COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Ejercicios 126 a 132

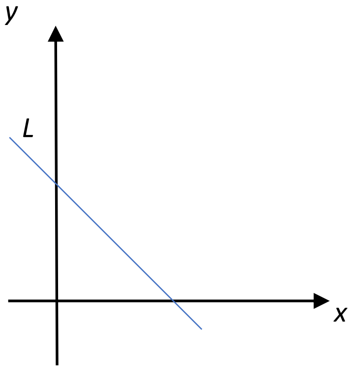
126. Dada la ecuación expresada en coordenadas polares: $\rho(sen\varphi + cos\varphi) = 3$, escríbala en coordenadas cartesianas. Determine qué tipo de curva representa y grafique.

Respuesta:

Teniendo en cuenta las ecuaciones de transformación de coordenadas, trabajamos con la ecuación de la siguiente manera:

$$\rho sen\varphi + \rho cos\varphi = 3$$

$$y + x = 3$$



Recta en R²: $y = -x + 3$

127. Determine las coordenadas polares del centro y el radio de la circunferencia de ecuación:$\rho^2 - 8\rho\cos(\varphi - 60°) + 12 = 0$. Grafique.

Respuesta:

La ecuación en coordenadas polares de la circunferencia es:

$$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)$$

Donde las coordenadas del centro son $C(\rho_1, \varphi_1)$. Si igualamos a cero y agrupamos el término independiente tenemos:

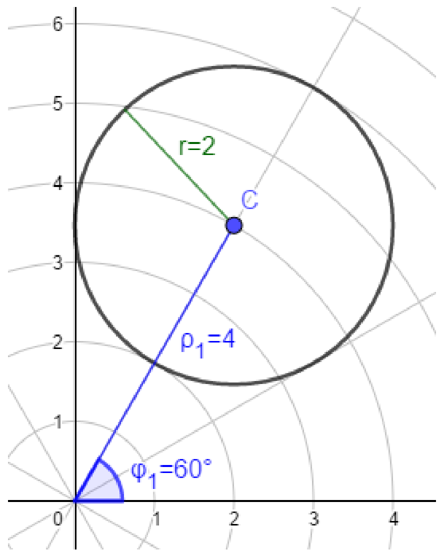
$$\rho^2 + -2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1) + \rho_1^2 - r^2 = 0$$

Comparamos término a término con la ecuación que tenemos de dato, entonces:

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \cos(\varphi - 60°) \rightarrow \varphi_1 = 60°$$

$$2\rho\rho_1 = 8\rho \rightarrow \rho_1 = 4$$

$$\rho_1^2 - r^2 = 12 \rightarrow r = \sqrt{\rho_1^2 - 12} = \sqrt{16 - 12} = 2$$



Por lo tanto, se trata de una circunferencia de centro $C(4{,}60°)$ y radio $r = 2$.

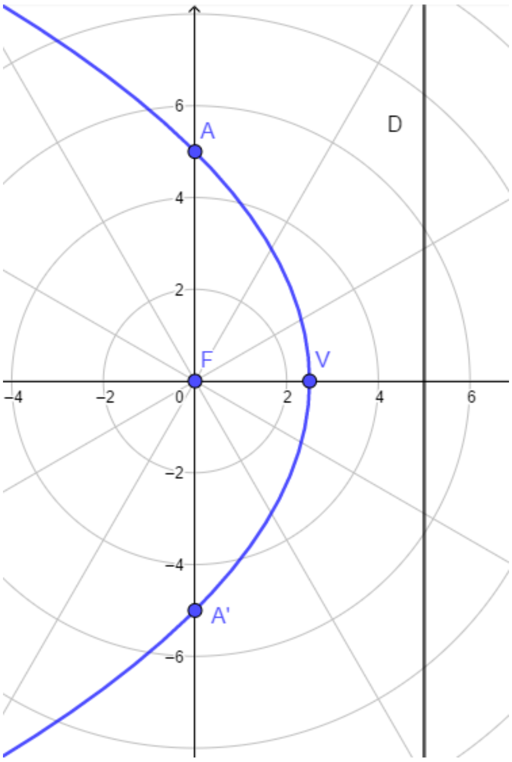
128. Sea la ecuación $\rho = \frac{20}{4+4cos\theta}$. a) Identifique la cónica que corresponde, indique los elementos fundamentales y encuentre las intersecciones con el eje polar y el eje a 90º. b) Grafique. c) Verifique sus respuestas empleando el Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares [Capítulo 4, Libro Interactivo Geometría Dinámica].

Respuesta:

Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independiente sea igual a 1:

$$\rho = \frac{20}{4 + 4cos\theta} = \frac{20}{4(1 + cos\theta)} = \frac{5}{1 + cos\theta}$$

De la ecuación se deduce que la excentricidad es e=1, por lo tanto, tenemos una parábola. La directriz es perpendicular al eje polar y se encuentra a la derecha del polo. Esto se deduce comparando directamente con la ecuación de las cónicas en coordenadas polares. Podemos decir que la función coseno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta paralelo o coincidente al eje polar, y el signo positivo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra a la derecha del mismo, siendo ésta por definición perpendicular al eje focal. Esto nos determina la apertura de las ramas de la parábola hacia la izquierda. Esto queda en evidencia al realizar la tabla de valores y el gráfico correspondiente.
El producto $pe = 5$, por lo tanto, el parámetro es $p = 5$ y $|LR| = 2p = 10$



Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje a 90°:

θ	cosθ	ρ
0	1	5/2
π/2	0	5
π	-1	-
3π/2	0	5

Identificamos las coordenadas del vértice $V\left(\frac{5}{2};0\right)$ y los extremos del lado recto $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(5;\frac{3\pi}{2}\right)$

La ecuación de la recta directriz perpendicular al eje focal y ubicada a una distancia p a la derecha del polo resulta $D: \rho = \frac{5}{\cos\theta}$

129. a) Identifique la cónica cuya ecuación en coordenadas polares es: $\rho = \frac{9}{6-3cos\theta}$.
b) Determine los elementos fundamentales y halle las intersecciones con el eje polar y el eje a 90º. c) Grafique. d) Verifique con el software GeoGebra, utilizando el comando Curva.

Respuesta:

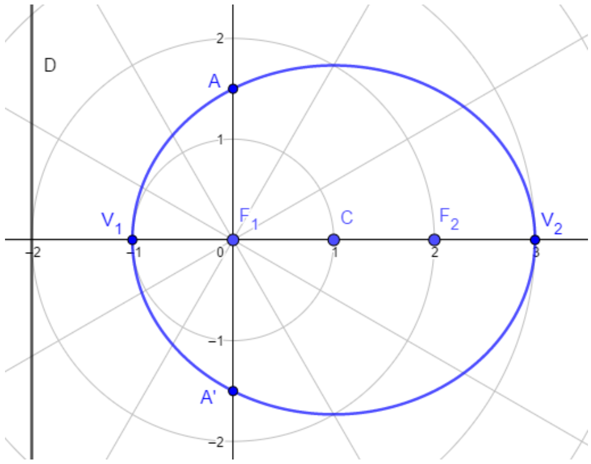
Para identificar la cónica, debemos trabajar en la ecuación de manera tal que, en el denominador, el término independinete sea igual a 1:

$$\rho = \frac{9}{6-3cos\theta} = \frac{9}{6\left(1-\frac{1}{2}cos\theta\right)} = \frac{3/2}{1-\frac{1}{2}cos\theta}$$

De la ecuación se deduce que la excentricidad es e=1/2, por lo tanto, tenemos una elipse. La directriz es perpendicular al eje polar y se encuentra a la izquierda del polo. Esto se deduce comparando con la ecuación de las cónicas en coordenadas polares. Podemos decir que la función coseno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta paralelo o coincidente al eje polar, y el signo negativo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra a la izquierda del mismo, y por definición es perpendicular al eje focal. Esto queda directamente en evidencia la realizar la tabla de valores que planteamos a continuación. El producto $pe = 3/2$, por lo tanto, el parámetro es $p = 3$.

Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje a 90°:

θ	cosθ	ρ
0	1	3
π/2	0	3/2
π	-1	1
3π/2	0	3/2



A partir de la distancia entre los puntos extremos del lado recto tenemos $|LR| = 3$.
Identificamos las coordenadas de los vértices $V_1(1;\pi), V_2(3{,}0)$ y los extremos del lado recto $A\left(\frac{3}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ y $A'\left(\frac{3}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. Por simetría deducimos las coordenadas del otro foco $F_2(2{,}0)$ y del centro $C(1{,}0)$.

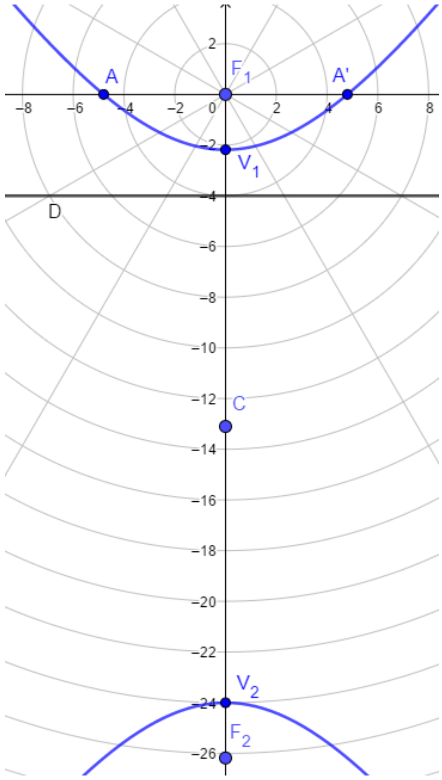
130. Determine la ecuación en coordenadas polares de una hipérbola con excentricidad e= 1.2, parámetro p=4 y directriz paralela al eje polar por debajo del polo. Represente gráficamente. Verifique sus respuestas (gráfica y analítica) empleando el Recurso Geométrico Interactivo RGI–Cónicas en coordenadas Polares [Capítulo 4, Libro Interactivo Geometría Dinámica].

Respuesta:
La ecuación en coordenadas polares de una cónica con directriz paralela al eje polar por debajo del polo es:

$$\rho = \frac{pe}{1 - esen\theta}$$

En nuestro caso, la ecuación queda:

$$\rho = \frac{4 * 1.2}{1 - 1.2sen\theta} = \frac{4.8}{1 - 1.2sen\theta}$$



Buscamos las intersecciones con el eje polar y el eje a 90°:

θ	senθ	ρ
0	0	4.8
π/2	1	-24
π	0	4.8
3π/2	-1	2.18

Identificamos las coordenadas de los vértices $V_1(2.18; 3\pi/2), V_2(24; 3\pi/2)$ y los extremos del lado recto $A(4.8; 0)$ y $A'(4.8;\pi)$. Por simetría deducimos las coordenadas del otro foco $F_2(26.18\,;\ 3\pi/2)$ y del centro $C(13.09\,;\ 3\pi/2\,)$.

A partir de la distancia entre los puntos extremos del lado recto tenemos $|LR| = 9.6$.

Note que comparando con la ecuación de las cónicas en coordenadas polares podemos decir que la función seno del denominador nos indica que el eje focal de la cónica resulta perpendicular al eje polar, y el signo negativo que acompaña dicha función nos determina que la directriz asociada al foco coincidente con el polo se encuentra por debajo del mismo y por definición es perpendicular al eje focal.

131. Represente gráficamente las siguientes ecuaciones en *coordenadas esféricas*:

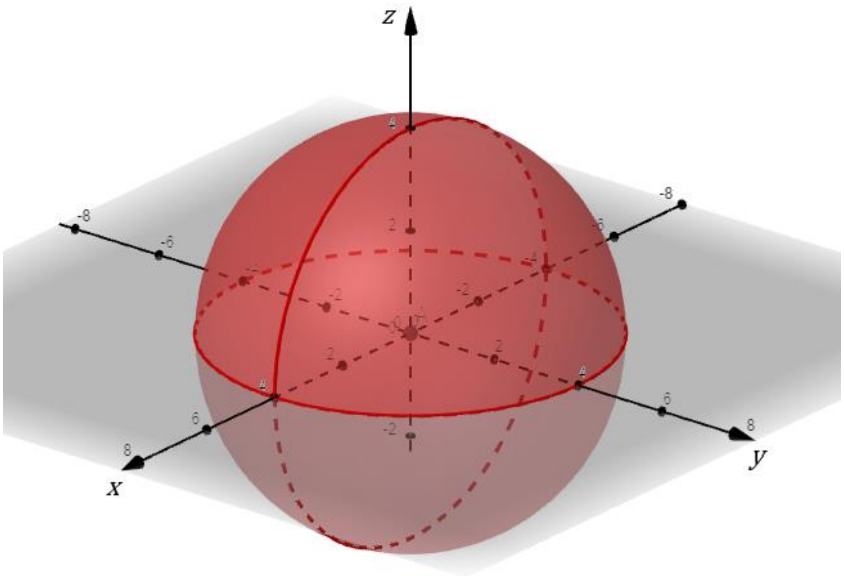
a) $\rho = 4$

b) $\theta = \pi/4$

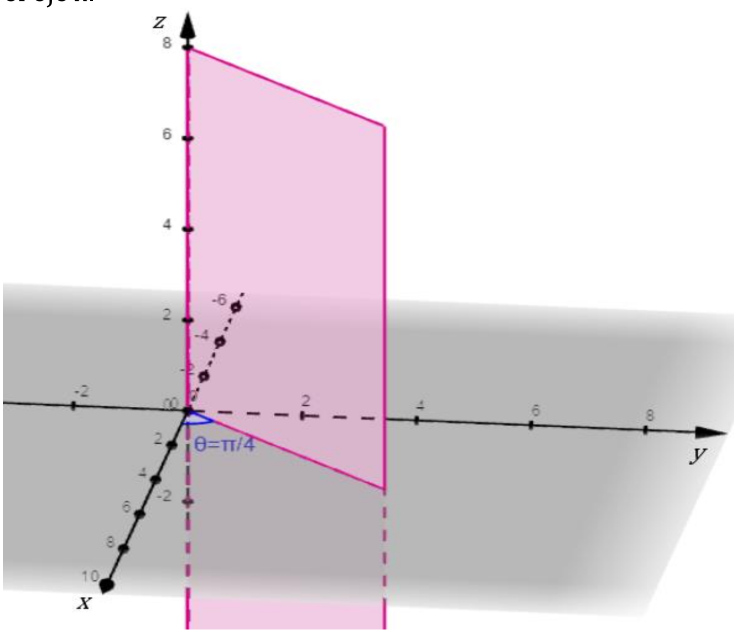
c) $\varphi = \pi/3$

Respuesta:

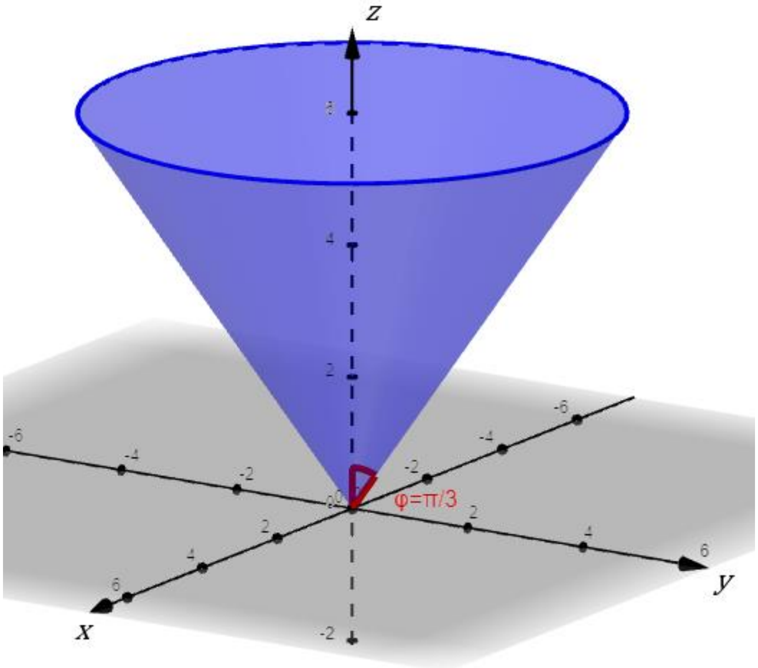
a) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación son aquellos cuyas coordenadas esféricas son $P(4, \theta, \varphi)$, es decir que las coordenadas θ y φ son libres. El conjunto de dichos puntos es una esfera de radio 4 centrada en el origen de coordenadas.



b) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación son aquellos cuyas coordenadas esféricas son $P(\rho, \pi/4, \varphi)$, es decir que las coordenadas ρ y φ son libres. El conjunto de dichos puntos es un semiplano que contiene al eje z, y que forma un ángulo de $\theta = \pi/4$ con el eje x.



c) Los puntos del espacio tridimensional que satisfacen la ecuación son aquellos cuyas coordenadas esféricas son $P(\rho, \theta, \pi/3)$, es decir que las coordenadas ρ y θ son libres. El conjunto de dichos puntos es un semicono circular con vértice en el origen de coordenadas, cuyo ángulo de apertura respecto del eje z es de $\varphi = \pi/3$.



132. En una línea de producción, un brazo robótico se encarga de elevar autopartes. Dicho brazo robótico tiene tres grados de libertad (es decir, tres posibles movimientos): 1) puede ascender y descender entre 2 y 4 metros; 2) puede rotar sobre su eje de simetría; 3) puede extenderse (o "alargarse"). Se lo ha programado para que pueda alcanzar cualquier punto de la superficie cónica cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0$$

Calcule cuál será el largo total del brazo robótico extendido, cuando esté a una altura de 2,5 metros y haya girado un ángulo de 45° respecto del eje positivo de las abscisas. (Aporte del Ayudante Ad-honorem, alumno de Ing. en Mecatrónica O. Deshays).

Respuesta:

La posición P del extremo del brazo robótico puede identificarse mediante el uso de coordenadas cilíndricas $P(\rho, \theta, z)$, ya que éstas resultan apropiadas para el tipo de movimiento que realiza dicho brazo. La coordenada ρ indica la extensión (o alargamiento) del brazo. La coordenada θ indica la rotación sobre el eje de simetría. La coordenada z indica el ascenso o descenso del brazo, que varía entre 2 y 4 metros. Es decir que $2 \leq z \leq 4$.

Como el brazo está programado para alcanzar los puntos de la superficie dada, llevamos la ecuación de la misma a coordenadas cilíndricas, usando las ecuaciones de transformación de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sen\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=0 \qquad \rightarrow \qquad \rho^2\left(\frac{\cos^2\theta}{4}+\frac{sen^2\theta}{16}\right)-\frac{z^2}{9}=0$$

Se requiere conocer cuál es el largo total del brazo, es decir, cuál es el valor de ρ cuando $z=2.5$m y $\theta=45°$. Reemplazamos dichos valores en la ecuación y despejamos el valor de ρ:

$$\rho=\sqrt{\frac{z^2}{9\left(\frac{\cos^2\theta}{4}+\frac{sen^2\theta}{16}\right)}}=\frac{z}{3\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{4}+\frac{sen^2\theta}{16}}}$$

$$\rho=\frac{2.5}{3\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{32}}}\approx 2.11$$