RESPUESTAS REPASO
Parábolas, Elipses, Hipérbolas
Superficies esféricas, cónicas y cilíndricas

Ejercicio 1 Los extremos de apoyo de un puente de *arco parabólico* se encuentran separados entre sí 120m.

a) ¿Cuál es la altura que alcanzará el puente en correspondencia con el punto medio del arco, si la distancia de ese punto de la parábola al foco de la misma es de 40m ?

b) ¿Hasta qué distancia del centro es posible el paso de un buque de 15m de altura?

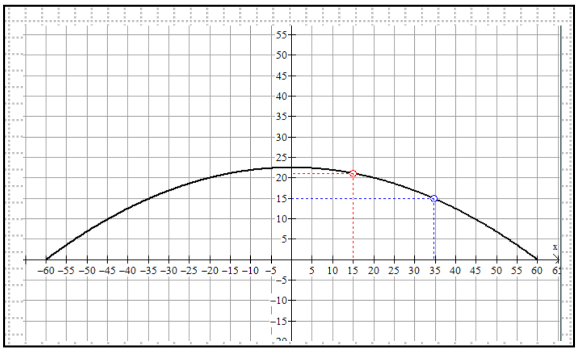
c) Indique ecuaciones paramétricas que permitan describir al arco y halle con las mismas la altura de un punto situado a 15m del centro.

a)

$p/2 = 40m \qquad p = 80m \qquad A(60{,}0)$

$x^2 = -2p(y-k) = -160(y-k)$

$60^2 = -160(0-k) = 160k \qquad \therefore \qquad \boxed{k = 22.50m}$



b)

$x^2 = -160(y-22.50)$

Si $y = 15 \qquad x^2 = -160(15-22.50) = -160(-7.50) = 1200 \qquad x_1 = 34.6m$

$\boxed{dist_{x1B} = 34.6m}$

c)

Si $x = t$

$t^2 = -160(y-22.50)$

$-\dfrac{t^2}{160} = y - 22.50 \qquad \therefore \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{t^2}{160} + 22.50 \end{cases} \qquad t \in [-60{,}60]$

Si $x = 15$

$y = -\dfrac{15^2}{160} + 22.50 \qquad \therefore \qquad C(15;\ 21.09)$

Ejercicio 2

a) Identifique la cónica y todos sus elementos, siendo su ecuación: $25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0$

b) Determine el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2, siendo L_1 y L_2 las rectas tangentes a la cónica en los puntos en los que ésta interseca a la cuerda focal perpendicular al eje focal que pasa por el foco de mayor ordenada.

c) Grafique la cónica (indicando todos sus elementos) y las rectas L_1 y L_2.

d) Indique ecuaciones paramétricas que permitan describir la cónica dada.

a)

$25x^2 + 16y^2 - 100x - 64y - 236 = 0 \qquad \therefore \qquad \dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1 \quad EF \parallel yy; \quad a = 5; \quad b = 4; \quad c = 3 \quad C(2{,}2); \quad h = 2; \quad k = 2$

$V_1(2;7); \ V_2(2;-3); \ V_3(6;2); \ V_4(-2;2); |LR| = 2\dfrac{b^2}{a} = 6.40 \quad F_1(2;5); \ F_2(2;-1) \quad Elipse.$

b)

$y_1 = y_2 = 5 \quad \therefore \quad x_1 = 2 + \dfrac{b^2}{a} = 5.2\,; \quad x_2 = 2 - \dfrac{b^2}{a} = -1.2$

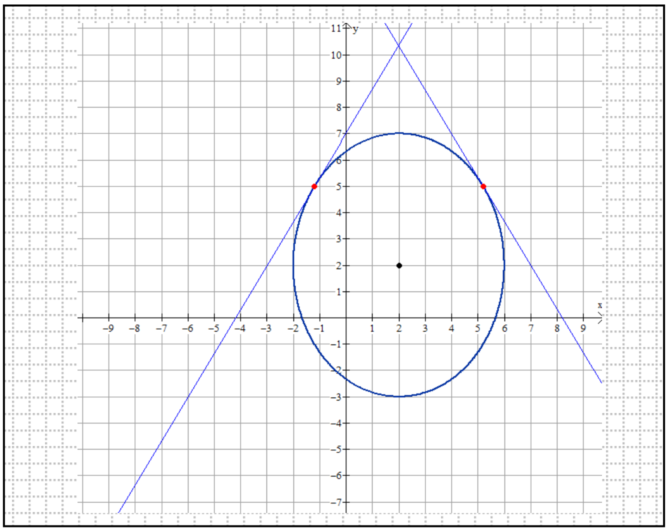
$\therefore \quad T_1(5.2;5); \ T_2(-1.2;5)$

Derivando: $25x + 16yy' - 50 - 32y' = 0 \qquad \therefore \qquad y' = \dfrac{25\,(2-x)}{16\,(y-2)}$

$y'_{T1} = -1.67 \ ; \ y'_{T2} = 1.67$

$\boxed{\theta = 61.8°}$

c)



d) $\begin{cases} x = 4\cos\theta + 2 \\ y = 5\,\mathrm{sen}\theta + 2 \end{cases} \qquad \theta \in [0{,}2\pi)$

Ejercicio 3

a) Encuentre la ecuación de la *superficie esférica* que pasa por el punto (2,2,1) y cuyo centro se encuentra en el punto de intersección de la recta y el plano dados por:

L: (x, y, z) = (1, 2, 1) + t (1, 2, -1) , $t \in R$ π: x + y - z + 2 = 0

b) Determine el centro y el radio de la *superficie esférica* de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 = 0$

c) Para la esfera del inciso b) determine la ecuación general del *plano tangente* a la misma en el punto R(7,0,1)

d) Para la esfera del inciso b) determine la ecuación vectorial paramétrica de la *recta normal* en el punto R(7,0,1)

e) Represente gráficamente los lugares geométricos de los incisos b), c) y d).

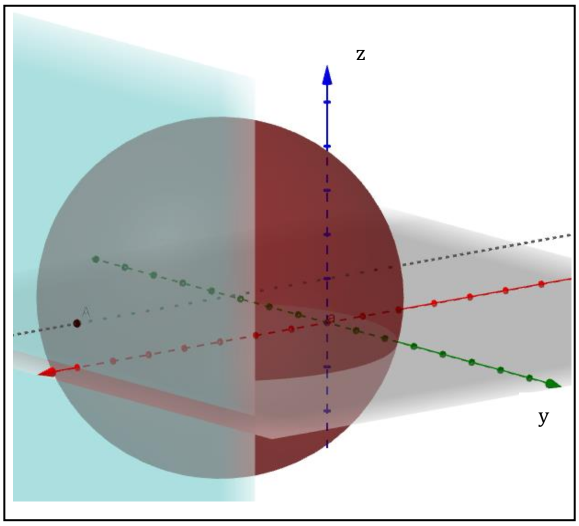
Respuestas:

a) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$

b) C(3,0,1) ; r = 4

c) Π: x=7

d) L: (x,y,z) =(7,0,1)+t(4,0,0) ; $t \in R$



Ejercicio 4

a) Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* que tiene como directriz una parábola en el plano *xy* de eje focal paralelo al eje, *y* con vértice en el punto (1,0,0) y parámetro p=1. Las rectas generatrices son paralelas al vector $\boldsymbol{v}$ = (2, 2, 5). (Sin desarrollar la última expresión).

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la recta generatriz que pasa por el vértice de la curva directriz.

d) Calcule el ángulo que forma la recta del inciso anterior con el plano *xy*.

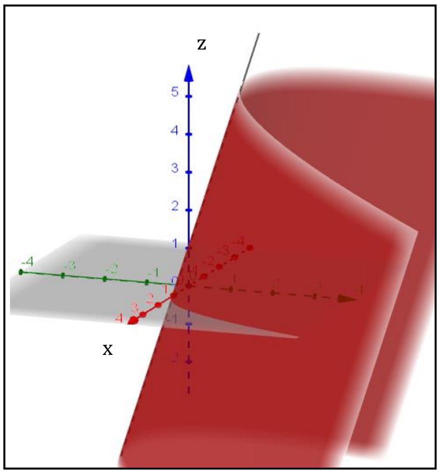
b) Realice un gráfico cualitativo.

Respuestas:

a) $(x - 0.4z - 1)^2 = 2(y - 0.4z)$

b) V(1,0,0) L: (x,y,z) =(1,0,0) + t (2,2,5) ; $t \in R$

c) α ~ 60°.5



Ejercicio 5

a) Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuyo vértice es el punto $V(10, 2, 0)$. La curva directriz está dada por una elipse en el plano yz con eje focal el eje z, centro en el origen de coordenadas y semiejes 3 y 4. (no es necesario desarrollar la última expresión).

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica del eje de la superficie cónica.

c) Calcule el ángulo que forma el eje de la superficie cónica con el plano yz.
d) Identifique la curva de intersección de la superficie cónica con el plano x=5 e indique sus principales elementos.

e) Realice un gráfico cualitativo.

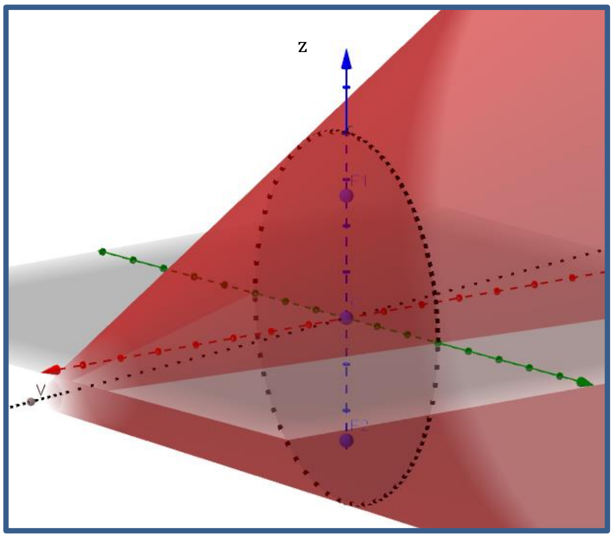
Respuestas:

a) $16\left(\frac{-10(y-2)}{(x-10)}+2\right)^2+9\left(\frac{-10z}{(x-10)}\right)^2=144$

b) El eje del cono pasa por el centro de la curva directriz y por el vértice del cono. Es decir, es la recta que pasa por C(0,0,0) y V(10,2,0). Por lo tanto un vector director es ***CV***= (10,2,0) y la ecuación resulta: L: (x,y,z) =(0,0,0) + t (10,2,0) ; $t \in R$

c) α ~ 78°.7

d) $\begin{cases}\frac{4}{9}(y-1)^2+\frac{1}{4}(z)^2=1\\ x=5\end{cases}$ Elipse centro C(5,1,0); a=2; b= 3/2



Ejercicio 6

En el Ejercicio 1 determine la ecuación de una *familia de parábolas* apropiada para el problema planteado (es decir, dejando fija alguna de las condiciones dadas) y represente dos parábolas de dicha familia. Justifique sus respuestas.

Respuesta:

Adoptando por ejemplo fijo el vértice y dejando variable el parámetro geométrico p , resulta:

$x^2=-2\mu(y-22.50)\quad \mu\in \mathrm{R}$

Ejercicio 7

a) Encuentre la ecuación cartesiana de la *superficie esférica* cuyo centro es la proyección ortogonal del punto R(1,3,8) en el plano xy, y tal que el plano π: y=6 es tangente a dicha esfera.

b) Identifique la curva de intersección de la esfera con el plano x=2 e indique sus principales elementos.

Respuestas:

a) C(1,3,0) ; distancia de π al centro C es r = 3 ; $(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=9$

b) $\begin{cases}(y-3)^2+(z)^2=8\\ x=2\end{cases}$ Circunferencia centro C(2,3,0); r^2 =8