CIRCUNFERENCIAS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

61. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el C (3,-2) y pasa por el punto A (3,7). Determine además la ecuación en su forma paramétrica vectorial. Represente gráficamente.

Respuestas:

Considerando el Centro de la Circunferencia C (3,-2), y que pasa por el punto A (3,7), podemos determinar el módulo de CA, para calcular el radio de dicha circunferencia:

$$\| \boldsymbol{CA} \| = \sqrt{(3-3)^2 + (7-(-2))^2} = 9$$

Entonces podemos escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia como:

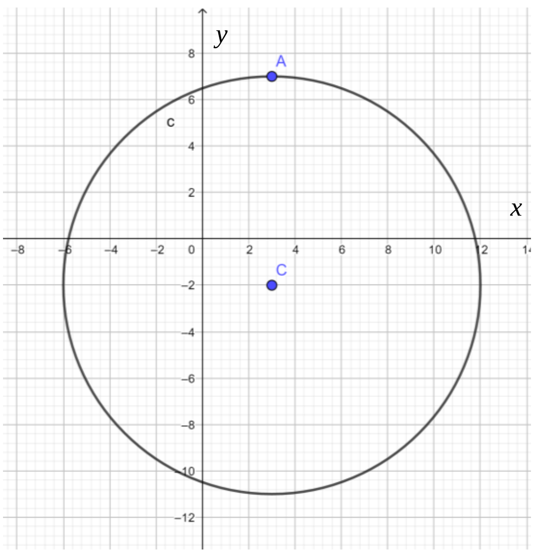
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9^2$$

La ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia con centro en C(h,k) y radio r es:

$(x,y) = (h,k) + (r \cos \alpha + r \operatorname{sen} \alpha) \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi$

Reemplazando las coordenadas del centro y radio obtenemos:

$(x,y) = (3,-2) + (9 \cos \alpha + 9 \operatorname{sen} \alpha) \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi$



62. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto Q (-3,2) y tiene su centro en la intersección de las rectas: L_1: $3x - y + 15 = 0$ y L_2: $4x + y + 13 = 0$. Represente gráficamente.

Respuestas:

Determinamos el centro de la circunferencia, en el punto de intersección de las dos rectas:

L_1: $3x - y + 15 = 0 \qquad y = 3x + 15 \qquad$ (I)
L_2: $4x + y + 13 = 0 \qquad y = -4x - 13 \qquad$ (II)

Igualando ambas ecuaciones:

$$3x + 15 = -4x - 13$$
$$3x + 4x = -13 - 15$$
$$7x = -28$$
$$x = -4$$

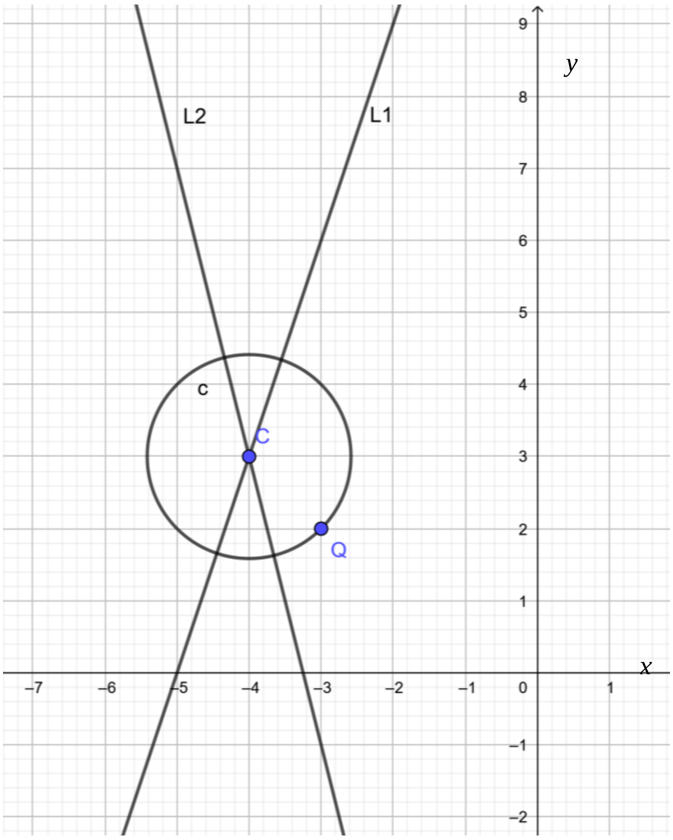
reemplazando en (I), y = 3 (-4) + 15 = -12 + 15 = 3

entonces las coordenadas del Centro es C (-4,3) Considerando el Centro de la Circunferencia C (-4,3), y que pasa por el punto Q (-3,2), podemos determinar el módulo de CA, para calcular el radio de dicha circunferencia:

$$\| \boldsymbol{CQ} \| = \sqrt{\left((-3)-(-4)\right)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$$

Entonces podemos escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia como:

$$(\mathrm{x}+4)^2 + (\mathrm{y}-3)^2 = 2$$



63. Halle la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es C (3,-2) y es tangente a la recta L de ecuación: L: 3x – 2y = 0. Grafique.

Se determina la ecuación de la recta L, en el punto de tangencia $T(x_T, y_T)$: $y_T = \frac{3}{2}x_T$, (I).

Sabemos que un vector director de la recta L puede ser $\boldsymbol{dL} = (B, -A)$ siendo la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$, por lo tanto:

$\boldsymbol{dL} = (-2, -3)$ es un vector director de la recta tangente, que es perpendicular al vector $\boldsymbol{CT} = \boldsymbol{OT} - \boldsymbol{OC} = (x_T - 3\,, y_T + 2)$ entonces:

$$\mathbf{CT} \cdot \boldsymbol{dL} = 0$$
$$(x_T - 3\,, y_T + 2) \cdot (-2, -3) = 0$$

$$-2x_T + 6 - 3y_T - 6 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II) tenemos:

$$-2x_T + 6 - 3\,\frac{3}{2}x_T - 6 = 0$$
$$-2x_T - \frac{9}{2}x_T = 0$$

$x_T = 0$ entonces $y_T = 0$

Es decir que la recta pasa por el punto T (0,0). Considerando el Centro de la Circunferencia C (3,-2), y que pasa por el punto T (0,0), podemos determinar el módulo de $\boldsymbol{CT}$, para calcular el radio de dicha circunferencia:

$$r = \| \boldsymbol{CT} \| = \sqrt{(0-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13}$$

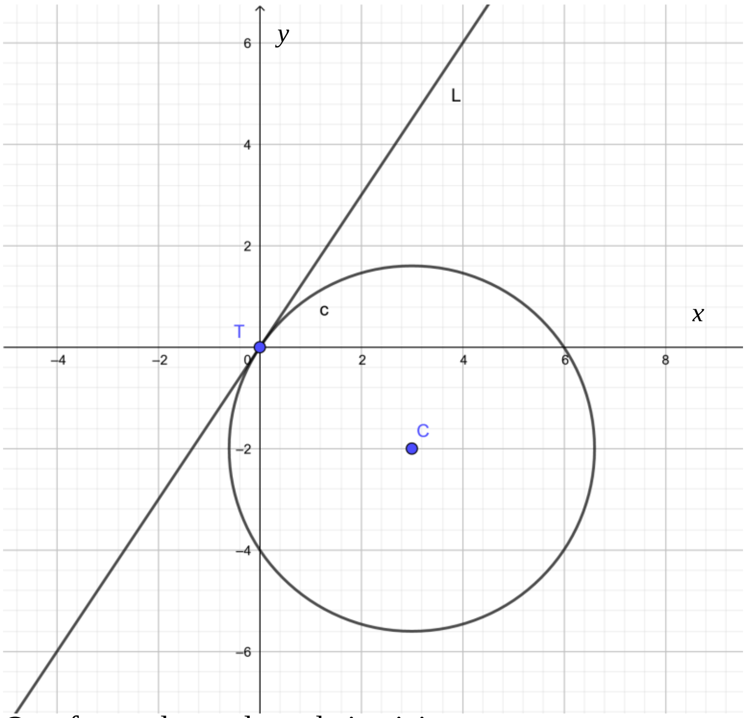
Entonces podemos escribir la ecuación cartesiana de la circunferencia como:

$$C: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

Desarrollando los binomios, se puede determinar la ecuación general de la circunferencia:

$$C: x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 13$$

$$C: x^2 - 6x + y^2 + 4y = 0$$



<u>Otra forma de resolver el ejercicio:</u>

Sabemos que la ecuación general de una circunferencia tendrá la siguiente forma:

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como conocemos el centro de la circunferencia $C(3,-2)$,podemos encontrar los valores de los coeficientes D y E:

- Como $D = -2h$, entonces $D = -6$.
- Como $E = -2k$, entonces $E = 4$.

Podemos reescribir la ecuación general de la circunferencia como:

$C: x^2 + y^2 - 6x + 4y + F = 0$

Como la recta L es tangente a la circunferencia, el siguiente sistema de ecuaciones solo tendrá una solución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y + F = 0 \\ y = \dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

Al resolver el sistema llegamos a la siguiente ecuación cuadrática, cuyo discriminante debe ser nulo:

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 6x + 4\left(\frac{3}{2}x\right) + F = 0$$

$$\frac{13}{4}x^2 + F = 0$$

El discriminante está dado por $\Delta = 0^2 - 4\frac{13}{4}F = 0$ de donde podemos despejar F y obtenemos que:

$$F = 0$$

Concluimos que la ecuación general de la circunferencia que estábamos calculando es:

$$C: x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$$

---

64. Dadas las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$ y C_2: $4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0$,

a) Halle la ecuación del eje radical de las mismas.
b) Demuestre que el eje radical es perpendicular a la recta que une sus centros.
c) Represente Gráficamente.
d) Halle la ecuación de la circunferencia C_3, cuyo centro tiene abscisa h=7, y que pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2.
e) Halle la ecuación de la circunferencia C_4 cuyo centro es el origen de coordenadas y tal que C_4 es tangente a la recta que une los centros de las circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2. Justifique su respuesta.

Respuestas:

Se puede a la ecuación de la circunferencia C_2, dividir ambos miembros por 4, entonces trabajamos con la ecuación:

C2: $x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4 = 0$

Aplicando el concepto de familias de circunferencias, la ecuación de la familia reducida de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + \ \lambda(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0$$

a) Para la determinación de la ecuación del eje radical, se debe hacer λ = -1

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + (-1)(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0$$

$$x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + (-2 + 8)x + (-10 + 3)y + (10 - \frac{37}{4}) = 0$$

$$6x - 7y + \frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{6}{7}x + 3/28$$

b) Se deben determinar las coordenadas de los centros y radios de ambas circunferencias, y así determinar el vector $\boldsymbol{C_1C_2}$, tal que el producto escalar entre ***dLer*** **.** $\boldsymbol{C_1C_2}$= 0

C1 h = -D/2 = 1 C_1(1,5) y r = 4

k = -E/2 = 5

C2 h = -D/2 = 4 C_2 (4,3/2) y r = 3

k = -E/2 = 3/2

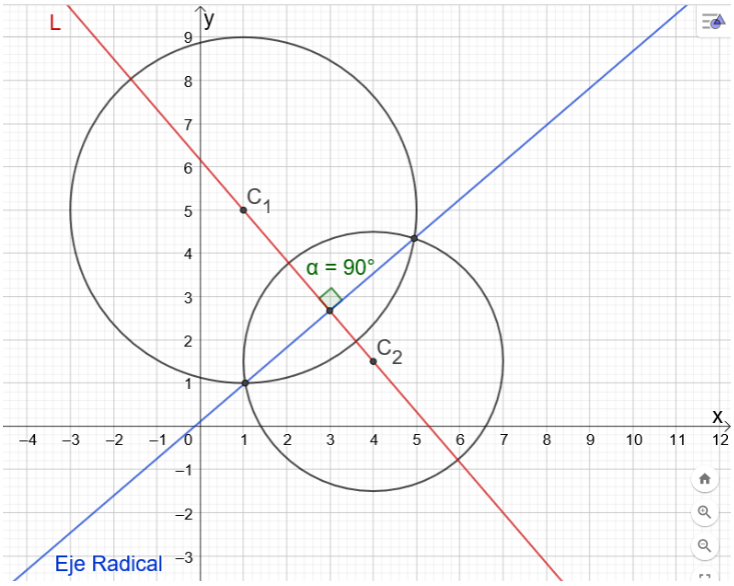
Entonces las componentes del vector $\boldsymbol{C_1C_2}$ = (4-1;3/2 -5) = (3,-7/2)

Las componentes del vector director del eje radical ***dLer*** = (-7, -6)

Entonces ***dLer*** **.** $\boldsymbol{C_1C_2}$ = 3 . (-7) + (-7/2) . (-6) = -21 + 21 = 0

Como el producto escalar entre el eje radical y el vector $\boldsymbol{C_1C_2}$ es cero, hemos probado que ambas rectas son perpendiculares.

c) Gráfico



d) Aplicando el concepto de familias de circunferencias, la ecuación de la familia reducida de la circunferencia es:

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0$ (1)

$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + (-2-8\lambda)x + (-10-3\lambda)y + 10 + 37/4\,\lambda = 0$ dividimos todo por $(1+\lambda)$

Ecuación de la C3: $x^2 + y^2 + \frac{(-2-8\lambda)}{(1+\lambda)}x + \frac{(-10-3\lambda)}{(1+\lambda)}y + \frac{10+37/4\,\lambda}{(1+\lambda)} = 0$

Como dato sabemos que h= 7 la abscisa del centro de C_3, por lo tanto:

h = -D/2 =$\frac{-(-2-8\lambda)}{2(1+\lambda)} = 7$ (2)

h = $\frac{(-2-8\lambda)}{(1+\lambda)} = -14$

$$(-2-8\lambda) = (-14)(1+\lambda)$$

$$(-2-8\lambda) = (-14-14\lambda)$$

$$-8\lambda + 14\lambda = -14 + 2$$

$$6\lambda = -12$$

$$\lambda = -2 \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1), se obtiene la ecuación de la circunferencia C3:

$$\text{C3}: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 + (-2)(x^2 + y^2 - 8x - 3y + 37/4) = 0$$

$$C3: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 - 2x^2 - 2y^2 + 16x + 6y - 37/2 = 0$$

$$C3: -x^2 - y^2 + 14x - 4y - 17/2 = 0$$

Multiplicando por (-1) ambos miembros y hemos obtenido la ecuación general de la circunferencia:

$$C3: x^2 + y^2 - 14x + 4y + 17/2 = 0$$

e) Tenemos como datos que la recta tangente es la recta que une los centros C_1 y C_2, entonces $\boldsymbol{dLT} = \boldsymbol{C_1C_2}$, y el centro de la circunferencia C_4 es $C_4(0,0)$

Para la determinación de la ecuación de la recta que une los centros, se puede aplicar la ecuación de la recta, conocido dos puntos y la pendiente:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(y - 5) = \frac{\frac{3}{2} - 5}{4 - 1}(x - 1)$$

$$(y - 5) = \frac{-\frac{7}{2}}{3}(x - 1)$$

$$(y - 5) = -7/6\,(x - 1)$$

$$(y - 5) = -7/6\,x + 7/6$$

$$y = -\frac{7}{6}(x - 1) + 5$$

$$7/6\,x + y - 37/6 = 0$$

Como el punto de tangencia $T(x_T, y_T)$ pertenece a la recta, debe satisfacer la misma, entonces:

$$y_T = -\frac{7}{6}(x_T - 1) + 5 (4)$$

Entonces el $\boldsymbol{dLT}$ = (1, -7/6) y el vector determinado por $\boldsymbol{C_4T} = (x_T - 0, y_T - 0) = (x_T, y_T)$

Además $\boldsymbol{dLT}$. $\boldsymbol{C_4T}$ = 0

$$x_T - \frac{7}{6}y_T = 0$$

$$x_T = \frac{7}{6}y_T$$

$$y_T = 6/7x_T \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4)

$$6/7x_T = -\frac{7}{6}(x_T - 1) + 5$$

$$\frac{6}{7}x_T = -\frac{7}{6}x_T + \frac{37}{6}$$

$$\frac{6}{7}x_T + \frac{7}{6}x_T = \frac{37}{6}$$

$$\frac{85}{42}x_T = \frac{37}{6}$$

$$x_T = \frac{259}{85} \qquad (6)$$

Reemplazando (6) en (4)

$$y_T = -\frac{7}{6}\left(\frac{259}{85} - 1\right) + 5$$

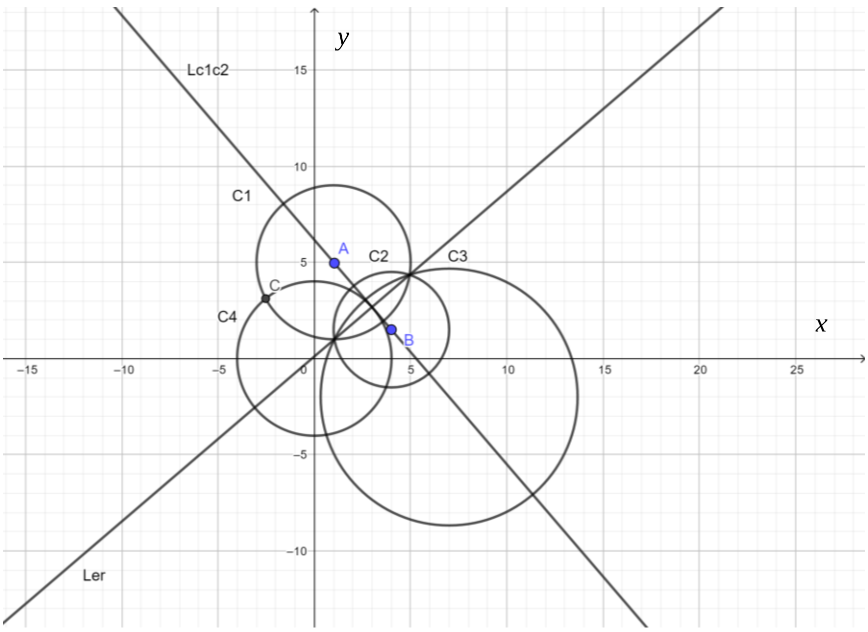
$$y_T = \frac{222}{85}$$

El punto de tangencia es aproximadamente T (3.047,2.612) conocido dicho punto, podemos determinar el radio como:

$$r = \| \boldsymbol{C_4T} \| = \sqrt{\left(\frac{259}{85} - 0\right)^2 + ((222/85 - 0)^2} = 4.01$$

Conocido el radio y el centro, se puede obtener la ecuación de la circunferencia C4: $x^2 + y^2 = 4.01^2$.

Graficamos todos los lugares geométricos y podemos afirmar que la circunferencia C4 no pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C1 y C2.



65. Indique las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio 6 con centro en C(-2,1) y determine a partir de ellas, dos puntos de dicha circunferencia. Represente Gráficamente.

Respuestas :

La ecuación vectorial paramétrica de la circunferencia descentrada (C(h,k)) y radio r es:

$(x, y) = (h, k) + (r\cos\alpha + r\,sen\,\alpha)$

$0 \leq \alpha < 2\pi$

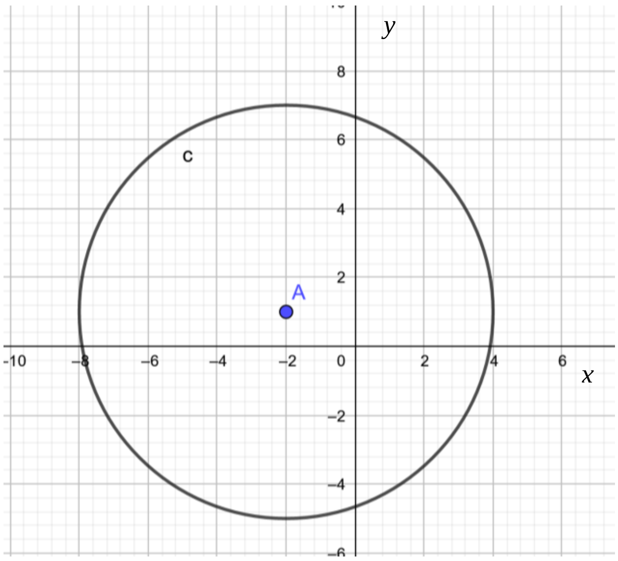
Reemplazando las coordenadas del centro y radio obtenemos:

(x,y) = (-2,1) + (6 cos α + 6 sen α)   0 ≤ α <2 π

Para obtener dos puntos, podemos considerar dos ángulos, por ejemplo en π/2 y π:

P_1(x,y) = (-2,1) + (6 cos π/2 + 6 sen π/2) = (-2,7)

P_2(x,y) = (-2,1) + (6 cos π + 6 sen π) = (-8,1)



Luego los puntos $P_1(-2{,}7)$ y $P_2(-8{,}1)$ son dos puntos de la circunferencia.

---

66. En un proyecto vial, se requiere diseñar una rotonda para mejorar el empalme de dos rutas nacionales. Se toma como referencia un sistema coordenado XY, para el cual el centro de la rotonda se ubicará en el punto C (-70;0) m. El diámetro de la rotonda será de 60m. Se prevé que las vías de acceso desde y hacia una de las rutas serán las tangentes a la rotonda desde el origen de coordenadas.

a) Obtenga la ecuación cartesiana y la ecuación general de la circunferencia que describe la rotonda.
b) Encuentre los puntos de intersección entre la circunferencia y las rectas tangentes a la misma que pasan por el punto O (0,0) (Exprese la solución aproximando con un decimal).
c) Obtenga ecuaciones generales que permitan describir a las vías de acceso, siendo éstas las rectas tangentes a la circunferencia desde el punto O (0,0).
d) Represente gráficamente el problema planteado y la totalidad de las soluciones halladas.

Respuestas:

a) Se conoce el centro C(-70, 0) y el radio r= D/2 = 30m, entonces la ecuación cartesiana, se puede escribir como:

$$C:\ (x+70)^2 + y^2 = 30^2$$

Desarrollando el binomio y ordenando, se puede llegar a la ecuación general como:

$$C:\ x^2 + 2\,x\,70 + 70^2 + y^2 - 30^2 = 0$$
$$C:\ x^2 + 140\,x + 4900 + y^2 - 900 = 0$$

$$C:\ x^2 + y^2 + 140x + 4000 = 0$$

b) Sea $T(x_T, y_T)$ el punto de tangencia entre la circunferencia y la recta tangente a la misma que pasa por O (0,0).

La recta tangente es perpendicular al vector $\overline{CT}$, entonces:

$$\overline{CT} \cdot \overline{OT} = 0$$
$$(x_T + 70\ , y_T) \cdot (x_T, y_T) = 0$$
$$x_T^2 + y_T^2 + 70x_T = 0 \qquad \text{(I)}$$

Además, las coordenadas del punto $T(x_T, y_T)$ satisfacen la ecuación de la circunferencia ya que T pertenece a la misma, entonces:

$$x_T^2 + y_T^2 + 140x_T + 4000 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II):

$$-70x_T + 140x_T + 4000 = 0 \quad \Rightarrow x_T = -57.1\ m$$

$$y_T = \pm\sqrt{-x_T^2 - 140x_T - 4000} = \pm 27.1\ m \ \rightarrow \ \begin{matrix} T_1(-57.1\ , 27.1)m \\ T_2(-57.1\ , -27.1)m \end{matrix}$$

c) La ecuación general de la recta en R2 es: $Ax + By + C = 0$, donde $\bar{n} = (A, B)$ es un vector normal a la recta.
Como las rectas pasan por el origen, entonces: C=0

El vector $\overline{CT_1} = (-57.1 + 70{,}27.1 - 0) = (12.9\ , 27.1)$ es normal a la recta L_1
El vector $\overline{CT_2} = (-57.1 + 70, -27.1 - 0) = (12.9\ , -27.1)$ es normal a la recta L_2
Entonces:

$$\begin{matrix} L_1:\ 12.9x + 27.1y = 0 \\ L_2:\ 12.9x - 27.1y = 0 \end{matrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} L_1: -27.1x - 57.1y = 0 \\ L_2:\ \ 27.1x - 57.1y = 0 \end{matrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} L_1:\ \ 0.47x + y = 0 \\ L_2: -0.47x + y = 0 \end{matrix}$$

c) Gráfico: