ROTOTRASLACIÓN EN R3

Ejercicios resueltos 136 -137

136. Una cuádrica tiene por ecuación: $-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$

Efectúe una transformación de coordenadas apropiada para llevar la cuádrica a su forma normal. Identifique la cuádrica y los nuevos ejes coordenados.

Respuestas:

En primer lugar, completamos la ecuación cuadrática:

$$-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = -x^2 + 0y^2 + 0z^2 + 2\,0xy + 2\,0xz + 2\frac{1}{2}yz + 2x + 0y - 4z - 5 = 0$$

Por lo tanto, sabemos que:

$$a = -1; \quad b = 0; \quad c = 0; \quad d = 0; \quad e = 0; \quad f = \frac{1}{2}; \quad g = 2; \quad h = 0; \quad i = -4; \quad j = -5;$$

Ahora, escribimos la ecuación dada de segundo grado en tres variables en forma matricial. Es decir,

$\boldsymbol{X^T A X} + \boldsymbol{K X} + j = 0$

siendo:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad j = -5$$

A continuación, determinamos los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Para ello planteamos:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(-1-\lambda) \times \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Por lo tanto, los valores propios resultan:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_3 = \frac{-1}{2}$$

Podemos verificar que se cumple que:

$$det(A) = det(D) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3$$

También, podemos anticipar que nuestra superficie es una de estas tres opciones:

- Hiperboloide de una hoja
- Hiperboloide de dos hojas
- Cono elíptico (caso degenerado)

Ya que, $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$; $\lambda_3 < 0$

Luego, buscamos los vectores propios asociados a los valores propios:

$$(A - \lambda_1 \times I) \times \bar{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^1\!/_2 \\ 0 & {}^1\!/_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -{}^3\!/_2 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & {}^1\!/_2 & -{}^1\!/_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -{}^1\!/_2 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 0 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Así, hallamos **v1**; **v2** y **v3**:

$$\overline{\boldsymbol{v1}} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{R}\text{- }\{0\}; \qquad \overline{\boldsymbol{v2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix} \text{ con } y \in \mathbb{R} - \{0\}; \qquad ;\ \overline{\boldsymbol{v3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \\ y \end{bmatrix} \text{ con } y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

De cada familia de vectores, seleccionamos uno y normalizando obtenemos:

$$\overline{\boldsymbol{b1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{b2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{b3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Con los vectores propios normalizados armamos la matriz $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ donde $\boldsymbol{P}$ es la matriz cambio de base o de Transformación de Coordenadas

Verificamos que $det(\boldsymbol{P}) = 1$, Por lo que aseguramos que esta matriz está asociada a una rotación de los ejes coordenados. Por otra parte, podemos verificar que:

$$\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

donde la matriz $\boldsymbol{D}$ está dada por:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_2 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^1\!/_2 \end{bmatrix}$$

Como $\boldsymbol{A}$ es matriz simétrica, $\boldsymbol{P}$ es matriz ortogonal. Es por ello que la siguiente transformación de coordenadas, se llama Transformación Ortogonal de Coordenadas:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$$

Sustituyendo la expresión anterior en la forma matricial de la ecuación cuadrática, obtenemos:

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}')^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}') + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}') + j = 0$$

$$\boldsymbol{X}'^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{X}' + (\boldsymbol{K}\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}' + j = 0$$

Reemplazando $\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}$; tenemos:

$$\boldsymbol{X}'^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}' + \boldsymbol{K}'\boldsymbol{X}' + j = 0$$

Sustituyendo a continuación las matrices en términos de sus elementos componentes, queda:

$$[x' \quad y' \quad z'] \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [g' \quad h' \quad i'] \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + j = 0$$

$$[x' \quad y' \quad z'] \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [2 \quad 0 \quad -4] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 5 = 0$$

Evaluamos cada producto matricial y resulta:

$$-x'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{2} + 2x' - 2\sqrt{2}y' - 2\sqrt{2}z' - 5 = 0$$

Asociamos las variables:

$$-\left(x'^2 - 2x'\right) + \frac{1}{2}\left(y'^2 - 4\sqrt{2}y'\right) - \frac{1}{2}\left(z'^2 + 4\sqrt{2}z'\right) - 5 = 0$$

Completamos cuadrados:

$$-\left(x'^2 - 2x' + 1\right) + 1 + \frac{1}{2}\left(y'^2 - 4\sqrt{2}y' + 8 - 8\right) - \frac{1}{2}\left(z'^2 + 4\sqrt{2}z' + 8 - 8\right) - 5 = 0$$

$$-(x' - 1)^2 + \frac{1}{2}\left(y'^2 - 2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(z'^2 + 2\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 0$$

Finalmente, planteamos la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y'^2 - 2\sqrt{2} \\ z'' = z'^2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

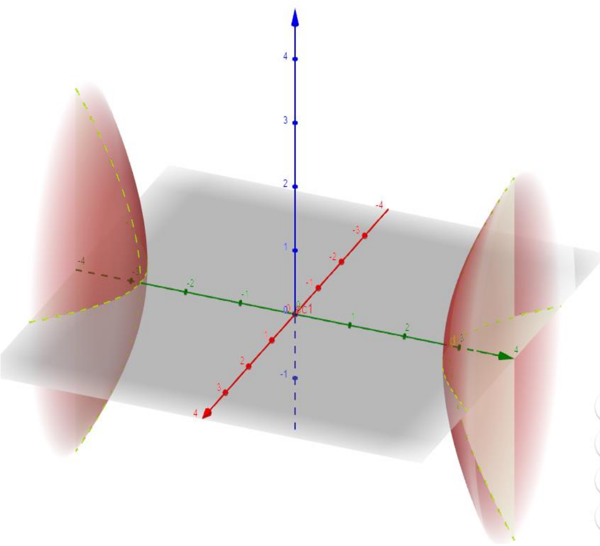
Entonces es posible escribir:

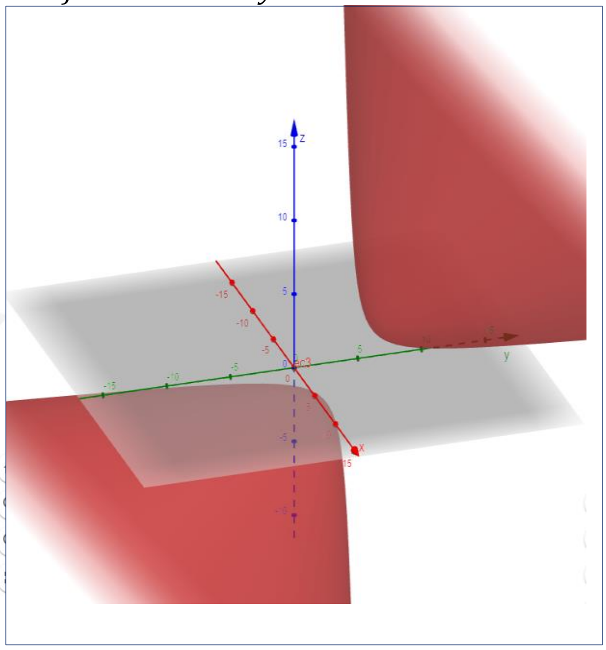
$$\boxed{-\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{8} - \frac{z''^2}{8} = 1}$$

Concluimos entonces, que es un Hiperboloide de Dos Hojas donde el eje y'' es el eje de la superficie cuádrica. Además, $a = \sqrt{4}$; $\quad b = c = \sqrt{8}$.

Gráficos

a) en el sistema $x``y``z``$ b) en el sistema xyz





137. Una cuádrica tiene por ecuación: $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 16x + 4y - 4z + 19 = 0$
a) Indique la cuádrica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática. b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática. c) Encuentre la ecuación de la cuádrica referida al sistema rotado.

Respuestas:

Resolución analítica en página 201 del Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, Ejercicio 5.12. http://bdigital.uncu.edu.ar/7224 .

Gráficos:

a) en el sistema $x``y``z``$ b) en el sistema xyz