Análisis Matemático I
Clase 20: Funciones trascendentes parte II

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2020

Exponenciales generales

Sea $a > 0$. Entonces para todo x real definimos:

$$a^x := e^{x \ln(a)}.$$

Observar que a^x es siempre positiva pues la exponencial lo es.

Función Exponencial general

Exponenciales generales

Sea $a > 0$. Entonces para todo x real definimos:

$$a^x := e^{x ln(a)}.$$

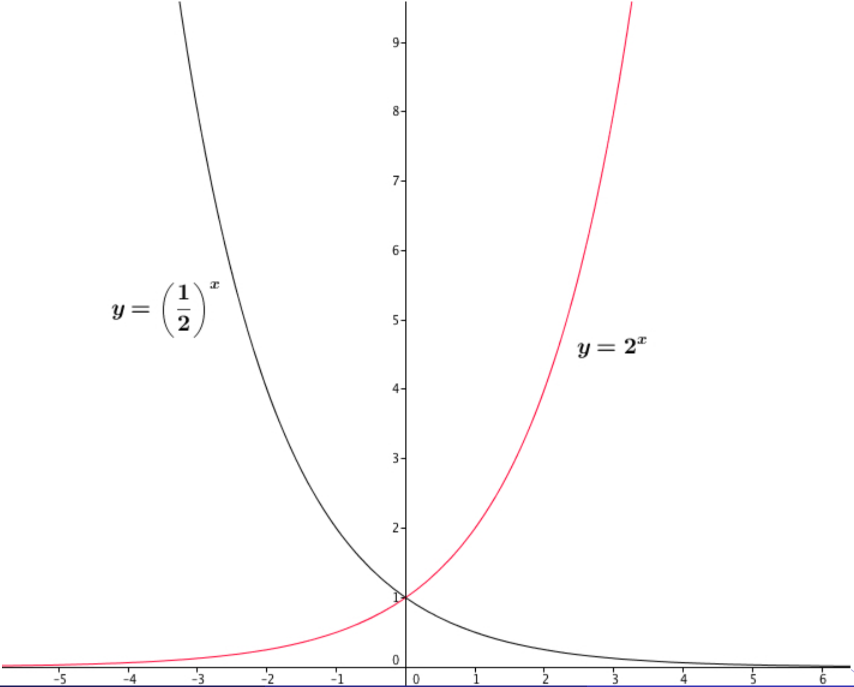
Observar que a^x es siempre positiva pues la exponencial lo es.

Derivada de exponenciales generales

Si $a > 0$, entonces por regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x ln(a)} \cdot ln(a) = ln(a) \cdot a^x.$$

Observación: en base al signo de la derivada, la función $f(x) = a^x$ es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y = 2^x$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

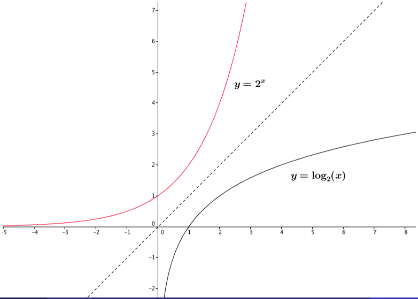
Logaritmos generales

Como puede observarse a partir de las gráficas anteriores, la función a^x es inyectiva.

Logaritmos

Denotamos por $g(x) = log_a(x)$ a la función inversa de a^x. Observar que $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Graficamos la función g utilizando el procedimiento de gráfica de funciones inversas que vimos en la clase anterior:



Logaritmos generales

Si $y = log_a(x)$, se tiene por definición de función inversa:

$$x = a^y = e^{yln(a)}. \qquad (1)$$

Aplicando *ln* a ambos miembros de (1) obtenemos:

$$ln(x) = yln(a)ln(e) = yln(a).$$

Luego:

$$log_a(x) = y = \frac{ln(x)}{ln(a)} \quad \text{(cambio de base).}$$

También, la derivada de $g(x) = log_a(x)$ es:

$$g'(x) = \frac{1}{\ln(a).x}$$

La derivada se puede obtener derivando la expresión de cambio de base o utilizando la fórmula de derivada de funciones inversas que vimos en la clase anterior.

Aplicaciones: Cambio exponencial

- **Las funciones exponenciales aumentan o disminuyen muy rápidamente cuando la variable independiente se modifica**
- **Las funciones exponenciales describen crecimiento o decrecimiento en una amplia variedad de situaciones en ingeniería y computación**

Cambio exponencial

Cambio exponencial. supongamos que $y = y(t)$ mide una determinada cantidad en función del tiempo t. Supongamos además que en el instante inicial $t = 0$ tenemos una cantidad y_0 y que la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t es proporcional a $y(t)$. Así tenemos el siguiente **problema con valor inicial**:

Cambio exponencial

Cambio exponencial. supongamos que $y = y(t)$ mide una determinada cantidad en función del tiempo t. Supongamos además que en el instante inicial $t = 0$ tenemos una cantidad y_0 y que la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t es proporcional a $y(t)$. Así tenemos el siguiente **problema con valor inicial**:

$$\frac{dy}{dt}(t) = ky(t) \qquad \text{(Ecuación diferencial)}$$

$$y(0) = y_0. \qquad \text{(Condición inicial)}$$

Cambio exponencial. supongamos que $y = y(t)$ mide una determinada cantidad en función del tiempo t. Supongamos además que en el instante inicial $t = 0$ tenemos una cantidad y_0 y que la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t es proporcional a $y(t)$. Así tenemos el siguiente **problema con valor inicial**:

$$\frac{dy}{dt}(t) = ky(t) \qquad \text{(Ecuación diferencial)}$$

$$y(0) = y_0. \qquad \text{(Condición inicial)}$$

La solución del problema es: $y(t) = y_0 e^{kt}$. Si $k > 0$, entonces $y = y(t)$ aumenta cuando t aumenta, y si $k < 0$, $y = y(t)$ disminuye cuando t aumenta.

Ejemplos de situaciones de cambio exponencial:

- Ley de enfriamiento de Newton: la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e.

Ejemplos de situaciones de cambio exponencial:

- Ley de enfriamiento de Newton: la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e. En forma de ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = -k(T(t) - T_e), \qquad k > 0$$

con condición inicial $T(0) = T_0$ (temperatura inicial).

Cambio exponencial

Ejemplos de situaciones de cambio exponencial:

- Ley de enfriamiento de Newton: la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e. En forma de ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = -k(T(t) - T_e), \qquad k > 0$$

  con condición inicial $T(0) = T_0$ (temperatura inicial). ¿Por qué se toma $-k$? Explicar.

Ejemplos de situaciones de cambio exponencial:

- Ley de enfriamiento de Newton: la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e. En forma de ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = -k(T(t) - T_e), \qquad k > 0$$

con condición inicial $T(0) = T_0$ (temperatura inicial). ¿Por qué se toma $-k$? Explicar.

Este problema conduce a la relación (sin prueba):

$$T(t) - T_e = (T_0 - T_e)e^{-kt}, \qquad T_0 = T(0).$$

Escrito de otra forma:

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-kt} + T_e.$$

Ejemplos de situaciones de cambio exponencial:

- Ley de enfriamiento de Newton: la tasa de cambio instantánea a la que la temperatura $T(t)$ de un objeto cambia en cualquier instante t es (casi) proporcional a la diferencia entre su temperatura $T(t)$ actual y la temperatura del entorno T_e. En forma de ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt}(t) = -k(T(t) - T_e), \qquad k > 0$$

con condición inicial $T(0) = T_0$ (temperatura inicial). ¿Por qué se toma $-k$? Explicar.

Este problema conduce a la relación (sin prueba):

$$T(t) - T_e = (T_0 - T_e)e^{-kt}, \qquad T_0 = T(0).$$

Escrito de otra forma:

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-kt} + T_e.$$

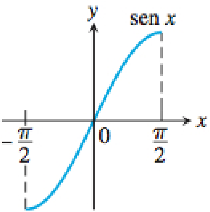
¿Qué pasa con $T = T(t)$ cuando $t \to \infty$? En el trabajo práctico 5 aplicarán estos modelos.

Cambio exponencial

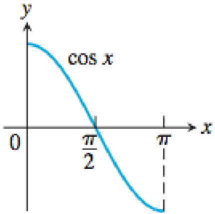
Ejemplos de situaciones de cambio exponencial:

- Otras situaciones donde aparece el cambio exponencial son: radiactividad, orden de complejidad de algoritmos, crecimiento poblacional, descuento continuo en precio, etc.

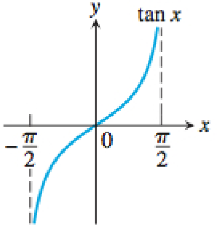
Las siguientes funciones trigonométricas son inyectivas:



$y = \operatorname{sen} x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$

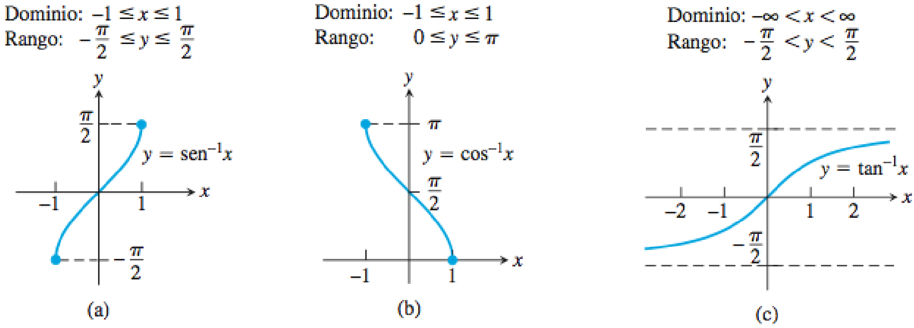


$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

Funciones trigonométricas inversas



Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $f^{-1}(x) = sen^{-1}x$: tomamos $x \in (-1, 1)$ y entonces

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derivada de $f^{-1}(x) = sen^{-1}x$: tomamos $x \in (-1,1)$ y entonces

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(sen^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(sen(sen^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Como ejercicio para el estudiante queda deducir la derivada de cos^{-1} y tan^{-1}.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

En resumen:

$$\frac{d}{dx}(sen^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1})(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1).$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1})(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funciones Hiperbólicas

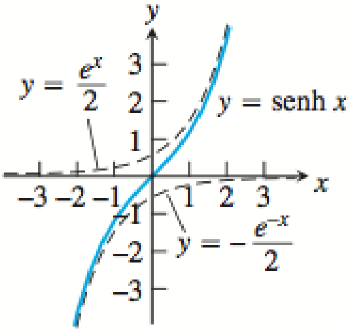
$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La utilidad principal de las funciones hiperbólicas en ingeniería radica en representar de forma concisa expresiones complejas obtenidas en el análisis de vibraciones. También, hay casos de estructuras donde se han usado funciones hiperbólicas para su diseño, como es el caso del Arco Gateway en E.E.U.U. donse se usó el coseno hiperbólico.

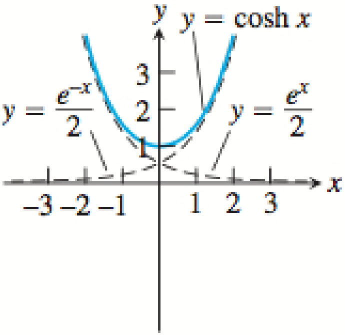
Gráficos de las funciones hiperbólicas



(a)

Seno hiperbólico:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

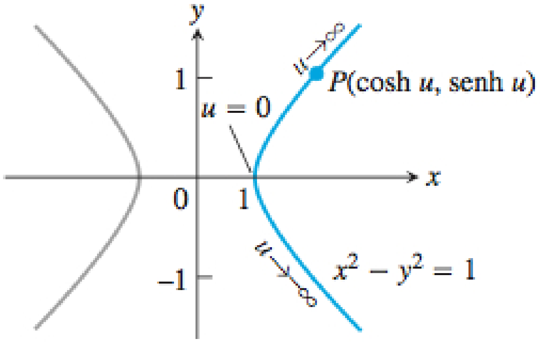
Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A partir de la relación:

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

se puede deducir que los puntos $x = cosh(u)$ y $y = senh(u)$ se encuentran en la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Esta es la razón del nombre **funciones hiperbólicas**.



Derivadas de funciones hiperbólicas

Vamos a comenzar con la derivada de la función $y = senh(x)$. A partir de su definición obtenemos:

$$\frac{d}{dx} senh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = cosh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Derivadas de funciones hiperbólicas

Vamos a comenzar con la derivada de la función $y = senh(x)$. A partir de su definición obtenemos:

$$\frac{d}{dx} senh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = cosh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En forma similar se calculan las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(cosh)(x) = senh(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}(tanh)(x) = sech^2(x) = \frac{1}{cosh^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Derivada de $y = senh^{-1}(x)$. La función $y = senh(x)$ tiene por derivada $y' = cosh(x)$, la cual es positiva. Luego, $y = senh(x)$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva en $\mathbb{R}$. Su inversa:

$$y = senh^{-1}(x)$$

está definida para todo x.

Derivada de $y = senh^{-1}(x)$. La función $y = senh(x)$ tiene por derivada $y' = cosh(x)$, la cual es positiva. Luego, $y = senh(x)$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva en $\mathbb{R}$. Su inversa:

$$y = senh^{-1}(x)$$

está definida para todo x. Su derivada viene dada por:

$$(senh^{-1})'(x) = \frac{1}{cosh(senh^{-1}(x))}.$$

Usando la relación: $cosh^2(y) - senh^2(y) = 1$, obtenemos:

$$(senh^{-1})'(x) = \frac{1}{cosh(senh^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + senh^2(senh^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La fórmula anterior es válida para toda $x \in \mathbb{R}$.

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas:

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \; x > 1.$
3. $(tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \; |x| < 1.$

Inversas de funciones hiperbólicas

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas:

1. $(senh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $(cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.
3. $(tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

Usando las derivadas anteriores, se pueden calcular integrales de la forma:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+4x^2}}dx =$$