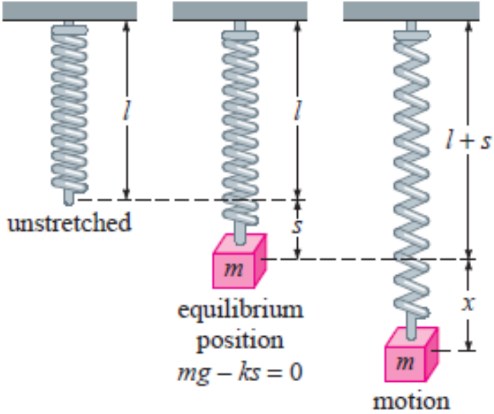
Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Facultad de Ingeniería

Recorrido

Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

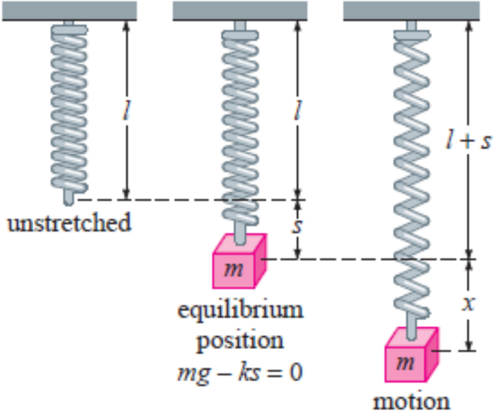
$$\mathrm{F} = ma = \mathrm{F}_r + \mathrm{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

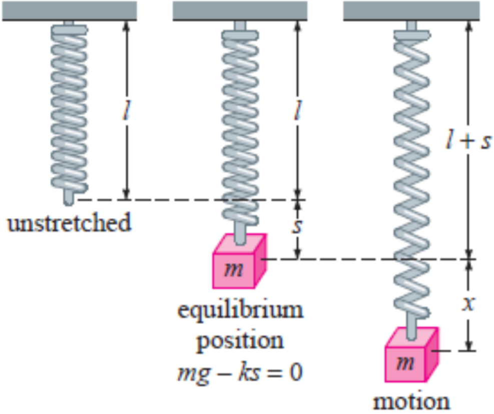
Segunda Ley de Newton:

$$\mathrm{F} = ma = \mathrm{F}_r + \mathrm{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx$$
$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$
$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento libre no amortiguado en un sistema masa-resorte.



Fuerza recuperadora elástica

$$F_r = ks = mg \text{ (módulos)}$$

Segunda Ley de Newton:

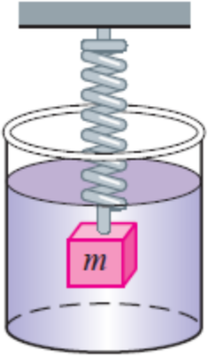
$$\mathrm{F} = ma = \mathrm{F}_r + \mathrm{P}$$

$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx$$

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



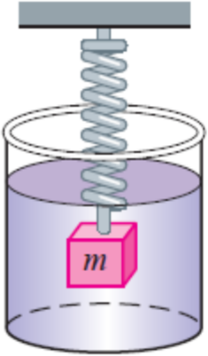
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte



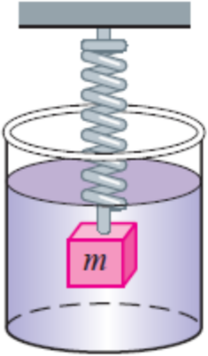
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ecuación del movimiento libre amortiguado en un sistema masa-resorte.



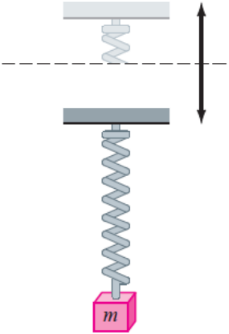
$\beta > 0$: constante de amortiguamiento.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Movimiento forzado en un sistema masa-resorte



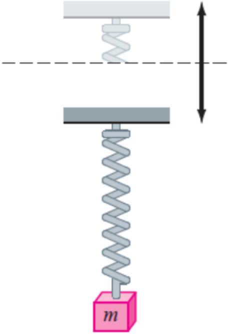
$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Movimiento forzado en un sistema masa-resorte



$f(t)$: fuerza externa.

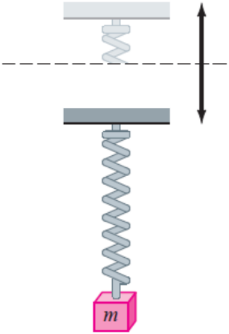
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Movimiento forzado en un sistema masa-resorte

Ecuación del movimiento forzado en un sistema masa-resorte.



$f(t)$: fuerza externa.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + f$$

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

Supuestos: P, Q, R continuas en un intervalo abierto I. $P(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
La ecuación

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

se llama homogénea y

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

se llama no homogénea si $G(x) \neq 0$ para alguna $x \in I$.
La ecuación homogénea asociada a

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

es

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0.$$

Recorrido

Recorrido

Existencia de solución única a un PVI

Resuelva: $$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

Sujeta a: $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

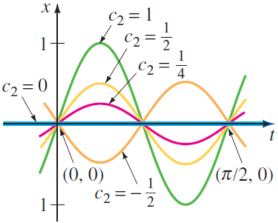
TEOREMA 4.1.1 Existencia de una solución única

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ... , $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución $y(x)$ del problema con valores iniciales (1) existe en el intervalo y es única.

Sin demostrar.

Problema con valores en la frontera

Ejemplo: $x''(t) + 16x(t) = 0$; solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$.



a) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 0;$
$x(t) = c_2 \operatorname{sen}(4t).$
Tiene infinitas soluciones.

b) $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{8}) = 0.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{8}) = 0 + c_2 = 0.$
Tiene solución única $x \equiv 0.$

c) $x(0) = 0\, x(\frac{\pi}{2}) = 1.$
$x(0) = c_1 + 0 = 0;$
$x(\frac{\pi}{2}) = c_1 + 0 = 1;$
No tiene solución.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales* c_1 *y* c_2*.*

Demostrar.
Observaciones:
1) La solución trivial $y \equiv 0$ siempre es una solución de cualquier e.d. lineal homogénea.
2) Combinaciones lineales.

Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Teorema

Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = 0,$$

entonces la función $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución de la misma e.d. cualesquiera sean los números reales c_1 y c_2.

Demostramos el caso $n = 2$; veamos que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ satisface la ED. Derivando y sustituyendo en la ED:

$$y'(x) = c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x); \quad y''(x) = c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x).$$

$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) =$

$= a_2(x)(c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x)) + a_1(x)(c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)) + a_0(x)(c_1y_1(x) + c$

$= c_1(a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)) + c_2(a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) +$

$= 0$

Recorrido

Familias de funciones LI y familias de soluciones LI

1. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente dependiente (LD) en I sii existen $c_1, ..., c_n$ no todos nulos tales que
$$c_1 f_1 + ... + c_n f_n = 0$$
$$c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t) = 0, \ t \in I.$$
2. La familia de funciones $\{f_1, ..., f_n\}$ es linealmente independiente (LI) en I en otro caso.
3. Ejemplo: $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$.
4. Mismo ejemplo en $[-1, 1]$. $\{f_1, f_2\}$ es LI en $[-1, 1]$.
5. $\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = \text{sen}^2(x)$; $f_3(x) = \cos(2x)$. No es LI (en ningún $I \subset \mathbb{R}$).

Wronskiano

Definición

El Wronskiano de una familia $\{f_1, ..., f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1,\ldots,f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades del Wronskiano

Si $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LD en I y las funciones son suficientemente derivables, entonces $W_{(f_1,...,f_n)}(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Contrarrecíproco: si existe una $x \in I$ tal que $W_{(f_1,...,f_n)}(x) \neq 0$, entonces $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia LI en I.

Teorema

Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de la e.d.
$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ *en* I. *Entonces* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *es LI en* I *si y solo si* $W_{(y_1,\cdots,y_n)}(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.

Sin demostrar.

Conjunto fundamental de soluciones de una e.d. de orden n: una familia LI de n soluciones de la e.d. en un intervalo I.

Recorrido

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
2. Ecuaciones lineales homogéneas
   - PVI y PVF
   - Dependencia e independencia lineal de soluciones
   - Teorema solución general e.d. lineal homogénea
   - ED lineales homogéneas con coeficientes constantes: 3 casos
3. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden
   - Teoremas
   - Métodos para resolver edo lineales de orden superior con coeficientes constantes
     - Método de los coeficientes indeterminados
     - Método de variación de parámetros
4. Sistemas masa resorte

Teoremas (e.d. lineal homogénea)

Teorema (Existencia de conjunto fundamental)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$*, tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I*, existe un conjunto fundamental de soluciones en* I*,* $\{y_1, \cdots y_n\}$*.*
(Sin demostrar.)

Teorema (Teorema de solución general de e.d. lineal homogénea)

Para una ecuación $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$*, tal que cada una de las funciones coeficientes* a_k *es continua en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I*, si* $\{y_1, \cdots y_n\}$ *es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en* I*, la solución general se puede expresar como*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

(Se demuestra: Teorema 4.1.5)

Recorrido

E.d. homogénea con coeficientes constantes

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = r\,e^{rx} \qquad y''(x) = r^2\,e^{rx}$$

En la e.d.:

$$ar^2\,e^{rx} + br\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

ECUACIÓN AUXILIAR

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Probamos que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ED (solos) y que son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x}(r_2 - r_1) \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejemplo Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$

Se tiene un sistema masa-resorte en el cual la masa es de un kilo, la constante del resorte es de $4\frac{N}{m}$ y la fuerza que amortigua el sistema es numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea (el coeficiente b es $5\frac{kg}{s}$).

1. Exprese la ecuación del movimiento: $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. Sabiendo que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, interprete estas condiciones iniciales: la posición inicial del cuerpo es 1m hacia abajo y la velocidad inicial es cero: parte del reposo.
3. Resuelva: $r^2 + 5r + 4 = 0$; $r_1 = -4$; $r_2 = -1$;
   $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$; $y(0) = c_1 + c_2 = 1$;
   $y'(t) = -4c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-t}$; $y'(0) = -4c_1 - c_2 = 0$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ -4c_1 - c_2 & = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}.$$

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad ar^2 + br + c = 0; \quad r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

$y_1 = e^{rx}$(solos) y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones de la ED y son LI en $I = \mathbb{R}$:

$$y_2 = xe^{rx}; \quad y_2' = (1 + rx)e^{rx}; \quad y_2'' = (2r + r^2 x)e^{rx};$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2 x) + b(1 + rx) + cx)e^{rx} \\ &= \left((2ar + b) + (ar^2 + br + c)x\right) e^{rx} \end{aligned}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1 + xr)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}(1 + xr - xr) = e^{2rx} \neq 0.$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0; \quad ar^2+br+c=0; \quad r_1=\alpha+i\beta; \quad r_2=\alpha-i\beta$$

$$\alpha=\frac{-b}{2a} \qquad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+i\operatorname{sen}(\beta x)); \qquad z_2=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)-i\operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_1=\frac{1}{2}z_1+\frac{1}{2}z_2=e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2=-\frac{i}{2}z_1+\frac{i}{2}z_2=e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Probemos que $y_1=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $y_2=e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son soluciones de la ED y que son LI en $I=\mathbb{R}$.

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_1' &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ y_1'' &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ &\quad -2\alpha\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \end{aligned}$$

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 =$$

$$= (a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) +$$

$$(a(-2\alpha\beta) + b(-\beta))\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c =$$

$$= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= 0.$$

$$a(-2\alpha\beta) + b(-\beta) =$$

$$= (2a\alpha + b)(-\beta)$$

$$= (-2a\frac{b}{2a} + b)(-\beta) = 0.$$

Luego y_1 es solución de la ED.
Similarmente se prueba que y_2 es solución (solos).

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0; \quad \alpha = \frac{-b}{2a}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x); \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}(\cos(\beta x)(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) - \operatorname{sen}(\beta x)(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)))$$

$$= e^{2\alpha x}(\beta\cos^2 x + \beta\operatorname{sen}^2 x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

Solución general:

$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x))$ es solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

Ejemplos

1) $y'' - y' - 6y = 0$

$r^2 - r - 6 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$; $r = -2$; **solución general:** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0$; $r_{1,2} = 2 \pm i$; **solución general:** $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

Recorrido

Recorrido

Función complementaria

FUNCIÓN COMPLEMENTARIA

Dada una e.d. no homogénea, $ay'' + by' + cy = G(x)$, la solución de la e.d. homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se llama FUNCIÓN COMPLEMENTARIA.

Teorema de solución general de e.d. lineal no homogénea

Teorema

Dada una e.d. lineal $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = G(x)$ *donde las funciones coeficientes* a_k, $0 \leq k \leq n$, *y* G *son continuas en algún intervalo abierto* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *en* I, *la solución general de la e.d. tiene la forma* $y = y_c + y_p$ *donde* y_c *es la función complementaria y* y_p *es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.*

Demostrar.

Teorema (Principio de superposión para ED no homogéneas)

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$
$$\vdots$$
$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

donde sólo cambian los términos independientes. Supongamos que $y_{p_1}, ..., y_{p_k}$ son soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = c_1 y_{p_1} + ... + c_k y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ...a_1 y' + a_0 y = c_1 g_1 + ... + c_k g_k.$$

Demostración dejada como ejercicio.

Recorrido

Método de los coeficientes indeterminados: Idea

Para resolver una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes,

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{1}$$

se busca la función complementaria y_c y una solución particular y_p. Esta será una solución de (1) si $a_2 y_p''(x) + a_1 y_p'(x) + a_0 y_p(x) = f(x)$, es decir, si f es una combinación lineal de y_p y sus derivadas hasta cierto orden (2 en este caso).
Este método se aplica cuando la función f es constante, polinómica, exponencial (e^x), seno, coseno, o combinación lineal de estas funciones; tales funciones f tienen la propiedad de ser combinación de sus derivadas. Lo que se hace es proponer una y_p que tenga cierta relación con f.

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

$$r^2 + 4r - 2 = 0,\ r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6};\ y_c = c_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x};$$

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C;\ y_p'(x) = 2Ax + B;\ y_p''(x) = 2A$$

$y_p''(x)+4y_p'(x)-2y_p(x) = 2A+4(2Ax+B)-2(Ax^2+Bx+C) = 2x^2-3x+6$ para toda x.

$$-2Ax^2 + (8A-2B)x + 2A + 4B - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases}$$

$A = -1;\ B = -5/2;\ C = -9;\ y_p(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9;$

$$y = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' - y' + y = 2\,\mathrm{sen}(3x)$.

$$r^2 - r + 1 = 0,\; r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i;\; y_c = e^{x/2}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

$$y_p = A\,\mathrm{sen}(3x) + B\cos(3x);$$

$$y_p' = 3A\cos(3x) - 3B\,\mathrm{sen}(3x);\; y_p'' = -9A\,\mathrm{sen}(3x) - 9B\cos(3x)$$

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-9A + 3B + A)\,\mathrm{sen}(3x) + (-9B - 3A + B)\cos(3x) = 2\,\mathrm{sen}(3x)$$

$$\begin{cases} -8A + 3B = 2 \\ -3A - 8B = 0 \end{cases}$$

$A = -\frac{16}{73};\; B = \frac{6}{73};\; y_p = -\frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{6}{73}\cos(3x)$.

$$y = e^{x/2}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)) - \frac{16}{73}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{6}{73}\cos(3x)$$

Método de los coeficientes indeterminados: Ejemplos

Resolver $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

$$r^2 - 5r + 4 = 0,\ r_1 = 4,\ r_2 = 1;\ y_c = c_1 e^{4x} + c_2 e^x$$

$$y_p = Ae^x$$

$$y_p' = y_p'' = Ae^x$$

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p$$
$$= (1 - 5 + 4)Ae^x = 0$$

$$y_p = Axe^x$$

$$y_p' = (1 + x)Ae^x;\ y_p'' = (2 + x)Ae^x$$

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x$$

$$A = -\frac{8}{3};\ y_p = -\frac{8}{3}xe^x.$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^x - \frac{8}{3}xe^x.$$

Tabla

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

Si G(x) tiene un término que es un múltiplo constante de ...	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
$\operatorname{sen} kx$, $\cos kx$	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B\cos kx + C \operatorname{sen} kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros se puede usar sin restricciones (a diferencia del método de coeficientes indeterminados) para hallar soluciones particulares de ecuaciones lineales, de diversos órdenes. Explicamos el método para ecuaciones de segundo orden, pero es aplicable a ED's de otros órdenes. Al resolver, lo aplicaremos al caso especial de ecuaciones con coefcientes constantes (para poder hallar la función complementaria).

Método de variación de parámetros

Método de variación de parámetros

Dada $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = G(x)$, con $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, se propone

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\
y_p'' &= u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + u_2' y_2' + u_2 y_2''
\end{aligned}$$

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2)$$

$$+a(u_1'' y_1 + u_1' y_1') + a(u_2'' y_2 + u_2' y_2') + (au_1' y_1' + bu_1' y_1 + au_2' y_2' + bu_2' y_2)$$

$$= a\tfrac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2) + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a} = f. \end{cases}$$

Resolver por determinantes.

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x)$$

$$y_c = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p = u_1 \cos(3x) + u_2 \operatorname{sen}(3x)$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{G}{a}. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1' \cos(3x) + u_2' \operatorname{sen}(3x) = 0 \\ u_1'(-3 \operatorname{sen}(3x)) + u_2' 3 \cos(3x) = \frac{csc(3x)}{4}. \end{cases}$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \quad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{12} x \cos(3x) + \frac{\ln|\operatorname{sen}(3x)|}{36} \operatorname{sen}(3x)$$

$$I = \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ o subintervalos de éste.}$$

Método de variación de parámetros: Ejemplo

$$4y'' + 36y = csc(3x);\;\; y_p = u_1\cos(3x) + u_2\operatorname{sen}(3x)$$

$$\begin{cases} u_1'\cos(3x) + u_2'\operatorname{sen}(3x) = 0 \\ u_1'(-3\operatorname{sen}(3x)) + u_2' 3\cos(3x) = \frac{csc(3x)}{4}. \end{cases}$$

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(3x) \\ \frac{csc(3x)}{4} & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(3x) & \operatorname{sen}(3x) \\ -3\operatorname{sen}(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix}} \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\operatorname{sen}(3x) & \frac{csc(3x)}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(3x) & \operatorname{sen}(3x) \\ -3\operatorname{sen}(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}$$

$$u_1' = -\frac{1}{12}; \qquad u_2' = \frac{\operatorname{ctg}(3x)}{12}$$

Recorrido

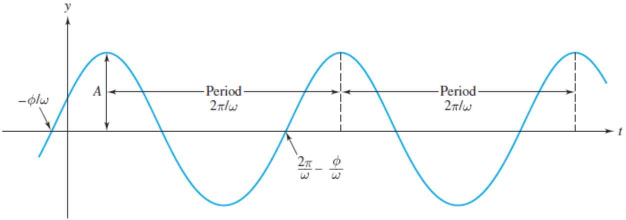
Ecuación del movimiento libre no amortiguado

$$my''(t)+by'(t)+ky(t) = f(t), \qquad \text{con } m>0,\ k>0,\ b=0,\ \text{y } f(t)=0,\ \forall t$$

$$my''+ky=0, \quad mr^2+k=0,\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad y(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$y(t)=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)=A\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\omega t)+A\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}, \quad \tan\phi=\frac{c_1}{c_2}; \qquad \text{Frecuencia natural: } \frac{\omega}{2\pi}$$



Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ m > 0,\ b > 0,\ k > 0.$$

$$mr^2 + br + k = 0 \to r_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Casos:

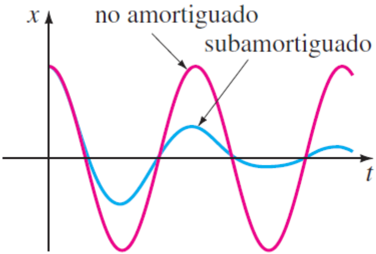
1. $b^2 - 4mk < 0$: movimiento subamortiguado.
2. $b^2 - 4mk = 0$: movimiento críticamente amortiguado.
3. $b^2 - 4mk > 0$: movimiento sobreamortiguado.

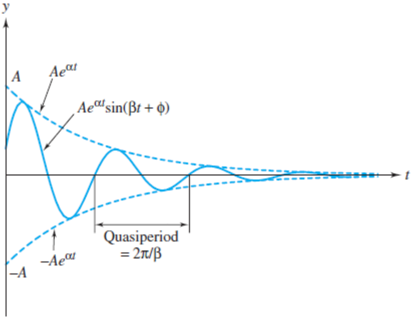
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ m > 0,\ b > 0,\ k > 0;\ mr^2 + br + k = 0.$$

Movimiento subamortiguado: $b^2 < 4mk$.

$$\alpha = -\frac{b}{2m} < 0,\ \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m};\ y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t))$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2};\ \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}; \qquad y = e^{\alpha t} A \operatorname{sen}(\beta t + \phi) \leftarrow \text{Mov. oscilatorio}$$





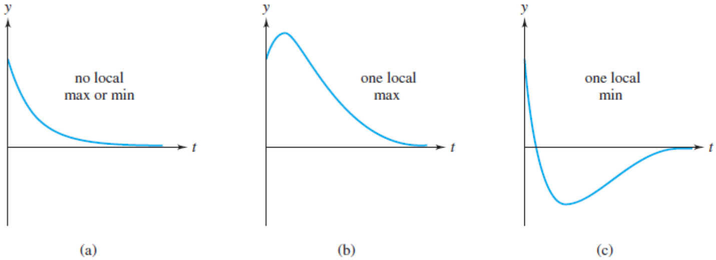
Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ m > 0,\ b > 0,\ k > 0;\ mr^2 + br + k = 0.$$

Movimiento sobreamortiguado: $b^2 > 4mk$.

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}, \quad r_1 < 0;\ r_2 < 0;$$

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \leftarrow \text{Movimiento no oscilatorio}$$



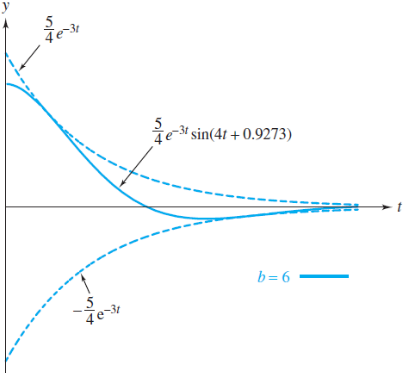
Ecuaciones del del movimiento libre amortiguado

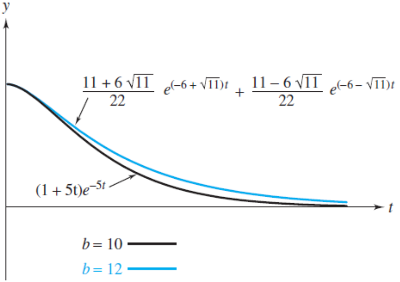
$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0,\ m > 0,\ b > 0,\ k > 0;\ mr^2 + br + k = 0.$$

Movimiento críticamente amortiguado: $b^2 = 4mk$.

$$r = -\frac{b}{2m}, \quad r < 0;\ y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \leftarrow \text{Mov. no oscliatorio}$$

Ejemplo: $y'' + by' + 25y = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad b = 6,\ 10,\ 12.$





Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t),\ m > 0,\ b \geq 0,\ k > 0;$$

$$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = F(t); \quad F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t);$$

$$y_G = y_c + y_p;$$

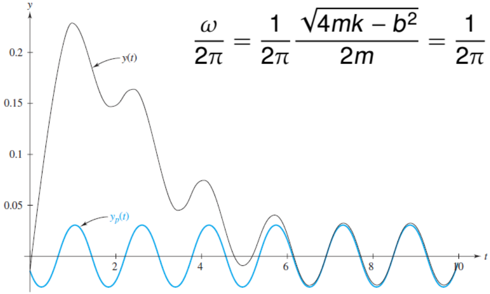
$$b > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_c(t) = 0;\ y_c: \text{ TÉRMINO TRANSITORIO.}$$

$$y_p: \text{ TÉRMINO DE ESTADO ESTABLE.}$$

Ecuaciones del movimiento forzado

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t), \quad f(t) = F_0 \cos(\gamma t);\ 0 < b^2 < 4mk;$$

$$y = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m} t + \phi\right)}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta)}_{\text{Estable}}$$



$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Figure 4.32 Convergence of $y(t)$ to the steady-state solution $y_p(t)$ when $m = 4$, $b = 6$, $k = 3$, $F_0 = 2$, $\gamma = 4$