PLANOS

Actividades a desarrollar en Clases Teórico-Prácticas

31. Un plano pasa por los puntos A(−1, 1, 0), B(2, −3, 4) y C(−3, 1, 1).

a) Encuentre las distintas formas de su ecuación: general, normal, segmentaria, vectorial paramétrica y cartesianas paramétricas.

b) Escriba las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos y represente gráficamente: plano paralelo al plano *yz* que pasa por el punto B; plano paralelo al plano *xy* que pasa por el punto C.

Resolución:

a)

A partir de los puntos dados, teniendo en cuenta que dichos puntos pertenecen al plano buscado, por diferencia de coordenadas hallamos dos vectores **AB** y **AC**, los cuales están contenidos en el plano:

$\boldsymbol{AB}$=(2-(-1), (-3)-1, 4-0)=(3, -4, 4)

$\boldsymbol{AC}$=((-3)-(-1), 1-1, 1-0)=(-2, 0, 1)

El producto vectorial de ambos vectores brinda por resultado el vector normal al plano buscado.

$$\boldsymbol{n_\pi} = \boldsymbol{ABxAC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4\hat{\imath} - 11\hat{\jmath} - 8\hat{k} = (-4, -11, -8)$$

A partir del vector normal hallado y de alguno de los tres puntos dato, escribimos la ecuación vectorial del plano:

$\mathbf{AP}.\mathbf{n_\pi}=0$

$(x+1, y-1, z)\mathbf{.}(-4, -11, -8)=0$

Ordenando la expresión anterior obtenemos la forma punto normal de la ecuación del plano:

(-4)(x+1)-11(y-1)-8z=0

A partir de la ecuación anterior, hallamos la ecuación general:

-4x-11y-8z+7=0

4x+11y+8z-7=0

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por 7, obtenemos la ecuación segmentaria del plano:

$$\frac{x}{\frac{7}{4}}+\frac{y}{\frac{7}{11}}+\frac{z}{\frac{7}{8}}=1$$

Con los vectores **AB** y **AC**, previamente hallados y alguno de los tres puntos dato que pertenecen al plano es posible escribir la ecuación vectorial paramétrica del mismo de la siguiente manera:

(x, y, z)=(-1, 1, 0)+λ(3, -4, 4)+β(-2, 0, 1) λ∈R β∈R

Por lo cual las ecuaciones cartesianas paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda - 2\beta \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 4\lambda + \beta \qquad \lambda\epsilon R;\ \beta\epsilon R \end{cases}$$

b)

- Plano paralelo al plano yz que pasa por el punto B(2, −3, 4)

Dicho plano debe tener un vector normal que resulte paralelo al eje x, es decir:

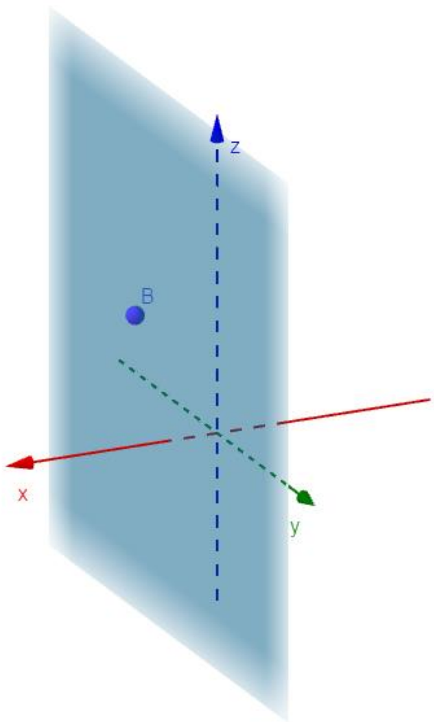
$\boldsymbol{n_\pi} = (A, 0, 0)$

Un ejemplo de dicho vector normal es: $\boldsymbol{n_\pi} = (2, 0, 0)$, con lo cual la ecuación general del plano buscado para dicho vector normal es:

2x+D=0

Reemplazando las coordenadas del punto dado (punto B), y despejando adecuadamente de la ecuación anterior, obtenemos D=-4, con lo cual luego de reemplazar y simplificar la expresión para dicho valor de D, la ecuación general del plano buscado es:

x-2=0



c)

- Plano paralelo al plano xy que pasa por el punto C(−3, 1, 1).

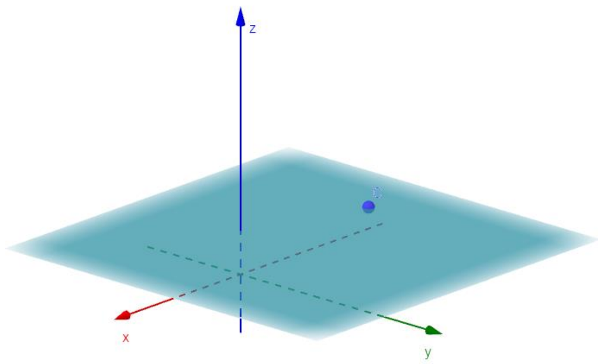
Dicho plano debe tener un vector normal paralelo al eje z, es decir: $\boldsymbol{n_\pi} = (0, 0, C)$

Un ejemplo de dicho vector normal es: $\boldsymbol{n_\pi} = (0, 0, 3)$, con lo cual la ecuación general del plano buscado para dicho vector normal es:

$3z+D=0$

Reemplazando las coordenadas del punto dado y despejando adecuadamente obtenemos D=-3, con lo cual la ecuación general del plano es:

$z-1=0$



32. Dados los planos:

π_1: $2x - y + z - 3 = 0$

π_2: $x - 2z + 6 = 0$

π_3: $(x, y, z) = (3,0,1) + t(2,0,-4) + k(2,5,1,) \qquad t, k \in R$

a) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean paralelos.

b) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean perpendiculares.

c) Determine la intersección del plano $\boldsymbol{\pi_1}$ con los planos coordenados (*trazas*).

d) Represente gráficamente y verifique todas sus respuestas.

Resolución:

a)

De la ecuación general de los dos primeros planos extraemos las componentes de sus vectores normales:

$\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (2, -1, 1)$

$\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (1, 0, -2)$

Para el caso del tercer plano, obtenemos el vector normal a partir del producto vectorial de los vectores paralelos al mismo:

$$\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (2, 0, -4)\text{x}(2, 5, 1) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 20\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 10\hat{k} = (20, -10, 10)$$

Del análisis de las correspondientes componentes surge: $\boldsymbol{n_{\pi 3}} = \boldsymbol{10 n_{\pi 1}}$, con los cual es posible afirmar que el plano π_3 es paralelo al plano π_1.

b)

De la misma manera, evaluando el producto escalar entre los planos π_1 y π_2, obtenemos:

$$\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (2, -1, 1).(1, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$$

A partir de la expresión anterior es posible afirmar que los planos π_1 y π_2, son perpendiculares c)

Para obtener la intersección del plano π_1 con los planos coordenados, es decir cada una de las *trazas*, (pág. 52 Texto *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*) es necesario resolver los sistemas de ecuaciones dados por la ecuación de dicho plano y las ecuaciones de cada uno de los planos coordenados.

<u>Traza en el plano coordenado *yz*:</u>

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

De esta manera la traza resulta:

$y = z - 3$; x=0

<u>Traza en el plano coordenado *xz*;</u>

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De esta manera la traza resulta:

$x = \frac{1}{2}(-z + 3)$; y=0

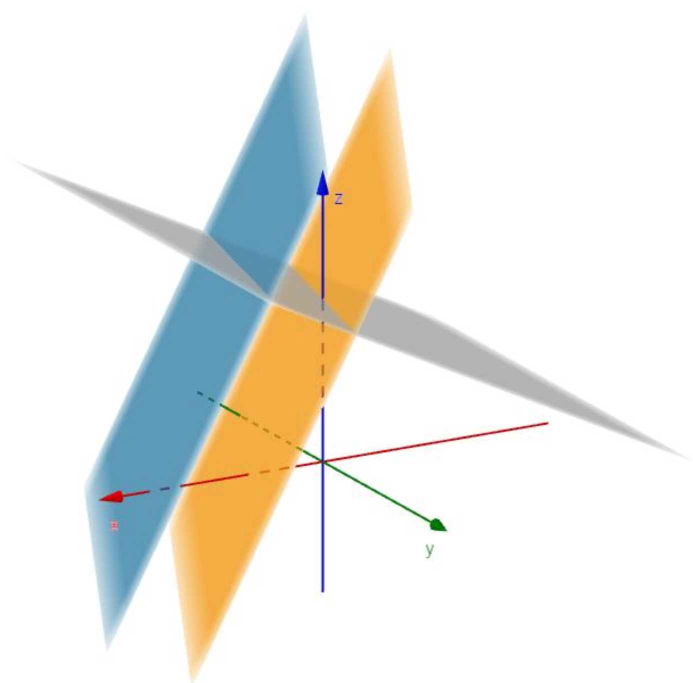
<u>Traza en el plano coordenado *xy*:</u>

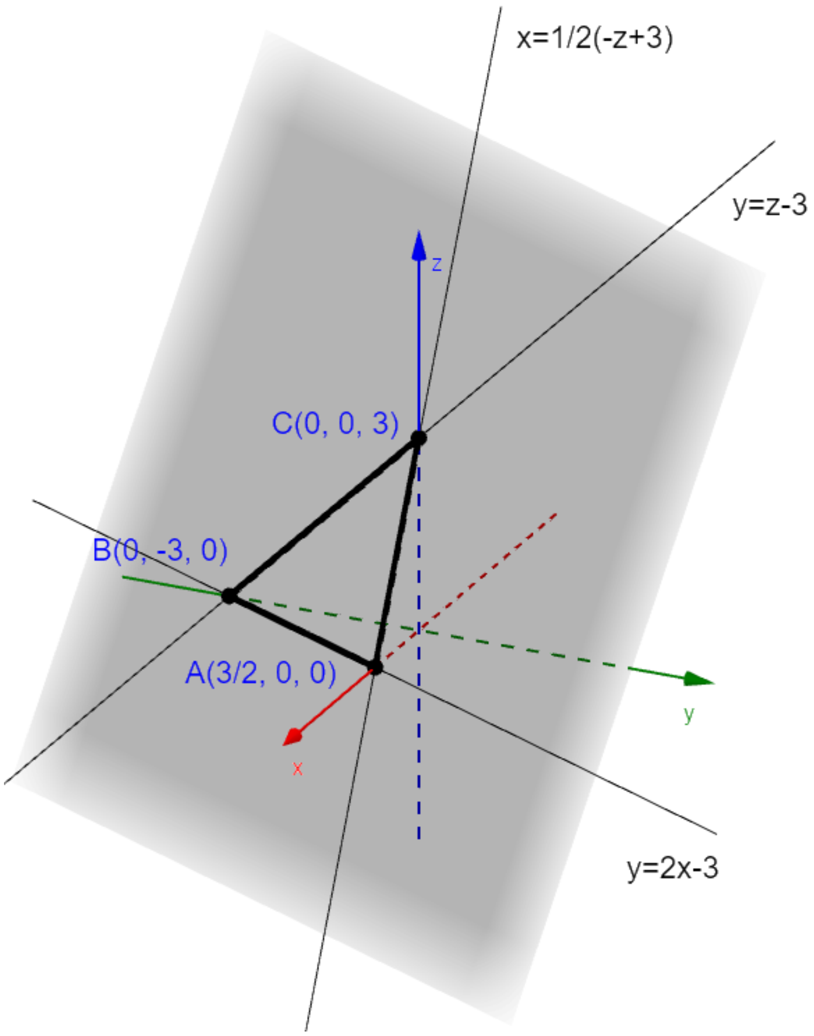
$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

De esta manera la traza resulta:

$y = 2x - 3$; z=0

d)





33. Dada la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_1}$: [**OP –** (2, -1, 5)].(-3, 0, 1)=0

a) Determine la ecuación de un plano $\boldsymbol{\pi_2}$, paralelo a $\boldsymbol{\pi_1}$ que pase por el punto Q(9,0,1). ¿Es único?

b) Determine la ecuación de un plano $\boldsymbol{\pi_3}$, perpendicular a $\boldsymbol{\pi_1}$ que pase por el punto R(2,7,0). ¿Es único?

a)

Del análisis de la ecuación dada, es posible indicar:

$\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (-3, 0, 1)$; R(2, -1, 5)

Por lo tanto:

$\boldsymbol{n_{\pi 2}} = (-3, 0, 1)$

$-3x + z + D = 0$

Reemplazando las coordenadas del punto Q para hallar D:

$(-3.9) + 1 + D = 0$

$D = 26$

$-3x + z + 26 = 0$

El plano paralelo al plano dado que pasa por el punto Q es ÚNICO

b) $\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (-3, 0, 1)$; R(2, -1, 5)
Se busca un vector $\boldsymbol{n_{\pi 3}}$ de tal manera que $\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 3}} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (1, 0, 3)$

$x + 3z + D = 0$

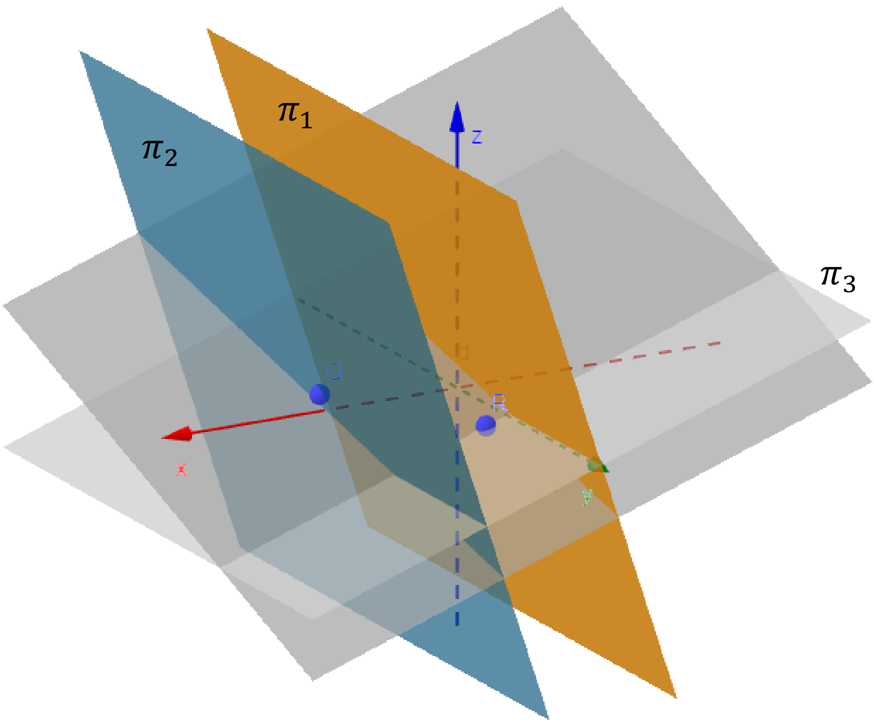
Reemplazando las coordenadas del punto R para hallar D:

$2 + 3.0 + D = 0$

$D = -2$

$x + 3z - 2 = 0$

El plano perpendicular al plano dado que pasa por el punto R es NO ES ÚNICO ya que existen infinitos vectores $\boldsymbol{n_{\pi 3}}$ que satisfacen la ecuación $\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 3}} = 0$. La interpretación geométrica del problema se puede observar en la siguiente figura en donde se han representado dos planos $\boldsymbol{\pi_3}$ que cumplen las condiciones dadas.



Analíticamente tenemos:

$$\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (A, B, C)$$

$$\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 3}} = 0 \implies (-3,0,1) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$-3A + C = 0 \implies C = 3A$$

La única condición que tenemos sobre las componentes (A,B,C) es que C=3A. No hay ninguna condición sobre la componente B, que ha quedado libre. Entonces, cualquier vector de la forma $\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (A, B, 3A)$, o bien $\boldsymbol{n_{\pi 3}} = (1, B, 3)$, podrá ser usado como vector normal para obtener un plano perpendicular a $\boldsymbol{\pi_1}$.

34. Dados los planos:

π_1: $2x - y + z + 1 = 0$

π_2: $x + 2y - z - 4 = 0$

a) Usando el concepto de familia de planos, encuentre la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_3}$ que pasa por la intersección de los planos dados y por el punto Q (−1, 1, 1).

b) Determine el ángulo que forman los dos planos dados.

c) Halle la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_4}$ normal a los dos planos dados y que pasa por el punto Q. Encuentre el punto de intersección entre estos tres planos.

Resolución:

a)

A partir de las ecuaciones dadas, escribimos la ecuación de la familia de planos que pasa por la intersección de los planos dados:

$2x - y + z + 1 + \beta(x + 2y - z - 4) = 0 \qquad\qquad \beta \in R$

$(2 + \beta)x - (1 - 2\beta)y + (1 - \beta)z + 1 - 4\beta = 0$

El punto Q dado, debe satisfacer la ecuación anterior, por lo cual:

$(2 + \beta)(-1) - (1 - 2\beta)1 + (1 - \beta)1 + 1 - 4\beta = 0$

De esta manera es posible encontrar el valor de β correspondiente:

$-2 - \beta - 1 + 2\beta + 1 - \beta + 1 - 4\beta = 0$

$\beta = -\dfrac{1}{4}$

Entonces, la ecuación general buscada resulta:

$$\left(2-\frac{1}{4}\right)x-\left(1+\frac{2}{4}\right)y+\left(1+\frac{1}{4}\right)z+1+\frac{4}{4}=0$$

$$\frac{7}{4}x-\frac{6}{4}y+\frac{5}{4}z+2=0$$

b)

Para hallar el ángulo entre los planos dados escribimos en primer lugar los vectores normales de los mismos.

$$\boldsymbol{n_{\pi 1}}=(2,-1,1)$$

$$\boldsymbol{n_{\pi 2}}=(1,2,-1)$$

Con dichos vectores es posible evaluar el ángulo a partir de la expresión:

$$\boldsymbol{cos\theta}=\frac{\boldsymbol{n_{\pi 1}}.\boldsymbol{n_{\pi 2}}}{\|\boldsymbol{n_{\pi 1}}\|\|\boldsymbol{n_{\pi 2}}\|}$$

$$\boldsymbol{cos\theta}=\frac{(2,-1,1).(1,2,-1)}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2-2-1}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{\theta}=99.59°$$

c)

El plano $\boldsymbol{\pi_4}$ normal a los planos dados debe tener un vector normal que resulte perpendicular simultáneamente a los vectores normales de dichos planos.

$$\boldsymbol{n_{\pi 4}}=\boldsymbol{n_{\pi 1}x n_{\pi 2}}=(2,-1,1)\text{x}(1,2,-1)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+5\hat{k}=(-1,3,5)$$

A partir de dicho vector normal y el punto Q dado, obtenemos la ecuación general del plano buscado:

$$(-1)x+3y+5z+D=0$$

$$(-1)(-1)+3.1+5.1+D=0$$

$$D=-9$$

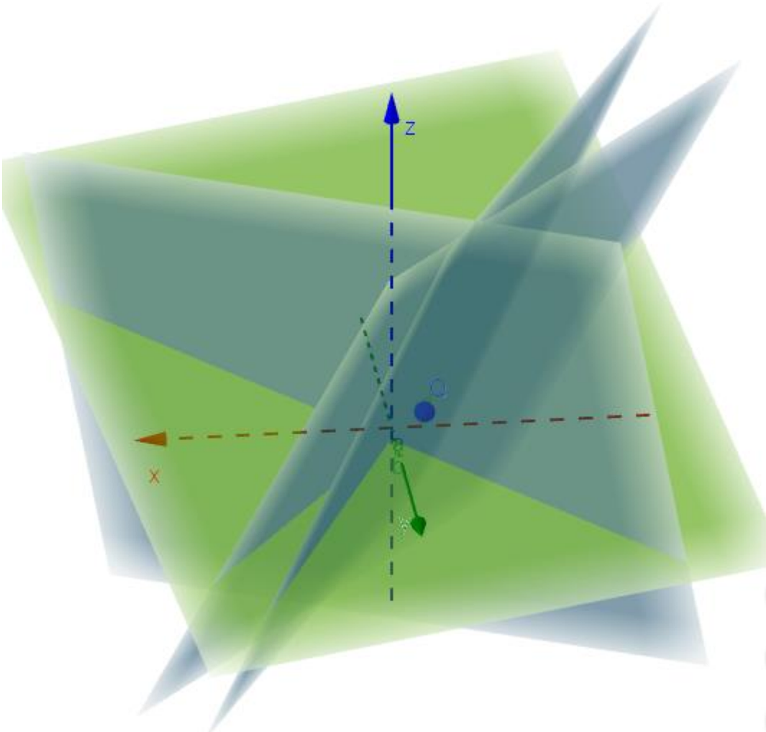
$$-x+3y+5z-9=0$$

Para hallar el punto de intersección de los tres planos es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x-y+z+1=0\\ x+2y-z-4=0\\ -x+3y+5z-9=0\end{cases}$$

Cuyo resultado brinda las coordenadas del punto de intersección I.

I(2/7 ; 15/7 ; 4/7)



35. Dado el plano ***OP*** = (3, 2, 4) + μ (2, 4, 2) + β (6, 4, 8)   μ, β ∈ ***R***

a) Indique las coordenadas de dos puntos del plano dado.

b) Calcule la distancia desde el punto A (1, 3, 3) al plano dado.

c) Encuentre las ecuaciones de los planos que disten 3 unidades del plano dado.

Resolución:

a) Para hallar puntos del plano dado en su forma vectorial paramétrica es necesario fijar valores de los parámetros μ y β

Para μ=1 y β=2 → R(17, 14, 22)

Para μ=-1 y β=1 → S(7, 2, 10)

b)En primer lugar, evaluamos el vector normal al plano dado a los efectos de obtener sus componentes:

$$\boldsymbol{n_{\pi 1}} = (2,4,2)\text{x}(6,4,8) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 24\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 16\hat{k} = (24,-4,-16)$$

A partir de dicho vector normal y el punto conocido del plano, obtenemos la ecuación general del mismo:

$24x - 4y - 16z + D = 0$

$24.3 - 4.2 - 16.4 + D = 0$

$D = 0$

$24x - 4y - 16z = 0$

Para hallar la distancia entre un punto dado y un plano utilizamos la siguiente expresión:

$$h = \frac{|\boldsymbol{AP}.\boldsymbol{n_\pi}|}{\|\boldsymbol{n_\pi}\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$h = \frac{|24 - 4.3 - 16.3|}{\sqrt{848}} = 1.2362\ldots$$

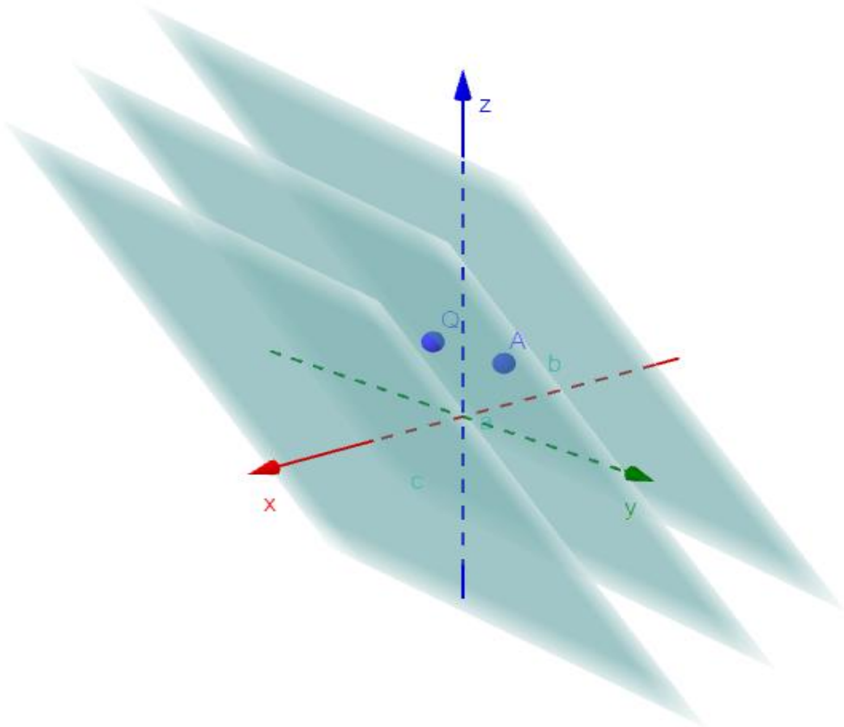
d) Los planos buscados distan 3 unidades del plano dado, por lo cual es necesario conocer los coeficientes D de las ecuaciones de dichos planos. Para esto:

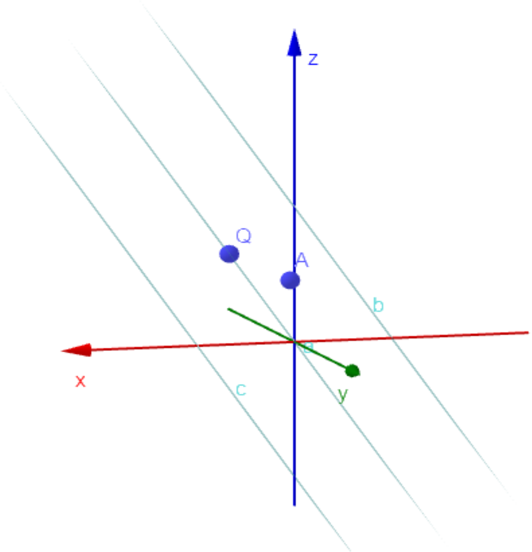
$$3 = \frac{|24.3 - 4.2 - 16.4 + D|}{\sqrt{848}} = \frac{|0 + D|}{\sqrt{848}}$$

$|0 + D| = 3\sqrt{848}$

$D_1 = 3\sqrt{848} = 87.361\ldots$

$D_2 = -3\sqrt{848} = -87.361\ldots$





Observación:

Dada la ecuación general de un plano Ax+By+Cz+D=0. Si a dicha ecuación se la multiplica por un número real, se obtendrá otra ecuación del mismo plano. Por ejemplo:

$2x-y+3z+7=0$; $4x-2y+6z+14=0$; $6x-3y+9z+21=0$; ......

La ecuación del plano no es única, sino que podemos expresarla de diferentes maneras. Sin embargo dicho plano, $2x-y+3z+7=0$ si es único. Como lugar geométrico de puntos de R^3 tenemos un único plano, cuya ecuación puede presentarse de diferentes formas, todas equivalentes.

En el **Ejercicio 31** hemos obtenido un único plano (como lugar geométrico) solución de cada inciso. Sin embargo, cada uno de esos planos podríamos expresarlos a través de diferentes ecuaciones, cada una de las cuales describe el mismo lugar geométrico.

En el **Ejercicio 33** hemos obtenido en el inciso a) un único plano (como lugar geométrico). Sin embargo podríamos expresar a dicho plano través de diferentes ecuaciones, cada una de las cuales describe el mismo lugar geométrico.

$-3x + z + 26 = 0$; $-6x + 2z + 52 = 0$; ecuación segmentaria, vectorial paramétrica, etc

En el **Ejercicio 33** en el inciso b) hemos visto que no existe un único plano (como lugar geométrico) solución del problema planteado y en el **Ejercicio 35** en el inciso c) encontramos que existen dos planos solución del problema dado.

Cada vez que encontramos la ecuación de un plano solución de nuestro problema, sea este único o no, dicho plano puede quedar expresado de diferentes formas.