## Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

**19.** El vector momento de una fuerza ***f*** se define como ***m*** = ***OP*** ∧ ***f***, siendo ***OP*** el vector posición del punto de aplicación de la fuerza.

a) Encuentre el vector momento de la fuerza ***f*** = (20, 40, 30) N, aplicada en el punto P (3, 1, 3) m.

b) Verifique que el vector momento es perpendicular tanto al vector ***f*** como al vector ***OP***.

*Respuestas*:

a) Calculamos el producto vectorial entre los vectores ***f*** y ***OP***.

Un camino de resolución es:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{f} = (3\breve{\imath} + \breve{\jmath} + 3\breve{k}) \wedge (20\breve{\imath} + 40\breve{\jmath} + 30\breve{k})$$

$$\boldsymbol{m} = 60\,(\breve{\imath} \wedge \breve{\imath}) + 20\,(\breve{\jmath} \wedge \breve{\imath}) + 60\,(\breve{k} \wedge \breve{\imath}) + 120\,(\breve{\imath} \wedge \breve{\jmath}) + 40\,(\breve{\jmath} \wedge \breve{\jmath}) + 120(\breve{k} \wedge \breve{\jmath}) + 90(\breve{\imath} \wedge \breve{k})$$
$$+ 30(\breve{\jmath} \wedge \breve{k}) + 90(\breve{k} \wedge \breve{k}) =$$

$$\boldsymbol{m} = 0 - 20\breve{k} + 60\breve{\jmath} + 120\breve{k} + 0 - 120\breve{\imath} - 90\breve{\jmath} + 30\breve{\imath} + 0$$

$$\boldsymbol{m} = (-90, -30, 100)Nm$$

Otra manera de registrar el cálculo es: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 3 & 1 & 3 \\ 20 & 40 & 30 \end{vmatrix} = -90\breve{\boldsymbol{\imath}} - 30\breve{\jmath} + 100\breve{\boldsymbol{k}} =$

$(-90, -30, 100)Nm$

*<u>Observación adicional</u>: el producto vectorial* ***m****, entre los vectores dados* ***f*** *y* ***OP****, siendo vectores no nulos, es un vector no nulo. Esto verifica que* ***f*** *y* ***OP*** *son vectores L.I. (no son paralelos) También podemos asegurar que* $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{m}\}$ *,* $\{\boldsymbol{OP}, \boldsymbol{m}\}$ *y* $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{OP}\}$ *son conjuntos L.I. pero ninguno de ellos constituye una base de* $R^3$ *¿Podrías explicar por qué?*

*En cambio,* $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{OP}, \boldsymbol{m}\}$ *es una base de* $R^3$ *¿Podrías explicar por qué?*

b) Para verificar que dos vectores son perpendiculares, calculamos el producto escalar entre ellos:

$$\boldsymbol{m} \,.\, \boldsymbol{f} = (90, 30, -100).(20, 40, 30) = 1800 + 1200 - 3000 = 0$$

$$\boldsymbol{m}.\boldsymbol{OP} = (90, 30, -100).(3, 1, 3) = 270 + 30 - 300 = 0$$

Como ambos resultados son nulos hemos verificado que el vector momento de una fuerza $\boldsymbol{m}$ , es perpendicular a $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{OP}$.

---

**20.** Dados dos vectores cualesquiera ***u*** y ***v***:

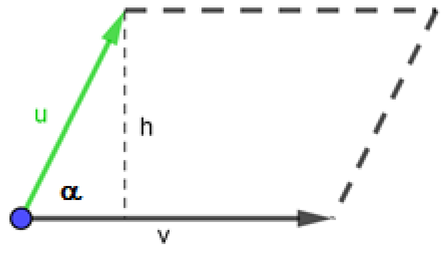
a) Encuentre una expresión que permita calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores como lados. Justifique la respuesta.

b) Dados los vértices P (1, -2, 3), Q (2, 2, 1) y R (0, 4, -1) del paralelogramo *PQRS*, determine coordenadas para el vértice S y calcule el área de dicho paralelogramo.

*Respuestas:*

a) Consideremos que los vectores **u** y **v** son los lados no paralelos de un paralelogramo como el de la figura y que α es el ángulo convexo que forman **u** y **v**.

Al trazar una altura h del paralelogramo (segmento perpendicular al lado **v** desde el extremo de **u**) queda determinado un triángulo rectángulo en el que h es el cateto opuesto al ángulo $\propto$ y $\|\boldsymbol{u}\|$ es la longitud de la hipotenusa. Entonces: $\boldsymbol{h} = \|\boldsymbol{u}\|\ \boldsymbol{sen} \propto$ (I)



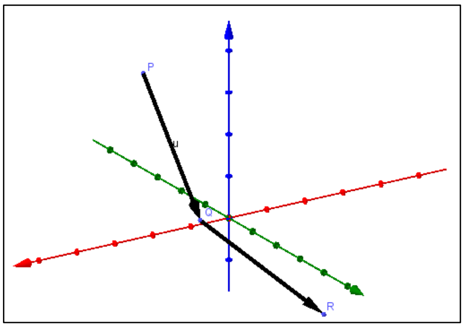

El área $\boldsymbol{A}$ del paralelogramo que tiene por lados no paralelos a **u** y **v,** se obtiene $\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{v}\|\ \ \boldsymbol{h}$ , teniendo en cuenta el resultado de (I), tenemos que :

$$\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{u}\|\ \boldsymbol{sen} \propto$$

Esta expresión corresponde al módulo del producto vectorial entre **v** y **u,** $\|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}\|$.

Sustituyendo: $\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}\|$

b) Comencemos por graficar los tres puntos P, Q y R . Existen varias formas de determinar un paralelogramo con esos tres puntos ya que el punto $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ no es único.



Primera solución posible:

Consideremos los vectores $\boldsymbol{PQ} = (1{,}4\ , -2\ )$ y

$\boldsymbol{QR} = (-2{,}2, -2)$, lados no paralelos del paralelogramo.

Si S es el cuarto vértice del paralelogramo, se cumple:

$\boldsymbol{PS} = (x-1, y+2, z-3), \boldsymbol{PQ}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{PR}$ son coplanares, entonces el producto mixto entre ellos es nulo.

$$\boldsymbol{PS}\,.\,(\boldsymbol{PQ}\ \wedge \boldsymbol{PR}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -4(x-1) + 6(y+2) + 10(z-3) = 0$$

$-4x + 6y + 10z = 14$ (1)

Si $\boldsymbol{PS} = (x-1, y+2, z-3)$ es paralelo a $\boldsymbol{QR} = (-2{,}2, -2)$, entonces el vector $\boldsymbol{PS}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{QR}$, y como tienen la misma longitud el escalar de la combinación lineal es 1. Por lo tanto:

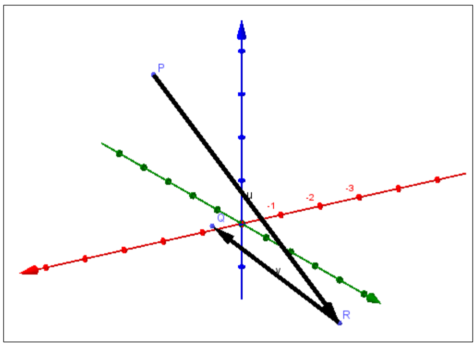
$$(x-1, y+2, z-3) = (-2{,}2, -2)$$

$$\begin{cases} x-1 = -2 \\ y+2 = 2 \\ z-3 = -2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos que las coordenadas del vértice son: $\boldsymbol{S}(-1{,}0{,}1)$ y verifica la ecuación (1).

Segunda solución posible:

Seleccionemos los vectores no paralelos del paralelogramo del siguiente modo: $\boldsymbol{PR}$ y $\boldsymbol{RQ}$.



$\boldsymbol{PR} = (-1,6,-4)$ y $\boldsymbol{RQ} = (2,-2,2)$

Si S es el cuarto vértice del paralelogramo, se cumple:

$\boldsymbol{PS} = (x-1, y+2, z-3)$, $\boldsymbol{PQ}$ y $\boldsymbol{PR}$ son coplanares, entonces el producto mixto entre ellos es nulo.

$$\boldsymbol{PS}\,.\,(\boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{PR}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -4(x-1) + 6(y+2) + 10(z-3) = 0$$

$-4x + 6y + 10z = 14 \qquad (1)$

Si $\boldsymbol{PS} = (x-1, y+2, z-3)$ es paralelo a $\boldsymbol{RQ} = (2,-2,2)$, es combinación lineal de $\boldsymbol{QR}$, y como tienen la misma longitud el escalar de la combinación lineal es 1. Por lo tanto:

$$(x-1, y+2, z-3) = (2,-2,2)$$

$$\begin{cases} x-1 = 2 \\ y+2 = -2 \\ z-3 = 2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, obtenemos que las coordenadas del vértice son: $\boldsymbol{S}(3,-4,5)$ y verifica la ecuación (1).

*Observación: ¿Hay otras coordenadas que determinen el cuarto vértice S del paralelogramo? ¿Por qué?*

c) Calcularemos el área del paralelogramo PQRS, como $A = \|\boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{PR}\|$.
Determinamos el producto vectorial entre $\boldsymbol{PQ}$ y $\boldsymbol{PR}$:

$$\boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{PR} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -4\breve{\boldsymbol{\imath}} + 6\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 10\breve{\boldsymbol{k}}$$

Luego $A = \|\boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{PR}\| = \sqrt{16+36+100}$ por lo tanto el área del paralelogramo PQRS es:

$$A \approx 12{,}33[L]^2.$$

---

**21**. El producto vectorial entre dos vectores puede reiterarse multiplicando vectorialmente por otro vector. Esta operación se llama *doble producto vectorial*.

a) Resuelva el siguiente producto doble vectorial y verifique que el vector que resulta es perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$ y al vector $(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$:

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$, siendo $\boldsymbol{a} = -2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ ; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ; $\boldsymbol{c} = 2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j}$.

b) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI :

b.i) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ; b.ii) $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}\}$ ; b.iii) $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})\}$

*Respuestas*

a) Primero calculamos el producto vectorial entre **b** y **c**:

$$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = (\breve{\jmath} - \breve{k}) \wedge (2\breve{\imath} + 3\breve{\jmath}) = -2\breve{k} - 2\breve{\jmath} + 3\breve{\imath} = (3,-2,-2)$$

Ahora calculamos el doble producto vectorial:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = (-2\breve{\imath} + \breve{k}) \wedge (3\breve{\imath} - 2\breve{\jmath} - 2\breve{k}) = 4\breve{k} - 4\breve{\jmath} + 3\breve{\jmath} + 2\breve{\imath}$$
$$\boldsymbol{d} = (2,-1,4)$$

Verificamos que $\boldsymbol{d}$ es perpendicular a los *vectores* $\boldsymbol{a}$ y $(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$ calculando el producto escalar entre ellos:

$$\boldsymbol{d}\,.\,\boldsymbol{a} = (2,-1,4).(-2,0,1) = 0$$
$$\boldsymbol{d}\,.\,(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = (2,-1,4).(3,-2,-2) = 0$$

b)

$b.i)$ $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ es LI porque la única combinación lineal posible para (0,0,0) es la de escalares nulos. Verificamos:

$$(0,0,0) = k_1(-2,0,1) + k_2(0,1,-1) + k_3(2,3,0)$$

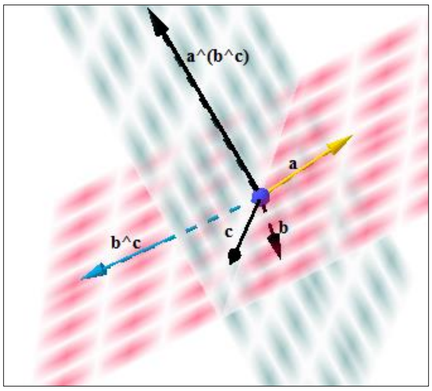
$$\begin{cases} 0 = -2k_1 + 2k_3 \\ 0 = k_2 + 3k_3 \\ 0 = k_1 - k_2 \end{cases}$$

De la primer ecuación tenemos que $k_1 = k_3$ , de la tercera $k_1 = k_2$ sustituyendo en la segunda ecuación $k_1 = 0$ y por lo tanto $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

$b.ii)$ $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\}$ es LI porque ya probamos que $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son LI y $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ es perpendicular al plano que ellos determinan.

$b.iii)$ $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})\}$ es LD porque
**a** $\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$ es perpendicular a $(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$
y $(b\wedge c)$ es perpendicular a b y perpendicular a c,
entonces a es *combinación lineal* de $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

*La representación gráfica ayuda a analizar la dependencia o independencia lineal de los vectores.*




---

## 22. Dados tres vectores cualesquiera *u*, *v* , *w*

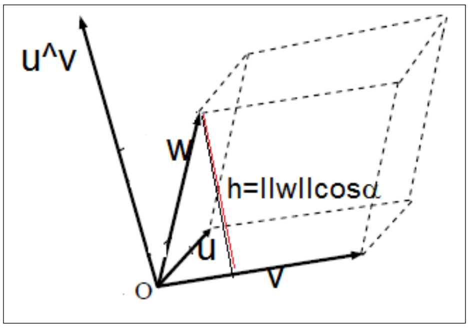
a) Demuestre la forma de calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas concurrentes.

b) Dados los puntos A(0, 1, 1), B(–2, 1, 1), C(4, 1, 0) y D(3, 5, 2), calcule el volumen del prisma de base triangular de aristas ***AB***, ***AC*** y ***AD***.

*Respuestas*

a) Consideremos el paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

El área de la base que determinan $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ se puede calcular como $\|\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\|$.




La altura del paralelepípedo es la longitud de un segmento perpendicular a la base y que tiene por extremo al punto asociado al vector ***w***.

Esa altura se puede determinar estudiando un triángulo rectángulo que tiene como cateto adyacente: $h = |\|\boldsymbol{w}\| cos\alpha|$ siendo α el ángulo que forma ***w*** con el vector $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, coincidente (por ser ángulos alternos internos entre paralelas) con el ángulo que forma ***w*** y la altura h.

El volumen $V$ del paralelepípedo se calcula:

$V = área\ de\ la\ base\ .\ altura$

$V = \|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\|.\ h$

$V = |\|\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\| \cos\alpha|$

Esta expresión coincide con el valor absoluto del producto mixto entre ***w***, ***u*** y ***v***, podemos concluir:

$$V = |\boldsymbol{w}\ .\ (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})|$$

b) Determinamos los vectores concurrentes en el vértice A:

$$\boldsymbol{AB} = (-2{,}0{,}0) \ \ ; \ \ \boldsymbol{AC} = (4{,}0{,}-1) \ ; \ \boldsymbol{AD} = (3{,}4{,}1)$$

A partir del resultado del inciso a), sabemos que el volumen del paralelepípedo cuyas aristas recurrentes son ***AB, AC*** y ***AD*** se puede calcular como :

$$V = |\boldsymbol{AB}\ .\ (\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD})|$$

En el caso particular de un *prisma de base triangular* con aristas ***AB, AC*** y ***AD,*** su volumen será la <u>mitad</u> de $V$.

Calculamos el producto vectorial entre ***AC*** y ***AD***:

$$\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4\breve{\boldsymbol{\imath}} - 7\breve{\boldsymbol{\jmath}} + 16\breve{\boldsymbol{k}}$$

Ahora evaluamos del producto mixto:

$$\boldsymbol{AB}\ .(\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD}) = (-2{,}0{,}0).(4,-7{,}16) = \ -8$$

También podemos calcular el producto mixto como el determinante de una matriz de orden 3:

$$AB.(\mathrm{AC} \wedge \mathrm{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2(0+4)+0+0 = -8$$

Luego el volumen es: $V_{prisma} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\ .\ (\boldsymbol{AC} \wedge \boldsymbol{AD})| = \frac{1}{2}.8$

$$V_{prisma} = 4[L]^3$$

*<u>Observaciones</u>: si el producto mixto entre tres vectores de $R^3$ es no nulo, es decir, determinan un volumen (no nulo) en el espacio, dichos vectores son LI. Por ser 3 vectores de LI de $R^3$, generan a $R^3$. Por lo tanto, forman una base de $R^3$.*

---

**23.** Se quiere realizar una excavación en el área definida por los puntos A (0,2,1), B (0,8,0), C (3,6,0) y D (3,0,1), de 4 metros de profundidad medidos desde el punto B (o C).

a) Represente gráficamente y determine las coordenadas de los puntos que definen la zona de excavación.

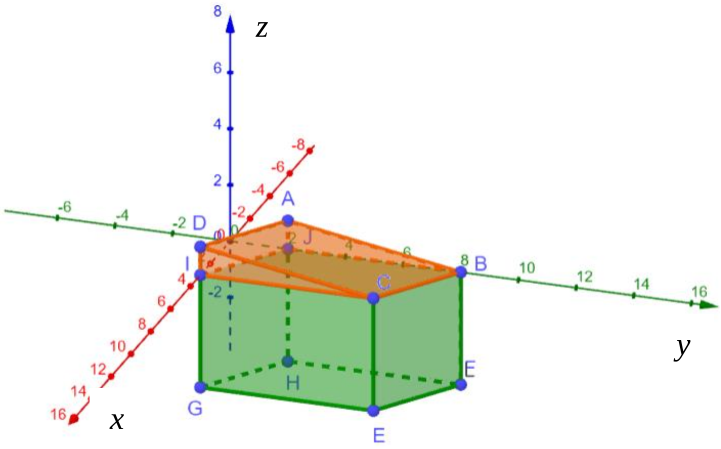
b) Evalúe el volumen de tierra a extraer.

c)

*Respuestas*

a) Interpretando gráficamente los datos del enunciado podemos determinar las coordenadas de los puntos que definen la zona de excavación (además de A, B,C y D):

$E(0,8,-4)$
$F(3,6,-4)$
$G(3,0,-4)$
$H(0,2,-4)$




b) Definimos los puntos I(3,0,0) y J(0,2,0) porque para calcular el volumen total ($\boldsymbol{V_T}$) de tierra a extraer tenemos que determinar el volumen del paralelepípedo ($\boldsymbol{V_{papalelepípedo}}$) de aristas $\boldsymbol{IG}$, $\boldsymbol{IC}$ e $\boldsymbol{IJ}$**;** y además el volumen del prima de base triangular ($\boldsymbol{V_{prisma}}$) de aristas $\boldsymbol{ID}$**,** $\boldsymbol{IC}$ e $\boldsymbol{IJ}$, ya que:

$$\mathrm{V_T} = \mathrm{V_{papalelepípedo}} + \mathrm{V_{prisma}}$$

Sabiendo que $\boldsymbol{IG} = (0,0,-4)$, $\boldsymbol{IC} = (0,6,0)$ e $\boldsymbol{IJ} = (-3,2,0)$**,** calculamos:

$$\mathrm{V_{papalelepípedo}} = |\boldsymbol{IG}\ (\boldsymbol{IC} \wedge \boldsymbol{IJ})|$$

$$\mathrm{V_{papalelepípedo}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 72\mathrm{m}^3$$

Luego sabiendo que $\boldsymbol{ID} = (0,0,1)$**,** $\boldsymbol{IC} = (0,6,0)$ e $\boldsymbol{IJ} = (-3,2,0)$**,** calculamos:

$$\mathrm{V_{pisma}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\boldsymbol{ID}\ (\boldsymbol{IC} \wedge \boldsymbol{IJ})|$$

$$\mathrm{V_{pisma}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.|18| = 9\mathrm{m}^3$$

Ahora podemos determinar el volumen de tierra para excavar: $\mathrm{V_T} = 72\mathrm{m}^3 + 9\mathrm{m}^3\ \ \mathrm{V_T} = 81[\mathrm{L}]^3$.