Análisis Matemático I
Clase 2: Clasificación de funciones (continuación), operaciones con funciones y razones de cambio.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

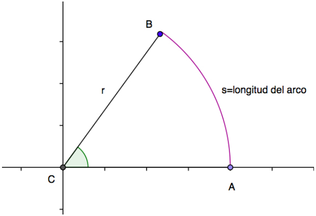
Marzo, 2020

Medición de ángulos mediante **Radianes** y orientación positiva y negativa.

Medida en radianes

Sea ACB el ángulo que se desea medir. Sea r el radio de la circunferencia y s la longitud del arco determinado por el ángulo sobre la circunferencia. La medida del ángulo ACB en radianes es el cociente:

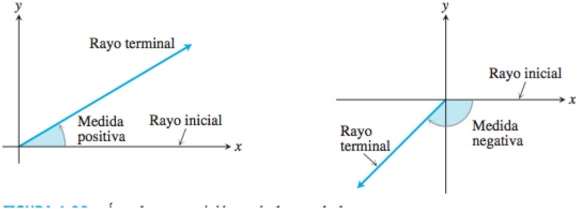
$$\frac{s}{r}.$$



Ejemplos: ángulos de un giro, de medio giro, etc.

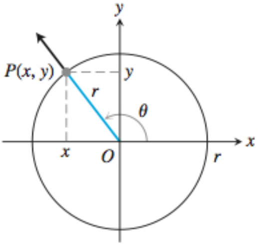
Medición de ángulos mediante **Radianes** y orientación positiva y negativa.

Orientación de ángulos:



Funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas: suponemos $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

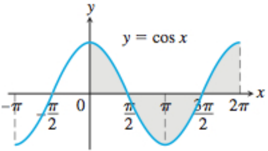


seno:	$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$	**cosecante:**	$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$
coseno:	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	**secante:**	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$
tangente:	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	**cotangente:**	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

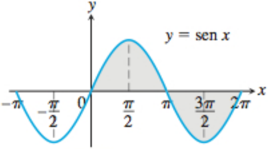
Tarea: repasar páginas 25, 26, 27 y 28 del libro de texto (identidades trigonométricas y transformaciones de funciones trigonométricas.)

Gráficas de funciones trigonométricas

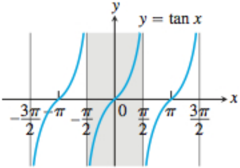
Funciones trigonométricas



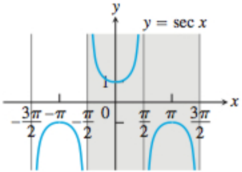
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π
(a)



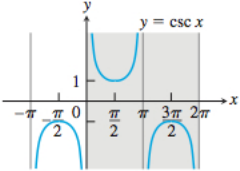
Dominio: $-\infty < x < \infty$
Rango: $-1 \leq y \leq 1$
Periodo: 2π
(b)



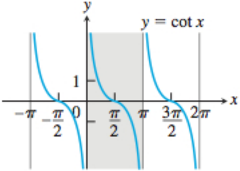
Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π
(c)



Dominio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π
(d)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Rango: $y \leq -1$ o $y \geq 1$
Periodo: 2π
(e)



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Rango: $-\infty < y < \infty$
Periodo: π
(f)

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

Operaciones con funciones.

Operaciones con funciones: sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ **y** $g : D(g) \to \mathbb{R}$ **dos funciones. Entonces definimos nuevas funciones:**

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{(función suma)}$$

$$f - g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{(función diferencia)}$$

$$f.g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R}, \quad (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \text{(función multiplicación)}$$

La función división f/g tiene por dominio el conjunto:

$$D(f/g) = \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$$

y se obtiene mediante división:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in D(f/g).$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine el dominio de $f + g$ y f/g.
Solución: para determinar el dominio de $f + g$, primero determinamos el dominio $D(f)$ de f y el de g, $D(g)$. El dominio de f es:

$$D(f) = [0, +\infty)$$

y el de g:

$$D(g) = (-\infty, 1].$$

Luego:

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g) = [0, 1].$$

Por otro lado, para determinar el dominio de f/g se deben excluir de $D(f) \cap D(g)$ los puntos donde el denominador se anula (en este caso $x = 1$):

$$D(f/g) = [0, 1).$$

Operaciones con funciones, ejemplos.

Ejemplo: sean $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine $D(f/g)$ y escriba la fórmula para $(f/g)(x)$.
Solución: primero tenemos

$$D(f) = (-\infty, 1]$$

y:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces $D(f) \cap D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ y debemos excluir de esta intersección los puntos donde el denominador, es decir g, se anula. Como g es siempre distinta de cero, se tiene:

$$D(f/g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$$

y:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\dfrac{1}{x^2}} = x^2\sqrt{1-x}.$$

Advertencia: próxima diapositiva.

Operaciones con funciones, ejemplos.

Advertencia: para determinar el dominio de $f+g$, $f.g$ o f/g no se debe mirar la fórmula:

$$(f+g)(x), \quad (f.g)(x) \quad \text{o} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

sino que se deben analizar los dominios aplicando la definición de cada operación como en los ejemplos anteriores. Por ejemplo, en el último caso:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2\sqrt{1-x},$$

con dominio:

$$D(f/g) = (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

Sin embargo, si hubiésemos mirado la fórmula final, habríamos dicho que el dominio es:

$$(-\infty, 1]$$

lo cual es erróneo, ya que g no está definida en 0 y por lo tanto no es posible hacer la división.

Composición de funciones.

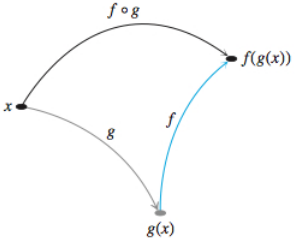
Composición de funciones

Sean $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $g : D(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función $f \circ g : D(f \circ g) \to \mathbb{R}$ con dominio:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$$

y cuyas imágenes se obtienen mediante la fórmula:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D(f \circ g).$$



Composición de funciones.

Ejemplo: determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Además, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Composición de funciones.

Ejemplo: determine el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Además, escriba la expresión de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
Solución: vamos a determinar el dominio de $f \circ g$. Por definición, un número x pertenece al dominio de $f \circ g$ si y solo si x pertenece al dominio de g y $g(x)$ está en el dominio de f. El dominio de g es:

$$D(g) = [0, +\infty)$$

y el dominio de f es:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Así, cualquier $x \in [0, +\infty)$ cumple $g(x) \in D(f)$. Luego:

$$D(f \circ g) = [0, +\infty).$$

Finalmente:

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Obsrevación: la función $f \circ g$ difiere de la función identidad $h(x) = x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, pues g exige que x sea no negativa.

¿Qué es el Cálculo?

Primera respuesta: El Cálculo es una herramienta matemática que nos permite comprender cómo varían o cambian las funciones

Tasa de cambio promedio o rapidez promedio

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s

(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Problema 1: se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio. Determinar:

(1) La rapidez promedio durante los primeros 2 s
(2) La rapidez promedio durante el intervalo de tiempo de un segundo a dos segundos.

Solución:

(1) Caida libre: la distancia recorrida por el objeto viene dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2, \text{ donde } g \approx 32ft/s^2.$$

Entonces la rapidez promedio durante los primeros 2 segundos es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = 32ft/s.$$

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1, 2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = 48 ft/s.$$

(2) Rapidez promedio en el intervalo $[1,2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(2) - y(1)}{2-1} = 48 ft/s.$$

Problema 2: ¿Qué pasa si queremos calcular la rapidez promedio en un intervalo $[1, 1+h]$?
Solución: longitud del intervalo: h. Entonces la rapidez promedio en el intervalo $[1, 1+h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h}.$$

Tasa de cambio

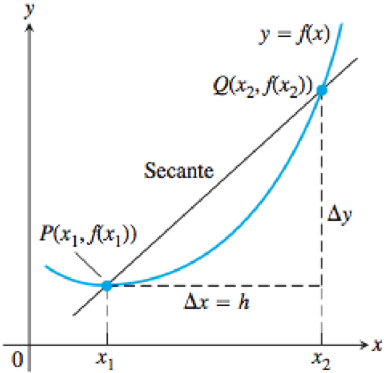
Tasa de cambio promedio

La tasa de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable x en el intervalo $[x_1, x_1 + h]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

.

Interpretación geométrica de la tasa de cambio



Así, la tasa de cambio promedio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos:

$$(x_1, f(x_1)) \quad \text{y} \quad (x_2, f(x_2)).$$