Análisis Matemático I
Clase 19: funciones inversas y sus derivadas. Funciones trascendentes.

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Mayo, 2020

Noción de función

Recordar:

Producto cartesiano de conjuntos. Si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ de A y B se define como:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Definición de función

Sean A y B conjuntos de números reales. Una función f es un subconjunto de $A \times B$, tal que: si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$. El **dominio** de f es el conjunto de todos los $a \in A$ tales que existe $b \in B$ con la propiedad: $(a, b) \in f$. El **rango** de f es el conjunto de los $b \in B$ tales que existe $a \in A$ con la propiedad $(a, b) \in f$.

Notación: Si D es el dominio de f y R su rango, entonces escribimos:

$$f : D \to R.$$

También: $f : D \to \mathbb{R}$ para indicar que f asume valores reales.

Noción de función inversa

Tomemos la siguiente función:

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 9), (13, 8)\} .$$

Se nos puede ocurrir la brillante idea de invertir los pares ordenados. Así, obtendríamos:

$$g = \{(2, 1), (4, 3), (9, 5), (8, 13)\} .$$

Observar que g es una nueva función (llamada **función inversa**).
Sin embargo, invertir los pares ordenados de una función no siempre da por resultado una nueva función. Por ejemplo:

$$F = \{(1, 2), (3, 4), (5, 9), (13, 4)\} ,$$

entonces al invertir los pares obtenemos:

$$G = \{(2, 1), (4, 3), (9, 5), (4, 13)\} .$$

Este último conjunto no es una función.

Noción de función inversa

Tomemos la siguiente función:

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,8)\}.$$

Se nos puede ocurrir la brillante idea de invertir los pares ordenados. Así, obtendríamos:

$$g = \{(2,1),(4,3),(9,5),(8,13)\}.$$

Observar que g es una nueva función (llamada **función inversa**).
Sin embargo, invertir los pares ordenados de una función no siempre da por resultado una nueva función. Por ejemplo:

$$F = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,4)\},$$

entonces al invertir los pares obtenemos:

$$G = \{(2,1),(4,3),(9,5),(4,13)\}.$$

Este último conjunto no es una función. OBSERVAR QUE LA DIFICULTAD RESIDE EN QUE $F(3) = F(13) = 4$.

Noción de función inversa

Para poder definir la función inversa de f, necesitamos evitar que la función f asigne el mismo valor a dos elementos distintos del dominio. Así, introduciremos las funciones inyectivas:

Definición de función inyectiva

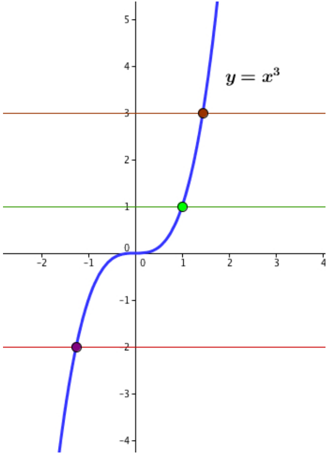
Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es inyectiva en D si:

$$f(x) \neq f(y)$$

siempre que $x \in D$, $y \in D$, y además $x \neq y$.

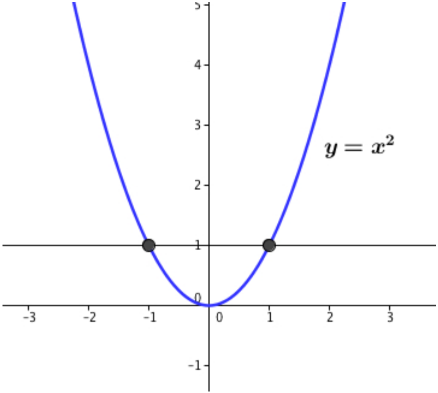
Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas

Observar la gráfica de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Es una función inyectiva.



Toda recta horizontal corta en a lo sumo un punto a la gráfica de una función inyectiva.

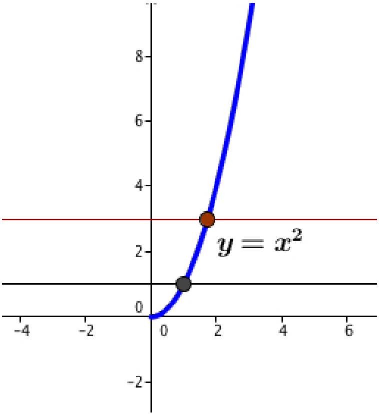
Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas



Existe una recta horizontal que corta a la gráfica en dos puntos. Luego, $y = x^2$ (con dominio $\mathbb{R}$) no es inyectiva. Sin embargo, al modificar el dominio podemos construir una función inyectiva.

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas

La función $f : [0, +\infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ es inyectiva:



Noción de función inversa

A continuación, introduciremos la noción de función inversa:

Definición de función inversa

Sea $f : D \to R$ una función inyectiva en D, donde R es la imagen o rango de f. La función inversa $f^{-1} : R \to D$ se define por:

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y$$

para todo $y \in R$.

Observar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \textbf{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Ejemplo: determine la función inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, y de $y = x^2$, $x \geq 0$.

Ejemplo: determinaremos la función inversa de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. A partir de la gráfica de f, sabemos que es inyectiva y que el rango de la función es $[0, \infty)$. La función inversa es $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ y para calcular $f^{-1}(x)$ procedemos como sigue:

- primero despejamos x en la expresión de $f(x)$:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}.$$

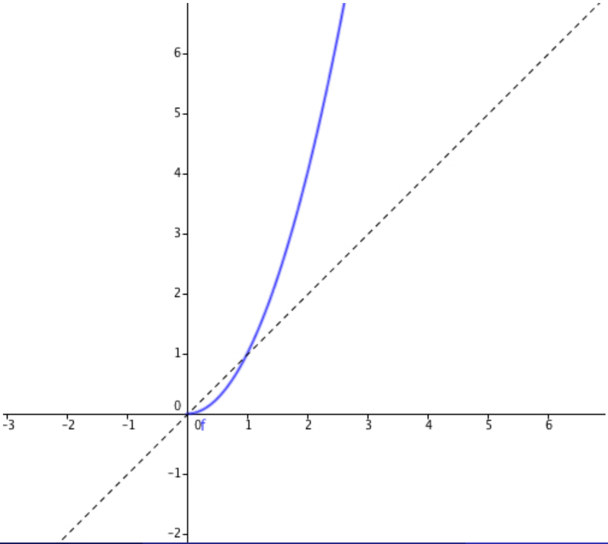
- dado que generalmente expresamos a las funciones con variable independiente x, intercambiamos los símbolos de x e y en la ecuación anterior:

$$y = \sqrt{x}.$$

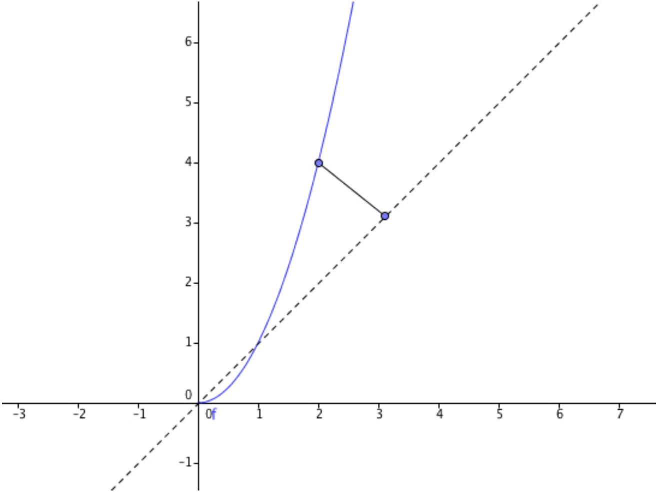
- Así:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

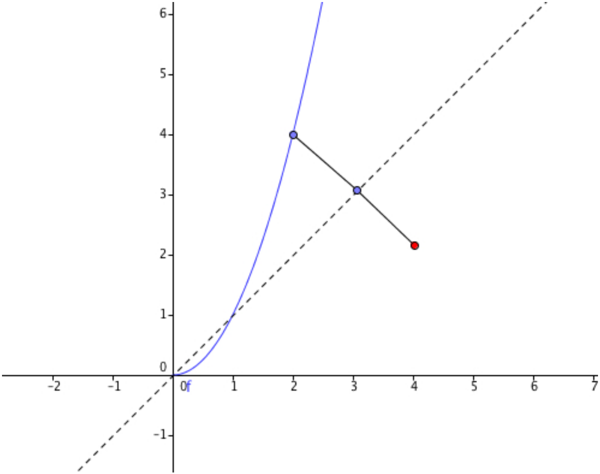
Veremos gráficamente cómo determinar la función inversa y cómo se relacionan las gráficas de f y f^{-1}:
1-primero hacemos el gráfico de f y trazamos la recta $y = x$ con un trazo tenue:



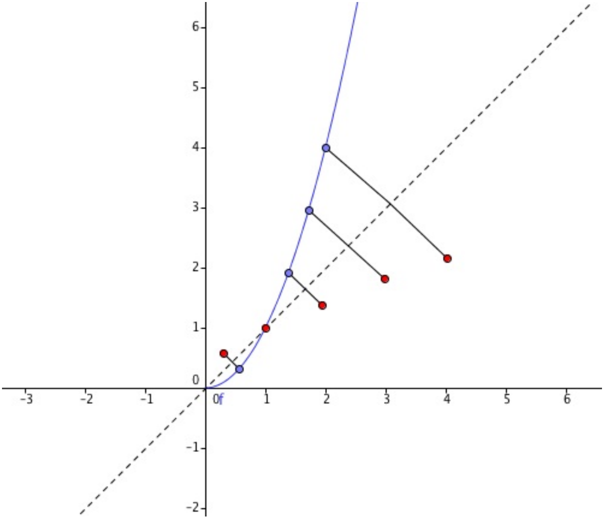
2-tomamos un punto de la gráfica de f y trazamos un segmento perpendicular a la recta $y = x$ que tenga como un extremo el punto elegido y el otro extremo en la recta $y = x$:



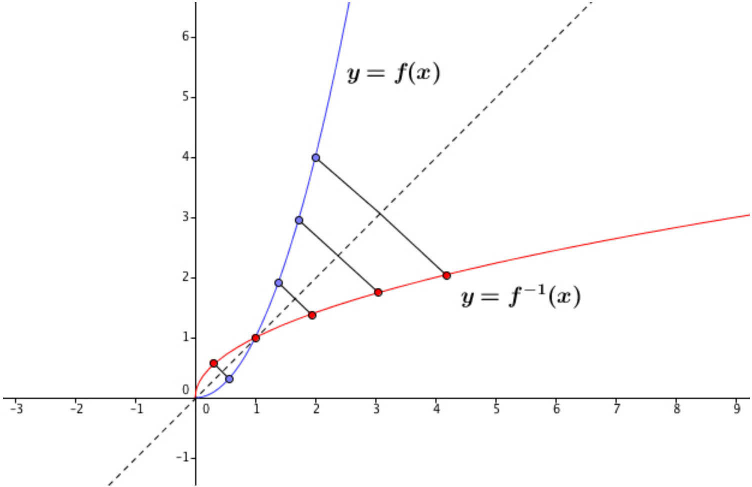
3-prolongamos el segmento del ítem anterior en dirección perpendicular a la recta $y = x$ hasta cubrir una longitud igual al segmento original:



4-realizamos el procedimiento anterior varias veces, resaltando (en este caso con rojo) los extremos de los segmentos construidos:



5-La gráfica de f^{-1} es la curva que conecta a todos los puntos construidos (puntos rojos).



Observar que la gráfica de la función inversa es simétrica con respecto la recta $y = x$.

Derivación de funciones inversas

Recordar que:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Si f y f^{-1} son derivables, entonces la regla de la cadena implica:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Luego si $y = f(x)$ y $f'(x) \neq 0$ entonces:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Recordando que $x = f^{-1}(y)$ obtenemos la fórmula:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

Ejemplos: determinar la derivada de la función inversa de $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = x^2$.
Solución: observar primero que $f'(x) = 2x \neq 0$ para $x \in (0,\infty)$. Recordar que $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Luego:

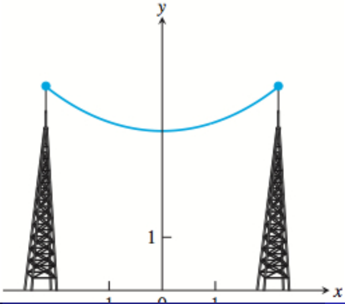
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Observación: la función inversa y su derivada suelen denotarse usando a x como variable independiente. Así, la fórmula anterior para la derivada se puede escribir:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Estudio de funciones trascendentes

Excepto por las funciones trigonométricas, hasta ahora hemos analizado **funciones algebraicas,** es decir, funciones que se obtienen por suma, resta, división, multiplicación o extracción de raíces de polinomios.
Ahora comenzaremos con el estudio de funciones no algebraicas o también llamadas trascendentes.
Ejemplos de funciones no algebraicas son: las funciones trigonométricas, los logaritmos, exponenciales y otras funciones como las funciones hiperbólicas.
La siguiente figura ilustra una función trascendente (función coseno hiperbólico):

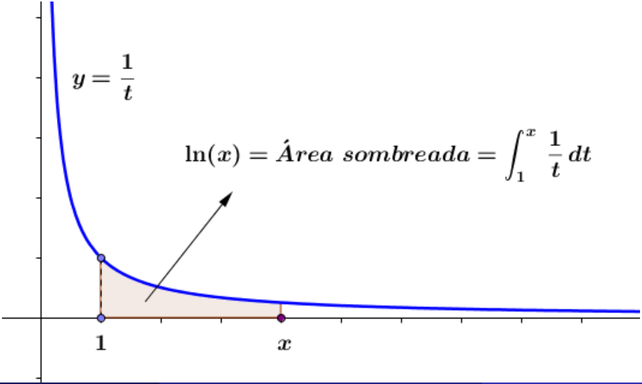


Definición del Logaritmo natural

Si $x > 0$, entonces:

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Observar que para x mayor a 1 se tiene:



Logaritmos

Además:

$$ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0,$$

si $x \in (0,1)$ entonces:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$$

y si $x > 1$:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0.$$

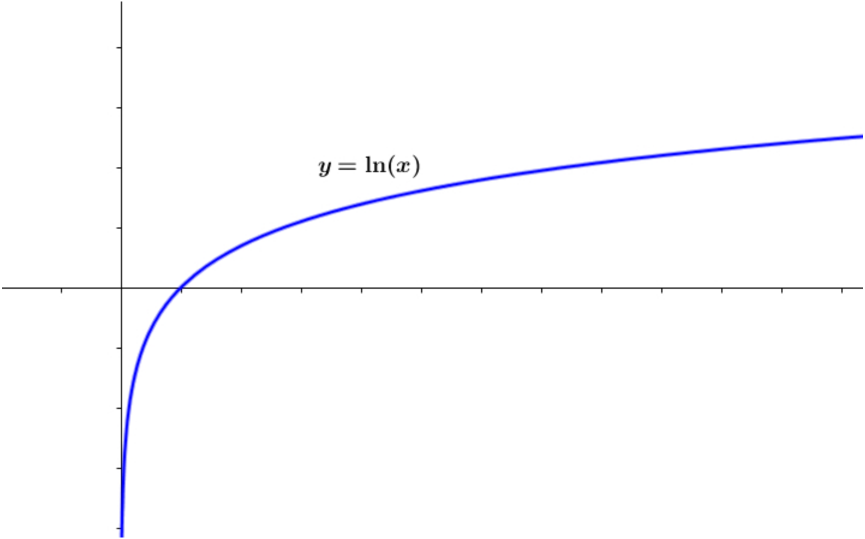
Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \ (x > 0)$$

por ende ln es una función creciente pero es cóncava hacia abajo pues:

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Logaritmos



Logaritmos

El logaritmo puede extenderse a valores de x negativos poniendo valores absolutos:

$$\ln(|x|) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$ln'(|x|) = \frac{1}{x}, \text{ para cada } x \neq 0.$$

Así:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln(|x|) + C.$$

Definición: el número e se define como:

$$ln(e) = 1.$$

Ejemplos: calcule $\int tan(x)dx$, $\int sec(x)dx$, $\int cotan(x)dx$, $\int cosec(x)dx$.

Vamos a calcular:

$$\int \tan(x)\, dx.$$

Primero escribimos:

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\, dx$$

y hacemos la sustitución:

$$u = \cos(x), \;\; du = -sen(x)\, dx.$$

Reemplazando:

$$\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C.$$

Función exponencial

Definimos la función exponencial, *exp*, como la inversa de la función logaritmo. Es decir:

$$exp(x) = ln^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observar: $exp(x) := e^x$,

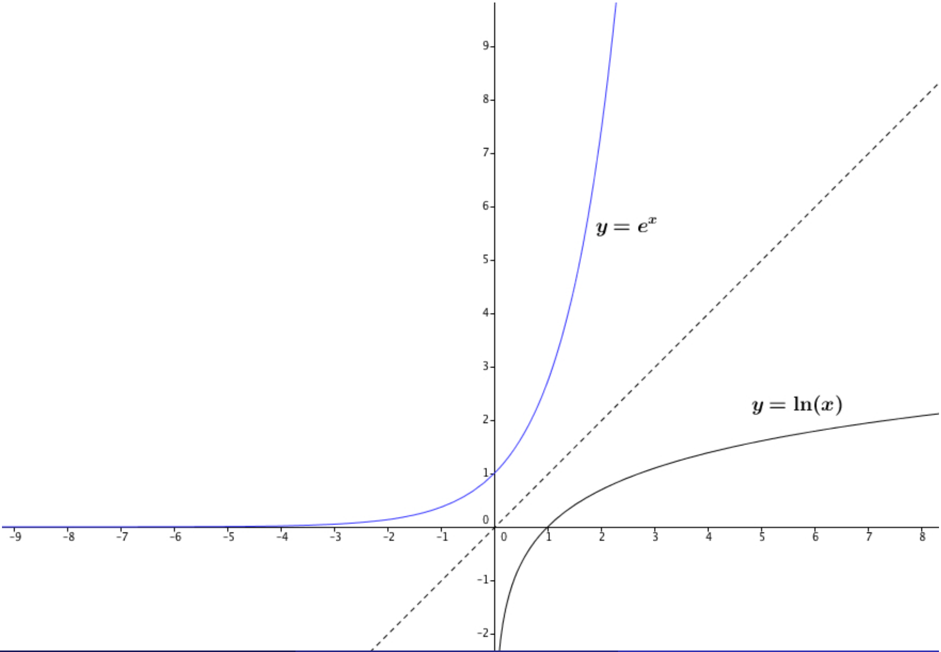
$$ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{ln(y)} = y \quad (y > 0)$$

Además, si $y = e^x$, entonces:

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{1}{ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Así:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$


$y = e^x$
$y = \ln(x)$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8