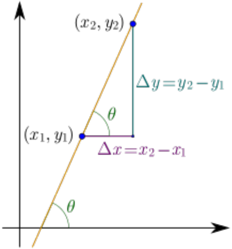
Análisis Matemático I
Clase 7: Introducción al concepto de derivada. Propiedades de la derivada y regla de la cadena

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2020

Recordar:

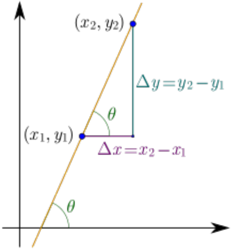


Pendiente de la recta:

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

Recordar:



Pendiente de la recta:

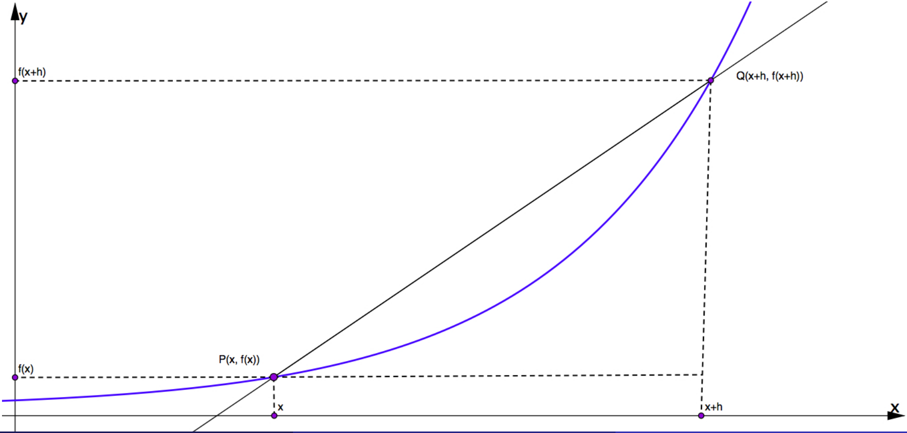
$$m = \tan\,\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observar que la pendiente de una recta es la misma en cada punto de la misma.

Ahora, ¿cómo se determina la pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ de dicha curva?

Ahora bien, dada una curva suave $y = f(x)$, queremos definir el concepto de pendiente en cualquier punto $P(x, f(x))$ de dicha curva. Para ello, realizamos el siguiente procedimiento.

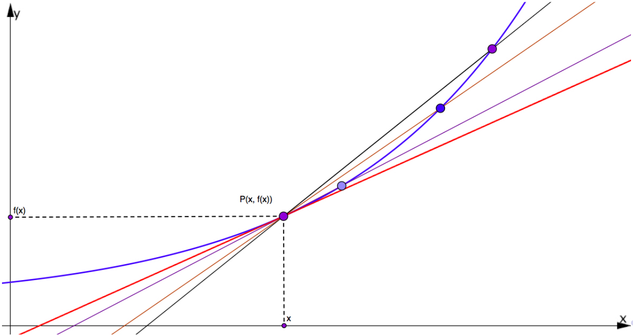
Primer paso: se escoge un punto $Q(x+h, f(x+h))$ cercano a $P(x, f(x))$ y se traza la recta que uno a dichos puntos. Esta recta se llama recta secante.



Segundo paso: calcular la pendiente de la recta secante. Dicha pendiente m es:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

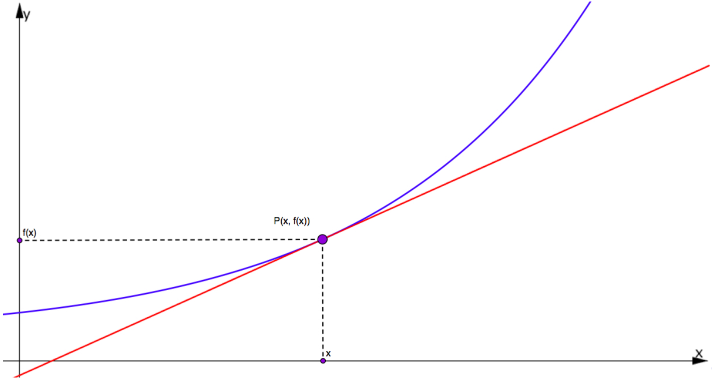
Tercer paso: como lo indica la siguiente figura, a medida que el punto Q se acerca al punto P, es decir, cuando $h \to 0$, las rectas secantes parecen tender a la recta roja (recta tangente).



La pendiente m de la recta roja será el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando $h \to 0$, siempre y cuando dicho límite exista. Es decir:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En el siguiente gráfico se ilustra sólo la recta roja:



Pendiente de una curva en un punto

Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Pendiente de una curva en un punto

Pendiente de una curva en un punto

La pendiente de una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ se define como sigue:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Observar que el cociente:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ **y** $(x_0 + h, f(x_0 + h))$**.**

Pendiente de una curva, ejemplo.

Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $y = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$.

Pendiente de una curva, ejemplo.

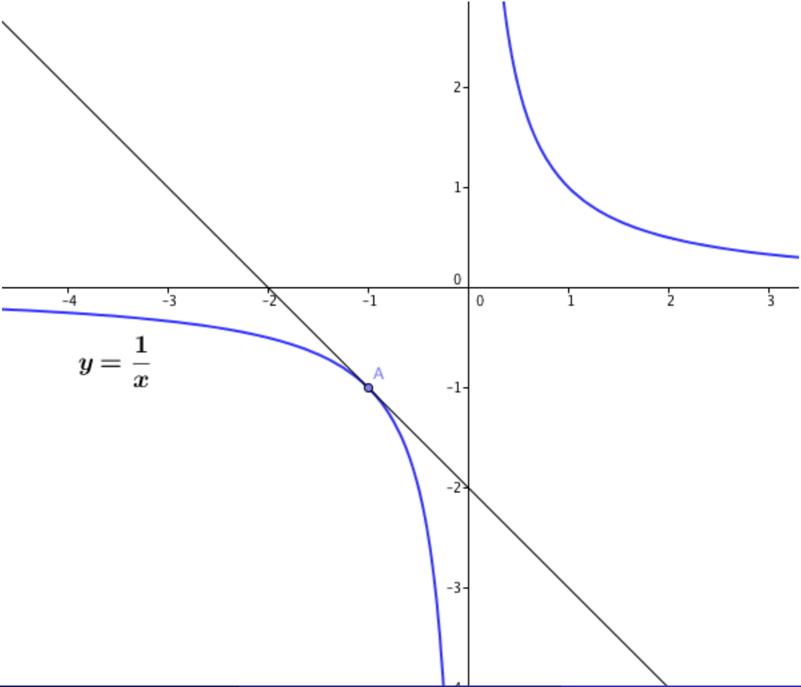
Ejemplo: Determine la pendiente de la curva $y = \frac{1}{x}$ cuando $x = -1$.
Solución: observar que:

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-1+h} - \dfrac{1}{-1}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-1+h)(-1)}}{h} = \frac{-1}{(-1+h)(-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(-1+h)(-1)} = -1.$$

Luego, la pendiente de la curva en $x = -1$ es -1.



2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
$y = \frac{1}{x}$
A
-1
-2
-3

Pendiente de la recta tangente

Recordar:

Definición de recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ **en el punto** $(x_0, f(x_0))$ **es aquella recta que tiene pendiente:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

y pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Pendiente de la recta tangente

Recordar:

Definición de recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es aquella recta que tiene pendiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista)}$$

y pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Dado que el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

aparece con mucha frecuencia, recibe un nombre especial.

Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto $x = x_0$ se simboliza como $f'(x_0)$ y se obtiene como:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así:

En resumen

[Derivada de f en x_0]= [Pendiente de la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$]= [Pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$] = [Tasa de cambio instantánea de f en x_0]

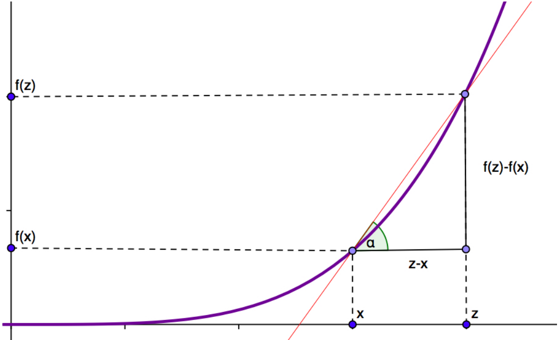
Derivada de una función: forma alternativa.

Derivada de una función

La derivada de una función f en un punto x se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

siempre que el límite exista.



Notación para las derivadas

Si $y = f(x)$, entonces la derivada de f con respecto a x en un punto x_0 se puede simbolizar como:

- $f'(x_0)$
- $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ (notación de Leibniz)
- $y'(x_0)$

La derivada como una función

Considere la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$. El dominio de f es:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Utilizando la definición de derivada se obtiene:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

para todo x en $D(f)$. Así, f' es una nueva función, llamada función derivada, que en este caso, tiene el mismo dominio que f.

La derivada como una función

Considere la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$. El dominio de f es:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Utilizando la definición de derivada se obtiene:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

para todo x en $D(f)$. Así, f' es una nueva función, llamada función derivada, que en este caso, tiene el mismo dominio que f.

La derivada como función

Sea f una función y sea $D(f')$ el conjunto de los x en el dominio de f donde f es derivable. Entonces, la nueva función:

$$f' : D(f') \to \mathbb{R}$$

que a cada $x \in D(f')$ le asigna $f'(x)$, se denomina función derivada.

Teorema (algunas propiedades de la derivada)

1. Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en c.
2. Si $f(x) = c$ para todo x, entonces $f'(x) = 0$ para todo x.
3. Si $n \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo x donde x^n y x^{n-1} estén definidas.
4. Si f es derivable en c y si $k \in \mathbb{R}$, entonces $(kf)'(c) = kf'(c)$.
5. Si f y g son derivables en c, entonces $f + g$ y $f.g$ son derivables en c y además:
   - $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.
   - $(f.g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
6. Si f y g son derivables en c y $g(c) \neq 0$, entonces f/g es derivable en c y además:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

Ejemplos: derivar $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ y $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 3)$.

- Para derivar $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$, utilizamos primero la regla 5 para derivar cada uno de los términos:
  - La derivada de $3x^4$ es $3.4.x^3$ por las reglas 3 y 4.
  - la derivada de $-2x$ es -2 por las reglas 3 y 4
  - la derivada de 1 es cero por la regla 2.

  Luego,
$$f'(x) = 12x^3 - 2.$$

- Para derivar $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$, utilizamos primero la regla 5 para derivar cada uno de los términos:
    - La derivada de $3x^4$ es $3.4.x^3$ por las reglas 3 y 4.
    - la derivada de $-2x$ es -2 por las reglas 3 y 4
    - la derivada de 1 es cero por la regla 2.

  Luego,
$$f'(x) = 12x^3 - 2.$$

- Para derivar $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 3)$, vamos a utilizar en primer lugar la regla 6 de la derivada de un cociente. La regla del cociente dice derive el numerador (obtenemos $2x$) multiplique por el denominador sin derivar, reste el numerador sin derivar multiplicado por la derivada del denominador (en este caso dicha derivada da 1), finalmente divida todo por el denominador al cuadrado. Así:
$$g'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2 - 1).1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+3)^2}.$$

Demostración de 1: supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Demostración de 1: supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

o lo que es equivalente:

$$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = 0.$$

Demostración de 1: supongamos que f es derivable en $x = c$. Vamos a probar que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

o lo que es equivalente:

$$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \left[(f(x) - f(c)) . \frac{(x - c)}{(x - c)} \right] \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c) \right] \\
&= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . \lim_{x \to c} (x - c) = f'(c).0 = 0,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que f' existe en c y la propiedad del producto de límites. Así f es continua en $x = c$.

Reglas de derivación para composición de funciones

Teorema: regla de la cadena

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$, entonces $f \circ g$ es derivable en c y además:

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)).g'(c).$$

Ejemplo: calcule la derivada de la función:

$$h(x) = (2x^2 + x - 10)^{10},$$

en cada x.