Ejercicios resueltos 3.27 y 3.29 (pág. 136 y 137)

3.27

a) Escriba la ecuación de una *hipérbola equilátera* de centro C(h, k) y eje focal paralelo al eje x. Indique todos sus elementos y represente gráficamente.
b) Escriba la ecuación de una *hipérbola equilátera* de centro C(h, k) y eje focal paralelo al eje y. Indique todos sus elementos y represente gráficamente.
c) Indique las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad de las hipérbolas de los incisos anteriores.

Respuestas:

Las hipérbolas equiláteras tienen como característica que a=b, de ahí obtenemos que c=$\sqrt{2}a$

a) Para una hipérbola equilátera con eje focal paralelo al eje *x*, la ecuación es:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}$ - $\frac{(y-k)^2}{a^2}$ = 1 o también: $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$

Sus elementos son:

F1(c, 0); F1 ($\sqrt{2}a$,0) ; F2 (-c, 0) ; F2 ($-\sqrt{2}a$,0)

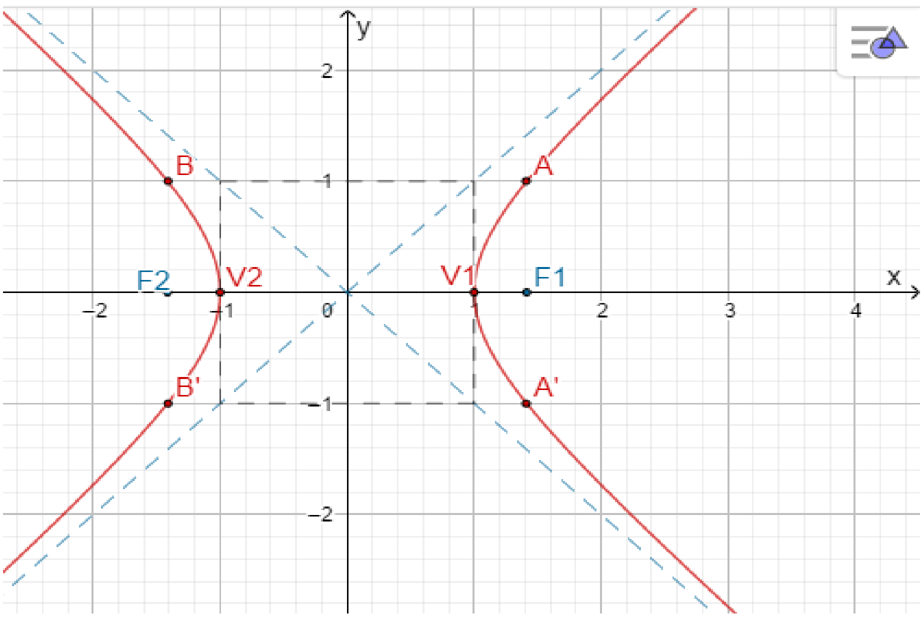
V1(a, 0) ; V2 (-a, 0)

A (c,$\frac{b^2}{a}$) ; A ($\sqrt{2}a$, a) ; A' (c,-$\frac{b^2}{a}$) ; A' ($\sqrt{2}a$, -a)

B (-c,-$\frac{b^2}{a}$); B ($-\sqrt{2}a$, a) ; B' (-c,-$\frac{b^2}{a}$) ; B' ($-\sqrt{2}a$, -a)

$|LR| = \frac{2b^2}{a} = 2a$

Representación gráfica para a=1



b) Para una hipérbola equilátera con eje focal paralelo al eje y, la ecuación es:

$\frac{(y-k)^2}{a^2}$ - $\frac{(x-h)^2}{a^2}$ = 1 o también: $-(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

Sus elementos son:

F1 (0, c); F1 $(0, \sqrt{2}a)$

F2 (0, -c) ; F2 $(0, -\sqrt{2}a,)$

V1 (0, a)

V2 (0,-a)

A $(\frac{b^2}{a}, c)$; A $(a, \sqrt{2}a)$

A' $(-\frac{b^2}{a}, c)$; A' $(-a, \sqrt{2}a)$

B $(\frac{b^2}{a}, -c)$; B $(a, -\sqrt{2}a)$

B' $(-\frac{b^2}{a}, -c)$; B' $(-a, -\sqrt{2}a)$

$|LR| = \frac{2b^2}{a} = 2a$

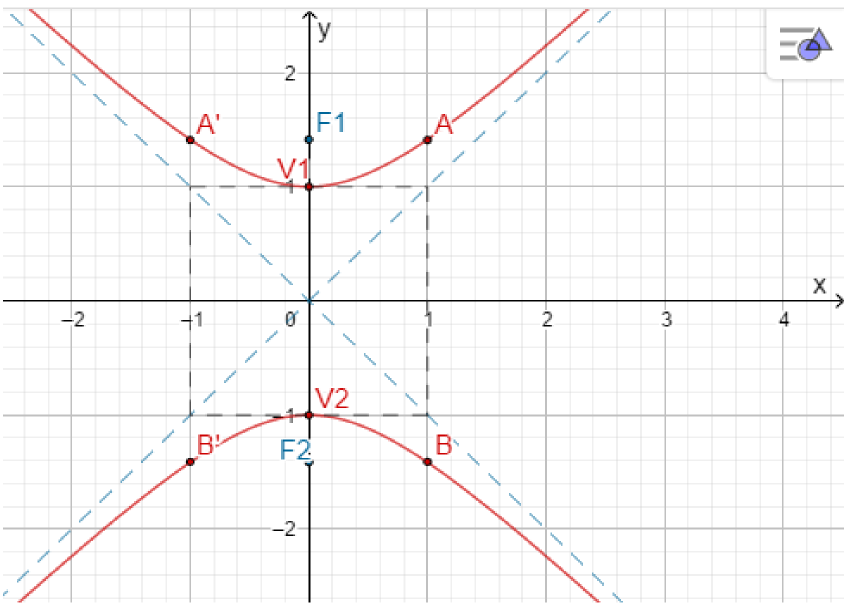
c) Los asíntotas y la excentricidad son iguales para las hipérbolas del ejercicio a) y b)

$y = x$

$y = -x$

$e = \frac{2b^2}{a} = \sqrt{2}$

Representación gráfica para a=1



3.29

Determine una ecuación para la recta tangente a la hipérbola de centro C (h,k) y eje focal paralelo al eje y.

Respuestas:

Escribimos nuevamente la ecuación general de una hipérbola con centro C(h,k) y eje transversal (o eje focal) paralelo al eje y:

$b^2y^2 - a^2x^2 - 2kb^2y + 2ha^2x + (b^2k^2 - a^2h^2 - a^2b^2) = 0$

Para obtener la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera T(x_T, y_T) de la hipérbola derivamos implícitamente la última ecuación, obteniendo:

$2b^2yy' - 2a^2x - 2kb^2y' + 2ha^2 = 0$

Agrupamos los términos que dependen de y', y despejamos para obtener la siguiente relación:

$y' = \frac{a^2(x-h)}{b^2(y-k)}$

En el punto T(x_T, y_T), resulta: $y'|_T = \frac{a^2(x_T-h)}{b^2(y_T-k)}$

Entonces, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola, que tiene pendiente y' y que pasa por el punto T (x_T, y_T) resulta la siguiente:

$$y - y_T = \frac{a^2(x_T - h)}{b^2(y_T - k)}\,(x - x_T)$$

Con y_T-k≠0

Representación gráfica para a=b: