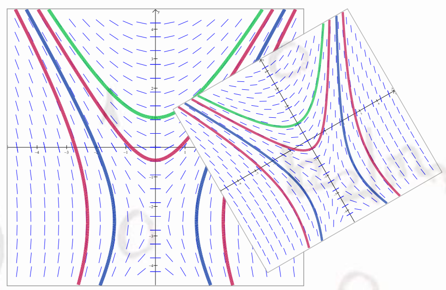
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

MATEMÁTICAS AVANZADAS



Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Por Series de Fourier

Anexo

FACULTAD DE INGENIERÍA

Universidad Nacional de Cuyo

2020

MATEMÁTICAS AVANZADAS 2020

Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por Series de Fourier

Anexo

SISTEMA MASA-RESORTE NO AMORTIGUADO CON UNA FUERZA PERIODICA $f(t)$:

Modelo Matemático

$$m\,\ddot{u}(t)+k\,u(t)=f(t)$$

$$\ddot{u}(t)+\frac{k}{m}\,u(t)=\frac{f(t)}{m} \quad ; \quad \frac{k}{m}=\omega_0^2$$

Solución general:

$$u(t)=C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)+u_{sp}(t)$$

Si $f(t)$ es una función impar con período $2L$, su Serie de Fourier tiene la forma:

$$\frac{f(t)}{m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad ; \quad \omega_n=\frac{n\pi}{L}$$

Usamos Serie de Fourier para encontrar $u_{sp}(t)$: "solución periódica estacionaria"; "solución periódica en estado permanente.

Se propone una solución de la forma:

$$u_{sp}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad \text{con } \omega_n=\frac{n\pi}{L}\neq\omega_0$$

Sustituimos $u_{sp}(t)$ y $f(t)/m$ en la EDO. Para ello debemos evaluar $\ddot{u}_{sp}(t)$:

$$\dot{u}_{sp}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{n\pi}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \quad ; \quad \ddot{u}_{sp}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}-(b_n)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$$

Sustituimos en $\ddot{u}(t)+\frac{k}{m}u(t)=\frac{f(t)}{m}$ y obtenemos:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right)+\frac{k}{m}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{m}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Cada coeficiente b_n se obtiene de igualar coeficientes de términos semejantes:

$$\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{k}{m}\right]b_n=\frac{B_n}{m}\implies b_n=\frac{B_n/m}{\left[k/m-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]}=\frac{B_n}{m[\omega_0^2-\omega_n^2]}\qquad \omega_n\neq\omega_0 \quad \omega_n=\frac{n\pi}{L}$$

Por lo tanto: $$u_{sp}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{m}\frac{1}{[\omega_0^2-\omega_n^2]}\operatorname{sen}(\omega_n t)$$

Ahora bien, si existe un término $B_N \operatorname{sen}\left(\frac{N\pi}{L}t\right)\neq 0$ en la solución de la serie de Fourier de $f(t)$ para el cual $\boxed{N\pi/L=\omega_0}$, entonces ese término causa resonancia pura. Veamos porqué:

Si consideramos la ecuación
$$m\ddot{u}(t)+k\,u(t)=B_N\operatorname{sen}(\omega_0 t)\qquad ;\ \omega_N=\omega_0\ ;\ \omega_0^2=k/m$$

el método de los coeficientes indeterminados propone como solución $u_{sp}(t)$:
$$u_{sp}(t)=t\,(A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t))$$

porque si se propone $u_p(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ queda una contradicción. Veámoslo:

$$\begin{aligned}\text{si } u_{sp}(t)&=A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t)\\ \dot{u}_{sp}(t)&=-A\omega_0\operatorname{sen}(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)\\ \ddot{u}_{sp}(t)&=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t)-B\omega_0^2\operatorname{sen}(\omega_0 t)\end{aligned}$$

Al sustituir en la EDO $m\ddot{u}(t)+k\,u(t)=B_N\operatorname{sen}(\omega_0 t)$, queda:
$$-m\omega_0^2[A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t)]+k[A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t)]=B_N\operatorname{sen}(\omega_0 t)$$
$$-k[A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t)]+k[A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t)]=B_N\operatorname{sen}(\omega_0 t)$$
$$0\overset{?}{=}B_N\operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Volvemos entonces a $u_p(t)=t\,(A\cos(\omega_0 t)+B\operatorname{sen}(\omega_0 t))$ y sustituimos en la EDO:

$$u_{sp}(t) = t\left[A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)\right]$$

$$\dot{u}_{sp}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t) + t\left[-A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)\right]$$

$$\ddot{u}_{sp}(t) = -A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) + \left[-A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)\right] +$$
$$+ t\left[-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2\,\text{sen}(\omega_0 t)\right] =$$
$$= -2A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + 2B\omega_0\cos(\omega_0 t) - A\omega_0^2\,t\cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2\,t\,\text{sen}(\omega_0 t)$$

Sustituimos en la EDO y obtenemos:

$$m\left[-2A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + 2B\omega_0\cos(\omega_0 t) - At\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - Bt\,\omega_0^2\,\text{sen}(\omega_0 t)\right] +$$
$$+ kt\left(A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)\right) = B_N\,\text{sen}(\omega_0 t)$$

El coeficiente de 'cos$(\omega_0 t)$' debe ser cero y el coeficiente en 't' también

$$\begin{cases} 2Bm\omega_0\cos(\omega_0 t) = 0 \longrightarrow B = 0 \\ \left[-A(m\omega_0^2) + kA\right]t\cos(\omega_0 t) = 0 \longrightarrow (-kA + kA)\,t\cos(\omega_0 t) = 0 \end{cases}$$

El coeficiente de sen$(\omega_0 t)$ debe ser 'B_N':

$$-2m\,A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) - \overset{=0}{B}\,\omega_0^2\,mt\,\text{sen}(\omega_0 t) + \overset{=0}{B}\,kt\,\text{sen}(\omega_0 t) = B_N$$

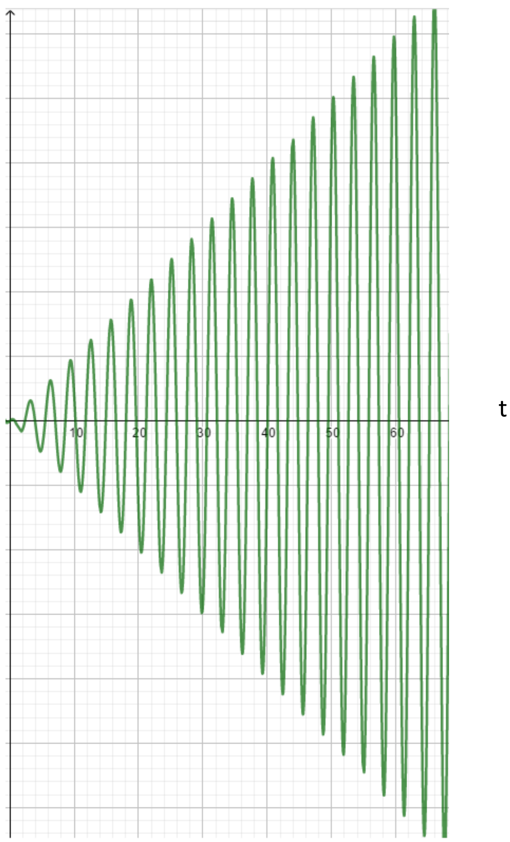
$$-2Am\omega_0 = B_N \qquad \boxed{A = \frac{-B_N}{2m\omega_0}}$$

Entonces, la ecuación $m\ddot{u}(t) + k\,u(t) = B_N\,\text{sen}(\omega_0 t)$, $\omega_0^2 = k/m$

tiene la solución de resonancia:

$$\boxed{u_{sp}(t) = \frac{-B_N}{2m\omega_0}\,t\cos(\omega_0 t)}$$

La amplitud de oscilación crece sin acotamiento.



En la solución $u_{sp}(t)$ se excluye el término de frecuencia ω_0 de la sumatoria y finalmente resulta:

$$u_{sp}(t) = \underbrace{\frac{-B_N}{2m\omega_0}\, t\cos(\omega_0 t)} + \underbrace{\sum_{n\neq N} \frac{B_n}{m(\omega_0^2-\omega_n^2)} \operatorname{sen}(\omega_n t)}; \qquad \omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

$\boxed{\text{solución asociada al término de } f(t) \text{ para el cual } \frac{N\pi}{L} = \omega_0}$

$$\boxed{\sum_{n\neq N} \frac{1}{(\omega_0^2-\omega_n^2)}\, \frac{B_n}{m} \operatorname{sen}(\omega_n t)}$$

[Factores que modifican las amplitudes de las componentes de la fuerza de entrada]