DEFINICIONES

FUNCIONES

1. Definición de función.

Sean A y B conjuntos de números reales, una función f es un subconjunto de AXB, tal que si (a, b) y (a, c) pertenecen a f, entonces a=c. Dominio de f es el conjunto de todo a en A tal que existe b en B con la propiedad, (a, b) pertenece a f. Rango o imagen de la función f es el conjunto de todo b en B tal que existe a en A, con (a, b) en f.

El conjunto B se denomina co-dominio de la función f.

Sea D el dominio de una función f, entonces denotamos f: D->R. Esta notación indica que la función f aplica el conjunto D en el conjunto de los números reales, es decir, que la función f es una función con valores reales.

En general el dominio de una función f se denota D(f).

2. Funciones pares y funciones impares, crecientes y decrecientes

Una función f de dominio D(f) es:

Par: si y solo sí para todo x en D(f): f(x)=f(-x)

Impar: si y solo sí para todo x en D(f): f(x)=-f(-x)

Una función g definida en un intervalo I es:

Creciente: si y solo si para todo x0, x1 en I: (x0<x1 implica g(x0) < g(x1))

Decreciente: si y solo si para todo x0, x1 en I: (x0<x1 implica g(x0) > g(x1))

3. Función Afín, Polinómica y Racional

Una función afín es una función f: R->R, tal que:

f(x)=ax+ b, con a, b números reales.

Una función polinómica es una función P: R-> R, tal que:

“Polinomio”, con n un número natural y los coeficientes ai son números reales.

Una función racional es una función R: D(R)-> R, tal que:

R(x)=P(x)/Q(x), donde P y Q son funciones polinómicas y D(r) = {x en R tales que Q(x) es distinto de cero}

4. Operaciones de funciones, composición de funciones, periodicidad de funciones

Sean f: D (f)->R y g: D(g)->R, definimos las funciones:

f + g: Df intersección Dg->R tal que (f + g) (x)=f(x) + g(x); es la función “suma”

f - g: Df intersección Dg->R tal que (f - g) (x)=f(x) - g(x); es la función “diferencia”

f.g: Df intersección Dg->R tal que (f .g) (x)=f(x).g(x); es la función “producto”

f / g: d(f/g)->r tal que (f/g)(x)=f(x)/g(x), para toda x en D(f/g), con D(f/g)={x en R tales que g(x) es distinto de cero}

Sean f: D (f)->R y g: D(g)->R, definimos composición de f con g a la función f°g: D(f°g)->R tal que:

D(f°g)={x en D(g) tales que g(x) pertenece a D(f)}

Para toda x en (D(f°g)): (f°g)(x)=f(g(x))

Una función f(x) es periódica si existe un número positivo p tal que para toda x en el dominio de f: f(x)=f (x+p). Al menor de los valores de p se lo denomina período de la función f

LÍMITES

5. Tasa de cambio promedio, tasa de cambio instantánea

Tasa de cambio promedio de una función f respecto de la variable x en un intervalo [x0, x0 + h], con h un número real positivo, es:

Delta y sobre delta x igual a la diferencia de las imágenes de la función en x0 y x0 + h sobre la longitud del intervalo igual a h.

Geométricamente es igual a la pendiente de la recta secante a la curva y=f(x) en los puntos (x0, f(x0)) y (x0+h f(x0+h))

Tasa de cambio instantánea de una función f en un punto x=c es igual al límite limite cuando x tiende a c de el cociente de diferencias o bien se puede utilizar el límite cuando el incremento del intervalo tiende a cero

6. Definición de distancia entre números reales

Distancia entre los números reales a y b se denota d(a, b) y se calcula:

d(a, b)=|a - b|

7. Definición formal de límites bilaterales y límites laterales

El límite de una función f cuando x tiende x0 existe y es igual al número real L, se denota:

Si y solo si para todo épsilon mayor a cero existe delta mayor a cero tal que para todo x en el dominio de f:

0<|x-x0|<delta implica que |f(x)-L|<épsilon

f tiende al número L cuando x tiende a x0 por la derecha, se denota:

Si y solo sí para toda épsilon mayor a cero existe delta mayor a cero tal que para toda x en el dominio de f:

0<x-x0<delta implica que |f(x)-L|<épsilon

f tiende al número L cuando x tiende a x0 por la izquierda, se denota:

Si y solo sí para toda épsilon mayor a cero existe delta mayor a cero tal que para toda x en el dominio de f:

0<x0-x<delta implica que |f(x)-L|<épsilon

8. Definición de continuidad en un punto, en intervalos abiertos y en intervalos cerrados

La función f es continua en un punto x=c si y solo sí, f está definida en x, el límite de f cuando x tiende a c existe y además:

Una función f es continua en un intervalo (a, b) si y solo sí es continua en cada punto de (a, b)

Una función f es continua por la izquierda en un punto x=b si y solo sí f está definida en x=b, el límite de f cuando x tiende a b por la izquierda existe y además:

Una función f es continua por la derecha en un punto x=a si y solo sí f está definida en x=a, el límite de f cuando x tiende a a por la derecha existe y además:

Una función f:[a, b]-> R, es continua en [a, b], si y solo sí f es continua en (a, b), es continua por la izquierda en x=b y continua por la derecha en x=a.

9. Definición de discontinuidad y tipos de discontinuidad

Si la función f no es continua en un punto c, entonces f es discontinua en c y decimos que x es un punto de discontinuidad de la función f.

10. Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas

La recta horizontal de ecuación y=b es asíntota horizontal de la función f si y solo sí:

O

La recta vertical de ecuación x=a es asíntota vertical de la función f si y solo sí.

O

La recta oblicua de ecuación y=ax + b con distinto de cero es asíntota oblicua de la función f si y solo sí:

O

11. Límites en el infinito y límites infinitos

Decimos que la función f tiende al número L cuando x tiende a infinito y lo denotamos:

Si y solo sí para toda épsilon mayor a cero existe un número M mayor a cero tal que para toda x en el dominio de f:

M<x implica |f(x)-L|<épsilon

De forma análoga si el límite es cuando x tiende a menos infinito

Decimos que la función f tiende a infinito cuando x tiende a un número a por la derecha y lo denotamos:

Si y solo sí para todo B mayor a cero, existe delta mayor a cero tal que para toda x en el dominio de f:

0<x-a<delta implica f(x)>B

Análogamente si la función tiende al número por la izquierda y la función tiende a menos infinito

DERIVADA

12. Definición de pendiente de una curva

La pendiente de la curva y=f(x) en el punto (x0, f(x0)) se calcula:

, siempre que el límite exista

13. Definición de recta tangente a una curva

Recta tangente a la curva y=f(x) en el punto (x0, f(x0)) es la recta que pasa por ese punto y cuya pendiente es:

, siempre que el límite exista

14. Definición de derivada de una función en un punto

Derivada de la función f en el punto x=x0 se denota f’(x0) y se calcula:

, siempre que el límite exista

15. Función derivada

Sea D (f’) el conjunto de todos los puntos en el dominio de f donde f es derivable, entonces la función derivada se denota f’: D (f’) ->R, y es la función que asigna a cada x en D (f’) f’(x), la derivada de la función f en x

16. Derivadas laterales

Derivada por derecha de la función f en c se calcula

, siempre que el límite exista

Derivada por izquierda de la función f en c se calcula

, siempre que el límite exista

17. Linealización y diferenciales

Sea f una función derivable en x=a. Linealización de f en x=a es la función L:R->R tal que:

L(x)=f’(a)(x-a)+f(a)

Diferencial de f en x=a se denota df y se calcula:

Df=f’(a) dx

Donde dx es una variable, y si dx es igual a variación de x cuando x se mueve de x=a a x= a mas variación de x, entonces df es la variación de L(x) cuando x se mueve de x=a a x=x más variación de x, y es una buena aproximación de la variación de y de la función f para la variación delta x de la variable x.

18. Extremos absolutos y relativos

Una función f tiene un máximo absoluto en su dominio en un punto c si y solo sí:

Para toda x en el dominio de f: f(x) menor o igual a f(c)

Una función tiene un mínimo absoluto en su dominio en un punto c si y solo sí:

Para toda x en el dominio de f: f(x) mayor o igual a f(c)

Una función f tiene un máximo relativo o local en un punto c en su dominio si y solo sí existe un intervalo abierto I= (c-r, c + r), tal que para toda x en I y en el dominio de f: f(x) menor o igual a f(c)

Una función f tiene un mínimo relativo o local en un punto c en su dominio si y solo sí existe un intervalo abierto I= (c-r, c + r), tal que para toda x en I y en el dominio de f: f(x) mayor o igual a f(c).

19. Puntos críticos.

Un punto c interior al dominio de la función f es punto crítico de f si y solo sí: f’(c)=0 o f’ no está definida en x=c

20. Criterio de la derivada primera para extremos relativos

Sea f una función continua en [a, b] y sea c en (a, b) un punto crítico de f. Supongamos que f es derivable en todo punto de (a, b), excepto posiblemente en c, entonces:

Si f’ cambia de signo de positiva a negativa cuando x se mueve de izquierda a derecha alrededor de c, entonces f tiene un máximo relativo en x=c

Si f’ cambia de signo de negativa a positiva cuando x se mueve de izquierda a derecha alrededor de c, entonces f tiene un mínimo relativo en x=c

Si f’ no cambia de signo cuando c se mueve de izquierda a derecha alrededor de c, entonces f no tiene extremo relativo en x=c

21. Definición de concavidad

Sea f una función derivable en (a, b), entonces:

F es cóncava hacia arriba en (a, b) si f´ es creciente en (a, b)

F es cóncava hacia abajo en (a, b) si f’ es decreciente en (a, b)

22. Criterio de la derivada segunda para la concavidad

Sea f una función dos veces derivable en (a, b), entonces:

F es cóncava hacia arriba en (a, b) si f’’(x)>0 para toda x en (a, b)

F es cóncava hacia abajo en (a, b) si f’’(x)<0 para toda x en (a, b)

23. Definición de punto de inflexión, teorema acerca de los puntos de inflexión

Sea f una función continua en un intervalo (a, b) que contiene a un punto c. El punto (c, f(c)) es un punto de inflexión de f si es posible trazar la recta tangente a la curva y=f(x) por ese punto y f cambia de concavidad en x=c.

24. Criterio de la derivada segunda para extremos relativos

Sea f una función tal que f’’ es continua en (a, b) que contiene a c tal que f’(c)=0, entonces:

Si f’’(c)>0, f tiene un mínimo relativo en x=c

Si f’’(c) <0, f tiene un máximo relativo en x=c

Si f’’(c)=0, el criterio no es concluyente

25. Anti-derivada, Integral indefinida y reglas del cálculo de anti-derivadas

Sea f una función definida en (a, b), la función F es anti derivada de f en (a, b) si:

F’(x)=f(x), para toda x en (a, b)

Sea f una función definida en (a, b), entonces el símbolo:

Denota una anti-derivada general de f en (a, b) y se denomina integral indefinida de f en (a, b)

Sean f y g funciones definidas en (a, b), entonces:

La integral indefinida de la suma es igual a la suma de las integrales indefinidas

La integral indefinida del producto por un escalar de una de las funciones es igual al producto por un escalar de la integral indefinida

INTEGRAL DEFINIDA

26. Partición de un intervalo cerrado, norma de una partición, Sumas de Rienmann

Una partición P de un intervalo [a, b] es una colección de puntos {x0, x1,…, xn}, tales que:

X0=a<x1<x2<…<xn-1<xn=b

Norma de la partición P se denota ||P|| y se define:

||P||=max{x1-x0, x2-x1, …., xn-(xn-1)}

O bien

||P||=max{∆xk=xk-(xk-1)|k=1, 2, …, n}

Entonces una partición P del intervalo [a, b] se utiliza para dividir al mismo en intervalos:

[x0, x1], [x1, x2], [x2, x3], …[xn-1, xn]

Sumas de Riemann:

Sea f: [a, b]->R y P una partición del intervalo [a, b]

En cada uno de los intervalos determinados por la partición P seleccionamos los puntos c1, c2,…, cn tales que:

C1 pertenece a [a, x1]

C2 pertenece a [x1, x2]

C3 pertenece a [x2, x3]

.

.

Cn pertenece a [xn-a, b]

La suma:

S(P, f)=∆1.f(c1) + ∆2.f(c2)+…+ ∆n2.f(cn)=

Se denomina Suma de Riemann de f respecto de la partición P del intervalo [a, b]

27. Integral definida de una función en un intervalo cerrado

Sea f:[a, b]->R. El límite de las sumas de Riemann de la función f respecto de las particiones P del intervalo [a, b] cuando ||P|| tiende a cero existe y es igual al número real A y lo denotamos:

Si y solo sí para toda épsilon mayor a cero existe delta mayor a cero tal que para toda partición P= {x0=a, x1, x2…, xn=b} del intervalo [a, b] y para toda elección de los puntos ci en los intervalos [xi-1, xi]:

||P||<delta implica que|

El número A se denomina integral definida de f en [a, b] y se denota:

En caso de que el límite exista se dice que f es integrable en [a, b]

28. Definición de área bajo la curva de una función positiva en un intervalo cerrado

Sea f: [a, b]->R con f(x) mayor igual a cero para toda x en [a, b], entonces el área de la región comprendida entre la curva y=f(x), el eje x y las rectas verticales x=a y x=b se calcula:

29. Propiedades de las integrales (6)

Tenemos que si f y g son funciones integrables de x en [a, b] y k es un número real, entonces:

- La integral definida de a a a de f de x es igual a cero

- La integral definida de a a b de x es igual a la diferencia b menos a

- La integral definida de la suma de las funciones es igual a la suma de las integrales definidas de cada función en ese intervalo

- La integral definida del producto por un escalar de la función f es igual al producto por el escalar de la integral definida de f en el intervalo dado

- si f de x es mayor o igual a g de x en el intervalo dado, entonces la desigualdad en el mismo sentido es válida para las correspondientes integrales definidas de las funciones

- Si c pertenece a (a, b), entonces la integral de f en el intervalo dado es igual a la suma de las integrales definidas de f de a a c y de c a b

30. Procedimiento para el cálculo del área bajo una curva en un intervalo cerrado

Encontrar las raíces de la función en el intervalo dado y sumar los valores absolutos de las integrales definidas de la función en cada uno de los sub-intervalos determinados

31. Fórmula de sustitución, Área entre curvas

Sean f y g funciones tales que g’ es continua y f(g(x)) es continua, entonces la integral indefinida del producto de f(g(x)) por g’(x) diferencial de x es igual a la integral indefinida de f(u) diferencial de u, donde u=g(x).

Sean f y g funciones continúas en [a, b] tales que f(x) es mayor o igual a g(x) para toda x en el intervalo dado, entonces el área de la región comprendida entre las curvas y=f(x), y=g(x) y las rectas x=a y x=b es igual a la integral definida de a a b de f menos g de x.

32. Definición de sección transversal

Sección transversal de un sólido S es la superficie plana que se obtiene de la intersección del solido con un plano.

33. Cálculo de volúmenes por medio de secciones transversales, definición de sólido de revolución, descripción de cada método

Sea S un sólido de área de sección transversal integrable A=A(x) en el intervalo [a, b], entonces el volumen del sólido S se calcula como la integral definida de a a b de A(x) diferencial de x

Sólido de revolución es el sólido que se obtiene por la rotación de una región plana del espacio alrededor de un eje de revolución fijo contenido en el plano de la región plana.

Los métodos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por medio de secciones transversales que vimos son:

El método de discos: Se utiliza cuando se quiere determinar el volumen de un sólido generado por la rotación de una región plana alrededor de un eje de revolución cuando la región plana y el eje son adyacentes.

Se usa pi por f de x al cuadrado

El método de arandelas: se utiliza para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución cuando la región plana que lo genera no es adyacente al eje de revolución del mismo y está comprendida entre dos curvas planas

Se usa pi por la diferencia de los cuadrados de las funciones

El método de cascarones cilíndricos: Se utiliza prácticamente en las mismas circunstancias que el método anterior

Se usa dos por pi por la distancia al eje de revolución por f de x

34. Cálculo de longitud de una curva y de área de una superficie de revolución

Sea f una función tal que f’ es continua en [a, b], entonces la longitud L de la curva y=f(x) desde (x, f(a)) hasta (b, f(b)) se calcula:

L = integral definida de a a b de la raíz cuadrada de la suma de uno más el cuadrado de la derivada de la función f, diferencial de x.

Sea f una función tal que f’ es continua en [a, b] y f(x) es mayor o igual a cero para toda x en [a, b], entonces el área A de la superficie de revolución obtenida por la rotación de la curva plana y=f(x) alrededor del eje x se calcula:

A= la integral definida de a a b del producto de 2 por pi por f de x por la raíz cuadrada de la suma de 1 más el cuadrado de la derivada de f diferencial de x.

FUNCIONES TRASCENDENTES, REGLA DE L´HOPITAL Y TECNICAS DE INTEGRACIÓN

35. Definición de funciones inyectivas y de funciones inversas, propiedad fundamental de la composición de funciones inversas

Una función f:D(f)->R, es inyectiva en D(f) si para todo par x1, x2 en D(f) tales que x1 distinto de x2, entonces f(x1) distinto de f(x2)

Sea f: D->R una función inyectiva en D de rango R, f-1: R->D es la función inversa de f tal que para toda y en R:

F-1(y)=x si y solo si f(x)=y

36. Definición de logaritmo natural, número de Euler, función exponencial, funciones exponenciales generales, logaritmos generales, funciones hiperbólicas

Para x mayor a cero se define:

Ln(x)=integral definida de 1 a x de uno sobre x diferencial de x.

e es tal que ln(e)=1

La función exponencial denotada exp(x) se define como la función inversa de ln(x), es decir que exp(x)=ln-1(x)

Es de notar que exp(x)=ex

La función f: R->R+ tal que f(x)=ax, para a> 0, es una función exponencial general y se define como:

F(x)=ax=ex.ln(a)

La función f: (0, infinito) ->R tal que f(x)=loga x, con a mayor a cero es una función logarítmica general y se define como la inversa de ax

37. Regla de L´Hopital, integración por partes para integrales indefinidas, integración por partes para integrales definidas

Si el límite cuando x tiende a a por la derecha del cociente de las derivadas de dos funciones existe o es igual a más o menos infinito, entonces a) si el límite de ambas funciones cuando x tiende a por la derecha es cero, entonces el límite cuando x tiende a a por la derecha del cociente de las funciones es igual al límite cuando x tiende a a por la derecha del cociente de sus derivadas; b) Si el límite de la función en el denominador cuando x tiende a a por la derecha es igual a más o menos infinito, entonces el límite cuando x tiende a a por la derecha del cociente de las funciones es igual al límite cuando x tiende a a por la derecha del cociente de sus derivadas.

Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo [a, b], entonces la integral del producto de la primera por la derivada de la segunda es igual al producto de las mismas menos la integral definida en el mismo intervalo de la derivada de la primera por la segunda, y la hermana de la otra también.

38. Integrales Impropias de tipo 1 (intervalos de integración no acotados) y de tipo 2 (integrandos con discontinuidades en el intervalo de integración)

Las integrales con intervalos de integración no acotados se denominan integrales impropias del tipo 1, entonces si una función f es continua en un intervalo a infinito, entonces la integral de a a infinito de la función se define como el límite cuando c tiende a infinito de la integral de a a c de la misma función.

Analogamente si la función no está acotada a la izquierda

En caso de que no esté acotada ni a la derecha ni a la izquierda entonces se parte el intervalo de integración en un punto en el intervalo de integración no acotado y se obtiene la suma de dos integrales impropias de las ya descriptas, entonces el cálculo es conocido.

Integrales impropias del tipo 2 son integrales con integrandos no continuos en todo el intervalo de integración, entonces si f es continua en el intervalo semi abierto y discontinua en el extremo abierto, entonces la integral se cálcula como el límite cuando una variable c tiende a ese punto de la integral definida entre el extremo donde es continua y c.

Analogamente si es discontinua en el otro extremo

En caso de que la función sea discontinua en ambos extremos nuevamente se divide el intervalo de integración y se obtienen integrales del tipo ya analizadas así que todo bien

39. Técnicas de integración de integrales trigonométricas

En este caso chúpame las bolas.

Pero si me acuerdo que por ejemplo el producto de senos por cosenos se reemplaza por la suma de diferencias de sumas de senos.

En caso de que se tenga producto de cosenos, se reemplaza por la suma de cosenos de sumas y diferencias.

En caso de que se tenga el producto de senos por senos, se reemplaza por la diferencia de cosenos de restas menos cosenos de sumas.

Siempre con el factor un medio que no

SUCESIONES Y SERIES

40. Definición de sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales, es decir, f: N->R. Las sucesiones se denotan

{an} de o a infinito o simplemente an

41. Convergencia de sucesiones

Si el límite cuando n tiende a infinicto de an existe y es igual a L se dice que la sucesión an converge al número n, si el límite no existe entonces la sucesión diverge.

42. Reglas de límites de sucesiones, teorema de la compresión de sucesiones, sucesiones monótonas y acotadas.

Si tienes dos sucesiones de números reales que convergen a dos números entonces la sucesión que se obtiene de la suma, del producto, del cociente (siempre que no sea cero el límite de convergencia de la sucesión en el denominador), el producto por un escalar, eso nomas, convergen al valor de las mismas operaciones entre los límites de convergencia.

43. Definición de serie y sucesión de sumas parciales

Sea an una sucesión de números reales, toda expresión de la forma sumatoria desde n igual a 1 hasta infinito de an es una serie.

SN igual a sumatoria de n=1 hasta N mayúscula de an representa la suma parcial N-sima de an. Entonces la sucesión {SN} es la sucesión de sumas parciales de an.

Si el límite de las sumas parciales converge, entonces decimos que la serie converge y que su suma el valor del límite. En caso de que el límite no exista decimos que la serie diverge.

44. Definición de serie geométrica

Una serie geométrica es una sucesión de la forma an por r elevamdo a la n menos uno que empieza en n igual a 1 y converge a a por uno menor r elevado a la n sobre uno menos r, y en caso de que el valor absoluto de la razón sea menor a uno la serie geométrica converge a a sobre uno menor r. Cabe aclarar que r puede terner valores negativos positivos o cero.

45. Reglas del cálculo de series, criterios de convergencia: criterio del término ene-simo, criterio de la integral, criterio de la comparación de límites, convergencia absoluta, criterio de la convergencia absoluta, criterio de la raíz, criterio de la razón, criterio de Leibniz para sucesiones alternantes.

En caso de que tengas dos series de números reales convergente, su suma su diferencia y el producto por un escalar converge a las respectivas operaciones con los valores de convergencia.

El criterio del término ene-simo dice que si una serie converge solo si la sucesión correspondiente es convergente a cero.

Así si el límite de la sucesión no existe o no es igual a cero, entonces la serie no converge, pero no es concluyente si el caso es que la sucesión converja a cero.

Sea an una sucesión de términos positivos, supongamos que an es igual a f de n, donde f definida de 1 a infinito es una función positiva decreciente y continua de x, entonces si sonveregkn sxk nsdv

El de comparación es para sucesiones de términos no negativos

En el caso del criterio de Leibniz era de la serie alternante y si la serie que alterna es de términos positivos, decreciente y converge a cero, entonces la serie converge

46. Definición de serie de Taylor generada por una función.

Sea f una función con derivadas en todos los órdenes un intervalo I que contiene a un punto a, entonces la serie de Taylor generada por f y centrada en a es la sumatoria de n igual a cero hasta infinito de la derivada de orden ene evaluada en a sobre n factorial por equis menos a elevado a la n

Las sumas parciales de la serie de Taylor se denominan Polinomios de Taylor

ELEMENTOS DEL CÁLCULO VECTORIAL:

47. Definición de ecuaciones paramétricas, parámetro, dominio paramétrico y curva plana.

Sean f y g funciones continuas de t en un intervalo I, entonces las ecuaciones x=f(t) y=g(t), para t en I, se denominan ecuaciones paramétricas y t se denomina parámetro. El intervalo I se denomina dominio paramétrico. La gráfica de las ecuaciones paramétricas es el conjunto de todos los puntos (f(t), g(t)), para t en I. Las ecuaciones paramétricas junto con la gráfica de las mismas se denomina curva plana.

48. Definición de curva suave.

Una curva dada por la ecuaciones paramétricas x igual a efe de t e e igual a g de t para t en I es suave si f’ y g´ existen, son funciones continuas en I, y no son simultáneamente nulas en I

49. Longitud de una curva suave.

Sea C una curva suave dada por las ecuaciones paramétricas x igual a efe de t e e igual a g de t para t en un intervalo ab tal que C se recorre una vez conforme t varía de a a b, entonces la longitud L de la curva plana es igual a la integral definida de a a b de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las derivadas de esas funciones paramétricas.