Transformada de Laplace. EDO de Orden 2

Contenido

Repaso-Definición de Transformada de Laplace

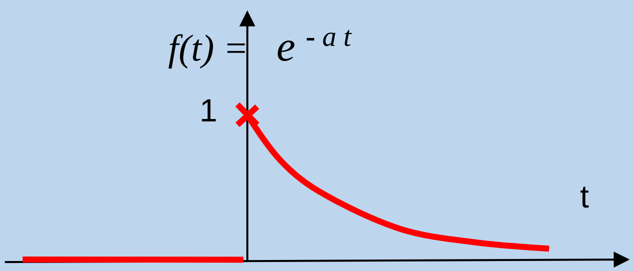
Dada una función *f(t)* de R en R, continua por tramos en el intervalo de números reales mayores o iguales a cero, se define Transformada de Laplace a la función *F(s)*, de variable compleja s, que resulta de la siguiente integral

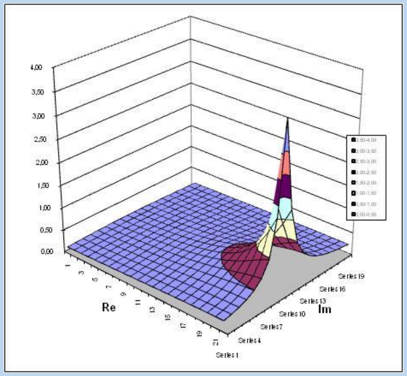
$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

De este modo, la función *f(t)* de R en R se transforma en una función *F(s)* de C en C (función de variable compleja, cuyo resultado es un número complejo). Las *F(s)* son en general FUNCIONES RACIONALES en la variable compleja s, de Coeficientes Reales, y en la que el polinomio del numerador N(s) tiene menor grado que el polinomio del denominador D(s).

Un caso simple de resolver es la Transformada de la función exponencial.

$$\boldsymbol{L[e^{-at}]} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at} \cdot dt = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} - \frac{e^{-(s+a)0}}{-(s+a)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(s+a)}} \quad \forall\, \boldsymbol{(s+a) > 0}$$





Módulo de F(s) para Re(s)>0

En A-INTEGRALES IMPROPIAS-2020, se presentan resultas los casos principales de Transformadas de Laplace de funciones en la variable t que se usan habitualmente.

Se puede destacar que siempre se debe resolver una Integral Impropia; para lo cual en general se debe hacer uso de conocimientos que se han aprendido en cursos de Análisis Matemático, tales como límite, Regla de L´Hôpital, integración por partes, y otros.

Repaso-Aplicación de Transformada de Laplace en EDO de Primer Orden

Se busca la función *x(t)* de R en R, denominada *salida del sistema*, y solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = b \cdot g(t) \qquad con\ x(0) = x_0$$

siendo conocidos los valores iniciales, los coeficientes *k* y *b*, y la *entrada al sistema*, que es el término independiente de la EDO, que en este caso es una función genérica *g(t)*.

Se aplica TL en ambos miembros de la EDO, y haciendo uso de propiedades de TL, se puede encontrar ***X(s)* que es la TL de la función *x(t)* solución de la EDO de primer orden.**

$$X(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)} + \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot G(s)$$

El problema se ha resuelto en el dominio s !!! Se distinguen dos contribuciones a la solución, que se denominan

solución natural, es la que considera la contribución de los VI de la EDO que deben ser cumplidos en t=0 por x(t)

$$X_n(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)}$$

solución forzada, es la contribución de la TL del término independiente de la EDO

$$X_f(s) = \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot G(s)$$

En ambos casos participa la denominada **Función de Transferencia H(s)** que es una característica propia de la EDO original, y cumple con la siguiente definición: *"La **Función de Transferencia H(s) de un sistema se obtiene al considerar** valores iniciales nulos, y al evaluar la transformada de la salida de un sistema, dividido la transformada de la entrada del sistema."*

$$H(s) = \frac{1}{(s+k)}$$

Notar que en la definición de H(s) sólo participa la solución forzada del sistema, y la entrada que genera dicha solución forzada.

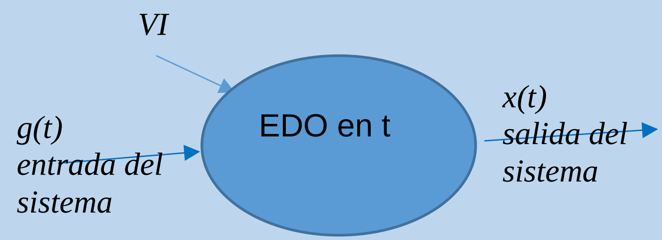
Un caso particular es cuando en la entrada del sistema se considera la **función impulso unitario o Delta de Dirac**, cuya TL es 1.

Aplicación de la Transformada de Laplace a EDO de Segundo Orden con Valores Iniciales

Se busca la función *x(t)* de R en R, denominada *salida del sistema*, y solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + d\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = b \cdot g(t) \qquad con\ x(0) = x_0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0$$

siendo conocidos los valores iniciales, los coeficientes *k*, *d* y *b*, y la *entrada al sistema*, que es el término independiente de la EDO, que en este caso es la función *g(t)*.



Se aplica Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de la EDO,

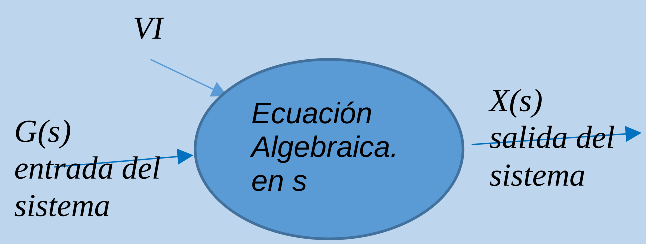
$$L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + d\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t)\right] = L[b \cdot g(t)]$$

Para tratar el lado izquierdo de la igualdad, se asume que existe la TL de la función *x(t)* solución de la EDO, entonces se tiene que

$$L[x(t)] = X(s)$$

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s \cdot X(s) - x_0$$

$$L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - v_0$$



y en base a la propiedad de preservación de las combinaciones lineales, resulta la siguiente ecuación algebraica

$$s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - v_0 + d \cdot (s \cdot X(s) - x_0) + k \cdot X(s) = b \cdot G(s)$$

De donde es posible despejar la única incógnita *X(s)*

$$X(s) = \frac{(s+d) \cdot x_0 + v_0}{(s^2 + s \cdot d + k)} + \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} \cdot b \cdot G(s)$$

El problema se ha resuelto en el dominio s !!! *X(s)* que es la TL de la función *x(t)* solución de la EDO.

Se distinguen dos contribuciones a la solución, que se denominan

solución natural, es la que considera la contribución de los VI de la EDO que deben ser cumplidos en t=0 por x(t)

$$X_n(s) = \frac{(s+d)\cdot x_0 + v_0}{(s^2 + s\cdot d + k)} = H(s)\cdot(s\cdot x_0 + d\cdot x_0 + v_0)$$

solución forzada, es la contribución de la TL del término independiente de la EDO

$$X_f(s) = \frac{1}{(s^2 + s\cdot d + k)}\cdot b\cdot G(s)$$

La **Función de Transferencia H(s)** que es una característica propia de la EDO original, resulta

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s\cdot d + k)}$$

En la **Función de Transferencia H(s)** hay dos polos, que podrán ser reales o complejos conjugados, según los coeficientes d y k de la EDO, y consecuentemente será el tipo de la *h(t)* asociada. En la $X_n(s)$, están los dos polos de la H(s) con el posible agregado de un cero, según sean los valores iniciales de la EDO. En la $X_f(s)$, están los dos polos de la H(s) con el posible agregado polos y ceros según sea la G(s), TL de la entrada al sistema o término independiente de la EDO.

En síntesis, hasta aquí se tiene que

Dada la EDO en x(t) y sus VI, en el dominio t

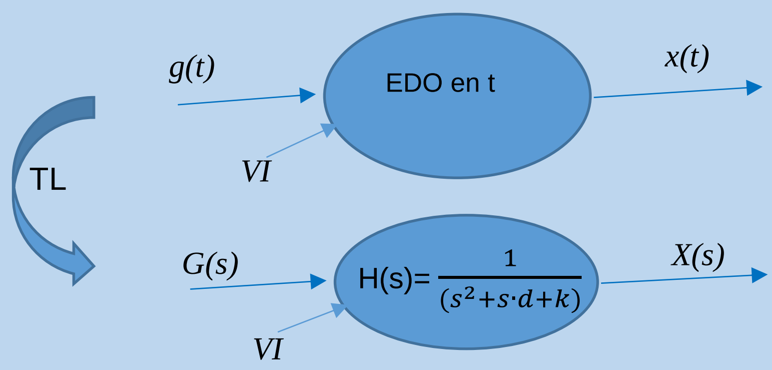
se aplica TL y sus propiedades

se obtiene una Ecuación Algebraica en X(s)

Se despeja X(s), solución en el dominio s

Para obtener x(t) se recurre a Fracciones Parciales

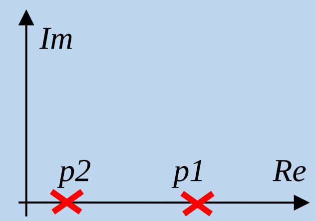
y/o a Propiedades de Transformada de Laplace



Función de Transferencia con Dos Polos Reales y Distintos

Sea una Función de Transferencia H(s) con dos polos reales y distintos

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} = \frac{1}{(s - p1)(s - p2)}$$



Con p1 y p2 números reales y distintos, tales que:

$$c = -(p1 + p2)$$

$$k = p1 \cdot p2$$

La expresión de H(s) en fracciones parciales es

$$H(s) = \frac{R1}{(s - p1)} + \frac{R2}{(s - p2)}$$

En A-FINCIONES RACIONALES-2020 se presenta como se obtienen los valores de R1 y R2. En este caso resultan,

$$R1 = \frac{1}{(p1 - p2)}; \quad R2 = \frac{1}{(p2 - p1)}$$

Y así

$$H(s) = \frac{1}{(p1 - p2)} \left\{ \frac{1}{(s - p1)} - \frac{1}{(s - p2)} \right\}$$

De donde la función h(t) es

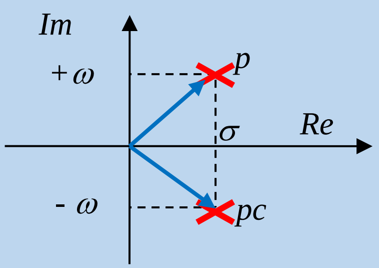
$$h(t) = \frac{1}{(p1 - p2)} \{ e^{p1 \cdot t} - e^{p2 \cdot t} \}$$

La *h(t)*respuesta en el tiempo ante un impulso unitario, es una combinación de dos funciones de tipo exponencial, cuyo comportamiento depende del signo de los polos. La amplitud de *h(t)* es inversamente proporcional a distancia entre los polos.

Función de Transferencia con Dos Polos Complejos Conjugados

Sea una Función de Transferencia H(s) con dos polos reales y distintos

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} = \frac{1}{(s-p)(s-pc)}$$



Con $p = (\sigma + j\omega)$ y $pc = (\sigma - j\omega)$ números complejos conjugados, tales que:

$$c = -(p + pc) = -2 \cdot Re(p) = -2\sigma$$

$$k = p \cdot pc = \sigma^2 + \omega^2 = \rho^2$$

La expresión de H(s) en fracciones parciales es

$$H(s) = \frac{R1}{(s-p)} + \frac{R2}{(s-pc)}$$

En A-FUNCIONES RACIONALES-2020 se presenta como se obtienen los valores de R1 y R2. En este caso resultan,

$$R1 = \frac{1}{2 \cdot Im(p)} = \frac{1}{2 \cdot j\,\omega}; \quad R2 = -R1$$

y así

$$H(s) = \frac{1}{2 \cdot j\,\omega}\left\{\frac{1}{(s-p)} - \frac{1}{(s-pc)}\right\}$$

De donde la función h(t) respuesta en el tiempo ante un impulso unitario es

$$h(t) = \frac{1}{2 \cdot j\omega}\{e^{p \cdot t} - e^{pc \cdot t}\} = \frac{1}{2 \cdot j\,\omega}\{e^{(\sigma + j\omega)\cdot t} - e^{(\sigma - j\omega)\cdot t}\} = \frac{e^{\sigma \cdot t}}{2j \cdot \omega}\{e^{+j\omega \cdot t} - e^{-j\omega \cdot t}\}$$

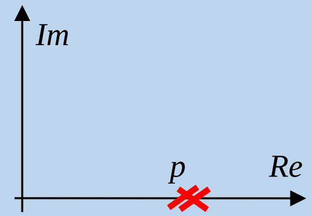
$$h(t) = \frac{e^{\sigma \cdot t}}{\omega}\sin(\omega \cdot t)$$

La amplitud de *h(t)* es inversamente proporcional a distancia entre los polos.

Función de Transferencia con Dos Polos Reales y Repetidos

Sea una Función de Transferencia H(s) con dos polos reales y distintos

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} = \frac{1}{(s-p)(s-p)}$$



Con p un número real, tal que:

$$c = -2p$$

$$k = p \cdot p$$

La expresión de H(s) en fracciones parciales es

$$H(s) = \frac{R1}{(s-p)} + \frac{R2}{(s-p)^2}$$

En A-FINCIONES RACIONALES-2020 se presenta como se obtienen los valores de R1 y R2. En este caso resultan,

$$H(s) = \frac{1}{(s-p)^2} = \frac{R1(s-p)}{(s-p)^2} + \frac{R2}{(s-p)^2} = \frac{s \cdot R1 + (R2 - p \cdot R1)}{(s-p)^2}$$

De donde

$$R1 = 0; \quad (R2 - p \cdot R1) = 1$$

Y así

$$H(s) = \frac{1}{(s-p)^2}$$

De donde la función h(t) es

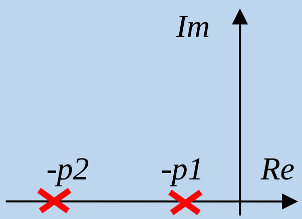
$$h(t) = t \cdot e^{p \cdot t}$$

La *h(t)*respuesta en el tiempo ante un impulso unitario, es el producto de una función lineal de t por exponencial.

Función de Transferencia de EDO de Segundo Orden. Polos con Parte Real Negativa

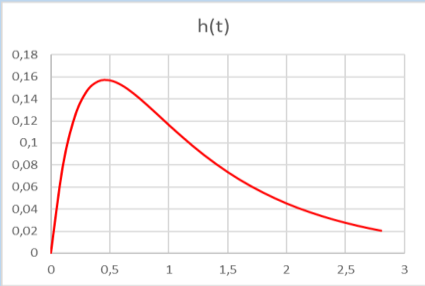
Para una EDO de Segundo Orden,

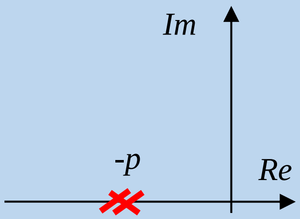
la **posición de polos** de la **Función de Transferencia** en el Plano Complejo, **definen** la **Respuesta en el tiempo a un Impulso Unitario**



$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s\cdot d + k)} = \frac{1}{(s+p1)(s+p2)}$$

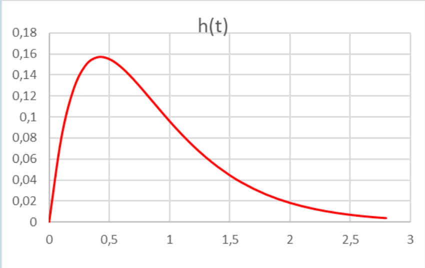
$$h(t) = \frac{1}{(-p1+p2)}\{e^{-p1\cdot t} - e^{-p2\cdot t}\}$$

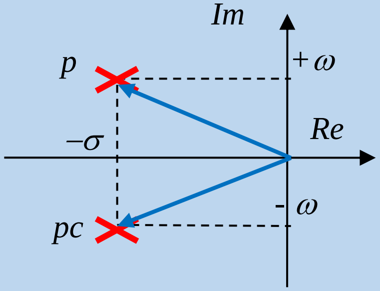




$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s\cdot d + k)} = \frac{1}{(s+p)^2}$$

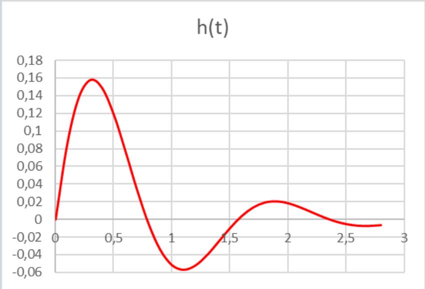
$$h(t) = t\cdot e^{-p\cdot t}$$





$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s\cdot d + k)} = \frac{1}{(s-p)(s-pc)}$$

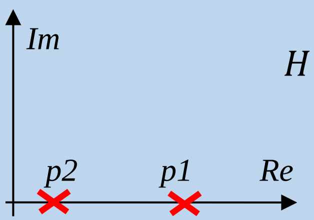
$$h(t) = \frac{e^{-\sigma\cdot t}}{\omega}\sin(\omega\cdot t)$$



Función de Transferencia de EDO de Segundo Orden. Polos con Parte Real Positiva

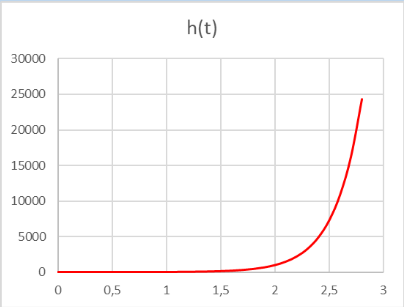
Para una EDO de Segundo Orden, según es

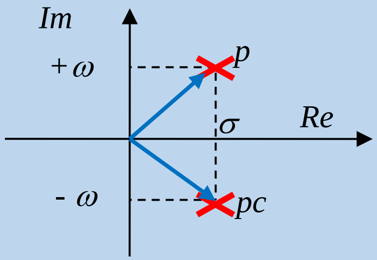
la posición de polos de la la **Función de Transferencia** en el Plano Complejo, **es** la **Respuesta en el tiempo a un Impulso Unitario**



$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} = \frac{1}{(s - p1)(s - p2)}$$

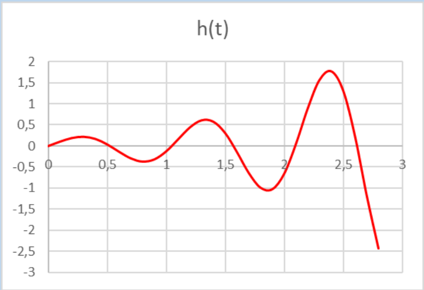
$$h(t) = \frac{1}{(p1 - p2)}\{e^{p1 \cdot t} - e^{p2 \cdot t}\}$$

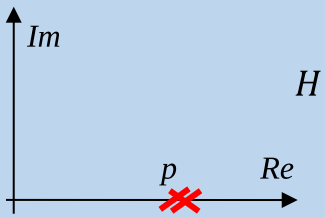




$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} = \frac{1}{(s - p)(s - pc)}$$

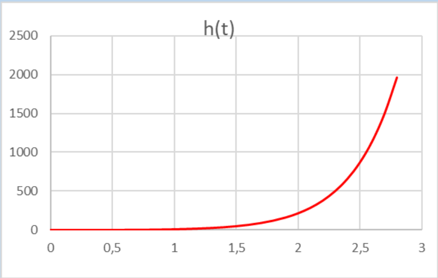
$$h(t) = \frac{e^{\sigma \cdot t}}{\omega} \sin(\omega \cdot t)$$





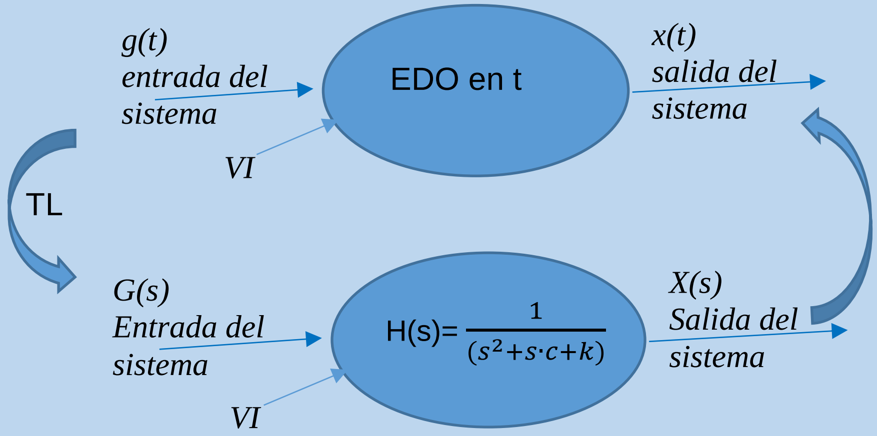
$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s \cdot d + k)} = \frac{1}{(s - p)^2}$$

$$h(t) = t \cdot e^{p \cdot t}$$



Mapa Conceptual de Aplicación de Transformada de Laplace en la solución de EDO.

Dada la EDO con TL se pasa del espacio tiempo al espacio complejo y se vuelve



Funciones Racionales;
Fracciones Parciales y
Tablas de TL,
como alternativa a TL Inversa

Se puede destacar el rol importante que cumplen las funciones

Respuesta a un Impulso Unitario

$$h(t)$$

Función de Transferencia

$$L[h(t)] = H(s) = \frac{1}{(s^2+s\cdot d+k)}$$

ya que permiten encontrar la $x_f(t)$, solución forzada de la EDO o del sistema, mediante la Operación de Convolución, entre la h(t), y $b \cdot g(t)$; término independiente de la EDO o entrada del sistema;

en el dominio del tiempo (es una integral)

$$x_f(t) = h(t) \circ b \cdot g(t)$$

$$x_f(t) = \int_0^t b \cdot g(t-\xi) \cdot e^{-k\cdot\xi} \cdot d\xi$$

o en el dominio s (es un producto de funciones racionales)

$$X_f(s) = H(s) \cdot b \cdot G(s)$$

$$X_f(s) = \frac{1}{(s^2+s\cdot d+k)} \cdot b \cdot G(s)$$

Resolver la convolución requiere pasar a fracciones parciales a la función racional $X_f(s)$, y luego pasar al dominio del tiempo, usando propiedades de TL.

El sistema dinámico queda descripto por la EDO o alternativamente por su Función de Transferencia H(S).

Ejercicios

Ejercicio 1 de Definición de TL

A partir de la identidad de Euler $e^{\theta} = \cos(\theta) + j \cdot sin(\theta)$
Demostrar que

$$\cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\cdot\omega\cdot t} + e^{-j\cdot\omega\cdot t}\right)$$

$$\sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\cdot\omega\cdot t} - e^{-j\cdot\omega\cdot t}\right)$$

Ejercicio 2 de Definición de TL

Demostrar que $L[\sin(\omega \cdot t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Demostrar que $L[\cos(\omega \cdot t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Ejercicio 3 de Propiedad de TL

Demostrar que si la función *f(t)* en el dominio de los números reales, tiene transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s, entonces se cumple que

$$L[df(t)/dt] = s\,F(s) - f(0)$$

Usar la definición de TL e integración por partes.

Ejercicio 4 de Propiedad de TL

Demostrar que si la función *f(t)* en el dominio de los números reales, tiene transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s, entonces se cumple que

$$L[d^2f(t)/dt^2] = s^2\,F(s) - s\,f(0) - df/dt(0)$$

Usar la definición de TL, integración por partes y el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicio 5 de EDO con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6 \cdot x(t) = 3 \cdot g(t) \qquad con\ x(0) = 4; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 8$$

a. **Encontrar** *X(s)=X*$X_n(s) + X_f(s)$ distinguiendo la solución natural de la solución forzada
b. **Demostrar** que la solución natural en el tiempo es
$x_n(t) = 4 \cdot [5e^{-2t} - 4e^{-3t}]$
c. Si se considera *g(t)* igual a la función escalón unitaria, **demostrar** que la solución forzada en el tiempo es
$x_f(t) = 3 \cdot \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2\cdot t} + \left(\frac{1}{3}\right)e^{-3\cdot t} + (\frac{1}{6})\right\}$
d. **Encontrar** la Función de Transferencia H(s)
e. **Demostrar la** $h(t)$ cuya TL es H(s) es
$h(t) = [e^{-2t} - e^{-3t}]$
f. **Encontrar** $c(t) = h(t) \circ 3 \cdot u(t)$ **convolución** entre $h(t)$ y 3 por la función escalón unitaria.

Ejercicio 6 de EDO con TL

En todos los casos dibujar la posición de los polos en el plano s, y cualitativamente la respuesta en el tiempo

a. Dada la siguiente EDO
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6 \cdot x(t) = \delta(t) \qquad con\ x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$
Encontrar la Función de Transferencia H(s), sabiendo que $\delta(t)$ es la función impulso unitario o Delta de Dirac.
b. Dada la siguiente EDO
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6 \cdot x(t) = 0 \qquad con\ x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1$$
Encontrar la Función de Transferencia X(s), y comparar con el resultado del inciso anterior.

Ejercicio 7 de EDO con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6 \cdot x(t) = 8 \cdot t \qquad con\ x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Encontrar la solución *x(t)*

Ejercicio 8 de Sistema Dinámico con TL

Sea un sistema dinámico con Función de Transferencia *H(s)* tal que tiene **polos en s=-3; s=-2, y ningún cero**.

a. **Expresar** *H(s)*, y dibujar un esquema de la posición de sus polos
b. **Dibujar cualitativamente la respuesta** $X_f(s)$ para una entrada igual a $g(t) = 7 \cdot e^{-5 \cdot t}$
(Hacer diagrama de la posición de polos)

Ejercicio 9 de Sistema Dinámico con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 10 \cdot x(t) = 3 \cdot e^{-6 \cdot t} \qquad con\ x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 8$$

a. **Encontrar** $X(s)=X_n(s) + X_f(s)$ distinguiendo la solución natural de la solución forzada
b. **Encontrar** que la solución natural en el tiempo $x_n(t)$
c. Si se considera *g(t)* igual a la función escalón unitaria, **Demostrar** que la solución forzada en el tiempo es
$x_f(t) = \frac{3}{4} \cdot (1 - e^{-4 \cdot t})$
d. **Encontrar** la Función de Transferencia H(s) usando la definición que considera cualquier entrada
e. **Encontrar** la Función de Transferencia H(s) usando la definición que considera como entrada la $\delta(t)$
f. **Expresar la** $h(t)$ cuya TL es H(s), y comparar con la solución natural del inc. b)
g. **Encontrar** $c(t) = h(t) \circ 3 \cdot e^{-6 \cdot t}$ **convolución** entre $h(t)$ y $3 \cdot e^{-6 \cdot t}$.

Ejercicio 10 de Sistema Dinámico con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 10 \cdot x(t) = 0 \qquad con\ x(0) = 2; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 8$$

a. **Encontrar** $x(t)$ solución de la EDO en el tiempo
b. La solución encontrada, ¿es una solución de tipo natural o de tipo forzada?
c. **Encontrar** la Función de Transferencia H(s)
d. ¿Cómo es la H(s) de esta EDO comparada con la del ejercicio anterior?

Ejercicio 11 de Sistema Dinámico con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 12\frac{dx(t)}{dt} + 36 \cdot x(t) = 3 \cdot e^{-6\cdot t} \qquad con\ x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

a. **Encontrar** la solución *x(t)*
b. **Encontrar** la solución natural
c. **Encontrar** la Función de Transferencia *H(s)*
d. **Expresar la** $h(t)$ cuya TL es *H(s)*
e. **Encontrar** $c(t) = h(t) \circ 3 \cdot e^{-6\cdot t}$ **convolución** entre $h(t)$ y $3 \cdot e^{-6\cdot t}$.
f. **Encontrar** $c(t) = h(t) \circ 3 \cdot e^{-12\cdot t}$ **convolución** entre $h(t)$ y $3 \cdot e^{-12\cdot t}$.

Ejercicio 12 de Sistema Dinámico con TL

a. **Encontrar *x(t)*,** tal que su *X(s)* tiene polos s= -4; s= $\pm$j3; y ningún cero.
b. **Encontrar** la solución de $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 9 \cdot x(t) = e^{-4\cdot t} \quad con\ x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$
c. **Encontrar** la solución de $\frac{dx(t)}{dt} + 4 \cdot x(t) = \left(\frac{1}{3}\right)\sin(3 \cdot t) \quad con\ x(0) = 0$
d. **Comparar** las soluciones de los tres incisos.

Conocimientos previos requeridos

Es NECESARIO revisar conocimientos anteriores asociados a:

INTEGRALES IMPROPIAS	Limite y Regla de L'Hôpital Integración por partes
NÚMEROS COMPLEJOS	Forma cartesiana y forma polar Identidad de Euler Operaciones de suma/resta; multiplicación/división Potencias de complejos
FUNCIONES RACIONALES	Como cociente de polinomios de coeficientes reales Como forma factorizada de polinomios Como Fracciones Parciales Cálculo de residuos Factorización de polinomios

que en parte se presentan en documentos adjuntos los siguientes :

A-COMPLEJOS-2020.pdf; A-INTEGRALES IMPROPIAS-2020.pdf y A-FUNCIONES RACIONALES-2020.pdf.

Bibliografía

(Edwards y Penny, 2009) *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, C. H. Edwards, D. E. Penny, Pearson Educación, Prentice Hall, 2009. ISBN 978-970-26-1285-8.

(Lindner, 2001) *Introducción a las Señales y los Sistemas*, D. K. Lindner, Mc Graw Hill, 2002. ISBN 980-373-049-5.

(Nagle et al., 2001) *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, R. K. Nagle, E. B. Snaff, A. D. Snaider, Pearson Educación, 2001. ISBN 968-444-483-4.

(Zill y Cullen, 2001) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*, D. G. Zill, M. R. Cullen, Thomsom Learning, 2001. ISBN 970-686-133-5.

(Zill y Cullen, 2002) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores de Frontera*, D.G.Zill, M.R. Cullen, Thomson Learning, 2002.