Matriz asociada

Cuando se estudió transformaciones lineales, algunas de estas funciones se expresaron en la forma:

T: $IR^n \rightarrow IR^m$ / T(X) = A X ,donde A es una matriz.

Pero … ¿Qué orden deberá tener la matriz A?

Si se tiene en cuenta que $X \in IR^n$ y que $T(X) \in IR^m$, se puede expresar a X como una matriz de orden nx1 y a $T(X)$ como una matriz de orden mx1. Recordando la condición para que el producto de matrices sea posible:

$$\underset{m\,x\,n}{A} \quad . \quad \underset{n\,x\,1}{X} \quad = \quad \underset{m\,x\,1}{T(X)}$$

Se concluye que la matriz A deberá tener orden m x n. Esta matriz, recibe el nombre de matriz asociada a dicha transformación lineal.

NOTA: *Observe que T: $IR^n \rightarrow IR^m$ y $A_{m\,x\,n}$. Es decir la dimensión del espacio dominio y codominio de la TL, determinan respectivamente, la cantidad de columnas y la cantidad de filas de la matriz A.*

Al estudiar matriz asociada, surgen otros interrogantes como por ejemplo:

- ¿A toda transformación lineal se le puede asociar una matriz?
- ¿Cuántas matrices se pueden asociar a una misma transformación lineal?
- ¿Cómo se puede encontrar la matriz asociada a una TL?
- ¿Qué utilidad tiene la matriz asociada a una TL?

Conceptos previos

Coordenadas de un vector

Sea X un vector de IR^n y sea B = { e_1; e_2; e_3; … ; e_n } una base de IR^n.

Por ser B un conjunto generador, sabemos que todo vector de IR^n, puede expresarse como combinación lineal de los vectores de B, además por ser B un conjunto linealmente independiente esta combinación lineal es única.

Es decir, existen n escalares reales c_i tales que:

$$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \ldots + c_n e_n$$

a dichos escalares c_1 ; c_2 ; …. ; c_n se los denomina coordenadas del vector X en la base B. La matriz de coordenadas o vector de coordenadas de X en la base B es la matriz columna de orden nx1, cuyas componentes son las coordenadas de X. Se anota $[X]_B$ y es:

$$[X]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Nota

- Cuando hablamos de coordenadas, el ORDEN de los vectores de la base es importante, por lo que en este estudio, trabajaremos con bases ORDENADAS.

- Cada vez que no se especifique la base en la que está expresado un vector, se entenderá que dicha base es la canónica.

Ejemplo: Halle las coordenadas de $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Solución

En el enunciado del ejercicio no se indica en que base se encuentra expresado el vector u, como ya se indicó anteriormente, se considerará por defecto, que u está expresado en la base canónica.

Para buscar las coordenadas de *u* en la base B se debe encontrar los escalares c_1; c_2; c_3 que verifiquen la siguiente igualdad

$$u = c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + c_3\, e_3 \qquad (1)$$

y reemplazando los vectores *u*, e_1, e_2 y e_3, se tiene

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el 2° miembro de la igualdad

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_2 + c_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

e igualando componente a componente

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -2 \\ c_2 + c_3 = 3 \\ c_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{de donde} \qquad \begin{matrix} c_1 = -5 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 1 \end{matrix}$$

Se han obtenido las coordenadas de *u* en la base B. Se escribe: $[u]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

A modo de comprobación, se verá el camino inverso, es decir, conocidas las coordenadas del vector *u* en la base B: $[u]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, se buscarán las coordenadas de *u* en la base canónica.

Para ello se debe plantear la misma igualdad (1): $u = c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + c_3\, e_3$ (1)

y reemplazando en ella los datos, se tiene $[u]_C = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resolviendo encontramos las coordenadas de *u* en la base canónica: $[u]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matriz asociada a una transformación lineal

Veamos ahora un ejemplo sencillo en el que buscamos la matriz asociada a una TL.

Ejemplo

Dada la transformación lineal $T: IR^2 \to IR^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$, halle la matriz A, que permite expresar a T como $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in IR^3$

Solución

Por lo dicho anteriormente, sabemos que A debe tener orden 3x2.

De esta manera: $A.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ será $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a\,x+b\,y \\ c\,x+d\,y \\ e\,x+f\,y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{bmatrix}$$

Para que la igualdad se cumpla: a = 1, b = 2, c = 1, d = -1, e = 0 y f = 1

Por lo tanto, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación lineal T.

De esta manera, la transformación lineal puede expresarse como:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{bmatrix}$$

Nota: Observemos las siguientes representaciones de la misma transformación lineal T:

$T: IR^2 \to IR^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$

y

$T: IR^2 \to IR^3$ $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Si bien las dos representaciones corresponden a una misma transformación lineal, el uso de la segunda resulta de mayor conveniencia sobre todo porque emplea parte del lenguaje matricial que usan los programas en una computadora y además simplifica el estudio de este tipo de funciones.

Definición: Sea la función T definida del espacio vectorial V en W una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sean $B=\{v_1,v_2,v_3...,v_n\}$ una base ordenada de V y $B'=\{w_1,w_2,w_3...,w_m\}$ una base ordenada de W. Entonces se define la **MATRIZ ASOCIADA** a la transformación lineal T como la matriz A_{mxn}, tal que:

$$A_T=\left[[T(v_1)]_{B'} \quad [T(v_2)]_{B'} \quad \ldots \quad [T(v_n)]_{B'}\right]$$

Observe que:

- la matriz A_T asociada a la TL T, es aquella que tiene por columnas, los transformados de los vectores de la base B del dominio expresados en la base B'del codominio;

- esta matriz A_T depende de la base que se elija en el dominio y codominio de T y como todo espacio vectorial tiene más de una base, podemos asociar a una misma TL más de una matriz.

- el hecho de que todo espacio vectorial admite infinitas bases, nos permite afirmar que a una misma TL, podemos asociarle infinitas matrices.

Nota

- Muchas veces en los textos se habla de la matriz asociada a una TL y no se especifican las bases consideradas en el dominio y en el codominio, como ocurrió en el ejemplo 1, en dichos casos se entiende, por defecto, que las bases consideradas son las canónicas.

- A la matriz asociada a una transformación lineal respecto de las bases canónicas del dominio y del codominio se la llama “matriz canónica” o también “matriz estándar”. En el ejemplo 1, la matriz encontrada es la matriz estándar asociada a dicha TL.

Representación matricial de una transformación lineal

Teorema

Sea T una transformación lineal definida del espacio V en el espacio W y sea A la matriz asociada a T respecto de las bases B y B´ del dominio y codominio, respectivamente. Entonces

$$(\forall X \in V): A\cdot[X]_B=[T(X)]_{B'}$$

Esta última expresión, también puede escribirse:

T: V $\rightarrow$ W tal que $[T(X)]_{B'} = A \cdot [X]_B$

Nota

Según esta representación $[T(X)]_{B'} = A \cdot [X]_B$, para hallar la imagen de un vector *X* del dominio de T, debemos conocer primero las coordenadas de dicho vector en la base B, $[X]_B$ para luego, obtener las coordenadas de la imagen de dicho vector en la base B', $[T(X)]_{B'}$, premultiplicando a $[X]_B$ por la matriz A. Esta matriz A hace posible el cálculo de las imágenes de vectores usando multiplicación matricial, cálculos que pueden efectuarse rápidamente en computadora.

Procedimiento para la obtención de una matriz de una transformación lineal

Si bien en el ejemplo 1 se buscó la matriz asociada a una TL, dicho método de búsqueda se torna más complejo a medida que aumentan las dimensiones de los espacios dominio y codominio de la TL o que cambien las bases de dichos espacios . Trataremos ahora de brindar un procedimiento diferente, mediante el cual se pueda hallar cualquiera de las matrices asociadas a una trasformación lineal. Para ello debemos seguir los siguientes pasos:

1°) Buscar las imágenes que la TL le asigna a cada uno de los vectores de la base del dominio. A estos vectores imágenes, se los suele llamar transformados.

2°) Buscar las coordenadas de los vectores transformados en la base del codominio.

3°) Construir la matriz asociada colocando como columnas las coordenadas encontradas en el paso 2. Recordemos que al construir la matriz debemos respetar el orden de los vectores básicos.

4°) Escribir la representación matricial.

Ejemplo

Dada la transformación lineal $T: IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Halle la matriz asociada a T, respecto de las bases indicadas y escriba su representación matricial:

a) Canónicas en el dominio y codominio.
b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ en el dominio y la canónica en el codominio.

c) Canónica en el dominio y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en el codominio.

d) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ en el dominio y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en el codominio.

Solución

a) Por tratarse de un operador lineal, es decir, de una TL en la cual el espacio dominio y codominio coinciden, trabajaremos con la base canónica de IR^2, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en el dominio y en el codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2°) Determinamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = -1 \wedge c_2 = 0$, luego $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de donde $c_1 = 0 \wedge c_2 = 1$, luego $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Observe que las componentes de los vectores transformados coinciden con sus coordenadas en la base canónica, esto nos indica que dichos vectores ya estaban expresados en la base canónica, por lo que este paso podría haberse omitido.

3°) Escribimos la matriz asociada colocando como columnas de la misma, los vectores obtenidos en el segundo paso. Recordemos que como trabajamos con bases ordenadas, al construir la matriz A debemos respetar el orden de los vectores básicos, es decir, la primera columna estará formada por las coordenadas del transformado del primer vector de la base del dominio y la segunda columna por las coordenadas del transformado del segundo vector de la base del dominio.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz estándar asociada a T

4°) De esta manera podemos escribir la representación matricialmente de la TL.

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C\right)\right]_C = A.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}_C$$

b) $B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right\}$ del dominio y la canónica en el codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}; \qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

2°) Buscamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ de donde $c_1=1 \wedge c_2=0$, luego $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ de donde $c_1=0 \wedge c_2=3$, luego $\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$

3°) Escribimos la matriz asociada

$A'=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ matriz asociada a T respecto de la base B en el dominio y la canónica en el codominio

4°) Escribimos la representación matricialmente de la TL.

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B\right)\right]_C = A'.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}x\\3y\end{bmatrix}_C$$

c) Canónica en el dominio y $B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ del codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}; \qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

2°) Buscamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ de donde $c_1=0 \;\wedge\; c_2=-1$, luego $\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ de donde $c_1=1 \;\wedge\; c_2=-1$, luego $\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

3°) Escribimos la matriz M.

$M=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ matriz asociada a T respecto de la base canónica en el dominio y la base B' en el codominio.

4°) De esta manera podemos escribir matricialmente la representación de la TL.

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C\right)_{B'}=M.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C=\begin{bmatrix}y\\-x-y\end{bmatrix}_{B'}$$

d) $B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right\}$ del dominio y $B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ del codominio.

1°) Determinamos los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

2°) Buscamos las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ de donde $c_1=0 \;\wedge\; c_2=1$, , luego $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ de donde $c_1=3 \;\wedge\; c_2=-3$, luego $\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$

3°) Escribimos la matriz N .

$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ matriz asociada a T respecto de la base B en el dominio y la base B' en el codominio

4°) De esta manera podemos escribir matricialmente la representación de la TL.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B\right)_{B'} = N.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3y \\ x-3y \end{bmatrix}_{B'}$$

Observación

- Si la base del espacio codominio es la canónica, entonces el 2° paso es innecesario, es decir, para hallar la matriz asociada, sólo debemos buscar los transformados de los vectores de la base del dominio (paso 1°) y luego armar la matriz asociada colocando dichos vectores transformados como columnas (paso 3°).

- Cuando se pide buscar la matriz asociada a una TL respecto de la base B, se entiende que la base a considerar en el dominio y codominio es la misma base B.

Matices asociadas estándares especiales en IR²

En cada una de las transformaciones que aparecen a continuación la matriz estándar asociada se busca calculando las imágenes de los vectores de la base canónica de IR^2 , $C = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ y con dichas imágenes como columnas se forma la matriz asociada.

a) ***Reflexión o simetría respecto del eje de abscisas***

$T : IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

b) ***Reflexión o simetría respecto del eje de ordenadas***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c) ***Reflexión o simetría respecto del origen de coordenadas***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

d) ***Reflexión o simetría respecto de la recta identidad***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e) ***Proyección sobre el eje x***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

f) ***Proyección sobre el eje y***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

g) ***Dilatación o contracción en la dirección del eje x***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$, k $\in$IR$^+$ y k ≠ 1

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Contracción horizontal ($0<k<1$) y dilatación horizontal ($k>1$)

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

h) ***Dilatación o contracción en la dirección del eje y***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$, k $\in$IR$^+$ y k ≠ 1

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Contracción vertical ($0<k<1$) y dilatación vertical ($k>1$)

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

i) ***Corte o cizalladura horizontal***

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix}$, k $\in$IR y k ≠ 0

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

j) *Corte o cizalladura vertical*

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\y+kx\end{pmatrix}$, k $\in$IR y k ≠ 0

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

k) *Rotación de ángulo α en sentido positivo*.

$T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\cos\theta - y\ sen\ \theta\\x\ sen\ \theta + y\cos\theta\end{pmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta\\sen\ \theta\end{bmatrix}$; $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-sen\ \theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$. Luego, $A_T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\ \theta\\sen\ \theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

La representación matricial de T es: $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

Nota: las rotaciones en IR^2, preservan la longitud de cada vector y el ángulo que forma cualquier par de vectores.

Ejemplo: Dada $T: IR^2 \to IR^2$ tal que $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}12x+10y\\-15x-13y\end{pmatrix}$, halle:

a) la matriz A asociada a la transformación dada, respecto de las bases canónicas en el dominio y en el codominio.

b) la matriz M asociada a la misma transformación, en este caso, respecto de la base $B'=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y en el codominio.

Solución

a) Buscamos la matriz estándar A asociada a T:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}12\\-15\end{bmatrix};\qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}10\\-13\end{bmatrix}.\quad \text{Luego,}\quad A=\begin{bmatrix}12 & 10\\-15 & -13\end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C\right)\right]_C=\begin{bmatrix}12 & 10\\-15 & -13\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_C$$

b) Buscamos la matriz M asociada a la misma transformación, respecto de la base $B'=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right\}$ en el dominio y en el codominio.

1º. Determinar los transformados de los vectores de la base del dominio.

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix};\qquad T\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}$$

2º. Determinar las coordenadas de los vectores transformados, en la base del codominio.

Los vectores $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}$ están dados en la base canónica del codominio, por lo que resulta necesario expresarlos en la base *B* dada en el codominio. Se efectúa entonces, el cambio de base:

$$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\ \text{de donde}\ c_1=2\ \wedge\ c_2=0,\quad \text{luego:}\ \left(\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\ \text{de donde}\ c_1=0\ \wedge\ c_2=-3,\quad \text{luego:}\ \left(\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}\right)_{B'}=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$$

3º. Luego, la matriz *M* es: $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}$

4°. La representación matricial de T será:

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B\right)\right]_B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_B$$

¿Existirá alguna relación entre las matrices *A* y *M*? Para poder responder esta pregunta debemos ver antes otros conceptos como por ejemplo cambio de base.

Matrices de cambio de base o matriz de transición

Queremos encontrar una matriz que nos permita cambiar las coordenadas de un vector en una base por las coordenadas del mismo vector en otra base.

Definición

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita y sea Id la transformación identidad definida de V en V. Llamaremos matriz de cambio de base de la base B a la base B’ a la matriz asociada a la transformación identidad respecto de la base B en el dominio y respecto de la base B’ en el codominio.

Sea $Id : V \to V$ tal que $Id(X) = X$ la transformación identidad.

Sea P la matriz asociada a dicha TL, entonces, la representación matricial queda:

$$\left[Id\left([X]_B\right)\right]_{B'} = P.[X]_B \qquad \text{teniendo en cuenta que } Id(X) = X$$

$$[X]_{B'} = P.[X]_B$$

De esta manera conocidas las coordenadas de un vector en base B, $[X]_B$, al premultiplicarla por la matriz P, se obtienen las coordenadas del mismo vector en la base B’, $[X]_{B'}$. La matriz P se llama matriz de cambio de base de la base B a la base B’. ¿Qué relación hay entre las matrices P y Q del ejercicio anterior?

Relación entre matrices de cambio de base

Sea $Id : V \to V$ la transformación identidad, tal que $Id\ (X) = X$.

Sean P la matriz de cambio de la base B a la base B’ y : la matriz de cambio de la base B’ a la base B.

Por lo tanto, es posible escribir las siguientes representaciones de Id:

$Id : V \to V$ tal que $[Id(X)]_{B'} = P \cdot [X]_B$, o lo que es lo mismo

$$[X]_{B'} = P \cdot [X]_B \qquad [1]$$

$Id:V \to V$ tal que $\left[Id(X)\right]_B = Q \cdot \left[X\right]_{B'}$, o lo que es lo mismo

$$\left[X\right]_B = Q \cdot \left[X\right]_{B'} \qquad\qquad [2]$$

Reemplazando $[2]$ en $[1]$, nos queda: $\left[X\right]_{B'} = P \cdot (Q \cdot \left[X\right]_{B'})$

Por propiedad asociativa del producto de matrices:

$$\left[X\right]_{B'} = \underbrace{(P \cdot Q)}_{I} \cdot \left[X\right]_{B'}$$

Para que esta igualdad se cumpla, la matriz P.Q debe coincidir con la matriz identidad.

Puesto que: $P \cdot Q = I$, se concluye que $Q = P^{-1}$

Nota: Esto nos indica que la matriz de pasaje o de transición de la base B a B’ y la matriz de transición de la base B’ a B, son matrices inversas entre sí.

Teorema

Si P de orden n es la matriz de transición de la base B a la base B´, entonces:

a) P es inversible

b) P^{-1} es la matriz de transición de B’ a la base B

Ejemplo: Halle la matriz de cambio de base:

a) de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) de la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

c) muestre que las matrices obtenidas en los ítems a) y b) son inversas entre sí.

Solución

Sea $Id : IR^2 \to IR^2$ tal que $Id\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

a) de la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ a la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

1°) $Id\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\quad Id\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ matriz de cambio de base de la base B a la base canónica

$\left[Id\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B\right)\right]_C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B$ teniendo en cuenta que $Id\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B$$

b) de la base $C=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ a la base $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$

1°) $Id\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\quad Id\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2°) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ de donde $c_1=3 \wedge c_2=-1$, luego: $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)_B=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ de donde $c_1=2 \wedge c_2=-1$, luego: $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)_B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

3°) $Q=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ matriz de cambio de base de la base canónica a la base B

$\left[Id\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C\right)\right]_B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C$ teniendo en cuenta que $Id\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C$$

Nota

Del punto a) del ejercicio, podemos observar que la matriz de cambio de base de una base cualquiera B a la base canónica tiene por columnas los vectores de la base B.

c) $P.Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I , las matrices P y Q son inversas entre sí.

Es decir Q = P^{-1}

Matrices semejantes

Consideremos ahora las matrices asociadas a un operador lineal T definida en el espacio vectorial V de dimensión finita, respecto de una misma base en el dominio y codominio. Como ya dijimos anteriormente, las matrices asociadas a una transformación lineal, dependen de la base elegida en V.

Sea T : V $\rightarrow$ V un operador lineal y sean A y M dos matrices asociadas a dicho operador.

A: matriz asociada a T respecto de la base *B* y

M: matriz asociada a T respecto de la base $B\,'$.

Si además indicamos con P a la matriz de transición de la base B' a la base B. Por lo visto anteriormente, P^{-1} será la matriz de transición de la base B a la base B'.

De esta manera, la siguiente figura describe gráficamente cómo están relacionadas las matrices *A* y *M* asociadas a un mismo operador lineal T.

$$\begin{tikzcd}
\text{En V:} & {[X]_B} \arrow[r, Rightarrow, "A"] & {[T(X)]_B} \arrow[d, Rightarrow, "P^{-1}"] \\
\text{En V:} & {[X]_{B'}} \arrow[u, Rightarrow, "P"] \arrow[r, Rightarrow, "M"] & {[T(X)]_{B'}}
\end{tikzcd}$$

Figura 1

Dado que *A* es la matriz asociada a T respecto de la base *B* y *M* la matriz asociada a T respecto a *B'*, las siguientes relaciones son válidas para todo *X* en V.

La ecuación $A \cdot [X]_B = [T(X)]_B$, que en el gráfico está representado por:

$$[X]_B \xrightarrow{A} [T(X)]_B$$

Y la ecuación $M \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'}$, que en el gráfico está representado por:

$$[X]_{B'} \xrightarrow{M} [T(X)]_{B'}$$

Volviendo a la figura 1, podemos ver que hay dos caminos para ir de la matriz de coordenadas *X* a la matriz de coordenadas $T(X)$. Un *camino directo* es el que estaría representado en la parte inferior de la figura y que nos permite llegar a $[T(X)]_{B'}$ partiendo de las coordenadas $[x]_{B'}$, mediante la premultiplicación de dichas coordenadas por la matriz M*,* es decir:

$$M \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'} \qquad [1]$$

El otro camino llamado, *camino indirecto***,** consiste en tres pasos:

1°) partir de las coordenadas de *X* en la base B', $[x]_{B'}$ y aplicarle la transformación identidad que tiene como matriz asociada la matriz P para encontrar así las coordenadas de *X* en la base B, $[x]_B$.

$$P \cdot [X]_{B'} = [X]_B \qquad [2]$$

2°) conocidas las coordenadas de *X* en la base B, $[X]_B$, aplicarle a estas coordenadas la transformación T que tiene como matriz asociada a A.

$$A \cdot [X]_B = [T(X)]_B \qquad [3]$$

reemplazando [2] en [3], tenemos:

$$A.(P \cdot [X]_{B'}) = [T(X)]_B$$

por propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

$$(A.P) \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_B \qquad [4]$$

3°) conocidas las coordenadas $[T(X)]_B$ aplicarle a estas coordenadas la transformación identidad que tiene como matriz asociada P^{-1} para encontrar las coordenadas de $T(X)$ en la base B', $[T(X)]_{B'}$.

$$P^{-1} \cdot [T(X)]_B = [T(X)]_{B'} \qquad [5]$$

reemplazando [4] en [5], tenemos:

$$P^{-1} \cdot (A.P) \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'}$$

por propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

$$(P^{-1} \cdot A.P) \cdot [X]_{B'} = [T(X)]_{B'} \qquad [6]$$

Comparando las expresiones [1] y [6], podemos concluir que:

$$M = P^{-1} . A . P$$

Teorema

Sea T; V $\to$ V un operador lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión finita. Si A es la matriz asociada a T respecto dela base B en el dominio y codominio y M es la matriz asociada a T respecto de la base B' respecto del dominio y codominio, entonces

$$M = P^{-1}. A. P$$

donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B.

Definición: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n, se dice que B es semejante a A, si existe una matriz inversible P de orden n, tal que B = P^{-1}.A.P

Ahora sí estamos en condiciones de establecer que relación que existe entre las matrices A y M asociadas a un mismo operador lineal T.

Las matrices asociadas a un mismo operador lineal respecto de la misma base en el dominio y codominio son MATRICES SEMEJANTES.

Ejemplo

Verifique que las matrices A y M obtenidas en el ejemplo 3 son semejantes.

Solución

Siendo $A = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ las dos matrices asociadas a la transformación lineal T, obtenidas en el ejemplo 3, la primera de ellas A, referida a la base canónica en dominio y codominio y la segunda M, referida a la base B en dominio y codominio.

Y considerando como matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, las matrices de transición de la base B a la canónica (P) y de la base canónica a la base B (P^{-1}), obtenidas en el ejemplo 4., tenemos:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = M$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Importante

1. La ecuación B= P^{-1} A P, puede escribirse también como A= $(P^{-1})^{-1}$ B P^{-1}. Por lo tanto, escribiendo P^{-1} = Q, resulta: A= Q^{-1} B Q, lo cual indica que A es semejante a B. En conclusión, se dice que *A y B son semejantes.*

2. Si dos matrices representan al mismo operador lineal T de V en V, con respecto a dos bases diferentes, entonces *las matrices son semejantes.* Luego, las matrices asociadas a un operador lineal constituyen un ejemplo de matrices semejantes.

3. Si T es una función de M_{nxn} en M_{nxn} tal que T(A) = P^{-1} A P, siendo P una matriz fija, entonces T recibe el nombre de *transformación lineal de semejanza.*

Propiedades de las matrices semejantes

a) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces det(A) = det(B).

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) det(A) = det(B)

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

A = P^{-1} . B . P — calculando el determinante de A

det(A) = det(P^{-1} . B . P) — por prop. det (A.B) = det(A) . det(B)

det(A) = det(P^{-1}).det B . det P — por prop. det (P^{-1}) = $\frac{1}{\det(P)}$

det(A) = $\frac{1}{\det(P)}$. $\det(B)$. $\det(P)$ — simplificando det(P)

det(A) = det(B) con lo cual la propiedad queda demostrada.

b) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces tr(A) = tr(B).

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) tr(A) = tr(B)

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} . B . P$ calculando la traza de A

$tr(A) = tr(P^{-1} . B . P)$ por prop asociativa del producto de matrices

$tr(A) = tr(P^{-1} . (B . P))$ por $tr(A.B) = tr(B.A)$, A y B cuadradas de igual orden

$tr(A) = tr((B . P). P^{-1})$ por prop asociativa del producto de matrices

$tr(A) = tr(B . (P. P^{-1}))$ por def de matriz inversa $P. P^{-1} = I$, I_{nxn} matriz identidad

$tr(A) = tr(B . I)$ por $B . I = I$ por ser I elemento neutro

$tr(A) = tr(B)$ con lo cual la propiedad queda demostrada.

c) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces A^2 es semejante a B^2.

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) A^2 es semejante a B^2

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} . B . P$ elevando al cuadrado

$A^2 = (P^{-1} . B . P)^2$

$A^2 = (P^{-1} . B . P). (P^{-1} . B . P)$ por prop. asociativa de la multiplicación

$A^2 = P^{-1} . B .(P .P^{-1}). B . P$ por def. de matriz inversa $P.P^{-1} = I$

$A^2 = P^{-1} . B . I . B . P$ por prop. asociativa de la multiplicación

$A^2 = P^{-1} . B . (I . B) . P$ por prop. elem. neutro de la mult. $I . B = B$

$A^2 = P^{-1} . B . B . P$ por prop. asociativa de la multiplicación

$A^2 = P^{-1} . (B . B) . P$

$A^2 = P^{-1} . B^2 . P$ por def. de matrices semejantes

A^2 es semejante a B^2

d) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces A^T es semejante a B^T.

H) A y B son matrices semejantes de orden n

T) A^T es semejante a B^T

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1} . B . P$ trasponiendo ambos miembros

$A^T = (P^{-1} . B . P)^T$ por prop. de la trasposición $(A.B.C)^T = C^T.B^T.A^T$

$A^T = P^T . B^T . (P^{-1})^T$ por prop. de la trasposición $(P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$

$A^T = P^T . B^T . (P^T)^{-1}$ considerando $(P^T)^{-1} = Q$ es decir $P^T = Q^{-1}$

$A^T = Q^{-1} . B^T . Q$ por definición de matrices semejantes

A^T es semejante a B^T

e) Si A y B son matrices inversibles de orden n y semejantes, entonces A^{-1} es semejante a B^{-1}.

H) A y B de orden n, son matrices inversibles y semejantes

T) A^{-1} es semejante a B^{-1}

D) Por hipótesis sabemos que A y B son matrices semejantes, es decir, existe una matriz P inversible de orden n, tal que:

$A = P^{-1}. B . P$ calculamos la inversa de A

$A^{-1} = (P^{-1}. B . P)^{-1}$ por propiedad $(A.B.C)^{-1}= C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$

$A^{-1} = P^{-1}.B^{-1}.(P^{-1})^{-1}$ por prop. de las matrices inversas $(A^{-1})^{-1}= A$

$A^{-1} = P^{-1}.B^{-1}.P$ por definición de matrices semejantes

A^{-1} es semejante a B^{-1}

¿Qué ventajas tiene conocer la matriz asociada a una TL?

Sabemos que a una TL, podemos asociarle infinitas matrices asociadas, las cuales dependen de la base elegida en el espacio dominio y codominio de la TL. Pero si observamos en el ejemplo 3b), la matriz M, asociada a la TL, es una matriz diagonal. Las matrices diagonales tienen ciertas ventajas: su determinante puede calcularse simplemente multiplicando los elementos de su diagonal principal, su matriz inversa, si es que existe, se puede obtener reemplazando los elementos de la diagonal principal por sus recíprocos, la potencia enésima de una matriz diagonal se obtiene elevando a la enésima potencia los elementos de la diagonal principal, etc. Es decir, de todas las matrices asociadas a una misma TL, tiene particular importancia poder encontrar una matriz asociada a dicha TL que sea diagonal, la cual nos permite simplificar ciertos cálculos como se indicó anteriormente.

Ahora, ¿todos los operadores lineales admiten una matriz asociada que tenga forma diagonal?. Si tenemos en cuenta que las matrices asociadas a un operador lineal, dependen de la base con la que se trabaje. ¿Cómo determinar la base con la que se debe trabajar para que la matriz asociada tenga forma diagonal? Este procedimiento que nos permite encontrar una matriz diagonal asociada a un operador lineal se lo llama diagonalización.

Ejercicios resueltos de matriz asociada

1) Sea T: $IR^2 \rightarrow IR^3$ / T((x,y)) = (x, 2x+y, -y)

a) Escribe la representación matricial.
b) Calcula T((-2, 3)) con la definición dada en a)
c) Calcula T(u) con la matriz asociada A, siendo u =(-2, 3)

Solución de a)
Formaremos la matriz asociada a la transformación.
Buscamos la imagen de los vectores de la base canónica en

T((1,0))= (1, 2, 0), las coordenadas de dicho vector será $[T(u_1)]=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

T((0,1))= (0, 1, -1), las coordenadas de dicho vector será $[T(u_2)]=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

Por lo tanto la matriz asociada a la transformación lineal, es $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$

La transformación lineal está definida en forma matricial:
$T:IR^2 \rightarrow IR^3$ / T(x)= A.x, siendo $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$

Solución de b)
T((-2, 3)) = (-2, 2.(-2)+3, -3) = (-2, -1, -3)

Solución de c)
T(u) = A . u

$$T(u) = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

$$T(u) = \begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix}$$

………

2) Sea T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ / T((x,y)) = (2x – y, 3y)

a) Encontrar la matriz A, asociada a las bases B= {u_1, u_2} donde u_1=(2, 1) y u_2= (0,-3) y B´= {v_1 , v_2 }, v_1 =(0,3), v_2 =(1,2) para el dominio y codominio respectivamente.

b) Siendo un vector w= (-1, 4), calcular la imagen en forma directa.

c) Calcular las coordenadas de T(w).

d) Calcular $[T(\mathrm{w})]$, utilizando la matriz asociada A

Solución de a)

La matriz asociada a T, será la matriz de coordenadas A= $[[T(u_1)]_{B'} \quad [T(u)_2]_{B'}]$

Buscamos la imagen de los vectores de la base B:

$T(u_1)$ = T((2, 1)) = (3,3)

Busco las coordenadas de (3,3) en la base B´:

$\binom{3}{3}$= a v_1 + b v_2

$\binom{3}{3}$= $a\binom{0}{3} + b\binom{1}{2}$ resolviendo, tendremos a = -1 y b= 3

Por lo tanto $[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$T(u_2)$= T((0, -3)) y T((0,-3)) = (3, -9)

Busco las coordenadas de (3,-9) en la base B´:

(3,-9) = c v_1 + d v_2

$\binom{3}{-9}$= = $c\binom{0}{3} + d\binom{1}{2}$ resolviendo, tendremos c = -5 y d = 3

Por lo tanto $[T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

La matriz asociada A, es entonces

A= $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Solución de b)

T(w) = (-6, 12)

Solución de c)

$[T(w)]_{B'}$: $\binom{-6}{12}$= $\alpha\binom{0}{3} + \beta\binom{1}{2}$; α= 8 β= -6

Por lo tanto

$[T(w)]_{B'}$= $\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

Solución de d)

Sabemos que A. $[\mathrm{w}]_B$= $[T(\mathrm{w})]_{B'}$

Buscamos en la base B, las coordenadas de (-1, 4)

(-1, 4) = δ (2, 1) + μ(0, -3)

Resolviendo el sistema, tendremos: δ= -1/2 μ= -3/2

Ahora realizamos el producto de la matriz asociada A con las coordenadas del vector w en la base B

$\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}_B$= entonces $[T(w)]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

………

3) Sea T: $P_1 \rightarrow P_2$ / T(p(x)) = x . p(x)

- **a)** Determinar la matriz asociada a T, respecto de las bases S= {u_1, u_2}, siendo u_1 =x, u_2 = 1 y S´={ v_1, v_2, v_3}, siendo $v_1 = x^2$, v_2 = x, v_3 =1
- **b)** Si p(x) = 3x – 2, calcular T(p(x)) en forma directa.
- **c)** Calcular T(p(x)) por medio de la matriz asociada.

Solución de a)

Busco la imagen para los vectores de la base S

T(x)= x. x entonces T(x) = x^2

T(1) = x .1 entonces T(1)= x

Ahora buscamos las coordenadas de dichos vectores en S´

$[T(x)]_{S'}$: $x^2 = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \delta.1$ entonces $\alpha = 1$ $\beta = 0$ $\delta = 0$

Por lo tanto $[T(x)]_{S'}$ = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[T(1)]_{S'}$ $x = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \delta.1$ entonces $\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\delta = 0$

Por lo tanto $[T(x)]_{S'}$ = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

La matriz asociada a T, es A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución de b)

$T(3x - 2) = x.\,(3x - 2) = 3\,x^2 - 2x$

Solución de c)

Buscamos $[p(x)]_S$

$3x - 2 = \alpha\, x + \beta.1$ entonces $\alpha = 3$ y $\beta = -2$

$[p(x)]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Ahora multiplicamos la matriz asociada A por las coordenadas del vector p(x)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $[T(p(x))]_{S'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ vector coordenadas.

Ahora buscamos el vector T(p(x)), conociendo sus coordenadas

$T(p(x)) = 3.\,(x^2) + (-2)\,.\,x + 1\,.\,0$

$= 3\,x^2 - 2\,x$

……

4) Sean las bases B= $\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\}$, llamados u_1, u_2, u_3 y u_4 , respectivamente y B´= $\{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\}$ llamados v_1, v_2, v_3 y v_4

Y sea w = $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

a) Determinar $[w]_B$

b) Obtener la matriz P de pasaje de B a B´.

c) Calcular $[w]_{B´}$, en forma directa y por medio de la matriz de transición P

Solución de a)

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} + \pi\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, queda α= 1, β = -1, δ= 1, π=2

Por lo tanto $[w]_B = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$

Solución de b)

P = [$[u_1]_{B´}$, $[u_2]_{B´}$, $[u_3]_{B´}$, $[u_4]_{B´}$]

Calculamos $[u_1]_{B´}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \pi\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Resolviendo, α= 0, β = 0, δ= 0, π=1. Por lo tanto $[u_1]_{B´} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

Calculamos $[u_2]_{B´}$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \pi\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Resolviendo, α= 1, β = 1, δ= 0, π = -1. Por lo tanto $[u_2]_{B´} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$

Calculamos $[u_3]_{B´}$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \pi\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

Resolviendo, α= 2, β = 0, δ= 1, π= -2. Por lo tanto $[u_1]_{B'}= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Calculamos $[u_4]_{B'}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, α= 0, β = 1, δ= 0, π= 0. Por lo tanto $[u_1]_{B'}= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por lo tanto la matriz de pasaje de la base B a la base B´, es:

$$P_{BB'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución de c)

En forma directa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, tenemos α= 1, β = 1, δ= 1, π= 0. Por lo tanto $[w]_{B'}= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Utilizando la matriz de pasaje P

$[w]_{B'} = P. [w]_B$

$$[w]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

……

5) Si P= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de transición de una base B a la base canónica C.
Determina la base B.

Solución
P es matriz de transición de B a la base canónica C, será:

P= [$[u_1]_C$, $[u_2]_C$, $[u_3]_C$], siendo u_1, u_2, u_3, vectores de la base B.

$[u_1]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Entonces $1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[u_2]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ Entonces $1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$[u_3]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Entonces $0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto la base B = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

……

6) Sea C = {u_1, u_2} , base canónica. Sea B_2 = {v_1, v_2}, con v_1 = (1, 3) y v_2 = (-1, 2), ambas bases para IR^2.

a) Hallar las coordenas de un vector x = (x_1, x_2) en la base B_2. Anotar la matriz de pasaje P de C a B_2

b) Hallar las coordenadas de w = $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ en la base B_2, utilizando la matriz de pasaje de C a B_2.

c) Graficar el vector w en la base C y B_2.

Solución de a)
Sea x, vector de IR^2.

Tendremos entonces que: $x = x_1\,(1, 0) + x_2\,(0, 1)$

$x = x_1\,u_1 + x_2\,u_2$

Por ser C, base de IR^2.

O sea, que las coordenadas de x en C, son $[x]_C = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

También, por ser base B_2 de IR^2, podemos escribir:

$$x = c_1\,v_1 + c_2\,v_2$$

Siendo c_1, c_2 , los escalares de x en la base B_2

Es decir que $[x]_{B2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Podemos escribir a los vectores de la base C , como combinación lineal de los vectores de la base B_2.

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ resolviendo, tendremos $a = \frac{2}{5}$ y $b = -\frac{3}{5}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ resolviendo, tendremos $d = \frac{1}{5}$ y $e = \frac{1}{5}$

Reemplazando

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-\frac{3}{5})\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad u_2 = \frac{2}{5}v_1 + (-\frac{3}{5})\,v_2$

o sea, que las coordenadas de u_1 en B_2 , son $[u_1]_{B2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad u_2 = \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}\,v_2$

es decir, que las coordenadas de u_2 en B_2 , son $[u_2]_{B2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Entonces

$$x = x_1\,u_1 + x_2\,u_2$$
$$x = x_1\,(\tfrac{2}{5}v_1 + (-\tfrac{3}{5})\,v_2) + x_2\,(\tfrac{1}{5}v_1 + \tfrac{1}{5}\,v_2)$$

$$x = (\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}\ x_2)\ v_1 + (-\frac{3}{5}\ x_1 + \ \frac{1}{5}x_2)\ v_2$$

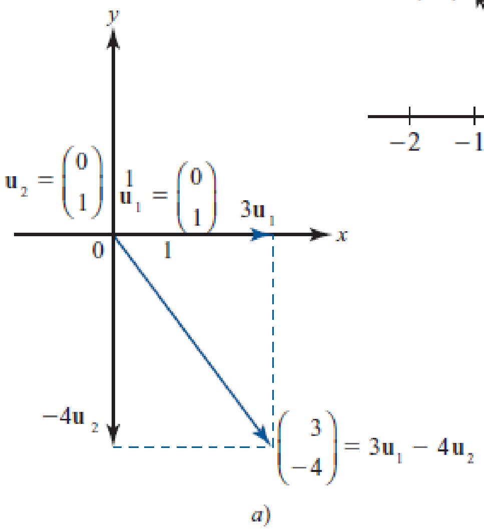
Por lo tanto:

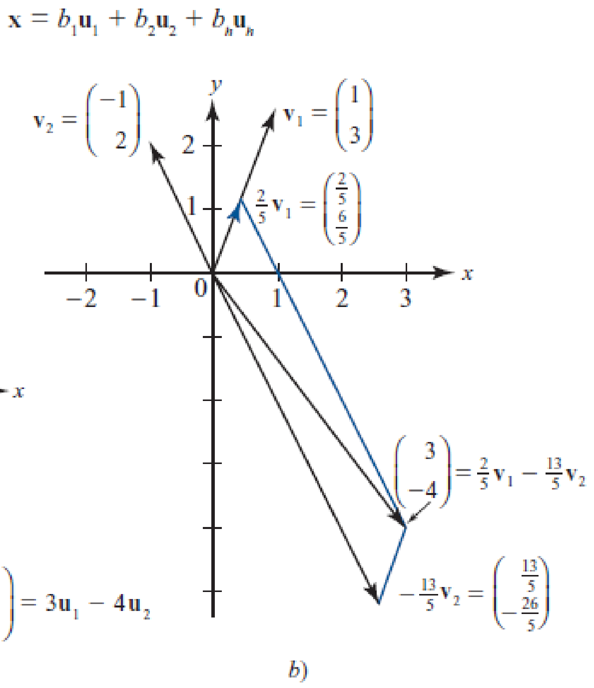
que $[x]_{B2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}x_1 \ + \ \frac{1}{5}\ x_2 \\ -\frac{3}{5}\ x_1 + \ \frac{1}{5}x_2 \end{bmatrix}$

La matriz de pasaje P, será

$$P \ = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Solución de b)





La matriz de pasaje $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Como $[x]_{B2} = P \ . \ [x]_{B1}$

$$[x]_{B2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$[x]_{B2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

Solución de c)

a) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base canónica $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Valores y Vectores Propios o Valores y Vectores Característicos o Autovalores y Autovectores o Eigenvalores y Eigenvectores

El problema del eigenvalor o valor propio es uno de los más importantes del álgebra lineal, se puede plantear como sigue. Si A es una matriz de nxn, ¿hay vectores ***x*** diferentes de cero en IR^n tales que A***x*** sea un múltiplo escalar de ***x***?
Los autovalores y autovectores se utilizan principalmente en la solución de sistemas dinámicos, esto es, en sistemas que son función del tiempo.
Los términos *eigenvalor* y *eigenvector* provienen del término alemán *eigenwert*, que significa valor propio.

Definición
Sea A una matriz real de nxn. El escalar λ es un **autovalor** de A si existe un vector $\boldsymbol{x} \in IR^n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que A***x*** = λ ***x***.
Al vector ***x*** se lo llama un **autovector** de A correspondiente a λ.

Observaciones
1) A es la matriz asociada estándar del operador lineal T sobre IR^n, pues verifica que A***x*** = T(***x***), por lo tanto, se habla indistintamente de autovalores y autovectores de la matriz A o del operador lineal T.
2) A***x*** es múltiplo escalar de ***x***.
3) La ecuación A***x*** = λ***x*** tiene dos incógnitas, λ y ***x***.
4) En el plano IR^2 y en el espacio geométrico IR^3, los autovectores de A son los vectores de IR^2 o (excluyente) de IR^3 que bajo la acción de A no cambian de dirección, es decir, son los vectores paralelos (en la misma dirección) a λ***x*.** La multiplicación por A dilata ($\lambda > 1$), contrae ($0 < \lambda < 1$), o cambia el sentido ($\lambda < 0$) al vector ***x***, dependiendo del valor de λ.

Ejemplo
Muestre que ***x*** = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un autovector de A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y encuentre el autovalor correspondiente.

Solución
Calculamos
A ***x*** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\,\boldsymbol{x}$, de donde se sigue que ***x*** es un autovector de A, asociado al autovalor 5.

Ejemplo

Muestre que 4 es un autovalor de A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre todos los autovectores correspondientes a este autovalor.

Solución

Se debe demostrar que existe un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que A$\boldsymbol{x}$ = 4$\boldsymbol{x}$, esta ecuación es equivalente a (A – 4I) $\boldsymbol{x}$ = **0.** Por lo tanto, se debe encontrar el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo anterior, es decir,

$$(A - 4I)\, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se sigue que el espacio solución es $E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in IR \right\}$, sin embargo, este espacio contiene todos los autovectores correspondiente a λ = 4 más el vector nulo que no es un autovector de A por definición.

Luego, los autovectores pedidos son de la forma $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ con $t \neq 0$, o equivalentemente, son los múltiplos distintos de cero del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del espacio E_λ es el conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y dim } (E_\lambda) = 1.$$

Cálculo de autovalores y autovectores

Teorema (cálculo de autovalores) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces

$$\det (A - \lambda I) = 0.$$

Demostración

Por hipótesis, si λ es valor propio de la matriz A de nxn, se tiene por definición

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Utilizando el álgebra matricial

$$A\boldsymbol{x} - \lambda I\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

o bien

$$(A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

La expresión (1) representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible indeterminado, pues por definición, los autovectores ***x*** satisfacen ***x***$\neq$0. Luego, la matriz de coeficientes del sistema, (A - λ I) de nxn es no inversible o singular. Por lo tanto,

det (A - λ I) = 0 que es la tesis o, equivalentemente, det (λ I - A) = 0.

.

Nota

La ecuación anterior se denomina **ecuación característica de A** y es de grado n en λ .
La expresión det(A - λ I) es un polinomio de grado n en λ y P(λ) se denomina **polinomio característico de A**, es decir, P(λ) = det (A - λ I)**.**

Según el **Teorema Fundamental del Álgebra**, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos, tiene exactamente n raíces contando multiplicidades.
Se observa que los n escalares λ (raíces repetidas o distintas) que satisfacen la ecuación característica, son los autovalores de A. En otras palabras, cada matriz A de nxn con coeficientes reales o complejos, tiene n valores propios complejos contando multiplicidades.
El conjunto de todos los autovalores de A recibe el nombre de **espectro de A** y el autovalor λ de mayor valor absoluto recibe el nombre de **radio espectral**, es el radio de un círculo centrado en el origen del plano complejo que incluye todos los autovalores de A.

Ejemplo Determinar los autovalores de la matriz A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Utilizando la ecuación característica det(A - λ I) = 0, se tiene

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

o bien

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

cuyas raíces son λ_1 = 1 y λ_2 = 2, que son los autovalores de A.

Observar que la **multiplicidad algebraica** de cada autovalor en el ejemplo anterior es 1, se anota $M_{alg}(\lambda_1) = 1$, $M_{alg}(\lambda_2) = 1$. Recordar que la multiplicidad algebraica de cada raíz en una ecuación algebraica, es el número de veces que aparece dicho valor como raíz de la ecuación.

Cálculo o determinación de autovectores

Para cada valor propio λ encontrado, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéno

$$\mathbf{(A - \lambda I)}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

obtenido en (1), siendo **(A - λ I)** la matriz de coeficientes de nxn**,** ***x*** el vector de las incógnitas de nx1 y **0** el vector de términos independientes de nx1.
El espacio solución del sistema anterior, que contiene todos los vectores propios ***x*** correspondientes a λ, más el vector cero (no es vector propio de A por definición) se denomina **espacio propio** o **espacio característico** o **eigenespacio** o **autoespacio** y se anota E_λ, es decir,

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{IR}^n \,/\, (A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

La base de este espacio vectorial (no es única) es útil porque contiene un número finito de vectores propios linealmente independientes y generadores de los infinitos autovectores correspondientes a un mismo valor λ.
La dimensión del espacio E_λ se denomina en este contexto, **multiplicidad geométrica de λ y** se anota $M_{geo}(\lambda)$**.** Se observa que

$$\dim (E_\lambda) = g,$$

donde g denota los grados de indeterminación o de libertad del sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda I)\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

siendo $g \geq 1$ pues E_λ no es un espacio vectorial nulo. También, $\dim(E_\lambda)$ = g representa la nulidad de la matriz (A - λ I) (dimensión del núcleo del operador lineal T(***x***) = (A - λ I) ***x***).

Además se verifica que

$$0 < M_{geo}(\lambda) \leq M_{alg}(\lambda)$$

Ejemplo: Calcular los vectores propios de A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución
Se resuelve la ecuación característica

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

siendo las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = 5$.

Se observa que $M_{alg}(\lambda_1 = 1) = 1$, $M_{alg}(\lambda' = 5) = 2$, la traza(A) es igual a la suma de los valores propios, tr (A) = 1 + 5 + 5 = 11 y determinante de A es igual al producto de los valores propios, det (A) = 1 · 5 · 5 = 25.

Para obtener los autovectores, se resuelve el sistema (A - λ I) ***x*** = **0** para cada valor de λ.

Para λ' = 5, se tiene el sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el teorema de Rouché - Frobenius y resolviendo, se obtienen los grados de libertad g = 2 y el espacio característico

$$E_{\lambda'} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in IR^3 \right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ para } s, t \in IR\,;$$

una base del espacio característico es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Luego,

$$\dim\ (E_{\lambda'}) = 2 = M_{geo}(\lambda' = 5) = g$$

Se observa que

$$M_{geo}(\lambda' = 5) = M_{alg}(\lambda' = 5) = 2$$

(La multiplicidad algebraica y geométrica de λ' = 5 coinciden).

Análogamente, se resuelve el sistema (A - λ I) $\boldsymbol{x}$ = **0** para λ_1 = 1 y se obtiene el siguiente espacio propio

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \in IR^3 \right\}.$$

Una base es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

siendo

$$\dim\ (E_{\lambda_1}) = 1 = M_{geo}(\lambda_1 = 1) = g$$

(La multiplicidad algebraica y geométrica de λ_1 = 1 coinciden).

Propiedades de valores y vectores propios

1) Los valores propios de una matriz A y su transpuesta son iguales.

2) Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

3) La suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de la matriz.

4) El producto de los valores propios de una matriz es igual al determinante de la matriz.

5) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn inversible, $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}. Equivalentemente, la matriz A es singular si, y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor de A.

6) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces $k\lambda$, con el escalar $k \neq 0$, es valor propio de kA (los vectores propios no cambian).

7) Si λ es valor propio de la matriz A de nxn, entonces λ^r, siendo r una potencia natural (r = 1, 2, 3, …), es valor propio de A^r (los vectores propios no cambian).

8) Si A es una matriz simétrica, entonces los autovalores son números reales y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

9) Si la matriz A de nxn tiene n autovalores distintos (la multiplicidad algebraica de cada autovalor es 1), entonces tiene un conjunto de n autovectores linealmente independiente.

Ejercicio obligatorio Demostrar las propiedades 1), 2), 5), 6) y 7).

Diagonalización

Se acostumbra hacer referencia a la diagonalización de una matriz cuadrada A o también a la diagonalización del operador lineal T de matriz asociada estándar A.
La diagonalización, si es posible, es una transformación de semejanza de una matriz A a su forma diagonal, conservando los valores propios de A.
La ventaja de la transformación, es la sencillez que tendría la matriz A en su forma diagonal.
La mejor situación posible se logra cuando una matriz cuadrada es **semejante** a una matriz diagonal.

Definición
Una matriz A de nxn es **diagonalizable**, si existe una matriz diagonal D tal que A sea semejante a D; es decir, si existe una matriz P inversible o no singular de nxn tal que

$$P^{-1}AP = D$$

Se dice que la matriz P **diagonaliza** a A.

Forma diagonal de una matriz o diagonalización de matrices

El teorema siguiente es una herramienta básica en el estudio de la diagonalización, pues revela la técnica para que algunas matrices se transformen en una matriz diagonal, conservando los autovalores.

Teorema
Sea A una matriz de nxn con n vectores propios linealmente independientes. Si se colocan estos vectores como columnas de una matriz P, entonces

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_i con i = 1, 2, …, n es autovalor de A.

Demostración
Sea P la matriz nxn cuyas columnas son los vectores propios $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, …, $\boldsymbol{v_n}$ linealmente independientes de A, es decir

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & .... & v_n \end{bmatrix}$$

Luego, el producto AP es la matriz nxn cuyas columnas son A$\boldsymbol{v_1}$, A$\boldsymbol{v_2}$, ..., A$\boldsymbol{v_n}$,

$$AP = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & .... & Av_n \end{bmatrix}$$

Por definición de vector propio, remplazamos A$\boldsymbol{v_1}$, A$\boldsymbol{v_2}$,..., A$\boldsymbol{v_n}$, por $\lambda_1 \boldsymbol{v_1}$, $\lambda_2 \boldsymbol{v_2}$, ..., $\lambda_n \boldsymbol{v_n}$

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & .... & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

Escribiendo de manera conveniente

$$AP = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & .... & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

Multiplicando por P^{-1} ambos miembros, se tiene

$$P^{-1}AP = D,$$

siendo D la matriz diagonal con los valores propios de A en la diagonal.

Observaciones

. La expresión $P^{-1}AP = D$ equivale a las expresiones $A = PDP^{-1}$ y también AP = PD, la ventaja de la última expresión es que no necesita del cálculo de la matriz inversa.

. La expresión A = PDP-1 es una factorización de la matriz A muy útil en aplicaciones prácticas, como por ejemplo cuando se pretende calcular una potencia natural de A, es decir, si $r \in$ IN, $A^r = (PDP^{-1})^r = P\, D^r\, P^{-1}$, siendo D^r un cálculo sencillo pues D es diagonal.

. La matriz P es inversible porque sus columnas (vectores propios de A) son linealmente independientes.

. La matriz P que diagonaliza a A no es única, porque un vector propio x puede multiplicarse por una constante no nula y seguir siendo vector propio y, en consecuencia, D tampoco es única.

. Si la matriz A de nxn tiene n valores propios distintos, entonces los n vectores propios correspondientes a valores propios distintos son automáticamente linealmente independientes. Por lo tanto, cualquier matriz nxn con n valores propios distintos es diagonalizable.

. No todas las matrices cuadradas poseen n vectores propios linealmente independientes, por lo tanto, no todas las matrices son diagonalizables.

. Una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable se desprende del teorema anterior: la matriz A de nxn es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo
Diagonalizar, si es posible, las matrices

a) A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ y b) B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución
a) La matriz P tiene como columnas los vectores propios de A calculados anteriormente, se acostumbra a colocar los vectores que están en las bases de los espacios característicos, es decir

P = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Matriz que diagonaliza a A)

Luego, calculando P^{-1} y resolviendo el producto matricial indicado debajo, queda la matriz diagonal D con los valores propios de A en la diagonal, es decir

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Se dice que **A se ha diagonalizado** (es semejante a una matriz diagonal), en otras palabras, D es la forma diagonal de A conservando los valores propios de A. Observar que las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada λ son iguales, es decir

$$M_{alg}(\lambda_1 = 1) = M_{geo}(\lambda_1 = 1) = 1 \quad y \quad M_{alg}(\lambda' = 5) = M_{geo}(\lambda' = 5) = 2.$$

b) Para diagonalizar B, comenzamos calculando los valores propios. Como se trata de una matriz triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal, es decir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$$

La multiplicidad algebraica de λ es 2, $M_{alg}(\lambda = 0) = 2$. Además

$$\text{traza (B)} = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad y \quad \det(B) = \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

B es una matriz no inversible o singular.

Se observa que **cualquier matriz cuadrada con al menos un valor propio nulo, no es inversible y, recíprocamente.**

Para obtener los vectores propios, resolvemos el sistema (B - λ I) $\boldsymbol{x}$ = $\mathbf{0}$ con $\lambda = 0$, es decir

B$\boldsymbol{x}$ = 0; su espacio propio es

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$$

Se observa que la dimensión de este espacio es 1, o sea que la multiplicidad geométrica de λ = 0 es 1, en símbolos

$$M_{geo}(\lambda = 0) = 1,$$

es decir, hay un sólo vector propio linealmente independiente para la matriz B, entonces la matriz P de 2x2 que diagonalizaría a B **no existe** (se deberían tener dos vectores propios linealmente independientes para formar las columnas de P). Luego, **B no es diagonalizable**.

Observar que la multiplicidad geométrica de λ no coincide con su multiplicidad algebraica. Este hecho permite dar una **condición necesaria y suficiente** de diagonalización que se enuncia en el siguiente criterio.

Criterio de diagonalización de matrices

Una matriz A de nxn es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio son números iguales.

Diagonalización ortogonal

Teorema espectral
Si la matriz A de nxn es **simétrica**, entonces existe la matriz Q **ortogonal** de nxn cuyas columnas son los autovectores de A tal que

$$Q^TAQ = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde λ_i con i = 1, 2, …, n es autovalor de A y Q es la matriz que **diagonaliza ortogonalmente** a A**.**

Observaciones
Una matriz Q de nxn es **ortogonal** si sus columnas forman una base ortonormal del espacio IR^n.

Recordar que una interesante propiedad de las matrices ortogonales es que satisfacen: si Q es ortogonal, $Q^{-1} = Q^T$.

Una matriz simétrica A siempre es semejante a su forma diagonal D con los valores propios de A en la diagonal.

Toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente. En otras palabras, que una matriz cuadrada sea simétrica, es una condición necesaria y suficiente para que dicha matriz sea diagonalizable ortogonalmente. O bien, A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Ejemplo

Diagonalizar ortogonalmente la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

Como la matriz es simétrica, se podrá diagonalizar ortogonalmente, es decir, existe la matriz Q ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A.

Resolviendo la ecuación característica, det(A - λ I) = 0, se obtienen los valores propios λ_1 = 0 y λ_2 = 5 que verifican tr(A) = 5 y det(A) = 0.

Los espacios característicos son $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$ y $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$ (observar que los espacios propios son ortogonales, pues el producto escalar de los vectores propios es cero) y las bases ortonormales son B₁ = $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$ y B₂= $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$, respectivamente. Luego, la matriz Q ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A es

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{(no es única).}$$

Por lo tanto,

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que la matriz A se ha diagonalizado ortogonalmente.

Observación

Una descomposición usada en las aplicaciones para la matriz A simétrica es

$$A = Q D Q^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i q_i q_i^T,$$

donde λ_i es valor propio de A y q_i es vector columna de Q para cada i = 1, 2, …, n.

Esta descomposición se conoce como teorema espectral y expresa que A es una combinación lineal de las proyecciones unidimensionales $q_i\, q_i^T$, que descomponen a cualquier vector ***w*** en sus proyecciones o componentes ***p*** = $q_i\,(q_i^T$ ***w***) en las direcciones de los vectores propios unitarios q_i que constituyen un conjunto de ejes mutuamente ortogonales. Estas proyecciones individuales ***p*** están ponderadas por λ_i.

Ejemplo

Realizar la descomposición espectral de A = $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

Solución

Resolviendo la ecuación característica de A simétrica, se obtienen los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 9$.

Resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para cada λ, se obtiene la matriz ortogonal Q = $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Luego,

$$A = \lambda_1\, q_1\, q_1^T + \lambda_2\, q_2\, q_2^T = 4 \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

que es la descomposición espectral de A.

Se verifica, realizando los cálculos que

$$4 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = A$$

Propiedad de matrices semejantes

Si A y B son dos matrices de nxn semejantes, entonces tienen los mismos valores propios o, equivalentemente tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

det(B - λ I) = det ($P^{-1}AP$ - λ I) *pues A y B son matrices semejantes por hipótesis*

= det($P^{-1}AP - P^{-1}\lambda$ IP) *por álgebra de matrices*

= det(P^{-1} (A - λ I) P) *por álgebra matricial*

$= \det(P^{-1})\ \det(A - \lambda I)\ \det(P)$ *por propiedad de determinantes*
$= \det(A - \lambda I)$ *pues* $\det(P^{-1})$ *es el inverso multiplicativo de* $\det(P)$

Luego

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

Es decir, A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios. El enunciado recíproco es falso.

Teorema importante

Sea A una matriz de nxn. Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

a) A es inversible.
b) A es un producto de matrices elementales.
c) A es equivalente por filas a la matriz identidad I.
d) La forma escalonada reducida de A es la identidad I.
e) rango (A) = n
f) $\det(A) \neq 0$
g) El sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es compatible determinado para todo vector b de IR^n.
h) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.
i) Los vectores fila de A son linealmente independientes.
j) Los vectores columna de A son linealmente independientes.
k) Los vectores fila de A generan IR^n.
l) Los vectores columna de A generan IR^n.
m) Los vectores fila de A forman una base de IR^n.
n) Los vectores columna de A forman una base de IR^n.
o) El operador T de matriz asociada estándar A es un isomorfismo.
p) La nulidad del operador T es 0.
q) El rango del operador T es n.
r) 0 no es un autovalor de A.

Ejercicios resueltos de autovalores y autovectores

1) Para las siguientes matrices, determine si los vectores dados son vectores propios y en ese caso dar los valores propios.

a) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solución

Por definición: siendo A una matriz de nxn con componentes reales y λ (real o complejo) se llama valor propio de A si existe un vector no nulo *v* talque: $Av = \lambda v$

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $\boldsymbol{\lambda = 4}$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

No existe ningún valor de λ que satisfaga la ecuación anterior es decir *v* no es vector propio de B.

……

2) Para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre:

i. Los valores propios.
ii. Los espacios propios asociados a cada valor propio.
iii. Una base y la dimensión de los espacios propios.
iv. Interprete geométricamente cada caso.

Solución

a)

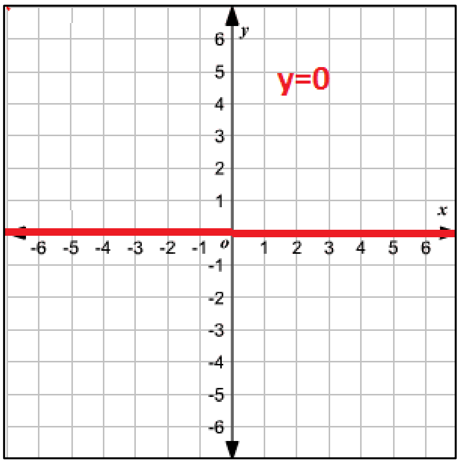
Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ Por lo tanto los valores propios de A son $\lambda_1 = 1\ y\ \lambda_2 = -1$ cada uno de ellos con una m.a. (multiplicidad algebraica) igual a 1.

- Para $\lambda_1 = 1$, se resuelve $(A - I)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & -2 & \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 1 \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 1$ satisface $y = 0$. La solución del sistema es el subespacio propio $E_1 = \{(x, 0)/x \in R\}$. Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $DimE_1 = 1$. Geométricamente el subespacio propio representa una recta que pasa por el origen de R^2 (m.g. = 1).

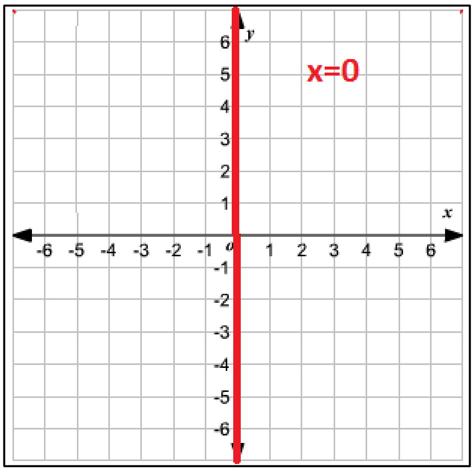


- Para $\lambda_2 = -1$, se resuelve $(A - I)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_2 = -1$ satisface $x = 0$. La solución del sistema es el subespacio propio $E_2 = \{(0, y)/y \in R\}$. Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $DimE_2 = 1$. Geométricamente el subespacio propio representa una recta que pasa por el origen de R^2. (m.g. = 1).



b)

Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Entonces:

$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda(\lambda - 5) = 0$. Entonces los valores propios de B son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$ (*con ambas m. a. = 1)*

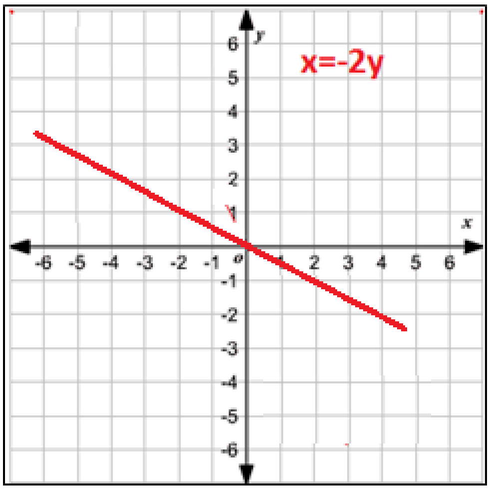
- Para $\lambda_1 = 0$, se resuelve $Bv = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se forma la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \vdots 0 \\ 2 & 4 \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \vdots 0 \\ 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 0$ satisface $x + 2y = 0$.

La solución del sistema es el subespacio propio $E_1 = \{(-2y, y)/y \in R\}$. Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $DimE_1 = 1$. Geométricamente el subespacio propio representa una recta que pasa por el origen de R^2 con ecuación $x = -2y$. (m.g. = 1).



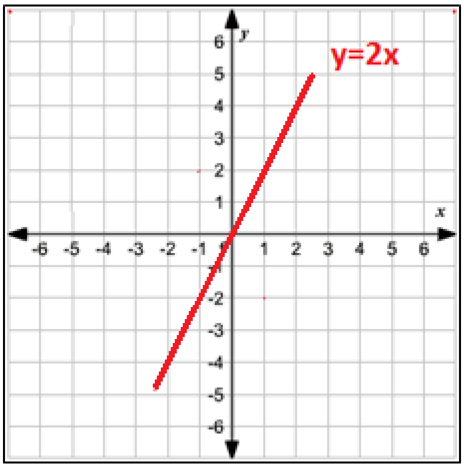
- Para $\lambda_2 = 5$, se resuelve$(B - 5I)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} -4 & 2 & \vdots 0 \\ 2 & -1 \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 5$ satisface $x - 1/2y = 0$.

La solución del sistema es el subespacio propio $E_2 = \{(x, 2x)/x \in R\}$. Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$, $DimE_2 = 1$. Geométricamente el subespacio propio representa una recta que pasa por el origen de R^2 con ecuación $y = 2x$. (m.g. = 1).



c)

Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; . Entonces:

$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2) = 0$. Entonces los valores propios de B son $\lambda_1 = 0\ con\ m.a. = 2\ y\ \lambda_2 = 1\ con\ m.a. = 1.$

- Para $\lambda_1 = 0$, se resuelve $Cv = 0$, es decir

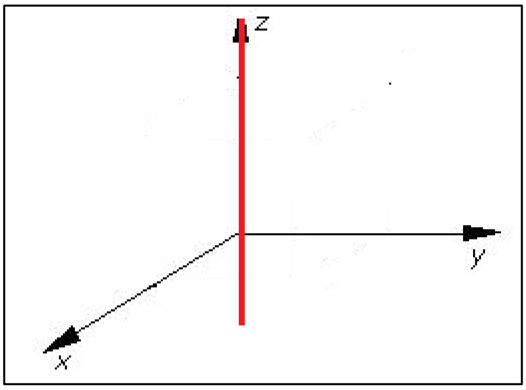
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se conforma la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 0$ satisface $x = y = 0$.

La solución del sistema es el subespacio propio $E_1 = \{(0,0,z)/z \in R\}$.Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $DimE_1 = 1$.

Geométricamente el subespacio propio representa una recta que pasa por el origen de R^3 con ecuación vectorial: $(x, y, z) = t(0,0,1), t \in R$. (m.g. = 1).



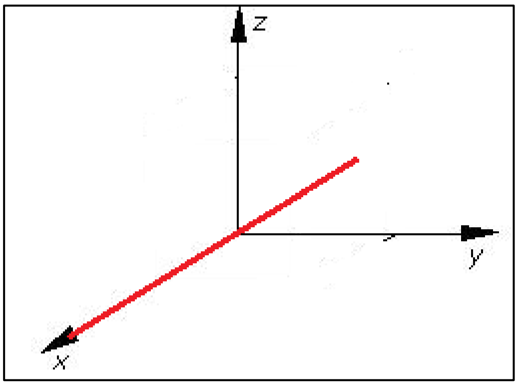
- Para $\lambda_1 = 1$, se resuelve$(C - I)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 1$ satisface $z = y = 0$.

La solución del sistema es el subespacio propio $E_1 = \{(x, 0,0)/x \in R\}$.Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $DimE_1 = 1$. Geométricamente el subespacio propio representa una recta que pasa por el origen de R^3 con ecuación vectorial: $(x, y, z) = t(1,0,0), t \in R$. (m.g. = 1).



d)

Sea $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; . Entonces:

$\det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$. Entonces los valores propios de B son $\lambda_1 = 1\ con\ m.a = 2\ y\ \lambda_2 = -1\ con\ m.a. = 1$.

- Para $\lambda_1 = 1$, se resuelve$(D - I)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

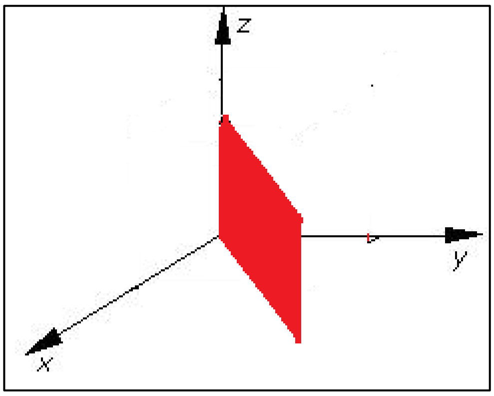
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 1 & -1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente

a $\lambda_1 = 1$ satisface $x - y = 0$.

La solución del sistema es el subespacio propio $E_1 = \{(y, y, z)/y, z \in R\}$.

$$\begin{bmatrix} y \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dos vectores propios de este tipo son $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $DimE_1 = 2$. Geométricamente el subespacio propio representa un plano que contiene el origen de R^3 con ecuación cartesiana: $x - y = 0$. (m.g. = 2).



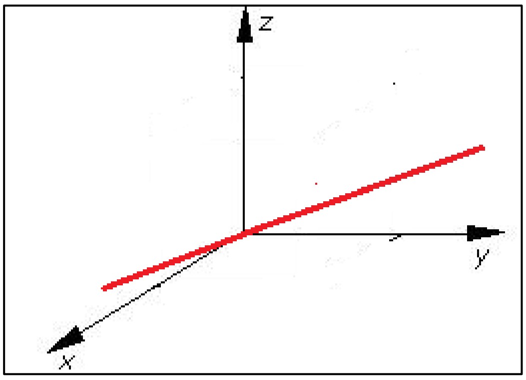
- Para $\lambda_2 = -1$, se resuelve$(D + I)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz ampliada del sistema y se resuelve por eliminación de Gauss-Jordan.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 1 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 2 \vdots 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$ Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_2 = -1$ satisface $x + y = 0 \wedge z = 0$. La solución del sistema es el subespacio propio $E_2 = \{(-y, y, 0)/y, z \in R\}$. Un vector propio de este tipo es $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Una base del subespacio propio es $B = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $DimE_2 = 1$. Geométricamente el subespacio propio representa una recta que contiene el origen de IR^3 con ecuación vectorial:

$(x, y, z) = t(-1,1,0), t \in R$. (m.g. = 1).



....

3) Los siguientes enunciados son falsos proporcione un contraejemplo para cada uno de los mismos.

- **a)** Los valores propios deben ser escalares distintos de cero.
- **b)** Los valores propios siempre están en la diagonal principal de A.
- **c)** Si A es inversible entonces los valores propios de A son distintos.
- **d)** Si A es equivalente por filas a B, entonces A y B tienen los mismos valores propios.

Solución

Contraejemplos

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, como A es una matriz triangular superior los valores propios de dicha matriz son los elementos de su diagonal principal, es decir: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$.

b) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; en el ejercicio 2 hallamos los valores propios de la matriz D obteniendo $\lambda_1 = 1 \ y \ \lambda_2 = -1$ podemos verificar que el -1 es valor propio y no se encuentra en la diagonal principal.

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ como es una matriz triangular inferior los valores propios son los elementos de la diagonal principal, es decir: $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 4$ es decir A tiene un solo valor propio con m.a. = 2 y A es inversible ya que det(A)=16. A es inversible y sus valores propios son iguales.

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = B$ La matriz B se obtiene a partir de la matriz A mediante operaciones elementales por filas, a la fila uno de A se la multiplica por ¼ obtenido la matriz B. Ambas matrices son equivalentes por filas pero los valores propios correspondientes a A ($(\lambda_1 = \lambda_2 = 4)$ son distintos a los valores propios de B

....

4) En cada caso, indique la única respuesta correcta:

a) Si A y B son matrices semejantes de orden n, entonces:

- **I.** $d\ (A-\lambda I)$ = $det\ (B-\lambda I)$ **(Respuesta Correcta)**
- II. A y B son equivalentes por filas.
- III. A y B son inversibles
- IV. Ninguna respuesta anterior es correcta.

b) Si A es una matriz de orden 3 con valores propios 0, 3 y -1, entonces:

- I. A es equivalente por filas a la identidad.
- II. A no es inversible. **(Respuesta Correcta)**
- III. tr (A) = 0.
- IV. Ninguna respuesta anterior es correcta.

c) Si A es una matriz de orden 2 con valores propios 3 y 0, entonces:

- I. A es inversible.
- II. tr (A) = 3. **(Respuesta Correcta)**
- III. A es simétrica.
- IV. Ninguna respuesta anterior es correcta.

....

5) Sea A una matriz de orden 2 cuyos valores propios son 0 y 3.Complete o responda según corresponda:

a) $det(A)$= **...*(Rta: $det(A)$= 0)***

b) ¿Qué puede asegurar acerca de $d$et$(A-I)$?**......................................** **(Rta: $det(A$ - $I) \neq$ 0)**

c) Los valores propios de $B = 4A$ son**..*(Rta: 0 y 12)***

d) Los valores propios de A^T son**...*(Rta: 0 y 3)***

e) $det(A^T$-3I)=**..*(Rta: $det(A^T$-3$I)$= 0)***

f) Si M es una matriz semejante a A, entonces los valores propios de M son:**…** ***(Rta: 0 y 3)***

g) ¿A es inversible? Justifique su respuesta. En caso de serlo, los valores propios deA^{-1} son:……………………………***(Rta: A no es inversible ya que un valor propio de A es cero.)***

h) $traza(A)$=**…………………………………………………………………………………*(Rta:*$traza\,(A)$ *= 3)***

……

Bibliografía

- Anton, **H.** (2001) *Introducción al Álgebra Lineal.* Ed Limusa. México.

- Arancibia, S. (2000) *Introducción al cálculo* (2nd ed.). Valparaíso. Instituto de matemática. Universidad Católica de Valparaíso.

- Epp, S. (2011). *Matemáticas discretas con aplicaciones* (4° ed.). México. Cengage Learning.

- Golub, H. – Van Loan, C. (1996) *Matrix Computations*. USA. Jonh Hopkins University Press.

- Horn, J. (1995) *Matrix Analysis*. New York. Cambridge University Press.

- Johnsonbaugh, R. (2005) *Matemáticas discretas* (6° ed.). México. Pearson Educación.

- Lorca, A. (2000). *Elementos de matemáticas* (1° ed.). Valparaíso, Chile. Universidad Católica de Valparaíso.

- Kolman, B. – Hill, D. (2006) *Álgebra Lineal*. México. Pearson Education

- Kozak, A., Pompeya Pastorelli, S., & Vardanega, P. (2007). *Nociones de Geometría Analítica y Algebra Lineal* (1st ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires. McGraw-Hill Interamericana.

- Grossman, S. (1992) *Álgebra Lineal con aplicaciones.* México. Ed McGraw Hill. Cuarta edición.

- Hoffman K.- Kunze R. (1991) *Álgebra Lineal.* México. Ed. Prentice Hall.

- Larson R.-Edwars B.-FalvoD. (2004) *Álgebra Lineal*. 5ta edición .Madrid. Ediciones Pirámide.

- Lay, D. (2007) *Álgebra Lineal con aplicaciones*. 3ra edición. México. Ed. Pearson.

- Lipschutz, S., & Lipson, M. (2009) *Matemáticas discretas* (3rd. ed., pp. 70-86). México, D.F. McGraw-Hill / Interamericana editores.

-Strang, G. (1988) *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. México. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.