Análisis Matemático I
Clase 17 Parte II: aplicaciones de la integral al cálculo de volúmenes de sólidos

Pablo D. Ochoa

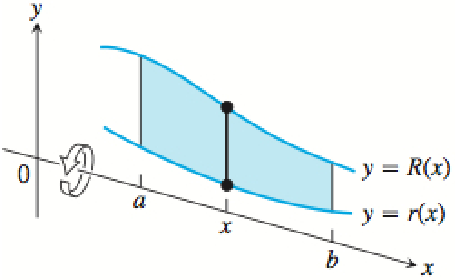
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

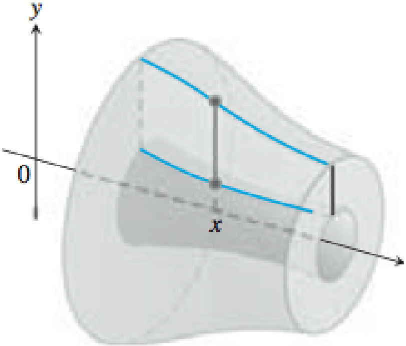
Mayo, 2020

Método de las arandelas

Método de las arandelas

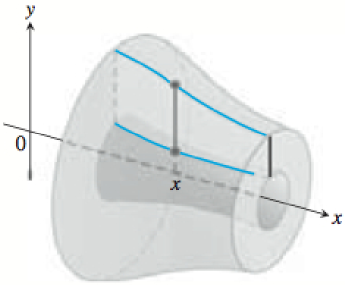
En ocasiones, al hacer girar una región alrededor de un eje, es posible que nos quede un sólido con una cavidad:

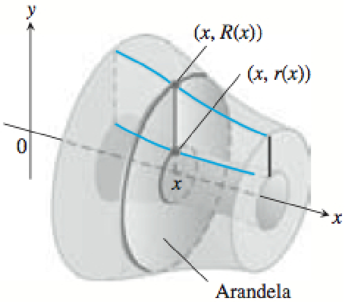




Método de las arandelas

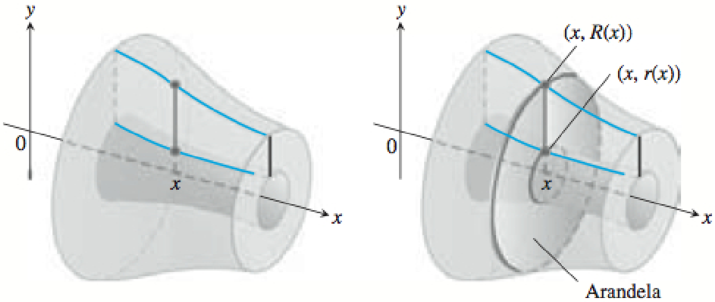
Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución no son discos como antes, sino **arandelas** o anillos.





Método de las arandelas

Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución no son discos como antes, sino **arandelas** o anillos.



Observar que tenemos un radio mayor $R(x)$ y uno menor $r(x)$. El área $A(x)$ de las secciones transversales es:

$$A(x) = \pi R(x)^2 - \pi r(x)^2.$$

Método de las arandelas

Por lo tanto, el volumen del sólido viene dado por:

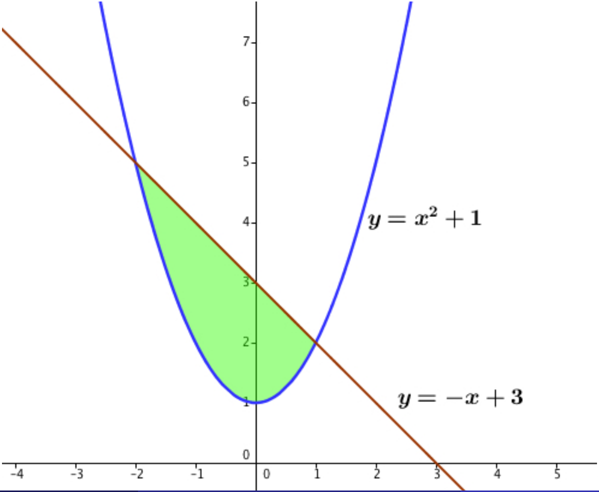
Volumen de un sólido de revolución por el método de arandelas (alrededor del eje x)

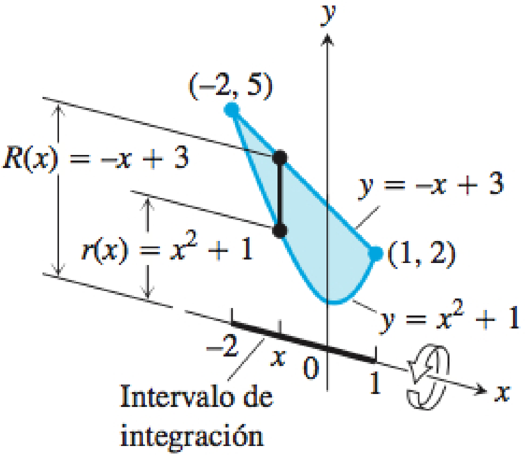
$$V = \int_a^b \pi \left[R(x)^2 - r(x)^2 \right] dx.$$

Ejemplo 5: considere la región plana encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = -x + 3$. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar dicha región alrededor del eje x.

Sólido de revolución: método de las arandelas

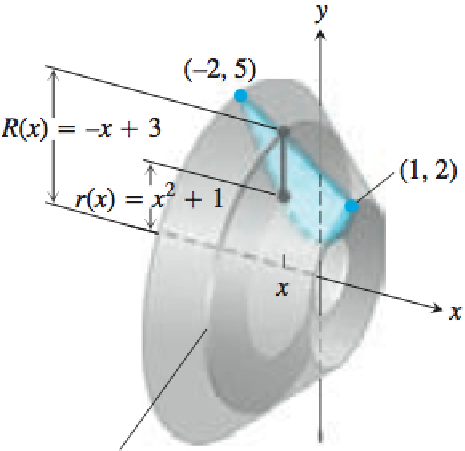
Ejemplo 5: considere la región plana encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = -x + 3$. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar dicha región alrededor del eje x.





VER VIDEO DE LA CLASE DONDE SE HA USADO GEOGEBRA PARA MOSTRAR LAS ARANDELAS GENERADAS.

Sólido de revolución: método de las arandelas



Luego:

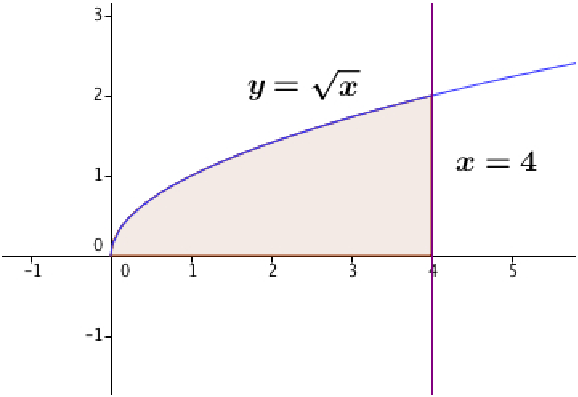
$$V = \int_{-2}^{1} \pi[(-x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx = \frac{117\pi}{5}.$$

Sólido de revolución: método de las arandelas

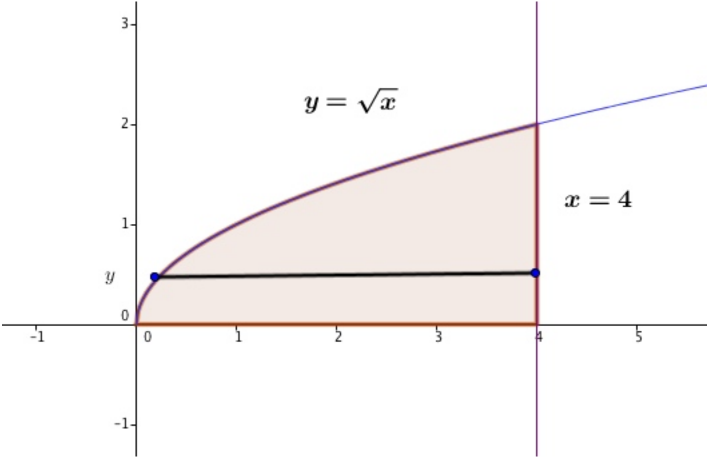
Para determinar el volumen de un sólido formado al hacer girar una región alrededor del eje y, utilizamos el mismo procedimiento que en el ejemplo 9, pero integramos con respecto a y no con respecto a x. En tal situación, el segmento de recta describe una arandela representativa que es perpendicular al eje y (el eje de revolución), así como los radios exterior e interior de la arandela son funciones de y.

Ejemplo 6: calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por el gráfico de $y = \sqrt{x}$, la recta $x = 4$ y el eje x, alrededor del eje y.

Representamos la región a rotar:



Trazamos un segmento horizontal de altura y que conecte los extremos de la región:



Cuando este segmento gira en torno a eje y, se origina un arandela (ver video COMPLEMENTO 1: MÉTODO DE ARANDELAS).

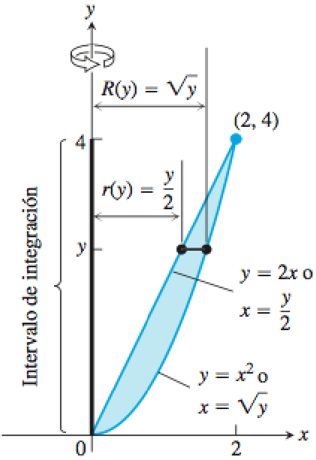
El intervalo de interés es ahora $[0, 2]$ en y, el radio mayor es 4 y el radio menor $x = y^2$. Luego, el volumen buscado es:

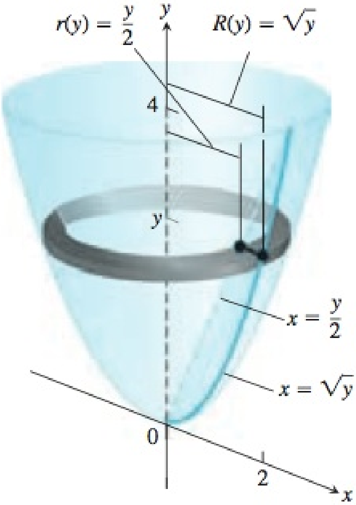
$$V = \int_0^2 \pi(16 - y^4)dy = \frac{128}{5}\pi.$$

Sólido de revolución: método de las arandelas

Ejemplo 7: para obtener un sólido, se hace girar alrededor del eje y la región acotada por $y = x^2$ y $y = 2x$ en el primer cuadrante. Determine el volumen del sólido.

Ejemplo 7: para obtener un sólido, se hace girar alrededor del eje y la región acotada por $y = x^2$ y $y = 2x$ en el primer cuadrante. Determine el volumen del sólido.




$r(y) = \frac{y}{2}$
y
$R(y) = \sqrt{y}$
4
y
$x = \frac{y}{2}$
$x = \sqrt{y}$
0
2
x

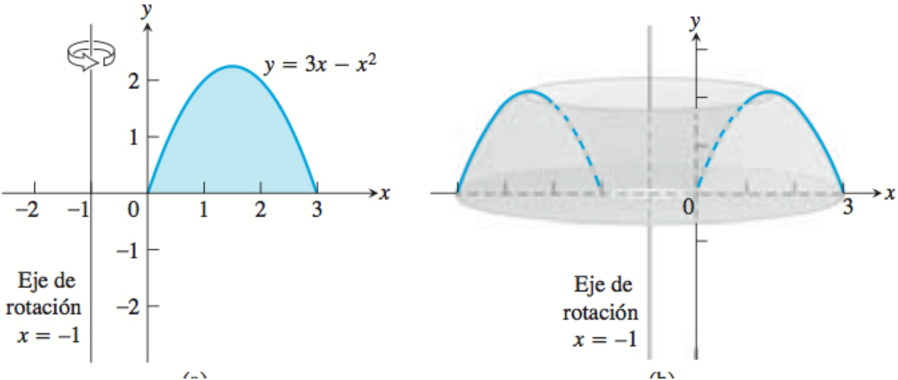
$$
\begin{aligned}
V &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy \\
&= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy \\
&= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

Rotación alrededor del eje y.

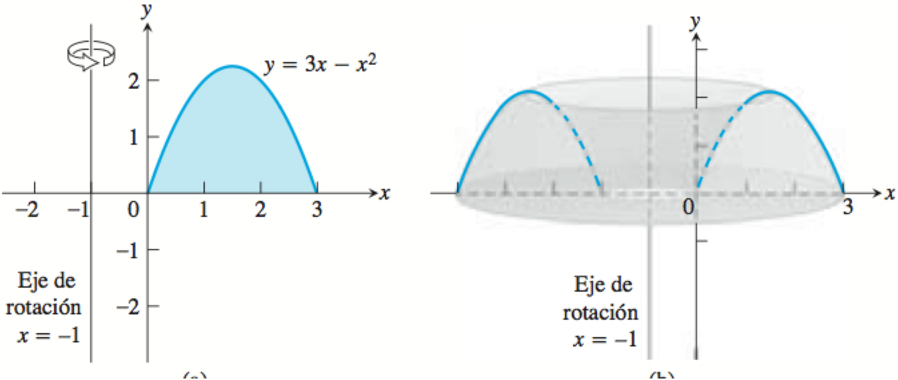
Sustituir los límites de integración por los radios.

Método de los cascarones cilíndricos

Problema: calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la siguiente región alrededor de la recta $x = -1$:



Problema: calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la siguiente región alrededor de la recta $x = -1$:



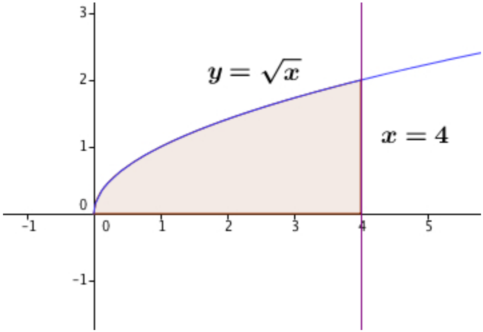
Los métodos descriptos anteriormente no se aplican fácilmente!

Sólido de revolución: método de los cascarones cilíndricos

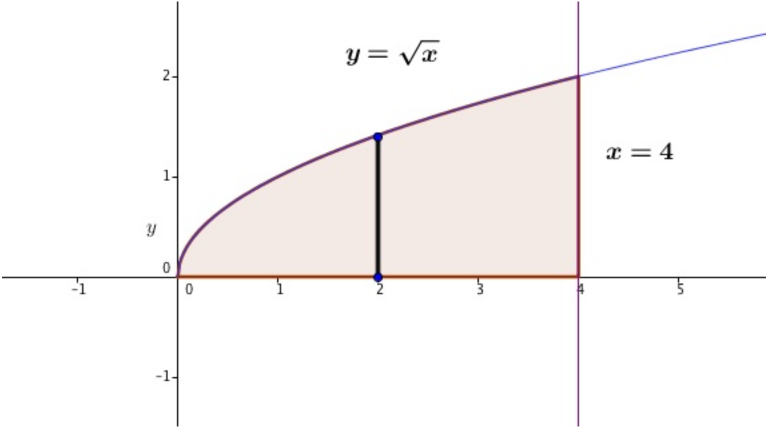
A continuación vamos a describir el método de los cascarones cilíndricos con ejemplos. Observar que este método no es un caso particular del método de secciones transversales.

Ejemplo 8: calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por el gráfico de $y = \sqrt{x}$, la recta $x = 4$ y el eje x, alrededor del eje y.

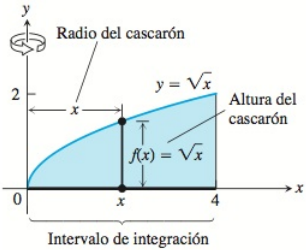
Representamos la región a rotar:

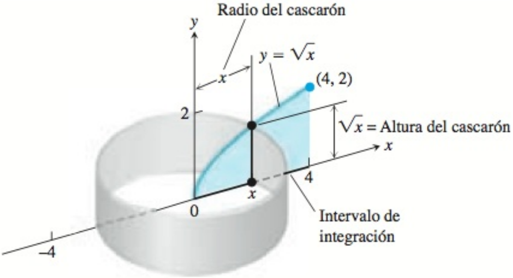


Observar que en este caso, podríamos usar el método de arandelas. A diferencia de ese método, ahora vamos a tomar segmentos verticales y los vamos a hacer girar en torno al eje y.



VER VIDEO DE LA CLASE DONDE SE HA USADO GEOGEBRA PARA MOSTRAR LOS CILÍNDROS GENERADOS.





El área del cascarón cilíndrico es:

$$A = 2\pi(\text{radio del cascarón}).(\text{altura del cascarón}) = 2\pi.x.\sqrt{x}.$$

El volumen buscado es:

$$V = 2\pi \int_0^4 x.\sqrt{x}\,dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\,dx = 2\pi \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \frac{128}{5}\pi.$$

En general:

Método de los cascarones cilíndricos

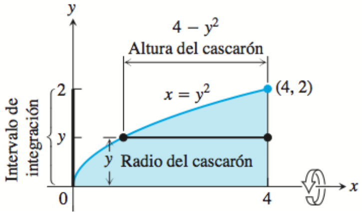
El volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor de una recta $x = L$ la región determinada por el gráfico de una función continua $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $y = b$ viene dado por:

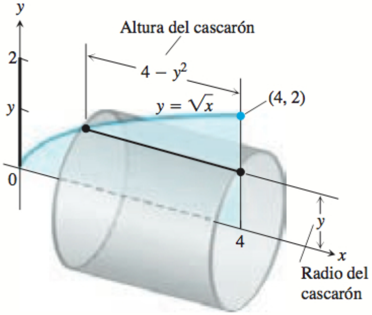
$$V = \int_a^b 2\pi(\text{ radio del cascarón })(\text{ altura del cascarón})dx$$

El método de los cascarones cilíndricos también se puede emplear cuando la región de interés gira alrededor de una recta $y = L$.

Ejemplo 9: determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor de la recta $y = 0$ la región encerrada por el gráfico de $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

Solución (VER COMPLEMENTO 2):





Radio del cascarón: y (variable y indica que hay que expresar la integral en términos de la variable y.)
Altura del cascarón: $4 - y^2$. Luego:

$$V = \int_0^2 2\pi y(4 - y^2)dy = 8\pi.$$