Ejercicio 3

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 2 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$

Armo la matriz para escalonarla

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$F_2 = F_2 + F_1$ $\quad$ $F_3 = F_3 - F_1$ $\quad$ $F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_2$

$$\cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$F_3 = F_3 - 2F_2$

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius vemos que

$$\rho(A) = 2 \qquad \rho(A') = 3$$

$\therefore \rho(A) \neq \rho(A)$ y el sistema es incompatible

Al ser un sistema incompatible, el mismo no tiene solución

$$S = \emptyset$$

---

b) $\begin{cases} 2x_5 + 2x_2 - 4x_3 + 2 = 0 \\ 3x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_3 - x_2 + 5x_5 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

Ordeno las variables y reescribo el sistema

$$\begin{cases} \quad 2x_2 - 4x_3 \qquad\quad + 2x_5 = -2 \\ \qquad\qquad\qquad 3x_4 \qquad\quad = -3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$$

Armo la matriz para escalonarla

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right] \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\cong} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & -1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_1 = \frac{1}{3} \cdot F_1}{\cong} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & -1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\cong} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & -1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right] \cong$$

$$\underset{F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_2}{\cong} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & -1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right] \underset{F_3 = \frac{1}{3} \cdot F_3}{\cong} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & -1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Realizando sucesivamente

$F_1 = F_1 + F_3$

$F_1 = F_1 + \frac{1}{3} F_2$

nos queda:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Por R.F. tenemos:

$\rho(A) = 3 \quad \rho(A') = 3 \quad n = 5$

$\therefore$ Es un sistema compatible indet.

Var. Principal: $x_1 \; x_2 \; x_4$

Var. Libre $x_3 \; x_5$

Parametrizamos las variables libres: $x_3 = t$

$x_5 = u$

Armamos el sistema nuevamente

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_5 = -2/3 \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Tenemos $x_4 = -1$, $x_3 = t$ $x_5 = u$

$x_2 = 2x_3 - x_5 \Rightarrow x_2 = 2t - u$

$x_1 = -2/3 + x_3 - 2x_5 = 0$

$x_1 = -\frac{2}{3} + t - 2u$

$$S = \{(\underbrace{-\tfrac{2}{3} + t - 2u}_{x_1}, \underbrace{2t - u}_{x_2}, \underbrace{t}_{x_3}, \underbrace{-1}_{x_4}, \underbrace{u}_{x_5}) \in \mathbb{R}^5, t, u \in \mathbb{R}\}$$

---

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$

Realizando operaciones elementales, llegamos a la siguiente matriz escalonada reducida

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Por R.F: $\rho(A) = 3$ $\rho(A') = 3$ $n = 3$

$\therefore$ Es un sistema compatible determinado.

Tiene solución única

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $S = \{(-1, 1, 1)\}$

d) $\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ 2x + w - y = 5 \\ 3x + z + w = 1 \\ 2x + 2y + 2z - w = 3 \end{cases}$

Reordenando el sistema y escribiéndolo en su forma matricial para escalonar, nos queda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Luego de realizar las operaciones elementales convenientes, llegamos a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

No es necesario seguir operando, ya que la fila 4 determina la naturaleza del sistema

$$\rho(A) \neq \rho(A')$$

$\therefore$ Es un sistema incompatible y no hay solución