ECUACIÓN GENERAL de SEGUNDO GRADO en DOS VARIABLES

Ejercicios 133 a 135 resueltos

133. Una cónica tiene por ecuación general $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$, obtenga:

a) La forma matricial de la ecuación de 2º grado.
b) La matriz asociada a la forma cuadrática.
c) El tipo de cónica a partir de los valores y vectores propios de la matriz asociada.
d) Los vectores propios y la nueva base
e) La matriz de pasaje P
f)La matriz A' respecto de la nueva base $P^T AP = A'$
g) La ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base.
h) Represente gráficamente.

Respuestas:

a) Siguiendo el análisis desarrollado en la sección *5.8.1 Ecuación de segundo grado con dos variables*, del Libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías* (páginas 188 a 191) sabemos que la forma matricial de una ecuación de segundo grado completa $(ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0)$ es $\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{KX} + f = 0$ donde $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = [d \quad e]$.

Siendo la ecuación del ejercicio $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$, tenemos que $\boldsymbol{X} = [x \quad y]$,
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = [0 \quad 0]$ y $f = -4$. Por lo tanto, la forma matricial de la ecuación de segundo grado es:

$$\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{KX} + f = [x \quad y] \begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 4 = 0$$

b) La matriz asociada a la forma cuadrática es: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Calculamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - \frac{3}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4} = 0$$

Por lo tanto, los valores propios de A son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad y \; \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

Conociendo los valores propios podemos determinar que la cónica es una elipse ya que

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{5}{4}>0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, para calcular un vector propio:

- Para $\lambda_1=\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix}3/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{\sqrt{3}}{3}y$$

Luego $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}y\\ y\end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\quad\boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 3\end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_1}$ tenemos: $\boldsymbol{b_1}=\begin{bmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$

- Para $\lambda_2=\frac{5}{2}$:

$$\begin{bmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{3}y$$

Luego $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}y\\ y\end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\quad\boldsymbol{v_2}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$ al normalizar $\mathbf{v_2}$ tenemos: $\boldsymbol{b_2}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}$

d) Los vectores propios $\boldsymbol{b_1}$ y $\boldsymbol{b_2}$ forman la nueva base: $\boldsymbol{B'}=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.

e) La matriz de pasaje tiene como columnas a los vectores propios normalizados. Para que la matriz esté asociada a una rotación de los ejes coordenados con un mismo ángulo y en un mismo sentido debe cumplirse siempre que $|\boldsymbol{P}|=1$.

Sea $\boldsymbol{P'}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, verificamos $|\boldsymbol{P'}|=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$, como el determinante es (-1), cambiamos el orden de las columnas, ahora si $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ su determinante es

$|\boldsymbol{P}|=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$. Entonces, concluimos que la matriz de pasaje es $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$.

f) Calculamo**s** $\boldsymbol{P^TAP}=\boldsymbol{A'}$:

$$\boldsymbol{P^TAP}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A'}$$

La matriz $\boldsymbol{A'}$ coincide con la matriz diagonal ($\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$)que tiene como elementos de su diagonal principal los valores propios en el orden que están los vectores propios en la matriz $\boldsymbol{P}$.

g) Si hacemos la trasformación de coordenadas $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PX'}$, con $\boldsymbol{X'}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$en la ecuación en su forma matricial tenemos:

$$\boldsymbol{X^TAX}+\boldsymbol{KX}+f=0$$
$$(\boldsymbol{PX'})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PX'})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{PX'})+f=0$$

$$\boldsymbol{X'^T P^T A P X'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$

$$\boldsymbol{X'^T D X'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$

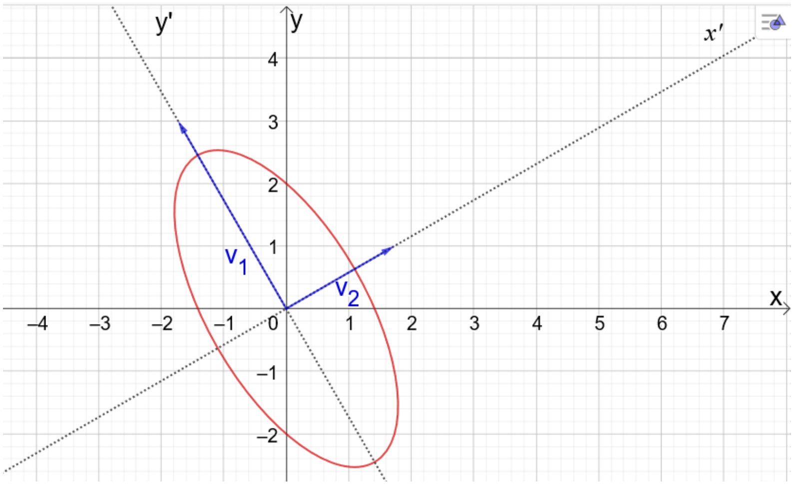
$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [0 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 4 = 0$$

Operamos matricialmente y obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base:

$$\frac{x'^2}{8/5} + \frac{y'^2}{8} = 1$$

Verificamos que se trata de una elipse con eje focal coincidente con el eje y'.

h) Representación gráfica:



134. Para cada una de las ecuaciones:

i) $x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 8 = 0$

ii) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

a) Indique la cónica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.

b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.

c) Encuentre la ecuación de la cónica referida al sistema rotado.

d) Calcule el ángulo que han rotado los ejes.

e) Represente gráficamente.

f) Verifique sus respuestas graficando con Geogebra

Respuestas

i) La ecuación de segundo grado con la que trabajaremos es: $x^2 + 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 8 = 0$.

a) Tenemos que $\boldsymbol{X} = [x \quad y]$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = [-8\sqrt{2} \quad 0]$ y $f = 8$. Calculamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$
$$\lambda(-2+\lambda) = 0$$

Por lo tanto, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\lambda_1 = 0 \ \ y\, \lambda_2 = 2$$

Conociendo los valores propios podemos determinar que la cónica es una parábola ya que

$$\lambda_1\lambda_2 = 0$$

b) Para determinar la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente a $\boldsymbol{A}$, obtenemos sus vectores propios, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{v} = 0$:

- Para $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y$$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_1}$ tenemos: $\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

- Para $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}_{y\neq 0}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_2}$ tenemos: $\boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

La matriz de pasaje tiene como columnas a los vectores propios normalizados. Para que la matriz esté asociada a una rotación los ejes coordenados con un mismo ángulo y en un mismo sentido debe cumplirse siempre que $|\boldsymbol{P}| = 1$.

Sea $\boldsymbol{P'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, verificamos $|\boldsymbol{P'}| = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$, como el determinante es (-1), cambiamos el orden de las columnas, ahora si $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ su determinante es

$|\boldsymbol{P}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Entonces, concluimos que la matriz de pasaje es $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

c) Si hacemos la trasformación de coordenadas $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PX'}$, con $\boldsymbol{X'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ en la ecuación (i) en su forma matricial tenemos:

$$\boldsymbol{X^T AX} + \boldsymbol{KX} + f = 0$$
$$(\boldsymbol{PX'})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PX'}) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{PX'}) + f = 0$$
$$\boldsymbol{X'^T P^T APX'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$
$$\boldsymbol{X'^T DX'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+[-8\sqrt{2} \quad 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+8=0$$

Operamos matricialmente y obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base:

$$2x'^2-8x'+8y'+8=0$$

Completamos cuadrados y llegamos a la ecuación cartesiana de la parábola en el sistema de referencia *x'y'*:

$$(x'-2)^2=-4y'$$

Si aplicamos las ecuaciones de traslación: $\begin{cases}x''=x'-2\\ y''=y'\end{cases}$, la ecuación cartesiana de la cónica en el sistema de referencia *x''y''* es:

$$x''^2=-4y''$$

Se trata de una parábola con eje focal paralelo el eje y', con vértice en $V(2,0)_{x'y'}$ con parámetro $p<0$.

d) A partir de la matriz **P** cuyo determinante es igual a 1, sabemos que la primera columna indica dirección y sentido eje nuevo *x'* y la segunda columna de **P** indica dirección y sentido nuevo eje *y'*.

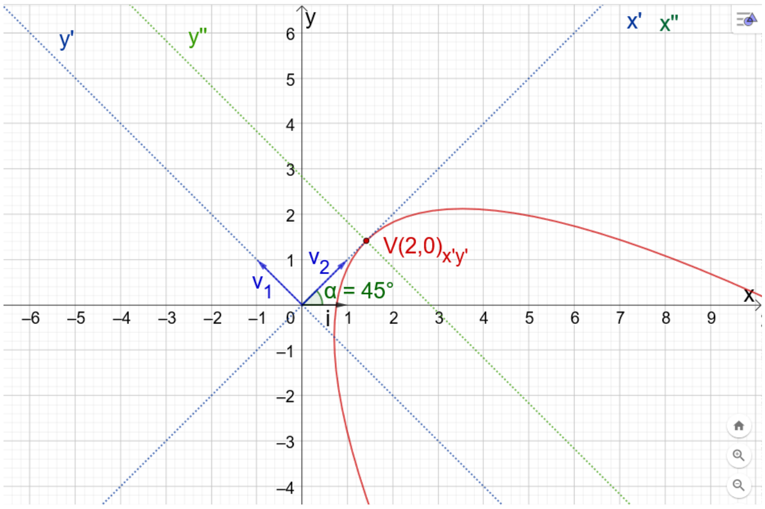
Teniendo en cuenta la expresión para evaluar el ángulo entre dos vectores, $cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ podemos analizar el ángulo entre los versores $\breve{\boldsymbol{\imath}}$ y $\mathbf{b_2}$ (o entre los versores $\breve{\jmath}$ y $\mathbf{b_1}$).

De esta manera, el ángulo que rotaron los ejes es:

$$cos\theta=\langle(1,0).\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta=45°$$

Observación: para graficar el nuevo sistema de referencia *x'y'* basta representar los versores $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ (o cualquier vector coincidentes en la dirección y sentido de ambos) ya que nos indican las direcciones y sentidos de los nuevos ejes coordenados. Por lo tanto, no es necesario graficar midiendo el ángulo obtenido.

e y f) Representación gráfica:



ii) La ecuación de segundo grado con la que trabajaremos es: $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$.

a) Tenemos que $X = [x \quad y]$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $K = [0 \quad 0]$ y $f = 8$. Calculamos los valores propios de la matriz A:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Por lo tanto, los valores propios de A son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\lambda_1 = 3 \quad y\ \lambda_2 = -2$$

Conociendo los valores propios podemos determinar que la cónica es una hipérbola ya que

$$\lambda_1 \lambda_2 = -6 < 0$$

b) Para determinar la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza ortogonalmente a $\boldsymbol{A}$, obtenemos sus vectores propios, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$**:**

- Para $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -2y$$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}_{y \neq 0}$ $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_1}$ **tenemos:** $\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

- Para $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x = y$$

Luego $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}_{x \neq 0}$ $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ al normalizar $\boldsymbol{v_2}$ tenemos: $\boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

La matriz de pasaje tiene como columnas a los vectores propios normalizados. Para que la matriz esté asociada a una rotación los ejes coordenados con un mismo ángulo y en un mismo sentido debe cumplirse siempre que $|\boldsymbol{P}| = 1$.

Sea $\boldsymbol{P'} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, verificamos $|\boldsymbol{P'}| = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = -1$, como el determinante es (-1), cambiamos el orden de las columnas, ahora si $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ su determinante es

$|\boldsymbol{P}| = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$. Entonces, concluimos que la matriz de pasaje es $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

c) Si hacemos la trasformación de coordenadas $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PX'}$, con $\boldsymbol{X'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ en la ecuación (i) en su forma matricial tenemos:

$$\boldsymbol{X^T AX} + \boldsymbol{KX} + f = 0$$
$$(\boldsymbol{PX'})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{PX'}) + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{PX'}) + f = 0$$
$$\boldsymbol{X'^T P^T APX'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$
$$\boldsymbol{X'^T DX'} + \boldsymbol{KPX'} + f = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0$$

Operamos matricialmente y obtenemos la ecuación de la cónica en el sistema determinado por la nueva base:

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 8 = 0$$

Luego la ecuación cartesiana de la hipérbola en el sistema de referencia *x'y'*:

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{8/3} = 1$$

Se trata de una hipérbola con eje focal coincidente con el eje x' y centro en $C(0,0)_{x'y'}$.

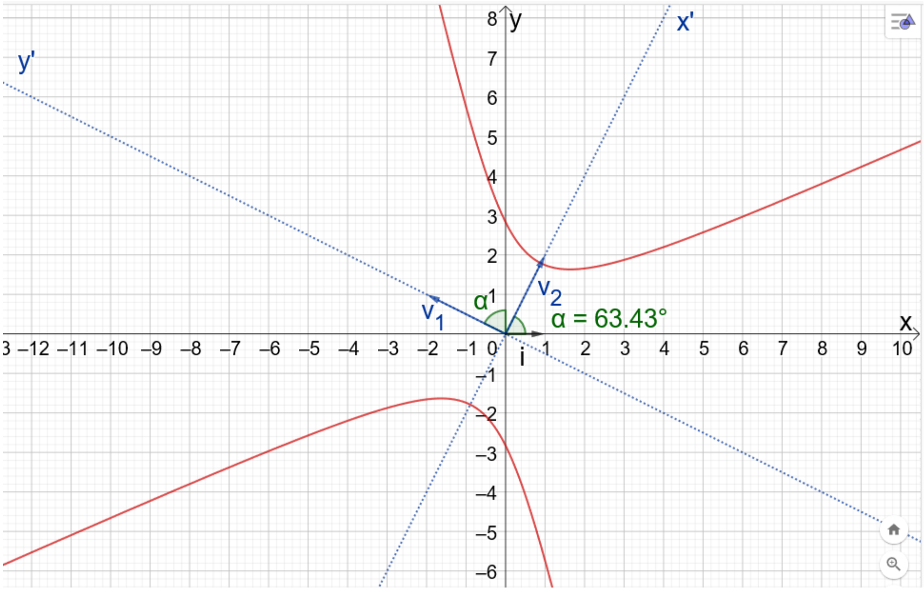
d) A partir de la matriz **P** cuyo determinante es igual a 1, sabemos que la primera columna indica dirección y sentido eje nuevo x' y la segunda columna de **P** indica dirección y sentido nuevo eje y'.

Teniendo en cuenta la expresión para evaluar el ángulo entre dos vectores, $cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ podemos analizar el ángulo entre los versores $\breve{\imath}$ y $\mathbf{b_2}$ (o entre los versores $\breve{\jmath}$ y $\mathbf{b_1}$).

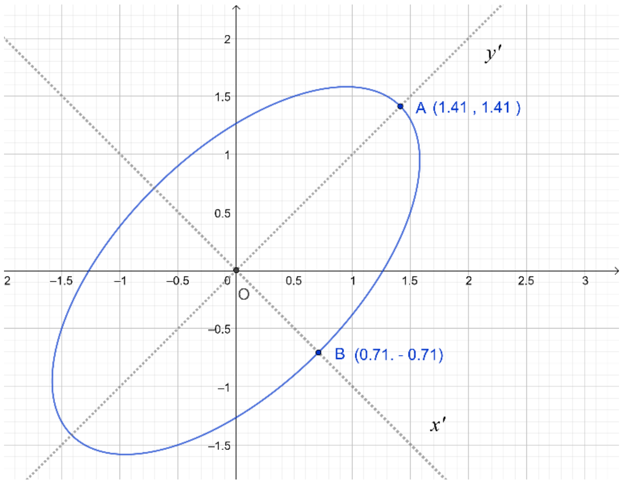
De esta manera, el ángulo que rotaron los ejes es:

$$cos\theta = \langle(1,0).\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \theta \approx 63.26°$$

e y f) Representación gráfica:



135. Teniendo en cuenta la información del siguiente gráfico, halle la ecuación de la elipse en el sistema coordenado *xy*.



Respuestas:

Analizando el gráfico podemos obtener los semiejes de la elipse como:

$$a = \|\boldsymbol{OA}\|$$

$$a = \sqrt{1.41^2 + 1.41^2} \approx 2$$

$$b = \|\boldsymbol{OB}\|$$

$$b = \sqrt{0.71^2 + (-0.71)^2} \approx 1$$

Conociendo los semiejes podemos escribir la ecuación de la elipse rotada en el sistema de coordenadas $x'y'$:

$$x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Operando algebraicamente:

$$4x'^2 + y'^2 - 4 = 0$$

De esta expresión deducimos que los valores propios son : $\lambda_1 = 4 \ y \ \lambda_2 = 1$ y el término independiente de la ecuación de segundo grado con dos variables es: $f = -4$.

Conociendo los valores propios podemos armar la matriz diagonal: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La dirección del eje x' está dada, por ejemplo por el vector: $\boldsymbol{b_1} = (1, -1)$

La dirección del eje y' está dada , por ejemplo por el vector: $\boldsymbol{b_2} = (1,1)$

Con esta información si obtenemos los vectores unitarios en ambas direcciones estaremos obteniendo las columnas de la matriz P de transformación de coordenadas.

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\|\boldsymbol{b_1}\|} = \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\|\boldsymbol{b_2}\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Luego

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

verificando que $|\boldsymbol{P}| = 1$.

Para encontrar la ecuación de la elipse en los término de x e y , calculamos la matriz de coeficientes de la forma matricial como: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{D}.\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}$. Luego

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Como la elipse no se encuentra trasladada respecto del sistema de coordenadas xy, los términos lineales de la ecuación de segundo grado con dos variables serán nulos. Por lo tanto conociendo la matriz A y el término independiente f se tiene una ecuación en términos de x e y:

$$\frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2 - 4 = 0$$