Análisis Matemático I
Clase 25: Series de Taylor

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Junio, 2020

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.

Series de Taylor

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).

Objetivo: dada una función f y un punto a en el interior del dominio de f, se desean construir polinomios que constituyan **buenas** aproximaciones de f cerca de a.
Un ejemplo de la construcción que se desea es la **linealización** de f en a. Recordar que:

$$f(x) \approx L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

y la aproximación mejora cuando x tiende a a. Observar que la linealización es un polinomio de grado 1 y que su utilidad radica en que es una expresión sencilla para realizar cálculos (evaluaciones en x particulares, derivación, integración, etc.).
¿Se podrán obtener mejores aproximaciones de f aumentando el grado del polinomio de aproximación?

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1.

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

Ejemplo: sea

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observar que para $|x| < 1$, $f(x)$ se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón x y primer término 1. Así:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots, \quad \text{cuando } |x| < 1.$$

La serie anterior **está centrada en** $a = 0$ pues contiene potencias de $x - 0$ y converge en el intervalo $(-1, 1)$ (centrado en 0). Decimos que $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia y $R = 1$ es el radio de convergencia.

Además, las sumas parciales de la serie son polinomios:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + x^2$$

$$\vdots$$

En general, la suma parcial n-ésima será:

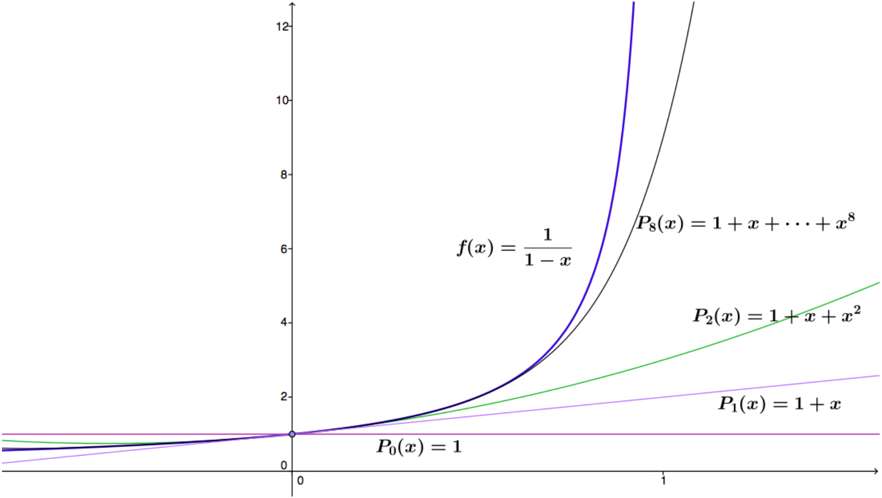
$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge a $f(x)$, entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \qquad |x| < 1.$$

Así, a medida que n es mayor, el polinomio P_n aproxima mejor a f cerca de $a = 0$.

Series de Taylor



Otro ejemplo:

$$g(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n}$$

siempre que:

$$|x-1| < 1.$$

La serie anterior anterior está centrada en $a = 1$ y converge en el intervalo $(0, 2)$. Observar que $(0, 2)$ es el intervalo de convergencia de la serie y que $R = 1$ es el radio de convergencia.

A lo largo de la clase vamos a estudiar lo siguiente:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a para f.

A lo largo de la clase vamos a estudiar lo siguiente:

- Dada una función f y un punto a en el interior de su dominio, generar una serie en potencias de $x - a$, con sumas parciales dadas por polinomios. Dicha serie se llamará **serie de Taylor** centrada en a para f.
- Estudiar condiciones que garanticen que la serie de Taylor centrada en a hallada en el ítem anterior converge, en cierto intervalo, a la función original. De esta forma, las sumas parciales de la serie de Taylor serán buenas aproximaciones de f cerca del punto a.

Series de Taylor

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

En esta parte, vamos a ver cómo generar una serie de Taylor. Para ello, supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots, \quad |x-a| < R$$

Entonces necesariamente:

$$a_0 = f(a) = f^{(0)}(a) \qquad (\text{convención } f^{(0)} = f).$$

Si derivamos f:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots$$

y entonces:

$$a_1 = f'(a).$$

Si volvemos a derivar:

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2.a_3(x-a) + \cdots$$

y así

$$f^{(2)}(a) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2}.$$

La derivada de orden 3 de f es:

$$f^{(3)}(a) = 3.2a_3 + \text{términos que dependen de } (x-a),$$

y:

$$f^{(3)}(a) = 3.2.a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

y en general los coeficientes de la serie f en potencias de $(x-a)$ son:

$$f^{(n)}(a) = n!.a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Serie de Taylor generada por una función

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a un punto a. Entonces, la serie de Taylor generada por f y centrada en el punto a es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad x \in I.$$

Escribimos:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad x \in I.$$

Las sumas parciales de la serie de Taylor de una función f, centrada en a, se llaman polinomios de Taylor. Es decir, el polinomio de Taylor de grado n alrededor de a es :

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplo: mostrar que la serie de Taylor centrada en $a = 0$ generada por $f(x) = e^x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir se pide comprobar:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Además, usando el criterio del cociente, comprobar que esta serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$ (es decir, el radio de convergencia es $R = +\infty$).

Solución: vamos a calcular los coeficientes de la serie de Taylor generada por la función exponencial en $a = 0$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$ y entonces:

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Además, $f'(x) = e^x$, $f^{(2)}(x) = e^x$ y entonces

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ para todo } n.$$

Así

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Por lo tanto

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Por lo tanto

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

En cuando a la convergencia de la serie, aplicamos criterio del cociente:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \text{para todo } x,$$

donde hemos usado:

$$(n+1)! = (n+1).n!$$

para simplificar la expresión:

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Así, como $\rho = 0 < 1$, por el criterio del cociente obtenemos que la serie de Taylor generada por $y = e^x$ converge para todo x. **Esto no significa necesariamente que converge a la función exponencial. Para comprobar eso, hay que hacer un análisis diferente.**

Pregunta: ¿podemos asegurar que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}? \textbf{ Es decir ¿} \lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x?$$

La respuesta a esta pregunta la veremos un poco más adelante. Sin embargo, observar que si tomamos los primeros polinomios de Taylor:

$$P_0(x) = 1$$

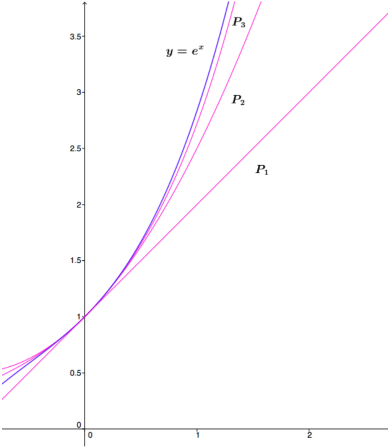
$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

y los graficamos:

Aproximación de $y = e^x$ mediante los polinomios de Taylor



se obtiene que a medida que n aumenta, los polinomios P_n son cada vez más parecidos a e^x, es decir, conjeturamos que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x$ para todo x.

Como otra evidencia, comparamos los valores de la función exponencial con el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0:

x	-1.0	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	1.0
e^x	0.3679	0.81873	0.904837	1	1.105171	1.22140	2.7183
$P_3(x)$	0.3333	0.81867	0.904833	1	1.105167	1.22133	2.6667

Analizaremos ahora el problema de la convergencia de series de Taylor a la función que la genera.

Teorema

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I que contiene a un punto a en su interior, entonces para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Nota: el término:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se denomina residuo o resto de orden n.

Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde P_n es el polinomio de Taylor centrado en a de f y R_n es el residuo de orden n.

Convergencia de series de Taylor

Por ende, la conclusión del teorema anterior puede escribirse: para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe c_n entre a y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde P_n es el polinomio de Taylor centrado en a de f y R_n es el residuo de orden n.

Recordemos que para obtener:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

las sumas parciales de la serie de Taylor deben converger a $f(x)$. Es decir, se debe tener:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

En vista del teorema anterior, esto sucede si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Convergencia de series de Taylor

Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada x de un intervalo I que contiene a a, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en a generada por f converge a f en I y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplo 1: demuestre que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición

Si $R_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ para cada x de un intervalo I que contiene a a, entonces decimos que la serie de Taylor centrada en a generada por f converge a f en I y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ejemplo 1: demuestre que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. anteriormente se obtuvo que:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada x y cada n, existe c_n entre $a = 0$ y x tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:

Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada x y cada n, existe c_n entre $a = 0$ y x tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:
-Si $x = 0$, entonces se tiene la igualdad:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Convergencia de series de Taylor

Para demostrar que la exponencial es igual a la serie de Taylor generada, vamos a comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{para todo x real.}$$

En este caso, por el Teorema de convergencia de series de Taylor, para cada x y cada n, existe c_n entre $a = 0$ y x tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Para probar que el residuo tiende a cero, vamos a distinguir tres casos:
-Si $x = 0$, entonces se tiene la igualdad:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

-Supongamos que $x > 0$. Entonces c_n también es positivo y además $c_n < x$. Como la función exponencial es creciente, obtenemos:

$$e^{c_n} < e^x.$$

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Dado que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = 0 \quad \left(\text{Aquí usamos: } \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,\forall\, x\right)$$

obtenemos por el Teorema de la Compresión para sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{para toda } x > 0. \tag{1}$$

Finalmente, utilizando la siguiente propiedad válida para toda sucesión a_n:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Así, podemos concluir a partir de (1) que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para toda } x > 0. \tag{2}$$

Convergencia de series de Taylor

-Finalmente, supongamos que $x < 0$. Entonces $c_n < 0$ y como la función exponencial es creciente se tiene:

$$e^{c_n} < e^0 = 1.$$

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Con lo cual se obtiene como antes:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para toda } x < 0.$$

En conclusión, para todo $x \in \mathbb{R}$ obtenemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ejemplo 2: demuestre $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Solución: primero vamos a generar la serie de Taylor centrada en 0 de $f(x) = sen(x)$. Calculamos las derivadas f en $x = 0$:

$$f(x) = sen(x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1,$$

$$f^{(2)}(x) = -sen(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = -cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1,$$

y en general tenemos:

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{si } n \text{ es par}$$

mientras que cuando n es impar, es decir, de la forma $n = 2k + 1$, $k = 0, 1.2....$ se tiene:

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Por ende, los únicos términos que aparecerán en la serie en Taylor son los correspondientes a n impar:

$$sen(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Convergencia de series de Taylor

A continuación, probaremos que la serie de Taylor converge a la función *sen* para todo x. Vamos a verificar que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x}$$

donde el residuo es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

con c_n entre x y 0. Observar que en la expresión del residuo no se descartan las derivadas de orden pares (que son nulas cuando se las evalúa en cero) porque podrían ser distintas de cero al evaluarla en c_n.
Para probar que el residuo tiende a cero cuando n tiende a infinito, acotamos las derivadas de *sen* de la siguiente manera:

$$|f^{(n+1)}(c_n)| \leq 1$$

ya que las derivadas de *sen* son las funciones *cos* o *sen* (multiplicadas por -1 eventualmente) y por ende no superan el valor 1 en valor absoluto.

Así:

$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{|f^{(n+1)}(c_n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dado que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \text{para todo x}$$

se tiene por el Teorema de la Compresión que:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{para todo x.}$$

Así, utilizando nuevamente la propiedad:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

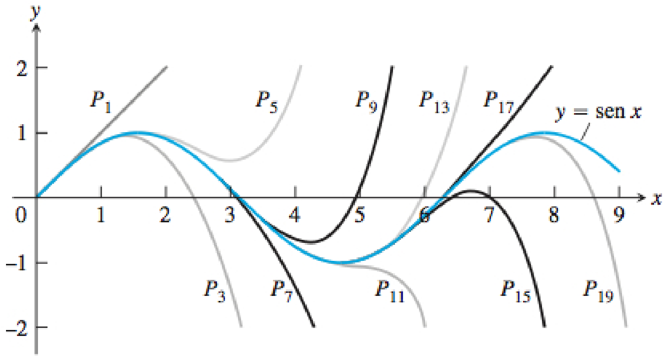
se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para todo x.}$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$sen(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{para todo x.}$$

La siguiente figura muestra a $f(x) = sen(x)$ con algunos polinomios de Taylor:



Teorema de derivación de series de Taylor

Supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

para $|x-a| < R$. Entonces f es derivable en $(a-R, a+R)$ y además:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots$$

para todo x que cumpla $|x-a| < R$.

El teorema anterior afirma que una serie de Taylor se puede derivar término a término en el intervalo de convergencia y que la serie resultante converge, al menos, en el mismo intervalo que la serie original.

Ejemplo 3: en el ejemplo 2 se probó que

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Si derivamos obtenemos:

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

donde hemos usado $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$ para simplificar.
Así, el radio de convergencia de la serie a la función coseno es $R = +\infty$ y el intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$. Hemos deducido una representación en serie de Taylor centrada en 0 para la función *coseno*.

Integración de series de Taylor

Teorema de integración de series de Taylor

Supongamos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

para $|x-a| < R$. Entonces:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$$

para todo x que cumpla $|x-a| < R$.

El teorema anterior afirma que una serie de Taylor se puede integrar término a término en el intervalo de convergencia y que la serie resultante converge, al menos, en el mismo intervalo que la serie original.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $a = 0$ la función:

$$f(x) = ln(1 + x).$$

Además, especifique el radio y el intervalo de convergencia.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $a = 0$ la función:

$$f(x) = ln(1 + x).$$

Además, especifique el radio y el intervalo de convergencia.
Solución: Observar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

siempre que $|x| < 1$.

Ejemplo 4: desarrolle en serie de Taylor centrada en $a = 0$ la función:

$$f(x) = ln(1 + x).$$

Además, especifique el radio y el intervalo de convergencia.
Solución: Observar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

siempre que $|x| < 1$. Integrando ambos miembros y utilizando el Teorema de integración de series de Taylor:

$$ln(1+x) + C = \int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{siempre que } |x| < 1.$$

Para encontrar el valor de C tomamos el valor $x = 0$ y obtenemos $C = 0$.
El radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia $(-1, 1)$.

Métodos para obtener la convergencia de una serie de Taylor a la función que la generó:

- Para funciones como $y = e^x$, $y = cos(x)$ o $y = sen(x)$, el procedimiento para obtener la convergencia de series de Taylor a la función dada es primero generar la serie y luego estudiar el residuo para comprobar que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Métodos para obtener la convergencia de una serie de Taylor a la función que la generó:

- Para funciones como $y = e^x$, $y = cos(x)$ o $y = sen(x)$, el procedimiento para obtener la convergencia de series de Taylor a la función dada es primero generar la serie y luego estudiar el residuo para comprobar que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

- Para otras funciones, como $y = ln(1 + x)$, $y = tan^{-1}(x)$ o $y = 1/(1 + x)$, se busca encontrar una relación con la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

  La relación puede ser directa como para $1/(1 + x)$ (donde $a = 1$ y $r = -x$) obteniéndose la igualdad:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x| < 1.$$

  Y en otros casos se debe derivar o integrar y aplicar el teorema de integración o derivación de series de Taylor como se hizo en el ejemplo de la diapositiva anterior.

Algunas series de Taylor (los estudiantes deben saber deducir cada una de ellas)

TABLA 10.1 Series de Taylor utilizadas con frecuencia

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leq 1$$