Ejercicio 3a: Indique cuál de los elementos pertenece al Núcleo de la T.L.

a) Para $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ tal que $T(x,y,z) = x - y + z$.

1) ---- 0   2) ~~X~~ (2,1,0)   ---- (a, a+b, c)

3) ---- (-1,2,3)   ~~X~~ (2,2,0)   4) ~~X~~ (m-n, m, n)

Para analizar y determinar si un elemento de un espacio vectorial, en este caso $\mathbb{R}^3$, pertenece al núcleo de T.L, debe aplicarse al vector de $\mathbb{R}^3$ la transformación y su imagen debe ser el nulo del espacio vectorial W, en este caso para $W = \mathbb{R}^3$. Es decir $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ debe satisfacer:
$T(v) = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$, siendo 0 de $\mathbb{R}$.

• 1) $0 \notin V = \mathbb{R}^3$, por lo tanto, no corresponde aplicarle la T.L.

• 2) Para (2,1,0) se debe probar si cumple: $\boxed{T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0}$

Así: $T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{por definición de la T.L}}{=} 2 - 1 + 0 = 1$

Es decir, $T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$, por lo tanto: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin N(T)$

• 3) (-1,2,3) pertenecerá al núcleo de T si $\boxed{T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0}$

Prueba: $T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -1 - 2 + 3 = 0$, es decir

$$\boxed{T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0}$$

Por lo tanto el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenece al N(T)

• 4) (m-n, m, n) es un vector de $\mathbb{R}^3$ dado en forma genérica, donde $x = m-n$; $y = m$ y $z = n$

Este vector debe ser tal que $\boxed{T\left(\begin{pmatrix} m-n \\ m \\ n \end{pmatrix}\right) = 0}$

Ejercicio 32 (Continuación)

$$T\left(\begin{pmatrix} m-n \\ m \\ n \end{pmatrix}\right) = (m-n) - m + n = \cancel{m} - \cancel{n} - \cancel{m} + \cancel{n} = 0$$

Luego $\boxed{T\left(\begin{pmatrix} m-n \\ m \\ n \end{pmatrix}\right) = 0}$. Es decir: todos los vectores de la forma $u = \begin{pmatrix} m-n \\ m \\ n \end{pmatrix}$ están en el $N(T)$

Conclusión: cada vez que m y n tomen valores reales y se reemplacen en u entonces se obtendrá un elemento del $N(T)$.

- Como ejemplo, si $m = 3$ y $n = 2$

$$u = \begin{pmatrix} m-n \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ tal que}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in N(T)$$

Comprobación:

según la definición de la T.L. dada

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 - 3 + 2 = 0$$