MATRICES

- **Ejercicio 1**: Sean

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times3} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}_{2\times3} \quad C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}_{2\times2} \quad D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}$$

b) $D^2 - 3 \cdot I_{2\times2} =$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^2}_{\text{por definición de potenciación}} - \underbrace{3 \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{} =$$

por definición de producto de un escalar por una matriz: multiplicamos cada elemento de la matriz por el escalar, en este caso igual a $3 = k$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}}_{\text{por definición de multiplicación de matrices}} - \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} =$$

aplicando la definición de diferencia de matrices, obtenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}}$$

1 e) $\underset{2\times3}{(A} . \underset{2\times2}{C)^2}$ $\Rightarrow$ no es posible resolver ya que el producto no está bien definido puesto que el n° de columnas de A (2x3) no coincide con el n° de filas de C. (2x2).

f) $\underset{2\times3}{A} . \underset{3\times2}{B^T} - I_{2\times2} =$

$$\underbrace{\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}} . \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}}_{\text{por definición de producto de matrices}} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -9 & 26 \end{bmatrix}} - \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} =$$ aplicando definición de diferencia de matrices, obtenemos:

$$\underline{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 25 \end{bmatrix}}$$

g) $\underset{2\times2}{C} . \underset{2\times2}{D} =$ (el producto está bien definido)

$$\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}} . \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} =$$ (aplicando la definición de multiplicación de matrices, obtenemos:

$$\underline{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}}$$

h) $\underset{2\times 2}{D} \cdot \underset{2\times 2}{C} =$ (el producto está bien definido)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} =$$ aplicando definición de producto de matrices, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

Observando los items g y h, concluimos que:

$$\boxed{C \cdot D \neq D \cdot C}$$

Es decir, el producto de matrices NO es conmutativo.

MATRICES

- **Ejercicio 3**: Todas las matrices son del mismo orden e inversibles.

b) $\underbrace{(M^T X)^T}_{①} = M^{-1} \underbrace{(M^2 B)^{-1}}_{②}$

① Por propiedad de m. traspuesta:
$(A.B)^T = B^T . A^T$

② Por propiedad de m. inversa:
$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

Por prop. de matriz traspuesta: $(A^T)^T = A$

$X^T . (M^T)^T = M^{-1} . B^{-1} . (M^2)^{-1}$

definición de potenciación

$X^T . M = M^{-1} . B^{-1} . \underbrace{(M.M)^{-1}}_{\text{por } ②}$

$X^T . \underbrace{M . M^{-1}}_{\text{por definición de matriz inversible}} = M^{-1} . B^{-1} . \underbrace{M^{-1} . M^{-1} . M^{-1}}_{\text{def. de potenciación}}$

Post-multiplicamos por M^{-1} a ambos miembros de la igualdad (puesto que M es inversible)

$X^T . I = M^{-1} . B^{-1} . (M^{-1})^3$

Elemento neutro de la multiplicación

$X^T = M^{-1} . B^{-1} . (M^{-1})^3$

Aplicando matriz traspuesta a ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$(X^T)^T = [M^{-1} . B^{-1} . (M^{-1})^3]^T$

Por propiedad, $(A^T)^T = A$

A la derecha del igual, aplicamos propiedad de m. traspuesta: $(A.B)^T = B^T . A^T$
Pensando que el primer factor es $M^{-1} B^{-1}$, y el segundo factor es $(M^{-1})^3$.

$X = [(M^{-1})^3]^T . [M^{-1} . B^{-1}]^T$

aplicando nuevamente prop. de matriz traspuesta resulta:

$X = [(M^{-1})^3]^T . (B^{-1})^T . (M^{-1})^T$

d) $(ACXA^{-1}C^{-1})^{-1} = \underbrace{CC^{-1}} + A$

pues C es inversible

$(ACXA^{-1}C^{-1})^{-1} = I + A$

$[(ACXA^{-1}C^{-1})^{-1}]^{-1} = (I+A)^{-1}$ Aplicando m. inversa a ambos miembros, tenemos:

$ACXA^{-1}C^{-1} = (I+A)^{-1}$ Pre multiplicamos por A^{-1} y post-multiplicamos por C a ambos miembros de la igualdad:

$\underbrace{A^{-1}.A}.C.X.A^{-1}.\underbrace{C^{-1}.C} = A^{-1}(I+A)^{-1}C$

$I.C.X.A^{-1}.I = A^{-1}.(I+A)^{-1}C$ Por definición de m. inversible, existe: $A^{-1}.A = I$ y $C^{-1}.C = I$

$C^{-1}.C.X.A^{-1}.A = C^{-1}A^{-1}.(I+A)^{-1}.C.A$ Pre multiplicamos por C^{-1} y post multiplicamos por A a ambos miembros de la igualdad:

$I.X.I = C^{-1}.A^{-1}(I+A)^{-1}.C.A$

Considerando que C es inversible, $C^{-1}.C = I$. De la misma manera, $A^{-1}.A = I$

$$\underbrace{X = C^{-1}.A^{-1}(I+A)^{-1}.C.A}$$