# Análisis Matemático I
# Clase 11: consecuencias del teorema del valor medio. Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la derivada primera para extremos locales.

Pablo D. Ochoa

**Facultad de Ingeniería**
**Universidad Nacional de Cuyo.**

Abril, 2020

# Consecuencias del Teorema del Valor Medio

**Teorema**

Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ tal que:

$$f'(x) = 0$$

para todo $x$ en $(a, b)$. Entonces $f$ es una función constante en $[a, b]$.

No demostrar.

# Consecuencias del Teorema del Valor Medio

**Teorema**

Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $(a, b)$ tales que:

$$f'(x) = g'(x)$$

para toda $x$ de $(a, b)$, entonces existe una constante $C$ tal que:

$$f(x) = g(x) + C \qquad \text{para toda } x \in [a, b].$$

**Demostración:** sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces $h$ es continua en el intervalo $[a, b]$ (pues es una diferencia de funciones continuas) y $h$ es derivable en $(a, b)$ (ya que es una diferencia de funciones derivables).

Además, como por hipótesis $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, se obtiene:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo $x \in (a, b)$. Por la primera consecuencia del teorema del valor medio, se tiene que $h$ es una función constante en $[a, b]$. Por lo tanto, existe una constante $C$ tal que:

$$h(x) = C$$

para todo $x \in [a, b]$. Recordando que $h(x) = f(x) - g(x)$, se llega a :

$$f(x) = g(x) + C$$

para toda $x$ en $[a, b]$.

# Funciones crecientes y decrecientes

Recordar:

- Decimos que $f$ es creciente en $D$ si:

$$f(x) < f(y)$$

para todo $x$ y $y$ en $D$ tales que: $x < y$.

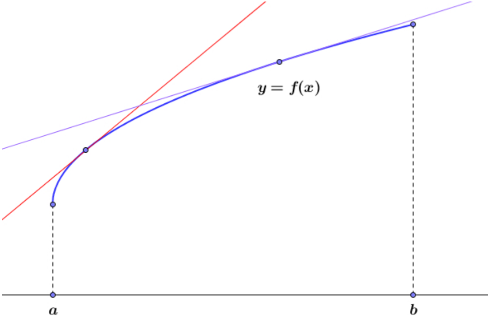
- Decimos que $f$ es decreciente en $D$ si:

$$f(x) > f(y)$$

para todo $x$ y $y$ en $D$ tales que: $x < y$.

# Funciones crecientes y decrecientes

La función de la siguiente figura es creciente en $[a, b]$:




Observar que si trazamos las rectas tangentes en cada punto de la gráfica de $y = f(x)$ para $x \in (a, b)$ se tiene que las pendientes de dichas rectas son positivas. Es decir, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Basado en esta observación, se da ahora un criterio para determinar dónde crece o decrece una función derivable en términos del signo de $f'$.

**Prueba de la derivada primera para funciones crecientes o decrecientes**

Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Entonces:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x$ en $(a, b)$, entonces $f$ es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x$ en $(a, b)$, entonces $f$ es decreciente en $[a, b]$.

**Observación:** si en el teorema anterior $f$ es continua solamente en $(a, b)$, entonces se debe reemplazar $[a, b]$ por $(a, b)$ en las dos implicaciones. Además, el teorema puede aplicarse a funciones con dominios que no consisten solamente en un intervalo como veremos en el próximo ejemplo.

# Demostración de la prueba de la derivada primera para funciones crecientes y decrecientes

**Demostración:** vamos a probar el primer ítem. El segundo queda como ejercicio para el estudiante. Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Sean $x, y \in [a, b]$ tales que:

$$x < y.$$

Entonces $f$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x, y]$ y por ende existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como por hipótesis $f'(c) > 0$ y además $y - x > 0$, obtenemos que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$$

y entonces:

$$f(y) > f(x),$$

lo cual prueba que la función $f$ es creciente en $[a, b]$.

# Funciones crecientes y decrecientes

**Ejemplo:** determine los intervalos donde $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es creciente y donde es decreciente.
**Antes de resolver el problema tener en cuenta que:** para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$, vamos a determinar los intervalos donde $f'$ es positiva y donde es negativa. Para ello, se deben distinguir los puntos donde $f'$ cambia de signo. Estos se encuentran, en los casos que abordaremos en este curso, en:

- los puntos críticos, es decir, puntos **interiores** del dominio de $f$ donde la derivada es cero o no existe
- los extremos o puntos frontera del dominio de $f$
- los puntos de discontinuidad de $f$.

**Solución del ejemplo:** observar que $f$ tiene por dominio $\mathbb{R}$ y que es continua en todo $\mathbb{R}$. Por ende, los únicos puntos que se deben considerar para analizar el cambio de signo de $f'$ son los puntos críticos.
Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

Dado que $f'$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, los únicos puntos críticos son aquellos donde $f'$ es cero. En este caso:

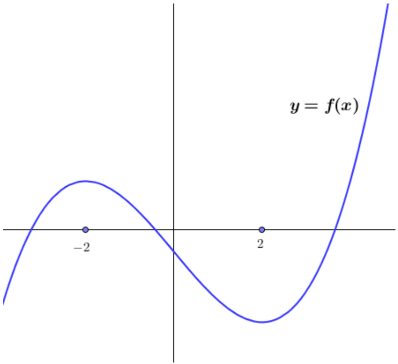
$$x_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -2.$$

Analizamos los signos de $f'$ en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

# Funciones crecientes y decrecientes

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| valor de prueba | -3 | 0 | 3 |
| signo de $f'$ | $+$ | - | $+$ |
| Conclusión | $f$ es creciente | $f$ es decreciente | $f$ es creciente |

Observar que en el ejemplo anterior no se dijo que $f$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. De hecho, si consideramos el gráfico de $f$:

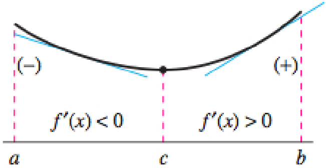



concluimos que $f$ no es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ pues hay puntos cercanos a 2 donde $f$ asume valores más chicos que en puntos cercanos a $-2$. Así, los intervalos donde una función crece o decrece deben colocarse de forma separada:

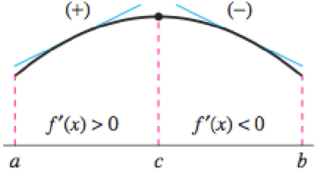
*la función $f$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.*

# Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

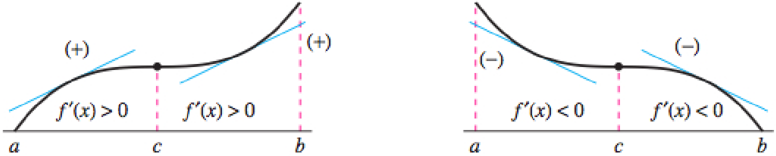
Considere los siguientes gráficos. Observe en cada situación cómo cambia el signo de $f'$ alrededor del punto crítico $x = c$ :




Mínimo relativo




Máximo relativo




Ni mínimo relativo ni máximo relativo

# Criterio de la derivada primera para extremos locales

## Criterio de la derivada primera para extremos

Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de $f$. Supongamos que $f$ es derivable en $(a, b)$, excepto posiblemente en $c$. Al aumentar el valor de la variable independiente $x$,

- si $f'$ cambia de positiva a negativa alrededor de $c$, entonces $f$ tiene un máximo local en $x = c$,
- si $f'$ cambia de negativa a positiva alrededor de $c$, entonces $f$ tiene un mínimo local en $x = c$,
- si $f'$ no cambia de signo alrededor de $c$, entonces $f$ no tiene extremo local en $x = c$.

# Criterio de la derivada primera para extremos locales

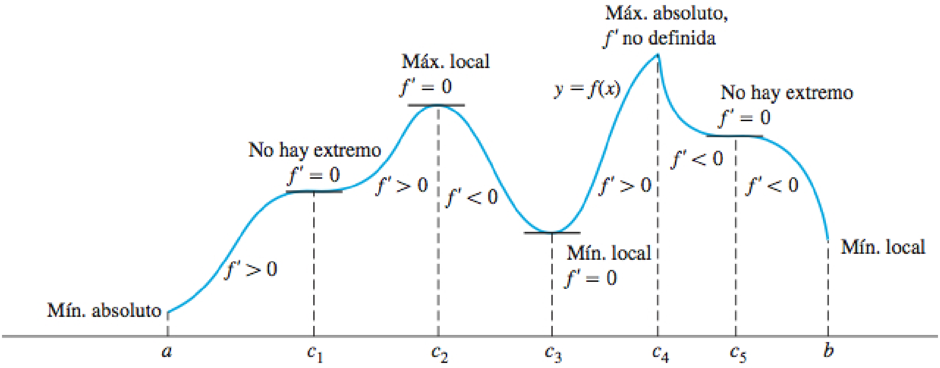
## Criterio de la derivada primera para extremos

Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de $f$. Supongamos que $f$ es derivable en $(a, b)$, excepto posiblemente en $c$. Al aumentar el valor de la variable independiente $x$,

- si $f'$ cambia de positiva a negativa alrededor de $c$, entonces $f$ tiene un máximo local en $x = c$,
- si $f'$ cambia de negativa a positiva alrededor de $c$, entonces $f$ tiene un mínimo local en $x = c$,
- si $f'$ no cambia de signo alrededor de $c$, entonces $f$ no tiene extremo local en $x = c$.

**Observación:** el criterio de extremos locales también se aplica a los extremos del intervalo $a$ y $b$, pero sólo hay que analizar el signo de $f'(x)$ a un lado (derecho o izquierdo) de $a$ o de $b$ y para toda $x$ suficientemente cercana a estos puntos (utilizar la siguiente figura para explicar).

# Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos



# Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

**Ejemplo**: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde $f$ crece y/o decrece, y los extremos relativos de $f$.

# Criterio de la primera derivada para localizar extremos relativos

**Ejemplo**: sea $f(x) = x^{1/3}(x-4)$. Determine los intervalos donde $f$ crece y/o decrece, y los extremos relativos de $f$. **Solución:** primero calculamos la derivada de $f$ usando la regla del producto:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3}.$$

Observar que $f'$ no existe en $x = 0$ y que este punto pertenece al dominio de $f$. Luego, $x = 0$ es un punto crítico. Analizaremos si $f'$ se anula en algún punto:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3} = 0$$

Multiplicamos por $x^{2/3}$ ambos miembros:

$$\frac{1}{3}(x-4) + x = 0$$

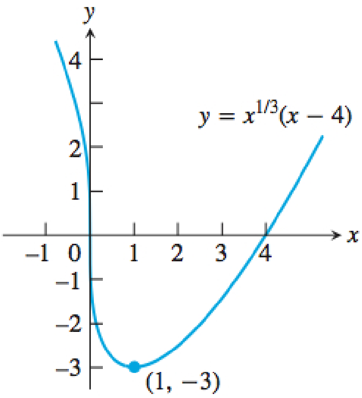
$$\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$
$$x = 1.$$

Así, $x = 1$ es también un punto crítico.
Para analizar los intervalos donde $f$ crece o decrece tenemos en cuenta los puntos críticos de $f$ y los extremos del dominio. Dado que el dominio de $f$ es $\mathbb{R}$, los únicos intervalos a considerar son:

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1) \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

| intervalos | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| punto de análisis | -1 | $1/2$ | 2 |
| signo de $f'$ | $f'(-1) < 0$ | $f'(0) < 0$ | $f'(2) > 0$ |
| Conclusión | $f$ es decreciente | $f$ es decreciente | $f$ es creciente |

En base a la tabla anterior y al criterio de la derivada primera para extremos tenemos que $f$ tiene un mínimo local en $x = 1$.


y
x
$y = x^{1/3}(x - 4)$
(1, −3)
4
2
1
−1
−2
−3
−1
0
1
2
3
4