Respuestas Repaso Primer Parcial

Ejercicio 1

a) Dado el conjunto $B_1 = \{ \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \}$ base de R^2, exprese al vector $\boldsymbol{v}$ en la base B_1 y en la base *canónica*, B_C. $\boldsymbol{u_1} = (2, -3)$; $\boldsymbol{u_2} = (3, 2)$; $\boldsymbol{v} = (-1, -2)$

b) Represente gráficamente el vector $\boldsymbol{v}$, los vectores de la base B_1 y verifique la respuesta dada en el inciso a).

c) Efectúe cambios apropiados en los vectores $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$, de forma tal de obtener una nueva base B_2 que sea *base ortonormal* de R^2. Justifique su respuesta.

d) Coloque V (verdadero) o F (falso) en cada uno de los siguientes resultados. Justifique sólo en los casos que su respuesta sea F.

i.	$(\boldsymbol{v})_{B_C} = (-1, -2)$	
ii.	$(\mathbf{u_1})_{B_1} = (2, -3)$	
iii.	$(\boldsymbol{v})_{B_2} = \left(proy_{\widetilde{\mathbf{u_1}}}\boldsymbol{v}, proy_{\widetilde{\mathbf{u_2}}}\boldsymbol{v}\right)$	
iv.	$(\mathbf{u_2})_{B_1} = (1, 0)$	

Resolución Ejercicio 1

a) $\boldsymbol{v} = (-1, -2)$

$\boldsymbol{v}$ *en la base canónica*: $\boldsymbol{v} = -1\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{v}$ *en la base* B_1 :

$\boldsymbol{v} = k_1\,\boldsymbol{u_1} + k_2\,\boldsymbol{u_2}$

$(-1,-2) = k_1(2, -3) + k_2(3, 2)$

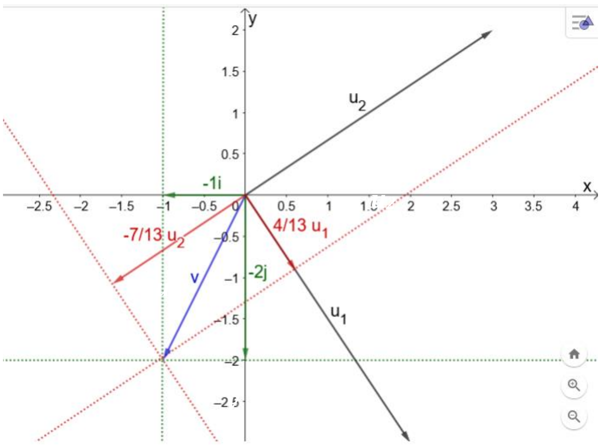
$(-1,-2) = (2k_1, -3k_1) + (3k_2, 2k_2)$

$$\begin{cases} -1 = 2k_1 + 3k_2 \\ -2 = -3k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

Es decir: $k_1 = 4/13$ $k_2 = -7/13$

Por lo tanto: $\boxed{(\boldsymbol{v})_B = (4/13, -7/13)}$

b) Representación gráfica y verificación de las respuestas halladas analíticamente:



c) $B_1 = \{ \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \} = \{ (2, -3); (3, 2) \}$

Verificación de ortogonalidad:

$\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_2}$ = (2 , -3) . (3 , 2) = 6 – 6 = 0 Los vectores son ortogonales y por lo tanto son LI. Dos vectores de R^2 LI generan a R^2. Por ser LI y conjunto generador de R^2 , forman una base de R^2 , que además es *base ortogonal*.

Verificación de módulo unitario:

$\|\boldsymbol{u_1}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ Los vectores NO poseen módulo unitario

$\|\boldsymbol{u_2}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Cambios propuestos:

$$\breve{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{\boldsymbol{u_1}}{\|\boldsymbol{u_1}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\breve{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{\boldsymbol{u_2}}{\|\boldsymbol{u_2}\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

La nueva base $B_2 = \{ \breve{\boldsymbol{u}}_1, \breve{\boldsymbol{u}}_2 \} = \{ \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right); \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \}$ es una *Base Ortonormal* (BON) de R^2, ya que los dos vectores LI de R^2 que la componen son ortogonales entre sí, generan R^2 y poseen módulo unitario.

d)

i.	$(\boldsymbol{v})_{B_C} = (-1,-2)$	V
ii.	$(\mathbf{u_1})_{B_1} = (2,-3)$	F
iii.	$(\boldsymbol{v})_{B_2} = \left(proy_{\breve{\mathbf{u}}_1}\boldsymbol{v}, proy_{\breve{\mathbf{u}}_2}\boldsymbol{v}\right)$	V
iv.	$(\mathbf{u_2})_{B_1} = (1,0)$	F

Justificaciones:

ii. Si fuese correcta debería verificarse que $\mathbf{u_1} = 2\mathbf{u_1} - 3\mathbf{u_2}$ y esto es falso ya que:

$$2\mathbf{u_1} - 3\mathbf{u_2} = 2(2,-3) - 3(3,2) = (-5,-12) \neq \mathbf{u_1}$$

Al expresar el vector $\mathbf{u_1}$ como combinación de B_1 se tiene que $\mathbf{u_1} = \mathbf{1u_1} + 0\mathbf{u_2}$. Por lo tanto la respuesta correcta es $(\mathbf{u_1})_{B_1} = (1,0)$.

iii. Si fuese correcta debería verificarse que $\mathbf{u_2} = 1\mathbf{u_1}$ y esto es falso ya que $\mathbf{u_2} \neq \mathbf{u_1}$. Al expresar el vector $\mathbf{u_2}$ como combinación de B_1 , se tiene que $\mathbf{u_2} = 0\mathbf{u_1} + 1\mathbf{u_2}$. Por lo tanto la respuesta correcta es $(\mathbf{u_2})_{B_1} = (0,1)$.

Ejercicio 2

Dado el vector $\boldsymbol{u}$ = (2 , 0, 3)

a)Determine los ángulos directores.

b)Determine un vector $\boldsymbol{b}$ que sea perpendicular simultáneamente al vector $\boldsymbol{u}$ y al versor $\boldsymbol{i}$ = (1,0,0) y tal que $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ = 12, siendo $\boldsymbol{a}$ = (1,2,-2).

c)Evalúe el producto mixto ($\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{i}$) . $\boldsymbol{u}$

d)Indique, justificando su respuesta, si { $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}$ } es conjunto LD o LI.

Resolución Ejercicio 2

a) $\boldsymbol{u} = (2, 0, 3)$

Debemos hallar el $\breve{\boldsymbol{u}}$ ya que sus componentes serán los cosenos de los ángulos directores buscados:

$$\breve{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

Por lo tanto tendremos:

$$\alpha = \text{arc cos}\frac{2}{\sqrt{13}} = 56{,}31° \qquad \beta = \text{arc cos}\, 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \gamma = \text{arc cos}\frac{3}{\sqrt{13}} = 33{,}69°$$

b) Una forma de resolución es la siguiente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \wedge \breve{\boldsymbol{\imath}} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 3, 0) \\ \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{u} \wedge \breve{\boldsymbol{\imath}}) = k(0, 3, 0) \end{cases}$$

$\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{a} = 12$

$k[(0, 3, 0) . (1, 2, -2)] = 12$ $\qquad k = 2$ $\qquad \boxed{\boldsymbol{b} = (0, 6, 0)}$

c)

$$(\boldsymbol{a} \wedge \breve{\boldsymbol{\imath}}).\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

d)

Una forma de resolución es la siguiente:

$\boldsymbol{0} = k_1\, \boldsymbol{u} + k_2\, \breve{\boldsymbol{\imath}} + k_3\, \boldsymbol{a}$

$(0, 0, 0) = k_1(2, 0, 3) + k_2(1, 0, 0) + k_3(1, 2, -2)$

$$\begin{cases} 2k_1 + \ \ k_2 + \ \ k_3 = 0 \\ 0k_1 + 0k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 + 0k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$$

Es decir: $\qquad k_1=0; \quad k_2=0; \quad k_3=0$

La combinación lineal de los vectores dados que brinda por resultado el vector nulo es aquella en la cual los tres escalares son *únicamente* nulos, por lo tanto los vectores son Linealmente Independientes (LI).

Otra forma de resolución es la siguiente:

$$(\boldsymbol{a}\Lambda\check{\boldsymbol{i}}).\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

El producto mixto de los vectores dados es distinto de 0, por lo cual los vectores no son coplanares y por lo tanto son Linealmente Independientes (LI).

Ejercicio 3

Dos cuerdas, *RQ* y *RS*, sujetan un cable vertical en el punto *R* (0,0,6) que soporta un objeto. Las cuerdas están fijas en los puntos *Q* (0, -3, 8) y *S* (0, 3, 8). En el punto *R* actúa una fuerza vertical hacia abajo de 3 kN.

a) Determine el ángulo que forman los vectores ***RQ*** y ***RS***.

b) Evalúe el vector ***w***, vector proyección de ***F*** en la dirección de la cuerda ***RQ***.

c) Indique si el conjunto B = { ***RQ***, ***F***, ***w*** } es base de R^3 . Justifique su respuesta.

Resolución Ejercicio 3

a) *Q* (0, -3, 8) *S* (0, 3, 8) *R* (0,0,6)

RQ = *(0, -3, 2)*

RS = *(0, 3, 2)*

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{RQ}\,.\,\boldsymbol{RS}}{\|\boldsymbol{RQ}\|\|\boldsymbol{RS}\|} = \frac{(0,-3,2).(0,3,2)}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = -5/13$$

$$\cos\theta = -5/13 \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta = 112.62}$$

b)

Vector ***F***:

F = 3 (-***k***) = 3 (0,0,-1) = (0, 0, -3)

Vector proyección:

$$\boldsymbol{w} = \overrightarrow{proy_{\,\boldsymbol{RQ}}\boldsymbol{F}} = \frac{\boldsymbol{F}.\boldsymbol{RQ}}{\|\boldsymbol{RQ}\|}\frac{\boldsymbol{RQ}}{\|\boldsymbol{RQ}\|} = \frac{(0,0,-3).(0,-3,2)}{\sqrt{13}}\frac{(0,-3,2)}{\sqrt{13}} = -\frac{6}{13}(0,-3,2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{w} = (0,\frac{18}{13},-\frac{12}{13})}$$

c)

B = {***F***, ***RQ***, ***w***}

$\boldsymbol{w} = (0, \frac{18}{13}, -\frac{12}{213})$

RQ = (0, -3, 2)

-Una forma de resolución:

k ***RQ*** = ***w*** *con k* = -6/13

Los vectores ***w*** y ***RQ*** son Linealmente Dependientes (LD) por lo que los vectores del conjunto ***B*** = {***F***, ***RQ***, ***w***} NO constituyen una Base de R^3

-Otra forma de resolución es la siguiente:

$$(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{RQ}).\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{18}{13} & -\frac{12}{13} \end{vmatrix} = 0$$

El producto mixto de los vectores dados es nulo. Los vectores son coplanares y por lo tanto son Linealmente Dependientes (LD). Es decir, los vectores del conjunto ***B*** = {***F***, ***RQ***, ***w***} NO constituyen una Base de R^3.

Ejercicio 4

a) Determine el espacio generado por el conjunto indicado:

a.1 {(-2,1,3)}

a.2 {(-2,1,3), (1,0,1)}

b) Determine el valor de $(3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}).\boldsymbol{w}$, sabiendo que $\|\boldsymbol{w}\| = 6$, $\text{proy}_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = -3$ y que $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{w}$.

c) Indique cuál de los siguientes conjuntos NO es subespacio vectorial de R^2 . Justifique su respuesta.

1. {(x, y)∈ R^2/ 5y-x+11=0}
2. {(0, 0)}
3. {(x, y)∈ R^2/ 8y-x=0}
4. Ninguna de las anteriores

Resolución Ejercicio 4

a)

a.1) Designando ***a***= (-2,1,3), ***v***= (x,y,z), El conjunto dado genera todas las C.L. posibles de la forma: ***v***= *k**a***, *k* ∈ *R*. Es decir:

(x,y,z)= k (-2,1,3), $k \in R$

a.2) Designando $\boldsymbol{a}$= (-2,1,3), $\boldsymbol{b}$= (1,0,1), $\boldsymbol{v}$= (x,y,z), El conjunto dado, genera todas las C.L. posibles de la forma: $\boldsymbol{v}= k_1\,\boldsymbol{a} + k_2\,\boldsymbol{b}$; k_1 , $k_2 \in R$. Es decir:

(x,y,z)= k_1 (-2,1,3) + k_2 (1,0,1), k_1 , $k_2 \in R$.

b) Si u ⊥ w : $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} = 0$

proy $_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$ = -3 , por lo tanto $-3.\|\boldsymbol{w}\| = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}$

Con la información obtenida anteriormente y las propiedades de producto escalar calculamos:

$(3\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}).\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w} = 3.0 + (-3).\|\boldsymbol{w}\| = (-3).6 = -18$

c) El conjunto 1. {(x, y)∈ R^2/ 5y-x+11=0} NO es subespacio vectorial de R^2 , puesto que no incluye al vector nulo. Si sustituimos (0,0) resulta: 5.0-0+11=11 por lo que el (0,0) no pertenece al conjunto dado.

Ejercicio 5

a) Sea el conjunto $B_1 = \{\, \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \,\}$ con los vectores $\boldsymbol{u_1}$ = (α , β) y $\boldsymbol{u_2}$ = (- β , α), con α y β no simultáneamente nulos. Justifique que B_1 es *base ortogonal* de R^2.
b) Determine las *coordenadas del vector* $\boldsymbol{v}$ = (6 , 8) en la base B_1, con α=2 y β=6.
c) Indique, justificando su respuesta, si las proyecciones del vector $\boldsymbol{v}$ en las direcciones de los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ coinciden o no con las componentes del vector $\boldsymbol{v}$ en la base B_1
d) Represente gráficamente el vector $\boldsymbol{v}$, los vectores de la base B_1 y verifique las respuestas dadas en los incisos anteriores.

Resolución Ejercicio 5

a) Verificación de ortogonalidad: $\boldsymbol{u_1}.\boldsymbol{u_2}$ = (α , β) . (- β , α) = - α β +β α = 0

Los vectores son ortogonales para cualquier valor de α y β. Por ser ortogonales y no nulos son LI. Dos vectores de R^2 LI generan a R^2. Por ser LI y conjunto generador de R^2 , forman una base de R^2 , que además es *base ortogonal* de R^2 para cualquier valor de α y β (no simultáneamente nulos).

b) $\boldsymbol{v}$ = (6 , 8)

v *en la base canónica*: $\boldsymbol{v} = 6\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$

***v** en la base B_1* :

$\boldsymbol{v} = k_1\,\boldsymbol{u_1} + k_2\,\boldsymbol{u_2}$

$(6,8) = k_1(2, 6) + k_2(-6, 2)$

$(6,8) = (2k_1, 6k_1) + (-6k_2, 2k_2)$

$$\begin{cases} 6 = 2k_1 - 6k_2 \\ 8 = 6k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

Es decir: $k_1=1.5$ $k_2=-0.5$

Por lo tanto: $\boxed{(\boldsymbol{v})_B = (1.5\,,-0.5\,)}$

c) $\text{Proy}_{u_1}v = \frac{v.u_1}{\|u_1\|} = 3\sqrt{10}$ $\text{Proy}_{u_2}v = \frac{v.u_2}{\|u_2\|} = -\sqrt{10}$

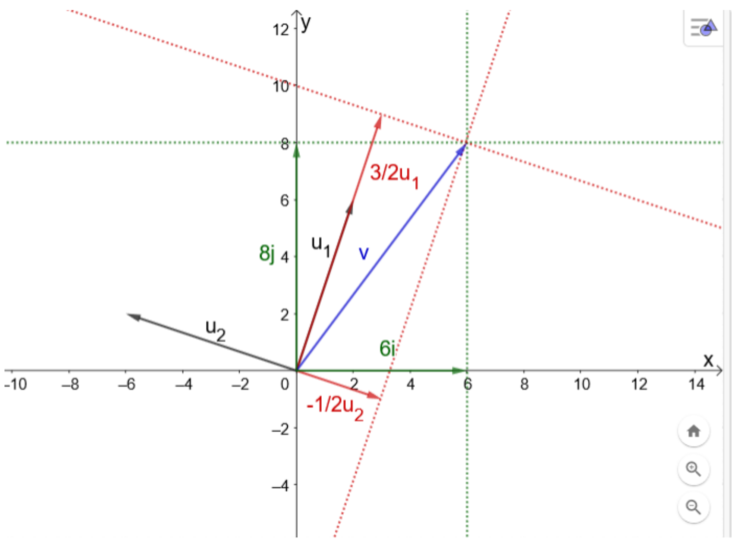
Si comparamos las respuestas del inciso b) con las proyecciones del vector ***v*** en las direcciones de los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$ podemos afirmar que NO coinciden con las componentes del vector ***v*** en la base B_1. Esto es así ya que esta base no es una BON de R^2.

d)

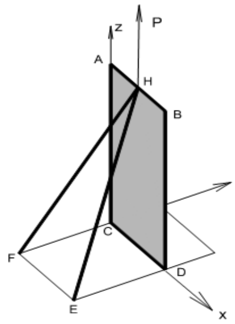
En el siguiente gráfico, se muestra que el vector ***v*** es igual a las siguientes combinaciones lineales: $\boldsymbol{v} = 6\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{v} = k_1\,\boldsymbol{u_1} + k_2\,\boldsymbol{u_2}$ con $k_1=1.5$, $k_2=-0.5$.

Observamos que el vector $k_1\mathbf{u_1}$ es 1.5veces el vector $\boldsymbol{u_1}$, así como el vector $k_2\mathbf{u_2}$ es -0.5 veces el vector $\boldsymbol{u_2}$

Observamos que la longitud del segmento $\text{Proy}_{u_1}v$ es igual a $3\sqrt{10} \approx 9.49$ y que la longitud del segmento $\text{Proy}_{u_2}v$ es igual a $\left|-\sqrt{10}\right| \approx 3.16$



Ejercicio 6



La Figura muestra una estructura de acero definida por los puntos:
A(0, 0, 10)m; B(5, 0, 10)m; C(0, 0, 0)m; D(5, 0, 0)m; E(5, -5, 0)m;
F(0, -5, 0) y H($\frac{5}{2}$, 0, 10)m. Sobre la misma se encuentra aplicada una fuerza **P** en la dirección y sentidos indicados, cuyo módulo es de 2250N.
A partir de la utilización de operaciones *vectoriales* resuelva los siguientes incisos:
a) Encuentre el vector proyección de la fuerza **P** sobre el puntal HF.
b) Halle el volumen del espacio comprendido entre los puntos C, D, E, F y H.

Resolución Ejercicio 6

a) Vector fuerza: **P**=(0, 0, 2250) N

Vector asociado al puntal: ***HF***=(-$\frac{5}{2}$, -5, -10)

$$\overrightarrow{Proy_{HF}}\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{P.HF}}{\|\boldsymbol{HF}\|}\frac{\boldsymbol{HF}}{\|\boldsymbol{HF}\|} = \frac{2250\,.(-10)}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+5^2+10^2}}\frac{\left(-\frac{5}{2},-5,-10\right)}{\sqrt{(5/2)^2+5^2+10^2}} = -\frac{22500}{\frac{525}{4}}\left(-\frac{5}{2},-5,-10\right) =$$
$$\left(\frac{3000}{7};\frac{6000}{7};\frac{12000}{7}\right)\text{ N}$$

$$\boxed{\overrightarrow{Proy_{HF}}\boldsymbol{P} = \left(\frac{3000}{7};\frac{6000}{7};\frac{12000}{7}\right)\text{ N}}$$

b)

Vectores: ***FC***= (0, 5, 0) y ***FE***= (5, 0, 0)

Volumen del espacio solicitado:

$$Vol = \frac{1}{3}|\boldsymbol{FC}.(\boldsymbol{FE}\wedge\boldsymbol{HF})| = \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}0 & 5 & 0\\ 5 & 0 & 0\\ -5/2 & -5 & -10\end{matrix}\right\| = \left|\frac{1}{3}[(-5).(5.(-10)]\right| = \frac{250}{3}m^3$$

$$\boxed{Vol = 83{,}3m^3}$$

Ejercicio 7

Ejercicio I.a, de la Parte I. Vectores, del Trabajo Integrador de Contenidos de Geometría Analítica, enunciado pág 55 y respuestas pág 59 de:
https://bdigital.uncu.edu.ar/11619