COMBINATORIA

Introducción

La Combinatoria es la parte de la matemática que estudia la formación de subconjuntos o agrupaciones de elementos partiendo de un conjunto dado, teniendo en cuenta la ordenación y el número de esos elementos.

En todo problema combinatorio hay varios conceptos claves que debemos distinguir. *Población*: es el conjunto de elementos que estamos estudiando. Denominaremos con **n** al número de elementos de este conjunto.

Muestra: es un subconjunto de la población. Denominaremos con **k** al número de elementos que componen la muestra.

Los diferentes tipos de muestra vienen determinados por dos aspectos: o*rden***,** es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no y *repetición* que se refiere a la posibilidad de repetición o no de los elementos. En primer lugar se estudiará la combinatoria simple o sin repetición.

La función factorial

Definición La función factorial es la aplicación $f\colon \mathrm{IN}_0 \rightarrow \mathrm{IR}$ tal que $f(n) = n!$ definida por

$f(0) = 0! = 1$, $f(1) = 1! = 1$ y $f(n+1) = (n+1)\, n!$ si $n \geq 1$

Nota

El símbolo característico es !. La expresión n! se lee "factorial de n" o "n factorial".

Propiedad El factorial de un número natural n mayor o igual que 2 resulta igual al producto de los n primeros números naturales.

En efecto, para n = 2, 3, 4, ..., se tiene

$$n! = n\,(n-1)!$$
$$(n-1)! = (n-1)\,(n-2)!$$
$$(n-2)! = (n-2)\,(n-3)!$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,.....3.\;2.\;1}$$

Por ejemplo, 2 ! = 2. 1 = 2; 3 ! = 3. 2. 1 = 6; 5! = 5. 4. 3. 2. 1 = 120

Variaciones ordinarias o variaciones simples o variaciones

Dados n elementos distintos de una población formada por a_1, a_2, a_3, ..., a_n, se llama variación de orden k a todo conjunto ordenado formado con k elementos cualesquiera elegidos entre ellos, siendo $k \leq n$, de modo que se considera como dos variaciones distintas a aquellas que difieren en un elemento por lo menos o que teniendo los mismos elementos éstos están dispuestos en distinto orden.

Ejemplo Dados los cuatro elementos a, b, c y d (n = 4), las variaciones binarias o de orden 2 (k = 2) que se pueden formar son: (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d), (b, a), (c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (d, c).
Se han obtenido 12 variaciones de orden 2 formadas con los 4 elementos dados. Se dice que son 12 variaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2 (o de a 2) y se indica

$$V_{4,\,2} = 12$$

Fórmula de Cálculo

Dados los n elementos distintos a_1, a_2, a_3, …, a_n (n es número natural)

1º) Las variaciones unitarias o de orden 1 (k = 1) que se pueden formar son:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n \end{array}$$

Es decir, son n variaciones de orden 1; se escribe $V_{n,1} = n$.

2º) Las variaciones binarias o de orden 2 (k = 2) que se pueden formar son:

$$\begin{array}{lllll} a_1\ a_2 & a_1\ a_3 & a_1\ a_4 & \ldots\ldots\ldots & a_1\ a_n \\ a_2\ a_1 & a_2\ a_3 & a_2\ a_4 & \ldots\ldots\ldots & a_2\ a_n \\ a_3\ a_1 & a_3\ a_2 & a_3\ a_4 & \ldots\ldots\ldots & a_3\ a_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_n\ a_1 & a_n\ a_2 & a_n\ a_3 & \ldots\ldots\ldots & a_n\ a_{n-1} \end{array}$$

Se observan n filas y n-1 columnas en la disposición, por lo tanto hay n(n-1) variaciones binarias, además

$$V_{n,2} = V_{n,1} \,.\, (n-1) = n\,(n-1)$$

3º) Procediendo como en el caso anterior, colocando en cada grupo un tercer elemento distinto, por ejemplo (a_1 a_2 a_3), las variaciones ternarias o de orden 3 (k = 3) son

$$V_{n,3} = V_{n,2} \,.\, (n - 2) = n\,(n-1)\,(n-2)$$

Y así siguiendo, se tiene para todo $k \leq n$,

$$V_{n,k} = V_{n,k-1} \,.\, (n - (k - 1))$$

Luego, la fórmula de cálculo es

$$\mathbf{V_{n,k} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,.....(n - k +1) \qquad (1)}$$

En otras palabras, "variaciones de n en k" o "variaciones de n elementos tomados de k en k" o "variaciones de n elementos de orden k", simbolizado mediante $V_{n,k}$ es igual al producto de k números naturales decrecientes a partir de n.

Ejemplos $V_{5,3} = 5 \,.\, 4.\, 3 = 60$; $V_{7,5} = 7.\, 6.\, 5.\, 4.\, 3 = 2.520$; $V_{10,4} = 10.\, 9.\, 8.7 = 5.040$

Otra Fórmula para Variaciones

Si en (1) se multiplica y se divide por (n – k)! se obtiene la siguiente expresión

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esta fórmula ofrece la posibilidad de simplificar el numerador y el denominador cuando aparecen factoriales de números grandes.

Por ejemplo, el cociente $\frac{17!}{14!} = \frac{17.16.15.14!}{14!} = 17.\, 16.\, 15 = 4.080$.

Ejemplo ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 4 y 8?

Solución

Hay 5 elementos poblacionales dados, n = 5 y se piden números de 3 cifras distintas cada uno, o sea, k = 3.

Es un problema donde **interesa el orden** porque dos grupos son distintos si por lo menos varía un elemento en el grupo. Por ejemplo, el número 135 es distinto del 315, por lo tanto, es un problema que se resuelve con variaciones de 5 elementos tomados de a 3; se indica $V_{5,3}$.

$$V_{5,3} = 5.\, 4.\, 3 = 60$$

Respuesta: hay 60 números distintos de 3 cifras distintas cada uno que se pueden formar con los dígitos dados que son 1, 3, 5, 4 y 8.

Permutaciones

Son un caso particular de variaciones cuando el tamaño de la muestra o del grupo que se desea formar coincide con el número de elementos de la población dada, k = n. Entonces

$$V_{n,n} = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,3\,.\,2\,.1 = n!$$

Se acostumbra escribir P_n en lugar de $V_{n,n}$ para expresar las *permutaciones de n elementos* y se indica

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Ejemplo ¿Cuántas filas distintas pueden formar 10 niños?

Solución

Se pueden formar filas usando distintos criterios, por ejemplo la altura, el orden alfabético de apellidos, edades, etc. Por lo tanto, una fila de 10 niños difiere de otra (fila de 10 niños) sólo en el orden de ubicación de ellos. Se observa que hay 10 niños, n = 10 y se los desea ubicar en filas (o grupos) de 10, k = 10, o sea, es un problema donde **interesa el orden** y **n = k**. Se resuelve calculando las permutaciones de 10 elementos,

$$P_{10} = 10\,! = 10.\ 9.\ 8.\ 7.\ \ldots.3.\ 2.\ 1 = 3.628.800$$

Respuesta: Se pueden realizar 3.628.800 filas distintas con 10 niños.

Combinaciones

Combinaciones de n elementos de orden k son los grupos que pueden formarse con k elementos tomados de los n dados, de modo que dos grupos cualesquiera difieran en un elemento por lo menos. Se simboliza $C_{n,k}$.

A diferencia de las variaciones, sólo interesa la naturaleza de los elementos y no su ordenación; es decir, en las combinaciones **no interesa el orden**.

Por ejemplo, si se tienen 4 elementos poblacionales a, b, c, d (n = 4), las combinaciones de orden 3 (k = 3) son sólo 4: a b c, a b d, a c d y b c d (en cualquier orden), es decir $C_{4,3} = 4$.

En cambio, las variaciones de n = 4 elementos tomados de a k, con k = 3, son las combinaciones de n = 4 de orden k = 3 multiplicadas por las permutaciones de 3 elementos en cada grupo. Luego,

$$V_{4,3} = C_{4,3}\,.\,P_3 \quad \text{o bien} \quad C_{4,3} = \frac{V_{4,3}}{P_3}\,.$$

Entonces, en general

$$V_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k, \text{ donde } n \geq k > 0 \text{ (n, k en IN)}$$

Por lo tanto,

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

$$\boldsymbol{C_{n,k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ejemplo Con 12 profesores ¿cuántos tribunales distintos se pueden formar?

Solución

En este problema n = 12 y el grupo es de tamaño 3, k = 3. **No interesa el orden**, los tribunales son distintos si por lo menos cambia un profesor, por lo tanto es un problema que se resuelve con combinaciones de 12 tomadas de 3.

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12.11.10.9!}{3!\,9!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} = 220$$

Respuesta: Se pueden formar 220 tribunales distintos con 12 profesores.

Números combinatorios

Definición Sean n y k números enteros no negativos tales que $n \geq k$. Se llama número combinatorio n sobre k y se anota $\binom{n}{k}$, siendo n el numerador y k el denominador a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Observación: Si $k \neq 0$, $\binom{n}{k} = C_{n,k}$

Casos especiales

$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,(0-0)!} = 1;$ $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\,n!} = 1;$

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{1(n-1)!} = n;$ $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1;$

$\binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!} = \frac{(n+1)n!}{n!\,1!} = n + 1$

Ejemplo ¿Cuál es el valor de x tal que $\binom{7}{4} + 2x = \binom{1}{1} - V_{x,2} + P_3 - (C_{6,3} + 1)$?

Respuesta: no existe valor de x que verifique la expresión dada, pues x debe verificar la expresión $V_{x,2}$ donde x es un número natural tal que $x \geq 2$.

Otra expresión de números combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!}$$

(Se observa que en el numerador hay k factores decrecientes a partir de n y en el denominador aparece el factorial de k.)

Números combinatorios de órdenes complementarios o números combinatorios complementarios

Definición Dos números combinatorios son complementarios si tienen igual numerador y la suma de los denominadores es igual al numerador, es decir son de la forma $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{n-k}$.

Ejemplos $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$ son números combinatorios complementarios; $\binom{7}{4}$ y $\binom{7}{3}$ son números combinatorios complementarios.

Propiedades de los números combinatorios

1) **Propiedad de Simetría:** Los números combinatorios complementarios son iguales.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

2) Propiedad o lema de Stieffel: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (existen varias maneras de escribir la expresión, por ejemplo remplazando *n*-1 por *n* y *n* por *n*+1, etc.)

Ejemplo: $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$

3) La suma de los números combinatorios por cada fila n es igual a 2^n, es decir

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Demostración

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\ 1^{k} = (1+1)^{n} = 2^{n}$$

Ejemplo $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$

Actividad Demostrar el lema de Stieffel.

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

Es una representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma de triángulo. Los números del triángulo coinciden con los números combinatorios. Es llamado así en honor al filósofo y matemático francés Blaise Pascal quien introdujo esta notación en 1654; si bien se sabe que esta disposición era conocida por Tartaglia un siglo antes y aún, en 1303 por Tsun-Tzu. Es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico. Si calculamos todos los números combinatorios desde n = 0 para distintos órdenes desde k = 0 y los colocamos en filas sucesivas, n = 0, 1, 2, ….., forman una figura interesante por las propiedades que se observan, donde, justamente cada elemento es un número combinatorio .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Entre las relaciones interesantes, se mencionan las siguientes:

- Los elementos extremos de cada fila son iguales a 1; en otras palabras, los 2 lados infinitos del triángulo están formados por 1.
- Se observan las tres propiedades dadas de los números combinatorios: simetría entre los números combinatorios equidistantes (son combinatorios complementarios), cada número siguiente, desde la fila 3, es la suma de los dos que le anteceden a su izquierda y a su derecha (lema de Stieffel) y la suma de los números combinatorios por filas es igual a 2^n (n es el número de fila y empieza en 0, como se indicó anteriormente).
- La primera línea imaginaria paralela al lado izquierdo del triángulo está formada por los números naturales, por simetría coincide con la paralela al lado derecho del triángulo.

Una aplicación inmediata de los números combinatorios se presenta en el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente natural; observando el triángulo por filas, aparecen los valores de los coeficiente binomiales para cada n, desde k = 0 hasta n.

Potencia natural de un binomio

Teorema del Binomio de Newton: Sean a, b $\in$ IR y n $\in IN_0$ (se supone que si n = 0, a + b $\neq$ 0).

Entonces

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^k$ (Desarrollo decreciente en potencia de a)

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{k} b^{n-k}$ (Desarrollo creciente en potencia de a)

En efecto:

$(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0}$ si $a + b \neq 0$

$(a + b)^1 = 1\,a + 1\,b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = 1\,a^2 + 2\,a\,b + 1\,b^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$

$(a + b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = 1\,a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + 1\,b^3 =$

$= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$

$(a + b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

....

....

$(a + b)^n = (a + b)(a + b) \ldots. (a + b)$ [n veces el factor (a+b)] (definición de potencia n-ésima natural con n =1, 2, 3,....).

Luego, por inducción, observando los desarrollos anteriores, se obtiene que

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Observaciones

1) El desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio tiene n+1 términos, por lo tanto, si n es par hay un número impar de términos y si n es impar hay un número par de términos.

2) El coeficiente de cada término es un número combinatorio de numerador igual al exponente del binomio y el denominador k es variable de 0 a n.

3) Los términos equidistantes de los extremos tienen igual coeficiente por ser números combinatorios complementarios (propiedad de simetría).

4) La suma de los exponentes de a y b en todos los términos es igual a n.

5) Los coeficientes binomiales de una fila n = 3, 4, 5, …., están en la fila siguiente n + 1.

Por ejemplo, en el desarrollo de $(a + b)^3 = 1\, a^3 + 3\, a^2\, b + 3\, a\, b^2 + 1\, b^3$, donde n = 3, los coeficientes: 1 3 3 1 están en la fila 4 del triángulo.

6) Recordando que una regla práctica para los coeficientes es $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!}$,

la expresión del binomio se puede escribir de la forma

$$(a+b)^n = a^n + n\, a^{n-1}\, b + \frac{n\,(n-1)}{2!}\, a^{n-2}\, b^2 + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{3!}\, a^{n-3}\, b^3 + \ldots + n\, a\, b^{n-1} + b^n$$

Observar que el coeficiente del primer término y del último siempre es 1, el segundo coeficiente y el penúltimo siempre es n y así siguiendo.

Ejemplo $(y - 3)^5 = y^5 + 5\, y^4\,(-3) + \frac{5.\,4}{2!}\, y^3\,(-3)^2 + \frac{5.4.3}{3!}\, y^2\,(-3)^3 + 5\, y\,(-3)^4 + (-3)^5$

$$(y -3)^5 = y^5 - 15\, y^4 + 90\, y^3 - 270\, y^2 + 405\, y - 243$$

7) Un término de una posición genérica k, con k = 1, 2, 3, …, n+1 del desarrollo ordenado de la potencia n-ésima del binomio $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$, se calcula con la fórmula del ***término genérico*** $\boldsymbol{T_k}$ dada por

$$\mathbf{T_k} = \binom{n}{k-1} \mathbf{a^{n-k+1}\, b^{k-1}} \qquad \mathbf{(*)}$$

Nota: Se pueden utilizar otras expresiones para el cálculo del término genérico, tales como

$$\mathbf{T_{k+1}} = \binom{n}{k} \mathbf{a^{n-k}\, b^k}, \text{ con } k = 0, 1, \ldots., n.$$

Si n es par, existe un término central que es $T_{\frac{n}{2}+1}$ y si n es impar hay dos términos centrales que son $T_{\frac{n+1}{2}}$ y $T_{\frac{n+1}{2}+1}$.

Ejemplo Calcular el/los términos centrales y el décimo término del desarrollo de $(2x + x^3y^2)^{17}$

Solución

Siempre se trabaja suponiendo el desarrollo ordenado del binomio según el criterio elegido (potencias decrecientes o crecientes del primer término). Cuando no se diga otra cosa, supondremos la situación $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$.

Como n = 17 es impar hay dos términos centrales que son T_9 y T_{10} y el desarrollo tiene 18 términos. El décimo término pedido corresponde a k = 10 de (*) que coincide con uno de los términos centrales. Luego

$$T_9 = \binom{17}{8} \mathbf{(2x)^{17-8}\,(x^3y^2)^8} = \frac{17.16.15.14.13.12.11.10}{8!}\, 2^9.\,x^9.\,x^{24}.\,y^{16} = 24.310\,(2^9)\,x^{33}\,y^{16}$$

$$\mathbf{T_9 = 12.446.720\ \ x^{33}\ \ y^{16}}$$

$$T_{10} = \binom{17}{9}\,(2x)^{17-9}\,(x^3y^2)^{\mathbf{9}} = \binom{17}{9} 2^8.\,x^8.\,x^{27}.\,y^{18}$$

$$\mathbf{T_{10} = 6.223.360\ \ x^{35}\ y^{18}}$$

Respuesta: Los términos centrales son el noveno y el décimo cuyas expresiones son
$T_9 = 12.446.720\ x^{33}y^{16}$; $T_{10} = 6.223.360\ x^{35}\ y^{18}$, respectivamente.

Ejemplo 2 Calcular aproximadamente $1{,}01^3$.

Solución

La Identidad de Bernoulli (nombre paradógico porque los Bernoulli fueron una media docena de familiares, repartidos en tres generaciones, matemáticos notables) es muy utilizada en la práctica del cálculo y, establece que

$$\mathbf{(1 + a)^n \cong 1 + na}$$

para a pequeño comparado con 1 y n natural (el símbolo $\cong$ se lee "aproximadamente igual"). Esta identidad surge del Binomio de Newton correspondiente a

$$(1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}\, a^2 + ...+ a^n$$

en la que se desprecian todos los términos desde el grado 2 en adelante por ser muy pequeños respecto del 1.

Luego, el ejercicio pedido se calcula haciendo $1{,}01^3 = (1 + 0{,}01)^3 \cong 1 + 3.\ 0{,}01 = 1{,}03$ (cálculo muy sencillo).

El valor exacto es: $1{,}01^3 = 1{,}030301$.

Respuesta: El valor aproximado de $1{,}01^3$ es 1,03 o bien $1{,}01^3 \cong 1{,}03$.

Ejemplo 3 Desarrollar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Solución

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\ \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$$

Para llegar a la conocida expresión del número *e* utilizada en los cursos de Análisis, se trabaja algebraicamente y se obtiene la siguiente expresión.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) +$$

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Actividad Hallar el término donde aparece x^{30} en $(x + y)^{60}$

Actividad Obtener el término de grado 14 del desarrollo de $(x^3 - 3x)^{10}$.

Extensión o generalización de un número combinatorio con numerador real

Definición Si r es un número real y k es un número natural, la extensión o generalización del número combinatorio, denotada por el símbolo $\binom{r}{k}$ se define de la forma

$$\binom{r}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \qquad \text{y} \qquad \binom{r}{0} = 1$$

Ejemplos $\binom{-2}{3} = \frac{-2(-3)(-4)}{3!} = -4$; $\qquad \binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = -\frac{5}{128}$;

$$\binom{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2!} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Serie binomial o serie binómica

Es una serie cuyo término genérico es un binomio elevado a un exponente r, real no natural y, es de la forma $(a + b)^r$. El desarrollo en serie tiene la siguiente expresión

$$(a + b)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k = a^r + r\, a^{r-1} b + \frac{r(r-1)}{2!} a^{r-2} b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} a^{r-3} b^3 + \ldots$$

Esta expresión se conoce también como **Generalización o Extensión del Binomio de Newton**, por la similitud de la expresión con el Binomio de Newton, muy útil en la práctica de análisis.

Observación

La forma del término genérico del desarrollo en serie coincide con la expresión del Binomio de Newton; si bien es importante destacar que el Binomio de Newton tiene un exponente natural y en consecuencia un número finito de términos en su desarrollo, mientras que la serie binomial presenta un exponente de naturaleza no natural y por lo tanto tiene infinitos términos en su desarrollo, más aún, en ella se estudia la condición o no de convergencia.

Ejemplo 1

$$(1 + x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} 1^{-1-k} (x^2)^k = \binom{-1}{0} 1^{-1} (x^2)^0 + \binom{-1}{1} 1^{-2} x^2 + \binom{-1}{2} (x^2)^2 + \binom{-1}{3} (x^2)^3 + \ ....$$

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - .... \quad \text{si } |x| < 1$$

Esta expresión es el conocido desarrollo en serie de la función f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$, obtenida con la fórmula de la Generalización del Binomio de Newton. La función primitiva de f(x) es la función g(x) = arctg(x).

Si por ejemplo se desea realizar el cálculo aproximado de $\int_0^t \frac{1}{1+x^2}$ dx, se puede trabajar con el desarrollo en serie, de la forma $\int_0^t \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...\right) dx$ y, el cálculo (sencillo) se realiza con una determinada aproximación para algún valor de *t* en IR.

Ejemplo 2 Explicar cómo se puede calcular aproximadamente $\int_1^6 \sqrt{1+x^4}\ dx$

Solución

Una alternativa es realizar el desarrollo en serie del binomio, usando la Generalización del Binomio de Newton para exponente no natural, como sigue

$$\left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} 1^{\frac{1}{2}-k} \left(x^4\right)^k = 1 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{8} x^8 + \frac{1}{16} x^{12} + \ldots\ldots$$

Luego se calcula la integral del polinomio anterior hasta el grado deseado, obteniéndose un polinomio primitivo (cálculo sencillo) que será evaluado por la Regla de Barrow en 1 y 6.
De esta forma, se obtiene un valor aproximado de la integral.

Análisis Combinatorio con repetición

En esta sección se estudian las variaciones, las permutaciones y las combinaciones de n elementos de orden k, pudiendo cada uno de los n elementos poblacionales repetirse hasta k veces.

Variaciones con repetición

Si en una variación de orden k a partir de los n elementos dados se supone que cada elemento puede aparecer repetido hasta k veces, se le llama variación con repetición y se denota $V'_{n,k}$.

Fórmula de cálculo

Se supone una población con 4 elementos (n = 4) a, b, c, d. Las variaciones con repetición de orden 1 (k = 1) son 4, a saber

a

b

c

d

Es decir, $V'_{4,1} = 4$

Las variaciones con repetición de orden 2 (k = 2) son 4. 4 = 16, a saber

a a	a b	a c	a d
b a	b b	b c	b d
c a	c b	c c	c d
d a	d b	d c	d d

Es decir, $V'_{4,2} = V'_{4,1} \,.\, 4 = 4.\, 4 = 4^2 = 16$

Las variaciones con repetición de orden 3 (k = 3) son $V'_{4,3} \,.\, 4 = 4^2.\, 4 = 64$ (cada una de las variaciones de orden 2 se combina con los 4 elementos dados).

En general,

$V'_{n,1} = n$; $V'_{n,2} = V'_{n,1} \,.\, n = n \,.\, n = n^2$; $V'_{n,3} = V'_{n,2} \,.\, n = n^2.\, n = n^3$; .....;

$$V'_{n,k} = V'_{n,k-1} \,.\, n = n^{k-1}.\, n = n^k$$

$$\mathbf{V'_{n,k} = n^k}$$

Observación importante: n y k son números naturales y n es mayor o menor o igual que k. Recordar que en las variaciones simples $n \geq k > 0$.

Ejemplo Con los 10 dígitos, ¿cuántas claves distintas se pueden hacer en una cerradura de combinación de tres discos?

Solución

Es un problema donde **interesa el orden** porque la combinación "1 3 5" es distinta de la combinación "3 1 5" y cada dígito del 0 al 9 se puede repetir hasta 3 veces en cada clave; por ejemplo una posibilidad es "2 1 1" y otra es "2 2 2". Luego, se calcula $V'_{10,3} = 10^3 = 1.000$.

Respuesta: Con los 10 dígitos del 0 al 9, considerando tres discos de combinación se pueden determinar 1.000 claves distintas.

Permutaciones con repetición

Se denomina de esta forma a las permutaciones que se pueden formar con n objetos entre los cuales hay α iguales entre sí, otros β iguales entre sí, etc. tales que $\alpha + \beta + \ldots + \gamma$ = n. Se indica $P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\gamma}$.

Si hay un elemento repetido α veces, es evidente que se pierden posibilidades porque al hacer cambios entre estos elementos repetidos se obtiene la misma permutación. Es decir, hay $\alpha\,!$ permutaciones que son la misma, por lo tanto

$$P_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}$$

Si se repiten algunos elementos α veces, otros β veces y finalmente otros γ veces, entonces se obtiene la fórmula de cálculo que es

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$$

Ejemplo ¿Cuántas palabras distintas con o sin significado (anagramas) se pueden hacer con las letras de la palabra MATEMÁTICA?

Solución

Se observa que hay 10 letras (n = 10) y se deben formar palabras con las 10 letras, la letra M está 2 veces (α = 2), la letra A está 3 veces (β = 3), la letra T está 2 veces (γ = 2) y las restantes están una sola vez (2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10). Como el factorial de 1 es 1, no se acostumbra a colocar este elemento.

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!\,3!.2!} = 151.200$$

Respuesta: Existen 151.200 palabras distintas (o anagramas) que se pueden formar con las letras de la palabra MATEMÁTICA.

Combinaciones con repetición

Se denomina de esta forma a las combinaciones de k elementos tomados de los n dados, pudiendo cada elemento repetirse hasta k veces. Este número se indica $C'_{n,k}$, donde n y k son números naturales y n es mayor o menor o igual que k (recordar que en combinaciones simples $n \geq k$).

Utilizando un artificio, se puede hacer el cálculo de las combinaciones con repetición reduciendo el problema a las combinaciones simples o sin repetición formadas por n + k - 1 elementos. Resulta

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}$$

Por ejemplo, con los elementos a, b, c se pueden formar $C'_{3,2} = C_{3+2-1,2} = C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ grupos que son: a a a b a c b b b c c c (no interesa el orden, a b es el mismo grupo que b a).

Ejemplo Con dos clases distintas de bombones, ¿cuántas cajas distintas de media docena se pueden hacer?

Solución

Hay dos clases distintas de bombones, es decir n = 2 y hay que armar cajas de media docena, k = 6 y no interesa el orden de ubicación de los bombones porque sería la misma caja; es un problema de combinación con repetición pues en cada caja se pueden colocar hasta 6 bombones del mismo gusto o clase. Luego

$$C'_{2,6} = C_{2+6-1,6} = C_{7,6} = \frac{7!}{6!} = 7$$

Respuesta: Se pueden armar 7 cajas distintas de media docena de bombones de dos gustos.