Suarez - Legajo 13139

c) Solucion general:

$$U = [c_1 \cos(w_1 t) + c_2 \,\mathrm{sen}(w_1 t)]\,\vec{v}_1 + [c_3 \cos(w_2 t) + c_4 \,\mathrm{sen}(w_2 t)]\,\vec{v}_2$$

$$\dot{U} = [-w_1 c_1 \,\mathrm{sen}(w_1 t) + w_1 c_2 \cos(w_1 t)]\,\vec{v}_1 + [-c_3 w_2 \,\mathrm{sen}(w_2 t) + c_4 w_2 \cos(w_2 t)]\,\vec{v}_2$$

$$\dot{U}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow w_1 c_2 \vec{v}_1 + c_4 w_2 \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_2 w_1 0{,}2965 - 0{,}4216\, c_4 w_2 = 0 \\ c_2 w_1 + c_4 w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow c_2 w_1 = -c_4 w_2$$

$$\rightarrow -c_4 w_2 0{,}2965 - 0{,}4216\, c_4 w_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} \rightarrow c_4 = 0 \\ \rightarrow c_2 = 0 \end{matrix}}$$

$$U(0) = \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}30 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 0{,}2965 + c_3(-0{,}4216) = 0{,}15 \\ c_1 + c_3 = 0{,}3 \rightarrow c_3 = 0{,}3 - c_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow c_1 0{,}2965 + (0{,}3 - c_1)(0{,}4216) = 0$$

$$c_1 0{,}2965 - 0{,}1265 + c_1 0{,}4216 = 0$$

$$c_1 0{,}7181 = 0{,}1265$$

$$\boxed{c_1 = 0{,}1762}$$

$$\boxed{\rightarrow c_3 = 0{,}1214}$$

∘ Por lo tanto la solucion general resulta:

$U(t) = [c_1 \cos(w_1 t)]\,\vec{v}_1 + [c_3 \cos(w_2 t)]\,\vec{v}_2$; Con sus respectivos valores.

Entonces, en este caso:

$$M = \begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad ; \quad K = \begin{bmatrix} 9k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad ; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B = M^{-1}K = \begin{bmatrix} 1/8m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}\frac{k}{m} & -\frac{k}{8m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B - \lambda = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}\frac{k}{m} - \lambda & -\frac{k}{8m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \lambda \end{bmatrix} \rightarrow |B - \lambda| = 0 \rightarrow \left(\frac{9}{8}\frac{k}{m} - \lambda\right)\left(\frac{k}{m} - \lambda\right) - \left(-\frac{k}{8m}\right)\left(-\frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{9}{8}\frac{k^2}{m^2} - \frac{17}{8}\frac{k}{m}(\lambda) + \lambda^2 - \frac{k^2}{8m^2} = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - \frac{17}{8}\frac{k}{m}(\lambda) + \frac{k^2}{m^2} = 0 \quad (1)$$

- Resolviendo (1)

$$\frac{\frac{17}{8}\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{8}\frac{k}{m}\right)^2 - 4(1)\frac{k^2}{m^2}}}{2} = \frac{\frac{17}{8}\frac{k}{m} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}\frac{k}{m}}{2}$$

$\rightarrow \lambda_1 = 0,7035\ k/m$

$\rightarrow \lambda_2 = 1,4215\ k/m$

$\rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \rightarrow \boxed{\omega_1 = 0,8387 \sqrt{\frac{k}{m}}}$ (1era frecuencia natural de vibración)

$\rightarrow \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} \rightarrow \boxed{\omega_2 = 1,1923 \sqrt{\frac{k}{m}}}$ (2da frec natural de vibración)

- Para λ_1:

$$\begin{bmatrix} 0,4215\ k/m & -k/8m \\ -k/m & 0,2965\ k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{k}{m}(x) + 0,2965\frac{k}{m}(y) = 0$$

$$\rightarrow y = 3,3727(x)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 0,2965 \\ 1 \end{bmatrix}}$$ (Primer modo)

- Para λ_2:

$$\begin{bmatrix} -0,2965\ k/m & -\frac{k}{8m} \\ -\frac{k}{m} & -0,4215\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -0,2965\frac{k}{m}(x) - \frac{k}{8m}(y) = 0 \rightarrow y = -2,372(x)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{V_2} = \begin{bmatrix} -0,4216 \\ 1 \end{bmatrix}}$$ (Segundo modo)

Suarez - Legajo 13139

①

Ejercicio de Oscilaciones libres

a) Diagramas de cuerpo libre

- $fk = Ku_1$
- $fk = k[u_2 - u_1]$

- Planteo de la 2da ley de Newton:

$M\ddot{u}_1 = -fk + fk$
$\to M\ddot{u}_1 = -Ku_1 + k[u_2 - u_1]$
$M\ddot{u}_1 + u_1[K+k] - u_2k$

$m\ddot{u}_2 = -fk$
$m\ddot{u}_2 = -k[u_2 - u_1]$
$m\ddot{u}_2 + u_2k - u_1k = 0$

- Con lo cual el modelo matemático que gobierna a movimiento del sistema masa resorte resulta:

$$\boxed{\begin{cases} M\ddot{u}_1 + u_1[K+k] - u_2k = 0 \\ m\ddot{u}_2 + u_2k - u_1k = 0 \end{cases}}$$

→ Escrito en forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \to \boxed{M\ddot{U} + KU = 0}$$

¡Ojo! No confundir matriz M o K con constantes M o K.

b) Para resolver el sistema anterior necesitamos 4 funciones solución LI entre sí.

→ Se propone para ello funciones del tipo:

$U = \cos(\omega t)\vec{v}$ y $\vec{U} = \text{sen}(\omega t)\vec{v}$

- Después del correspondiente desarrollo, se determina que para que el tipo de funciones anterior sea solución del problema para toda t, debe cumplirse que:

$|B - \lambda I| = 0$, siendo $B = M^{-1}K$ y $\lambda = \omega^2$

- Obtendremos en este caso dos valores propios con sus respectivos vectores propios

$\lambda_1 \to \vec{v_1}$; $\lambda_2 \to \vec{v_2}$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$
$(\omega_1 = \sqrt{\lambda_1})$ $(\omega_2 = \sqrt{\lambda_2})$