Análisis Matemático I
Clase 3: Tasas de cambio e introducción al concepto de límite

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2020

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Introducción a la tasa de cambio instantánea

Recordar que la tasa de cambio promedio de $y = 16t^2$ en $[t_0, t_0 + h]$ es:

$$\frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}.$$

Observemos la siguiente situación:

valor de h	tasa promedio de $y = 16t^2$ para $t_0 = 1$ en $[1, 1 + h]$
1	48
0.1	33.6
0.01	32.16
0.001	32.016
0.0001	32.0016

Así, podemos decir que para $t_0 = 1$, la tasa de cambio promedio de y con respecto a t tiende al valor 32 a medida que la longitud del intervalo $[1, 1 + h]$ tiende a cero (es decir, a medida que h tiende a 0.) **Decimos que 32 (ft/s) es la tasa de cambio instantánea de y con respecto a t en $t_0 = 1$.**

Cómo determinar la tasa de cambio instantánea

Para determinar la tasa de cambio Instantánea de f en un punto $t = t_0$ realizamos los siguientes pasos:

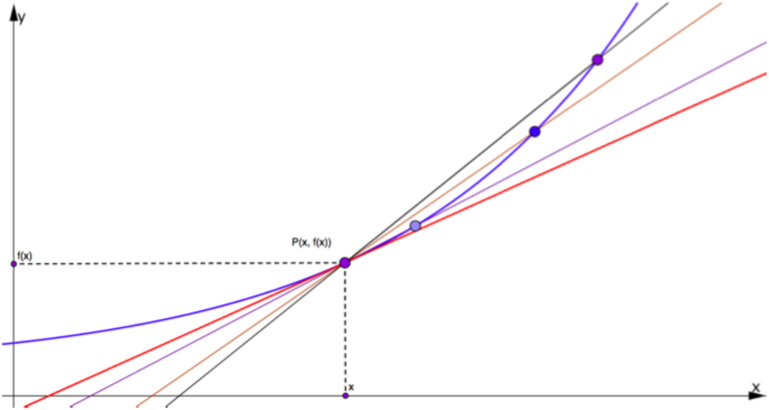
1. Determinar la tasa promedio de la función f en el intervalo $[t_0, t_0 + h]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

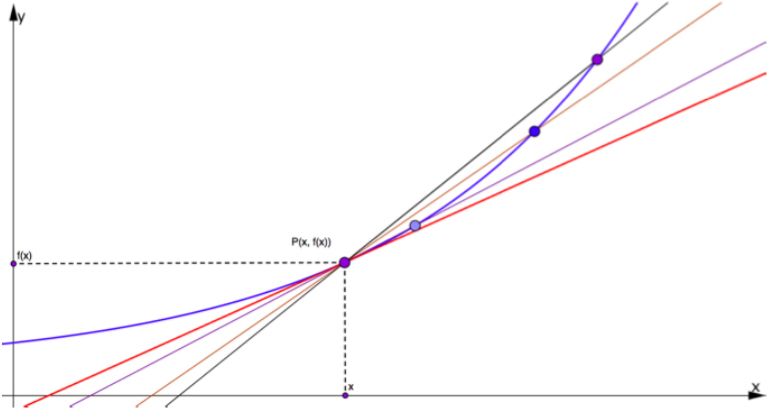
2. *Estimar* a qué número tiende la tasa promedio cuando h se hace cada vez más pequeño.
3. El número encontrado en el inciso anterior es la tasa de cambio instantánea de f con respecto a t en $t = t_0$ y se simboliza:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \text{ tasa instantánea de } f \text{ en } t_0.$$

Interpretación geométrica de la tasa instantánea



Interpretación geométrica de la tasa instantánea

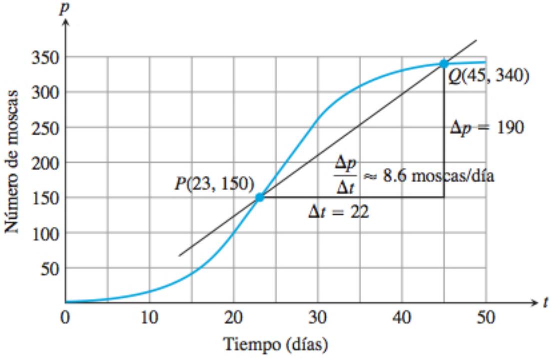


Conclusión

Tasa instantánea de f en t_0 = pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(t_0, f(t_0))$.

Un ejemplo donde se determina la tasa de cambio instantánea

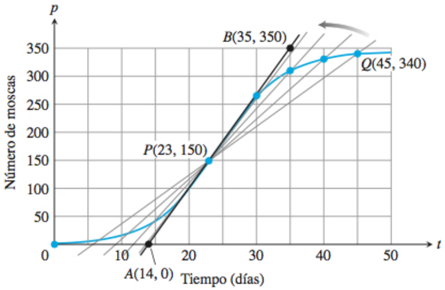
Ejemplo: a continuacón, tenemos el gráfico de la población de moscas p en función del tiempo t (medido en días). Determinar la tasa de cambio instantánea de p en $t_0 = 23$ días.



Un ejemplo donde se determina la tasa de cambio instantánea

Ejemplo:

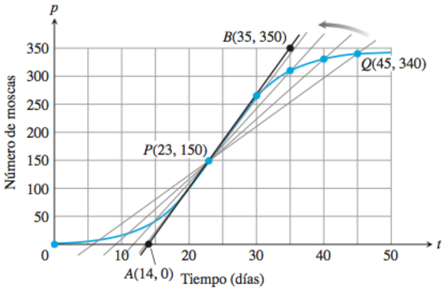
Q	Pendiente de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/día)
(45, 340)	$\dfrac{340-150}{45-23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\dfrac{330-150}{40-23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\dfrac{310-150}{35-23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\dfrac{265-150}{30-23} \approx 16.4$



Un ejemplo donde se determina la tasa de cambio instantánea

Ejemplo:

Q	Pendiente de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/día)
(45, 340)	$\dfrac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\dfrac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\dfrac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\dfrac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$



Así, la tasa de cambio instantánea de p con respecto a t en $t_0 = 23$ se puede estimar como:

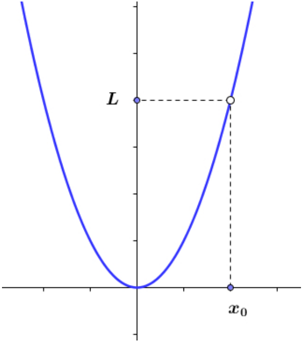
$$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16,4 \,(\text{moscas por día}).$$

¿Cómo determinar rigurosamente el comportamiento de una función alrededor de un punto de la recta real?

¿Cómo determinar rigurosamente el comportamiento de una función alrededor de un punto de la recta real?

La búsqueda de respuestas a esta pregunta nos lleva al concepto de *LÍMITE* de una función

Observar que en algunas situaciones, podemos responder los interrogantes sobre el comportamiento de una función a través de su gráfica. Por ejemplo:



Entonces, si nos preguntamos cuál es la tendencia de f cuando x se acerca cada vez más a x_0, diríamos que los valores de f tienden a L. En símbolos, vamos a escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y leemos: el límite (es decir, la tendencia) de f cuando x tiende a x_0 es L.

Por otro lado, cuando disponemos de la fórmula de la función es posible intentar obtener el comportamiento de la función cerca de x_0 dándole valores a la variable independiente x cada vez más cercanos a x_0 y evaluándolos en la función. Por ejemplo, consideremos la función:

$$f : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Supongamos que queremos saber cuál es la tendencia de f cuando x tiende a $x_0 = 1$. Observar que no podemos evaluar f directamente en 1 pues este número no pertenece al dominio de f. Lo que haremos es construir una tabla de valores apropiada.

Concepto intuitivo de límite

x	$f(x)$
0,9	1.9
0,99	1.99
0,999	1.999
1,1	2.1
1,01	2.01
1,001	2.001
1,0001	2.0001

Tabla : Valores de f cuando x tiende a 1.

Observar que los valores que se eligen deben estar cada vez más cerca de $x_0 = 1$, tanto por derecha como por izquierda. Además, excluímos el punto $x_0 = 1$ de la tabla.

Concepto intuitivo de límite

En conclusión, diríamos que la tendencia de f cuando x se acerca cada vez más a $x_0 = 1$ es 2. En símbolos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Sin embargo, tanto el enfoque gráfico como el numérico (tabla) presentan limitaciones para calcular límites. En el primer caso, cuando la función a analizar presenta un gráfico complejo o que no se puede determinar con claridad, resulta difícil encontrar el límite con este método. En el caso de la tabla de valores, darle solamente algunos valores a la variable independiente, cercanos al punto de análisis, no garantiza que el límite sea la tendencia observada en la tabla. Por ende, es necesario recurrir a herramientas analíticas que nos permitan obtener respuestas exactas. Con la finalidad de encontrar resultados exactos sin necesidad de gráficas ni tablas, vamos a introducir la definición *formal* de **límite**.

Concepto intuitivo de límite

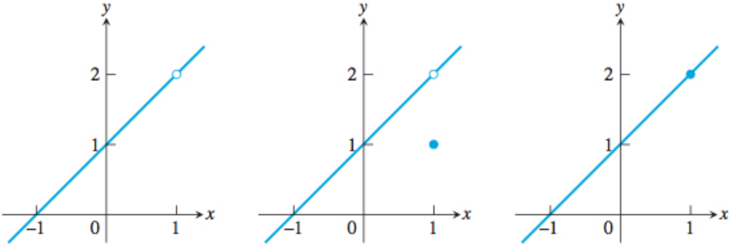
Comenzaremos con la definición informal de límite:

Definición informal de límite

Supongamos que f está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en el punto x_0. Si los valores $f(x)$ de la función f están arbitrariamente cercanos a un número L, para toda x suficientemente cercana al punto x_0, decimos que f tiende a L cuando x tiende a x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

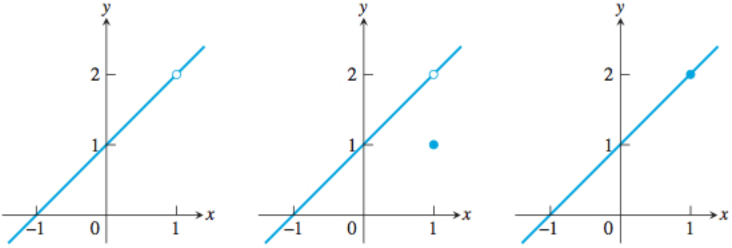
Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

Concepto intuitivo de límite: ejemplos

Estudiar el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 1.

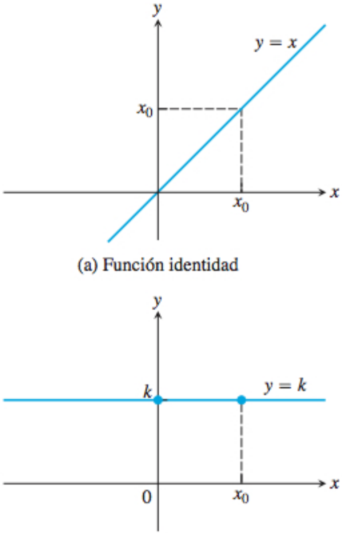


(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

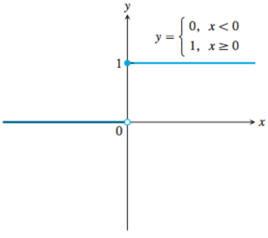
En todos los ejemplos, el límite considerado es 2!

Observación importante: el límite de una función cuando la variable independiente tiende a un valor x_0 puede existir sin que la función esté definida en el punto x_0. Es decir, para calcular límites, no es relavante si la función está definida o no en el punto de interés!!!.

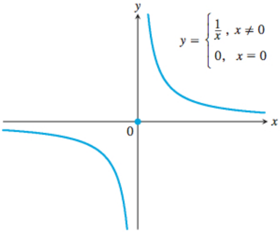
Más ejemplos: funciones identidad y constante.



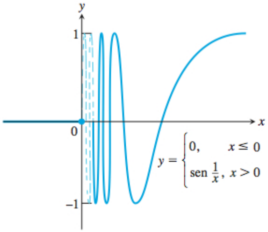
Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.



(a) Función escalón unitario $U(x)$

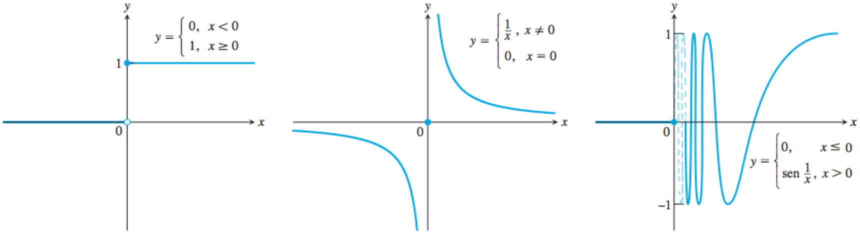


(b) $g(x)$



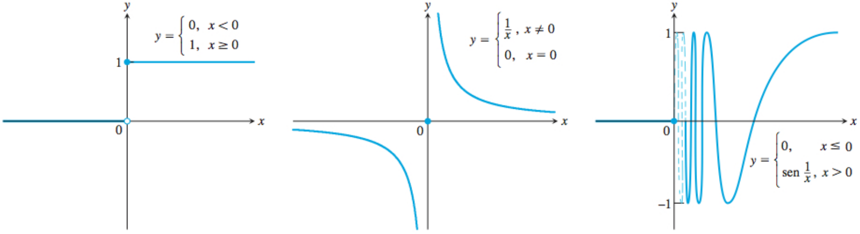
(c) $f(x)$

Más ejemplos: analizar si existe o no el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.



(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

(a) El límite $\lim_{x \to 0} U(x)$ no existe pues cuando x se acerca a 0 por la izquierda (valores negativos), la función $U(x)$ vale siempre 0, mientras que cuando x se acerca a 0 por la derecha (valores positivos), la función $U(x)$ vale siempre 1. Como los valores de la función U no se acercan a un número para todo x suficientemente cercano a 0, el límite estuadiado no existe.



(a) Función escalón unitario $U(x)$ (b) $g(x)$ (c) $f(x)$

(b) El límite $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues cuando x tiende a 0 por la derecha los valores de la función $y = g(x)$ se hacen arbitrariamente grandes. Así, los valores de g no se acercan a un determinado valor cuando x tiende a 0.

(c) Las oscilaciones de la función f cuando x tiende a 0 por la derecha hacen que los valores de la función no se acerquen a un determinado valor. Luego, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Propiedades de los límite y su aplicación al cálculo de límites

Álgebra de límites:

Teorema

Supongamos que los límites:

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x), \text{ existen.}$$

Entonces:

- $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$.
- $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$.
- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k \lim_{x\to c} f(x)$.
- $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$.
- Si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

Propiedades de los límites

Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si P y Q son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Consecuencias: cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

Además, si P y Q son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Pregunta. ¿Qué sucede si $Q(c) = 0$?

Cálculo de límites

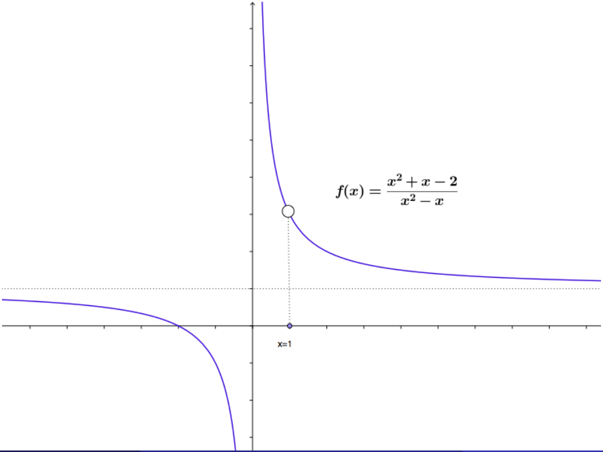
Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Observar que la función no está definida ni en 0 ni en 1:



Observar que el denominador:

$$x^2 - x$$

se anula en $x = 1$ (el punto de análisis del límite). Por ende, para calcular el límite no se puede reemplazar directamente por $x = 1$ en el cociente. Sin embargo, se puede eliminar el problema mediante factorización:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x}.$$

Observar que en el último caso, el denominador no se anula en $x = 1$. Por ende podemos reemplazar en el último cociente x por 1 y obtener:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$

Ejemplo: calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$

Observar que el denominador se anula cuando $x = 0$. Luego, para resolver el límite no se puede reemplazar directamente x por 0. Vamos a racionalizar el numerador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{(\sqrt{x^2+100}-10)}{x^2} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+100}+10)}{(\sqrt{x^2+100}+10)} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10} = \frac{1}{20}.$$