)$</td><td>$V_3(2,1)$</td><td>$V_4(2,-3)$</td></tr>
<tr><td>Lado recto</td><td colspan="4">$|LR|=2$</td></tr>
<tr><td>Extremos del lado recto</td><td>$A(2-\sqrt{20},0)$</td><td>$A'(2-\sqrt{20},-2)$</td><td>$B(2+\sqrt{20},0)$</td><td>$B'(2+\sqrt{20},-2)$</td></tr>
<tr><td>Asíntotas</td><td colspan="2">$y+1=1/2(x-2)$</td><td colspan="2">$y+1=-1/2(x-2)$</td></tr>
</table>

Representación gráfica:



a) Para determinar la intersección de la hipérbola con la recta L_1: y - x + 8 = 0 planteamos un sistema de ecuaciones con ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{4}=1 \\ y-x+8=0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema despejamos la variable y de la ecuación de la recta L_1:

$y=x-8$ ahora reemplazamos en la ecuación de la hipérbola para hallar las soluciones del sistema:

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(x-8+1)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(x-7)^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{4x}{16}+\frac{4}{16}-\frac{x^2}{4}+\frac{14x}{4}-\frac{49}{4}-1=0$$

$$-\frac{3}{16}x^2+\frac{13x}{4}-13=0$$

Las soluciones aproximadas de la ecuación cuadrática son: $x_1\approx 6.26$ y $x_2\approx 11.07$. Por lo tanto, la recta L_1 es *secante* a la cónica. Evaluamos las ordenadas de los puntos de intersección:

Si $x_1=6.26$, entonces $y=-1.7$ por lo tanto un punto de intersección es: $P_1(6.26;\ -1.74)$

Si $x_2=11.07$, entonces $y=3.07$ por lo tanto un punto de intersección es: $P_2(11.07;\ 3.07)$.

Ahora procedemos de igual modo para calcular los puntos de intersección de la hipérbola con la recta L_2: $2y-x+4=0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{4}=1\\ 2y-x+4=0\end{cases}$$

Para resolver el sistema despejamos la variable $\boldsymbol{y}$ de la ecuación de la recta L_2: $y=\frac{x}{2}-2$

reemplazamos en la ecuación de la hipérbola para hallar las soluciones del sistema:

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{\left(\frac{x}{2}-2\ +1\right)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{4x}{16}+\frac{4}{16}-\frac{x^2}{16}+\frac{1x}{4}-1-1=0$$

$$-\frac{7}{4}=0$$

Hemos obtenido un absurdo y esto nos indica que no existen puntos de intersección entre la recta L_2 y la cónica.

---

93. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2-4y^2-18x-16y+29=0$

a) Identifique la cónica y todos sus elementos.

b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas que son tangentes a la cónica en los puntos en los que ésta intersecta al eje y.

c) Grafique la cónica, identificando todos sus elementos, y las rectas del inciso anterior.

Respuestas:

a) Tenemos la ecuación general de una hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$, completaremos cuadrados para determinar sus semiejes y centro:

Asociamos términos con variables iguales: $(9x^2 - 18x) + (-4y^2 - 16y) + 29 = 0$
Extraemos como factor común el coeficiente principal de cada binomio:

$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) + 29 = 0$
Completamos cuadrados dentro de cada paréntesis:

$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) + 29 = 0$

Aplicamos propiedad distributiva del producto respecto la suma y asociamos los términos independientes:

$9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 4(y^2 + 4y + 4) + 16 + 29 = 0$
$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 + 36 = 0$
Expresamos cada trinomio cuadrado perfecto como su binomio correspondiente:
$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$

Dividimos toda la expresión por el término independiente y obtenemos la ecuación cartesiana de la cónica: $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$

A partir de la ecuación de cartesiana de la elipse, sabemos que $a = 3$ y $b = 2$, sabiendo que $c^2 = b^2 + a^2$ determinamos el valor de c:

$c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Luego calculamos la longitud del lado recto como $|LR| = \frac{2b^2}{a}$, es decir: $|LR| = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Para determinar las asíntotas sabemos que la pendiente de ellas será $\pm\frac{b}{a}$, es decir $\pm 2/3$ como ambas pasan por el centro de la hipérbola $C(1,-2)$ podemos determinar sus ecuaciones:

$L_1: y + 2 = 2/3(x-1)$
$L_2: y + 2 = -2/3(x-1)$

Con todos los datos anteriores podemos determinar los elementos de la cónica:

Centro	$C(1,-2)$			
Eje focal	Coincidente con el eje y			
Focos	$F_1(1,-2+\sqrt{13})$		$F_2(1,-2-\sqrt{13})$	
Vértices	$V_1(1,1)$	$V_2(1,-5)$	$V_3(-1,-2)$	$V_4(3,-2)$
Lado recto	$\lvert LR\rvert = 8/3$			
Extremos del lado recto	$A(\frac{7}{3},-2+\sqrt{13})$	$A'(-1/3,-2+\sqrt{13})$	$B(\frac{7}{3},-2-\sqrt{13})$	$B'(-\frac{1}{3},-2-\sqrt{13})$
Asíntotas	$y+2 = 2/3(x-1)$		$y+2 = -2/3(x-1)$	

b) Determinaremos los puntos dónde la hipérbola interseca el eje *y*, tomando a $\boldsymbol{x = 0}$:

$$-4y^2 - 16y + 29 = 0$$

Las soluciones aproximadas de la ecuación cuadrática son: $y_1 \approx -5.35$ y $y_2 \approx 1.35$. Entonces los puntos de intersección son: $P_1(0, -5.35)$ y $P_2(0, 1.35)$.

Para determinar las rectas tangentes a la cónica en P_1 y P_2, derivamos implícitamente la ecuación de la hipérbola y calculamos las pendientes de las rectas tangentes en dichos puntos:

$$18x - 18 - 8y\, y' - 16y' = 0$$

$$(-8y - 16)y' = -18x + 18$$

$$y` = \frac{-18x + 18}{-8y - 16}$$

En $P_1(0, -5.35)$ obtenemos que $y' = \frac{45}{67}$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en P_1 *es* $T_1 : y = \frac{45}{67}x - 5.35$.

En $P_2(0, 1.35)$ obtenemos que $y' = -\frac{45}{67}$, por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en P_2 *es* $T_2 : y = \frac{45}{67}x + 1.35$.

Conociendo las pendientes de las rectas tangentes podemos determinar vectores directores de ambas rectas $d_1 = (67, 45)$ y $d_2 = (-67, 45)$ correspondientes a las rectas T_1 y T_2 respectivamente.

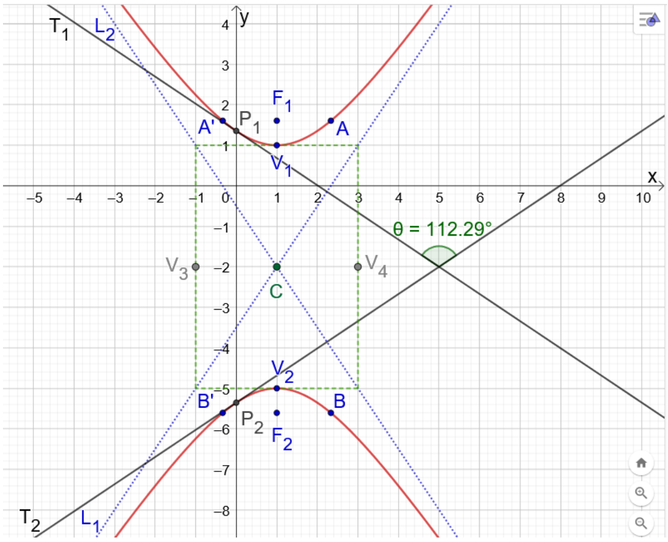
Ahora determinamos el ángulo comprendido entre ellas:

$$\cos\theta = \frac{d_1 . d_2}{\|d_1\| \|d_2\|}$$

$$\cos\theta = \frac{(67, 45).(-67, 45)}{6514} = \frac{-4489 + 2025}{6514} = -\frac{2464}{6514}$$

$$\theta \approx 112.29°$$

c) *Representación gráfica:*



94. Indique ecuaciones paramétricas de una *hipérbola* de centro C(0,1) , semiejes *a*=5 y *b*=2, y eje focal paralelo al eje *y.*

Respuestas

Siguiendo el análisis desarrollado en la sección 3.*6.6 Ecuaciones paramétricas de la hipérbola*, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías* (página 138), tenemos:

$$\begin{cases} x = 2\sec(\theta) \\ y = 1 + 5\,tg\,(\theta) \end{cases} con\ \theta\ \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) U \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right).$$

95. Determine la *familia de hipérbolas* cuyos vértices son $V_1(1,1)$ y $V_2(1,5)$.

Respuestas:

Determinamos el semieje real de las hipérbolas como la semidistancia entre los vértices:

$\boldsymbol{OV_1} = (1,1)$

$\boldsymbol{OV_2} = (1,5)$

$$a = \frac{\|\boldsymbol{V_1V_2}\|}{2} = \frac{\|\boldsymbol{OV_2} - \boldsymbol{OV_1}\|}{2} = 2$$

El centro de las hipérbolas se encuentra en el punto medio entre $V_1(1,1)$ y $V_2(1,5)$, entonces es $C(1,3)$, además el eje focal es paralelo al eje *y.*

Teniendo en cuenta la relación pitagórica ($c^2 = b^2 + a^2$), tenemos que $c^2 - 4 = b^2$, por lo tanto la familia de hipérbolas tendrá la siguiente ecuación:

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{c^2-4} = 1 \quad , \qquad c \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$