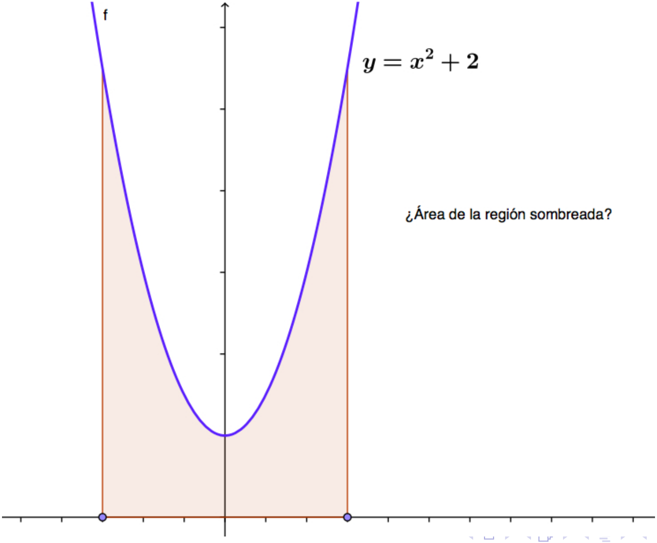
Análisis Matemático I
Clase 14: Integral Definida

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

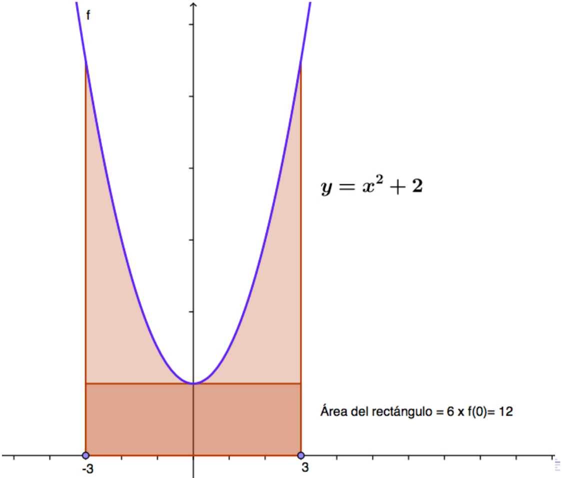
Abril, 2020

Problema. Determine el área de la región sombreada:

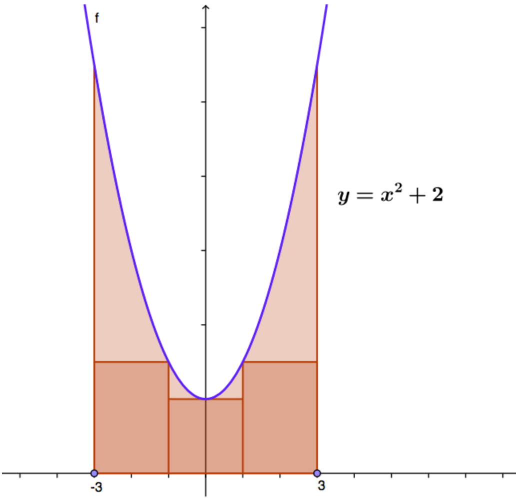


Motivación geométrica de la integral

Como primera aproximación, tomamos un rectángulo de base igual al intervalo considerado y altura igual al valor de la función en $x = 0$, en este caso $f(0) = 2$.

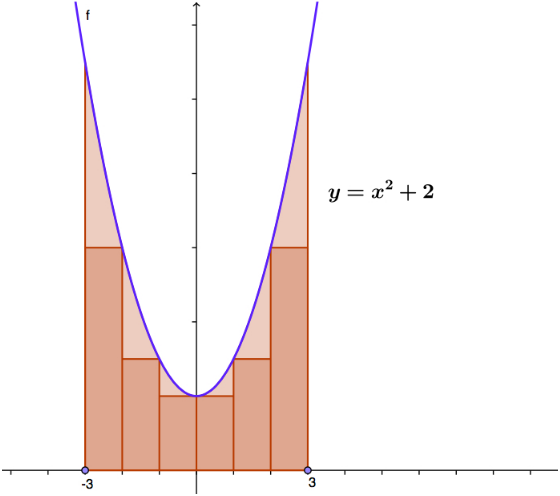


Una mejor aproximación se obtiene tomando más rectángulos:



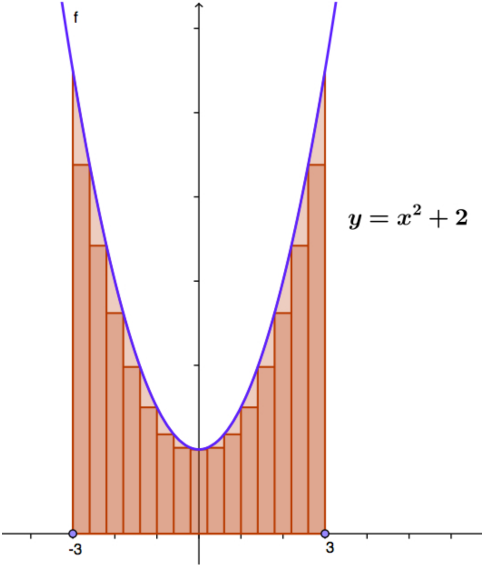
Observar que los rectángulos tienen la misma base y la altura de cada uno la da el valor de f en -1, 0 y 1. Por supuesto, se podrían haber elegido otros puntos. Suma de las áreas de rectángulos: 16.

En la siguiente figura se han tomado $n = 6$ rectángulos:



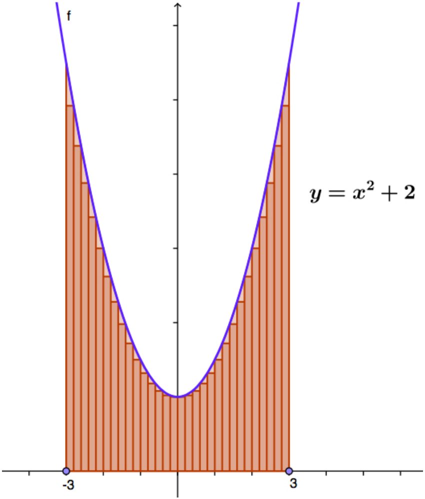
Observar que los rectángulos tienen la misma base y la altura de cada uno la da el valor de f en -2,-1, 0, 1 y 2. Por supuesto, se podrían haber elegido otros puntos.Suma de las áreas de rectángulos: 22.

En la siguiente figura se han tomado $n = 15$ rectángulos:



Suma de las áreas de rectángulos: 26.5.

En la siguiente figura se han tomado $n = 30$ rectángulos:



Suma de las áreas de rectángulos: 28.5. Se espera que a medida que se tomen **todos** los rectángulos cada vez más finos, la aproximación mejore. De hecho, el área buscada es 30.

En las próximas diapostivas vamos a formalizar el proceso de aproximación mediante rectángulos de una región **delimitada por el gráfico de una función** $f \geq 0$:

- Primero, formalizaremos el proceso de división de un intervalo en otros más pequeños (que constituyen las bases de los rectángulos) introduciendo el concepto de **Partición**.
- Luego, introduciremos una medida que nos dirá que tan finos son los rectángulo utilizados, definiendo la noción de **Norma de una partición**.
- Se formalizará la idea de sumas de áreas de rectángulos a través de la definición de **sumas de Riemann**.
- Finalmente, mediante un proceso de límite se obtendrá el área buscada a través del concepto de **Integral Definida**.

Noción de Partición

Partición de un intervalo: si $I = [a, b]$ es un intervalo, una partición P de I es una colección de puntos distintos: $x_0, x_1, ..., x_n,$ con la propiedad:

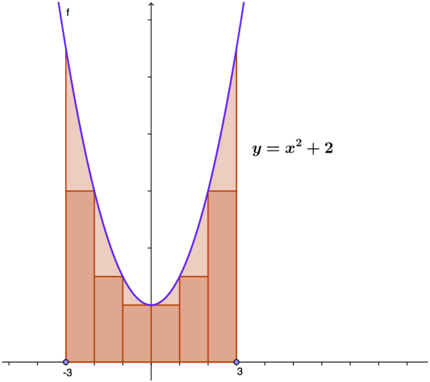
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Escribimos: $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Así, una partición P se utiliza para dividir un intervalo $[a, b]$ en subintervalos:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, b].$$

Noción de Partición: ejemplo

Por ejemplo en el gráfico:



hemos tomado la partición:

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

del intervalo $[-3, 3]$.

Noción de Norma de una Partición

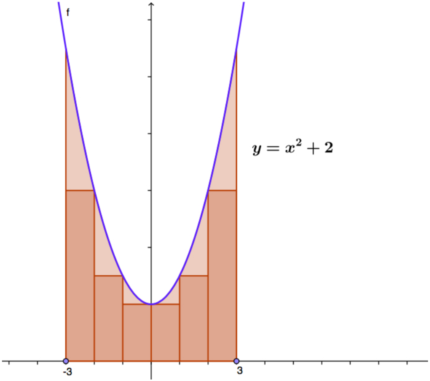
Norma de una partición: si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de I, entonces la norma de P es:

$$||P|| = \max\left\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\right\} = \max\left\{\Delta x_k : k = 1, ..., n\right\}$$

donde: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Noción de Norma de una Partición: ejemplo

Por ejemplo en el gráfico:



donde:

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

se tiene $||P|| = 1$.

Noción de Norma de una Partición: más ejemplos

Ejemplo: sea $I = [0, 1]$, entonces podemos formar las siguientes particiones:

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \qquad ||P|| = 1/2.$$

$$P' = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}, \qquad ||P'|| = 1/2.$$

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \qquad ||P_n|| = 1/n.$$

Observación: en el último caso:

$$\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0.$$

En la próxima diapositiva vamos a formalizar la idea de sumas de áreas de rectángulos.

Sumas de Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Tomemos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

una partición del intervalo $[a, b]$. Seleccionamos puntos c_1, c_2, c_3, ..., c_n:

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$

$$c_2 \in [x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

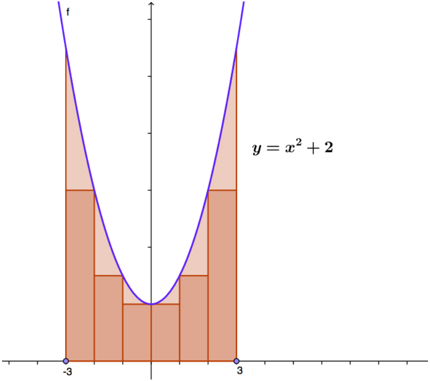
$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

La suma:

$$S(f, P) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k,$$

se denomina **suma de Riemann** de f en $[a, b]$ con respecto a P.

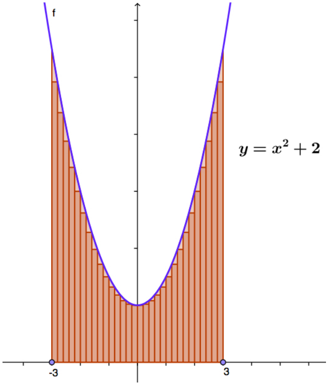
Sumas de Riemann: ejemplo



se tomaron: $c_1 = -2 \in [-3, -2]$, $c_2 = -1 \in [-2, -1]$, $c_3 = 0 \in [-1, 0]$, $c_4 = 0 \in [0, 1]$, $c_5 = 1 \in [1, 2]$ y $c_6 = 2 \in [2, 3]$. La suma $S(f, P)$ asociada es:

$$S(f, P) = f(-2).1 + f(-1).1 + f(0).1 + f(0).1 + f(1).1 + f(2).1$$

Se mencionó anteriormente que si se toman todos los rectángulos cada vez más finos se obtiene una mejor aproximáción a la región considerada. Por ejemplo:



Observar que lo que se busca es hacer que las longitudes de los subintervalos en los que se dividió el intervalo $[-3, 3]$ sean *simultáneamente* cada vez menores. La forma de lograr esto es haciendo que la norma de las particiones de $[-3, 3]$ tiendan a cero.

Así, se espera que el área de la región considerada A sea:

$$A = \lim_{||P|| \to 0} S(f, P).$$

En la próxima diapositiva vamos a definir formalmente este límite.
Además, dicho límite recibirá un nombre especial...

Integral Definida

Definición de integral definida

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Decimos que el límite:

$$\lim_{||P|| \to 0} S(f, P) = A$$

existe y es igual a un número A si: **para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ verificando $||P|| < \delta$ y cualquiera sea la elección de los puntos c_i en $[x_{i-1}, x_i]$, se tiene:**

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - A \right| < \epsilon.$$

El número A se denomina integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ y escribimos:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

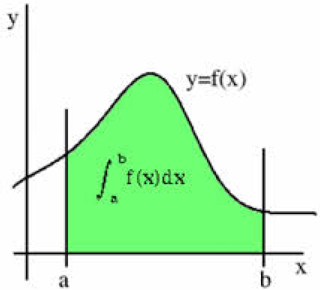
En este caso, decimos que la función f es **integrable** en $[a, b]$.

Cálculo de áreas para funciones no-negativas

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región comprendida entre el gráfico de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x se define como:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ } (\textbf{siempre que la integral exista}).$$

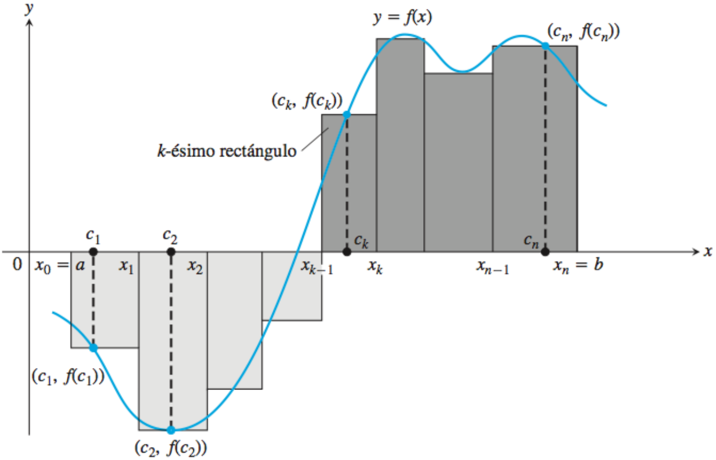


Cálculo de áreas para funciones no-negativas

Observación: por ahora el cálculo de áreas es difícil pues requiere calcular integrales mediante la definición. En la próxima clase veremos cómo calcular integrales de forma sencilla sin recurrir a la definición.

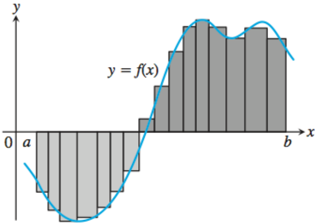
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: sumas de Riemann

La idea de Sumas de Riemann puede aplicarse para aproximar regiones más generales:



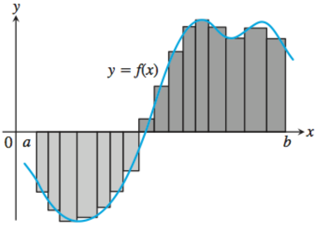
Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

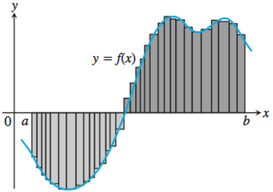
Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada



Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Al aumentar el número de puntos de la partición, se espera una mejor aproximación a la región considerada





Extensión de la Integral definida a funciones con valores reales: Sumas de Riemann

Comentarios importantes: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces

- las sumas de Riemann asociadas a f pueden definirse como antes, pero si la función toma valores negativos, las sumas de Riemann ya no pueden considerarse como sumas de áreas de rectángulos pues algunos de sus términos podrían ser negativos. (Ver figuras de las diapositivas anteriores)
- La integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

  puede definirse exactamente como antes, solo que ahora su valor no se puede interpretar como área de una región.

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Integral definida

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Antes de calcular una integral respondamos el siguiente **interrogante:**
¿Qué debe satisfacer una función f para que sea integrable?

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces:

- Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades en $[a, b]$ y estas discontinuidades son evitables o de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Observar:

$$f \text{ derivable } \Rightarrow f \text{ continua } \Rightarrow f \text{ integrable.}$$

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

Ejemplo: calculemos

$$\int_0^1 2x dx.$$

La función $f(x) = 2x$ es continua en $[0,1]$, luego es integrable. Para cada número natural n, tomemos la colección de particiones:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\},$$

y tomemos $c_1 = 0$, $c_2 = 1/n$, $c_3 = 2/n$,...,$c_i = (i-1)/n$,..., $c_n = (n-1)/n$. Entonces $||P_n|| = 1/n$, la cual tiende a cero cuando n tiende a infinito. Así:

$$\int_0^1 2x dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

Resta calcular $S(f, P_n)$ y hacer $n \to \infty$:

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

$$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2c_i=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}$$

$$=\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}-n\right]=\frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2}$$

$$=1-\frac{1}{n}\to 1,\qquad \text{(se usó que } \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\text{)}$$

cuando $n\to\infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x\,dx=1.$$

Integral Definida: ejemplo de cálculo de integrales mediante la definición

$$
\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2c_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{2}{n^2}\frac{n^2-n}{2}\\
&= 1 - \frac{1}{n} \to 1, \qquad \text{(se usó que } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\text{)}
\end{aligned}
$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 2x\,dx = 1.$$

¿Por qué fue suficiente para calcular la integral tomar sumas de Riemann sólo para las particiones P_n y hacer $n \to \infty$?

Propiedades

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$, y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b 1dx = b - a$.
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.
- Si $f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Si $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$