SUPERFICIES

Respuestas Ejercicio 105 a 118

105. Dada la ecuación de la *superficie esférica*: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$.

a) Indique las coordenadas del centro y radio.

b) Determine la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto A($\sqrt{3}$– 1 , 1 , 1) .

Respuesta:

a) Para encontrar las coordenadas del centro y del radio, debemos llevar la ecuación de la superficie a la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$. Para ello, agrupamos los términos según las variables *x,y,z* y completamos cuadrados:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) + (z^2 - 6z + 9 - 9) - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

De la ecuación obtenida se deduce que en centro es C(-1,-2,3) y el radio r=4

b) Si el punto A es un punto perteneciente a la esfera, el vector normal del plano tangente será un vector paralelo al vector ***CA***. Verificamos entonces que el punto A sea un punto de la esfera reemplazando sus coordenadas en la ecuación, y verificando que se cumpla la igualdad:

$$\left(\sqrt{3} - 1 + 1\right)^2 + (1+2)^2 + (1-3)^2 = 3 + 3^2 + (-2)^2 = 3 + 9 + 4 = 16$$

Dado que el punto A pertenece a la esfera, obtenemos el vector normal al plano tangente como:

$$\boldsymbol{n} = k\boldsymbol{CA}$$

Por simplicidad, tomamos *k=1*, entonces:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{OA} - \boldsymbol{OC} = \left(\sqrt{3} - 1,1,1\right) - (-1,-2,3) = \left(\sqrt{3}, 3, -2\right)$$

Escribimos la ecuación del plano con vector normal ***n*** y que pasa por el punto A:

$$\pi\colon\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{AP} = 0$$

$$\left(\sqrt{3}, 3, -2\right) \cdot \left(x - \sqrt{3} + 1, y - 1, z - 1\right) = 0$$

$$\pi\colon\ \sqrt{3}x + 3y - 2z - 4 + \sqrt{3} = 0$$

106. a) Dado el *casquete esférico* $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$, con z ≥0, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano -y + z - 3 = 0. Grafique.

b) Indique la ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica cuya intersección con el casquete esférico es la curva encontrada en el inciso anterior. Represente gráficamente.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano *xy* de la curva hallada en el inciso (a). Grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

Respuesta:

a) Obtenemos la intersección entre ambas superficies (casquete esférico y plano), analizando la solución del sistema de ecuaciones que comprende las ecuaciones de ambos lugares geométricos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ -y + z - 3 = 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Despejamos la variable z de la segunda ecuación, $z = y + 3$, y reemplazamos dicha expresión en la primera ecuación:

$$x^2 + y^2 + (y + 3 - 1)^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 + (y + 2)^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 + y^2 + 4y + 4 = 9$$
$$x^2 + 2y^2 + 4y + 4 = 9$$

Observamos que la expresión corresponde a una elipse en términos de x e y (que está contenida en el plano $-y + z - 3 = 0$). Llevamos la ecuación a la forma cartesiana para identificar sus elementos:

$$x^2 + 2(y^2 + 2y + 1 - 1) + 4 = 9$$
$$x^2 + 2(y + 1)^2 - 2 + 4 = 9$$
$$x^2 + 2(y + 1)^2 = 7$$
$$\frac{x^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{7/2} = 1$$

La elipse tiene semiejes $a = \sqrt{7}$ y $b = \sqrt{7/2}$. Las coordenadas en x e y del centro (h y k) se obtienen por observación de la ecuación: h=0 y k= -1. Teniendo en cuenta que se trata de una elipse en el plano $-y + z - 3 = 0$, la coordenada en z del centro (l)se obtiene de la expresión $z = y + 3$, dando a la variable y el valor $k = -1$. Las coordenadas del centro por lo tanto son: C(0,-1,2).

Ahora podemos parametrizar a la curva solución, obteniendo expresiones para x, y y z en función de un parámetro. Como se trata de una elipse en las variables x e y, utilizamos la parametrización ya estudiada en términos del parámetro θ, para estas dos variables Para parametrizar la componente en z, usamos la expresión $z = y + 3$, ya que la elipse está en dicho plano. En esta expresión para la variable z reemplazamos la expresión parametrizada de y. Es decir:

$$\begin{cases} x = \sqrt{7}cos\theta \\ y = \sqrt{7/2}sen\theta - 1 \;\; ; \; \theta\epsilon[0,2\pi) \\ z = \sqrt{7/2}sen\theta + 2 \end{cases}$$

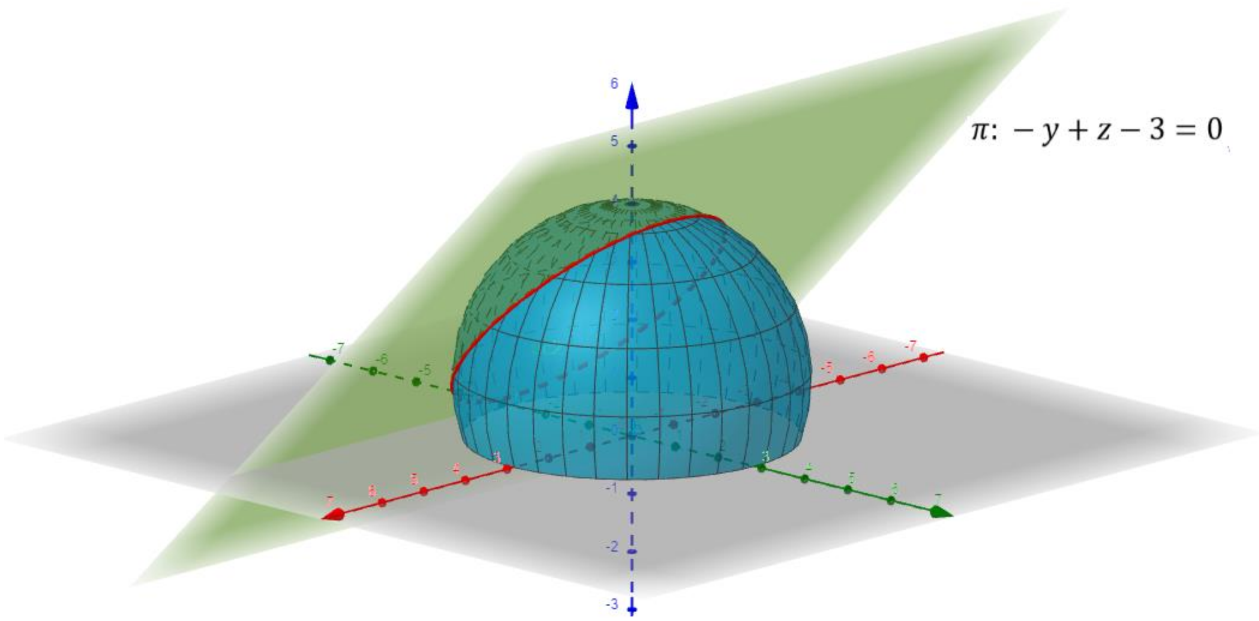
Respecto a la restricción $z \geq 0$ dada al inicio, observamos que la variable z en la parametrización obtenida varía entre dos valores positivos: $z_{Max} = 2 + \sqrt{7/2}$ cuando θ= $\pi/2$ y $z_{min} = 2 - \sqrt{7/2} \approx 0.13$ para θ= $3\pi/2$. Teniendo en cuenta que ambos son valores positivos, no es necesario restringir el intervalo de variación del parámetro. Es decir, verificamos que se cumple la condición $z \geq 0$, para $\theta\epsilon[0,2\pi)$

Por último, llevamos las ecuaciones cartesianas paramétricas a la forma vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = \left(\sqrt{7}cos\theta\ ,\ \sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta - 1\ ,\qquad \sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta + 2\right)\ ;\ \theta\epsilon[0,2\pi)$$

O bien:

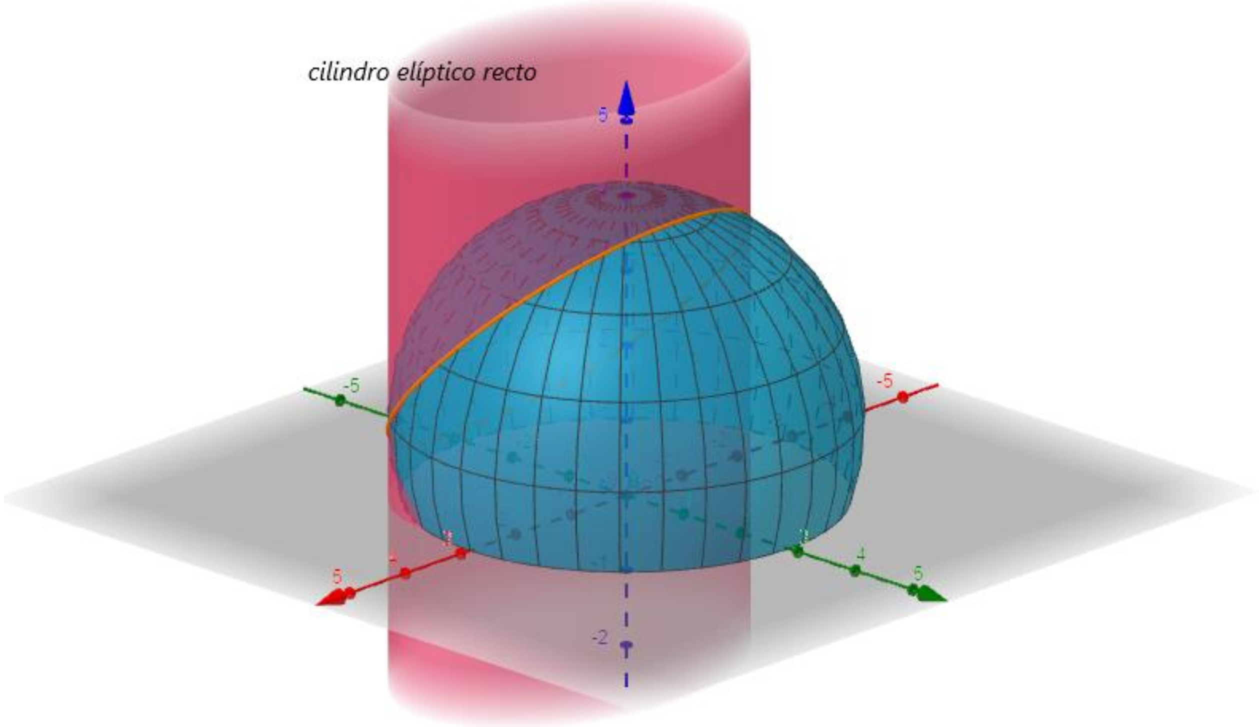
$$(x, y, z) = (\,0, -1,2) + (\sqrt{7}cos\theta\ ,\ \sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta\ ,\qquad \sqrt{\frac{7}{2}}sen\theta\ )\ ;\theta\epsilon[0,2\pi)$$



b) Hay infinitas superficies cilíndricas que intersecan al casquete esférico en la curva encontrada. Sin embargo, podemos encontrar fácilmente un *cilindro elíptico recto*, paralelo al eje *z*, cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{7/2} = 1$$

En esta ecuación, la variable *z* es libre, por lo tanto, la superficie es paralela al eje z.



Observación: La diferencia que existe entre la ecuación del cilindro y la ecuación de la curva elíptica, es que para la segunda tenemos la restricción $z = y + 3$. Es decir, la expresión para la curva elíptica es:

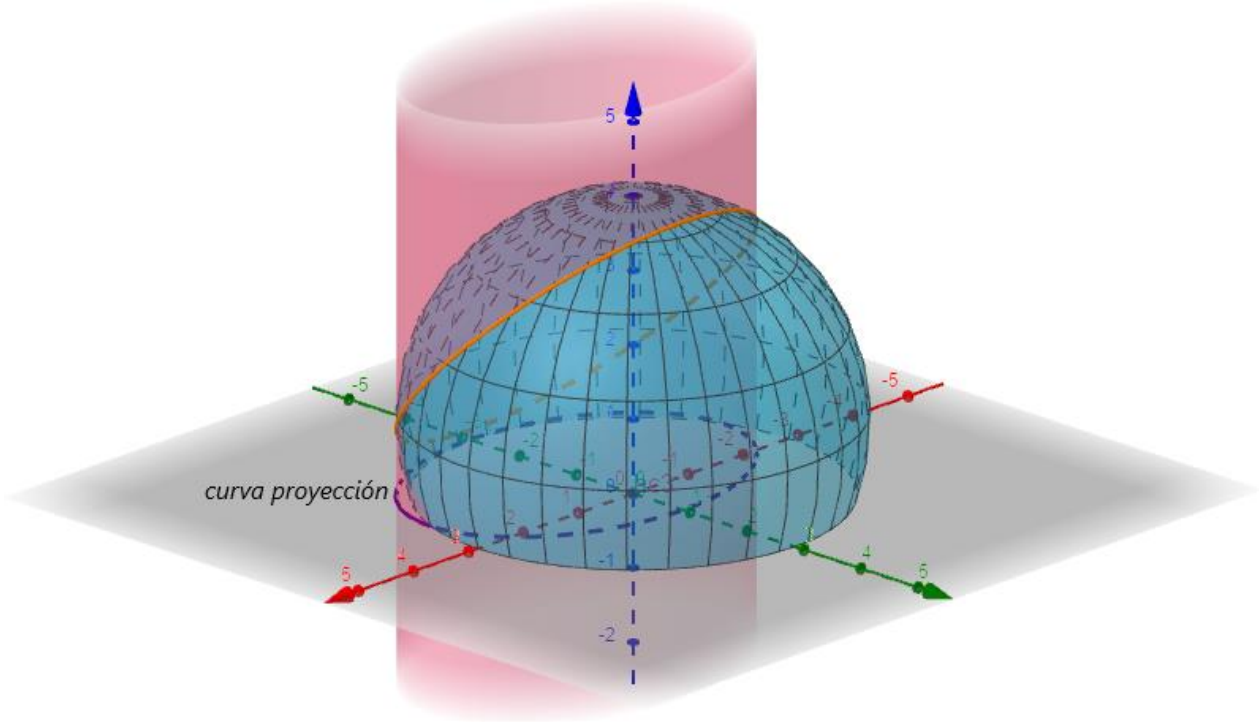
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{7/2} = 1 \\ z = y + 3 \end{cases}$$

c) Para proyectar la curva sobre el plano xy, basta con anular la componente en z, entonces:

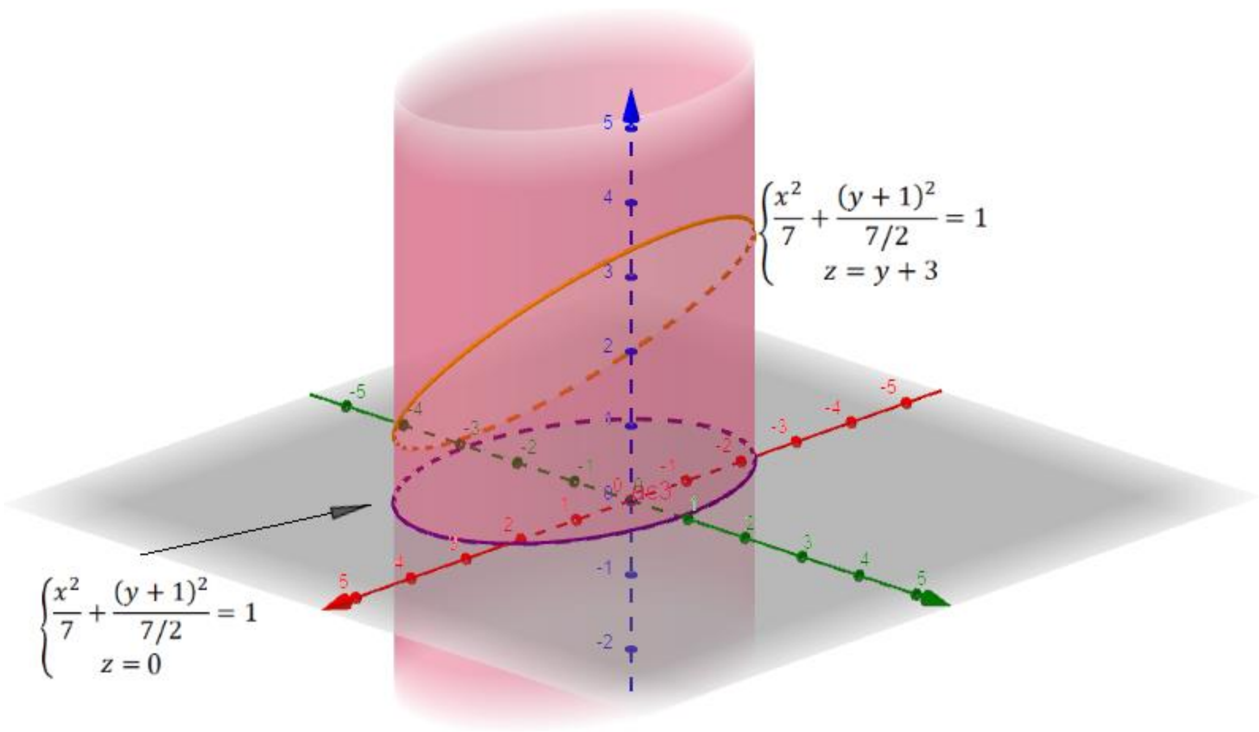
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{7/2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

La ecuación vectorial paramétrica es:

$$(x, y, z) = (0, -1, 0) + \left(\sqrt{7} cos\theta, \sqrt{7/2} sen\theta, 0\right) \ ; \ \theta \epsilon [0, 2\pi)$$



Para una mejor visualización de la curva proyectada, podemos ocultar el casquete esférico:



107. Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* que tiene como directriz la cónica $\begin{cases}(y-1)^2 = 8z \\ x = 0\end{cases}$ y generatrices paralelas al vector **v** = (1, 1, 2). Realice un gráfico cualitativo.

Respuesta:

Escribimos la ecuación vectorial de una recta generatriz: $\boldsymbol{PP'} = k\boldsymbol{v}$, donde *P(x,y,z)* es un punto genérico y *P´(x´,y´,z´)* es el punto donde la recta generatriz interseca a la directriz.

Escribimos las ecuaciones simétricas de dciha recta generatriz:

$$\frac{x-x'}{1} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z-z'}{2} \qquad (1)$$

Como P´ pertenece a la directriz, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$\begin{cases}(y'-1)^2 = 8z' \\ x' = 0\end{cases} \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2), obtenemos las coordenadas de P´ en función de las coordenadas de P

$$x = y - y' \quad \rightarrow \quad y' = y - x \quad (3)$$

$$x = \frac{z-z'}{2} \quad \rightarrow \quad z' = z - 2x \quad (4)$$

Reemplazamos (3) y (4) en (2) para obtener la ecuación de la superficie cilíndrica:

$$(y-x-1)^2 = 8(z-2x)$$

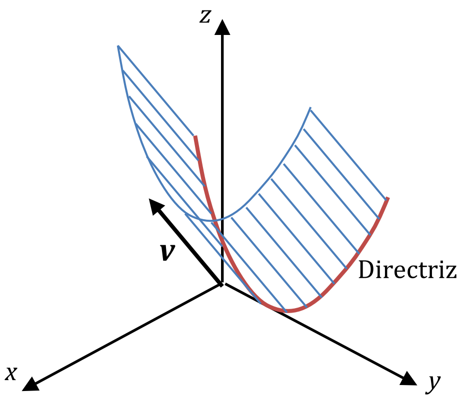
Esta es una ecuación de segundo grado en tres variables, por lo tanto, corresponde a la superficie. Desarrollando los términos e igualando a cero la llevamos a la forma general:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 18x - 2y - 8z + 1 = 0$$

La presencia del término rectangular (-2*xy*) se debe a que la superficie está rotada respecto de los ejes coordenados. Esto se debe a que el vector ***v*** paralelo a las generatrices no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del vértice de la curva directriz respecto del origen de coordenadas.

Gráfico Cualitativo:

Para la realización del gráfico cualitativo, tenemos en cuenta qué tipo de curva es la directriz: se trata de una parábola contenida en el plano *yz*. Su vértice está en el punto (0,1,0), por lo tanto, debe ubicarse sobre el eje *y*. El parámetro de la parábola es positivo, entonces, sus ramas se abren hacia arriba. Por otro lado, graficamos el vector ***v*** cuyas componentes son todas positivas. A partir de la directriz trazamos rectas paralelas al vector ***v***, las cuales representan diferentes posiciones de la generatriz y constituyen a la superficie (tener en cuenta que sólo graficamos una porción de la superficie, pero la misma es infinita).



108. Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $\begin{cases}(x-2)^2+(z-1)^2=16\\ y=0\end{cases}$

y su vértice es el punto V(0, 7, 0). Realice un gráfico cualitativo.

Respuesta:

Escribimos la ecuación vectorial de una recta generatriz: $\boldsymbol{VP}=k\boldsymbol{VP'}$, donde *P(x,y,z)* es un punto genérico y *P´(x´,y´,z´)* es el punto donde la recta generatriz interseca a la directriz.

Escribimos la ecuación en términos de las componentes de los vectores:

$$(x-0, y-7, z-0)=k(x'-0, y'-7, z'-0)$$

Escribimos las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y-7}{y'-7}=\frac{z}{z'} \quad (1)$$

Como P´ pertenece a la directriz, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$\begin{cases}(x'-2)^2+(z'-1)^2=16\\ y'=0\end{cases} \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2), obtenemos las coordenadas de P´ en función de las coordenadas de P

$$\frac{x}{x'}=\frac{y-7}{-7} \quad \rightarrow \quad x'=\frac{-7x}{y-7} \quad (3)$$

$$\frac{z}{z'}=\frac{y-7}{-7} \quad \rightarrow \quad z'=\frac{-7z}{y-7} \quad (4)$$

Reemplazamos (3) y (4) en (2) para obtener la ecuación de la superficie cónica:

$$\left[\left(\frac{-7x}{y-7}\right)-2\right]^2+\left[\left(\frac{-7z}{y-7}\right)-1\right]^2=16$$

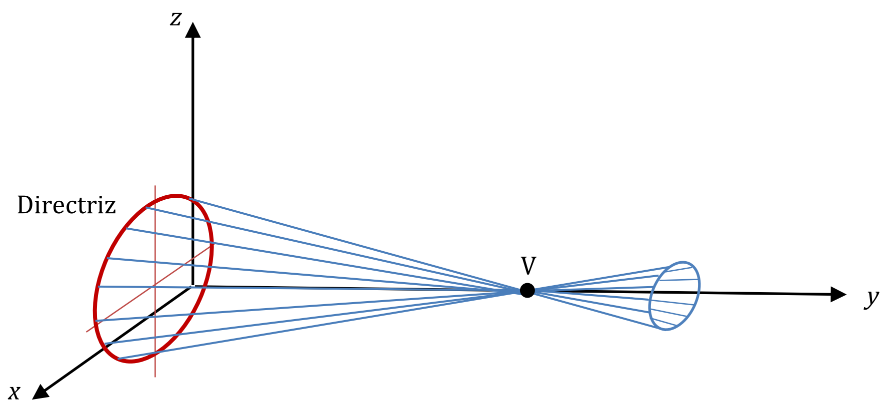
Esta es una ecuación de segundo grado en tres variables, por lo tanto, corresponde a la superficie. Desarrollando los términos e igualando a cero la llevamos a la forma general:

$$49x^2-11y^2+49z^2+28xy+14yz-196x+154y-98z-539=0$$

La presencia de los términos rectangulares $(28xy; 14yz)$ se debe a que el eje de la superficie cónica está rotado respecto de los ejes coordenados. Esto es así, ya que le vector que une el centro de la curva directriz con el vértice de la superficie cónica, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del centro de la curva directriz respecto del origen de coordenadas.

Gráfico Cualitativo:

Para la realización del gráfico cualitativo, tenemos en cuenta qué tipo de curva es la directriz: se trata de una circunferencia contenida en el plano *xz*. Su centro está en el punto (2,0,1), por lo tanto, no está centrada en el origen. El radio de la circunferencia es r=4, entonces la misma cortará al eje *x* y al eje *z*. Por otro lado, graficamos el vértice V de la superficie cónica, que en este caso se ubica sobre el eje *y*. A partir de la directriz trazamos rectas que pasan por el punto V, las cuales representan diferentes posiciones de la generatriz y constituyen a la superficie (tener en cuenta que sólo graficamos una porción de la superficie, pero la misma es infinita). Observamos que el eje de la superficie cónica (recta que pasa por el centro de la curva directriz y por el vértice de la superficie cónica=, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados.



109. a) Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es:

$$\begin{cases} 36(x-4)^2 + 16(y+6)^2 = 576 \\ z = 0 \end{cases}$$

y su vértice es el punto V(0, 0, 8). (no es necesario desarrollar la última expresión).

b) Sea la recta $L: (x, y, z) = (6, 0, -4) + t(1, 0, -2)$; $t \in \mathbb{R}$. Indique si la recta L está contenida o no en la superficie. Justifique su respuesta.

c) Indique la ecuación vectorial paramétrica del eje de la superficie cónica y determine el ángulo que forma dicho eje con el plano *xy*.

d) Realice un gráfico cualitativo.

Respuesta:

a) Escribimos la ecuación vectorial de una recta generatriz:

$$\boldsymbol{VP} = k\boldsymbol{VP'}$$

$$(x-0, y-0, z-0) = k(x'-0, y'-0, z'-8)$$

Escribimos las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z-8}{z'-8} \qquad (1)$$

Como P´ pertenece a la directriz, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$\begin{cases} 36(x'-4)^2+16(y'+6)^2=576 \\ z'=0 \end{cases} \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2), obtenemos las coordenadas de P´ en función de las coordenadas de P

$$\frac{x}{x'}=\frac{z-8}{-8} \to x'=\frac{-8x}{z-8} \quad (3)$$
$$\frac{y}{y'}=\frac{z-8}{-8} \to y'=\frac{-8y}{z-8} \quad (4)$$

Reemplazamos (3) y (4) en (2) para obtener la ecuación de la superficie cónica:

$$36\left[\left(\frac{-8x}{z-8}\right)-4\right]^2+16\left[\left(\frac{-8y}{z-8}\right)+6\right]^2=576$$

De acuerdo a la consigna no es necesario desarrollar la última expresión. Sin embargo, podemos anticipar si aparecerán o no términos de productos cruzados y términos lineales. Observamos que el vector que une el centro de la curva directriz con el vértice de la superficie cónica, no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados, por lo tanto el eje de la superficie cónica (recta que pasa por el centro de la curva directriz y por el vértice de la superficie cónica) no es paralelo algún eje coordenado, es decir, la superficie cónica está girada o rotada respecto de los ejes coordenados y aparecerán términos de producto cruzado en su ecuación general. La presencia de términos lineales está asociada al desplazamiento del vértice de la superficie cónica respecto del origen de coordenadas.

b) Una recta estará contenida en la superficie, si es una de las generatrices de la misma. En ese caso, la recta pasará tanto por el punto V como por algún punto de la curva directriz.

Verificamos si la recta L pasa por el punto V reemplazando sus coordenadas en la ecuación de la recta, y comprobando que exista un valor de t que satisfaga simultáneamente las expresiones para las componentes *x, y* y *z*:

$$L: \begin{cases} x=6+t \\ y=0 \\ z=-4-2t \end{cases} \quad ; t\epsilon\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 0=6+t & \to t=-6 \\ 0=0 & \\ 8=-4-2t & \to t=-12/6=-6 \end{cases}$$

El valor $t=-6$ permite obtener las coordenadas de V en la ecuación de L, por lo tanto, V es un punto de L.

Verificamos ahora que la recta L tenga intersección con la directriz. Para ello, verificamos que exista solución para el sistema de ecuaciones que comprende las ecuaciones de L y la directriz.

$$\begin{cases} x = 6 + t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ z = -4 - 2t & (3) \\ 36(x-4)^2 + 16(y+6)^2 = 576 & (4) \\ z = 0 & (5) \end{cases}$$

De (3) y (5) obtenemos $t = -2$. Con dicho valor obtenemos el punto (4,0,0). Reemplazando en (4) tenemos:

$$36(4-4)^2 + 16(0+6)^2 = 16 * 36 = 576$$

Es decir que la intersección entre L y la directriz es el punto (4,0,0). Entonces concluimos que la recta L está contenida en la superficie.

Otra forma de resolución:

Podemos verificar que el punto P_0(6,0,-4) de la recta pertenezca también a la superficie (es decir que sus coordenadas satisfagan la ecuación de la superficie). Luego, verificar que el vector $\mathbf{P_0V}$ sea paralelo al vector director de la recta. Si se cumplen ambas condiciones, la recta estará contenida en la superficie.

Reemplazamos las coordenadas de P_0(6,0,-4) en la ecuación de la superficie, y verificamos que se cumple la igualdad:

$$36\left[\left(\frac{-8*6}{-4-8}\right) - 4\right]^2 + 16\left[\left(\frac{-8*0}{-4-8}\right) + 6\right]^2 = 36*0 + 16*36 = 576$$

Ahora obtenemos el vector $\boldsymbol{P_0V} = \big(0-6, 0-0, 8-(-4)\big) = (-6,0,12)$

Observamos que $\boldsymbol{P_0V} = -6(1,0,-2)$, por lo tanto, es paralelo al vector director de L. Entonces, concluimos que la recta L está contenida en la superficie.

Otra forma de resolución:

Verificar que todo punto de la recta L pertenece a la superficie cónica. Para ello, de la ecuación vectorial paramétrica, obtenemos las ecuaciones cartesianas paramétricas. Luego sustituimos las expresiones correspondientes a las variables *x, y, z* que dependen del parámetro t, en la ecuación obtenida para la superficie cónica. Si la recta está contenida en la superficie, todos sus puntos deben satisfacer su ecuación, por lo tanto, debe verificarse la ecuación para todo valor del parámetro *t*, obteniéndose una identidad.

c) El *eje de la superficie cónica* es la recta que pasa por el vértice V y por el centro de la curva directriz, que es el punto C(4,-6,0). El vector director de la misma está dado por $\boldsymbol{CV} = (-4,6,8)$, entonces podemos escribir la ecuación vectorial paramétrica como:

$$(x,y,z) = (4,-6,0) + k(-4,6,8) \quad ; k\epsilon\mathbb{R}$$

Determinamos el ángulo entre el eje de la superficie y el plano *xy* mediante $\alpha = 90° - \theta$, siendo θ el ángulo entre $\boldsymbol{VC}$ y el versor $\breve{\boldsymbol{k}}$, que es el vector normal al plano *xy*.

$$\theta = arcos\left(\frac{\boldsymbol{CV}\cdot\breve{\boldsymbol{k}}}{\|\boldsymbol{CV}\|\|\breve{\boldsymbol{k}}\|}\right) = arcos\left(\frac{8}{\sqrt{116}}\right) \approx 42°$$

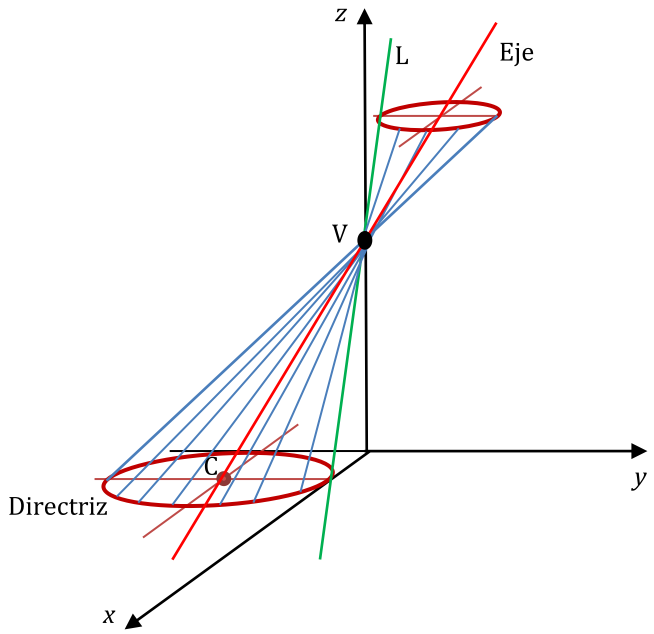
$$\alpha = 90° - \theta \approx 48°$$

d) ***Gráfico Cualitativo***: Para realizar el gráfico, tenemos en cuenta que la directriz de la superficie es una elipse en el plano *xy*. Llevamos su ecuación a la forma cartesiana para identificar su centro y su eje focal.

$$\begin{cases} \dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y+6)^2}{36} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

El centro de la elipse es C(4,-6,0), sus semiejes son $a = 6$ y $b = 4$, con eje focal paralelo al eje *y*.

El vértice de la superficie es el punto V(0,0,8), por lo tanto debe ubicarse sobre el eje *z*.



110. a) Determine la ecuación de la *superficie de revolución* que tiene por generatriz una elipse en el plano *xz*, de semiejes a=5 y b=2 con centro en el origen de coordenadas y eje de revolución el eje x. b) Realice un gráfico cualitativo. c) Verifique su respuesta con el software GeoGebra, utilizando el comando Superficie.

Respuesta:

a) Como paso inicial, escribimos la ecuación de la generatriz. En este caso no se aclara si el eje focal de la elipse es el eje *x* o el *z*, por lo tanto, hay dos respuestas posibles. En este desarrollo utilizaremos el eje focal sobre el eje *x*.

Generatriz:

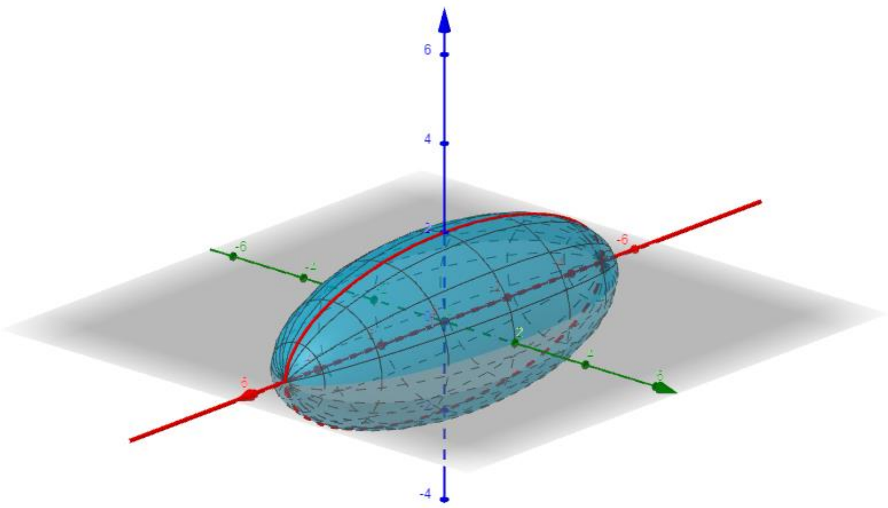
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Eje de revolución: eje *x*

Siguiendo con el procedimiento desarrollado en las páginas 176 y 177 del libro *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*, identificamos la variable z (que no se anula en la ecuación de la generatriz y que tampoco se mide en el eje de revolución) y la reemplazamos por $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ en la ecuación de la generatriz, para obtener la ecuación de la superficie de revolución:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$$

b)



111. a) Se desea construir una cubierta de generatriz semielíptica para un centro deportivo, que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 30m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro deportivo. Grafique.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva de intersección de la cubierta del estadio deportivo, con un plano horizontal a 10 metros de altura.

Respuesta:

a) Dado que el espacio a cubrir es circular, la cubierta será una superficie de revolución con eje de revolución vertical, es decir el eje z. Elegimos un sistema coordenado cuyo origen se ubica sobre el centro del espacio circular. Escribimos la ecuación de la generatriz a partir de los datos indicados en el problema: es una semielipse contenida en el plano xz, con eje focal horizontal (sobre eje x), semiejes a=60 y b=30. La misma se encuentra centrada respecto al origen:

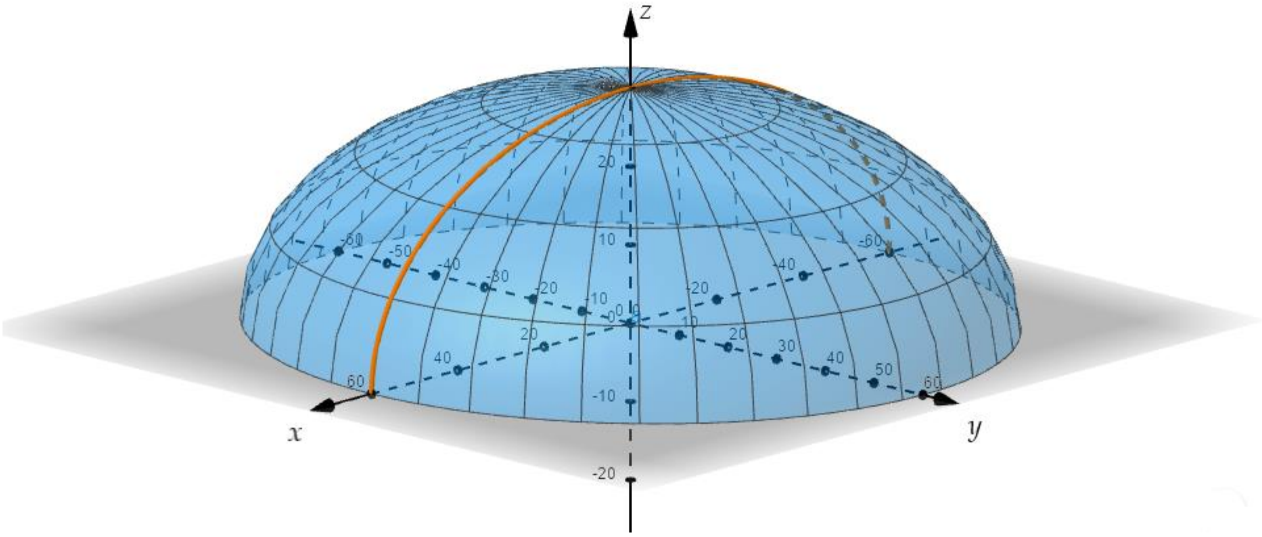
$$G:\begin{cases}\dfrac{x^2}{60^2}+\dfrac{z^2}{30^2}=1 \quad ,z\geq 0\\ y=0\end{cases}$$

Colocamos la restricción $z\geq 0$ dado que se trata de una semielipse: la porción de la elipse que queda sobre el plano xy.

La variable que no se anula en dicha expresión, y que no se mide en el eje de revolución es x, la reemplazamos por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$

La ecuación de la cubierta es:

$$\frac{x^2}{60^2}+\frac{y^2}{60^2}+\frac{z^2}{30^2}=1 \quad ,z\geq 0$$



b) La ecuación de un plano horizontal a 10m de altura es $z=10$. Obtenemos la intersección mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{60^2}+\dfrac{y^2}{60^2}+\dfrac{z^2}{30^2}=1\\ z=10\end{cases}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, tenemos:

$$\frac{x^2}{60^2}+\frac{y^2}{60^2}=1-\frac{10^2}{30^2}=\frac{8}{9}$$

$$x^2+y^2=\frac{8}{9}60^2=3200$$

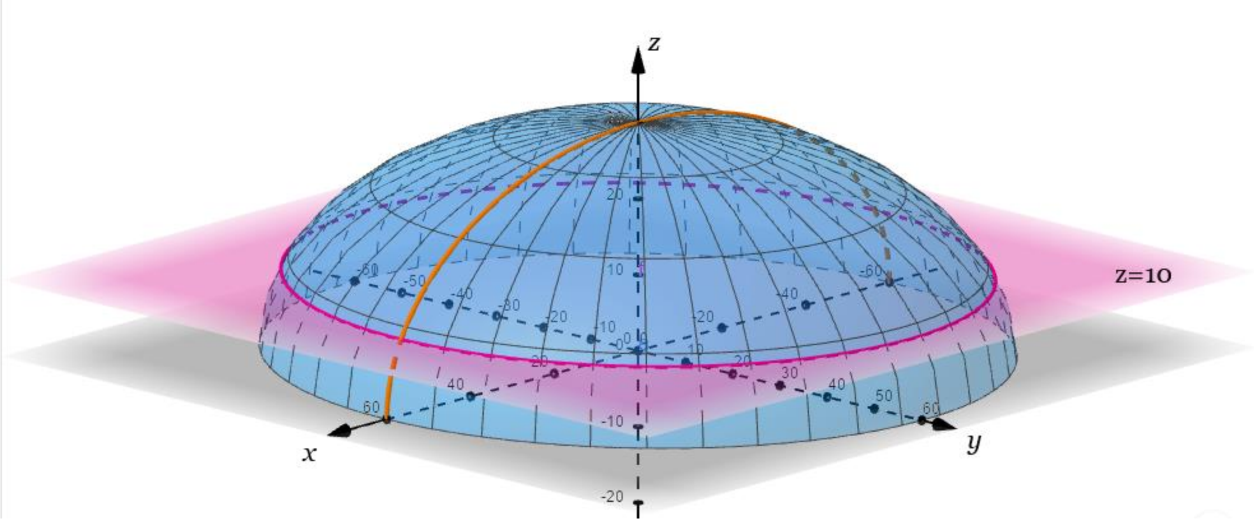
Es decir, tenemos una circunferencia centrada en el eje z, de radio $r=40\sqrt{2}$, contenida en el plano $z=10$.

La ecuación vectorial paramétrica de dicha curva será:

$$(x,y,z)=\left(40\sqrt{2}cos\theta\,,40\sqrt{2}sen\theta\,,10\right)\ ,\theta\epsilon[0,2\pi)$$

o bien:

$$(x,y,z)=(0,0,10)+\left(40\sqrt{2}cos\theta\,,40\sqrt{2}sen\theta\,,0\right)\ ,\theta\epsilon[0,2\pi)$$



112. Una torre de enfriamiento de una central nuclear se ha diseñado a partir de un hiperboloide de revolución de 1 hoja de 60 m de altura, con eje de rotación vertical. Se sabe que la garganta tiene un diámetro de 30 m y se encuentra en un plano situado a 40 m de la base del hiperboloide donde el mismo tiene un diámetro de 142,4 m. a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la superficie que describe la torre de enfriamiento dada. b) Grafique. c) Verifique su respuesta con el software Geogebra.

Respuesta:

a) Elegimos un sistema coordenado tal que el plano *xy* coincide con el plano del terreno, y el eje z se ubica sobre el eje del hiperboloide. La garganta (la parte más estrecha del hiperboloide) indica la altura del centro de la superficie, por lo tanto, las coordenadas de dicho punto son C(0;0;40). Como es un hiperboloide de revolución, de una hoja, y con eje sobre el eje z, su ecuación estará dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{(z-40)^2}{c^2}=1$$

Para conocer los valores a y c, buscamos puntos de coordenadas conocidas que pertenezcan a la superficie, reemplazamos sus coordenadas en la ecuación y despejamos dichos valores.
Ubicamos un punto situado sobre la garganta, por ejemplo A(15;0;40), y otro situado en la base, por ejemplo B(71,2 ;0;0). Debemos tener en cuenta que los datos del problema indican diámetros (de la garganta y de la base). Como el eje *z* está centrado, las coordenadas en *x* de los puntos corresponden al radio y no al diámetro:

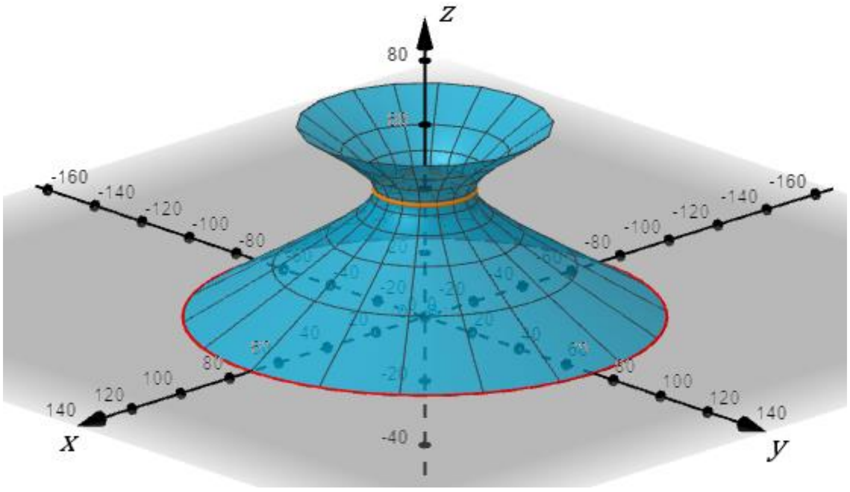
$$A(15{,}0{,}40)\ \rightarrow\ \frac{15^2}{a^2}+\frac{0^2}{a^2}-\frac{(40-40)^2}{c^2}=1\quad\Rightarrow a^2=15^2\qquad a=15$$

$$B(71{,}2\ ;\ 0\ ;\ 0)\ \rightarrow\ \frac{71{,}2^2}{15^2}+\frac{0^2}{15^2}-\frac{(0-40)^2}{c^2}=1\quad\Rightarrow c^2=\frac{40^2\,.\,15^2}{71{,}2^2-15^2}\approx 74.3\qquad c\approx 8{,}6$$

La ecuación de la superficie es:

$$\frac{x^2}{15^2}+\frac{y^2}{15^2}-\frac{(z-40)^2}{8{,}6^2}=1\ \ ;\ \ 0\leq z\leq 60$$

b)



113. Dada la ecuación $\frac{(x)^2}{25}+\frac{(y)^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (trazas) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

Respuesta:

a) <u>Intersecciones con los ejes</u>

- Intersección con el eje x

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 & \rightarrow x=\pm 5 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Las intersecciones con el eje *x* son los puntos A(5,0,0) y B(-5,0,0)

- Intersección con el eje *y*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 & \rightarrow y=\pm 3 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Las intersecciones con el eje *y* son los puntos C(0,3,0) y D(0,-3,0)

- Intersección con el eje *z*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 & \rightarrow z^2=-36 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Sin solución. La superficie no tiene intersección con el eje *z*.

<u>Trazas</u>

- Traza en el plano *xy* $(z=0)$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

La traza en el plano *xy* es una elipse centrada de semiejes *a*=5 y *b*=3, con eje focal sobre el eje *x*.

- Traza en el plano xz $(y=0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$$

La traza en el plano xz es una hipérbola centrada de semiejes a=5 y b=6, con eje focal sobre el eje x.

- Traza en el plano yz $(x=0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1 \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$$

La traza en el plano yz es una hipérbola centrada de semiejes a=3 y b=6, con eje focal sobre el eje y.

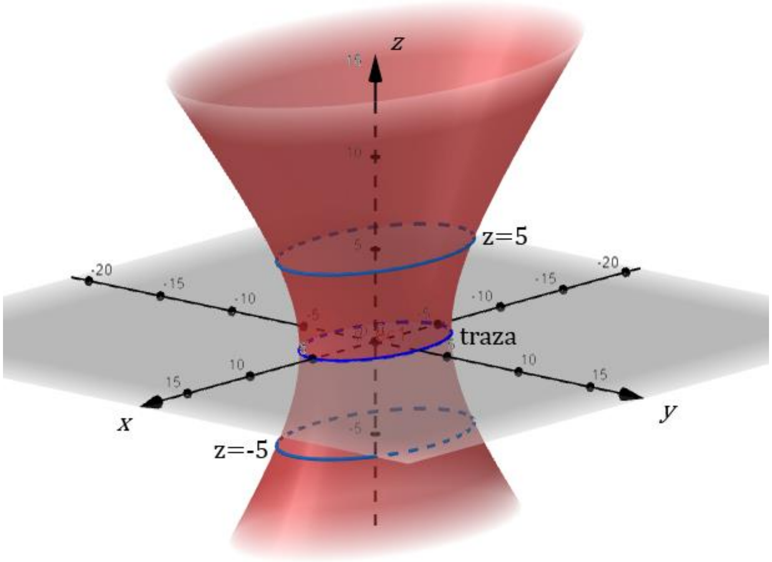
<u>Intersección con planos paralelos a los coordenados</u>

- Intersección con planos paralelos al plano xy $(z=k)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1 \\ z=k \end{cases} \Longrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1+\frac{k^2}{36}$$

$$\frac{x^2}{25(1+k^2/36)}+\frac{y^2}{9(1+k^2/36)}=1 \quad k\epsilon\mathbb{R}$$

Obtenemos la ecuación de una familia de elipses (contenidas en distintos planos, según $z=k$), todas centradas respecto del eje z y con eje focal paralelo al eje x. Sus semiejes crecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.



- Intersección con planos paralelos al plano yz $(x=k)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1 \\ x=k \end{cases} \Longrightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1-\frac{k^2}{25}$$

Para analizar la ecuación resultante, debemos tener en cuenta que el miembro de la derecha de la igualdad puede ser positivo, negativo o nulo, según cómo varía el parámetro *k.*

- Si $|k| < 5$: el miembro derecho es positivo, entonces:

$$\frac{y^2}{9(1-k^2/25)} - \frac{z^2}{36(1-k^2/25)} = 1 \quad |k| < 5$$

  Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $x = k$), todas centradas respecto al eje *x,* con eje focal paralelo al eje y. Sus semiejes decrecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

- Si $|k| = 5$: el miembro derecho es nulo, entonces:

$$\frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{36} \Rightarrow z = \pm\frac{6}{3}y$$

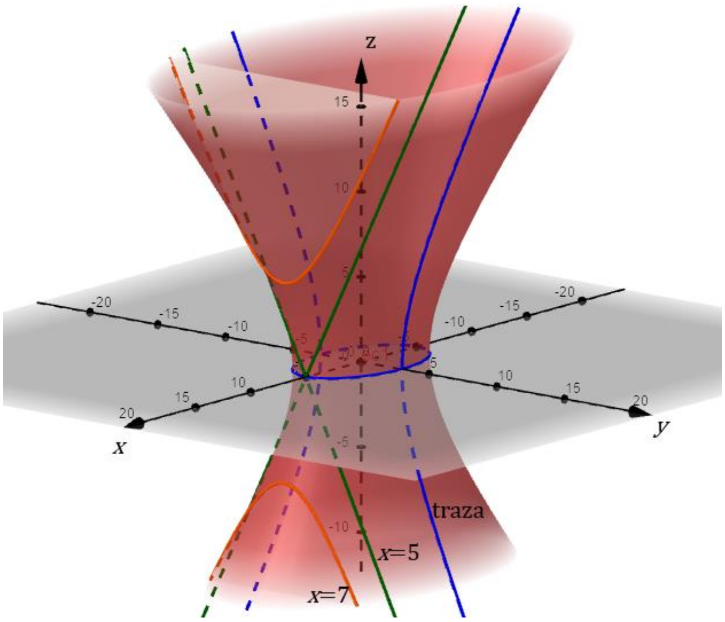
  Obtenemos dos rectas contenidas en el plano $x = 5$ (y otras dos en el plano $x = -5$)

- Si $|k| > 5$: el miembro derecho es negativo, entonces, si multipicamos ambos lados de la igualdad por (-1), tenemos:

$$-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = \frac{k^2}{25} - 1$$

$$-\frac{y^2}{9(k^2/25-1)} + \frac{z^2}{36(k^2/25-1)} = 1 \quad |k| > 5$$

  Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $x = k$), todas centradas respecto al eje *x,* con eje focal paralelo al eje *z*. Sus semiejes crecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.



- Intersección con planos paralelos al plano *xz* ($y = k$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{36} = 1 - \frac{k^2}{9}$$

Para analizar la ecuación resultante, debemos tener en cuenta que el miembro de la derecha de la igualdad puede ser positivo, negativo o nulo, según cómo varía el parámetro k.

- Si $|k| < 3$: el miembro derecho es positivo, entonces:

$$\frac{x^2}{25(1-k^2/9)} - \frac{z^2}{36(1-k^2/9)} = 1 \quad |k| < 3$$

  Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $y = k$), todas centradas respecto al eje y, con eje focal paralelo al eje x. Sus semiejes decrecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

- Si $|k| = 3$: el miembro derecho es nulo, entonces:

$$\frac{x^2}{25} = \frac{z^2}{36} \Longrightarrow z = \pm\frac{6}{5}x$$

  Obtenemos dos rectas contenidas en el plano $y = 3$ (y otras dos en el plano $y = -3$)

- Si $|k| > 3$: el miembro derecho es negativo, entonces, si multipicamos ambos lados de la igualdad por (-1), tenemos:

$$-\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{36} = \frac{k^2}{9} - 1$$

$$-\frac{x^2}{25(k^2/9-1)} + \frac{z^2}{36(k^2/9-1)} = 1 \quad |k| > 3$$

  Obtenemos la ecuación de una familia de hipérbolas (contenidas en distintos planos, según $y = k$), todas centradas respecto al eje y, con eje focal paralelo al eje z. Sus semiejes crecen proporcionalmente conforme $|k|$ crece.

b) Análisis de simetría

Como las tres variables se encuentran elevadas al cuadrado, la ecuación permanece igual al cambiar el signo de cualquiera de ellas. Entonces, la superficie es simétrica respecto a los tres ejes coordenados, a los tres planos coordenados y respecto al origen.

c) Ver gráficos anteriores.

114. Indique justificando su respuesta, si los ejes de las dos superficies cónicas dadas por los siguientes datos, son rectas paralelas, secantes o alabeadas. Represente gráficamente.

Superficie cónica 1: Directriz D1: $\begin{cases} 4(x-10)^2 + 9(z-2)^2 - 36 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

con vértice V1 (10, 20, 2).

Superficie cónica 2: Directriz D2: $\begin{cases} 16(x-3)^2 + 9(y-10)^2 - 144 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

con vértice V2 (3, 10, 20).

Respuesta:

El eje de una superficie cónica es la recta que pasa por el vértice y por el centro de la curva directriz. Siendo L_1 el eje de la superficie 1, y L_2 el eje de la superficie 2, obtenemos sus ecuaciones:

L_1:

El centro de la directriz D1 es el punto C1(10,0,2). Entonces

$$\boldsymbol{d_{L1}} = \boldsymbol{C1V1} = (10-10\,,20-0\,,2-2) = (0{,}20{,}0)$$

$$L_1: (x,y,z) = (10{,}0{,}2) + t(0{,}20{,}0) \quad t\epsilon\mathbb{R}$$

L_2:

El centro de la directriz D2 es el punto C2(3,10,0). Entonces

$$\boldsymbol{d_{L2}} = \boldsymbol{C2V2} = (3-3\,,10-10\,,20-0) = (0{,}0{,}20)$$

$$L_1: (x,y,z) = (3{,}10{,}0) + k(0{,}0{,}20) \quad k\epsilon\mathbb{R}$$

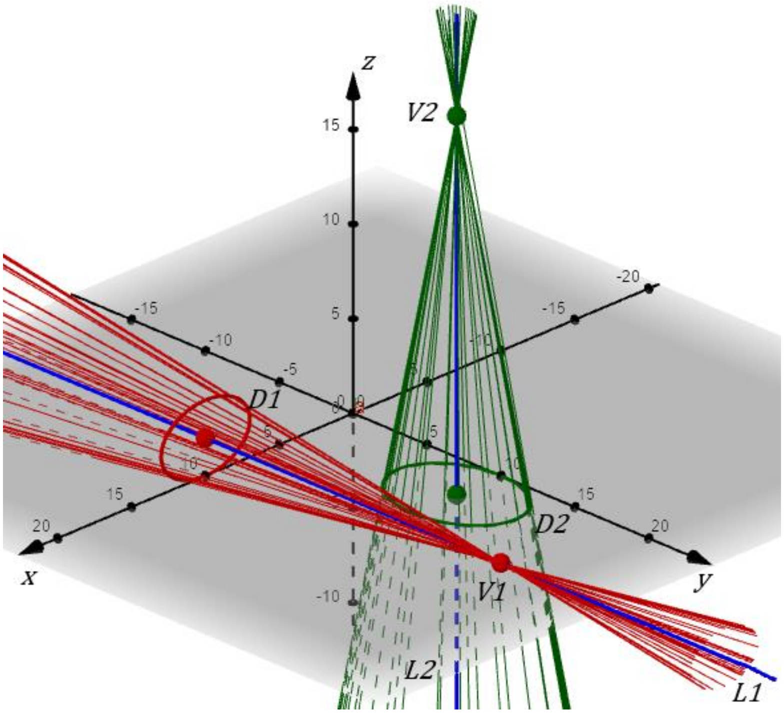
Según lo visto en la Unidad 2, para determinar la posición relativa entre ambas rectas, obtenemos el vector

$$\boldsymbol{C1C2} = (3-10, 10-0{,}0-2) = (-7{,}10,-2)$$

Ahora evaluamos el producto mixto entre los vectores directores y el vector $\boldsymbol{C1C2}$

$$\boldsymbol{d_{L1}} \times \boldsymbol{d_{L2}} \cdot \boldsymbol{C1C2} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ -7 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -20[0-(-7)20] = -2800$$

Como el producto mixto es distinto de cero, concluimos que las rectas son ALABEADAS.



115. a) Indique ecuaciones vectoriales paramétricas de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $49x^2 + 49y^2 + 9z^2 - 441 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

i) y = 2 ; ii) x + y = 0

b) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando el comando Interseca Recorridos del software GeoGebra.

Respuesta:

a)i)

$$\begin{cases} 49x^2+49y^2+9z^2-441=0 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow 49x^2+9z^2=245$$

$$\frac{x^2}{5}+\frac{z^2}{245/9}=1$$

Se trata de una curva elíptica, por lo tanto, usamos la parametrización ya estudiada, teniendo en cuenta que $y=2$:

$$(x,y,z)=(\sqrt{5}cos\theta\ ,2\ ,\sqrt{245}/3sen\theta)\ ,\theta\epsilon[0,2\pi)$$

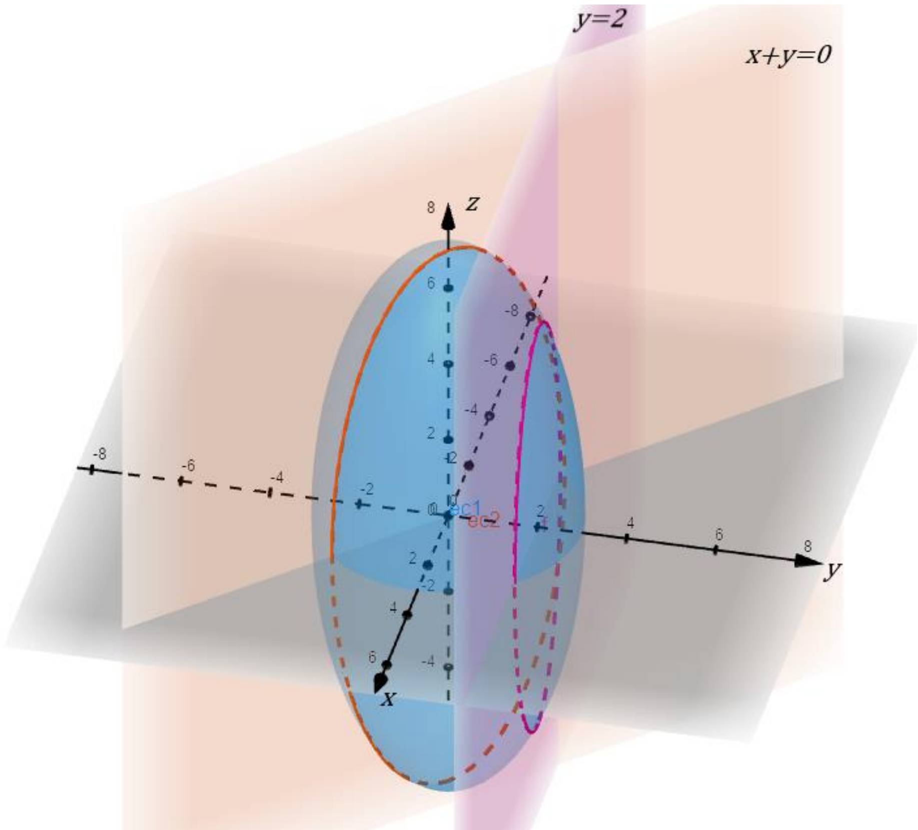
ii)

$$\begin{cases} 49x^2+49y^2+9z^2-441=0 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow 49x^2+49(-x)^2+9z^2=441$$

$$\frac{x^2}{9/2}+\frac{z^2}{49}=1$$

También obtenemos una curva elíptica, que parametrizamos de la siguiente forma, teniendo en cuenta que $y=-x$:

$$(x,y,z)=(3/\sqrt{2}cos\theta\ ,-3/\sqrt{2}cos\theta\ \ ,7sen\theta)\ \ ,\theta\epsilon[0,2\pi)$$



116. Indique las ecuaciones correspondientes a las siguientes superficies cuádricas, con semiejes a, b y c. Represente gráficamente.

a) Hiperboloide de una hoja de revolución, con eje de revolución el eje y.

b) Paraboloide de revolución, con eje de revolución el eje x.

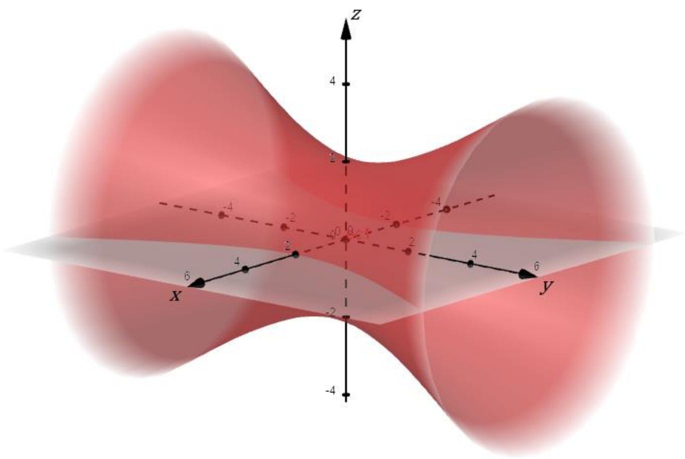
c) Elipsoide de revolución, con eje de revolución el eje z.

d) Hiperboloide de dos hojas de revolución, con eje de revolución el eje x.

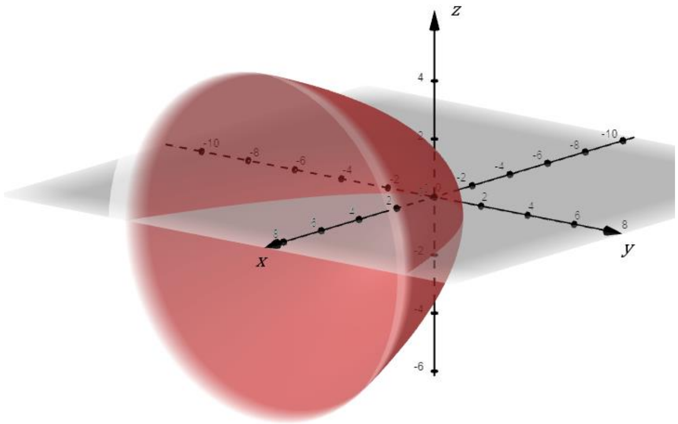
Respuesta:

En todos los casos tenemos superficies de revolución. Recordemos que las superficies de revolución tienen los mismos coeficientes (tanto en valor como en signo) en los términos cuadráticos de las variables que no se miden a lo largo del eje de revolución.

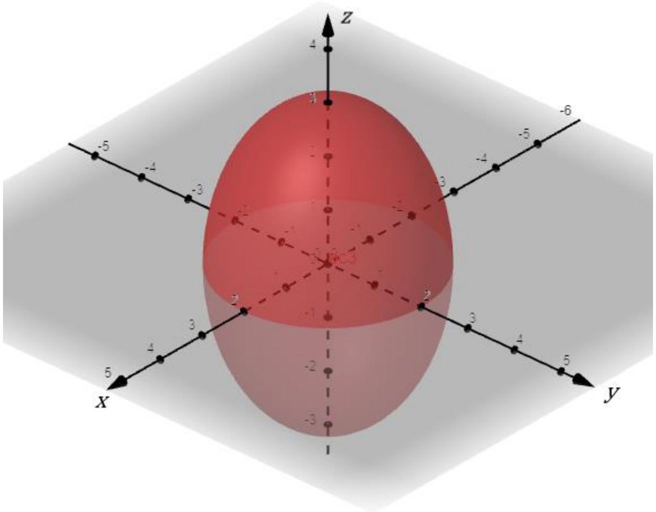
a) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$



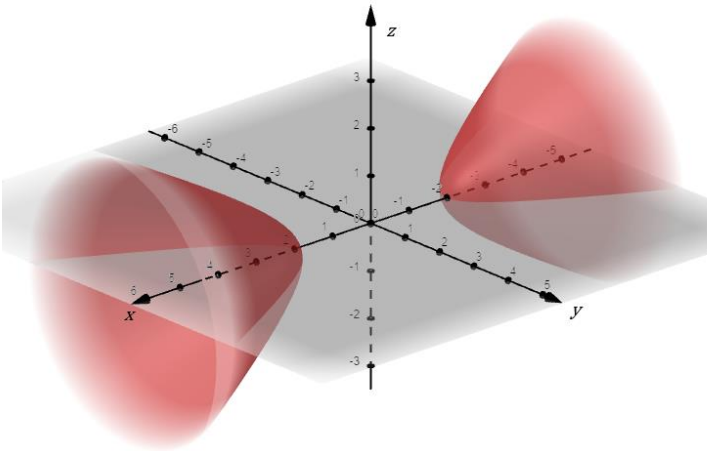
b) $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=cx$



c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



d) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$



117. Dadas las siguientes representaciones vectoriales paramétricas de superficies, identifique para cada caso de qué superficie cuádrica se trata, a partir de la eliminación de los parámetros que las describen:

a) $\boldsymbol{r}(t\,,s)=(2\,t\,,2s\,,t^2-s^2\,)\rightarrow\begin{cases}x=2\,t\\ y=2s\\ z=t^2-s^2\end{cases}$ $\quad t\in R\quad;\quad s\in R$

b) $\boldsymbol{r}(\beta\,,t)=(2\,t\,ch\beta\,,2\,t\,sh\beta\,,t^2\,)\rightarrow\begin{cases}x=2\,t\,ch\beta\\ y=2\,t\,sh\beta\\ z=t^2\end{cases}$ $\quad t\geq 0\quad;\quad \beta\in R$

c) Compare las superficies dadas por las representaciones vectoriales paramétricas indicadas en (a) y en (b)

d) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,\beta) = (5\,cos\alpha\;sen\beta - 2\,,2\;sen\alpha\;sen\beta - 2\,,9\;cos\beta + 2\,) \to \begin{cases} x = 5\;cos\alpha\;sen\beta - 2 \\ y = 2\;sen\alpha\;sen\beta - 2 \\ z = 9\;cos\beta + 2 \end{cases}$

$\alpha \in [0, 2\pi]$; $\beta \in [0, \pi]$

e) $\boldsymbol{r}(\alpha\,,t) = (3\;t\;cos\alpha + 3\,,5\;t\;sen\alpha + 3\,,t^2 - 2) \to \begin{cases} x = 3\;t\;cos\alpha + 3 \\ y = 5\;t\;sen\alpha + 3 \quad t \geq 0\,;\alpha \in [0, 2\pi] \\ z = t^2 - 2 \end{cases}$

Respuesta:

En cada ecuación, operamos algebraicamente dejando de un lado de la igualdad las expresiones que contienen parámetros, y luego aplicando operaciones apropiadas según el caso:

a)

$$\frac{x}{2} = t \;\;;\;\; \frac{y}{2} = s \quad \to \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = t^2 - s^2 = z$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = z \quad Paraboloide\ hiperbólico$$

b)

$$\frac{x}{2} = tch\beta \quad ; \quad \frac{y}{2} = tsh\beta \quad \to \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = t^2(ch^2\beta - sh^2\beta) = t^2 = z$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = z \quad Paraboloide\ hiperbólico$$

c) Vemos que ambas parametrizaciones corresponden a la misma superficie cuádrica. En general, es posible parametrizar de varias formas un lugar geométrico dado.

d)

$$\frac{x+2}{5} = cos\alpha sen\beta \quad ; \quad \frac{y+2}{2} = sen\alpha sen\beta \;\; ; \;\; \frac{z-2}{9} = cos\beta$$

$$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-2}{9}\right)^2 = \cos^2\alpha\,sen^2\beta + sen^2\alpha sen^2\beta + \cos^2\beta$$

$$= sen^2\beta(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) + \cos^2\beta = sen^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{81} = 1 \quad Elipsoide$$

e)

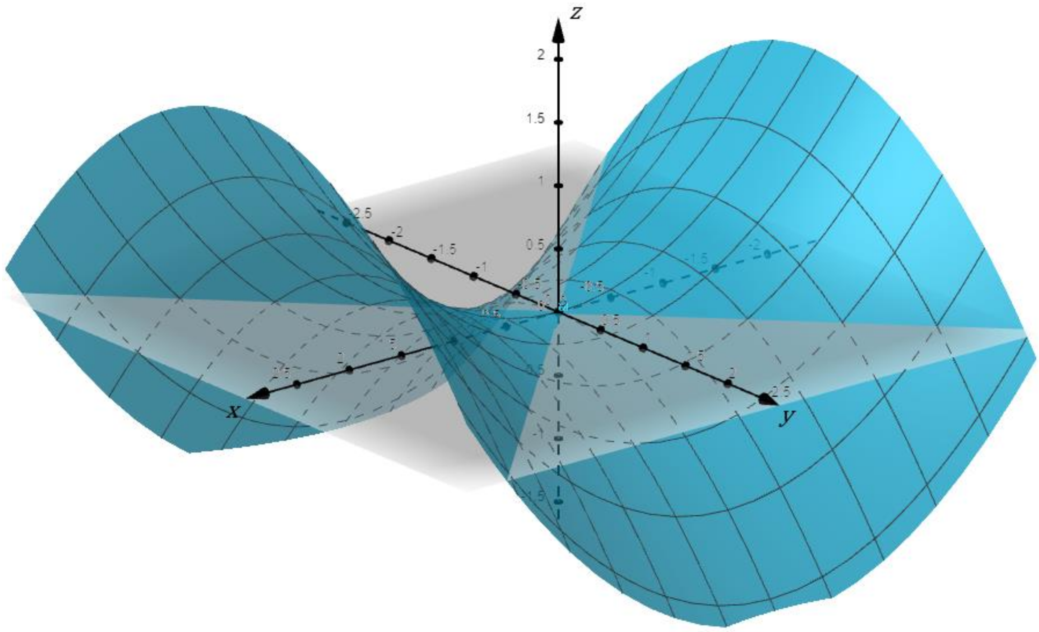
$$\frac{x-3}{3} = tcos\alpha \quad ; \quad \frac{y-3}{5} = tsen\alpha \quad ; \quad z + 2 = t^2$$

$$\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{5}\right)^2 = t^2(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) = t^2 = z + 2$$

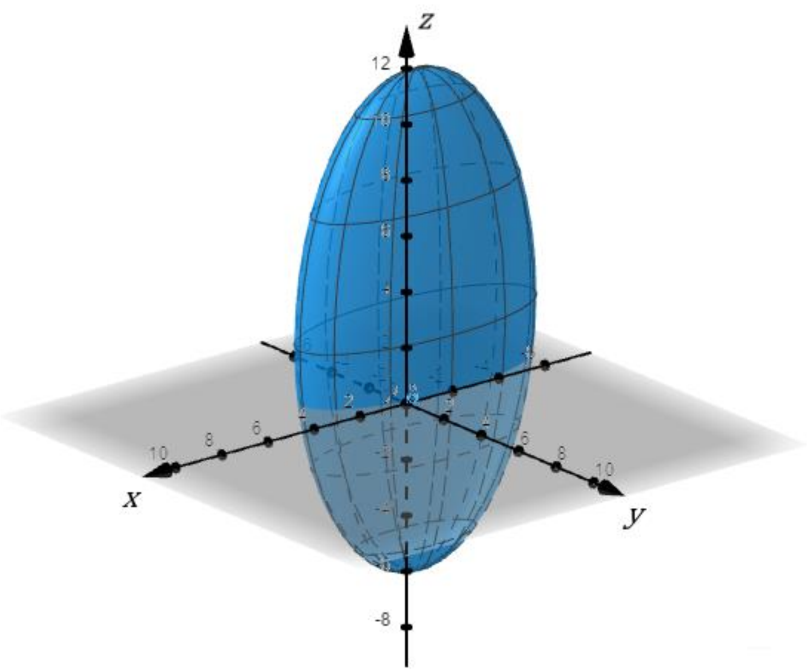
$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = z + 2 \quad Paraboloide\ Elíptico$$

Gráficos en Geogebra

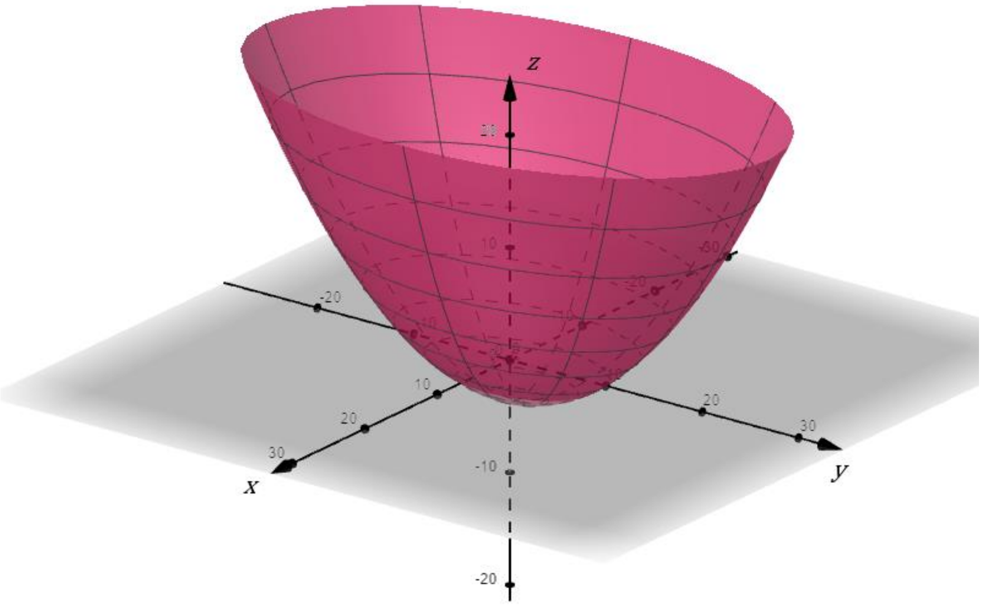
a) y b)



d)



e)



118. Indique ecuaciones para las siguientes familias, adoptando un parámetro apropiado. Represente en cada caso al menos tres superficies de cada familia:

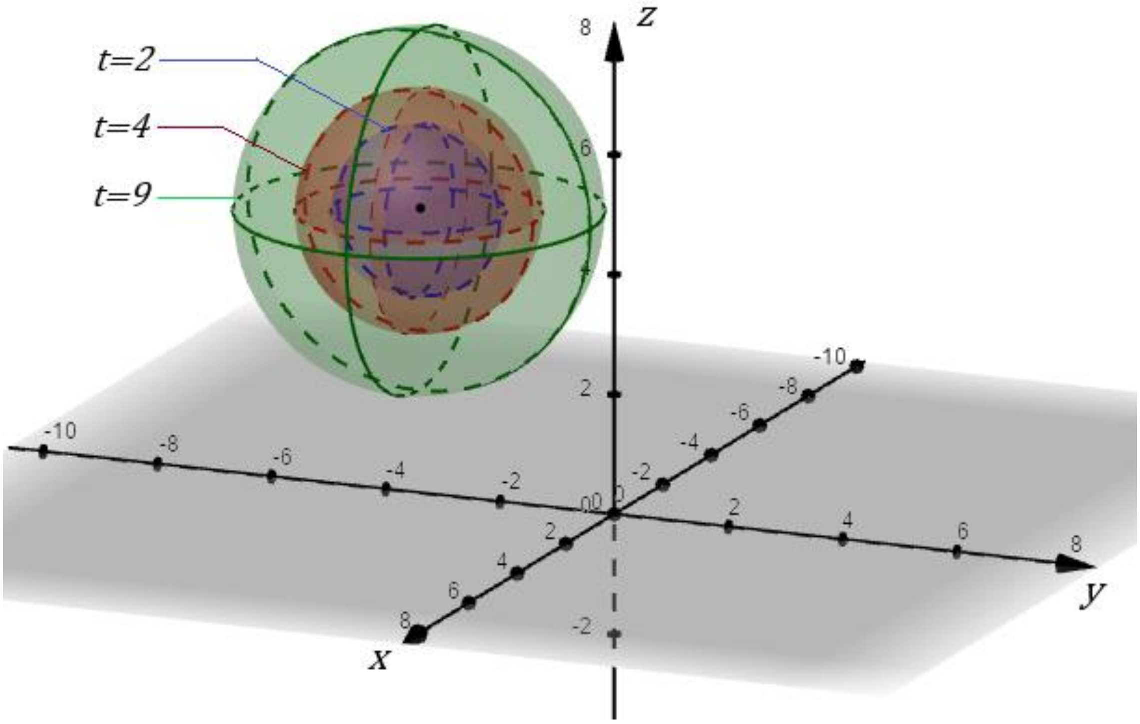
a) Familia de esferas de centro (1,-3,5).

b) Familia de paraboloides de revolución de vértice V(0,3,0).

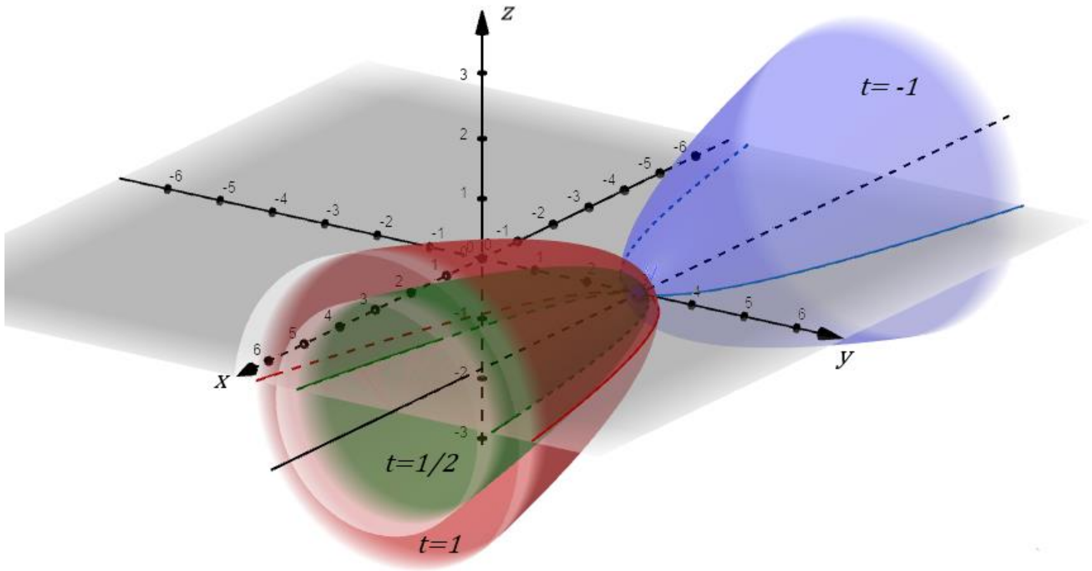
c) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, con eje de revolución el eje y.

Respuestas:

a) Familia de esferas con centro (1,-3,5): Las esferas de esta familia podrán tener diferentes radios, por lo tanto, podemos tomar como parámetro de la familia el valor $r^2 = t$, con $t \, \epsilon (0, \infty)$. Notar que el parámetro debe ser positivo (ya que representa una cantidad elevada al cuadrado), y no puede ser nulo porque en tal caso no tendríamos una esfera sino un punto.
Ecuación de la familia:
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = t \quad ; \quad t \epsilon (0, \infty)$$



b) Familia de paraboloides de revolución de vértice V(0,3,0): En este caso, es posible escribir tres familias distintas, cada una con eje de revolución paralelo a cada eje coordenado. Escribiremos la ecuación de la familia con eje de revolución paralelo al eje x.
La ecuación de un paraboloide de revolución con dichas características es:
$$\frac{(y-3)^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=ax$$
Para que sea de revolución, los términos de $\boldsymbol{y^2}$ y $\boldsymbol{z^2}$ deben tener iguales coeficientes. Entonces podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:
$$(y-3)^2+z^2=ab^2x$$
Dejaremos como parámetro de la familia el valor de $ab^2=t$, que indica la apertura del paraboloide y podrá tomar cualquier valor real excepto el cero (valor para el cual tendríamos el eje de revolución, es decir, todos los puntos de coordenadas (x,3,0)).
Ecuación de la familia:
$$(y-3)^2+z^2=tx \quad ; \quad t\epsilon\mathbb{R}-\{0\}$$



c) Familia de paraboloides de revolución de vértice variable, con eje de revolución el eje y. En este caso, también es posible escribir varias familias distintas, dependiendo del parámetro que elijamos. Podemos permitir o no que varíe la apertura de los paraboloides. También podemos variar las tres coordenadas del vértice, dos o una sola.
Escribiremos la ecuación de la familia manteniendo la apertura constante, y sólo variando la posición del vértice de coordenadas $V(0, t, 0)$, que podrá moverse a lo largo del eje de revolución.
Ecuación de la familia:

$$x^2 + z^2 = y - t \quad ; \ t \epsilon \mathbb{R}$$