Análisis Matemático I
Clase 20: Funciones trascendentes parte II

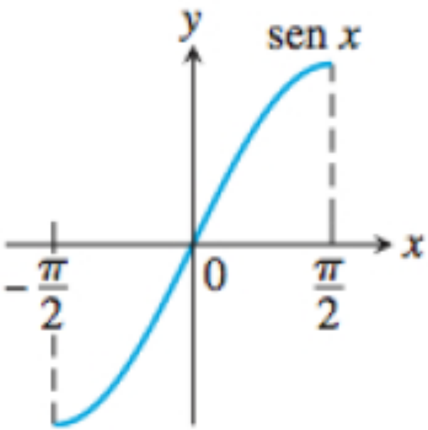
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

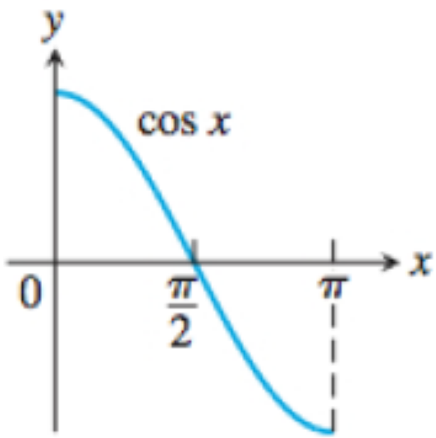
Mayo, 2020

Funciones trigonométricas

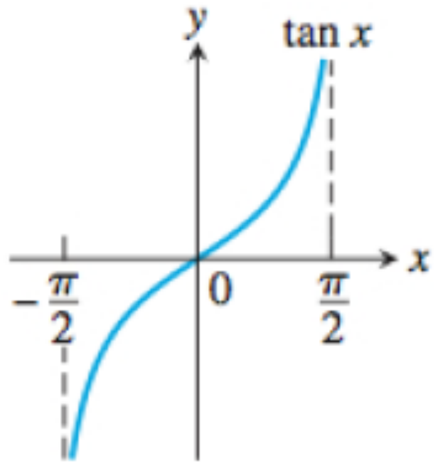
Las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas:



$y = \operatorname{sen} x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$



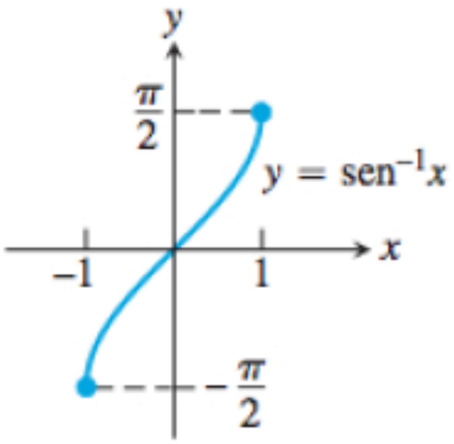
$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

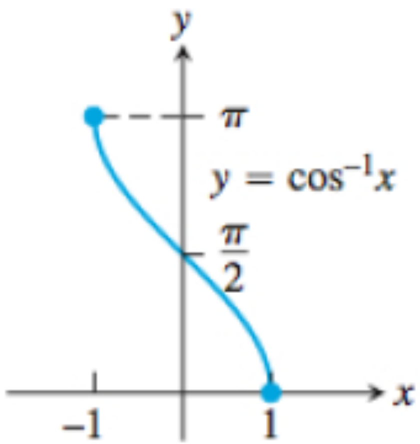
Funciones trigonométricas inversas

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$
Rango: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



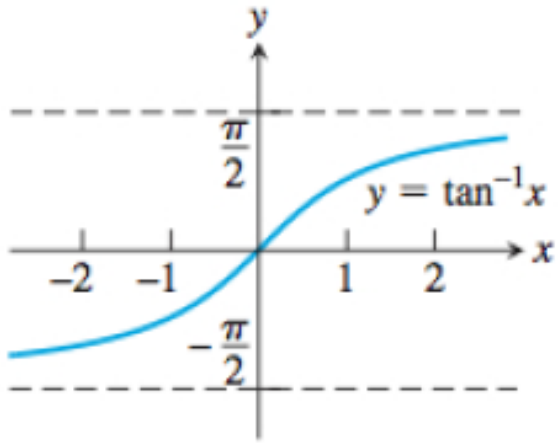
(a)

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$
Rango: $0 \leq y \leq \pi$



(b)

Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



(c)

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $f^{-1}(x) = sen^{-1}x$: tomamos $x \in (-1, 1)$ y entonces

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ tenemos $cos(x) = \sqrt{1-(sen(x))^2}$

Como ejercicio para el estudiante queda deducir la derivada de cos^{-1} y tan^{-1}.

Derivada de $f^{-1}(x) = tan^{-1}(x)$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{sec^2(tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + (tan(tan^{-1}(x)))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

para cualquier x real.

$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ tenemos $1 + tan^2(x) = sec^2(x)$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

En resumen:

$$\frac{d}{dx}(sen^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funciones Hiperbólicas

Funciones Hiperbólicas

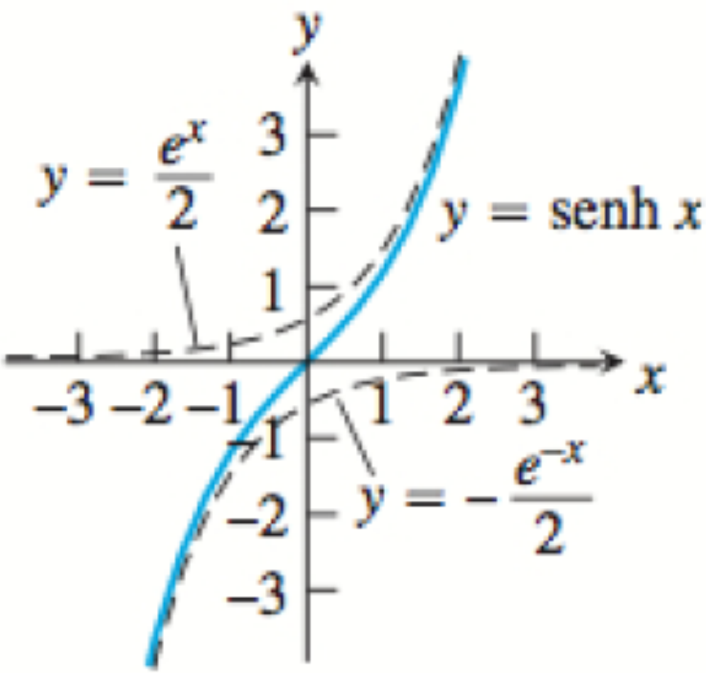
$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La utilidad principal de las funciones hiperbólicas en ingeniería radica en representar de forma concisa expresiones complejas obtenidas en el análisis de vibraciones. También, hay casos de estructuras donde se han usado funciones hiperbólicas para su diseño, como es el caso del Arco Gateway en E.E.U.U. donse se usó el coseno hiperbólico.

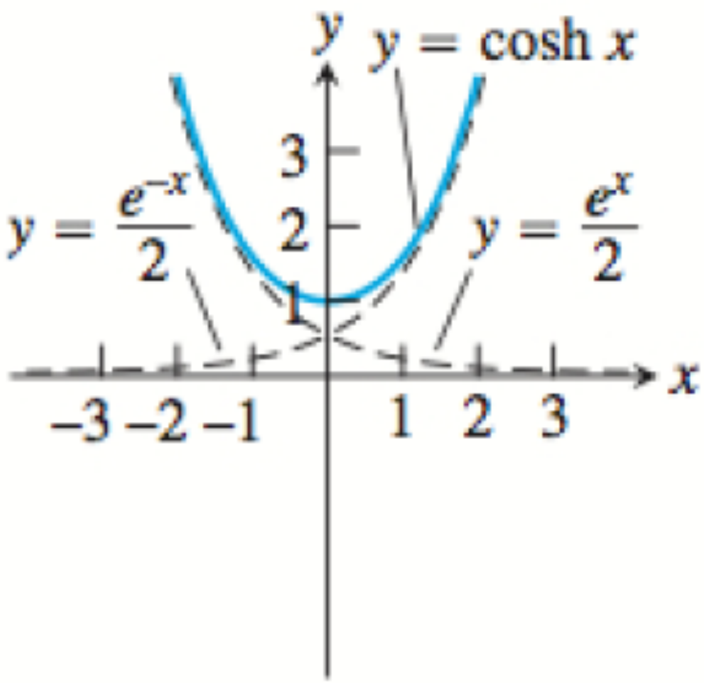
Gráficos de las funciones hiperbólicas



(a)

Seno hiperbólico:

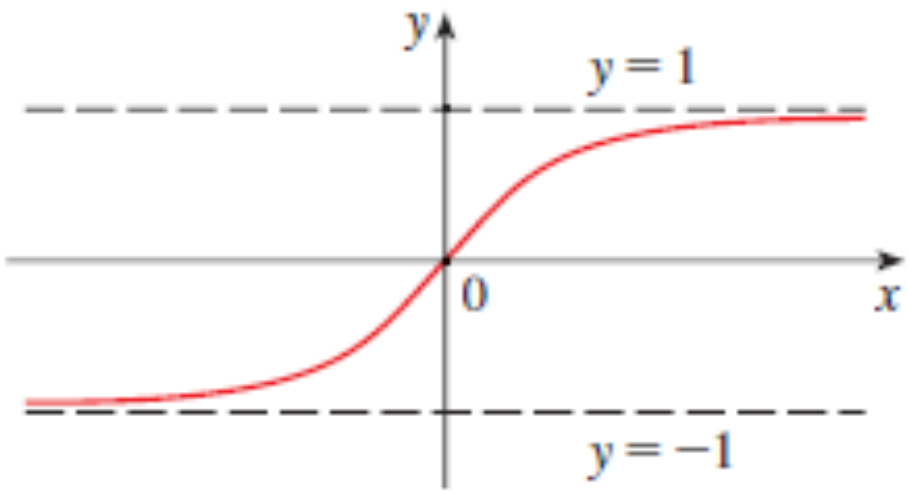
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$y = \tanh x$

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

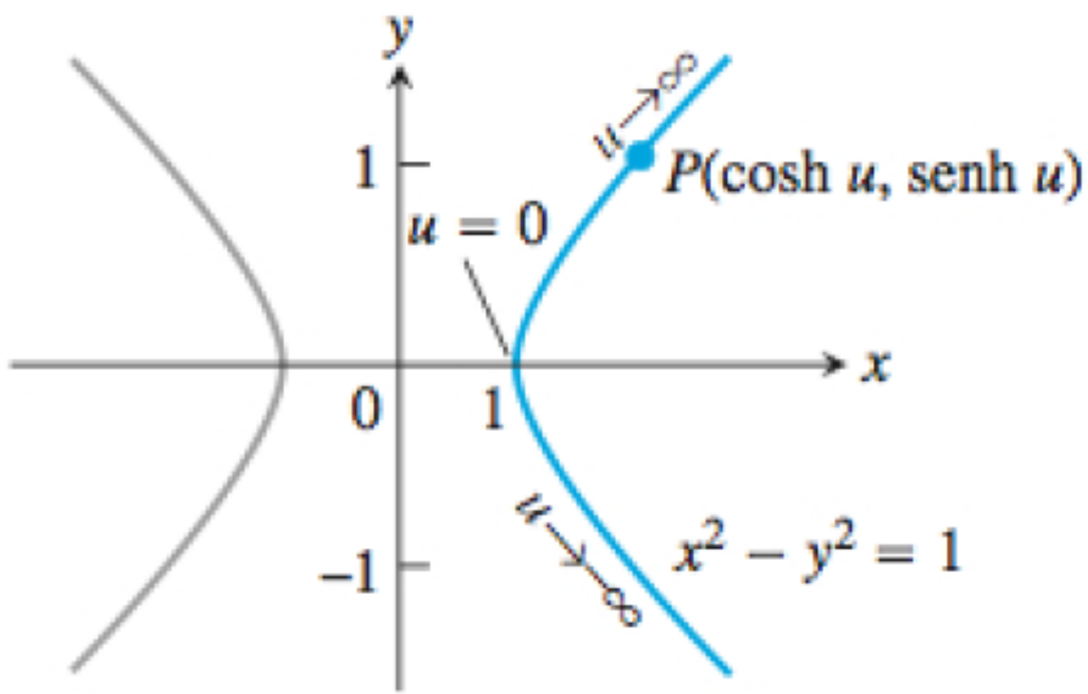
$$\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1$$

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

A partir de la relación:

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

se puede deducir que los puntos $x = cosh(u)$ y $y = senh(u)$ se encuentran en la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Esta es la razón del nombre **funciones hiperbólicas**.



Derivadas de funciones hiperbólicas

Vamos a comenzar con la derivada de la función $y = senh(x)$. A partir de su definición obtenemos:

$$\frac{d}{dx} senh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = cosh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En forma similar se calculan las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(cosh)(x) &= senh(x), \qquad x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}(tanh)(x) &= sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Inversas de funciones hiperbólicas

Derivada de $y = senh^{-1}(x)$. La función $y = senh(x)$ tiene por derivada $y' = cosh(x)$, la cual es positiva. Luego, $y = senh(x)$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva en $\mathbb{R}$. Su inversa:

$$y = senh^{-1}(x)$$

está definida para todo x. Su derivada viene dada por:

$$(senh^{-1})'(x) = \frac{1}{cosh(senh^{-1}(x))}.$$

Usando la relación: $cosh^2(y) - senh^2(y) = 1$, obtenemos:

$$(senh^{-1})'(x) = \frac{1}{cosh(senh^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + senh^2(senh^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La fórmula anterior es válida para toda $x \in \mathbb{R}$.

La función $y = tanh(x)$ tiene por derivada la función $y' = sech^2(x)$ la cual es siempre positiva, por lo tanto $y = tanh(x)$ es injectiva en todo su dominio de definición por ser estrictamente creciente. Su inversa $y = tanh^{-1}(x)$ está definida para todo $x \in (-1, 1)$.

Para obtener la derivada de $y = tanh^{-1}(x)$ procedemos de la siguiente forma:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{tanh'(tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{sech^2(tanh^{-1}(x))} =$$
$$\frac{1}{1 - (tanh(tanh^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$ tenemos $1 - tanh^2(x) = sech^2(x)$

Inversas de funciones hiperbólicas

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas:

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1.$
3. $(tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \ |x| < 1.$

Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+4x^2}} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+4x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2x)^2}}\,dx$$

Si $u = 2x$ tenemos que $du = 2dx$, luego:

$$\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(u)^2}}\,\frac{du}{2} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,du =$$

Si $v = \dfrac{u}{\sqrt{3}}$ tenemos que $dv = \dfrac{du}{\sqrt{3}}$, luego:

$$\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv = senh^{-1}(v)\,\Big|_0^{2/\sqrt{3}} = senh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \simeq 0{,}986$$