CAPÍTULO 1

Modelado con Ecuaciones Diferenciales

"Cada aplicación de la matemática utiliza la misma para evaluar, entender o predecir algo que pertenece al mundo no matemático. A través del proceso de modelización se presta atención al mundo externo y al matemático y los resultados han de ser matemáticamente correctos y razonables en el contexto del mundo real"

Henry O. Pollak, 1997

1. Modelado matemático de sistemas físicos

La realización de un adecuado análisis y estudio del comportamiento de un sistema físico de la vida real, requiere el cumplimiento de una serie de tareas previas, que posteriormente permitirán describir dicho comportamiento en términos matemáticos.

Se denomina **sistema físico** a un conjunto de objetos materiales que interactúan entre sí de determinada manera, con la finalidad de cumplir una cierta función. De esta manera podemos definir el siguiente concepto:

> Se denomina ***modelado matemático*** al proceso mediante el cual un problema, tal como aparece en el mundo real, es interpretado en términos de símbolos abstractos. La descripción abstracta, que incluye una formulación matemática, se denomina ***modelo matemático*** del problema original.

En términos generales, un modelo matemático va a poseer una determinada cantidad de *variables dependientes* e *independientes* y un conjunto dado de *ecuaciones*. Las mismas relacionan entre sí a las variables mencionadas y describen de esta manera el comportamiento en el tiempo de las distintas variables que gobiernan el sistema, es decir, el comportamiento *dinámico* del sistema físico real en estudio.

Los modelos matemáticos como idealizaciones de estructuras o problemas reales, proveen información aproximada del verdadero comportamiento del sistema físico real. A pesar de dicha limitación, la información adquirida a partir del análisis del modelo matemático debe ser suficiente para una adecuada comprensión del comportamiento dinámico del sistema físico estudiado, incluyendo requerimientos de diseño y seguridad.

Es por esto que el modelo matemático tiene que contemplar el suficiente detalle para representar la situación real con el menor número de variables posibles, pero a su vez debe ser lo suficientemente simple en su planteo matemático, para permitir su adecuado y práctico análisis.

El proceso de obtención de modelos matemáticos para el análisis y estudio de sistemas físicos reales, requiere que en primer lugar se identifique claramente cuál es el fenómeno del mundo real que se desea conocer o estudiar. A continuación, se seleccionan adecuadamente los objetos materiales que resulten representativos del problema y se determinan las relaciones entre ellos y su forma de interacción.

De esta manera se ha hallado el denominado **modelo físico** o **modelo del estado del arte**. Este es una simplificación o idealización del sistema físico real a partir del cual se realiza la formulación correspondiente para la obtención del **modelo matemático**.

La etapa siguiente en el proceso de resolución de un problema de ingeniería es la resolución del modelo matemático obtenido. La misma se puede realizar por medio de la utilización de procedimientos *analíticos* o procedimientos *numéricos*, los cuales tienen sus ventajas y desventajas en cada caso particular.

Los modelos analíticos son aquellos que pueden escribirse con lápiz y papel, derivando en una solución explícita cerrada. La modelación analítica se efectúa en la mayoría de los casos a partir de la utilización de funciones analíticas. Usualmente se asume que las funciones que encontramos pueden expandirse en series de potencias.

La potencia de los modelos analíticos, radica en que en aquellos casos en donde son aplicables, es posible deducir todo aquello que haya que saber del sistema. Ahora bien, el costo de la potencia o poder que poseen los modelos analíticos, lo constituye la aplicación limitada de los mismos. Los problemas o hechos reales son en general muy complicados para ser descriptos por este camino.

Sin embargo, los modelos analíticos son aún importantes en técnicas de aproximación que requieren computadoras. Esto incluye métodos numéricos que pueden usar porciones de soluciones analíticas para hacer más efectivos los pasos numéricos.

Cuando se estudian los distintos métodos numéricos para resolver modelos matemáticos recurrimos a problemas sencillos con solución analítica para chequear los métodos, ventajas, desventajas, correcta implementación, etc. Luego, estos procedimientos numéricos se utilizan en problemas cuya solución analítica no es posible de obtener.

Una vez obtenidos los resultados cuantitativos a partir del proceso de solución y análisis del problema matemático, es necesario realizar una interpretación de los mismos en el contexto del problema físico real que es objeto de estudio.

Esta etapa permite, por medio de la confrontación adecuada de los resultados del modelo con los datos disponibles del problema físico real, detectar posibles inconvenientes o desviaciones y realizar en consecuencia todas aquellas afinaciones que sean necesarias en el modelo.

El proceso descripto en los párrafos precedentes se puede sintetizar y observar en forma esquemática en la Figura 1.1. En la misma se presentan además los diversos tipos de errores que pueden surgir en las distintas etapas del proceso mencionado.

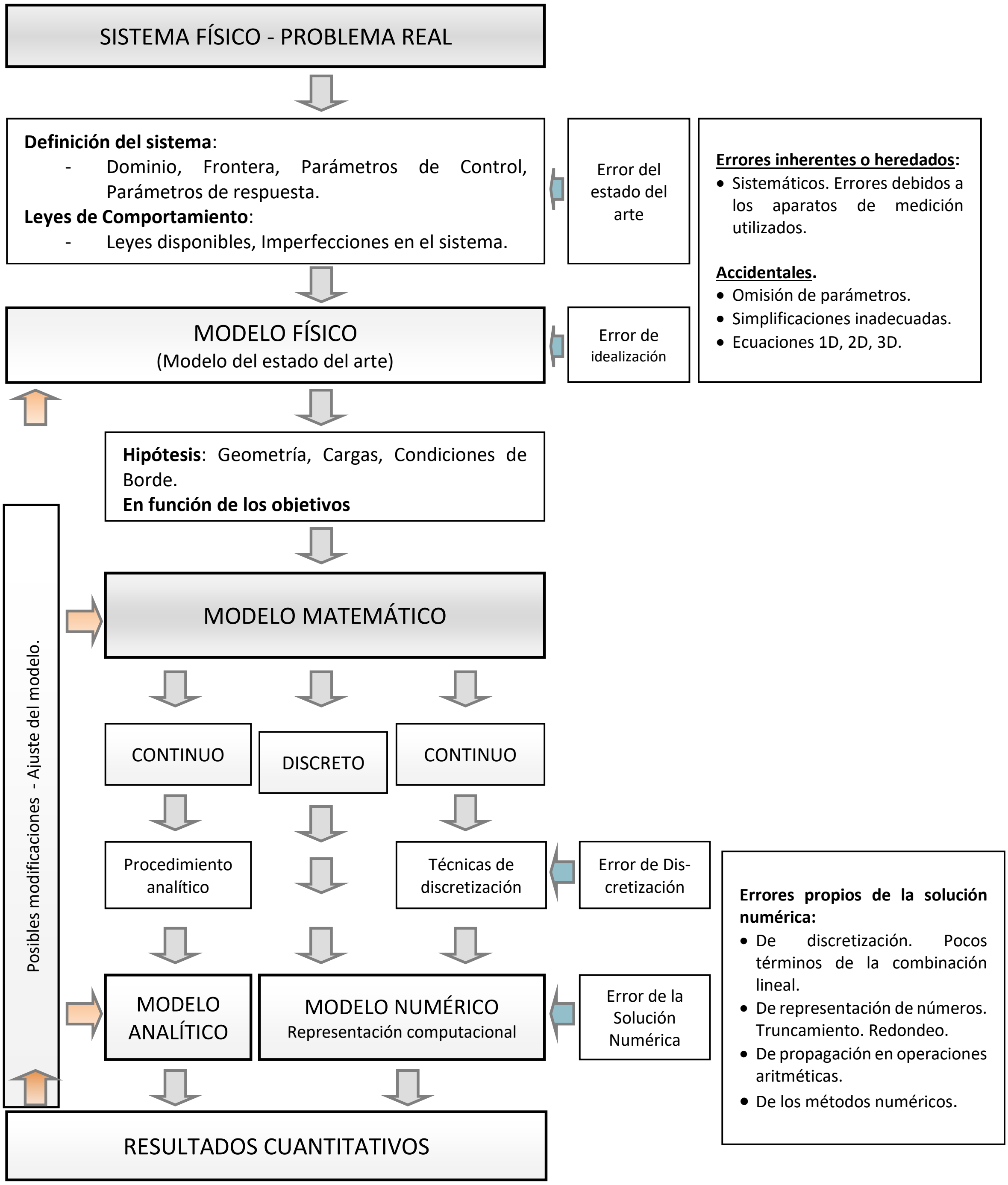


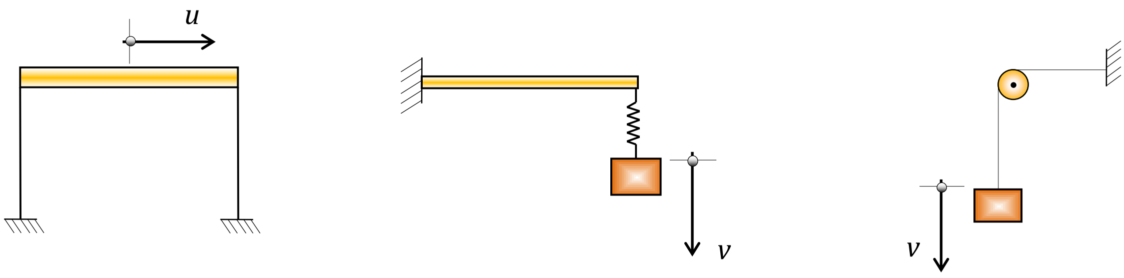
Figura 1.1. Representación esquemática del proceso de modelación matemática.

2. Estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad

En primer lugar, introducimos el siguiente concepto:

Cantidad de **grados de libertad** de un sistema dinámico, es la cantidad de coordenadas independientes necesarias para especificar por completo la configuración o posición de dicho sistema en cualquier instante de tiempo t considerado.

De esta manera, dichas coordenadas describen los movimientos traslacionales o rotacionales de los componentes del sistema estudiado. La Figura 2.1 muestra ejemplos de sistemas dinámicos modelados a partir de la definición de un grado de libertad.



[a] **[b]** **[c]**

Figura 2.1. Estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad.

Para el análisis dinámico, estas estructuras pueden ser modeladas como sistemas de **1 grado de libertad** (1gdl), tal como se esquematiza en la Figura 3.1, en la cual se observan los elementos que definen dicho sistema.

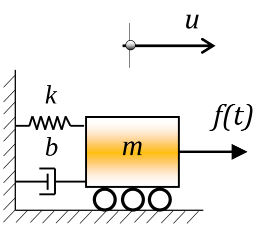


Figura 3.1. Oscilador de un grado de libertad bajo la acción de una fuerza dinámica $F(t)$.

La importancia práctica que poseen los sistemas simples de un grado de libertad, radica en su habilidad para modelar e ilustrar el comportamiento de estructuras de mayor complejidad.

Durante el proceso de modelación matemática de este tipo de estructuras es común en la práctica aceptar las siguientes hipótesis:

- Las masas del sistema están formadas por cuerpos rígidos.
- Se considera a los resortes sin masa.
- Los resortes son elásticos y lineales.

2.1. Ejemplo de aplicación. Modelo matemático de un sistema mecánico vibratorio traslacional con amortiguamiento

En el presente apartado, se desarrollan los diversos pasos necesarios para la obtención del modelo matemático que gobierna el comportamiento de un sistema mecánico vibratorio traslacional de 1 grado de libertad con amortiguamiento. El esquema representativo de un sistema de las características mencionadas, puede observarse en la Figura 4.1. En dicha figura, u es la variable espacial del problema, k representa la constante de rigidez del resorte, b es la constante de amortiguamiento del sistema, m la masa del mismo y $f(t)$ es una fuerza tiempo-dependiente que excita el sistema dinámico. Dicha fuerza puede ser gravitacional, mecánica, eléctrica, magnética o generada por la agitación de la base del sistema, entre otras.

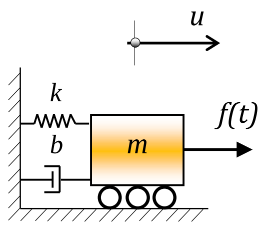


Figura 4.1. Sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad.

En su posición de equilibrio, la masa m se encuentra en reposo y el resorte no presenta ningún estiramiento.

De esta manera, medimos el desplazamiento u de la masa m a partir de su posición de equilibrio. Al desplazar la masa m con respecto a dicha posición, el resorte se estira o se comprime y ejerce una fuerza restitutiva (f_{res}) que se opone al desplazamiento realizado. Para la mayoría de los resortes, en el caso de desplazamientos relativamente pequeños, esta fuerza es proporcional a dicho desplazamiento y en dichas condiciones, la misma estará dada por la Ecuación (1).

$$f_{res} = -k\,u \qquad k\text{: constante de rigidez del resorte } (k>0) \qquad (1)$$

En la práctica, todos los sistemas mecánicos experimentan algún tipo de fricción entre sus elementos constituyentes o con respecto al sistema de referencia. En el caso del denominado amortiguamiento viscoso, la masa está retardada por una fuerza cuya magnitud es proporcional a la velocidad de desplazamiento. Se lo representa por la acción de un amortiguador fluido y su magnitud está dada en este caso por la Ecuación (2).

$$f_{fric} = -b\,\dot{u} \qquad b\text{: coeficiente de amortiguamiento } (b\geq 0) \qquad (2)$$

Existen otros tipos de fuerzas de amortiguamiento aplicables a sistemas mecánicos, tales como el denominado rozamiento seco o de *Coulomb* que no depende de la velocidad de desplazamiento o el amortiguamiento por régimen turbulento en cuyo caso la fuerza retardadora es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

Si representamos el objeto en estudio, indicando la acción de todas las fuerzas involucradas en el problema, obtenemos el denominado ***diagrama de cuerpo libre***, según puede observarse en la Figura 5.1.

Figura 5.1. Diagrama de cuerpo libre del sistema masa-resorte-amortiguador.

En la misma se puede observar el peso del cuerpo y la reacción normal N de la superficie de apoyo, a pesar de que estas fuerzas no intervienen en la ecuación de movimiento para la dirección horizontal.
Aplicando la segunda ley de Newton $\sum f_i = ma$ obtenemos:

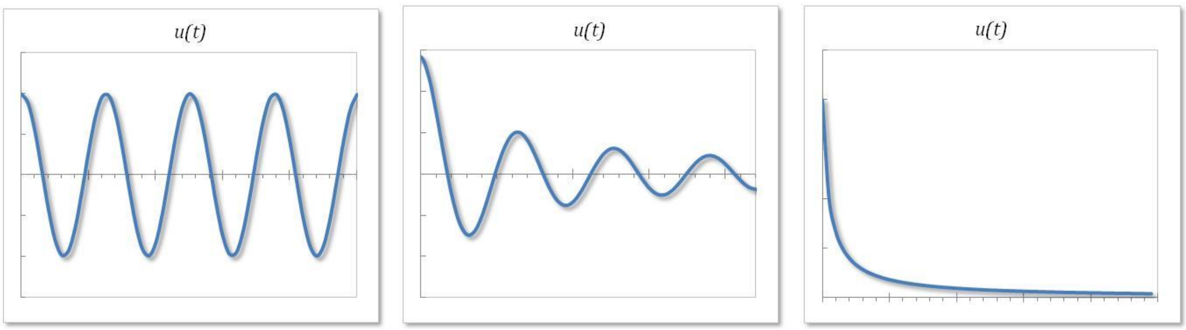
$$f(t) - ku - b\dot{u} = m\ddot{u} \qquad \text{Donde:} \quad \frac{du}{dt} = \dot{u}; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u} \tag{3}$$

$$\boxed{m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = f(t)} \tag{4}$$

La Ecuación (4) constituye el modelo matemático de un sistema mecánico vibratorio traslacional de un grado de libertad con amortiguamiento.

$$\boxed{[\text{inercia}]\ \ddot{\boldsymbol{u}} + [\text{amortiguamiento}]\ \dot{\boldsymbol{u}} + [\text{rigidez}]\ u = \text{Fuerza externa}}$$

Las soluciones de la Ecuación (4) para distintos valores de k, b, m y $f(t)$ cubren una amplia variedad de oscilaciones y respuestas que pueden utilizarse para describir el comportamiento de muchos sistemas en las distintas ramas de la Ingeniería según puede observarse en la Figura 6.1.



Vibración senoidal :
No hay fricción ni fuerza externa

Oscilaciones amortiguadas:
Hay fricción (amortiguamiento).

Movimiento sobreamortiguado.
El amortiguamiento es más intenso, no se produce oscilación.

Figura 6.1. Variedad de oscilaciones para el sistema masa-resorte amortiguado.

3. DIVERSOS ELEMENTOS QUE SE UTILIZAN EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS REALES

Se describen a continuación algunos de los elementos o bloques funcionales más importantes que se utilizan para el desarrollo de diversos modelos de sistemas físicos reales. Algunos de estos elementos fueron presentados en forma sintética en el ejemplo del sistema masa-resorte visto anteriormente. Se describirán en esta sección los que pueden ser utilizados para la modelación de sistemas vibratorios mecánicos, fluídicos, eléctricos y térmicos.

En general cada uno de estos elementos o bloques funcionales presentan distintas características de excitación–respuesta. Por ejemplo, para el caso de sistemas vibratorios mecánicos, las excitaciones se dan en forma de fuerzas o momentos y las respuestas estarán constituidas por desplazamientos, velocidades o aceleraciones de una masa o conjunto de masas.

Clasificaremos los elementos en cuatro grandes grupos de acuerdo a la función que los mismos cumplen:

A: fuentes de energía.
B: elementos de almacenamiento y liberación de energía.
C: elementos de resistencia o disipación de energía.
D: elementos de transformación de energía.

A continuación, se presentan los elementos de estos cuatro grupos para cada uno de los sistemas indicados anteriormente.

A – FUENTES DE ENERGÍA: constituyen la influencia del medio exterior sobre el sistema. Las siguientes son fuentes de energía para los distintos sistemas mencionados.

Sistemas vibratorios mecánicos traslacionales: Fuerzas externas aplicadas y velocidades.

Sistemas vibratorios mecánicos rotacionales: Momentos externos aplicados y velocidades angulares.

Sistemas de fluidos: Presión aplicada en un punto del sistema y caudal.

Sistemas eléctricos: Diferencia de voltaje aplicada en un punto del sistema y flujo de corriente.

Sistemas térmicos: Temperatura aplicada en un punto y flujo de calor.

B - ELEMENTOS DE ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA: son los elementos que tienen la capacidad de almacenar y liberar energía.

Sistemas vibratorios mecánicos traslacionales:

Elementos de Inercia, son los elementos de almacenamiento y liberación de energía cinética en un sistema vibratorio mecánico tanto traslacional como rotacional. Las distintas masas *m* de un sistema de estas características, pueden sufrir movimientos de traslación o de rotación y de esta manera modifican la energía cinética total del sistema.

La Ecuación (5) nos brinda en base a consideraciones de la cantidad de movimiento lineal del sistema la relación entre masas, fuerzas y aceleraciones para el caso del movimiento de traslación:

$$f = \frac{d}{dt} m\dot{u} \tag{5}$$

La cual para una masa *m* independiente del tiempo nos permite escribir:

$$f = m\ddot{u} \tag{6}$$

En este caso la energía cinética será:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{u}^2 \tag{7}$$

Elementos de rigidez, es un elemento de almacenamiento y liberación de energía potencial en un sistema vibratorio mecánico.

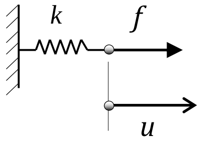


Figura 7.1. Resorte. Elemento de rigidez.

Si consideramos un resorte con extremo fijo y otro extremo sujeto a la acción de una fuerza *f*, según se observa en la Figura 7.1., el resorte sufre por acción de esta fuerza una variación de longitud a partir de su longitud inicial de equilibrio. El estiramiento o acortamiento del resorte provoca la aparición de una fuerza de restitución que trata de restablecer el elemento a su longitud inicial. En el caso de resortes lineales y traslacionales, la relación entre estas magnitudes está dada por la Ecuación (8):

$$F_{res} = -k\,u \qquad k\text{: constante de rigidez del resorte } (k>0) \tag{8}$$

La energía potencial almacenada por el sistema será:

$$V = \int_0^u f.du = \int_0^u ku.du = \frac{1}{2}ku^2 \tag{9}$$

Sistemas vibratorios mecánicos rotacionales:

Para el caso de masas sometidas a movimiento de rotación con velocidad angular $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, a partir del principio de cantidad de movimiento angular obtenemos:

$$M = J\ddot{\theta} \tag{10}$$

Donde J es el momento de inercia de la masa y M es el momento actuante con respecto al centroide o a un punto de rotación. La propiedad de inercia en este caso se denomina inercia rotacional.

En este caso la energía cinética del sistema será:

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \tag{11}$$

En el caso de resortes de torsión obtenemos las siguientes expresiones:

$$\tau_{res} = -k_t\,\theta \qquad k_t\text{: constante de rigidez a torsión del resorte } (k>0) \tag{12}$$

La energía potencial almacenada por el sistema será:

$$V = \int_0^\theta \tau.d\theta = \int_0^\theta k_t\,\theta.d\theta = \frac{1}{2}k_t\theta^2 \tag{13}$$

Nota: En algunas aplicaciones en ingeniería, por ejemplo los muelles de suspensión de automóviles, se utilizan elementos de rigidez no lineales.
En estos elementos, la fuerza de restitución es una función no lineal de la variable de desplazamiento.

Sistemas de fluidos:

Una masa de fluido que se desplaza con cierta velocidad posee una determinada cantidad de energía cinética, por lo cual constituye el elemento de inercia en este tipo de sistemas. Un tanque o reserva de fluido que es capaz de generar una diferencia de nivel entre dos puntos del sistema, constituye un elemento de almacenamiento y liberación de energía potencial.

Sistemas eléctricos:

En este tipo de sistemas, los elementos capaces de almacenar energía son las inductacias, caracterizadas por la inductancia eléctrica L y los condensadores o capacitores, caracterizados por su capacitancia C.

Sistemas térmicos:

Los elementos que almacenan energía en sistemas térmicos, son los capacitores térmicos, los cuales están en condiciones de almacenar calor y se caracterizan por su masa M, su calor específico cp y sus condiciones de temperatura T.

C - ELEMENTOS DE RESISTENCIA O DISIPACIÓN: son los elementos que provocan pérdidas de energía hacia el exterior del sistema estudiado.

Sistemas vibratorios mecánicos traslacionales:

Estos elementos no se encuentran en condiciones de almacenar ni liberar energía potencial, además no poseen propiedades de inercia por lo cual son elementos disipativos o no conservativos. En general, los 4 tipos de elementos de amortiguamiento más comunes son: amortiguamiento ***viscoso***, de ***Coulomb*** o fricción seca, ***material*** o histerético y amortiguamiento de ***fluidos***. Normalmente la fuerza de amortiguamiento se expresa como una función de la velocidad de desplazamiento.

Para el caso del amortiguamiento viscoso, podemos escribir según lo visto anteriormente en la Ecuación (14):

$$f_{fric} = -b\,\dot{u} \qquad b\text{: coeficiente de amortiguamiento } (b \geq 0) \qquad (14)$$

Un amortiguador representado por la Ecuación (14), se denomina amortiguador viscoso lineal. En este caso, la energía disipada por el elemento será:

$$E_D = \int f du = \int f\dot{u}dt = \int b\dot{u}^2 dt = b\int \dot{u}^2 dt \qquad (15)$$

Sistemas vibratorios mecánicos rotacionales:

Las pérdidas se producen por fricción y son una función de la velocidad angular relativa entre las superficies rotantes.

$$\tau_{fric} = -l\,\dot{\theta} \qquad l\text{: coeficiente de amortiguamiento } (l \geq 0) \qquad (16)$$

Sistemas de fluidos:

Son los elementos que producen pérdidas de presión en el sistema fluido, por ejemplo, se puede mencionar accesorios y rugosidad de cañerías.

Sistemas eléctricos:

Elementos que provocan una caída de potencial en el sistema como las resistencias eléctricas, las cuales se caracterizan por su resistencia R.

Sistemas térmicos:

En este caso las resistencias térmicas producen la transferencia de calor en el sistema, tanto entre dos elementos del mismo sistema como hacia el exterior. Si la transferencia es hacia el medio exterior, el elemento está provocando una disipación o pérdida de energía del sistema. Las resistencias térmicas pueden transferir calor por conducción, radiación o convección.

D - ELEMENTOS DE TRANSFORMACIÓN DE ENERGÍA: son aquellos que transforman energía vinculando dos o más elementos o puntos dentro del sistema.

Sistemas vibratorios mecánicos traslacionales:

Un elemento como la palanca, posee fuerzas y velocidades diferentes en cada uno de sus extremos, las cuales dependen de las respectivas longitudes de cada tramo de la palanca.

Sistemas vibratorios mecánicos rotacionales:

Elementos como un juego de engranajes, reciben un momento y velocidad angular en uno de sus extremos y entregan distintos momentos y velocidad angular en su otro extremo.

Sistemas de fluidos:

Un pistón de sistemas hidráulicos transforma la presión recibida en fuerzas y velocidades en función de sus características geométricas.

Sistemas eléctricos:

Los transformadores eléctricos presentan una corriente y caída de tensión en uno de sus extremos, los cuales se ven modificados en el otro extremo del mismo.

Sistemas térmicos:

Corresponde al caso de las resistencias térmicas que transfieren calor entre dos elementos del mismo sistema.

Nota: Se han indicado los elementos básicos de los sistemas mecánicos (traslacionales y rotacionales), eléctricos, térmicos y de fluidos. Sin embargo, en muchos sistemas en Ingeniería, aparecen estos elementos combinados. Por ejemplo, en un motor eléctrico intervienen tanto elementos eléctricos como mecánicos.

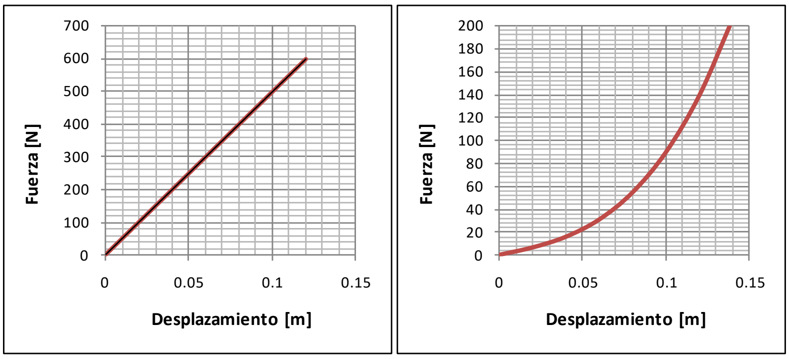
LINEALIDAD

Se ha supuesto que la relación entrada-salida (excitación-respuesta) para cada elemento de los sistemas descriptos anteriormente es ***lineal***. En el caso del resorte:

$f_{res} = -k\,u$ $\qquad$ k: constante de rigidez del resorte (k>0)

Esta relación lineal significa que si una entrada o excitación f_1, produce una salida o respuesta u_1 y la entrada f_2 produce una salida u_2, entonces una entrada f_1+f_2 conduce a una salida u_1+u_2. Este es el denominado ***principio de superposición*** y es una condición necesaria para que un sistema sea considerado lineal. Otra condición es que, si una entrada f_1 produce una salida u_1, entonces una entrada αf_1, donde α es una constante, producirá una salida αu_1.

Los resortes reales, así como también otros elementos reales, no son perfectamente lineales. Sin embargo, con frecuencia existe un intervalo de operación en el que se puede suponer la linealidad, como puede observarse en la Figura 8.1.



[a] Resorte ideal **[b] Resorte no lineal real**

Figura 8.1. Diagrama Fuerza-Desplazamiento para resortes lineales y no lineales.

En el caso de resortes no lineales, la relación entre la entrada y salida se expresa como una función no lineal, como por ejemplo: $f_{res} = ku {+} \propto ku^3$

En algunos elementos de estos sistemas para los cuales la relación es no lineal, es posible obtener una relación lineal al trabajar con la línea recta que corresponde a la pendiente de la curva en el punto Q de funcionamiento (operación), tal como muestra la Figura 9.1.

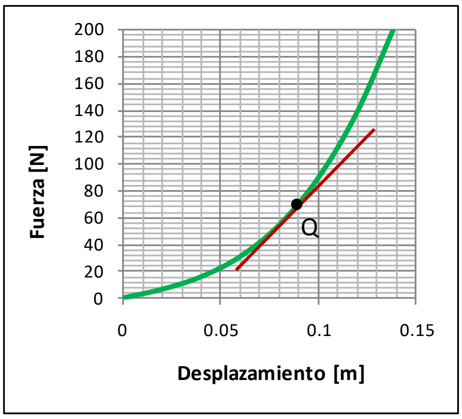


Figura 9.1. Diagrama Fuerza-Desplazamiento para resorte no lineal. Valor de *k* tangente en el punto Q

4. FORMULACION LAGRANGIANA DE LA DINÁMICA DE UN SISTEMA FÍSICO

El estudio dinámico de un sistema físico a partir de la formulación de *Newton*, se basa en el análisis y balance de fuerzas y momentos actuantes sobre los distintos elementos constituyentes de dicho sistema. A diferencia del enfoque presentado anteriormente, es posible realizar un análisis del mismo, en base a consideraciones energéticas, es decir realizar un balance de energía del sistema.

El estudio de un sistema a partir de las consideraciones mencionadas, constituye un método conocido como ***formulación dinámica lagrangiana*** del sistema.

El mismo provee los medios para derivar las ecuaciones de movimiento a partir de una función escalar denominada ***lagrangiano***, que se puede definir como la diferencia existente entre la ***energía cinética*** y la ***energía potencial*** de un determinado sistema físico.

De esta manera y de acuerdo a las consideraciones mencionadas, las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema estudiado, se obtienen a partir del planteo de la condición de estacionario para el funcional de Hamilton, el cual se define de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)\, dt \qquad (17)$$

Siendo q_i, la coordenada generalizada analizada y L el *lagrangiano* dado por:

$$\mathrm{L} = \mathrm{T} - \pi \qquad (18)$$

donde T es la energía cinética y π la energía potencial total del sistema analizado. La condición de estacionario del funcional de Hamilton, $\delta H=0$ deriva en las siguientes ecuaciones de equilibrio dinámico, denominadas ***ecuaciones de Lagrange***, para sistemas conservativos, es decir, cuando el campo de fuerzas actuantes es conservativo. El punto superior indica derivación de dicha variable con respecto al tiempo

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0} \qquad (19)$$

Un ejemplo de aplicación del enfoque presentado, lo constituye el sistema dinámico de masas discretas que puede observarse en la Figura 10.1:

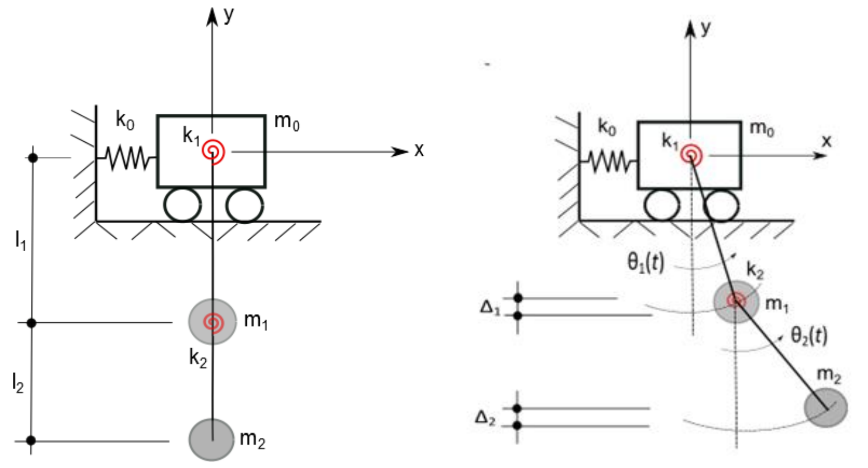


Figura 10.1. Modelo físico y descripción cinemática de un sistema dinámico acoplado de tres grados de libertad.

El sistema queda caracterizado por la existencia de tres coordenadas generalizadas dadas por el desplazamiento horizontal del dispositivo móvil $u(t)$ y la rotación de los péndulos con respecto a la posición de reposo $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, respectivamente. Los parámetros físicos de dicho sistema, se encuentran dados por los valores de las masas que lo componen, m_0, m_1, m_2, por las rigideces del mismo, k_0, k_1, k_2 y por las longitudes correspondientes de los péndulos, l_1 y l_2.

A su vez, los parámetros de control, quedan definidos por las acciones externas horizontales, $F_0(t)$, $F_1(t)$ y $F_2(t)$ aplicadas en correspondencia con el centro de gravedad de cada una de las masas del sistema. De esta manera el funcional de Hamilton, estará dado por la siguiente expresión:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} L(u, \theta_1, \theta_2, \dot{u}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) dt \tag{20}$$

A partir de la consideración de las ecuaciones (18) y (19) se derivan las siguientes ecuaciones de equilibrio dinámico para sistemas conservativos, en la que el punto superior indica derivación de dicha variable con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) = 0 \tag{22}$$

En el caso presentado, la expresión del Lagrangiano está dada por la ecuación (23):

$$L = \pi(u, \theta_1, \theta_2) - T_0(\dot{u}) - T_1\left(\dot{u}, \dot{\theta}_1, \theta_1\right) - T_2(\dot{u}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) \tag{23}$$

Donde:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{u}^2 \tag{24}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle \tag{25}$$

En dichas expresiones, $\boldsymbol{v}_1$ es el vector velocidad asociado a la masa m_1. Teniendo en cuenta además que $\boldsymbol{r}_1$ es el vector posición de la masa m_1, es posible obtener:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} u + l_1 sen\theta_1 \\ l_1 - l_1 cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + \dot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 l_1 sen\theta_1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

De esta manera la energía cinética T_1 resulta:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{u}^2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + 2\dot{u}\dot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 \right] \tag{28}$$

Por otra parte, la energía cinética T_2 está dada por:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle \tag{29}$$

Considerando la expresión correspondiente al vector posición de la masa m_2, es decir $\boldsymbol{r}_2$, el vector velocidad $\boldsymbol{v}_2$ resulta:

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u + l_1 sen\theta_1 + l_2 sen\theta_2 \\ (l_1 + l_2) - l_1 cos\theta_1 - l_2 cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot{u} + \dot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 cos\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 l_1 sen\theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 sen\theta_2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

La energía cinética T_2, resulta entonces:

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{u}^2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \right) + m_2 \left(\dot{u}\dot{\theta}_1 l_1 cos\theta_1 \right) + m_2 \left(\dot{u}\dot{\theta}_2 l_2 cos\theta_2 \right) \\ + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 (cos\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) \end{aligned} \tag{32}$$

Por otra parte, la energía potencial total π, está dada por la suma de las contribuciones de las energías potenciales asociadas a los resortes del sistema, la energía potencial gravitatoria y la correspondiente a las acciones externas:

$$\begin{aligned} \pi = \frac{1}{2} k_0 u^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 [\theta_2 - \theta_1]^2 + (m_1 + m_2) g l_1 (1 - cos\theta_1) \\ + m_2 g l_2 (1 - cos\theta_2) - F_0 u - F_1 (u + l_1 sen\theta_1) \\ - F_2 (u + l_1 sen\theta_1 + l_2 sen\theta_2) \end{aligned} \tag{33}$$

Considerando que para pequeños valores de θ_i, se cumple que $sen\theta_i \cong \theta_i$ y $cos\theta_i \cong 1$, entonces las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$k_0u(t) - (F_0 + F_1 + F_2) + m_0\ddot{u} + m_1\ddot{u} + m_1l_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ddot{u} + m_2l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 = 0 \tag{34}$$

$$[k_1 + k_2 + (m_1 + m_2)gl_1]\theta_1 - k_2\theta_2 - (F_1 + F_2)l_1 + m_1{l_1}^2\ddot{\theta}_1 + m_1l_1\ddot{u} + m_2{l_1}^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1\ddot{u} + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 = 0 \tag{35}$$

$$(k_2 + m_2gl_2)\theta_2 - k_2\theta_1 - F_2l_2 + m_2{l_2}^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2\ddot{u} + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 = 0 \tag{36}$$

En forma matricial, las ecuaciones de Lagrange de equilibrio dinámico se expresan como sigue:

$$\boldsymbol{M\ddot{U}} + \boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}(t) \tag{37}$$

Siendo $\boldsymbol{M}$, la matriz de masas dada por:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 + m_2)l_1 & m_2l_2 \\ (m_1 + m_2)l_1 & (m_1 + m_2){l_1}^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_2 & m_2l_1l_2 & m_2{l_2}^2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

y $\boldsymbol{K}$ la matriz de rigidez:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 + (m_1 + m_2)gl_1 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + m_2gl_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

En tanto que los vectores asociados a los desplazamientos y rotaciones en las direcciones de los grados de libertad y sus respectivas aceleraciones están dados por:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\ddot{U}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} \tag{40}$$

El vector de acciones externas presentes en el sistema queda expresado como sigue:

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) \\ (F_1(t) + F_2(t))l_1 \\ F_2(t)l_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

La figura 11.1, permite observar la evolución temporal de las variables que gobiernan el sistema presentado para el caso de vibraciones libres en una combinación de los modos naturales de vibración del sistema.

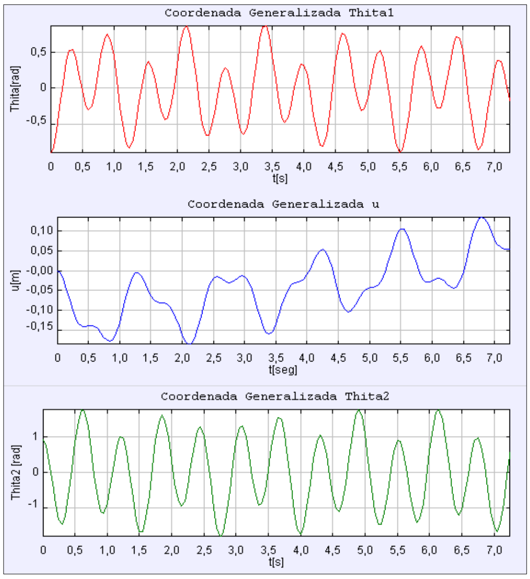


Figura 11.1. Evolución del sistema para una combinación de modos normales de vibración del mismo.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES - MODELOS MATEMÁTICOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES

5.1. ECUACIONES DIFERENCIALES – CONTEXTO HISTÓRICO

Isaac Newton
(1642-1727).

G. Leibniz (1646-1716), alrededor del año 1676 y en un sentido restringido, utilizó por primera vez los términos ***aequatio differentialis*** para referirse a una relación matemática en la que intervenían los diferenciales de dos variables x e y. Con diversos y muy valiosos aportes, *G. Leibniz* e *I. Newton* (1642-1727), creadores del cálculo infinitesimal, y *Leonhard Euler* (1707-1783), fueron los principales impulsores del desarrollo de las ecuaciones diferenciales y los que llevaron adelante los primeros métodos de resolución de las mismas.

Hacia finales del siglo XVII, se registran los primeros intentos tendientes a modelar problemas físicos y resolverlos mediante la utilización de ecuaciones diferenciales, por lo que durante el transcurso del siglo XVIII, se produce el crecimiento y desarrollo de lo que se convertiría en una nueva e independiente rama de la matemática.

En 1690, *Jacques Bernoulli* (1654-1705), plantea un problema que consiste en hallar la ecuación del lugar geométrico que adopta una cuerda inextensible, colgada bajo la acción de su propio peso de dos puntos extremos. Soluciones independientes a este problema, mediante la utilización de ecuaciones diferenciales son presentadas en 1691 por G. *Leibniz*, C. *Huygens* (1629-1695) y *Jean Bernoulli* (1667-1748).

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), trabajó alrededor del año 1747 sobre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modelan el estudio de cuerdas vibrantes y la propagación de ondas. Estos fenómenos fueron investigados además por *J.L. Lagrange* (1736-1813), *L. Euler* y *Daniel Bernoulli* (1700-1792).

J. Fourier (1768-1830) sentó las bases del estudio del flujo de calor, deduciendo las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan estos fenómenos en el año 1822, descubriendo además las series que llevan su nombre.

G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859), realizó variados trabajos sobre problemas de valores en la frontera y formas integrales, para lo cual introdujo la utilización de los desarrollos en series de Fourier. Una gran cantidad de matemáticos y científicos contribuyeron a lo largo de la historia al desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, logrando en todos los casos avances fundamentales en el conocimiento de las mismas y en la aplicación que actualmente poseen en la modelación de fenómenos físicos.

5.2. MOTIVACIÓN

Las ecuaciones diferenciales poseen una importancia fundamental en las ciencias en general y en la Ingeniería en particular, ya que permiten describir en términos matemáticos fenómenos de diversa índole, que es posible encontrar en la vida real, constituyendo como se describió en los párrafos precedentes, los denominados ***modelos matemáticos*** del fenómeno en estudio.

¿Qué es una ecuación diferencial?

Con el objeto de abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales, es necesario proceder a la definición precisa de las mismas:

> Una identidad matemática que relaciona una o más funciones incógnita con una o más de sus derivadas, con respecto a una o más variables independientes, se denomina ***ecuación diferencial***.

Hallar la solución de una ecuación diferencial, implica encontrar una *función* o *familia de funciones* desconocidas que satisfacen la ecuación en algún intervalo determinado de números reales. Es posible clasificar a las ecuaciones diferenciales de acuerdo a tres criterios: ***tipo***, ***orden*** y ***linealidad***. En la Figura 12.1 podemos observar una clasificación general de las mismas.

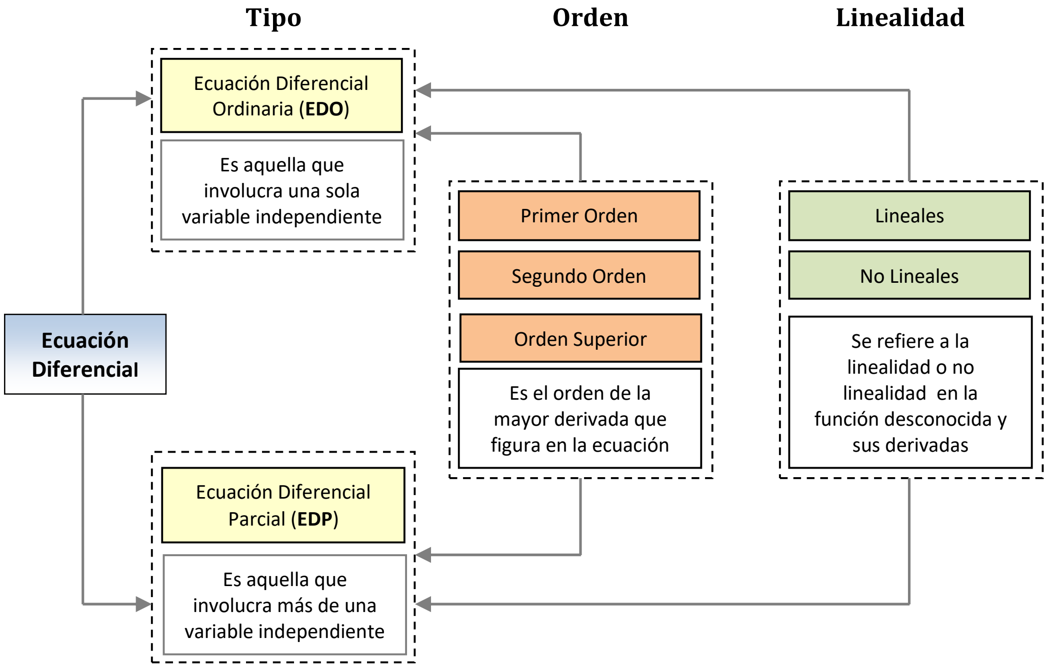


Figura 12.1 Clasificación general de las ecuaciones diferenciales

A continuación, la Tabla 1.1 permite observar algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales con su respectiva clasificación según los criterios mencionados.

Ecuación	Clasificación
$y''' + 4y = e^{-x}\, sen\, x$	EDO lineal de 3er orden
$\ddot{y}\,.\,y + \dot{y} = 0$	EDO no lineal de 2do orden
$\ddot{y} + \sqrt{y} = 0$	EDO no lineal de 2do orden
$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f(t)$	EDO lineal de 2do orden
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \beta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	EDP lineal de 2do orden

Tabla 1.1. Ejemplos de clasificación de ecuaciones diferenciales.

5.3. ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL DE ORDEN *n*

Es aquella que se puede escribir en la forma:

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{43}$$

Donde $a_n(t)$, …. , $a_0(t)$ y $f(t)$ sólo dependen de t, no de y.
Cuando a_n, …. , a_0 son constantes, decimos que la ecuación (15) tiene ***coeficientes constantes***.

Si $f(t) = 0$, se dice que la ecuación (43) es ***homogénea***.

Si $f(t) \neq 0$, se dice que la ecuación (43) es ***no homogénea***.

Suponemos que $a_n(t)$, …. , $a_0(t)$ y $f(t)$ son continuas en un intervalo I y $a_n(t) \neq 0$ en I. Entonces podemos dividir la ecuación (43) por $a_n(t)$ y escribir la ***forma canónica***:

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t)y(t) = g(t)} \tag{44}$$

Las EDO lineales juegan un papel muy importante en las matemáticas de Ingeniería. Por ejemplo, en relación con las vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos y redes, etc.

5.4. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL DE ORDEN n.

Se dice que una función $y = y(t)$ es una solución de una EDO (lineal o no lineal) de n-ésimo orden, en un intervalo I, si $y(t)$ está definida y es derivable n veces en I, y es tal que si se sustituye en la ecuación, así como sus derivadas, la ecuación se transforma en una identidad.

La ***solución general*** de una EDO de orden n contendrá n constantes incógnitas. Cuando estas constantes son determinadas por las ***condiciones de borde*** (CB) se obtiene una ***solución particular*** de esa ecuación. De esta manera podremos encontrar:

- ***Problemas de Valores Iniciales*** (PVI): Cuando son datos los valores iniciales de n funciones independientes, de la variable y sus derivadas.

  $$y(t_0);\ \dot{y}(t_0); \ldots ;\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\Big|_{t_0}$$

- ***Problema de valores de contorno*** (PVC): Cuando son datos las condiciones de borde al inicio y al final de un intervalo.

5.5. OPERADOR DIFERENCIAL LINEAL [L]

Es un operador de la forma:

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t)y(t) \qquad (45)$$

Cada función $y(t)$, n veces derivable genera una nueva función $L[y]$. Con esta notación, la ecuación (44) resulta:

$$\boxed{L[y](t) = g(t)} \qquad (46)$$

y la ecuación homogénea asociada es:

$$\boxed{L[y](t) = 0} \qquad (47)$$

$L[y]$ significa una ***transformación*** que asocia a cada elemento de su dominio un único elemento en su imagen. Llamamos operadores a tales transformaciones, y como L implica derivación, decimos que L es un ***operador diferencial***.

Ejemplo de aplicación:

$L[y] = \ddot{y} + p\dot{y} + qy$
Si $p(t) = t$; $q(t) = t-2$; para $y_1(t) = t^2$ resulta:
$L[y_1(t)] = 2 + t(2t) + (t-2)t^2 = t^3 + 2$

Es decir, L asocia a la función t^2, la función $t^3 + 2$

***L* es un operador lineal**.

Es decir:

(i)	$L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$	
(ii)	$L[ky] = k\,L[y]$	(k = *constante*)

Estas condiciones se pueden abreviar diciendo que L es un operador que preserva las ***combinaciones lineales***. Como consecuencia de esta linealidad, si y_1, y_2, y_3, …, y_n son soluciones de la ***EDO lineal homogénea*** $L[y](t) = 0$, entonces, cualquier combinación lineal (C.L.) también es solución.

Demostración:
Sea $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ una C.L. de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la EDO $L[y](t) = 0$.

Entonces, $L[c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n] = c_1\,L[y_1] + c_2\,L[y_2] + \ldots + c_n\,L[y_n] = 0$

Es decir, $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ es también solución de $L[y](t) = 0$

Existencia y Unicidad:
Teorema 1: Sean $p_1(t)$, …., $p_n(t)$ y $g(t)$ funciones continuas en un intervalo (a, b) que contiene al punto t_0. Entonces, para cualquier elección de los puntos iniciales $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ existe una única solución $y(t)$ en todo el intervalo (a, b) del problema de valores iniciales:

$$\boxed{L[y](t) = g(t)} \tag{48}$$

$$y(t_0) = \gamma_0\;;\; \dot{y}(t_0) = \gamma_1\;;\ldots;\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\Big|_{t_0} = \gamma_{n-1} \tag{49}$$

Este resultado permite demostrar que toda solución de $L[y](t) = 0$, se puede representar como:

$$\boxed{c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n} \tag{50}$$

Eligiendo de manera adecuada las constantes c_1, c_2, ….., c_n, siempre que las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sean tales que:

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \ldots\ldots & y_n(t_0) \\ \dot{y}_1(t_0) & \dot{y}_2(t_0) & \ldots\ldots & \dot{y}_n(t_0) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dt^{n-1}}\Big|_{t_0} & \frac{d^{n-1}y_2}{dt^{n-1}}\Big|_{t_0} & \ldots\ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dt^{n-1}}\Big|_{t_0} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{51}$$

Donde t_0 es un número fijo en (a, b). Escribimos la Ecuación (23) como:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t_0) \neq 0 \qquad (52)$$

La ecuación (52) se lee "Wronskiano de y_1, y_2,..., y_n en t_0 es no nulo". El Wronskiano de soluciones es idénticamente nulo o nunca se anula en (a, b).

Representación de soluciones de EDO lineales homogéneas de orden *n*:

Teorema 2: Sean y_1, ..., y_n n soluciones en el intervalo (a, b) de:

$$L[y](t) = 0 \qquad (53)$$

Si en cierto punto t_0 en (a, b) estas soluciones satisfacen

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t_0) \neq 0 \qquad (54)$$

Entonces, toda solución de (53) en (a, b) se puede expresar como:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) \qquad (55)$$

donde c_1,..., c_n son constantes.

Un conjunto $\{y_1,\ldots, y_n\}$ que satisface la Ecuación (54) para algún t_0 en el intervalo (a, b) es un ***conjunto fundamental de soluciones*** para la Ecuación (53) en el intervalo (a, b).

La combinación lineal de y_1,...., y_n en (55), escrita con constantes arbitrarias c_1,...., c_n , se conoce como una ***solución general*** de la Ecuación (53).

La relación entre la independencia lineal y los conjuntos fundamentales de soluciones se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 3:

Si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ son n soluciones de: $L[y] = 0$ en el intervalo (a, b), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es un ***conjunto fundamental de soluciones*** en el intervalo (a, b).

(ii) $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es un ***conjunto linealmente independiente*** en el intervalo (a, b).

(iii) $W[y_1,\ldots, y_n](t)$ nunca se anula en el intervalo (a, b).

Recordamos que m funciones g_1,....., g_m son ***linealmente dependientes*** (L.D) en un intervalo I, si existen constantes k_1,...., k_m, no todas nulas, tales que:

$$k_1 g_1 + k_2 g_2 + \ldots + k_m g_m = 0$$

para toda t en I.

Si $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$, las funciones $g_1, \ldots, g_m$ son L.I.

Los siguientes conjuntos constan de funciones que son L.I., en cualquier intervalo abierto (a, b):

- $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$
- $\{1, \cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t, \ldots, \cos nt, \operatorname{sen} nt\}$
- $\{e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \ldots, e^{\alpha_n t}\}$ donde α_i son constantes distintas.

Representación de soluciones de EDO lineales NO homogéneas de orden *n*:

Teorema 4:

Sea y_P una solución particular de la EDO lineal NO homogénea:

$$L[y](t) = g(t) \tag{56}$$

en el intervalo (a, b). Sea $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un ***conjunto fundamental de soluciones*** para la EDO lineal homogénea correspondiente:

$$L[y](t) = 0 \tag{57}$$

Entonces, toda solución de (56) en el intervalo (a, b), se puede expresar en la forma:

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t)} \tag{58}$$

y se denomina ***solución general*** de la Ecuación (56).

Demostración:
Sea $\varphi(t)$ una solución de la Ecuación (56). Entonces:

$$\boxed{L[\varphi](t) = g(t)}$$

Siendo y_p una solución particular de (56):
$L[y_p](t) = g(t)$

Por lo tanto:
$L[\varphi](t) - L[y_p](t) = 0$

Por ser L un operador diferencial lineal:

$$\boxed{L[\varphi - y_p](t) = 0}$$

Es decir $\varphi - y_p$ es solución de la EDO lineal homogénea. Por lo tanto puede escribirse como C.L. de $\{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$\varphi - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

para constantes adecuadas $c_1, \ldots, c_n$. Esta última ecuación es equivalente a la Ecuación (58) con $\varphi(t)$ en lugar de $y(t)$, con lo que el teorema queda demostrado.

Suele escribirse:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

donde $y_h(t)$ es la solución de la EDO lineal homogénea correspondiente.

5.6. EDO LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una técnica importante para resolver EDO es proponer la forma de una solución, sustituirla en la EDO, y analizar si los parámetros libres pueden ser ajustados para que la solución "funcione".

Debido a que la solución de una EDO es única en tanto que las funciones que la definen son razonablemente suaves y acotadas, si uno encuentra una solución, entonces ésta es 'LA' solución.

Consideremos la EDO lineal homogénea de orden n:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n}(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt}(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad (59)$$

Donde $a_n (\neq 0), \ldots, a_0$ son constantes reales.

Como las funciones constantes son continuas en todas partes, la Ecuación (59) tiene soluciones definidas para todo t.

Si podemos hallar n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, linealmente independientes de la Ecuación (59), entonces podemos expresar una solución general de la forma:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) \qquad (60)$$

Con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes arbitrarias.

Veamos qué sucede con una función de la forma:

$$y = e^{rt} \qquad (61)$$

La Ecuación (59) se puede escribir en la forma de operador diferencial:

$$L[y](t) = 0 \qquad (62)$$

Sustituyendo (61) en (62) resulta:

$$L[e^{rt}](t) = a_n r^n e^{rt} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rt} + \cdots + a_0 e^{rt}$$

$$L[e^{rt}](t) = e^{rt}[a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0] = e^{rt}P(r)$$

Entonces, $y = e^{rt}$ es una solución de la Ecuación (62), siempre que r sea una raíz de la ***ecuación auxiliar*** o ***ecuación característica***:

$$\boxed{P(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0} \quad (63)$$

La ecuación característica tiene n raíces que pueden ser reales o complejas. No existen fórmulas para determinar los ceros de un polinomio arbitrario de grado mayor que 4. Cuando no se puede determinar con exactitud un cero, se pueden utilizar algoritmos numéricos.

5.7. EDO LINEAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN (n=2) CON COEFICIENTES CONSTANTES

La Ecuación (59) resulta:

$$\boxed{a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0} \quad (64)$$

Donde $a(\neq 0)$, b y c son constantes reales.

Este es el tipo de ecuación que aparece para el sistema masa-resorte-amortiguador cuando no hay fuerzas externas.

Si podemos hallar 2 soluciones linealmente independientes para la Ecuación (59), y_1 e y_2, entonces podemos expresar una solución general de la forma:

$$\boxed{y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)} \quad (65)$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Vemos que $y = e^{rt}$ en (64) conduce a:

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = e^{rt}[ar^2 + br + c] = e^{rt}\,P(r) = 0$$

Entonces, $y = e^{rt}$ es una solución de la Ecuación (64), siempre que r sea una raíz de la ecuación característica asociada a la EDO (64):

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0} \quad (66)$$

Las raíces de esta ecuación característica son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \; r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (67)$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces r_1 y r_2 son reales e iguales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces r_1 y r_2 son números complejos conjugados.

Raíces reales distintas

Si la ecuación característica tiene raíces reales distintas r_1 y r_2, entonces:
$e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ son soluciones linealmente independientes de (64).
Por lo tanto, una solución general de (64) es la siguiente:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}} \qquad (68)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Observación:
Aseguramos que $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$ son L.I. evaluando:

$$W[y_1, y_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0 \qquad \text{por ser } r_1 \neq r_2$$

$\boxed{\text{Si } r_1 = r_2 = r}$ sólo tenemos una solución no trivial $y_1 = e^{rt}$. Las funciones $y_2 = te^{rt}$ e $y_1 = e^{rt}$ son linealmente independientes.

$$W[y_1, y_2](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (\neq 0)$$

Raíces repetidas

Si la ecuación característica tiene una raíz repetida r, entonces: 2 soluciones L.I. de la Ecuación (36) son: e^{rt} y te^{rt}. Una solución general de (64) es la siguiente:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}} \qquad (69)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo de aplicación:

Determine una solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

a)

$$\boxed{\ddot{y} + 5\dot{y} - 6y = 0}$$

Ecuación característica:

$r^2 + 5r - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (r-1)(r+6) = 0$
$r_1 = 1 \quad y \quad r_2 = -6$
$\{e^t;\ e^{-6t}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones, y una solución general es:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-6t}}$$

b)

$$\boxed{\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0}$$

Ecuación característica:
$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (r+2)^2 = 0$

$r_1 = -2 \quad y \quad r_2 = -2$

$\{e^{-2t};\ te^{-2t}\}$ son soluciones linealmente independientes.

Entonces, una solución general es:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}}$$

$\boxed{\text{Si } b^2 - 4ac < 0}$ las raíces de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$ son los números complejos conjugados:

$$r_1 = \propto + i\beta \quad ; \quad r_2 = \alpha - i\beta \qquad donde \quad i = \sqrt{-1} \qquad (70)$$

Donde α y β son los números reales:

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad (71)$$

Entonces, $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ son soluciones de la Ecuación (64): $\boxed{a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0}$

Pero: $e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}.e^{i\beta t}$

Utilizando la fórmula de Euler: $e^{i\beta t} = \cos\beta t + \ isen\,\beta t$
Podemos escribir:

- $y_1 = e^{r_1 t} = e^{\alpha t}[\cos\beta t + isen\,\beta t]$
- $y_2 = e^{r_2 t} = e^{\alpha t}[\cos\beta t - isen\,\beta t]$

Siendo y_1 e y_2 dos soluciones de la Ecuación (64), cualquier combinación lineal de ellas también lo es:

- $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha t}\cos\beta t$
- $\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$

Luego $\boxed{e^{\alpha t}\cos\beta t}$ y $\boxed{e^{\alpha t} sen\,\beta t}$ son soluciones de la EDO.

Además son linealmente independientes:

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t} sen\,\beta t \\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - e^{\alpha t}\beta sen\beta t & \alpha e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t + e^{\alpha t}\beta cos\beta t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= e^{\alpha t}[\alpha\ cos\beta t\ sen\beta t + \beta\ cos^2\beta t - \alpha\ sen\beta t\ cos\beta t + \beta\ sen^2\beta t] \\ &= e^{\alpha t}\beta \neq 0 \end{aligned}$$

Raíces complejas conjugadas

Si la ecuación característica tiene raíces complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$, entonces $e^{\alpha t}\cos\beta t$ y $e^{\alpha t} sen\,\beta t$ son dos soluciones linealmente independientes de (64), y una solución general es:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} cos\beta t + c_2 e^{\alpha t} sen\beta t \tag{72}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Una forma conveniente de escribir la solución $y(t)$ es:

$$y(t) = A\, e^{\alpha t}\, sen(\beta t + \varphi) \tag{73}$$

Teniendo en cuenta que:

$$sen(\beta t + \varphi) = cos\beta t\; sen\varphi + sen\beta t\; cos\varphi$$

La Ecuación (73) resulta:

$$y(t) = e^{\alpha t}\, A\, cos\beta t\; sen\varphi + e^{\alpha t}\, A\, sen\beta t\; cos\varphi \tag{74}$$

Comparando con la Ecuación (72) resulta:

$$c_1 = A\, sen\varphi \quad ; \quad c_2 = A\, cos\varphi \tag{75}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de las Ecuaciones (75) y sumando se obtiene:

$$A^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 \tag{76}$$

Dividiendo miembro a miembro en Ecuación (75) se obtiene:

$$tg\varphi = \frac{c_1}{c_2} \tag{77}$$

Ejemplo de aplicación:

Determine una solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\boxed{\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = 0}$$

Ecuación característica:

$$r^2 + 2r + 4 = 0$$

$$r = -1 \pm i\sqrt{3} \qquad \therefore \qquad \alpha = -1 \qquad \beta = \sqrt{3}$$

Una solución general es:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} cos\sqrt{3}\, t + c_2 e^{-t} sen\sqrt{3}\, t}$$

EDO Lineal Homogénea – Coeficientes constantes – Orden 2

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = 0$$

$a \neq 0$. Se propone: $y = e^{rt}$

$$e^{rt}[ar^2 + br + c] = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

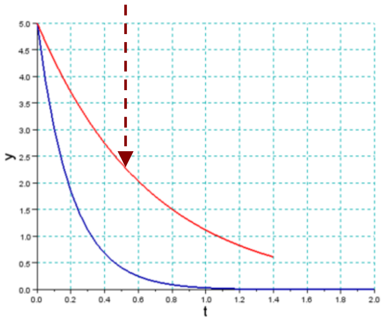
$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; a \neq 0$$

$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
$r_1 \neq r_2$	$r_1 = r_2 = r = \dfrac{-b}{2a}$	$r_{1,2} = \propto \pm i\beta$ $\alpha = \dfrac{-b}{2a};\ \beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$
$y_1 = e^{r_1 t}$ $y_2 = e^{r_2 t}$	$y_1 = e^{r_1 t}$ $y_2 = t\, e^{r_1 t}$	$y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t$ $y_2 = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$
$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$	$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$	$y(t) = e^{\alpha t}[c_1 cos\beta t + c_2 sen\beta t]$

Forma alternativa

$$y(t) = A\, e^{\alpha t}\, sen(\beta t + \varphi)$$

$\propto = 0$ $\quad$ $\propto \neq 0$



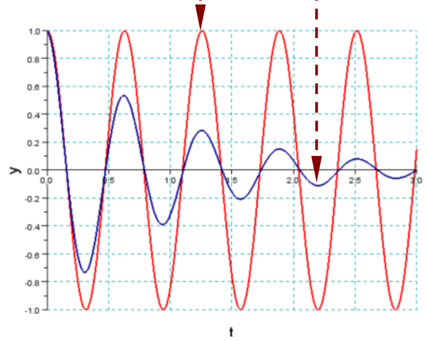


Figura 13.1. Mapa Conceptual. EDO-Lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

5.8. EDO LINEAL NO HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN

En el sistema masa-resorte-amortiguador, la posición $u(t)$ de la masa m es gobernada por la EDO lineal:

$$\boxed{m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = f(t)} \qquad (78)$$

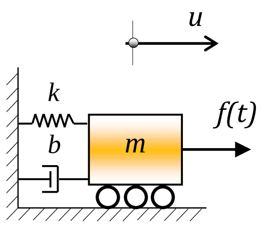


Figura 14.1. Diagrama de cuerpo libre del oscilador masa-resorte.

Los términos de la Ecuación (78) se identifican de manera física como:

[inercia] $\ddot{\boldsymbol{u}}$ + [amortiguamiento] $\dot{\boldsymbol{u}}$ + [rigidez] u = Fuerza externa

Cualquier EDO lineal de 2° orden con coeficientes constantes:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

se puede interpretar como una descripción de un sistema masa-resorte-amortiguador, con coeficiente de masa 'a', coeficiente de amortiguamiento 'b', rigidez de resorte 'c' y desplazamiento $y(t)$ si estas constantes tienen sentido físico (a, b, c positivas).

Procedimiento de resolución

Para resolver $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$

a) Determine una ***solución general*** $c_1y_1 + c_2y_2$ para la EDO lineal homogénea correspondiente.

b) Determine una ***solución particular*** y_p de la EDO Lineal no homogénea dada.

c) Obtenga una solución general de la ecuación dada.

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + \ ... + c_ny_n(t)$$

5.9. MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Para hallar una solución particular de una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes consideramos:

Si $f(t) = p_n(t)$ con $p_n(t)$: polinomio de grado n
$L[y](t) = p_n(t)$

Proponemos una solución de la forma:

$y_p(t) = A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0$

y relacionamos los coeficientes de $L[y_p](t)$ con los de $p_n(t)$. Esto implica resolver n+1 ecuaciones lineales en las n+1 incógnitas $A_0, A_1, \ldots, A_n$

Si $f(t) = \hat{a}\ cos\beta t + \hat{b}\ sen\beta t$
$L[y](t) = \hat{a}\ cos\beta t + \hat{b}\ sen\beta t$
Proponemos una solución de la forma:

$y_p(t) = A\ cos\beta t + B\ sen\beta t$

Resolvemos $L[y_p](t) = \hat{a}\ cos\beta t + \hat{b}\ sen\beta t$, en términos de las incógnitas A y B.
La propia función $f(t)$ sugiere la forma de la solución particular.

Ejemplo de aplicación:

Determine una solución particular de:

$L[y](t) = \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = sen\ t$

Proponemos:

$y_p(t) = A\ sen\ t + Bcos\ t$

Entonces:

$\dot{y}_p(t) = A \cos t - B\ \ sen\ t$
$\ddot{y}_p(t) = -A \operatorname{sen} t - B\ \ cos\ t$

Sustituyendo en la EDO obtenemos:

$-A\ sen\ t - B \cos t + 3A \cos t - 3B\ sen\ t + 2A\ sen\ t + 2B \cos t = sen\ t$

Asociando términos:

$(A - 3B)\ sen\ t + (B + 3A) \cos t = sen\ t$

De donde:

$A - 3B = 1$
$B + 3A = 0$

Resolviendo el sistema indicado se obtiene:

$$A = 0.1 \qquad B = -0.3$$

Por lo tanto la función $\boxed{y_p(t) = 0.1\ sen\ t - 0.3 \cos t}$ es una solución particular de $L[y](t) = sen\ t$

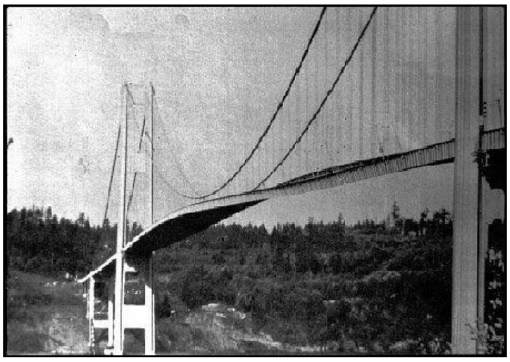
6. ECUACIONES DIFERENCIALES - SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

6.1. MOTIVACIÓN

En distintas ramas de la Ingeniería se presenta el desafío de obtener la respuesta dinámica de sistemas físicos sobre los que actúan determinadas acciones o excitaciones externas variables en el tiempo, siendo necesario determinar frecuencias y modos naturales de vibración.

Para ello, como se ha visto, se deben realizar algunas hipótesis que simplifican la realidad a estudiar y permiten definir el denominado ***modelo físico***, sobre el cual se plantean leyes adecuadas para obtener el llamado ***modelo matemático***. Este último relaciona la variación en el tiempo de los *parámetros de respuesta* de los sistemas estructurales con los *parámetros de control* actuantes sobre los mismos. En muchos casos, dicho modelo matemático queda expresado en términos de un ***sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias***.

La variedad de situaciones en las que se puede presentar el problema descripto es muy amplia. A manera de ejemplo podemos mencionar la necesidad de determinar la seguridad de estructuras sometidas a acciones severas como las de sismos o vientos. La Figura (13.1) muestra dos secuencias de un colapso estructural muy conocido debido a la acción del viento sobre el *Tacoma Narrow Bridge*. En este caso observamos en la primera fotografía, que el sistema físico mecánico se encuentra oscilando en forma rotacional y traslacional.



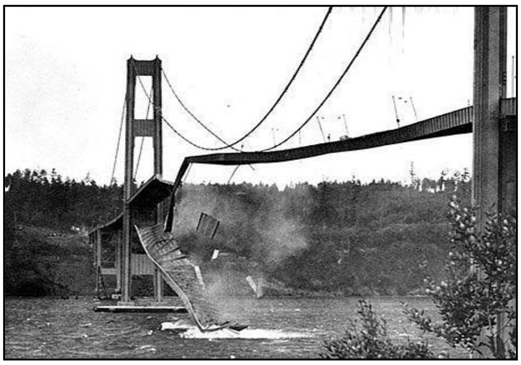


Figura 15.1. Colapso de un sistema mecánico vibratorio roto-traslacional

La predicción de las respuestas de sistemas físicos, en donde se encuentran involucrados dos o más grados de libertad deriva en la necesidad de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, a los cuales se dedica el presente capítulo.

6.2. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Muchos métodos numéricos para la aproximación de soluciones de problemas de primer orden con valores iniciales, de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (78)$$

se pueden extender fácilmente a sistemas de m ecuaciones diferenciales en m funciones incógnitas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$. Esto se facilita por el uso de la denominada ***forma normal canónica*** para expresar el sistema.

6.3. FORMA NORMAL CANÓNICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un sistema de m ecuaciones diferenciales en m funciones incógnitas, expresado en su forma normal, puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_m) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_m(t) = f_m(t, x_1, \dots, x_m) \end{cases} \tag{79}$$

En conjunto, el sistema dado en la Ecuación (79), de m ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, puede escribirse en forma matricial

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}$$

Un ***problema de valores iniciales*** (PVI) para la Ecuación (79), implica determinar una solución de este sistema que satisfaga las CI:

$$x_1(t_0) = a_1; \quad x_2(t_0) = a_2\,; \dots; \quad x_m(t_0) = a_m$$

La mayoría de los códigos profesionales para la resolución de PVI, suponen que el sistema está escrito de esta forma. Además, para un sistema lineal en forma normal se pueden utilizar las poderosas herramientas del álgebra lineal. Por estas razones veremos que una sola EDO de orden superior puede convertirse en un sistema equivalente de EDO de primer orden.

6.4. EDO DE ORDEN m COMO SISTEMA DE EDO DE 1er ORDEN.

Sea la EDO de orden m

$$\frac{d^m y}{dt^m} = f\left(t, y, \dot{y}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}\right) \tag{80}$$

El procedimiento para convertir la EDO de orden m en un sistema de EDO de primer orden, consiste en introducir como *incógnitas adicionales* la serie de derivadas de y:

***m* incógnitas adicionales**

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m(t) = \dfrac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} \end{cases} \tag{81}$$

Sistema de EDO de primer orden.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_m(t) = \dfrac{d^m y}{dt^m} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \tag{82}$$

Si la Ecuación (80) tiene CI: $y(t_0) = a_1$; $\dot{y}(t_0) = a_2$; … ; $\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}(t_0) = a_m$, el sistema dado por (82) tiene CI: $x_1(t_0) = a_1$; $x_2(t_0) = a_2$; … ; $x_m(t_0) = a_m$

6.5. EDO LINEAL HOMOGÉNEA DE ORDEN *n* COMO UN SISTEMA DE EDO DE PRIMER ORDEN.

Dada la EDO lineal homogénea de orden *n*:

$$\boxed{a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0}$$

para escribir un sistema equivalente de EDO de primer orden, se definen como nuevas incógnitas las primeras (*n*-1) derivadas de '*y*', incluyendo la propia '*y*', derivada 0-ésima.

***n* incógnitas adicionales.**

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t) = \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{cases}$$

Sistema de EDO de primer orden.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = \dfrac{d^ny}{dt^n} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \dfrac{-a_0(t)}{a_n(t)}x_1 - \cdots - \dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n \end{cases}$$

Observación:

Para sistemas de 2 o más EDO lineales homogéneas de orden superior se aplica el mismo procedimiento a cada función incógnita.

6.6. NOTACIÓN MATRICIAL PARA SISTEMAS DE EDO LINEALES EN FORMA NORMAL.

Cuando las ecuaciones del sistema de EDO son lineales, el álgebra matricial proporciona una notación compacta para expresar el sistema. La misma notación sugiere nuevas formas de caracterizar las propiedades de la solución y técnicas eficaces para obtener soluciones explícitas.

Un sistema de EDO lineal homogénea en forma normal:

n EDO lineales homogéneas de primer orden, en n funciones incógnitas $x_1(t), \dots, x_n(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \tag{83}$$

En notación matricial:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12(t)} & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{2n}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1(t)} & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Vector solución   **Vector de derivadas**   **Matriz de coeficientes**

Entonces:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}} \tag{84}$$

6.7. SISTEMAS DE EDO LINEALES EN FORMA NORMAL

Un sistema de n EDO lineales está en forma normal si el mismo se expresa como:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)} \tag{85}$$

$$\boldsymbol{X}(t) = [x_i(t)]\,; \qquad \boldsymbol{f}(t) = [f_i(t)]; \qquad \boldsymbol{A}(t) = \left[a_{ij}(t)\right] \qquad i, j\colon 1, n$$

Para sistemas EDO Lineales Homogéneos: $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$

Para sistemas EDO Lineales No Homogéneos: $\boldsymbol{f}(t) \neq \boldsymbol{0}$

Si los elementos de la matriz $\boldsymbol{A}$ son todos constantes, entonces el sistema de EDO Lineales es de ***coeficientes constantes.***

Observación:

Recordemos que una EDO Lineal de orden n se puede escribir como un sistema de 1er orden en forma normal. Es decir que siempre podemos llevar una EDO Lineal de orden n, o varias, a un sistema de la forma dada en la Ecuación (84).

6.8. PROBLEMA CON VALORES INICIALES

El problema con VI para el sistema normal dado por la Ecuación (85) es el problema de determinar una función vectorial diferenciable $\boldsymbol{X}(t)$ que satisfaga en un intervalo I, el sistema de EDO y que además satisfaga la condición inicial $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_\mathbf{0}$ donde t_0 es un punto dado de I y $\boldsymbol{X}_\mathbf{0}$ es un vector dado.

Existencia y Unicidad:

Sean $\boldsymbol{A}(t)$ y $\boldsymbol{f}(t)$ continuas en un intervalo abierto I que contiene al punto t_0. Entonces, para cualquier elección del vector $\boldsymbol{X}_0$, existe una única solución $\boldsymbol{X}(t)$ en todo el intervalo I del problema de valores iniciales:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t); \qquad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_\mathbf{0}} \tag{86}$$

6.9. SISTEMAS DE EDOs LINEALES NORMALES HOMOGÉNEOS

Sea

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)} \tag{87}$$

donde $\boldsymbol{A}(t)$ es una función matricial de nxn continua en un intervalo I.

- Conjunto fundamental de soluciones:

Las n funciones vectoriales $\boldsymbol{X}_1(t), \boldsymbol{X}_2(t), \dots, \boldsymbol{X}_n(t)$, soluciones del sistema EDO lineal homogéneo en el intervalo I, forman un conjunto fundamental de soluciones, siempre que ellas sean LI en I, o en forma equivalente, su Wronskiano.

$$\mathrm{W}[\boldsymbol{X}_1(\mathrm{t}), \boldsymbol{X}_2(\mathrm{t}), \dots, \boldsymbol{X}_\mathrm{n}(\mathrm{t})](\mathrm{t}) = \det[\boldsymbol{X}_1 \;\; \boldsymbol{X}_2 \;\; \boldsymbol{X}_3 \dots \boldsymbol{X}_\mathrm{n}] \tag{88}$$

nunca se anula en I.

- Matriz fundamental $\boldsymbol{X}(t)$:

Una función matricial $\boldsymbol{X}(t)$ de nxn cuyos vectores columna forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema EDO homogéneo, es una ***matriz fundamental***. El determinante de $\boldsymbol{X}(t)$ es el Wronskiano del conjunto fundamental de soluciones. Como el Wronskiano nunca se anula en el intervalo I, entonces existe $\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ para t en I.

- Solución general de un sistema de EDO lineales homogéneo EDOH:

Una solución general del sistema EDOH es una combinación lineal de las n funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones:

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}_H\underline{c} \tag{89}$$

siendo $\boldsymbol{X}$ una ***matriz fundamental*** cuyos vectores columna son $\boldsymbol{X}_1(t), \boldsymbol{X}_2(t), \dots, \boldsymbol{X}_n(t)$, y $\underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^\mathrm{T}$ es un vector de constantes arbitrario.

6.10. SISTEMAS DE EDOs LINEALES NORMALES NO HOMOGÉNEAS

Sea

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)} \tag{90}$$

donde la función matricial $\boldsymbol{A}(t)$ de nxn y la función vectorial $\boldsymbol{f}(t)$ son continuas en el intervalo I.

- Solución general de un sistema de EDO lineales normales no homogéneo:

Si $\boldsymbol{X}_p(t)$ es cualquier solución particular del sistema no homogéneo y X es una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado, entonces una solución general para el sistema de EDO lineales no homogéneo es:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_p(t) + \boldsymbol{X}_H(t)\underline{c} = \boldsymbol{X}_p(t) + c_1\boldsymbol{X}_1(t) + c_2\boldsymbol{X}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{X}_n(t) \tag{91}$$

donde $\boldsymbol{X}_1(t), \boldsymbol{X}_2(t), \dots, \boldsymbol{X}_n(t)$ son los vectores columna de $\boldsymbol{X}_H(t)$ y $\underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^\mathrm{T}$ es un vector de constantes arbitrario.

6.11. SISTEMAS ACOPLADOS MASA-RESORTE. APLICACIONES DE INTERÉS EN INGENIERÍA

Veremos a continuación una aplicación de mucho interés práctico. Se trata de la idealización del comportamiento, por ejemplo, de un tanque de agua representado por un modelo con masa m, y una columna con rigidez k y con masa estructural despreciable frente a la masa del recipiente y coeficiente de amortiguamiento b.

Tenemos entonces un sistema de 1 grado de libertad, que corresponde al ***desplazamiento lateral*** $u(t)$ de la masa m, medido a partir de la configuración no deformada. El modelo matemático resulta ser una ecuación diferencial ordinaria lineal de 2º orden, con coeficientes constantes dada por:

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = f(t)$$

cuya solución analítica se ha estudiado anteriormente. La Figura (16.1) permite observar lo descripto.

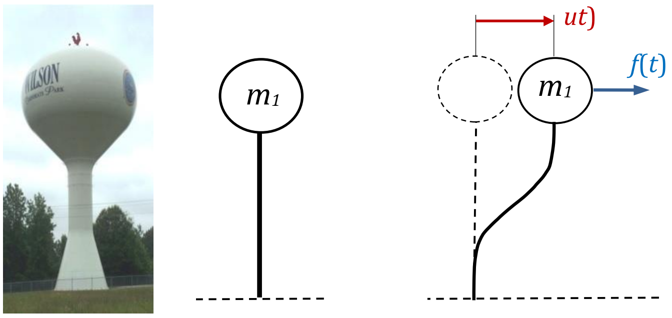


Figura 16.1. Desplazamiento lateral en un sistema de un grado de libertad.

Se ha asumido que la columna tiene la posibilidad de deformarse almacenando energía elástica que entrega nuevamente al sistema al cesar la acción externa y recuperar la forma inicial, tal como un resorte de comportamiento elástico lineal. Según sea la forma de la configuración deformada asumida será el valor de constante elástica a utilizar.

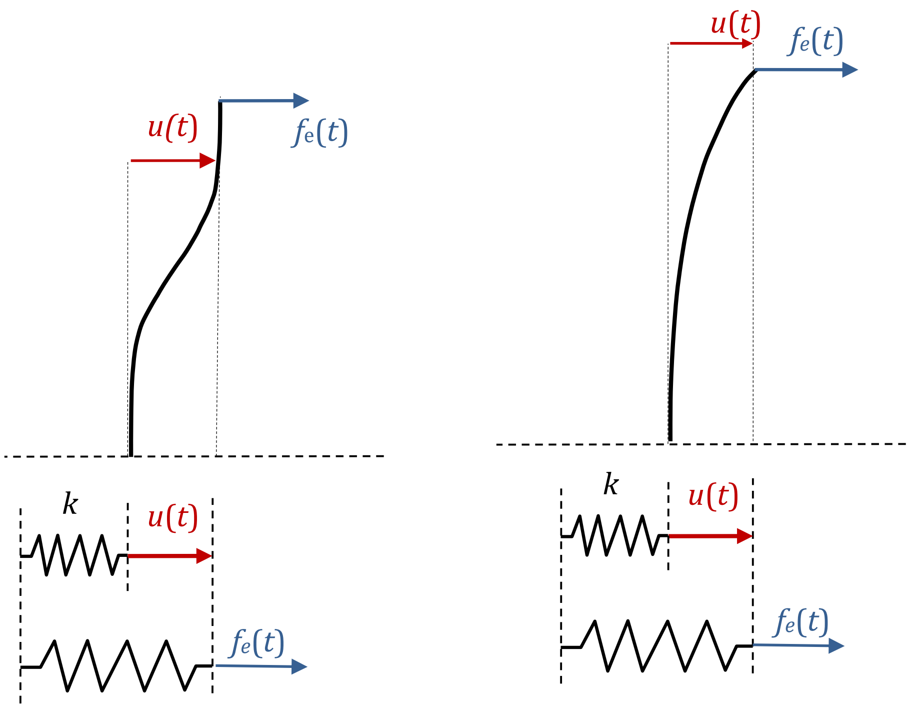


Figura 17.1. Configuraciones deformadas típicas de una columna en flexión.

La forma de la configuración deformada de la columna se discute y calcula en asignaturas como *Resistencia de Materiales* o *Análisis Estructural* y está fuera del alcance de esta asignatura.

En la Figura 17.1 se pueden observar dos configuraciones deformadas típicas que conducen a diferentes valores de k.

Con el propósito de mejorar la idealización planteada es necesario incorporar mayor cantidad de grados de libertad en el modelo físico asumido. Así, la inmediata mejor aproximación puede ser incorporar un punto material donde se represente la masa de la columna del tanque de agua. Se tendrá entonces un sistema de 2 grados de libertad, que corresponde a los *desplazamientos laterales* $u_1(t)$ e $u_2(t)$ de cada masa m_1 y m_2, respecto de la configuración no deformada.

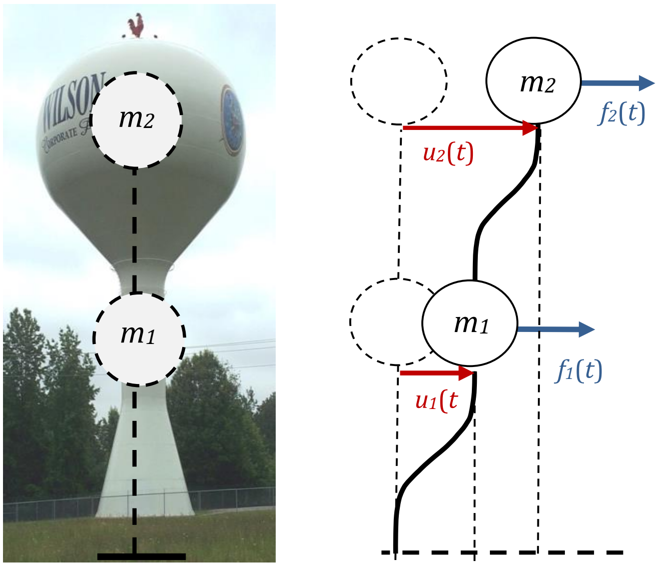


Figura 18.1. Sistema de dos grados de libertad para el problema planteado.

El *modelo matemático* que describe al *modelo físico* así planteado será un ***sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden***. La Figura (18.1) permite observar lo descripto.

Los objetivos son:

- Formular el modelo matemático que gobierna el movimiento de un sistema en el que dos resortes acoplados unen dos masas que pueden moverse sin fricción.
- Describir y justificar el procedimiento para encontrar una solución general al problema de oscilaciones libres no amortiguadas.
- Aplicar en un problema concreto.

6.12. MODELO FÍSICO – OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO A RESOLVER

Para mejorar el modelo de un grado de libertad desarrollado anteriormente para el análisis dinámico de un tanque de agua, se adoptará un nuevo modelo físico y se deducirá el modelo matemático asociado.

En la idealización del comportamiento dinámico del tanque se asume que no sólo el depósito tiene una masa considerable sino también la columna soporte. Así la idealización consiste en que existen dos masas vinculadas por elementos elásticos, que son los dos tramos de la columna soporte. En la Figura (18.1), se muestra la posición de las masas y una posible configuración deformada de los tramos de columna que las vinculan. Se tiene entonces un sistema discreto de dos grados de libertad.

Las acciones externas o parámetros de control del sistema se consideran aplicadas en correspondencia con las posiciones de las masas, y se las denomina $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Los desplazamientos de las masas m_1 y m_2, respecto de la configuración no deformada, que constituyen los parámetros de respuesta del sistema, se indican con $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente.

6.12.1. ESFUERZOS INTERNOS EN EL SISTEMA Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS Y CINEMÁTICAS.

La respuesta elástica de los tramos de columna ante las acciones externas se puede considerar equivalente a las acciones de resortes elásticos. Si bien esto es tratado en Resistencia de Materiales y/o en Análisis Estructural se incluye aquí en forma sintética a los efectos de que el tema resulte autocontenido. Se aislan en diagrama de cuerpo libre los tramos de columna poniendo en evidencia los llamados esfuerzos internos, como puede observarse en la Figura (19.1):

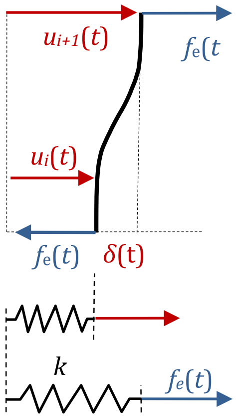


Figura 19.1. Diagrama de cuerpo libre del sistema.

Se considera como configuración deformada a los desplazamientos del tipo de los indicados en la figura. El cambio geométrico entre la configuración deformada y la configuración no deformada, pemite definir $\delta(t)$, como una medida del cambio de geometría del sistema y que está dada por:

$$\delta(t) = u_{i+1}(t) - u_i(t)$$

La fuerza horizontal elástica que actúa en los extremos de cada tramo de columna analizado se puede expresar como:

$$f_e(t) = k\,\delta(t)$$

Así resulta que las acciones internas o fuerzas elásticas que actúan en cada tramo de columna son:

$$f_e(t) = k\,\left(u_{i+1}(t) - u_i(t)\right)$$

Por lo tanto, es posible plantear como sistema equivalente, el siguiente sistema de dos grados de libertad, que constituye la *idealización* de la situación real que se busca estudiar y que se puede observar en la Figura (20.1):

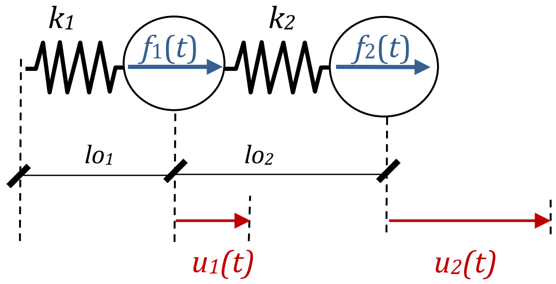


Figura 20.1 Sistema equivalente.

Los *parámetros* del modelo físico son:

Parámetros físicos:

Masas inerciales: m_1 ; m_2

Constantes de los resortes: k_1 ; k_2

Parámetros de control:

Acciones externas: $f_1(t)$; $f_2(t)$

Parámetros de respuesta:

Desplazamientos de las masas respecto de la configuración no deformada: $u_1(t);u_2(t)$

Observación: en el presente caso, no estamos considerando la presencia de amortiguamiento (fricción) en el sistema.

6.12.2. MODELO MATEMÁTICO

Ahora buscamos el modelo matemático asociado a la idealización de la realidad asumida. Es decir, nos preguntamos cuáles son las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los dos objetos. Para ello, realizaremos los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cada masa, poniendo en evidencia solamente las acciones horizontales y posteriormente aplicaremos la Segunda Ley de Newton. Figura (20.1).

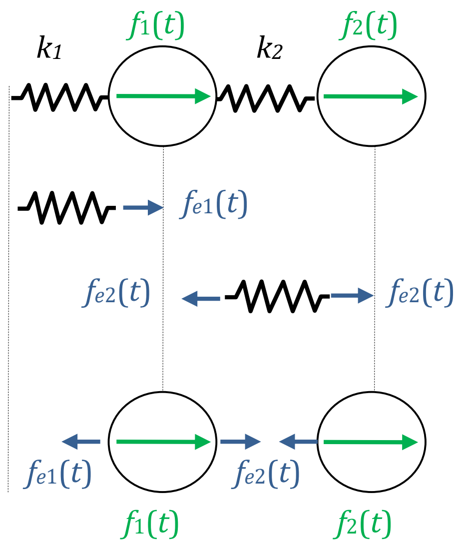


Figura 20.1. Diagrama de cuerpo libre.

$f_{e1}(t) = k_1 u_1(t)$

El desplazamiento neto del segundo resorte con respecto a su longitud natural es:

$u_2(t) - u_1(t)$

$f_{e2}(t) = k_2 \left[u_2(t) - u_1(t) \right]$

Planteo de la Segunda Ley de Newton:

Para la masa m_1: $\quad -k_1 u_1(t) + k_2 [u_2(t) - u_1(t)] + f_1(t) = m_1 \ddot{u}_1(t)$

Para la masa m_2: $\quad -k_2 [u_2(t) - u_1(t)] + f_2(t) = m_2 \ddot{u}_2(t)$

Reordenando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1(t) + (k_1 + k_2) u_1(t) - k_2 u_2(t) = f_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) = f_2(t) \end{cases} \tag{92}$$

Observamos que se trata de un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de 2° orden no homogéneas, lineales y con coeficientes constantes.

Reescribimos las mismas en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{93}$$

Llamando:

$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ Matriz de masa

$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ Matriz de rigidez

$\ddot{\boldsymbol{U}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix}$ Vector de aceleraciones

$\boldsymbol{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ Vector de desplazamientos

$\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$ Vector de acciones externas

La ecuación matricial queda:

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{F}(t)} \tag{94}$$

Queremos estudiar el problema de oscilaciones libres no amortiguadas, es decir, $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{0}$

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}(t)\boldsymbol{U}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{0}} \tag{95}$$

El modelo matemático del problema de oscilaciones libres no amortiguadas es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden homogéneo y sus condiciones iniciales.

6.13. SOLUCIÓN ANALÍTICA

6.14.1. DETERMINACIÓN DE FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES DE VIBRACIÓN.

Para escribir la solución general de nuestro sistema, como combinación lineal de un conjunto fundamental de soluciones, necesitamos encontrar funciones solución que sean linealmente independientes (LI). ¿Cuántas funciones solución LI se requieren? Tenemos 2 EDO de 2º orden que forman el sistema y en cada una de ellas aparecen ambas funciones incógnitas. Por ser de 2° orden tanto en la función incógnita u_1 como en la función incógnita u_2 se necesitan ***cuatro*** funciones solución LI para poder expresar la solución general del sistema. Luego, una vez conocidas estas funciones { $\boldsymbol{U}_1;\boldsymbol{U}_2:\boldsymbol{U}_3;\boldsymbol{U}_4$}, las que forman un ***conjunto fundamental*** de soluciones, podremos escribir la solución general como una combinación lineal de ellas. Es decir:

$$\boldsymbol{U}_G = c_1\boldsymbol{U}_1 + c_2\boldsymbol{U}_2 + c_3\boldsymbol{U}_3 + c_4\boldsymbol{U}_4$$

Tenemos ***dos*** caminos:

- Reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1º orden de la forma:

  $$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

  y luego utilizar métodos numéricos apropiados (como los Métodos de *Runge-Kutta,* entre otros). Esta vía de solución la trabajaremos luego de estudiar los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden, proponiendo funciones solución apropiadas, que lo transforman en un problema de valores y vectores propios.

Necesitamos 4 funciones solución linealmente independientes.

Observamos que toda función vectorial de la forma:

$$\boldsymbol{U} = \cos\omega t\,\mathbf{v} \qquad\qquad \boldsymbol{U} = sen\omega t\,\mathbf{v} \tag{96}$$

es apropiada para satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Derivamos dos veces y reemplazamos:

$\dot{\boldsymbol{U}} = -\omega \; sen\omega t\, \boldsymbol{v}$ $\qquad\qquad$ $\dot{\boldsymbol{U}} = \omega \; \cos\omega t\, \boldsymbol{v}$

$\ddot{\boldsymbol{U}} = -\omega^2 \; \cos\omega t\, \boldsymbol{v}$ $\qquad\qquad$ $\ddot{\boldsymbol{U}} = -\omega^2 \; \text{sen}\omega t\, \boldsymbol{v}$

Sustituyendo en (29):

$$\boldsymbol{M}(-\omega^2 \; \cos\omega t \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{K}(\cos\omega t \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{M}(-\omega^2 \; \text{sen}\omega t \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{K}(sen\omega t \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

$$\cos\omega t[\, \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} - \omega^2 \boldsymbol{M} \; \boldsymbol{v}\,] = \boldsymbol{0} \qquad sen\omega t[\, \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} - \omega^2 \boldsymbol{M} \; \boldsymbol{v}\,] = \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{\cos\omega t[\, \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \;]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}} \qquad \boxed{sen\omega t[\, \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \;]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}} \qquad (97)$$

Cualquiera de las funciones vectoriales definidas en (96) son solución de (95) si se cumple (97) para todo tiempo *t*, con $\underline{v} \neq \underline{0}$ (porque si $\underline{v} = \underline{0}$ en (96) tendríamos $\underline{Y} = \underline{0}$).

Es decir, $\quad [\, \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \;]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (98)

Se trata de un ***problema de valores y vectores propios generalizado***. Para que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo definido en (98) tenga solución distinta de la trivial ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$), ya que necesitamos funciones solución linealmente independientes, pedimos que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo.

$$\boxed{\left| \boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} \right| = 0}$$

Esta constituye la ***ecuación característica***, que permite obtener los *valores característicos* ω_i. Podemos llevar el problema de valores propios generalizado a un problema standard de valores propios.

Teniendo en cuenta que: det(***M***)=m_1 m_2 y siendo el determinante de la matriz de masas no nulo, ésta resulta una matriz inversible. Su inversa está dada por:

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Premultiplicamos ambos miembros de la ecuación (98) por $\boldsymbol{M}^{-1}$:

$$[\, \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M} \;]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Llamando ***B***=$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ y $\lambda = \omega^2$ y siendo además $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}$, esta última expresión puede escribirse como:

$$\boxed{[\, \boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I} \;]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}} \qquad (99)$$

Que es un problema standard de valores y vectores propios. Los valores propios (o valores característicos) se obtienen de plantear la ecuación característica:

$$\boxed{\left|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=0} \qquad (100)$$

Siendo para nuestro problema la matriz $\boldsymbol{B}$ una matriz de orden 2, obtendremos dos valores propios λ_1 y λ_2.
Observamos que, siendo $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{K}$ matrices simétricas, $\boldsymbol{B}$ no necesariamente lo es.

$$\boldsymbol{K}^T=\boldsymbol{K}$$
$$\boldsymbol{M}^T=\boldsymbol{M}$$
$$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^T=\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{M}^{-1})^T=\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}$$
$$\boldsymbol{B}^T\neq\boldsymbol{B}$$

Considerando $\lambda_1\neq\lambda_2$, los correspondientes vectores propios son linealmente independientes. Es decir, podremos determinar 4 funciones solución linealmente independientes, que son:

$$\boxed{\boldsymbol{U}_1=\cos\omega_1 t\boldsymbol{v}_1} \qquad \boxed{\boldsymbol{U}_2=sen\omega_1 t\boldsymbol{v}_1}$$
$$\boxed{\boldsymbol{U}_3=\cos\omega_2 t\boldsymbol{v}_2} \qquad \boxed{\boldsymbol{U}_4=sen\omega_2 t\boldsymbol{v}_2} \qquad (101)$$

Donde: $\boxed{\omega_1=\sqrt{\lambda_1}}$ y $\boxed{\omega_2=\sqrt{\lambda_2}}$

ω_1 y ω_2 son las frecuencias angulares o circulares (en radianes por segundo) y $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ las formas de los modos naturales de vibración.

Estos son considerados *parámetros dinámicos* del sistema. La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneo de 2º orden será:

$$\boxed{\boldsymbol{U}_G=c_1\boldsymbol{U}_1+c_2\boldsymbol{U}_2+c_3\boldsymbol{U}_3+c_4\boldsymbol{U}_4}$$

Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{U}_G=c_1\cos\omega_1 t\boldsymbol{v}_1+c_2\,sen\omega_1 t\boldsymbol{v}_1+c_3\cos\omega_2 t\boldsymbol{v}_2+c_4 sen\omega_2 t\boldsymbol{v}_2} \qquad (101)$$

Las constantes c_i se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Una forma alternativa de escribir la ecuación (101) es la siguiente:

$$\boldsymbol{U}_G=A_1\,sen(\omega_1 t+\varphi_1)\boldsymbol{v}_1+A_2\,sen(\omega_2 t+\varphi_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (102)$$

Los valores de A_1,A_2,ϕ_1,ϕ_2, se determinan a partir de los valores de las constantes c_i, obtenidas de las condiciones iniciales.

La Figura 20.1 presenta un mapa conceptual que sintetiza los conceptos presentados referidos a sistemas acoplados masa-resortes.

Sistemas acoplados masa-resorte: Oscilaciones Libres No Amortiguadas

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \cos\omega t\ \boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{U}_2 = sen\,\omega t\ \boldsymbol{v}$$

$$\begin{matrix}\cos\omega t \\ (sen\,\omega t)\end{matrix}\ [\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

para que sea válido para todo t

$$[\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} \qquad \lambda = \omega^2$$

$$[\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v} = 0$$

para que $\boldsymbol{v} \neq 0$

$$|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$$

$$\lambda_i \longrightarrow \omega_i = \sqrt{\lambda_i}\ ;\ \ i = 1,2,.,n$$

Para cada $\lambda_i \longrightarrow \boldsymbol{v}_i\ ;\ \ i = 1,2,.,n$

$$\boldsymbol{U}_1^{(i)} = \cos(\omega_i t)\ \boldsymbol{v}_i\ ;\ \ i = 1,2,.,n$$
$$\boldsymbol{U}_2^{(i)} = sen(\omega_i t)\ \boldsymbol{v}_i\ ;\ \ i = 1,2,.,n$$

Solución general

$$\boldsymbol{U} = \boxed{c_1 \cos(\omega_1 t)\ \boldsymbol{v}_1 + c_2\ sen(\omega_1 t)\ \boldsymbol{v}_1} + \ldots + \boxed{c_{2n-1} \cos(\omega_n t)\ \boldsymbol{v}_n + c_{2n}\ sen(\omega_n t)\ \boldsymbol{v}_n}$$

$$\boldsymbol{U} = \boxed{A_1\ sen(\omega_1 t + \emptyset_1)\ \boldsymbol{v}_1} + \ldots + \boxed{A_n\ sen(\omega_n t + \emptyset_n)\ \boldsymbol{v}_n}$$

Forma alternativa

Figura 21.1. Mapa Conceptual. Sistemas Acoplados Masa Resorte.

6.15. CONCLUSIONES GENERALES

1. Hemos encontrado la solución analítica de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de 2º orden, resolviendo así el problema de oscilaciones libres no amortiguadas para un sistema de 2 grados de libertad.

2. Lo que hemos planteado para un sistema de 2 grados de libertad es totalmente extensible a sistemas de *n* grados de libertad. En ese caso:

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{0}}$$

   siendo $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{K}$ matrices cuadradas de orden n y los vectores de aceleraciones y desplazamientos de n componentes cada uno.

3. Puede demostrarse que para matrices de masa y de rigidez reales simétricas y definidas positivas, características de los sistemas estructurales estables, todas las raíces de la ecuación característica $\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=0$, son reales y positivas.

4. Las frecuencias angulares se ordenan en forma creciente. Es decir:

   $\omega_1<\omega_2<....<\omega_n$

   El modo de más baja frecuencia se lo denomina primer modo o modo fundamental. Al que le corresponde la frecuencia inmediata superior, segundo modo, y así sucesivamente.

5. Cada modo de vibración: $A_i\,sen(\omega_i t+\varphi_i)\boldsymbol{v}_i$ consiste en un movimiento armónico simple de las masas, con frecuencia angular ω_i y ángulo de fase ϕ_i. En cada ciclo de vibración de cada modo, las masas pasan dos veces por sus posiciones de equilibrio y alcanzan sus posiciones extremas simultáneamente.

6. El problema de valores y vectores propios conduce a frecuencias y modos naturales de vibración que dependen sólo de las constantes físicas del sistema.

7. Las condiciones iniciales permiten obtener las constantes de la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas (escrita ésta como combinación lineal de las funciones solución linealmente independientes determinadas). En otras palabras, las cantidades en que los modos contribuyen a la respuesta total quedan determinadas por dichas condiciones iniciales.

8. Reforzamos un concepto ya planteado: Los modelos matemáticos constituyen idealizaciones conceptuales de estructuras reales. Pueden proveer conocimiento completo y preciso del modelo físico, pero sólo proveen de información aproximada del comportamiento del sistema real. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, la información adquirida a partir del análisis del modelo matemático es suficiente para una adecuada comprensión del comportamiento dinámico del sistema real, cuando el modelo físico es el adecuado.

Ejemplo:

Aplicaremos ahora el modelo estudiado para los siguientes datos:

$m_1 = 2$ kg
$k_1 = 4$ N/m.
$m_2 = 1$ kg
$k_2 = 2$ N/m.

Si ambas masa se desplazan 3 metros hacia la derecha de la configuración no deformada y luego se liberan, ¿cuáles son las ecuaciones de movimiento de las dos masas?

El sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de 2° orden no homogéneas, lineales y con coeficientes constantes a resolver está dado por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Con

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$ Matriz de masa

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$ Matriz de rigidez

Evaluación de las matrices para los datos de nuestro problema:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vemos que, siendo $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{K}$ matrices simétricas, $\boldsymbol{B}$ no lo es.

Determinación de los valores propios de la matriz $\boldsymbol{B}$:

Siendo para nuestro problema la matriz $\boldsymbol{B}$ una matriz de orden 2, obtendremos dos valores propios λ_1 y λ_2:

$$|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2-5\lambda+4=0 \quad \begin{cases} \Rightarrow \quad \lambda_1=1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1=\sqrt{\lambda_1}=1 \quad \text{rad/seg} \\ \Rightarrow \quad \lambda_2=4 \quad \Rightarrow \quad \omega_2=\sqrt{\lambda_2}=2 \quad \text{rad/seg} \end{cases}$$

Las frecuencias angulares se ordenan en forma creciente. Es decir,

$$\omega_1 < \omega_2$$

ω_1 y ω_2 son las frecuencias angulares o circulares (en radianes por segundo) y $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ las formas de los modos naturales de vibración. Estos son considerados parámetros dinámicos del sistema.

El modo de más baja frecuencia se lo denomina primer modo o modo fundamental. Al que le corresponde la frecuencia inmediata superior, segundo modo.

Observamos que la ecuación característica conduce a frecuencias angulares de vibración que dependen sólo de las constantes físicas del sistema (ya que son las que satisfacen $\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=0$).

Determinación de los vectores propios:

Siendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, los correspondientes vectores propios son linealmente independientes. Los obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos $\left[\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ para cada valor propio. Es decir,

Para λ_1=1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{y}=2\text{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \text{x} \\ 2\text{x} \end{bmatrix}_{x\neq 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hemos obtenido la forma del primer modo natural de vibración, o modo fundamental.

Para λ_2=4:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{y}=-\text{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{-x} \end{bmatrix}_{x\neq 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ \text{-1} \end{bmatrix}$$

Esta es entonces la forma segundo modo natural de vibración del sistema.

Conjunto fundamental de soluciones:

Ahora podremos determinar 4 funciones solución linealmente independientes, que son:

$$\boldsymbol{U}_1=\cos t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U}_2=sent\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U}_3=\cos 2t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U}_4=sen2t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneo de 2º orden será:

$$\boldsymbol{U}=c_1\boldsymbol{U}_1+c_2\boldsymbol{U}_2+c_3\boldsymbol{U}_3+c_4\boldsymbol{U}_4$$

Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{U} = c_1 \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 sent \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_4 sen2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

Las constantes c_i se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema.

En t = 0:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$c_1 = 2$$
$$c_3 = 1$$

Evaluamos la derivada primera del vector $\boldsymbol{U}$:

$$\dot{\boldsymbol{U}} = -c_1 sent \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2c_3 sen2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2c_4 \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Y planteamos en t = 0:

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

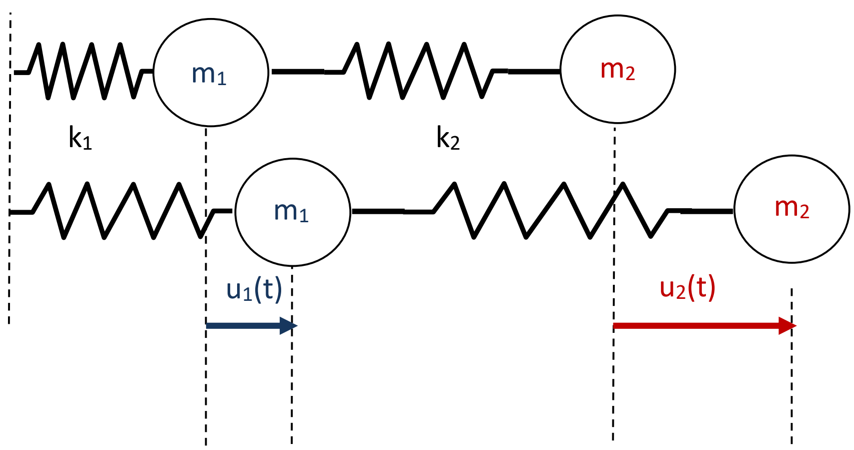
$$c_2 = c_4 = 0$$

Por lo tanto, el vector solución resulta:

$$\boldsymbol{U} = 2 \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

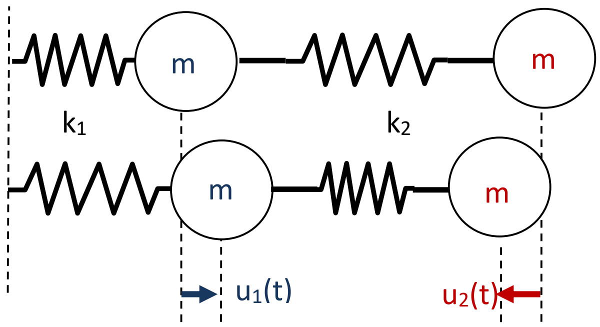
Vemos que las cantidades en que los modos contribuyen a la respuesta total quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema.

Contribución del primer modo: $\boldsymbol{U}_1 = 2 \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



Las dos masas pasan por el estado de equilibrio simultáneamente y alcanzan sus posiciones extremas simultáneamente. La amplitud del movimiento de la segunda masa es el doble que la amplitud de la primera masa.

Contribución del segundo modo: $$\boldsymbol{U}_2 = cos\,2t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



La amplitud del movimiento de la segunda masa es de igual valor, pero de signo opuesto a la amplitud de la primera masa. Las masas vibran alejándose y después acercándose de manera indefinida.

Solución general: $$\boxed{\boldsymbol{U} = 2\,cos\,t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + cos\,2t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$