PARÁBOLAS

Respuestas Ejercicios 73 a 78

73. Determine gráfica y analíticamente la intersección de la curva cuya ecuación es:

$x^2 - 6x + y + 4 = 0$ con la recta $L: -y + x = 0$.

Respuestas:

Determinación gráfica de la intersección:

Analizando la ecuación $x^2 - 6x + y + 4 = 0$, vemos que tiene una única variable elevada al cuadrado, y ambos términos lineales presentes. Recordando que la *condición necesaria* para que la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, (en la que $B=0$) represente una parábola, es que uno de los coeficientes de las variables cuadráticas sea nulo y el otro no. La *condición suficiente* es que el coeficiente de la variable lineal que corresponde al coeficiente de la variable cuadrática nula sea distinto de cero. Concluimos que dicha ecuación corresponde a una parábola.

Se procede a encontrar sus elementos para poder graficar.

a) Una manera es completando cuadrados, y llevando la ecuación a su forma cartesiana, en la cual se ponen en evidencia el vértice $V(h, k)$ y el parámetro p:

$$(x^2 - h) = 2p(y - k)$$

b) Otra manera es comparando con la ecuación general desarrollada de una parábola con vértice en $V(h, k)$ y de parámetro p:

$$x^2 - 2hx - 2py + h^2 + 2pk = 0$$

Para nuestro caso, siguiendo el procedimiento indicado en b):

i) $-2hx = -6x$ $\qquad h = \frac{-6}{-2} = 3$

ii) $-2py = y$ $\qquad p = -\frac{1}{2}$

iii) $h^2 + 2pk = 4$

$3^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) k = 4$ $\qquad k = 9 - 4 = 5$

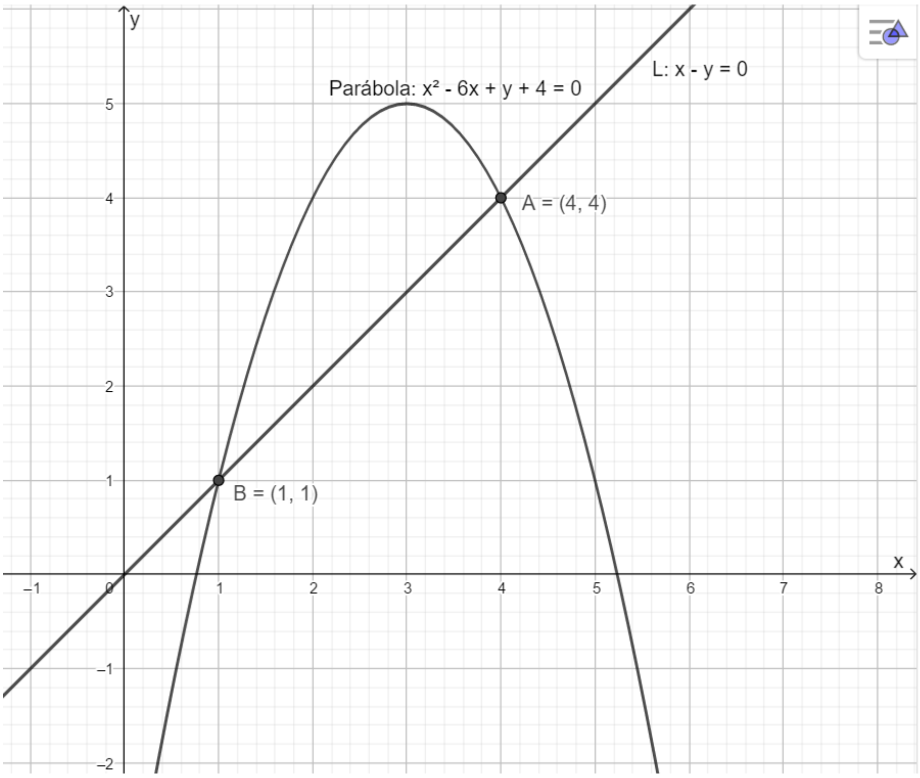
Luego, la dirección del eje focal de la parábola coincide con la dirección del eje de la variable que no se encuentra elevada al cuadrado (en nuestro caso la variable y).

EF//Eje y

El vértice resulta $V(3,5)$, y el parámetro $p = -\frac{1}{2}$ (el signo negativo indica que las ramas de la parábola se extienden hacia los negativos).

La otra ecuación $L: -y + x = 0$ representa una recta en el plano.

Graficando:



Se observa que la recta es secante a la parábola, y sus intersecciones resultan los puntos $A(4,4)$ y $B(1,1)$.

Determinación analítica de la intersección:

Para encontrar la intersección entre la recta y la parábola, debemos resolver el sistema de ecuaciones que incluye las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y + 4 = 0 \\ -y + x = 0 \end{cases}$$

De la ecuación de la recta, $L: -y + x = 0$ se despeja una de las dos variables y se la sustituye en la ecuación de la parábola. Luego:

$$y = x$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola, tenemos:

$$x^2 - 6x + (x) + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado en una variable:

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 4\,, y_1 = 4$$

$$x_2 = 1\,, y_2 = 1$$

Se observa que la recta es secante a la parábola, y sus intersecciones resultan los puntos $A(4{,}4)$ y $B(1{,}1)$. Los resultados se verifican con los obtenidos a partir de la determinación gráfica.

---

74. a) Halle desde el punto $Q(-1,-1)$ las dos rectas tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. b) Calcule el ángulo que determinan estas rectas. c) Verifique sus respuestas representando gráficamente la parábola con el software GeoGebra y utilizando los *Comandos Tangente y Ángulo*.

Respuestas:

a) Para encontrar las rectas que pasan por $Q(-1,-1)$ y son tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$, se realiza el siguiente planteo:

Sabiendo que la recta pasa por el punto $Q(-1,-1)$, la familia de rectas que pasan por dicho punto queda definida por la expresión siguiente:

$$(y + 1) = m(x + 1)$$

Despejando la variable y:

$$y = m(x + 1) - 1 = mx + m - 1$$

Dicha expresión representa todas las rectas que pasan por el punto Q. Recordemos que solo estamos interesados en determinar dos de ellas, que a su vez sean tangentes a la parábola correspondiente.

Para encontrar estas rectas tangentes, se plantea un sistema de ecuaciones que incluye la ecuación de la familia de rectas que pasan por Q y la ecuación de la parábola.

$$\begin{cases} y^2 - x + 4y + 6 = 0 \\ y = mx + m - 1 \end{cases}$$

La solución del sistema nos daría la intersección entre estos dos lugares geométricos. Al no conocer m no es posible resolver dicho sistema, pero sí es posible dejar planteada la solución como una ecuación de segundo grado de variable única, con los coeficientes de la misma en función del parámetro m de la familia de rectas. Luego, a partir de la condición de tangencia, sabemos que la solución de dicha ecuación, debería darnos por resultado dos raíces reales iguales (un único punto de intersección). Teniendo en cuenta esto último, para llegar a dicho resultado es necesario que el radiando o discriminante $b^2 - 4.a.c$ sea nulo, y de aquí surge una nueva ecuación que nos permitirá determinar los valores de m que cumplen con la condición de tangencia requerida. A continuación, se procede de acuerdo a lo planteado:

Se sustituye en la ecuación de la parábola la ecuación de la familia de rectas:

$$(mx + m - 1)^2 - x + 4(mx + m - 1) + 6 = 0$$

$$m^2x^2 + m^2 + 1 + 2m^2x - 2mx - 2m - x + 4mx + 4m - 4 + 6 = 0$$

$$m^2x^2 + m^2 + 2m^2x - x + 2mx + 2m + 3 = 0$$

Agrupando y sacando factor común x^2 y x, se llega a la ecuación de segundo grado de variable única con los coeficientes de la misma en función del parámetro de la familia de rectas m, que nos daría la intersección entre estos dos lugares geométricos:

$$m^2x^2 + (2m^2 + 2m - 1)x + (m^2 + 2m + 3) = 0$$

Para que las rectas sean tangentes, se debe cumplir que el discriminante $b^2 - 4ac = 0$. De esta manera, la intersección de cada recta con la curva queda definida en un único punto (dos raíces reales iguales).

$$b^2 - 4ac = (2m^2 + 2m - 1)^2 - 4.m^2.(m^2 + 2m + 3) = 0$$

$$4m^4 + 4m^2 + 1 + 8m^3 - 4m^2 - 4m - 4m^4 - 8m^3 - 12m^2 = 0$$

$$1 - 4m - 12m^2 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-12).1}}{2.(-12)}$$

$$m_1 = \frac{1}{6}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

Siendo $m_1 = \frac{1}{6}$ la pendiente de la recta L_{T1} y $m_2 = -\frac{1}{2}$ a pendiente de la recta L_{T2}.

Luego:

$$L_{T1}: (y + 1) = \frac{1}{6}(x + 1)$$

$$L_{T2}: (y + 1) = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

b) Para encontrar el ángulo entre las rectas, en primer lugar, se encuentran los vectores directores de las mismas y luego, mediante definición de producto escalar, se determina el ángulo entre ellos. Sus vectores directores resultan:

$$\boldsymbol{d}_{LT1} = (6,1)$$

$$\boldsymbol{d}_{LT2} = (2,-1)$$

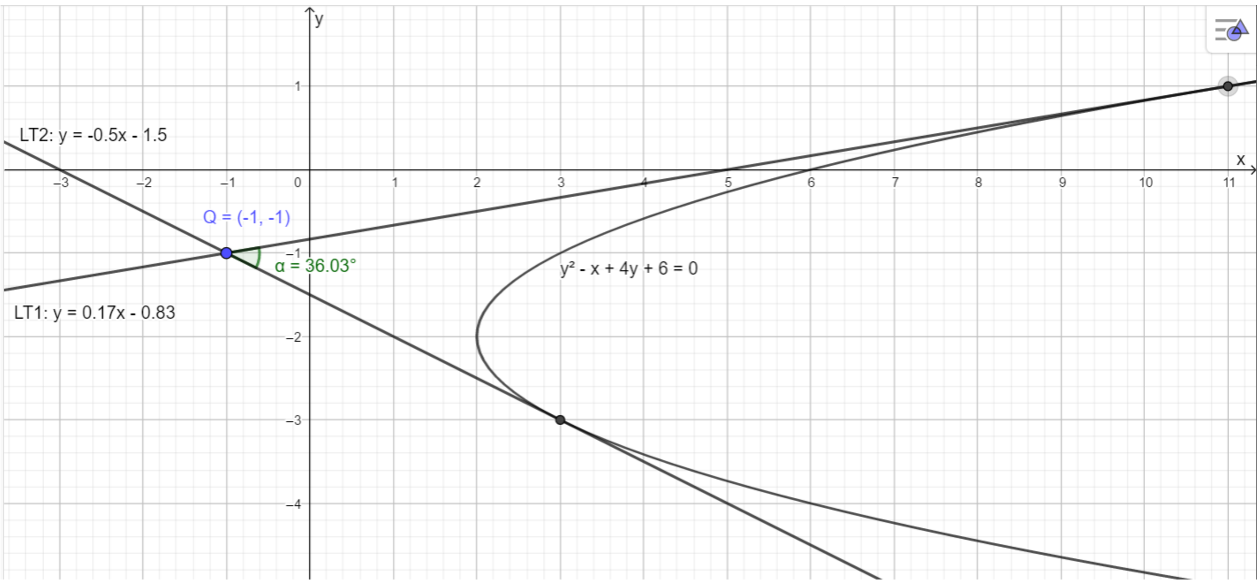
Se determina el ángulo a partir de la definición de producto escalar:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{d}_{L1}.\boldsymbol{d}_{L2}}{\|\boldsymbol{d}_{L1}\|.\|\boldsymbol{d}_{L2}\|} = \frac{(6,1).(2,-1)}{\sqrt{6^2+1^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$cos\theta = \frac{12-1}{\sqrt{37}.\sqrt{5}} = 0{,}808$$

$$\theta = arc\cos(0{,}808) = 36{,}03°$$

c) Verificación gráfica:



75. El cable de suspensión de un puente colgante puede aproximarse mediante la forma de un arco parabólico. Las columnas que lo soportan están separadas 480 m y tienen una altura de 56 m. El punto más bajo del cable queda a una altura de 12 m sobre la calzada del puente. Determine la ecuación de la parábola, considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente, y como eje de coordenadas el eje de simetría de la parábola. Calcule la altura correspondiente a un punto situado a 80 m de las columnas. Represente gráficamente.

Respuestas:

Siendo el eje de abscisas la horizontal que define el puente, el eje de coordenadas el eje de simetría de la parábola y siendo que el punto más bajo del cable queda a una altura de 12 m sobre la calzada, podemos decir entonces que el vértice de la parábola buscada viene dado por el punto $V(0{,}12)$.

Otros dos puntos que pertenecen a la parábola son los anclajes del cable sobre las columnas (separadas 480 m y de 56 m de altura), de coordenadas $P_1(-240{,}56)$ y $P_2(240{,}56)$.

De acuerdo a como se dispone la posición de la parábola, decimos que su eje focal (o eje de simetría) es coincidente con el eje de coordenadas. Luego, una parábola de vértice $V(h,k)$, parámetro p y eje focal coincidente con el eje y, queda definida por la siguiente ecuación:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

Reemplazando los valores conocidos del vértice $V(0{,}12)$:

$$x^2 = 2p(y-12)$$

Para encontrar el parámetro p, se reemplaza cualquiera de los puntos conocidos $P_1(-240{,}56)$ o $P_2(240{,}56)$, pertenecientes a la curva:

$$240^2 = 2p(56-12)$$

$$p = \frac{240^2}{88} = \frac{57600}{88}$$

Finalmente, la ecuación de la parábola que describe la curva del cable resulta:

$$x^2 = 2.\frac{57600}{88}(y-12) = \frac{57600}{44}(y-12)$$

La altura a una distancia de 80 m de las columnas (160 m del origen de coordenadas), se obtiene reemplazando la variable $x = 160$ en la ecuación y determinando su ordenada correspondiente:

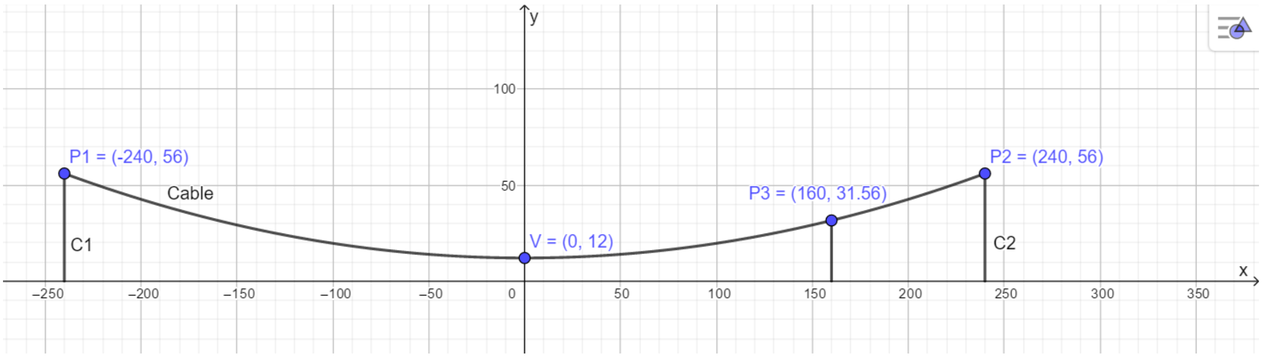
$$160^2 = \frac{57600}{44}(y-12)$$

$$160^2.\frac{44}{57600} + 12 = y$$

$$31{,}56 = y$$

La altura del cable a 80 m de las columnas es de 31,56 m desde el nivel de calzada.

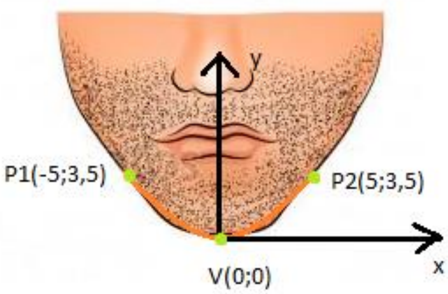
Representación gráfica:

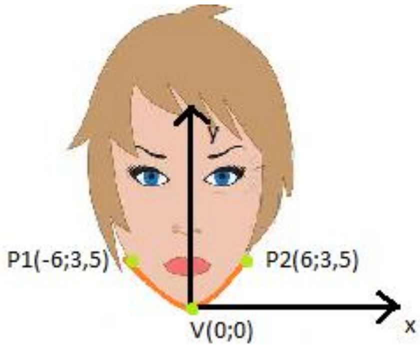


---

76. Para el diseño de un software de reconocimiento facial resulta útil aplicar la definición de parábola y el concepto de familia de la misma. Se asimila la forma del mentón a dicha curva, tomando como referencia el vértice (asociado al punto inferior del mentón) coincidente con el origen de coordenadas.

a) Dados los siguientes casos, determine para cada uno el parámetro geométrico *p* que caracteriza a cada parábola y escriba las ecuaciones cartesianas de las mismas.





b) Plantee la ecuación correspondiente a la familia de parábolas a las cuales pertenecen los casos del inciso previo. ¿Cuál sería el parámetro a utilizar?

c) Para las parábolas determinadas en el inciso a) encuentre las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del lado recto junto con su longitud, la ecuación de la recta directriz. Grafique.

d) Considerando que el parámetro geométrico caracteriza a un individuo en particular. Siendo el parámetro *p*=4,11, a que individuo de la siguiente base de datos corresponde:

i. Individuo A - P1 (-6,7 ; 3,5) y P2 (6,7 ; 3,5)

ii. Individuo B - P1 (4,6 ; 3,5) y P2 (4,6 ; 3,5)

iii. Individuo C - P1 (5,36 ; 3,5) y P2 (5,36 ; 3,5)

Respuestas:

a) Ambas curvas comparten el vértice $V(0,0)$ y tienen el eje focal en coincidencia con el eje y.

Para este tipo de curva, ecuación correspondiente resulta:

$$x^2 = 2py$$

El parámetro de forma será distinto para cada parábola. Para determinar dicho parámetro, se sustituye un punto conocido de la curva en la ecuación previa.

Para la parábola del individuo a la izquierda, se consideran los puntos $P1(-5; 3{,}5)$ y $P2(5; 3{,}5)$ que pertenecen a la misma. Luego:

$$5^2 = 2p3{,}5 = 7p$$

$$p = 25/7$$

La ecuación cartesiana de la parábola asociada al individuo de la izquierda resulta:

$$x^2 = \frac{50}{7}y$$

De manera análoga para la parábola del individuo a la derecha, se consideran los puntos $P1(-6; 3{,}5)$ y $P2(6; 3{,}5)$ que pertenecen a la misma. Luego:

$$6^2 = 2p3{,}5 = 7p$$

$$p = 36/7$$

La ecuación cartesiana de la parábola asociada al individuo de la izquierda resulta:

$$x^2 = \frac{72}{7}y$$

b) Como se mencionó, de acuerdo a la figura, las parábolas comparten vértice y dirección del eje focal. Luego, el parámetro que cambia es el parámetro geométrico p que determina la forma del mentón. Dicho parámetro resulta adecuado para utilizar en la familia, como se expresa a continuación:

$$p = k\, ; k \in \mathbb{R}^+$$

$$x^2 = ky$$

c) La ecuación cartesiana de la parábola asociada al individuo de la izquierda resulta:

$$x^2 = \frac{50}{7}y$$

Vértice $V(0,0)$, parámetro $p = \frac{25}{7}$ y eje focal coincidente con el eje y.

Para encontrar las coordenadas del foco nos movemos una distancia $p/2$ desde el vértice en dirección del eje focal en el sentido de apertura de las ramas (el parámetro positivo indica que las ramas se desarrollan hacia el sentido positivo de los ejes coordenados):

$$F\left(0; 0+\frac{p}{2}\right) \to F\left(0; 0+\frac{25}{14}\right) \to F\left(0; \frac{25}{14}\right)$$

Para determinar las coordenadas de los extremos del lado recto, nos movemos desde el foco en dirección perpendicular al eje focal una distancia p a un lado y al otro:

$$A\left(0-p; \frac{25}{14}\right) \to A\left(0-\frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right) \to A\left(-\frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right)$$

$$B\left(0+p; \frac{25}{14}\right) \to B\left(0+\frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right) \to B\left(\frac{25}{7}; \frac{25}{14}\right)$$

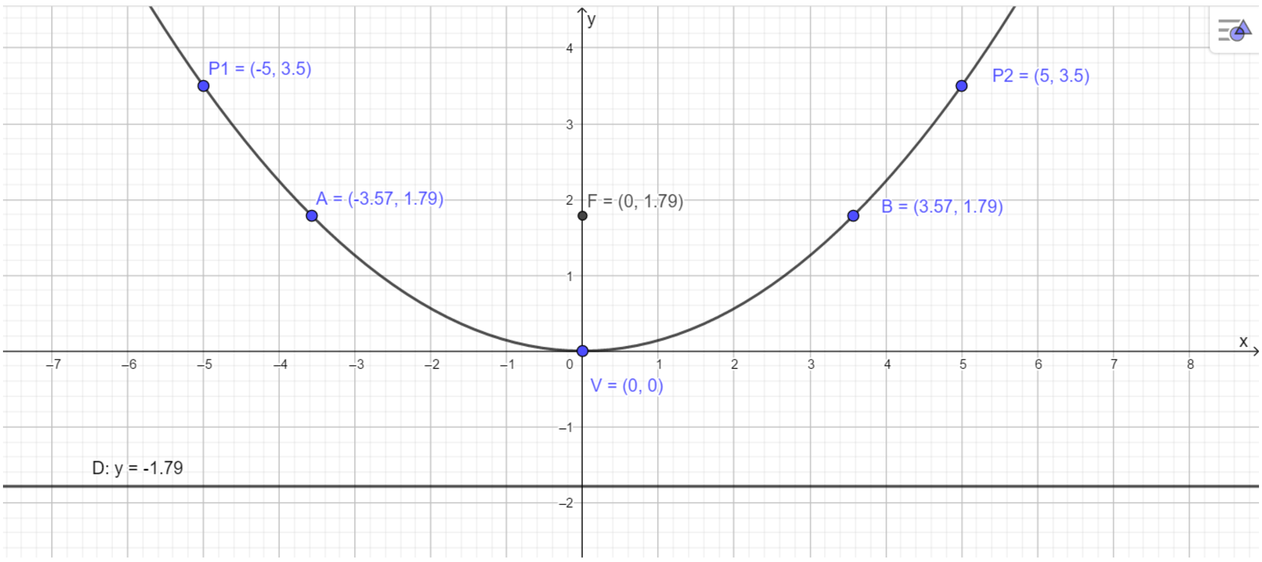
Y la longitud del lado recto es:

$$LR = |2p| = \frac{50}{7}$$

Por último, la ecuación de la directriz se obtiene considerando que la misma tiene dirección perpendicular al eje focal (eje y en nuestro caso), y que pasa a una distancia $p/2$ del vértice en sentido opuesto al foco. Luego:

$$y = -\frac{p}{2} = -\frac{25}{14}$$

Graficando:



De la misma manera procedemos para la parábola asociada al individuo de la derecha. La ecuación cartesiana resulta:

$$x^2 = \frac{72}{7}y$$

Vértice $V(0{,}0)$, parámetro $p = \frac{36}{7}$ y eje focal coincidente con el eje y.

Para encontrar las coordenadas del foco nos movemos una distancia $p/2$ desde el vértice en dirección del eje focal en el sentido de apertura de las ramas (el parámetro positivo indica que las ramas se desarrollan hacia el sentido positivo de los ejes coordenados):

$$F\left(0; 0 + \frac{p}{2}\right) \to F\left(0; 0 + \frac{1}{2}.\frac{36}{7}\right) \to F\left(0; \frac{18}{7}\right)$$

Para determinar las coordenadas de los extremos del lado recto, nos movemos desde el foco en dirección perpendicular al eje focal una distancia p a un lado y al otro:

$$A\left(0 - p; \frac{18}{7}\right) \to A\left(0 - \frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right) \to A\left(-\frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

$$B\left(0 + p; \frac{18}{7}\right) \to B\left(0 + \frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right) \to B\left(\frac{36}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

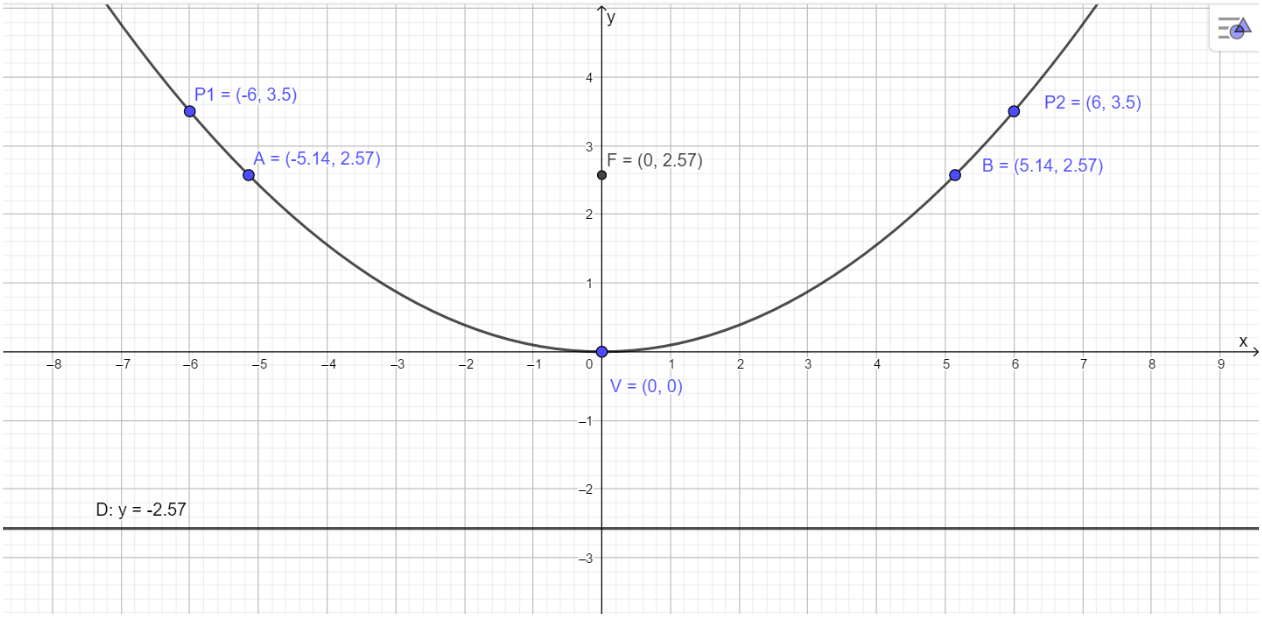
Y la longitud del lado recto es:

$$LR = |2p| = \frac{72}{7}$$

Por último, la ecuación de la directriz se obtiene considerando que la misma tiene dirección perpendicular al eje focal (eje y en nuestro caso), y que pasa a una distancia $p/2$ del vértice en sentido opuesto al foco. Luego:

$$y = -\frac{p}{2} = -\frac{18}{7}$$

Graficando:



d) Recordando la ecuación de la familia:

$$x^2 = 2py$$

Dado que el valor de la ordenada es reincidente en todos los casos, se determina la abscisa correspondiente a dicho valor sabiendo que $p = 4{,}11$:

$$x = \sqrt{2p3{,}5} = \sqrt{2.4{,}11.3{,}5} = 5{,}36$$

Luego, parámetro $p = 4{,}11$ corresponde al individuo "C".

---

77. a) Indique ecuaciones paramétricas de la parábola de vértice V (2,-2), parámetro p = 3 y eje focal paralelo al eje y. Identifique a partir de dichas ecuaciones dos puntos de la curva y grafique.

b) Escriba la ecuación de una familia de parábolas adoptando como fijo alguno de los parámetros del inciso anterior y grafique tres curvas de dicha familia.

Respuestas:

Ecuación cartesiana de la parábola con vértice en $V(2,-2)$, parámetro $p = 3$ y eje focal paralelo al eje y:

$$(x-2)^2 = 2 * 3 * (y+2) = 6(y+2)$$

$$(x-2)^2 = 6(y+2)$$

Se adopta la variable x como parámetro (es decir, la variable que está al cuadrado):

$$x = t$$

$$y = \frac{1}{6}(x-2)^2 - 2 = \frac{1}{6}(t-2)^2 - 2$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Dos puntos de la curva surgen dándole valores al parámetro t:

Para $t = 8$:

$$x = 8$$

$$y = \frac{1}{6}(8-2)^2 - 2 = 4$$

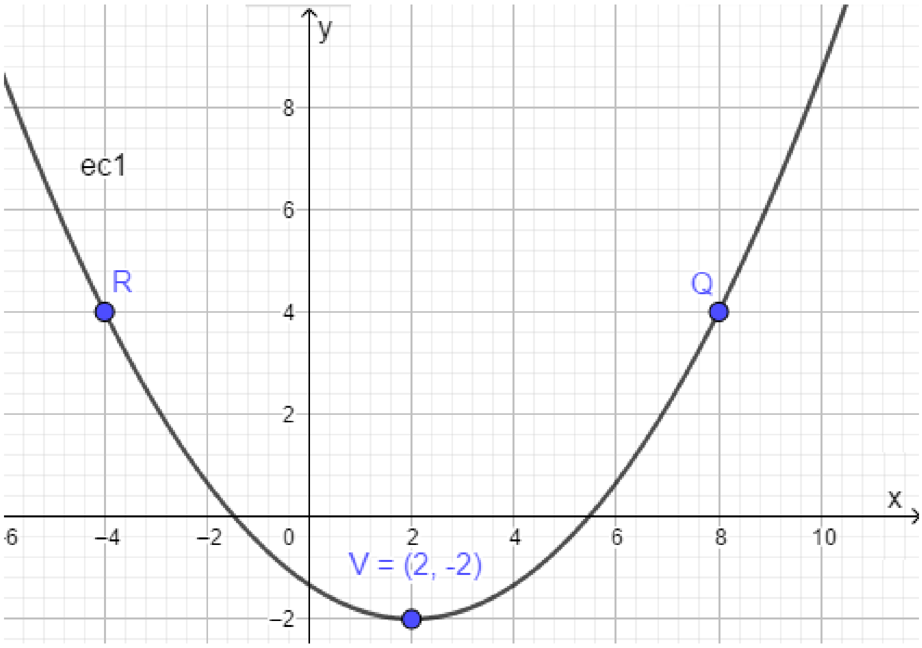
$$Q(8,4)$$

Para $t = -4$:

$$x = 2$$

$$y = \frac{1}{6}(-4-2)^2 - 2 = 4$$

$$R(-4,4)$$

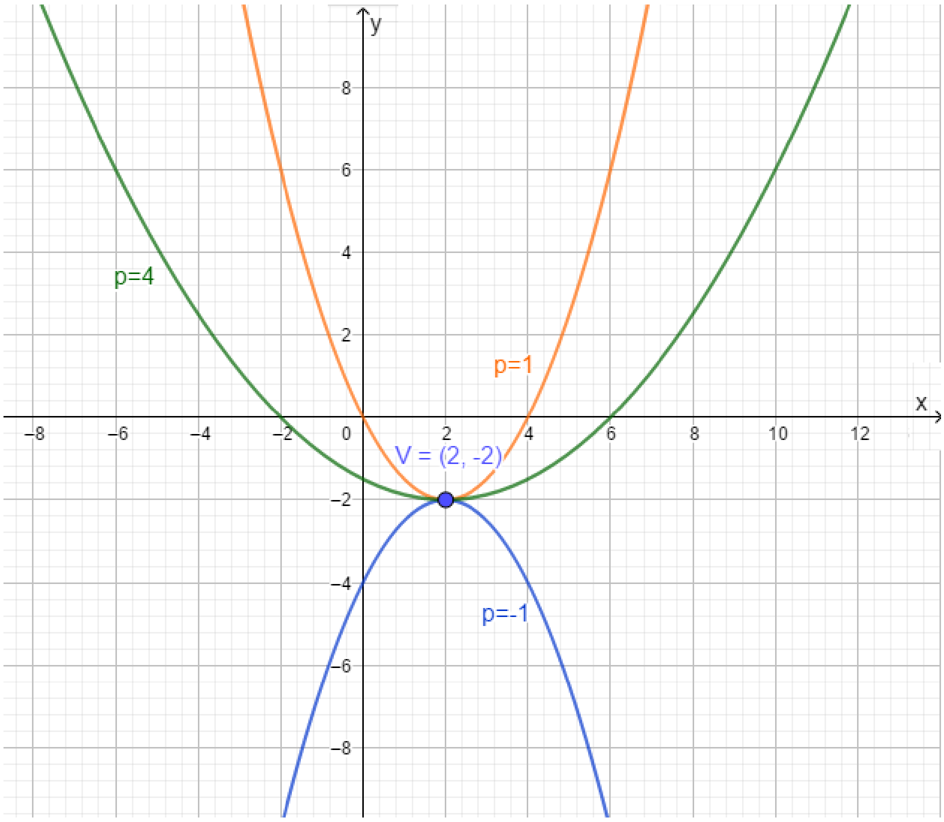


b) Tomando como parámetro de la familia al parámetro de forma p:

$$p = k\,;\, k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(x-2)^2 = 2k(y+2)\,;\, k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Tanto el vértice como el eje focal permanecen fijos. Graficando tres curvas de dicha familia, resulta:



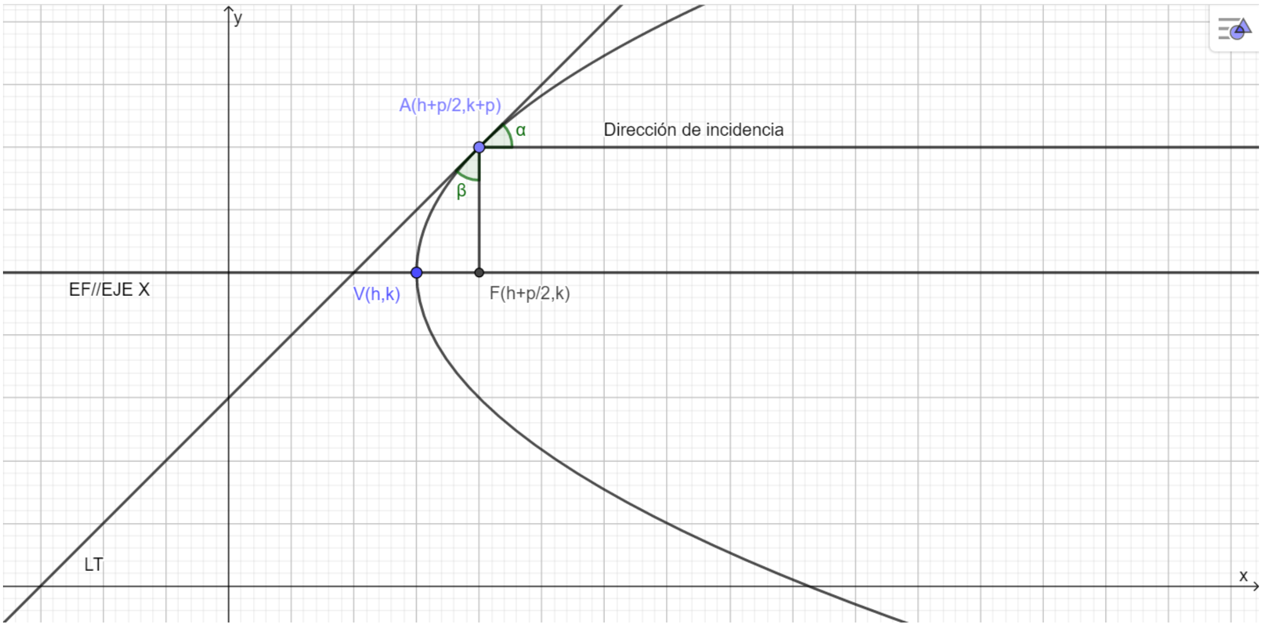
78. Dada la parábola de vértice V (h,k) y eje focal paralelo al eje de abscisas, verifique la propiedad de reflexión en un punto extremo del lado recto.

Respuestas:

La propiedad de reflexión de la parábola enuncia lo siguiente: sea L_T la recta tangente a la parábola en un punto $P_0(x_0, y_0)$ de la misma. Los ángulos α y β que dicha recta determina con el segmento que se extiende desde el foco F hasta el punto P_0, y con la recta paralela al eje de simetría de la parábola que pasa por P_0, respectivamente, son congruentes.

Se procederá a verificar dicha propiedad en un punto extremo del lado recto. Para ello se buscará determinar los ángulos α y β a partir de datos conocidos. En primer lugar, se encontrará la ecuación de la parábola y su derivada. La derivada, que representa la pendiente de la recta tangente en cada punto de la curva, será evaluada en un extremo del lado recto. Esto nos dará el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. A partir de dicho valor, se determinará un vector director a la recta. También se encontrarán un vector paralelo al eje focal y otro vector desde el foco hasta el punto del extremo del lado recto. Con estos tres vectores nos será posible determinar los ángulos buscados. Se procede a la resolución:

El planteo geométrico resulta:



Ecuación cartesiana de la parábola con vértice en $V(h,k)$, parámetro p y eje focal paralelo al eje x:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

La derivada de la ecuación de la parábola, nos da la función pendiente de la curva:

$$2(y-k)y' = 2p$$

$$y' = \frac{p}{y-k}$$

Evaluada en un extremo del lado recto:

$$A(h+\frac{p}{2}, k+p)$$

$$y'_A = \frac{p}{k+p-k} = 1$$

Es decir que un vector con dirección paralela a la de la recta tangente L_T resulta el vector:

$$\boldsymbol{d}_{LT} = (1,1)$$

Un vector con dirección paralela a la dirección del eje focal:

$$\boldsymbol{d}_{EF} = (p, 0) \, // \, Eje \; x$$

Y el vector asociado al punto del extremo del lado recto evaluado:

$$\boldsymbol{FA} = (0, p)$$

Determinado estos vectores evaluamos los ángulos que nos interesan α y β usando producto escalar:

El ángulo α se asocia a los vectores $\boldsymbol{d}_{LT}$ y $\boldsymbol{d}_{EF}$:

$$cos\alpha = \frac{\boldsymbol{d}_{LT}.\boldsymbol{d}_{EF}}{\|\boldsymbol{d}_{LT}\|.\|\boldsymbol{d}_{EF}\|} = \frac{(1,1).(p,0)}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{p^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y el ángulo β se asocia a los vectores $\boldsymbol{d}_{LT}$ y $\boldsymbol{FA}$:

$$cos\beta = \frac{\boldsymbol{d}_{LT}.\boldsymbol{FA}}{\|\boldsymbol{d}_{LT}\|.\|\boldsymbol{FA}\|} = \frac{(1,1).(0,p)}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{0^2+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego, los cosenos son iguales, por lo tanto, los argumentos también lo son:

$$\alpha = \beta$$

La propiedad de reflexión de la parábola en un extremo de su lado recto queda demostrada.