Análisis Matemático I
Clase 26: Cálculo con curvas paramétricas.

Pablo Ochoa
Martín Matons
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2020

Parametrización de curvas planas

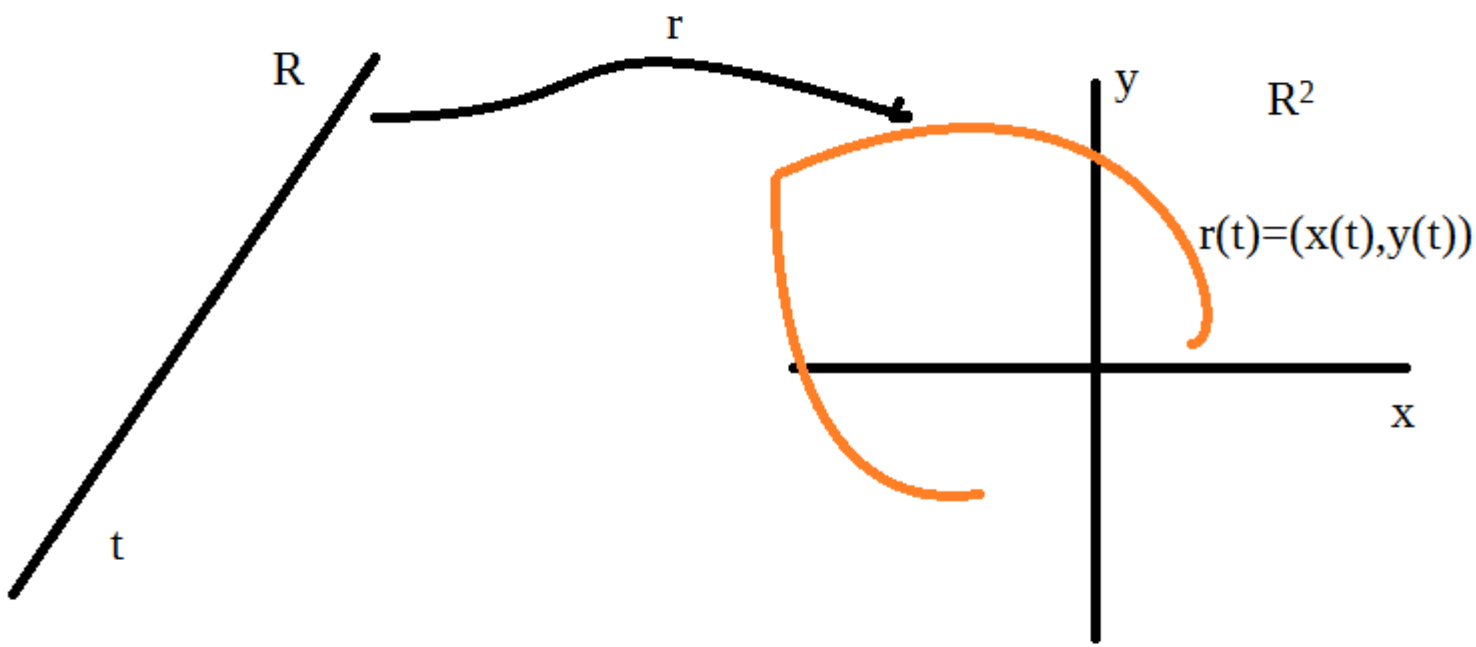
Definición de una curva plana

Sean $f = f(t)$ y $g = g(t)$ funciones continuas de t en un intervalo I. Entonces las ecuaciones:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t), \qquad t \in I$$

se denominan ecuaciones paramétricas y se dice que t es el parámetro. El intervalo I se denomina dominio paramétrico. El conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ cuando t varía en el intervalo I es el gráfico de las ecuaciones paramétricas. Las ecuaciones paramétricas junto al gráfico de dichas ecuaciones se denomina curva plana.



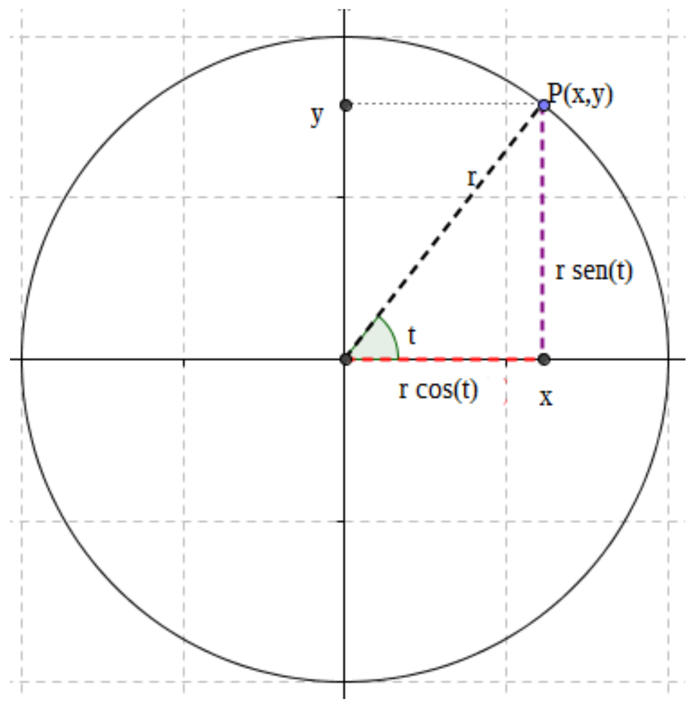
Cada $t \in I$ está asociado a un punto $r(t) = (x(t), y(t)) \in R^2$

Ejemplo 1: determine ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio unidad y centrada en el origen.

Si tomamos un punto (x, y) sobre la circunferencia unitaria tenemos que $x^2+y^2 = 1$ (por Pitágoras), luego podemos hacer $x = x(t) = cos(t)$ e $y = y(t) = sen(t)$ de tal forma que $x^2+y^2 = cos^2(t)+sen^2(t) = 1$. Por lo tanto una posible parametrización (pero no la única) de la circunferencia unitaria centrada en el origen es:

$$r(t) = (cos(t), sen(t)) \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

En este caso el intervalo de variación de t nos asegura que recorremos la curva sólo una vez.



Otra parametrización:

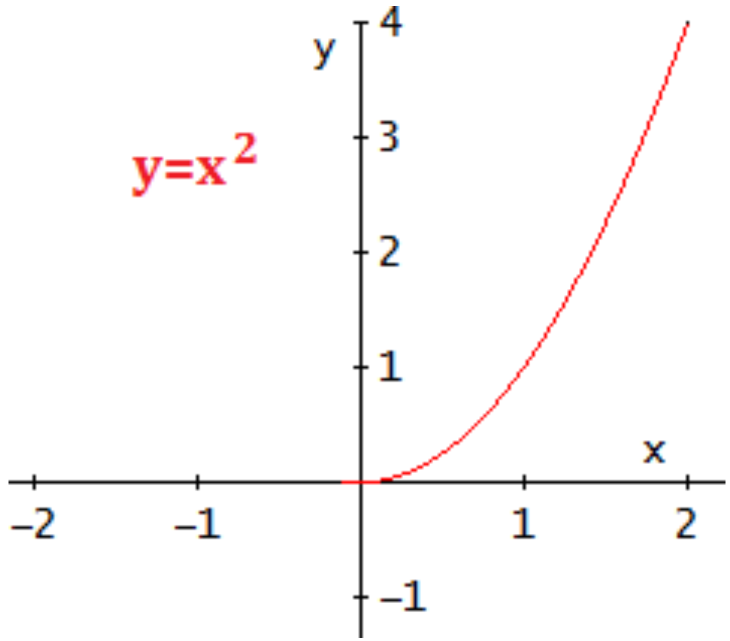
$$r(t) = (cos(2t), sen(2t)) \text{ con } t \in [0, \pi].$$

Ejemplo 2: la posición $P(x, y)$ de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = \sqrt{t}, \qquad y(t) = t, \qquad t \geq 0.$$

Identifique la curva plana.

Como $x = \sqrt{t}$, al despejar obtenemos $t = x^2$ y como $y = t$, igualando tenemos que $y = x^2$. Al estar restringida t al intervalo $(0, \infty)$, necesariamente $x \geq 0$ y por lo tanto $(x(t), y(t))$ parametriza la rama de los x positivos de una parábola.



Cálculo con curvas paramétricas

Definición de curva suave

Un curva C representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para $t \in I$, se dice que es suave si f' y g' existen, son continuas en I y no son simultáneamente nulas en I.

Intuitivamente, una curva es suave si es posible definir un vector velocidad no nulo en cada punto de la trayectoria.

Un lugar geométrico puede tener más de una representación paramétrica. Por ejemplo, considere las siguientes curvas planas:

- $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.
- $x(t) = t^3$, $y(t) = t^6$, $t \in \mathbb{R}$.

Observar que la primera curva es suave y la segunda no lo es.

Para verificar si son suaves o no:

$$x(t) = t \text{ e } y(t) = t^2$$

$$x'(t) = 1 \text{ e } y'(t) = 2t$$

$$x(t) = t^3 \text{ e } y(t) = t^6$$

$$x'(t) = 3t^2 \text{ e } y'(t) = 6t^5$$

Otra notación:

$$r(t) = (t, t^2)$$

$$r'(t) = (1, 2t)$$

$$r(t) = (t^3, t^6)$$

$$r'(t) = (3t^2, 6t^5)$$

Longitud de una curva plana en forma paramétrica

Longitud de una curva plana en forma paramétrica

Sea C una curva suave, representada por las ecuaciones:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad t \in [a, b]$$

tal que C se recorre una vez conforme t varía de $t = a$ a $t = b$. Entonces la longitud de la curva C es:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 dt}.$$

Ejemplo: determine la longitud de la curva: $x(t) = r.cos(t)$, $y(t) = r.sen(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Como $x(t) = r\,cos(t)$ e $y(t) = r\,sen(t)$ serán

$x'(t) = -r\,sen(t)$ e $y'(t) = r\,cos(t)$, entonces:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-rsen(t))^2 + (rcos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$$