Anexo-NÚMEROS COMPLEJOS.

Contenido

Contenido

Bibliografía recomendada:

Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, C. H. Edwards, D. E. Penny, Pearson Educación, Prentice Hall, 2009. ISBN 978-970-26-1285-8

Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, R. K. Nagle, E. B. Snaff, A. D. Snaider, Pearson Educación, 2001. ISBN 968-444-483-4

Introducción a las Señales y los Sistemas, D. K. Lindner, Mc Graw Hill, 2002. ISBN 980-373-049-5.

Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores de Frontera, D.G.Zill, M.R. Cullen, Thomson Learning, 2002.

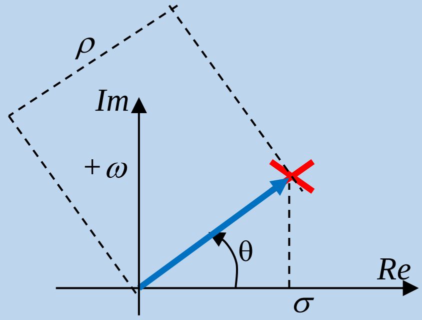
Representación de Números Complejos

Un número complejo "c" se escribe en su ***forma cartesiana*** como:

$$c = (\sigma) + j(\omega)$$

Donde σ se la llama Parte Real o Componente Real del número complejo "c", mientras que ω se la llama Parte Imaginaria o Componente Imaginaria del número complejo "c".

El número complejo "c" puede representarse gráficamente en el plano R^2, de modo que en el eje de las abscisas se represente la parte real del número complejo; mientras que en el eje de las ordenadas se representa la parte imaginaria del mismo número complejo.



También es posible asociar al número complejo un vector con origen en el origen del sistema de coordenadas, y extremos del vector en el punto que representa al número complejo en el plano R^2.

En la gráfica se puede observar que el vector que une el origen de coordenadas con el punto del plano de coordenadas cartesianas (σ,ω) representado por la cruz de color rojo, tiene una longitud o *módulo* ρ y un *argumento* o ángulo θ respecto del eje horizontal, que constituyen un par ordenado (ρ,θ) que están unívocamente vinculados con (σ,ω) mediante el teorema de Pitágoras en la forma

$$\rho^2 = \sigma^2 + \omega^2 \qquad \theta = arctg(\frac{\omega}{\sigma})$$

y las relaciones

$$\sigma = \rho \cdot \cos(\theta) \qquad \omega = \rho \cdot \sin(\theta)$$

Así el número complejo "c" expresado en forma cartesiana es posible expresarlo en términos del par ordenado (ρ,θ) mediante el reemplazo de las relaciones (2) en la expresión (1)

$$c = (\sigma) + j(\omega) = \rho \cdot [\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)] = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Donde se utiliza la denominada **Identidad de Euler**

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)$$

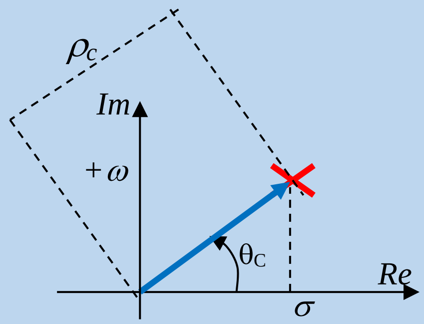
Y el número complejo "c" queda expresado en su ***forma Polar*** mediante

$$c = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Un número complejo puede representarse analíticamente en forma Cartesiana o en forma Polar, y se trata del mismo punto en el plano R^2.

Ejemplos en el primer cuadrante del Plano R^2

Sea **C1= 3 +j 4**



Entonces su módulo es $\rho_C = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, y el Argumento es $\theta_C = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \cong 0{,}927$; de modo que el número complejo **en forma polar es C1**=$\rho_C \cdot e^{j\theta_C} = 5 \cdot e^{j0{,}927}$

Sea C2= 2 +j 6

Entonces su módulo es $\rho_C = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$, y el Argumento es $\theta_C = arctg\left(\frac{6}{2}\right) \cong 1{,}249$; de modo que el número complejo **en forma polar es C1**=$\rho_C \cdot e^{j\theta_C} = \boldsymbol{\sqrt{40} \cdot e^{j1{,}249}}$

Sea C3= $\boldsymbol{5 \cdot e^{j0{,}927}}$

Entonces usando la identidad de Euler, $e^{j0{,}927} = \cos(0{,}927) + j\ \sin(0{,}927)$, el número complejo en forma cartesiana es C3= $5(\cos(0{,}927) + j\ \sin(0{,}927))$,

C3=(5 cos(0,927) + j 5 sin(0,927))= **(3,001 + j 3,999)**

Se debe destacar que el C3 es muy cercano al (3 +j 4), y su diferencia está en la aproximación $arctg\left(\frac{4}{3}\right) \cong 0{,}927$ realizada al convertir C1 a la forma polar.

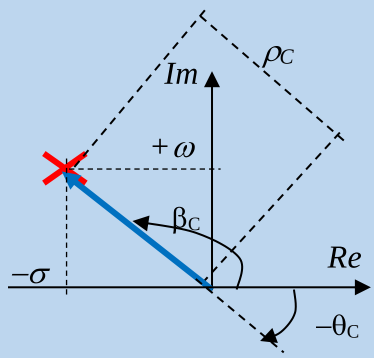
Sea C4= $\boldsymbol{3 \cdot e^{j\pi/3}}$

Entonces usando la identidad de Euler, $\boldsymbol{e^{j\pi/3}} = \cos(\boldsymbol{\pi/3}) + j\ \sin(\boldsymbol{\pi/3})$, el número complejo en forma cartesiana es C3= $3(\cos(\boldsymbol{\pi/3}) + j\ \sin(\boldsymbol{\pi/3}))$,

C3=(3 cos($\boldsymbol{\pi/3}$) + j 3 sin($\boldsymbol{\pi/3}$))= **(3/2 + j 3 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ / 2)**

Ejemplos en el segundo cuadrante del Plano R^2

Los puntos del segundo cuadrante se identifican por tener abscisas negativas y ordenadas positivas; o bien ángulos comprendidos entre pi/2 y pi



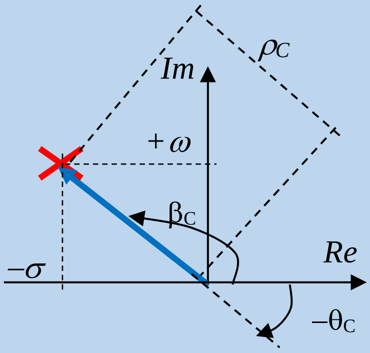
Sea **R1= -3 +j 4**

Entonces su módulo es $\rho_C = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$, y el Argumento es $\theta_C = arctg\left(\frac{4}{-3}\right)$.

Al usar cualquier calculadora el valor de la función arco tangente se reducen a ángulos del primero o cuarto cuadrante.

Así en ese caso el valor que entrega es $\theta_C = arctg\left(\frac{4}{-3}\right) \cong -0{,}927$. En número complejo resultaría es R1=$\rho_C \cdot e^{j\theta_C} = 5 \cdot e^{-j0{,}927}$. Pero si se pretende volver a la forma cartesiana desde R1= $5 \cdot e^{-j0{,}927}$, se debe usar la identidad de Euler; y así R1=(5 cos(-0,927) + j 5 sin(-0,927))= (3,001 - j 3,999); quedando erróneamente ubicado el punto en el cuarto cuadrante.

Para evitar este error, se debe corregir el ángulo entregado por la función arco tangente, considerando el cuadrante al cual pertenece el punto. Así en este caso el valor que entrega es $\theta_C = arctg\left(\frac{4}{-3}\right) \cong -0{,}927$, pero se sabe que el punto pertenece al segundo cuadrante, de modo que el ángulo que forma con el eje de abscisas positivo es $\beta_C \cong -0{,}927 + \pi$. Así en forma polar **R1=** $\boldsymbol{5 \cdot e^{j(-0{,}927+\pi)}}$**.**



Si se pretende volver a la forma cartesiana desde **R1=** $\boldsymbol{5 \cdot e^{j(-0{,}927+\pi)}}$, se debe usar la identidad de Euler; y así

R1=(5 cos(-0,927+pi) + j 5 sin(-0,927+pi)) ==(5 (-cos(-0,927)) + j 5 sin(-0,927)cos(pi))

R1=(5 (-0,60024) + j 5 (0,7998))

R1= (-3,001 + j 3,9991); quedando bien ubicado el punto en el segundo cuadrante.

Sea **R2= -3 +j 1**

Entonces su módulo es $\rho_C = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, y el Argumento es $\theta_C = arctg\left(\frac{1}{-3}\right)$, que debe corregirse por ser el punto perteneciente al segundo cuadrante, de modo que el ángulo que forma con el eje de abscisas positivo es $\beta_C \cong -0{,}32175 + \pi$. Así en forma polar **R1=** $\boldsymbol{\sqrt{10} \cdot e^{j(-0{,}32175+\pi)}}$**.**

Si se pretende volver a la forma cartesiana desde **R1=** $\boldsymbol{\sqrt{10} \cdot e^{j(-0{,}32175+\pi)}}$, se debe usar la identidad de Euler; y así

R1=$\boldsymbol{\sqrt{10}}$ (cos($\boldsymbol{-0,32175+\pi}$) + j sin($\boldsymbol{-0,32175+\pi}$))

R1=($\boldsymbol{\sqrt{10}}$ (-0,94868) + j $\boldsymbol{\sqrt{10}}$ (0,3162))=(-3 + j 1)

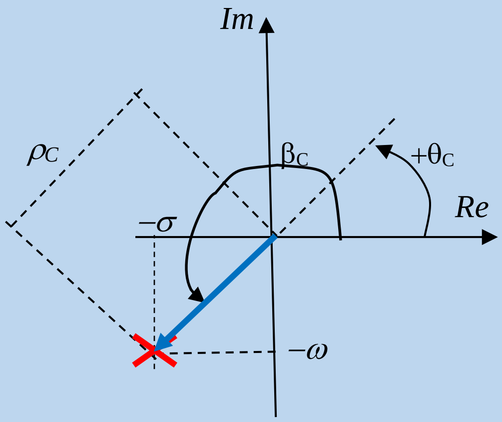
Ejemplos en el tercer cuadrante del Plano R^2

Los puntos del tercer cuadrante se identifican por tener abscisas negativas y ordenadas negativas; o bien ángulos comprendidos entre pi y 3pi/2. Los ángulos entregados por la función arco tangente para puntos del tercer cuadrante, siempre son ángulos reducidos a primer cuadrante, de modo que se debe sumar π para tener el ángulo correcto.

Sea **R1= -3 +j (-4)**

Entonces su módulo es $\rho_C = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$, y el Argumento es $\theta_C = arctg\left(\frac{-4}{-3}\right)$.

Al usar cualquier calculadora el valor de la función arco tangente se reducen a ángulos del primero o cuarto cuadrante.



Así en ese caso el valor que entrega es $\theta_C = arctg\left(\frac{-4}{-3}\right) \cong 0{,}927$. En número complejo resultaría es R1=$\rho_C \cdot e^{j\theta_C} = 5 \cdot e^{j0{,}927}$. Pero si se pretende volver a la forma cartesiana desde R1= $5 \cdot e^{j0{,}927}$, se debe usar la identidad de Euler; y así

R1=(5 cos(0,927) + j 5 sin(0,927))

R1= (3,001 + j 3,999); quedando erróneamente ubicado el punto en el primer cuadrante.

Para evitar este error, se debe corregir el ángulo entregado por la función arco tangente, considerando el cuadrante al cual pertenece el punto. Así en este caso el valor que entrega es $\theta_C = arctg\left(\frac{-4}{-3}\right) \cong 0{,}927$, pero se sabe que el punto pertenece al segundo cuadrante, de modo que el ángulo que forma con el eje de abscisas positivo es $\beta_C \cong 0{,}927 + \pi$. Así en forma polar **R1=** $\boldsymbol{5 \cdot e^{j(0{,}927+\pi)}}$**.**

Si se pretende volver a la forma cartesiana desde **R1=** $\boldsymbol{5 \cdot e^{j(0{,}927+\pi)}}$, se debe usar la identidad de Euler; y así

R1=(5 cos(0,927+pi) + j 5 sin(0,927+pi))

R1=(5 (cos(0,927) cos(pi)) + j 5 sin(0,927) cos(pi))

R1=(5 (-0,60024) + j 5 (-0,7998))

R1= (-3,001 - j 3,9991); quedando bien ubicado el punto en el tercer cuadrante.

Ejemplos en el cuarto cuadrante del Plano R^2

Los puntos del cuarto cuadrante se identifican por tener abscisas positivas y ordenadas negativas; o bien ángulos comprendidos entre 3pi/2 y 2pi; que son equivalentes a ángulos entre 0 y –pi/2. Los ángulos entregados por la función arco tangente para puntos del cuarto cuadrante, siempre son ángulos negativos del primer cuadrante, de modo que no resulta necesaria corrección alguna; o bien sumar 2 veces pi.

Sea **R1= 3 +j (-4)**

Entonces su módulo es $\rho_C = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$, y el Argumento es $\theta_C = arctg\left(\frac{-4}{3}\right)$.

Al usar cualquier calculadora el valor de la función arco tangente se reducen a ángulos del primero o cuarto cuadrante.

Así en ese caso el valor que entrega es $\theta_C = arctg\left(\frac{-4}{3}\right) \cong -0{,}927$. En número complejo resultaría es R1=$\rho_C \cdot e^{j\theta_C}$ = $5 \cdot e^{-j0{,}927}$. Pero si se pretende volver a la forma cartesiana desde R1= $5 \cdot e^{-j0{,}927}$, se debe usar la identidad de Euler; y así

R1=(5 cos(-0,927) + j 5 sin(-0,927))

R1= (3,001 - j 3,999); quedando ubicado el punto en el cuarto cuadrante.

Alternativamente, se puede corregir el ángulo entregado por la función arco tangente, considerando el cuadrante al cual pertenece el punto. Así en este caso el valor que entrega es $\theta_C = arctg\left(\frac{-4}{3}\right) \cong -0{,}927$, pero se sabe que el punto pertenece al cuarto cuadrante, de modo que el ángulo que forma con el eje de abscisas positivo es $\beta_C \cong -0{,}927 + 2\pi$. Así en forma polar **R1=** $\boldsymbol{5 \cdot e^{j(-0{,}927+2\pi)}}$**.**

Si se pretende volver a la forma cartesiana desde **R1=** $\boldsymbol{5 \cdot e^{j(-0{,}927+2\pi)}}$, se debe usar la identidad de Euler; y así

R1=(5 cos(-0,927+2pi) + j 5 sin(-0,927+2pi)) =

R1=(5 (cos(-0,927) cos(2pi)) + j 5 sin(-0,927) cos(2pi))

R1=(5 (0,60024) + j 5 (-0,7998))

R1= (3,001 - j 3,9991); quedando bien ubicado el punto en el cuarto cuadrante.

Se observa que la corrección de 2 veces pi no resulta necesaria.

EN RESUMEN:

En la conversión de Números Complejos a la forma Polar se debe considerar que:

Si el Número Complejo pertenece a:

Primer y Cuarto Cuadrante: NO requieren corrección del argumento

Segundo y Tercer Cuadrante: Al ángulo entregado por la función arctg, se le debe sumar pi

Siempre trabajar en radianes

Suma de Números Complejos

Se realiza siguiendo la regla del paralelogramo de vectores en R^2, y así se suman las componentes reales por un lado y las componentes imaginarias por otro.

$$c_1 = (\sigma_1) + j(\omega_1)$$

$$c_2 = (\sigma_2) + j(\omega_2)$$

$$c_1 + c_2 = (\sigma_1) + j(\omega_1) + (\sigma_2) + j(\omega_2) = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$$

Producto de Números Complejos

Es conveniente hacerlo mediante la forma polar, teniendo gran ventaja al hacer potencias de un número complejo.

$$c_1 = (\sigma_1) + j(\omega_1) = \rho_1 \cdot e^{j\theta_1}$$

$$c_2 = (\sigma_2) + j(\omega_2) = \rho_2 \cdot e^{j\theta_2}$$

En la forma polar

$$c_1 \cdot c_2 = \rho_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{j\theta_2}$$

$$c_1 \cdot c_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j\theta_1} \cdot e^{j\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

El Producto de dos números complejos, resulta otro número complejo con módulo igual al producto de los módulos y con argumento igual a la suma de los argumentos.

En forma cartesiana:

$$c_1 \cdot c_2 = (\sigma_1 + j \cdot \omega_1) \cdot (\sigma_2 + j \cdot \omega_2)$$

$$c_1 \cdot c_2 = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot j \cdot \omega_2 + j \cdot \omega_1 \cdot \sigma_2 + j \cdot \omega_1 \cdot j \cdot \omega_2)$$

$$c_1 \cdot c_2 = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + j^2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2) + j \cdot (\sigma_1 \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot \sigma_2)$$

$$c_1 \cdot c_2 = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \omega_1 \cdot \omega_2) + j \cdot (\sigma_1 \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot \sigma_2)$$

Se puede observar que tanto la parte real como la imaginaria del producto, son diferencias y sumas de productos de componentes reales e imaginarias de los números que se están multiplicando. Las relaciones no son tan simples como en la forma polar.

El caso de división es análogo, y resulta el cociente de los módulos y la resta de los argumentos.

Potencias de Números Complejos

Se busca elevar a la potencia k un número complejo. Para ello es conveniente hacerlo mediante la forma polar

Dado

$$c = \rho \cdot e^{j\theta}$$

Se eleva a la potencia k

$$c^k = \left(\rho \cdot e^{j\theta}\right)^k$$

Usando propiedad distributiva de la potencia respecto al producto

$$c^k = (\rho)^k \cdot \left(e^{j\theta}\right)^k$$

Y considerando que potencias de potencias se multiplican los exponentes

$$c^k = \rho^k \cdot e^{jk\theta}$$

La Potencia k de un número complejo, es un número complejo cuyo modulo es igual a la potencia k del módulo del complejo original, y con argumento igual a k veces el argumento del complejo original.

Forma Compleja de Funciones Trigonométricas

A partir de considerar la Identidad de Euler para un ángulo y para su opuesto se tiene que

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \cdot \sin(-\theta) = \cos(\theta) - j \cdot \sin(\theta)$$

Y sumando miembro a miembro

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

Se obtiene al $\cos(\theta)$ como suma de exponenciales complejas.

Mientras que restando miembro a miembro

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \cdot \sin(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

se obtiene al $\sin(\theta)$ como resta de exponenciales complejas.

Representación de Funciones de Variable Compleja

Una función de variable real y=f(x) tiene como dominio o conjunto de partida el eje "x" de las abscisas del plano R^2 (donde podemos ubicar todos los números reales), y tiene como imagen o conjunto de llegada, el eje "y" de las ordenadas del plano R^2. Así la gráfica de la función y=f(x) que vincula puntos del conjunto de partida con puntos del conjunto de llegada, es una curva en el plano R^2.

Una función de variable compleja c=F(s) tiene como dominio o conjunto de partida todo el plano R^2 (donde podemos ubicar todos los números complejos "s"); y también tiene como imagen o conjunto de llegada todo el plano R^2, donde está la imagen "c" que resultan de evaluar la F(s) para cada "s" del conjunto de partida.

En el plano R^2, o aún si se recurriese al espacio tridimensional, resulta imposible graficar la relación entre ambos conjuntos de la función de variable compleja c=F(s). Sin embargo, es posible recurrir a graficar el módulo de la función compleja F(s) como función de R^2; o su argumento como función de R^2. También es de utilidad analizar el comportamiento de la F(s) cuando se la aplica a puntos que en el dominio describe segmentos de recta, o figuras simples.

Se muestran algunos ejemplos de funciones de variable compleja simples, que son de utilidad en el tratamiento de Transformada de Laplace o Transformada de Fourier.

Función F(s)=1/s

Sea la función F(s)

$$F(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{con s distinto de cero}$$

En s=(0 +j 0) existe una singularidad, ya que la función F(s) tiende a infinito cuando el s tiende a (0 +j 0). En el contexto de Transformada de Laplace o Transformada de Fourier las singularidades de una función de variable compleja se las denomina “polos” de la función.

Si se toman algunos puntos del conjunto de partida y se evalúa la F(s)=1/s se obtiene la siguiente Tabla. Se debe tener precaución de considerar en el cálculo del argumento, el cuadrante correcto de punto en consideración.

Tabla I- Evaluación de la F(s)=1/s con s variable compleja

s	Re(s)	Im(s)	Mod(s)	Arg(s)	F(s)=1/s	Mod(1/S)	Arg(1/s)	Re(1/s)	Im(1/s)
s1	1	0	1	0	F(s1)	1	0	1	0
s2	1	0,2	1,019804	0,197396	F(s2)	0,980581	-0,1974	0,961538	-0,19231
s3	1	0,4	1,077033	0,380506	F(s3)	0,928477	-0,38051	0,862069	-0,34483
s4	1	0,6	1,16619	0,54042	F(s4)	0,857493	-0,54042	0,735294	-0,44118
s5	1	0,8	1,280625	0,674741	F(s5)	0,780869	-0,67474	0,609756	-0,4878
s6	1	1	1,414214	0,785398	F(s6)	0,707107	-0,7854	0,5	-0,5
s7	0,8	1	1,280625	0,896055	F(s7)	0,780869	-0,89606	0,487805	-0,60976
s8	0,6	1	1,16619	1,030377	F(s8)	0,857493	-1,03038	0,441176	-0,73529
s9	0,4	1	1,077033	1,19029	F(s9)	0,928477	-1,19029	0,344828	-0,86207
s10	0,2	1	1,019804	1,373401	F(s10)	0,980581	-1,3734	0,192308	-0,96154
s11	0	1	1	1,570796	F(s11)	1	-1,5708	6,13E-17	-1
s12	-0,2	1	1,019804	1,768192	F(s12)	0,980581	-1,76819	-0,19231	-0,96154
s13	-0,4	1	1,077033	1,951303	F(s13)	0,928477	-1,9513	-0,34483	-0,86207
s14	-0,6	1	1,16619	2,111216	F(s14)	0,857493	-2,11122	-0,44118	-0,73529
s15	-0,8	1	1,280625	2,245537	F(s15)	0,780869	-2,24554	-0,4878	-0,60976
s16	-1	1	1,414214	2,356194	F(s16)	0,707107	-2,35619	-0,5	-0,5
s17	-1	0,8	1,280625	2,466852	F(s17)	0,780869	-2,46685	-0,60976	-0,4878
s18	-1	0,6	1,16619	2,601173	F(s18)	0,857493	-2,60117	-0,73529	-0,44118
s19	-1	0,4	1,077033	2,761086	F(s19)	0,928477	-2,76109	-0,86207	-0,34483
s20	-1	0,2	1,019804	2,944197	F(s20)	0,980581	-2,9442	-0,96154	-0,19231
s21	-1	0	1	3,141593	F(s21)	1	-3,14159	-1	-1,2E-16

Esta Tabla de puntos se puede representar como dos gráficas en el plano R^2, tal como se puede observar en la siguientes Figura.

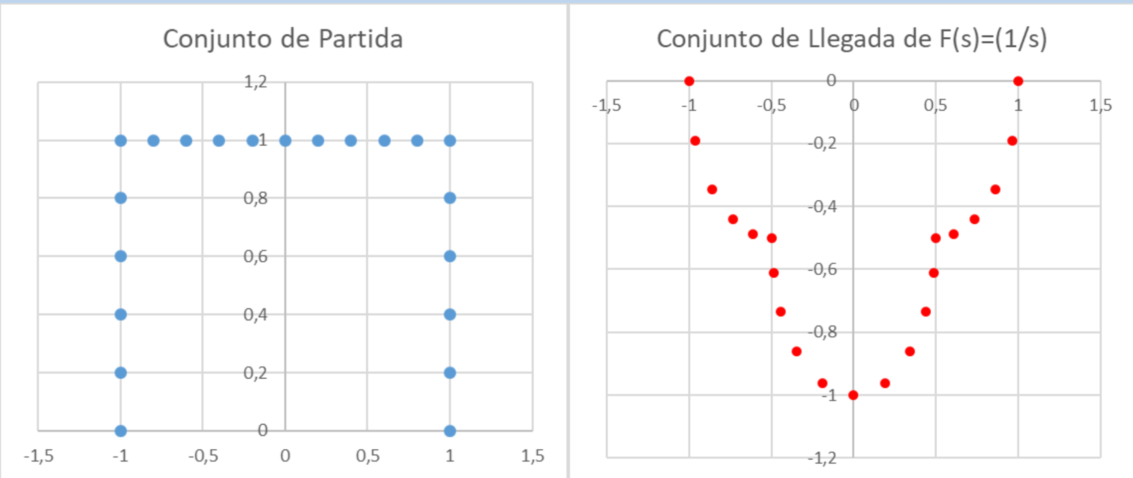


Figura 1- Segmentos de recta transformados con F(s)=1/s

El conjunto de partida son los puntos azules de la Figura 1 (s1, s2…s21 de la Tabla I), que forman segmentos de recta, que arrancando del punto (1,0) se recorren en sentido anti horario. La imagen de F(s) o conjunto de llegada, son los puntos F(s1), F(s2), …F(s21), que en la figura anterior están representados por los puntos rojos, y que a partir del punto (1,0) se recorren en sentido horario. Se puede observar que puntos del semiplano positivo de las ordenadas tienen su imagen en el semiplano negativo de las ordenas; y que los segmentos rectos tienen como imagen distintas curvas.

Si se completa la búsqueda de la imagen del *cuadrado unitario* en el conjunto de partida se tienen las siguientes figuras que se pueden observar en la Figura 2. Se puede demostrar que son semi circunferencias de radio 0,5 con centros en (0,5 +j0); (o-j0,5); (-0,5 +j0) y (0 +j0,5).

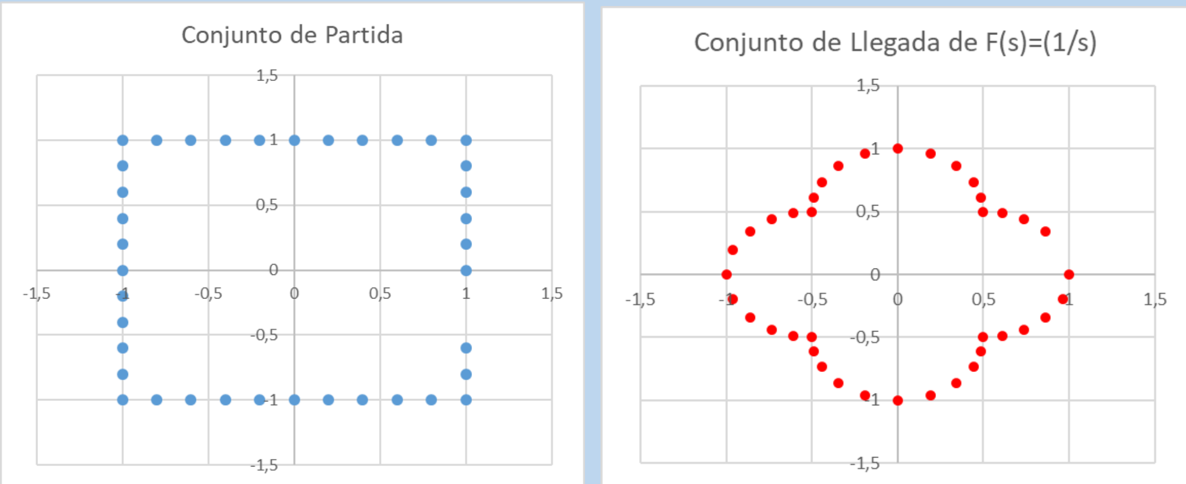


Figura 2- Cuadrado Unitario transformados con F(s)=1/s

Otra forma de considerar el comportamiento de la F(s)=1/s, de particular utilidad en Transformada de Laplace y en Transformada de Fourier, es visualizar como varía el módulo de la *F(s)*.

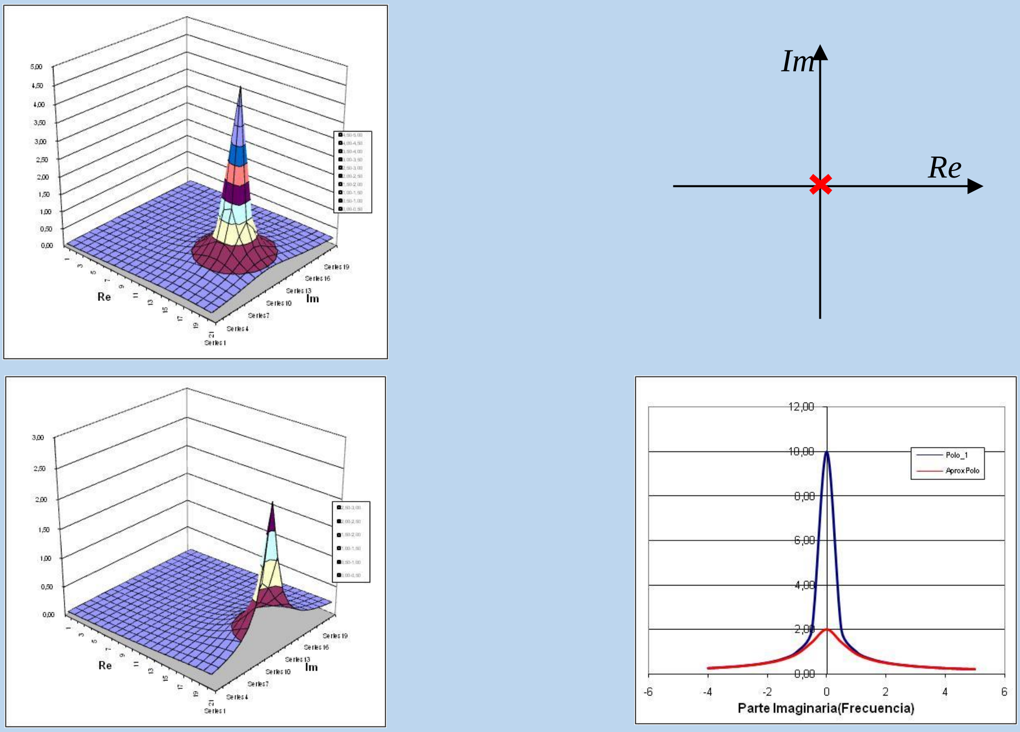


Figura 3- Módulo de F(s)=1/s

En lado izquierdo de la Figura 3 se puede observar la representación del módulo de *F(s)=1/s como una superficie. La misma es generada asignando en el eje vertical el valor del módulo de la función F(s)=1/s para cada número complejo del plano* R^2.

Así mismo, en la parte inferior derecha de la Figura 3se puede observar la curva intersección de dicha superficie con un plano coordenado con parte real constante. Estas curvas denominadas trazas del módulo de *F(s)* para planos de parte real constante, son curvas que dependen solo de la parte imaginaria, y se distinguen entre sí según el valor constante de la parte real. El comportamiento de estas curvas es tal que cuando el plano de parte real constante está más alejado de la singularidad la curva es más atenuada; y cuanto más cerca de la singularidad, la curva tiene forma más aguda, con un pico más pronunciado.

Finalmente, en la Figura 3 se representa la posición del *polo de la F(s)* en el origen del Plano s identificado *con una cruz*. Es posible destacar que en el entorno cercano de la singularidad las curvas de nivel de la superficie *del módulo de la función F(s)* son círculos con centro en la singularidad.

Función F(s)=1/(s+a)

Sea la función F(s)

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \text{con (s+a) distinto de cero}$$

En s=(-a +j 0) existe una singularidad, ya que la función F(s) tiende a infinito cuando el s tiende a (-a +j 0). Vale decir que s=(-a + j0) es un polo de la F(s). En la Figura 4 se puede observar el módulo de *F(s)*, su traza en un plano de parte real constante y la posición del polo en el Plano s. Es oportuno destacar que la función 1/(s+a) se puede obtener de la función 1/s desplazándola a s=-a. Es decir, se trata de una traslación de la función 1/s en el plano s, en a unidades hacia la izquierda o hacia los reales negativos. Esto se puede asociar a un caso particular de la propiedad de traslación en s de la Transformada de Laplace.

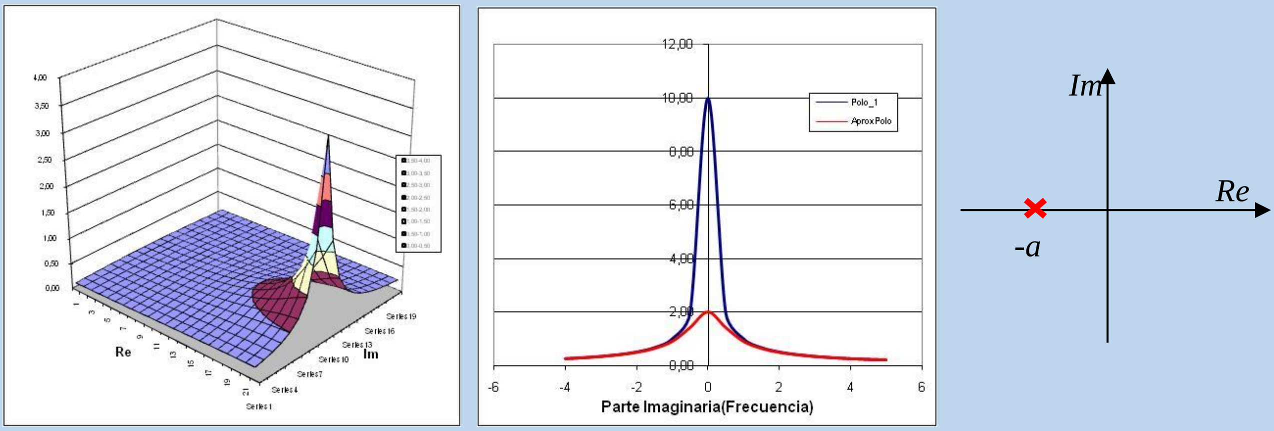


Figura 4- Módulo de F(s)=1/(s+a)

Función F(s)=a/s²

Sea la función F(s)

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \text{con s distinto de cero}$$

En s=(0 +j 0) existe una singularidad doble, ya que la función F(s) tiende a infinito cuando el s tiende a (0 +j 0); y el polinomio del denominador tiene raíz doble en s=(0+j0). Vale decir que s=(-a + j0) hay un polo repetido de la F(s). En la Figura 5 se puede observar el módulo de *F(s)*, su traza en un plano de parte real constante y la posición del polo repetido en el Plano s, que se indica con una doble cruz roja.

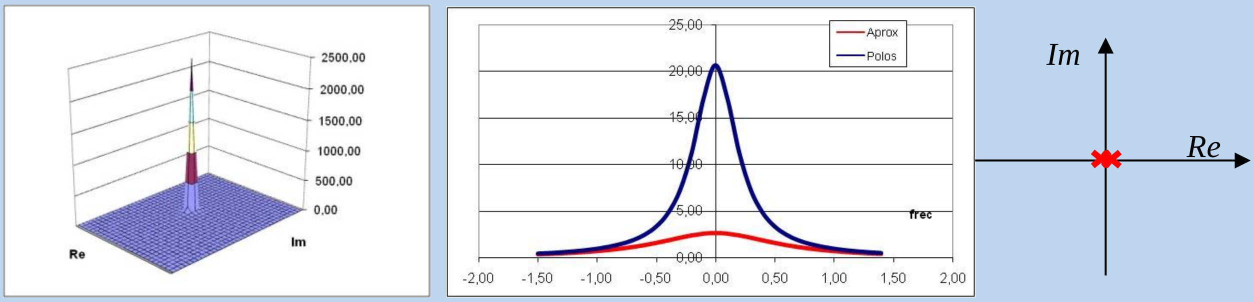


Figura 5- Módulo de F(s)=1/s^2

Función F(s)=a/(s^2+a^2)

Sea la función F(s)

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad \text{con } (s^2 + a^2) \text{ distinto de cero}$$

En s=($0 \mp ja$) existen dos singularidades o polos, ya que la función F(s) tiende a infinito cuando el s tiende a los polos. La función no tiene ceros, ya que no hay valor de s para el cual el numerador se anule. En la siguiente Figura 6 se puede observar el módulo de *F(s)*, la traza en un plano de parte real constante y la posición de los polos en el Plano s.

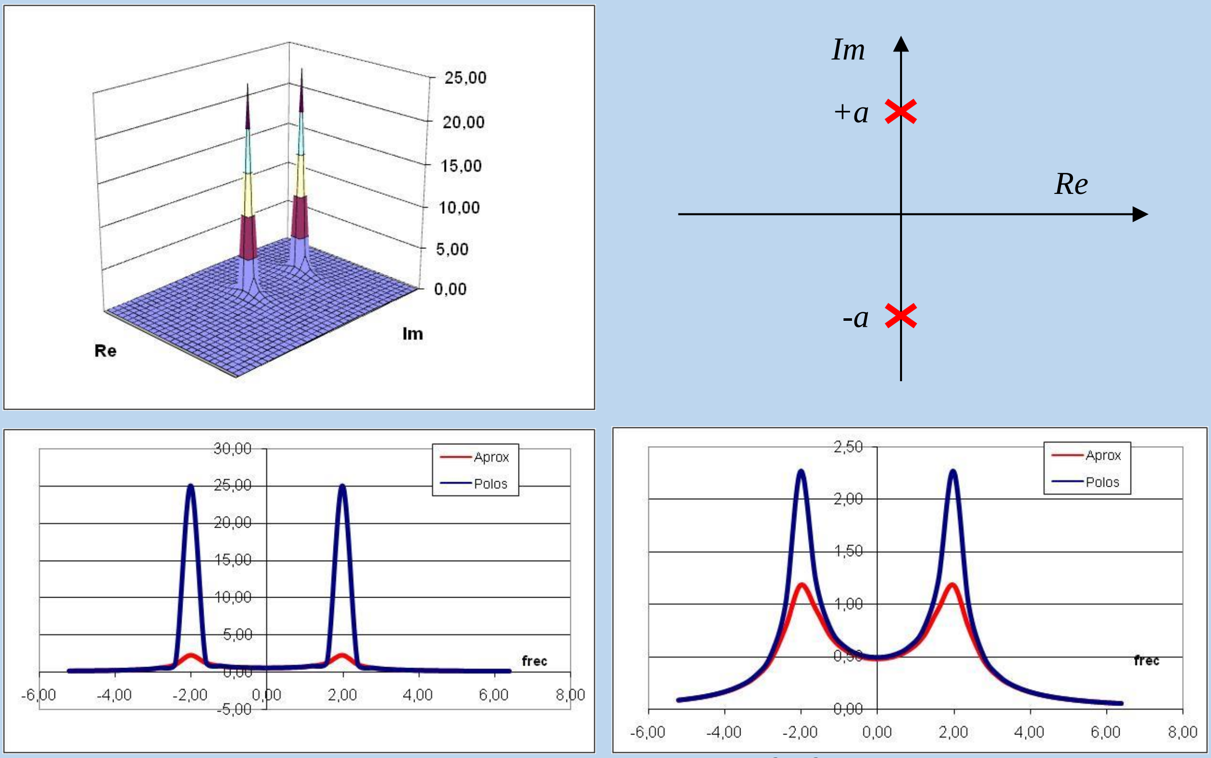


Figura 6- Módulo de F(s)=a/(s^2+a^2)

En la parte inferior de la Figura 6 se destaca que la traza del módulo de la función F(s)= $a/(s^2+a^2)$ no se anula para ningún valor de la variable Imaginaria, aunque tiende a cero cuando la variable imaginaria tiende a infinito.

Función F(s)=s/(s²+a²)

Sea la función F(s)

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \text{con } (s^2 + a^2) \text{ distinto de cero}$$

En s=$(0 \mp ja)$ existen dos singularidades o polos, ya que la función F(s) tiende a infinito cuando el s tiende a los polos. La función tiene un cero en s=(0 +j0), ya que dicho punto es cero del numerador. En la siguiente Figura 7 se puede observar el módulo de *F(s)*, la traza en un plano de parte real constante y la posición de los polos en el Plano s.

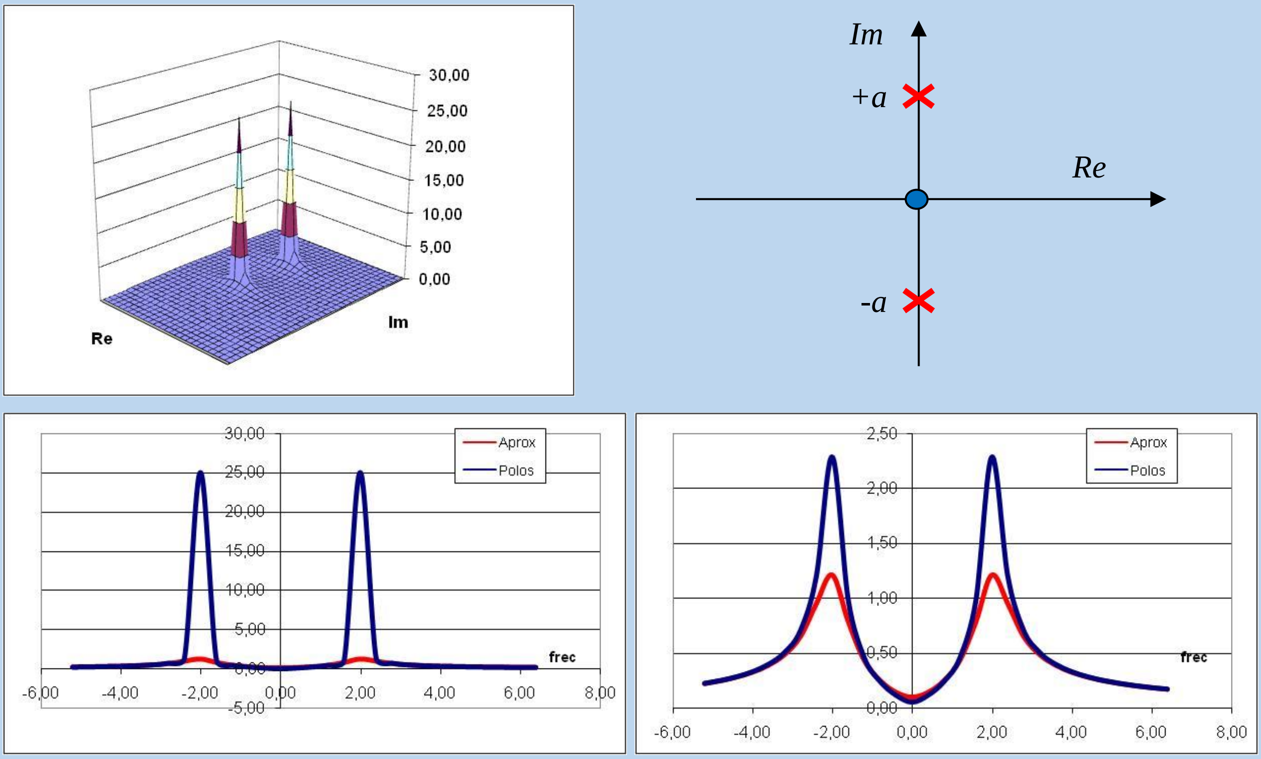


Figura 7- Módulo de F(s)=s/(s²+a²)