Análisis Matemático I
Clase 22: técnicas de integracón e integrales impropias

Pablo Ochoa
Martín Matons

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2020

Integrales impropias

Hasta ahora hemos calculado integrales de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde:

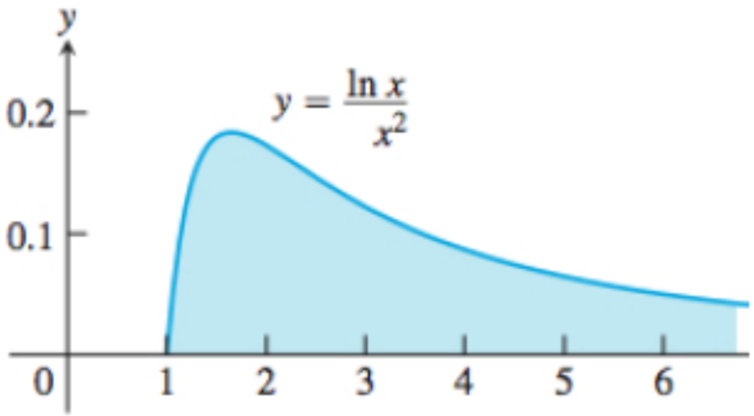
- el intervalo $[a, b]$ es acotado,
- el integrando f es continuo en $[a, b]$ (y por ende acotado en $[a, b]$).

Vamos a considerar integrales en donde al menos una de estas propiedades no se cumple. Es decir, calcularemos integrales donde:

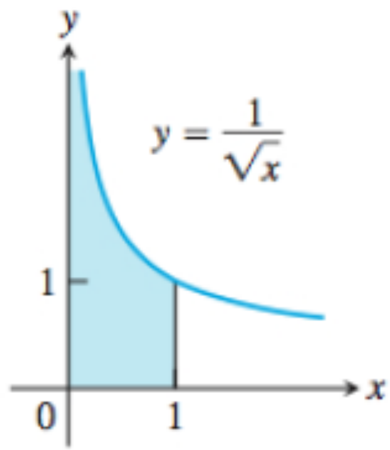
1. El intervalo $[a, b]$ no es acotado (va a ser de la forma: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.)
2. La función f presenta discontinuidades esenciales en el intervalo de integración.

Integrales impropias

Integrales del primer tipo:



Integrales del segundo tipo:



Integrales impropias

Integrales impropias de tipo I

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotados se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $[a, +\infty)$. Entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Sea f una función continua en $(-\infty, b]$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Integrales impropias

Integrales impropias de tipo I (continuación)

Las siguientes integrales con intervalos de integración no acotado se denominan integrales impropias de tipo I:

- Sea f una función continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces:

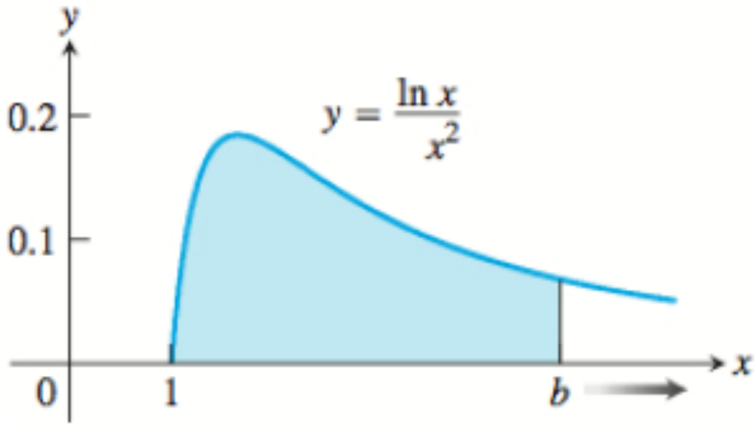
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

  donde $c \in \mathbb{R}$.

En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia es convergente. Si el límite no existe, entonces decimos que la integral impropia diverge.

Ejemplos:

1. Determine el área de la región bajo la curva $y = \frac{ln(x)}{x^2}$, sobre el intervalo $[1, \infty)$.



$$\int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{ln(x)}{x^2}\,dx$$

Para obtener la antiderivada de nuestro integrando aplicamos integración por partes:

$u = ln(x)$ y $dv = \dfrac{1}{x^2}dx$ de donde resulta $du = \dfrac{1}{x}dx$ y $v = \dfrac{-1}{x}$, luego:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{ln(x)}{x}\Big|_1^A - \int_1^{A} \frac{-1}{x^2}\,dx \right) =$$

$$\lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{ln(x)}{x}\Big|_1^A - \frac{1}{x}\Big|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 \right) = 1$$

Por L'Hôpital tenemos $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{ln(A)}{A} = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1/A}{1} = 0$

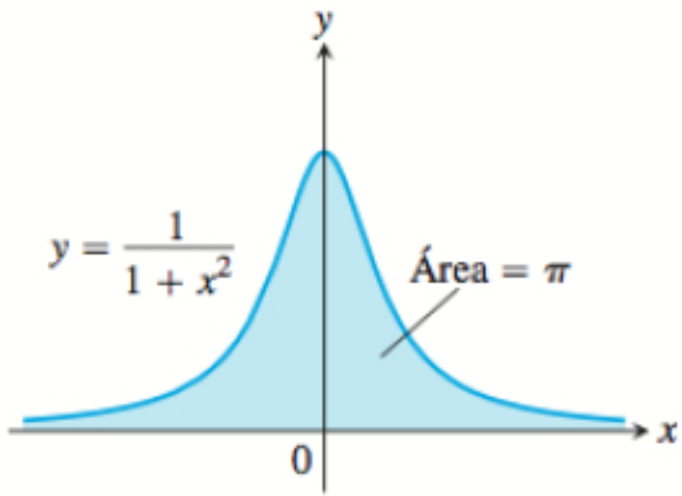
Por lo tanto: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = 1$

Integrales impropias

Ejemplos:

1. Determine la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{A\to-\infty} tan^{-1}(x)|_{A}^{0} + \lim_{B\to+\infty} tan^{-1}(x)|_{0}^{B} =$$

$$\lim_{A\to-\infty} \left(tan^{-1}(0) - tan^{-1}(A)\right) + \lim_{B\to+\infty} \left(tan^{-1}(B) - tan^{-1}(0)\right) =$$

$$0 - (-\pi/2) + \pi/2 - 0 = \pi$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

Integrales impropias

Ejercicio para la práctica de la próxima semana: determine los valores de p tales que la integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

converge.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^p}\,dx$$

Si tomamos $p = 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} ln(x)|_1^A = \lim_{A \to +\infty} ln(A) = \infty$$

Si tomamos $p > 0$ pero $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{A} x^{-p}\,dx =$$

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}|_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$$

Si $p < 1$ es $1 - p > 0$ y:

$$\lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \infty$$

Si $p > 1$ es $1 - p < 0$ y:

$$\lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = -\frac{1}{1-p} > 0$$

Luego si $0 < p \leq 1$ la integral diverge pero si $p > 1$ la integral converge y:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx = -\frac{1}{1-p} > 0$$

Integrales impropias

Integrales impropias de tipo II

Las siguientes integrales con integrandos que tienen discontinuidades en el intervalo de integración se denominan integrales impropias de tipo II:

- Sea f una función continua en $(a, b]$ y discontinua en $x = a$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

- Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en $x = b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Integrales impropias

Integrales impropias de tipo II (continuación)

- Si $c \in (a,b)$ y f es discontinua en c y continua en $[a,c) \cap (c,b]$, entonces:

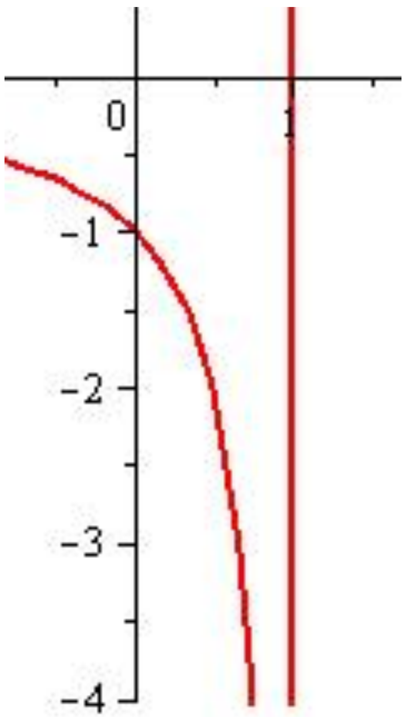
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

En cada caso, si el límite existe, decimos que la integral impropia converge y que el valor de la integral es el valor del límite. Si el límite no existe, decimos que la integral diverge.

Integrales impropias

Estudie el comportamiento de:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx.$$



Integrales impropias

Estudie el comportamiento de:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx.$$

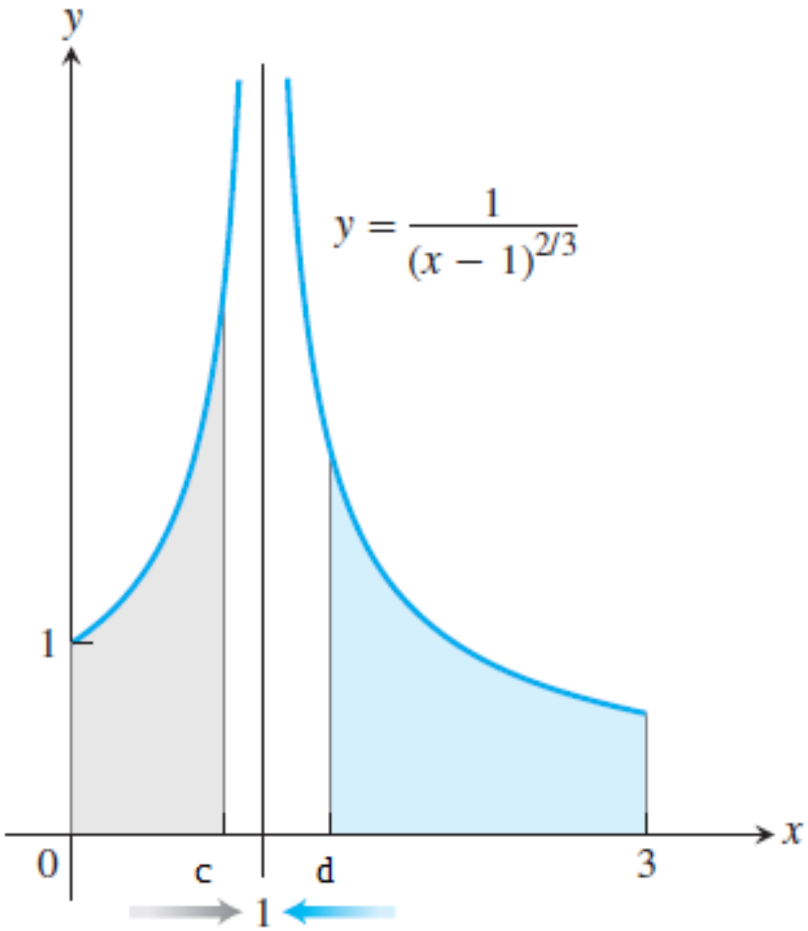
$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c \to 1^-} ln|x-1||_0^c =$$

$$\lim_{c \to 1^-} ln|c-1| - ln|-1| = -\infty$$

Integrales impropias

Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx.$$



Integrales impropias

Evalúe:

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx.$$

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx =$$

$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \lim_{d\to 1^+} \int_d^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx =$$

$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c (x-1)^{-2/3}\,dx + \lim_{d\to 1^+} \int_d^3 (x-1)^{-2/3}\,dx =$$

$$\lim_{c\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\big|_0^c + \lim_{d\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\big|_d^3 =$$

$$\lim_{c\to 1^-} \left(3(c-1)^{1/3}+3\right) + \lim_{d\to 1^+} \left(3\sqrt[3]{2} - 3(d-1)^{1/3}\right) = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = 3 + 3\sqrt[3]{2}$

Aclaración muy importante

Es importante notar que si no hubiéramos identificado la integral como impropia podríamos haber integrado directamente y, en este caso, obtendríamos el mismo resultado. Sin embargo el procedimiento sería erróneo. Para entender este punto veamos el siguiente caso en una variable:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

Sin embargo como: $\text{lím}_{x\to\ 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ la integral es impropia y por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\ 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\ 0^+} 2\sqrt{x}|_t^1 = \lim_{t\to\ 0^+}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}) = 2$$

O sea, los valores obtenidos pueden coincidir pero el primer procedimiento de resolución no es el correcto. Es más, hay casos donde difieren.