DNI: 41734892

Nombres: Juan Manuel
Apellidos: BORQUEZ PEREZ
Carrera: Ingeniería Industrial

HOJA N° 1

FECHA

$$f(x) = \frac{x^2 - 49}{x^2 + 5x - 14}$$

(a). En la fórmula de f debe cumplirse:

(1) $x^2 + 5x - 14 \neq 0$

Factorizamos la ecuación cuadrática de la expresión (1).

Las raíces de la ecuación cuadrática serán el cociente entre divisores del término independiente y divisores del coeficiente del término cuadrático, entonces probamos con $x = -7$.

$$(-7)^2 - 35 - 14 = 0$$

Luego $x = -7$ es una raíz de la ecuación cuadrática.

Por otro lado, la siguiente relación se cumple:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Donde:
- x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática
- b es el valor del coeficiente del término lineal
- a es el valor del coeficiente del término principal

Así:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$$

y si $x_1 = -7$, entonces: $x_2 = -5 - (-7) = 2$

Reescribimos la expresión (1) con la ecuación cuadrática factorizada:

$$(x-2)\cdot(x+7) \neq 0$$

Luego $x \neq 2$ y $x \neq -7$

NOTA

DNI: 41734892 ; Nombres: Juan Manuel ; Apellidos: BORQUEZ PEREZ
Carrera: Ingeniería Industrial.

Por lo tanto, si llamamos D al dominio de f, escribimos:

$$\boxed{D = \mathbb{R} - \{2 ; -7\}}$$

b) Sea $x = 1$, tenemos:

$$f(1) = \frac{1^2 - 49}{(1-2)\cdot(1+7)} = \frac{-48}{-8} = 6$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 49}{(-1-2)\cdot(-1+7)} = \frac{-48}{-18} \approx 2{,}7$$

$f(1) \neq f(-1)$

Luego escribimos:

$$\exists x \in D \,/\, f(x) \neq f(-x).$$

Así, f no es par

Además $f(1) \neq -f(-1)$

Luego:

$$\exists x \in D \,/\, f(x) \neq -f(-x)$$

Así, f no es impar.

c) Vimos que f no está definida si $x = 2$ o $x = -7$, por lo tanto estos son puntos de discontinuidad de f.

Primero escribimos f como:

$$f(x) = \frac{(x+7)\cdot(x-7)}{(x+7)\cdot(x-2)}$$

Ahora evaluamos el límite cuando $x \to -7$

$$\lim_{x \to -7} f(x) = \lim_{x \to -7} \left[\frac{(x+7)\cdot(x-7)}{(x+7)\cdot(x-2)}\right] = \lim_{x \to -7} \left(\frac{x-7}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x \to -7} f(x) = \frac{-7-7}{-7-2} = \frac{14}{9} \approx 1{,}6$$

NOTA

DNI: 41734892

Nombres: Juan Manuel
Apellidos: BORQUEZ PEREZ
Carrera: Ingeniería Industrial

HOJA N° 3

FECHA

y sabemos que:

$$\lim_{x \to -7} f(x) = \frac{14}{9} \iff \lim_{x \to -7^-} f(x) = \lim_{x \to -7^+} f(x) = \frac{14}{9}$$

Como existe el límite cuando $x \to -7$, entonces f tiene una discontinuidad evitable en $x = -7$

Ahora evaluamos el límite cuando $x \to 2^-$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left[\frac{(x+7)\cdot(x-7)}{(x+7)\cdot(x-2)} \right] = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x-7}{x-2} \right)$$

observamos que si $x \to 2^-$, entonces:

$$(x-7) \longrightarrow -5^-$$

$$(x-2) \longrightarrow 0^-$$

Luego:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

Dado que no existe el límite cuando $x \to 2^-$, entonces f presenta una discontinuidad escencial en $x = 2$.

d) Vimos que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$, por lo tanto f tiene una asíntota vertical de ecuación: $\boxed{x = 2}$

Evaluamos el límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(x+7)\cdot(x-7)}{(x+7)\cdot(x-2)} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-7}{x-2} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{x-7}{x}}{\frac{x-2}{x}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - 7/x}{1 - 2/x} \right)$$

NOTA

Vemos que si $x \to +\infty$, entonces:

$$2/x \to 0$$

$$7/x \to 0$$

Luego:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

Por analogía con el límite recién calculado evaluamos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1 - 7/x}{1 - 2/x} \right)$$

y vemos que si $x \to -\infty$, entonces:

$$2/x \to 0$$

$$7/x \to 0$$

Luego:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

Así, f tiene una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y su ecuación es:

$$\boxed{y = 1}$$

; Además f no tiene asíntotas oblicuas ya que tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$ la asíntota de f es horizontal.

e. Primero comprobemos que el punto pertenece a la gráfica de f:

$$f(5) = \frac{(5+7) \cdot (5-7)}{(5+7) \cdot (5-2)} = \frac{-2}{3}$$

Ahora calculamos la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(5; -\frac{2}{3})$

DNI: 41734892.
Nombres: Juan Manuel
Apellidos: BORQUEZ PEREZ
Carrera: Ingeniería Industrial
NOTA

DNI: 41734892

Nombres: Juan Manuel
Apellidos: BORQUEZ PEREZ
Carrera: Ingeniería Industrial

HOJA N° 5

FECHA

Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfico de f por el punto $\left(5; -\frac{2}{3}\right)$ coincide con la derivada de la función f en $x=5$

Entonces calculemos $f'(5)$ por definición:

$$m = f'(5) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{(5+h+7)\cdot(5+h-7)}{(5+h+7)\cdot(5+h-2)} + \frac{2}{3}}{h}\right]$$

$$m = f'(5) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{h-2}{h+3} + \frac{2}{3}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{3h-6+2h+6}{3\cdot h\cdot(h+3)}\right)$$

$$m = f'(5) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{5h}{3h\cdot(h+3)}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{5}{3\cdot(h+3)}\right] = \frac{5}{9}$$

$m = 5/9.$

Entonces la ecuación para la recta tangente será de la forma:

$y = mx + b$; donde b es la ordenada al origen de la recta.

$b = y - mx.$

Entonces escribimos nuevamente la ecuación considerando que $\left(5; -\frac{2}{3}\right)$ es un punto de la recta:

$$y = \frac{5x}{9} + \left(-\frac{2}{3} - \frac{5\cdot 5}{9}\right) = \frac{5x}{9} - \frac{81}{9}$$

$$\boxed{y = \frac{5}{9}x - \frac{81}{9}}$$

NOTA

f) En este caso tenemos:

$f'(5) = \frac{5}{9}$; $dx = 5{,}01 - 5 = 0{,}01$

Escribimos:

$\Delta y \approx df = f'(x) \cdot dx$

Ahora reemplazamos con los datos correspondientes:

$\Delta y \approx df = \frac{5}{9} \cdot 0{,}01 \approx 5{,}56 \cdot 10^{-3}$

$\boxed{\Delta y \approx 5{,}56 \cdot 10^{-3}}$

El cambio que sufre f cuando x pasa de 5 a 5,01 es:

$\Delta y \approx 0{,}00556$

DNI: 41.734.892

Nombres: Juan Manuel

Apellidos: BORQUEZ PEREZ

Carrera: Ingeniería Industrial.

NOTA