

Análisis Matemático I

Clase 9: Aplicaciones de la derivada. Linealización. Diferenciales. Máximos y mínimos.

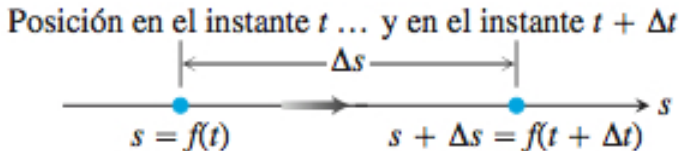
Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Abril, 2020

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

Supongamos que la función $s = f(t)$ describe la posición de un objeto en función del tiempo que se desplaza en línea recta:



Luego, el desplazamiento Δs del objeto en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ es:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Así, la velocidad promedio v_{prom} en dicho intervalo viene dada por:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

Para determinar la velocidad en el instante t , se debe calcular la velocidad promedio en el intervalo de t a $t + \Delta t$, y hacer tender Δt a cero. Así, la **velocidad instantánea** del objeto en el instante t es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

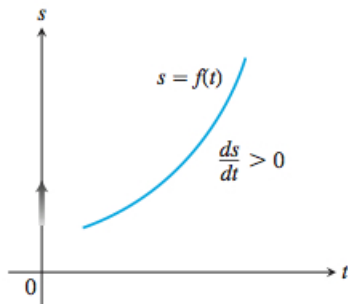
Es decir:

$$v(t) = s'(t).$$

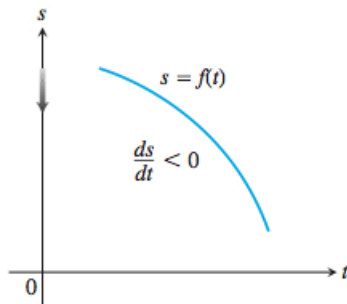
IMPORTANTE: Si el objeto se desplaza hacia la derecha, entonces $s'(t) > 0$, Por otro lado, si se desplaza hacia la izquierda, entonces $s'(t) < 0$.

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

En el plano espacio-tiempo:



s aumenta:
pendiente positiva, así que el
movimiento es hacia arriba.



s disminuye:
pendiente negativa, así que el
movimiento es hacia abajo.

Así, el signo de la derivada indica la dirección del movimiento

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

La **rapidez** del movimiento se define como sigue:

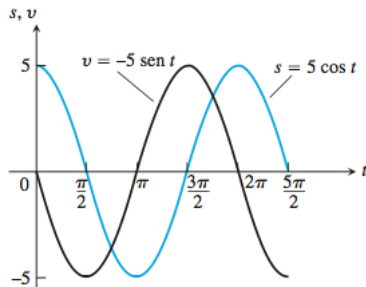
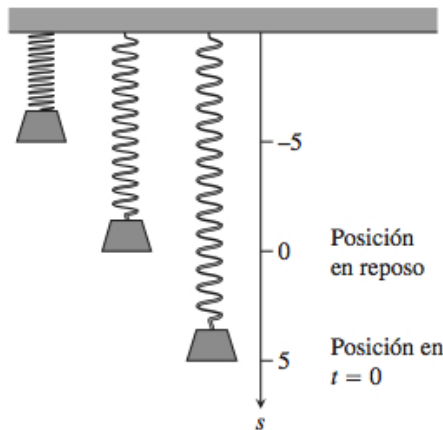
$$\text{Rapidez en el instante } t = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt}(t) \right|.$$

La tasa instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se denomina **aceleración**. Así:

$$\text{aceleración en el instante } t = a(t) = \frac{dv}{dt}(t).$$

Tasa de cambio instantánea: aplicaciones a cinemática

Movimiento Armónico Simple: es un movimiento donde el objeto oscila indefinidamente. Es un movimiento periódico, por lo que generalmente es modelado con funciones trigonométricas.



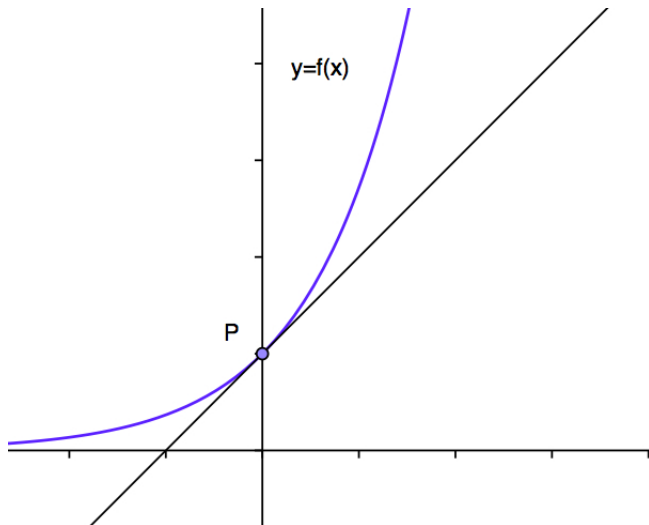
En Economía, las tasas de cambio instantáneas se denominan *marginales*.

Ejemplo: si $c = c(x)$ es el costo de producir una cantidad x de cierto producto, entonces el **costo marginal de producción** c' es la tasa de cambio instantánea del costo con respecto al nivel de producción, es decir:

$$c'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h}.$$

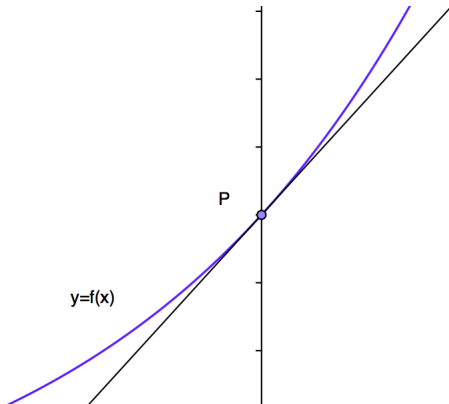
Linealización

Para introducir el concepto de Linealización consideremos el gráfico de una función $y = f(x)$ y la recta tangente a f en el punto P :



Linealización

Si realizamos un acercamiento al punto P , obtenemos la imagen:



Así, cerca del punto de tangencia, las gráficas de la función y de la recta tangente se vuelven indistinguibles. Esto implica que es posible utilizar la ecuación de la recta tangente para obtener buenas aproximaciones de la función f .

Definición de Linealización

Sea f una función derivable en $x = a$. Definimos la linealización de f en a como la función:

$$L(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En general, cerca del punto a , la linealización es una *buena* aproximación de la función f .

Ejemplo: determine la linealización de:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

en el punto $x = 0$.

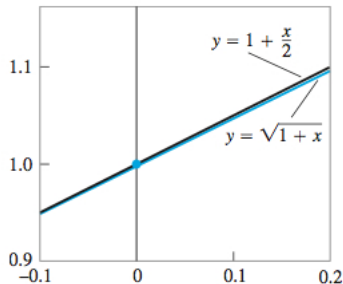
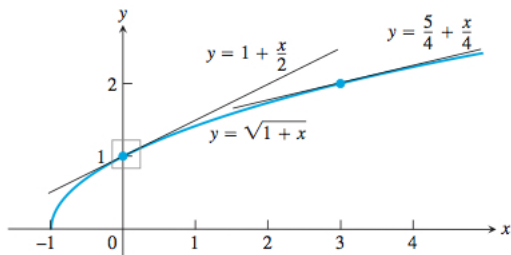
Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}.$$

Además, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$. Luego la linealización de f en $x = 0$ es:

$$L(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Linealización



Linealización

La linealización de una función en un punto $x = a$ se puede utilizar para aproximar los valores de la función cerca del punto a :

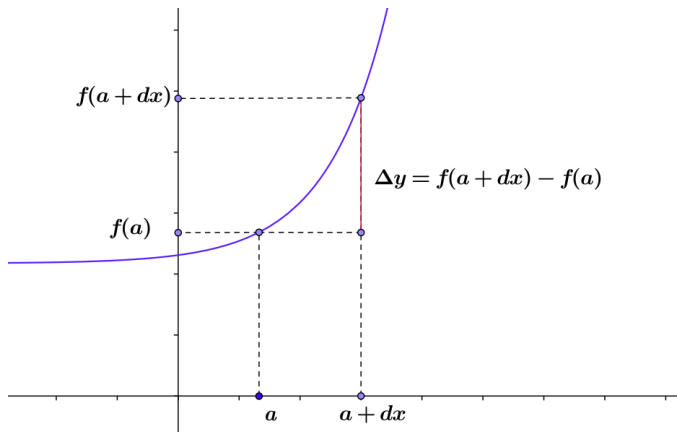
Aproximación	Valor verdadero	$ \text{Valor verdadero} - \text{aproximación} $
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

En las próximas diapositivas vamos a estudiar más profundamente la aproximación que brinda la linealización a la función.

Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x = a$. Cuando nos movemos de $x = a$ al punto $x = a + dx$, la función experimenta un cambio dado por:

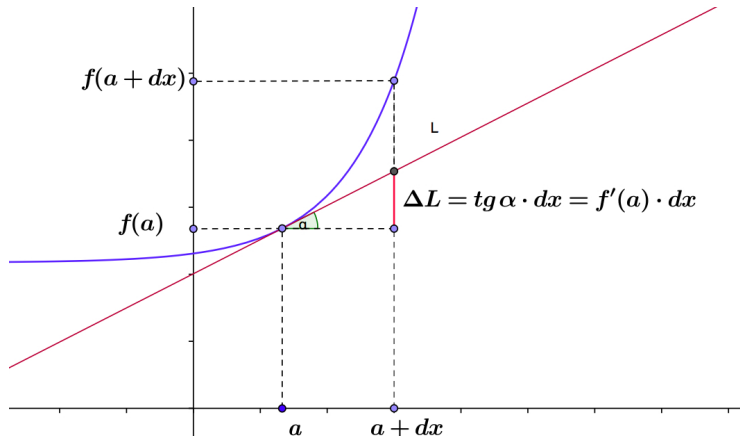
$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$



Diferenciales

Por otro lado, el cambio en la recta tangente L está dado por:

$$\Delta L = f'(a)dx$$



Dado que la recta L representa una aproximación de f para valores cercanos a $x = a$ tenemos:

$$\Delta y \approx \Delta L.$$

Es decir:

$$f(a + dx) - f(a) \approx f'(a)dx \text{ o: } f(a + dx) \approx f(a) + f'(a)dx$$

La cantidad:

$$\Delta L = f'(a)dx.$$

recibe el nombre de Diferencial de f en a y se simboliza por df o dy :

$$dy = f'(a)dx.$$

Así, el diferencial de f en $x = a$ es el cambio que experimenta la recta tangente a $(a, f(a))$ cuando x pasa de a a $a + dx$.

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10\text{cm}$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1\text{cm}$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Ejemplo: supongamos que un disco metálico de radio $r = 10\text{cm}$ se somete a una fuente de calor y se dilata uniformemente hasta alcanzar un radio de $r = 10.1\text{cm}$. Utilizando diferenciales estime el cambio en el área del disco y compárelo al cambio real.

Ejemplo: la función área en términos del radio del disco es:

$$A(r) = \pi r^2.$$

Queremos estimar el cambio del área cuando r pasa de 10 cm a 10.1 cm. Entonces el cambio en la variable independiente, que llamaremos dr es:

$$dr = 10.1 - 10 = 0.1 \text{ cm}.$$

Luego, una aproximación del cambio en el área es:

$$\Delta A = A(10.1) - A(10) \approx dA = A'(10)dr = 2\pi \cdot 10 \text{ cm} \cdot 0.1 \text{ cm} = 2\pi \text{ cm}^2.$$

Ahora el cambio real es:

$$A(10.1) - A(10) = 2.01\pi \text{ cm}^2.$$

Sensibilidad al cambio

La ecuación:

$$df = f'(x)dx$$

indica qué tan sensible es el valor de f a un cambio en los valores de x . Cuanto mayor sea el valor de $f'(x)$ mayor será el efecto de un cambio dado por dx .

Cuando nos movemos de a a $a + dx$, es posible describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	Estimado
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a) dx$
Cambio relativo	$\frac{\Delta f}{f(a)}$	$\frac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\frac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\frac{df}{f(a)} \times 100$

Objetivo de las próximas clases

En las próximas clases, vamos a aplicar las teorías de límites y de derivación para realizar trazados de curvas $y = f(x)$ con precisión.

Límites: hemos visto que se aplican para detectar:

- puntos de continuidad de la función,
- asíntotas verticales, horizontales y oblicuas,
- discontinuidades de la función.

Derivadas: veremos que se aplican para:

- determinar dónde la función f alcanza sus valores máximos y mínimos.
- detectar intervalos donde la función crece y donde decrece.
- estudiar la curvatura 'hacia arriba' o 'hacia abajo' de la gráfica de f .
- determinar dónde se presenta un cambio de curvatura (punto de inflexión)

Máximos y mínimos absolutos

Sea f una función con dominio D . Decimos que f tiene un máximo absoluto en D en el punto $c \in D$ si:

$$f(x) \leq f(c)$$

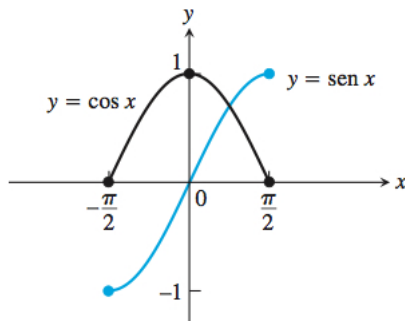
para todo x en D . De forma análoga, decimos que f tiene un mínimo absoluto en D en el punto c si:

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo x en D .

Valores extremos de una función

Considere las funciones $y = \text{sen}(x)$ y $y = \cos(x)$ para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.



El máximo absoluto de $y = \text{sen}(x)$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es 1 . El mínimo absoluto de $y = \text{sen}(x)$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es -1 . Analizar la función coseno.

Valores extremos de una función

Consideremos los siguientes casos (realizar gráficos):

Regla de la función	Dominio D	Extremos absolutos en D
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	No hay máximo absoluto. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. No hay mínimo absoluto.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	No hay extremos absolutos.

Observación importante: los valores máximos y mínimos absolutos de una función dependen del dominio en donde se considere la función.

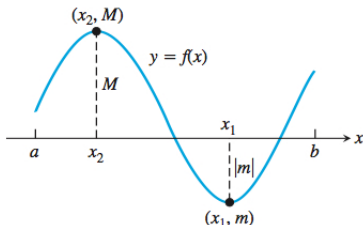
Teorema de los valores extremos para funciones continuas

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces existen puntos $x_1 \in [a, b]$ y $x_2 \in [a, b]$ tales que:

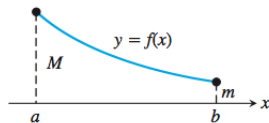
$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

En otras palabras, una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza su valor mínimo absoluto y su valor máximo absoluto en $[a, b]$.

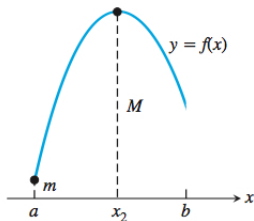
Valores extremos de una función continua



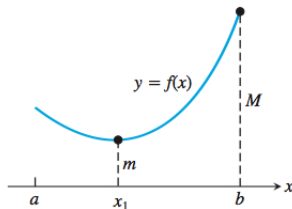
Máximo y mínimo en puntos interiores.



Máximo y mínimo en los extremos del intervalo.



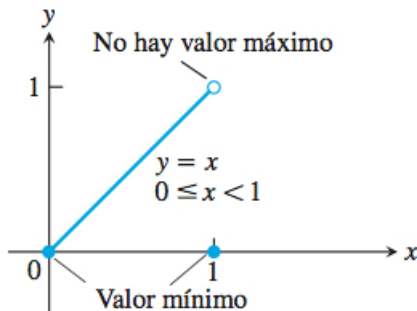
Máximo en punto interior, mínimo en un extremo.



Mínimo en un punto interior, máximo en un extremo.

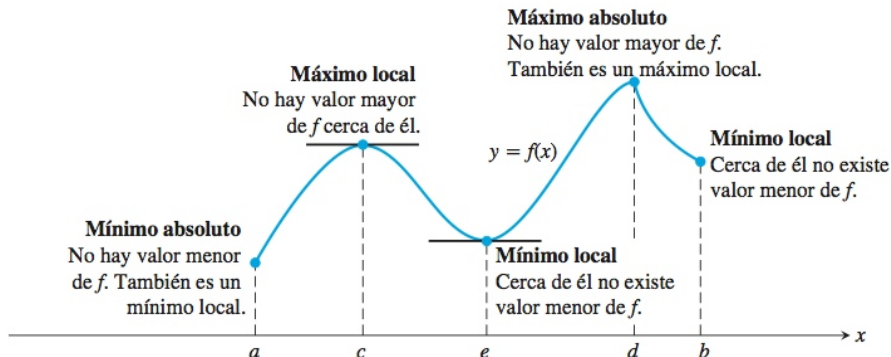
Valores extremos de una función

Un punto de discontinuidad puede evitar que una función tenga un extremo:



Extremos relativos o locales

Introducción a extremos locales.



Extremos locales o relativos

Sea f una función definida en un dominio D . Decimos que f tiene un máximo local o relativo en el punto c si existe un intervalo abierto $(c - r, c + r)$ centrado en c tal que:

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo x que pertenezca a D y a $(c - r, c + r)$. De forma similar, decimos que f tiene un mínimo local o relativo en el punto c si existe un intervalo abierto $(c - r, c + r)$ centrado en c tal que:

$$f(x) \geq f(c)$$

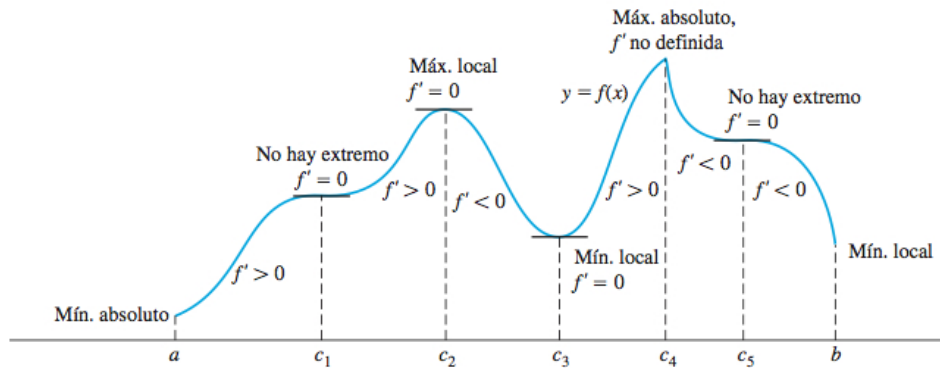
para todo x que pertenezca a D y a $(c - r, c + r)$.

Observar:

- Si f tiene un máximo absoluto en c , entonces tiene un máximo relativo en c . El recíproco no siempre es cierto (ilustrar con un ejemplo).
- Si f tiene un mínimo absoluto en c , entonces tiene un mínimo relativo en c . El recíproco no siempre es cierto (ilustrar con un ejemplo).

¿Cómo determinar extremos relativos y/o absolutos en funciones continuas?

Observar el siguiente gráfico:



¿Cómo determinar extremos en funciones continuas?

Candidatos a ser puntos donde f tiene un extremo (relativo o absoluto):

- Puntos x donde $f'(x) = 0$.
- Puntos donde f' no existe.
- Puntos que no son interiores al dominio de f (generalmente, serán los extremos del dominio de f).

¿Cómo determinar extremos en funciones continuas?

Candidatos a ser puntos donde f tiene un extremo (relativo o absoluto):

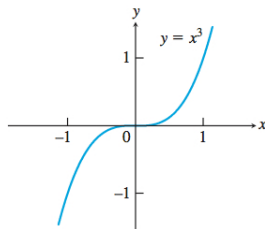
- Puntos x donde $f'(x) = 0$.
- Puntos donde f' no existe.
- Puntos que no son interiores al dominio de f (generalmente, serán los extremos del dominio de f).

Punto Crítico

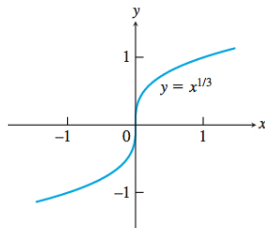
Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $c \in (a, b)$ es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe.

Así, los candidatos en donde la función tiene extremos son los puntos críticos y los puntos que no son interiores al dominio.

No en todos los puntos críticos hay extremos



(a)



(b)

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Procedimiento para determinar extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$

- (1) Determine los puntos críticos de f en (a, b) .
- (2) Evalúe f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo a y b .
- (3) El valor máximo de f en $[a, b]$ será el mayor de los valores obtenidos en (2), y el valor mínimo, el menor de los valores obtenidos en (2).

Ejemplo: determine los extremos absolutos de $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$ y de $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$.

Solución: consideremos la función $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$. Observar que f es continua en $[-2, 1]$ por ende f alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza f los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de f en $(-2, 1)$. Observar que f es un polinomio por ende admite derivada en todo el intervalo $(-2, 1)$. Así los únicos puntos críticos son aquéllos donde $f'(t) = 0$. Entonces:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{2} \text{ (no pertenece a } [-2, 1]).$$

Solución: consideremos la función $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$. Observar que f es continua en $[-2, 1]$ por ende f alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza f los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de f en $(-2, 1)$. Observar que f es un polinomio por ende admite derivada en todo el intervalo $(-2, 1)$. Así los únicos puntos críticos son aquéllos donde $f'(t) = 0$. Entonces:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{2} \text{ (no pertenece a } [-2, 1]).$$

- Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = -32$$

$$f(1) = 7$$

Solución: consideremos la función $f(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$. Observar que f es continua en $[-2, 1]$ por ende f alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza f los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de f en $(-2, 1)$. Observar que f es un polinomio por ende admite derivada en todo el intervalo $(-2, 1)$. Así los únicos puntos críticos son aquéllos donde $f'(t) = 0$. Entonces:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{2} \text{ (no pertenece a } [-2, 1]).$$

- Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

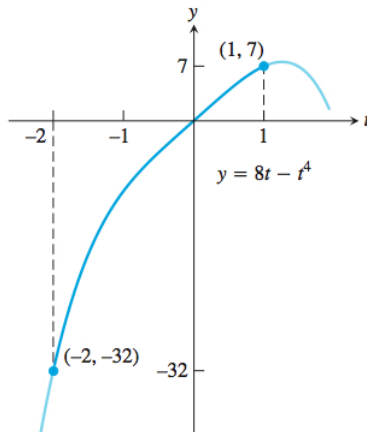
$$f(-2) = -32$$

$$f(1) = 7$$

- Así, f alcanza su máximo absoluto en $t = 1$ y el mínimo absoluto en $t = -2$.

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Ejemplo



Solución: consideremos la función $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$. Observar que g es continua en $[-2, 3]$ por ende g alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza g los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de g en $(-2, 3)$. Observar que $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ y g no es derivable en $x = 0$. También:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

lo cual genera una contradicción. Luego, el único punto crítico de g es $x = 0$.

Solución: consideremos la función $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$. Observar que g es continua en $[-2, 3]$ por ende g alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza g los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de g en $(-2, 3)$. Observar que $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ y g no es derivable en $x = 0$. También:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

lo cual genera una contradicción. Luego, el único punto crítico de g es $x = 0$.

- Evaluamos g en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$g(-2) = \sqrt[3]{4}$$

$$g(3) = \sqrt[3]{9}$$

$$g(0) = 0$$

Solución: consideremos la función $g(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$. Observar que g es continua en $[-2, 3]$ por ende g alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo. Para localizar dónde alcanza g los extremos, aplicamos el procedimiento de la diapositiva anterior.

- Primero encontramos los puntos críticos de g en $(-2, 3)$. Observar que $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ y g no es derivable en $x = 0$. También:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

lo cual genera una contradicción. Luego, el único punto crítico de g es $x = 0$.

- Evaluamos g en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$g(-2) = \sqrt[3]{4}$$

$$g(3) = \sqrt[3]{9}$$

$$g(0) = 0$$

- Así, g alcanza su máximo absoluto en $x = 3$ y el mínimo absoluto en $x = 0$.

¿Cómo determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

Ejemplo

