Análisis Matemático I
Clase 5: límites laterales, continuidad y discontinuidad de funciones

Pablo D. Ochoa

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Cuyo.

Marzo, 2020

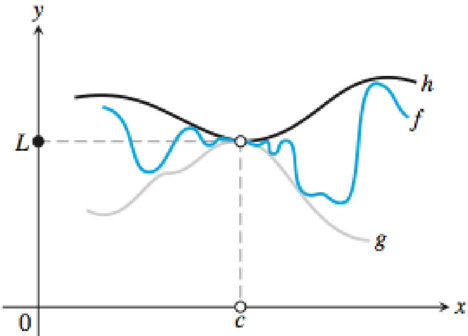
Teorema de la compresión.

Sea I un intervalo abierto que contiene a un punto c. Supongamos que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq c$ en I. Si:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$



Teorema de la compresión

Ejemplo: se sabe que:

$$-|x| \leq \text{ sen } x \leq |x|.$$

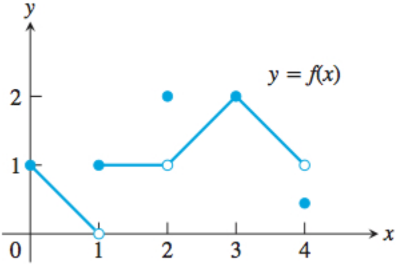
Además:

$$\lim_{x \to 0} -|x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

luego el teorema de la compresión implica:

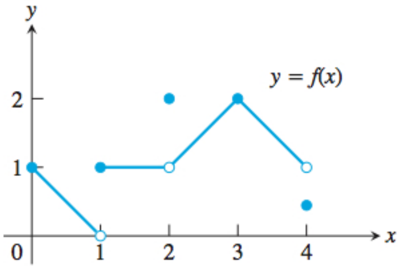
$$\lim_{x \to 0} \text{ sen } x = 0.$$

Límites laterales: considere la siguiente figura



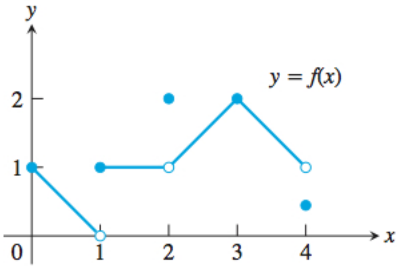
y observar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

Límites laterales: considere la siguiente figura



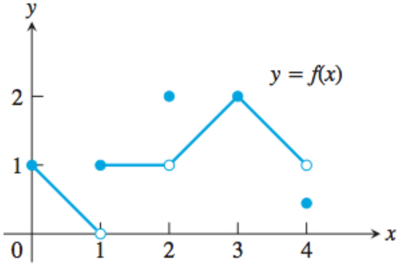
y observar que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función f cuando x tiende a 1 por la izquierda?

Límites laterales: considere la siguiente figura



y observar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función f cuando x tiende a 1 por la izquierda?
Respuesta: Se observa que los valores de la función tienden a 0 cuando x tiende a 1 por la izquierda

Límites laterales: considere la siguiente figura



y observar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. ¿Se puede dar una descripción del comportamiento de la función f cuando x tiende a 1 por la izquierda?
Respuesta: Se observa que los valores de la función tienden a 0 **cuando** x **tiende a** 1 **por la izquierda**
¿Qué pasa con los valores de f cuando x tiende a 1 por la derecha?

Límites laterales

Límites laterales por derecha

Decimos que el límite de $y = f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha es L y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda x en el dominio de f que cumple $0 < x - x_0 < \delta$ se tiene:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Límites laterales

Límites laterales por derecha

Decimos que el límite de $y = f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha es L y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda x en el dominio de f que cumple $0 < x - x_0 < \delta$ se tiene:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Notar que la condición $0 < x - x_0 < \delta$ implica que x es mayor a x_0 y que la distancia entre x y x_0 es menor a δ. Es decir, tomamos todas las x a la derecha de x_0 suficientemente cercanas a x_0.

Límites laterales

Límites laterales por izquierda

Decimos que el límite de $y = f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda es L y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda x en el dominio de f que cumple $0 < x_0 - x < \delta$ se tiene:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Límites laterales

Límites laterales por izquierda

Decimos que el límite de $y = f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda es L y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda x en el dominio de f que cumple $0 < x_0 - x < \delta$ se tiene:

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Observar que la condición $0 < x_0 - x < \delta$ implica que x es menor a x_0 y que la distancia entre x y x_0 es menor a δ. Es decir, tomamos todas las x a la izquierda de x_0 suficientemente cercanas a x_0.

Límites laterales

Teorema

El límite:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe si y solo si los límites laterales

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

existen y son iguales a L.

Analicemos la siguiente figura:

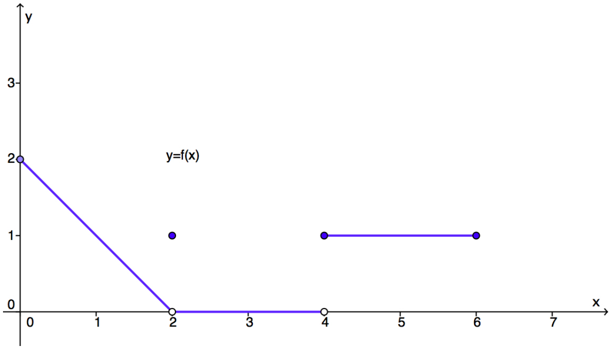


Figure : Introducción a Continuidad.

Más allá de que no hayamos definido el concepto de continuidad, diríamos que la función $y = f(x)$ no es continua en el punto $x = 2$ ni en $x = 4$. Estudiemos cada caso:

- en $x = 2$ tenemos que $f(2) = 1$ y $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$. Así, el comportamiento de f en $x = 2$ no coincide con el comportamiento de f alrededor de $x = 2$.
- en $x = 4$, se observa que $f(4) = 1$, pero el límite de f cuando $x \to 4$ no existe. La situación es peor que en el caso anterior.

De las situaciones anteriores, deducimos que la continuidad de una función en un punto x_0 de su dominio se va a dar cuando el valor de f en x_0 coincida con el comportamiento de f alrededor de x_0.

Definición de continuidad

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Decimos que f es continua en $x = c$ si y solo si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Decimos que f es continua en (a, b) si y solo si f es continua en cada punto del intervalo (a, b).

Continuidad

Definición de continuidad

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Decimos que f es continua en $x = c$ si y solo si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Decimos que f es continua en (a, b) si y solo si f es continua en cada punto del intervalo (a, b).

Como se vio en la parte de límites, si P es una función polinómica, entonces $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Así, las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$. La continuidad de las funciones racionales también se da en todo punto donde el denominador no sea cero. Gráficamente, también pude verse que las funcioes sen y cos son continuas en $\mathbb{R}$.

Ahora bien, ¿Qué pasa si el punto c donde analizamos la continuidad no es interior al dominio?

Continuidad

Definición de continuidad por izquierda y por derecha

Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. Decimos que f es continua por derecha en $x = a$ si y solo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

De forma análoga, decimos que f es continua por izquierda en $x = b$ si y solo si

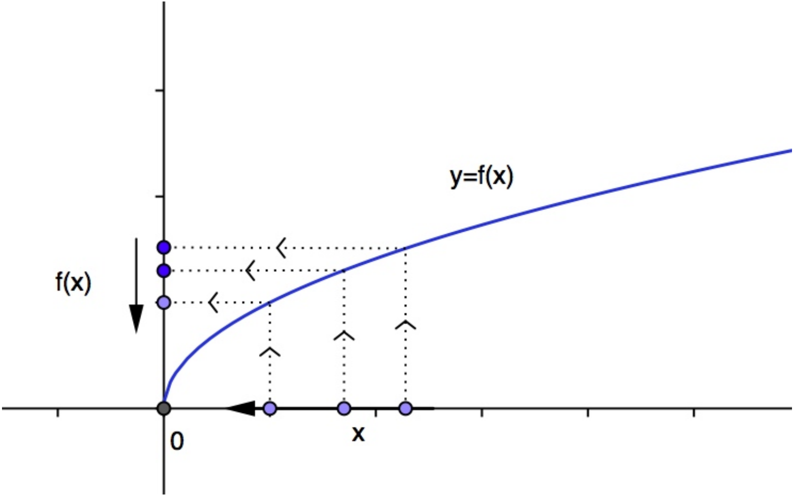
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidad en intervalos cerrados

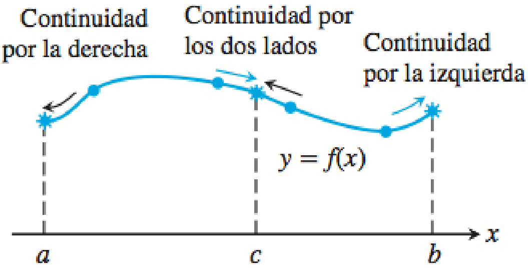
Decimos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ si y solo si f es continua en (a, b), es continua por derecha en $x = a$ y es continua por izquierda en $x = b$.

Continuidad

La siguiente función es continua por derecha en $x = 0$:



Concepto de continuidad



Propiedades de las funciones continuas

Teorema

Supongamos que f y g son funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a c y que son continuas en $x = c$. Entonces las siguientes funciones son continuas en $x = c$:

- las funciones suma $f + g$ y diferencia $f - g$;
- las funciones multiplicación por constante $k.f$ $(k \in \mathbb{R})$ y producto $f.g$;
- la función cociente f/g, siempre que $g(c) \neq 0$;
- la función potencia f^n, donde $n \in \mathbb{N}$,
- la función raíz $\sqrt[n]{f}$, siempre que esté definida en un intervalo que contiene a c.

No demostrar

Ejemplos. Polinomios. Funciones racionales. Funciones trigonométricas.

Concepto de discontinuidad

Si una función f no es continua en un punto c, entonces decimos que f es discontinua en c y que c es un punto de discontinuidad de f.

Observemos que c no pertenece necesariamente al dominio de f. En este curso, analizaremos la discontinuidad de functiones en puntos de su dominio y en puntos que se encuentran en el *borde o frontera* del dominio. Ejemplificaremos esto en la próxima diapositiva.

Ejemplo: analizar la continuidad de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Ejemplo: analizar la continuidad de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Solución: observar que la función g no asigna imagen a $x = 0$ y $x = 2$ (en esos puntos se anula el denominador). Luego, g no es continua en dichos puntos.

Además, dado que g es un cociente de funciones continuas (ambas son polinomios), la propiedad 3 del teorema de la diapositiva 13 nos dice que g es continua en todo punto que no anule el denominador. En conclusión, g es continua en:

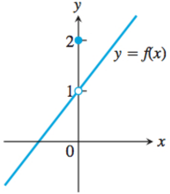
$$\mathbb{R} - \{0, 2\}.$$

Observación: si bien $x = 0$ y $x = 2$ no pertenecen al dominio de g, analizamos la discontinuidad de g allí porque son puntos **borde o frontera** del dominio de g.

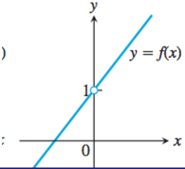
Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad Evitable (se puede salvar la discontinuidad)**
  - $f(c)$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ existen pero:

$$f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x).$$



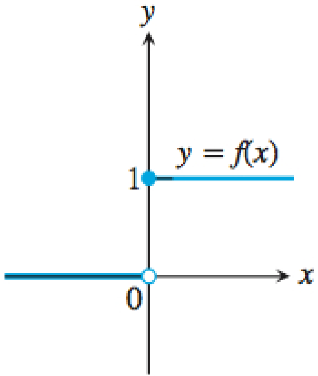
  - $f(c)$ no existe (es decir, c no pertenece al dominio de f), pero $\lim_{x\to c} f(x)$ sí existe:



Clasificación de discontinuidades

- **Discontinuidad de Salto (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe pero:

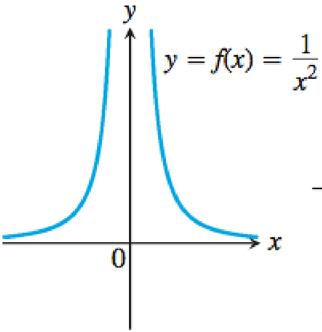
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \to c^+} f(x) \text{ existen.}$$

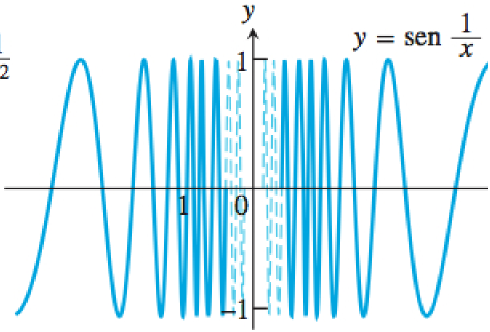


Observación: no interesa si f está o no definida en c.

- **Discontinuidad esencial (NO se puede salvar la discontinuidad)**
  - Al menos uno de los límites laterales no existe. Es decir:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \text{ o } \lim_{x \to c^+} f(x) \text{ no existe.}$$





Observación: no interesa si f está o no definida en c.

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Ejemplo: clasificar las discontinuidades de:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)}.$$

Solución: anteriormente se obtuvo que g es discontinua en $x = 0$ y $x = 2$. Veamos qué tipo de discontinuidad tenemos en cada caso.

-Para $x = 2$: analizamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)}{x} = 2$$

y

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)}{x} = 2.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2$$

y g tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

-Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2)}{x} = +\infty$$

por ende la discontinuidad de g en $x = 0$ es esencial.