TRABAJO PRÁCTICO N°5 TRANSFORMACIONES LINEALES

EJERCICIO 1 a)

TPrP5. Ej 1 a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T(x,y)=(x+2y,\ 3y,\ x)$

Para determinar si es una transformación lineal, se deben probar las condiciones de linealidad:

i) Primera condición $T(u+v)=T(u)+T(v)$, $u,v \in \mathbb{R}^2$

Definimos $u=(x,y) \longrightarrow T(u)=(x+2y,\ 3y,\ x)$

$v=(x',y') \longrightarrow T(v)=(x'+2y',\ 3y',\ x')$

$T(u)+T(v)=(x+2y+x'+2y',\ 3y+3y',\ x+x')$ (1)

O bien $\underline{T(u)+T(v)=(x+x'+2(y+y'),\ 3(y+y'),\ x+x')}$

Por otro lado, $u+v=(x+x',\ y+y')$ (suma usual en $\mathbb{R}^2$)

$\underline{T(u+v)=((x+x')+2(y+y'),\ 3(y+y'),\ x+x')}$ (2)

De (1) y (2): $\boxed{T(u+v)=T(u)+T(v)\ ;\ u,v \in \mathbb{R}^2}$

ii) Segunda condición: $T(ku)=k\,T(u)$, $k \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$

$ku=(kx,ky) \longrightarrow T(ku)=(kx+2(ky),\ 3(ky),\ kx)$ (3)

O bien: $\underline{T(ku)=(k(x+2y),\ k(3y),\ kx)}$

$k.T(u)=k(x+2y,\ 3y,\ x)$; $\underline{kT(u)=(k(x+2y),\ k(3y),\ kx)}$ (4)

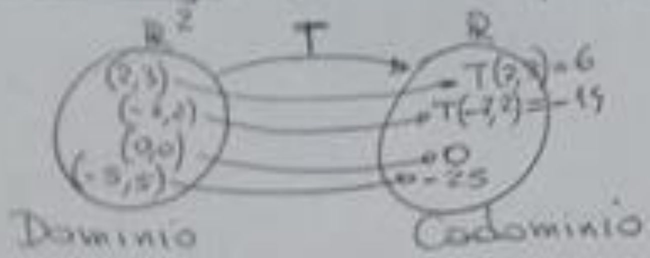
De (3) y (4): $\boxed{T(ku)=k\,T(u)}$

Rta: La función T dada es una transf. lineal pues verifica las 2 condiciones que debe cumplir una función definida entre espacios vectoriales para ser transf. lineal.

Observar que el dominio de T es $\mathbb{R}^2$ y el codominio es $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 1b)

TP N°5 Ej 1 b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, T(x,y) = x.y$



Se observa que $T(2,3)=6$, $T(-7,2)=-14$ y $T(-5,5)=-25$. Como $\underbrace{(2,3)}_{u}+\underbrace{(-7,2)}_{v}=\underbrace{(-5,5)}_{u+v}$, debería verificarse que $T(u+v)=T(u)+T(v)$ para que T sea transf lineal.

Pero $T(u+v)=-25$ y $T(u)+T(v)=6+(-14)=-8$

Por lo tanto, no se verifica la primer condición de linealidad y T no es transf. lineal

Observaciones

- Se podría trabajar para cualesquiera dos vectores u y v del dominio $\mathbb{R}^2$ y se verificaría que $T(u+v) \neq T(u)+T(v)$.
- Para que una función sea transf. lineal se deben cumplir las 2 condiciones de linealidad. Es decir, basta que alguna no se verifique para que T no sea transf. lineal.
- Cuando T no sea transf. lineal, basta un contraejemplo.
- La segunda condición tampoco se verifica, pues $k(x,y)=(kx,ky) \longrightarrow T(kx,ky)=(kx)(ky)=k^2xy$

Mientras que $k.T(x,y)=k(x.y)$ $\neq$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

EJERCICIO 1e)

TP Nº5 : Ej 1 e) $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1 \,/\, T(a_2x^2+a_1x+a_0) = 2a_2x + a_1$

$\mathcal{P}_2$ denota el espacio vectorial de polinomios de grado igual o menor que 2 unido al polinomio nulo (no tiene grado).

$\mathcal{P}_1$ denota el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1 unido al polinomio nulo.

Por ejemplo $p(x) = (3x^2 - 2x + 7) \in \mathcal{P}_2$, $q(x) = (x-4) \in \mathcal{P}_1$

Observe que la función T de este ejercicio es la derivada del polinomio de segundo grado donde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. La variable o indeterminada de los polinomios es x.

Sabemos que la derivada de la suma es la suma de las derivadas y que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función; luego T es transf lineal

Alternativa

i) Primera condición $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $u, v \in \mathcal{P}_2$

Definimos $u = p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \to T(u) = T(p(x)) = 2a_2x + a_1$

$v = q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \to T(v) = T(q(x)) = 2b_2x + b_1$

$T(u)+T(v) = 2a_2x + a_1 + 2b_2x + b_1 = 2(a_2+b_2)x + (a_1+b_1)$ (1)

$u+v = p(x)+q(x) = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

$T(u+v) = T(p(x)+q(x)) = 2(a_2+b_2)x + (a_1+b_1)$ (2)

De (1) y (2) se verifica $\boxed{T(u+v) = T(u)+T(v)}$

Trabajando análogamente se prueba la 2da condición $T(ku) = k\,T(u)$ para $k \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathcal{P}_2$

EJERCICIO 1f)

TP Nº5 - Ej. 1 f) $T: M_{2x2} \to M_{2x2} \,/\, T(A) = A - A^T$

M_{2x2} denota el espacio vectorial de matrices reales de 2x2. A^T denota la matriz transpuesta de A.
Cdo. el dominio coincide con el codominio, como en este caso, se dice que la función, si es lineal, es un OPERADOR.

i) Primera condición $T(u+v) = T(u) + T(v)$; $u, v \in M_{2x2}$

Definimos $u = A \to T(A) = A - A^T$; $A \in M_{2x2}$

$v = B \to T(B) = B - B^T$; $B \in M_{2x2}$

$T(u)+T(v) = T(A)+T(B) = A - A^T + B - B^T$

① $T(A)+T(B) = A+B-(A^T+B^T)$

$u+v = A+B \to T(A+B) = A+B-(A+B)^T$ (Prop de Transposición)

② $T(A+B) = A+B-(A^T+B^T)$

De ① y ② $\boxed{T(A+B) = T(A)+T(B)}$

ii) Segunda condición $T(ku) = kT(u)$, $k \in \mathbb{R}$, $u \in M_{2x2}$

$ku = kA \to T(kA) = kA - (kA)^T = kA - kA^T$ (prop transposición)

$kT(A) = k(A - A^T) = kA - kA^T$ ← iguales

Luego $\boxed{T(kA) = kT(A)}$, $k \in \mathbb{R}$, $A \in M_{2x2}$

Rta: T es un operador lineal

Observación: ¿qué clase de matriz es $A - A^T$?

Solución

Sea $C = A - A^T$, entonces $C^T = (A-A^T)^T \overset{\text{prop de transposición}}{=} A^T - A = -\underbrace{(A-A^T)}_{C}$

Luego $C = -C^T$, entonces $C = A - A^T$ es antisimétrica