PARÁBOLAS

Respuestas Ejercicios 67 a 72

67. Indique todos los elementos (foco, vértice, directriz, lado recto y puntos extremos del lado recto) de la parábola cuya ecuación general es: $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$. Represente gráficamente.

Resolución:

Dada la ecuación general de la parábola $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$

Reunimos términos, completamos cuadrados y obtenemos la ecuación explícita

$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 8y - 23 = 0$

$(x - 3)^2 = -8(y - 4)$ [1]

Analizamos [1]: vértice $V(3,4)$; 2p=-8 (p<0), ramas orientadas hacia abajo

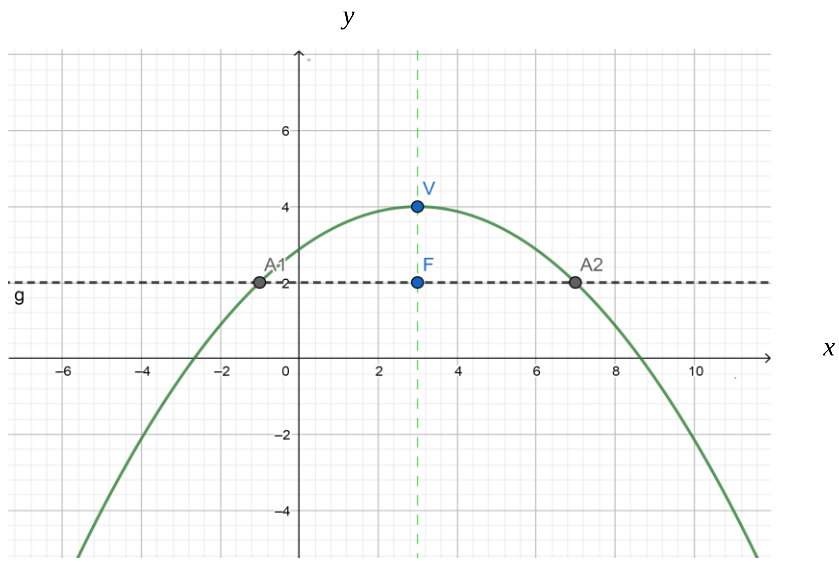
$|LR| = 2p = 8$, extremos de LR $\begin{cases} A1(-1,2) \\ A2(7,2) \end{cases}$

Las coordenadas del Foco de la parábola se obtienen de la siguiente manera:

$x_F = x_V$; $y_F = y_V - p/2$ F(3, 2)

La recta directriz de la parábola dada es: $y = y_V + p/2$; $y = 6$

Representación gráfica:



68. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es V (–4, 3) y su foco es F (–1, 3).

Represente gráficamente.

Resolución:

Con los datos: $V(-4,3)$; $F(-1,3)$

Del análisis de coordenadas de los puntos dados, podemos deducir que: el eje focal es paralelo al eje x, las ramas se orientan hacia la derecha, lo que significa que el parámetro p es positivo.

Entonces la ecuación es $(y-3)^2 = 2p(x+4)$ [2]

Deberemos hallar el valor de p

- Procedimiento 1: Un modo para completar la ecuación es determinar el vector

$VF = (3,0)$; $\|VF\| = 3 = \frac{p}{2}$. Entonces $p = 6$; $2p = 12$

Sustituyendo en [2], obtenemos: $(y-3)^2 = 12(x+4)$

Podemos establecer la longitud del lado recto $|LR| = 2p = 12$

De esa manera es posible hallar las coordenadas de los puntos extremos del lado recto

$$\begin{cases} A1(-1,9) \\ A2(-1,-3) \end{cases}$$

- Procedimiento 2: Otro modo de hallar la ecuación buscada es utilizar las coordenadas de un punto conocido de la parábola, sustituyendo las variables de la ecuación por dichos valores. Considerando para ello uno de los extremos del lado recto ya calculados:

$A1(-1,9)$

Sustituyendo las coordenadas de A1 en la ecuación [2] obtenemos:

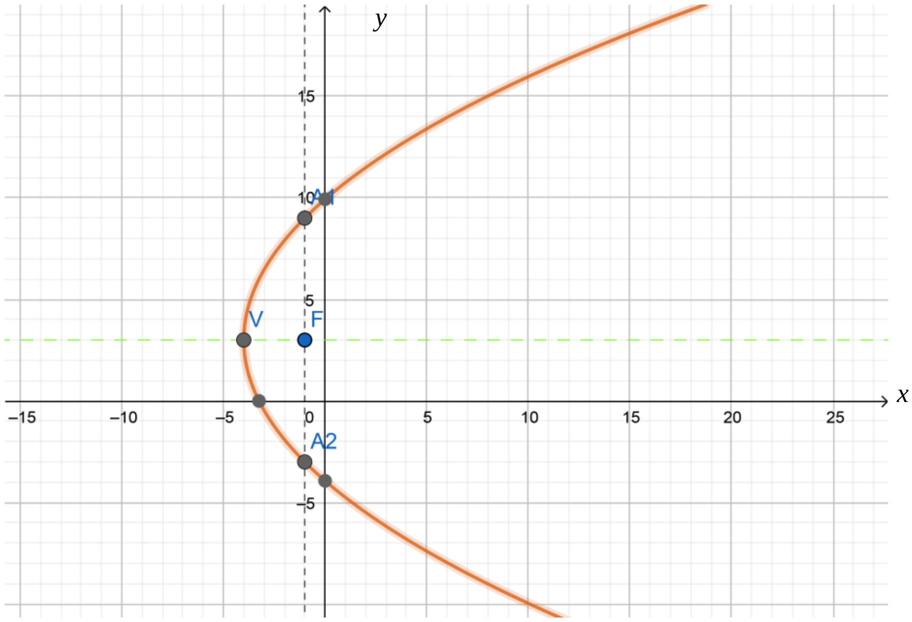
$(9-3)^2 = 2p(-1+4)$; $\frac{36}{3} = 2p$, $2p = 12$

Por lo cual la ecuación buscada será:

$(y-3)^2 = 12(x+4)$

La cual es igual a la hallada por el Procedimiento 1.

Representación gráfica:



69. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta L: $3x + 9y - 11 = 0$. Represente gráficamente.

Resolución:

Derivando implícitamente la ecuación general de la parábola obtenemos:

$2x + 4 + 12y' = 0$

Despejando y´, que representa la pendiente de la recta tangente a la parábola:

$$y' = -\frac{(x+2)}{6}$$

Existe otra condición para la ecuación de esta recta tangente, la cual debe ser paralela a la recta:

$L: y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{9}$

La condición de paralelismo se asegura comparando las pendientes, si las pendientes son iguales, las rectas son paralelas. Entonces: $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = -\frac{(x+2)}{6}$

Despejando x de la expresión anterior, encontramos el valor de la abscisa del punto T de tangencia $x = 0$

El punto de tangencia pertenece tanto a la recta como a la parábola, por lo tanto, verifica sus ecuaciones, tenemos la ecuación de la parábola, sustituimos x por 0:

$0 + 0.4 + 12y - 8 = 0 \quad ; \quad y = \frac{2}{3}$ es la ordenada del punto T de tangencia. $T(0, \frac{2}{3})$

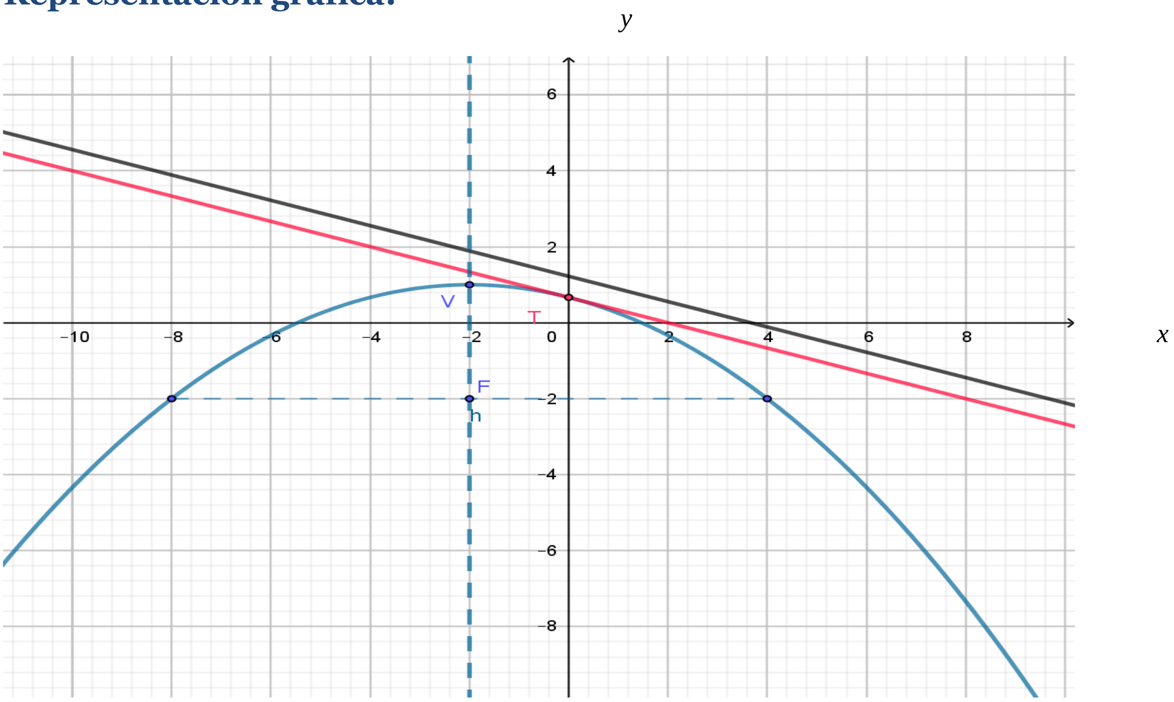
Ya conocemos la pendiente de la recta tangente y un punto de la misma $y = -\frac{1}{3}x + b$, siendo b la ordenada al origen.

Sustituimos las coordenadas del punto de tangencia: $\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}0 + b \;\; ; b = \frac{2}{3}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la parábola y paralela a la recta L es:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

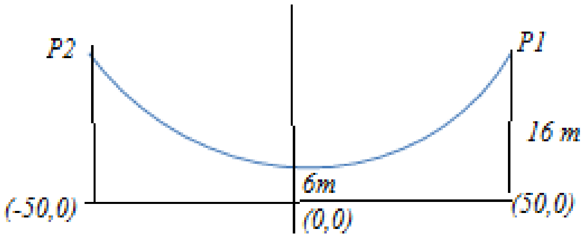
Representación gráfica:



70. Las torres de una línea de alta tensión están separadas 100 m y tienen una altura de 16m. Los cables de la línea no deben estar a menos de 6m sobre el nivel de suelo. Halle la ecuación de la parábola que determinan los cables. Indique la altura de un punto que está situado a 20m del vértice. Represente gráficamente.

Resolución:

Comenzamos con un esquema para interpretar los datos:



A partir de ubicar convenientemente el sistema de referencia y analizando el esquema realizado, determinamos:

eje y coincidente con el eje focal $V(0,6)$; $P1(50,16)$; $P2(-50,16)$

Las ramas de la parábola se encuentran orientadas hacia arriba, por lo cual p>0.

La ecuación de la parábola es entonces:

$$x^2 = 2p(y-6)$$

Sustituyendo las coordenadas del punto P1 conocido, en la ecuación, averiguamos el valor de p:

$$2500 = 2p(16-6) \;\; ; \;\; 250 = 2p \;\; ; 125 = p$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola resulta:

$$x^2 = 250(y-6)$$

Estamos en condiciones de hallar las coordenadas del foco $F(0;\ 6+\frac{125}{2})$

la longitud del lado recto $|LR| = 2p = 250$

Las coordenadas de los extremos del lado recto $\begin{cases} A1(125; 6+\frac{125}{2}) \\ A2(-125; 6+\frac{125}{2}) \end{cases}$

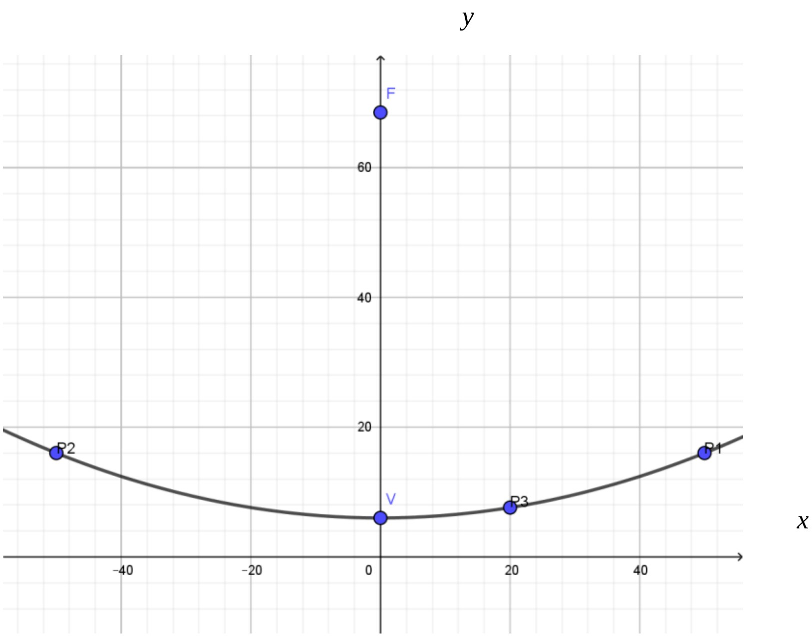
Las coordenadas de un punto que está a 20 m del vértice se obtienen sustituyendo la abscisa de dicho punto en la ecuación de la parábola:

$400 = 250(y-6)$

Luego, el valor de la ordenada será:

$P3(20, \frac{38}{5})$

Representación gráfica:



71. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$, y que es perpendicular a la recta L: $4x + 2y + 5 = 0$. Represente gráficamente.

Resolución:

Las condiciones para hallar la ecuación de la recta son:

Tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

Perpendicular a la recta $L: 4x + 2y + 5 = 0$

Derivando implícitamente la ecuación de la parábola y despejando y' obtenemos:

$2yy' - 2 + 2y' = 0$

$y' = \frac{1}{y+1}$ esta es la pendiente de la recta tangente a la parábola

Si las rectas son perpendiculares entre sí, las pendientes cumplen que el producto entre ellas da como resultado (-1)

$L: 4x + 2y + 5 = 0$; $L: y = -2x - \frac{5}{2}$

Como son perpendiculares $\left(\frac{1}{y+1}\right).(-2) = -1$; $1 = y$

De manera que la pendiente de la recta tangente es $y' = \frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

Con la ordenada del punto de tangencia, y_T=1, la abscisa se obtiene al sustituir la ordenada en la ecuación de la parábola *(esto se realiza así porque el punto de tangencia es común a la recta y a la parábola, verifica las ecuaciones de ambas)*

$1 - 2x + 2.1 + 3 = 0$; $x = 3$

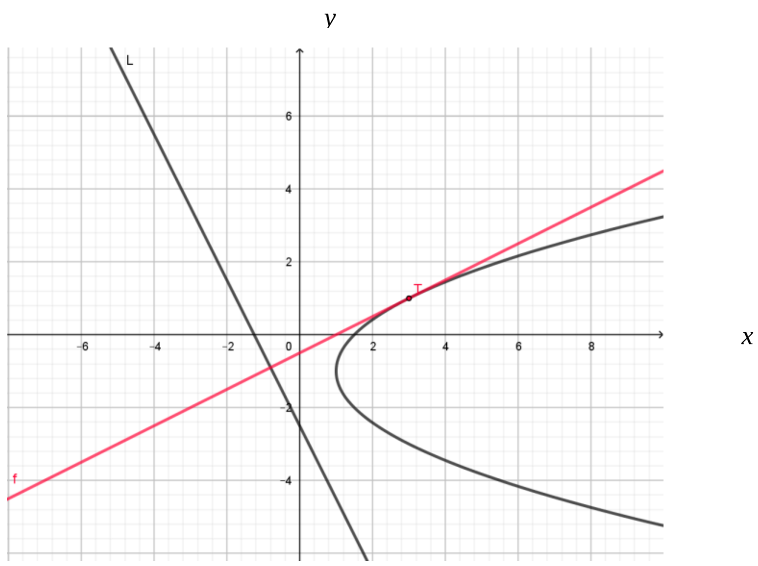
Ya tenemos las coordenadas del punto de tangencia $T(3{,}1)$

Si tenemos la pendiente de la recta y un punto conocido de la misma, podemos expresar la ecuación $y = \frac{1}{2}x + b$, falta averiguar la ordenada al origen $b = -\frac{1}{2}$

Y la ecuación de la recta tangente a la parábola que es perpendicular a la recta L es:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Representación gráfica:



72. a) Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V (1,1), parámetro p = 4 y eje focal paralelo al eje *x*. Identifique a partir de dichas ecuaciones dos puntos de la curva y grafique. b) Escriba la ecuación de una *familia de parábolas* de vértice V (1,1) y grafique tres curvas de dicha familia.

Resolución:

a) De acuerdo a los datos la ecuación de la parábola es: $(y-1)^2 = 8(x-1)$

Despejamos la variable que no se encuentra elevada al cuadrado, $x = \frac{(y-1)^2}{8} + 1$

Consideramos la otra variable como parámetro de la ecuación: y=t [1]

o como dependiente de un parámetro y=t-1 [2]

En este caso utilizaremos la ecuación [1]:

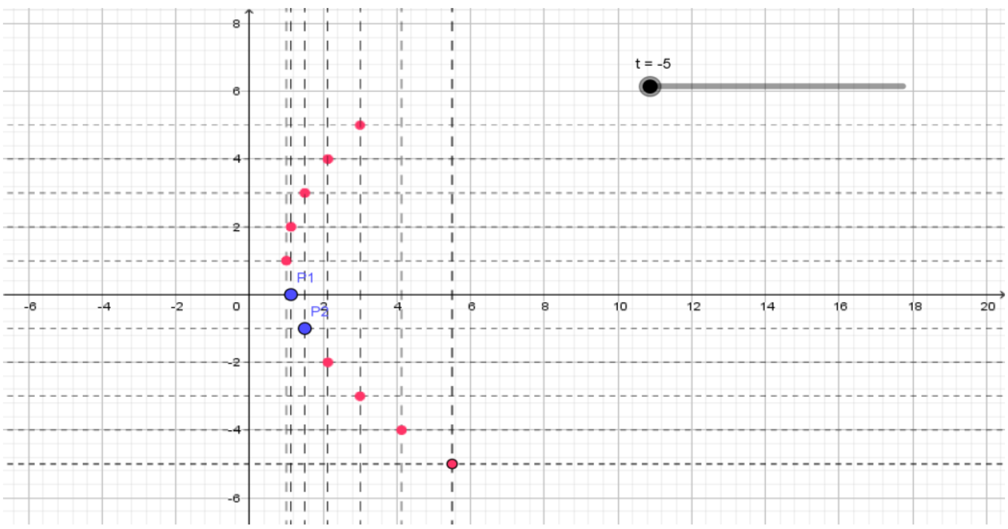
Las ecuaciones paramétricas de la parábola son entonces: $\begin{cases} y = t \\ x = \frac{(t-1)^2}{8} + 1 \end{cases} \quad t \in R$

Hallaremos P1 para t=0 $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{(0-1)^2}{8} + 1 = \frac{9}{8} \end{cases} \qquad P1(\frac{9}{8}, 0)$

Hallaremos P2 para t=-1 $\begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{(-1-1)^2}{8} + 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad P2(\frac{3}{2}, -1)$

Representación gráfica:

Se ha realizado en Geogebra, considerando un deslizador para el parámetro, con el objeto de que se representen la rectas y=t y la dependencia de los valores de x. En azul se ubican los puntos P1 y P2 solicitados en el enunciado.



b) La ecuación de una familia de parábolas de vértice V(1,1) tiene como parámetro de la familia al parámetro de la parábola. De esta manera haciendo p=k y considerando una familia de eje focal paralelo al eje y, tendremos:

$(y-1)^2 = 2k(x-1) \quad k \in R - \{0\}$

Dando valores al parámetro de la familia k, obtenemos tres integrantes de dicha familia:

k=1:

$(y-1)^2 = 2(x-1)$

k=2:

$(y-1)^2 = 4(x-1)$

k=-2

$(y-1)^2 = -4(x-1)$

Representación gráfica: