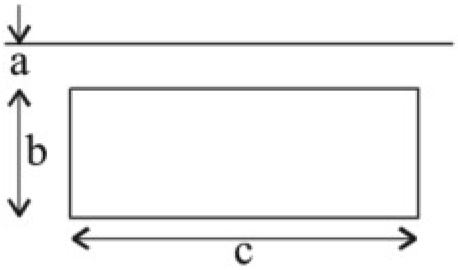
10.1- La figura muestra un conductor recto muy largo y una espira rectangular coplanar con él, en donde a = 5,00 cm y b = 15,0 cm. Si por el conductor pasa una corriente i = I_M cos(ωt), en la espira se induce una tensión de 40,0 µV. ¿Qué tensión se induciría si se desplaza la espira hasta hacer a = 1,00 cm?



Para un conductor largo y recto tenemos que el campo magnético B generado por una corriente i en un punto ubicado a una distancia r del mismo será perpendicular a la distancia y a la dirección de la corriente y de magnitud $B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

Para la tensión inducida sabemos que $\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ con $\Phi_B=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

En este caso el área será la espira de lados c y b que son los mismos en las dos configuraciones, a=5,00cm y a=1,00cm, pero la magnitud de B cuyo denominador, r, varía de a hasta a+b, no valdrá lo mismo.

$$\Phi_B=\int_a^{a+b}\int_0^c \frac{\mu_0 i\,dr\,dl}{2\pi r}=\frac{\mu_0 i c}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 i c}{2\pi}(\ln(a+b)-\ln(a))=\frac{\mu_0 i c}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

Como todos los elementos del flujo y de la tensión inducida son los mismos en las dos configuraciones salvo las relaciones de los logaritmos las tensiones estarán afectadas por la misma relación que los flujos

$$\varepsilon_{1cm}=\varepsilon_{5cm}\frac{\ln\left(\frac{16\,cm}{1\,cm}\right)}{\ln\left(\frac{20\,cm}{5\,cm}\right)}$$

10.3

Un toroide tiene un radio medio r = 7,00cm, una sección transversal A = 3,00 cm^2 y está enrollado de manera uniforme con N_1 vueltas. Un segundo toroide con N_2 vueltas está enrollado uniformemente encima del primero. Las dos bobinas están enrolladas en la misma dirección. a) ¿Cuál es su inductancia mutua? (Desprecie la variación del campo magnético a través de la sección transversal del toroide); b) Si N_1 =800 vueltas y N_2 300 vueltas, cuando la corriente i_2 =1,60 A, ¿Cuál es el flujo medio a través de cada vuelta del toroide 1?

Datos:

r_{1medio} = 0,07m
A = 0,3.10^{-3} m^2
N_1 = 800
N_2 = 300

Incógnitas:

a) M_{12}
b) $\emptyset_2$

a) $\emptyset_{B_1} = B_2.A_2 = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2\pi r}.A_2$

$$M_{12} = \frac{N_1 \emptyset_{B_1}}{i_2} = \frac{N_1 \mu_0 N_2 i_2.A_2}{2\pi r i_2} = \frac{N_1 \mu_0 N_2.A_2}{2\pi r} = \frac{300.800.\mu_0\ 0{,}3.10^{-3}}{2\pi.0{,}07} = 206\ \mu H$$

b) $\frac{N_2 \emptyset_2}{i_2} = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{2\pi r} \rightarrow \emptyset_2 = \frac{300.1{,}6.\mu_0\ 0{,}3.10^{-3}}{2\pi.0{,}07} = 411\ nWb$

EJERCICIO 10.5

Al abrir el interruptor S del circuito de la Figura 1, el inductor L hace circular una corriente i a través de R_2 de b hacía a, por lo que $V_a < V_b$ y $V_{ab} < 0$.

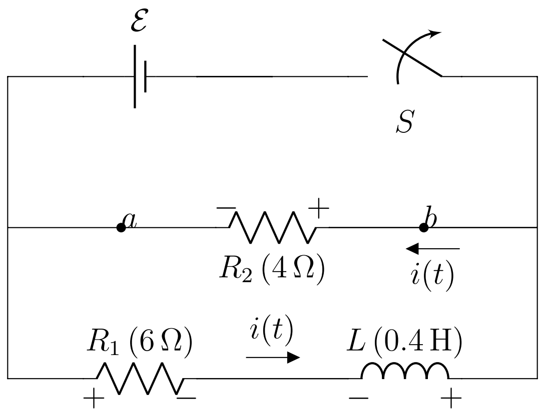


Figure 1: Circulación de corriente posterior a la apertura del interruptor S.

La corriente $i(t)$ disminuirá a medida que se consuma la energía almacenada en el inductor, y por lo tanto la diferencia de potencial V_{ab} en función del tiempo queda definida por la siguiente expresión:

$$V_{ab}(t) = -R_2 i(t) = -R_2 \left(I_0 e^{-(R_1+R_2)t/L}\right) \tag{1}$$

Si conocemos la energía U_0, almacenada en el inductor hasta el instante en el que se abre el interruptor, es posible determinar la corriente I_0 utilizando la siguiente expresión :

$$U_0 = \frac{1}{2} L I_0^2$$
$$\therefore I_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{L}} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos la siguiente expresión de V_{ab}:

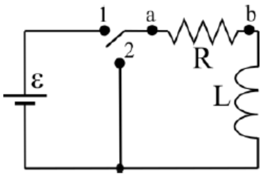
$$\boxed{V_{ab}(t) = -R_2 \left(\sqrt{\frac{2U_0}{L}}\right) e^{-(R_1+R_2)t/L}} \tag{3}$$

Si utilizamos los valores dados por el problema en (3) y evaluamos en $t = 0.1\,\text{s}$, obtenemos:

$$V_{ab}(0.1\,\text{s}) = -(4\,\Omega)\sqrt{\frac{2(7.2\,\text{J})}{(0.4\,\text{H})}}e^{-[(6\,\Omega)+(4\,\Omega)](0.1\,\text{s})/(0.4\,\text{H})}$$
$$\boxed{V_{ab}(0.1\,\text{s}) = -1.97\,\text{V}}$$

GUÍA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

10.8- En el circuito de la figura, ε = 32,0 V, R = 60,0 Ω y L = 0,850 H, después de varios segundos de estar la llave en 1, se la pasa a 2. A partir de ese instante, hallar: a) la expresión de la potencia que disipa R en función del tiempo. b) la energía total disipada en la resistencia hasta la extinción de la corriente.



NOTA: FE de ERRATA. El valor de la Resistencia es de 80 ohms !!!

Introducción

Un circuito de corriente continua produce, al cerrar el circuito eléctrico posicionando la llave en 1, que el inductor almacene energía en forma de campo magnético.
Luego de unos segundos, al abrir el circuito posicionando la llave en la posición2, se habilita otro circuito donde la fem ya no aporta energía, ahora lo hace la energía acumulada en el inductor cerrando el circuito formado por la Resistencia y el inductor.
El inductor devuelve al circuito la energía (Ley de Lenz), pasa por la Resistencia una corriente I proporcional a la energía acumulada en el inductor.

SOLUCION

Datos del Problema.

fem: 32 V. Resistencia: 80 ohms. Bobina L: 0,850 H (850 mH)
Se cierra el circuito en la Posición 1 de la llave. Se espera unos segundos.
Luego se abre el circuito de la fem, posición 2 de la llave.

1. Se solicita:
   a) Expresión de la potencia que disipa la Resistencia en función del tiempo.
   b) Energía total disipada en la Resistencia hasta la extinción de la corriente.

a) Cuando se está en la posición1. Circuito donde circula corriente en serie sobre la Resistencia y la bobina. Esta corriente es Io

Aplicando la fórmula de la corriente en función del tiempo transcurrido

$$i = Io\ e^{\frac{-R\,t}{L}} \qquad (1)$$

y siendo la Potencia $P= i^2 R$, reemplazando nos queda.

$$\boxed{P_R = Io^2\ R\ \ e^{-\frac{2R}{L}.t}}$$ RESPUESTA a)

b) La energía total disipada en la Resistencia es

U= $\int dU = \int P_R.dt$; integrado desde cero hasta un tiempo muy grande: U = ½ L . Io^2
siendo la corriente total Io = fem / R = 32V /80Ω = 0.4 A

U= ½ L $(Io)^2$

U= 0.5 x .850 x $(0.4)^2$ = 0. 068 J = $\boxed{68 \text{ mJ}}$ RESPUESTA b)

10.10

Se parte de la expresión de la densidad de energía (δ_B) magnética

$$\frac{dU}{dVol} = \delta \Rightarrow \boxed{dU = \delta_B \cdot dVol} \quad ①$$

Se integra ($\delta_B \, dVol$) y se obtiene U; pero debemos encontrar la expresión de δ_B y Vol

(*) $\boxed{\delta_B = \frac{B^2}{2\mu}}$ ② μ: permeabilidad magnética del material (C_u)

Pero B varía, en función del radio, dentro de cond. cilíndrico y también de la corriente "i" que a su vez depende de "r"

Entonces $\boxed{B = \frac{\mu i}{2\pi r}}$ ③ "i" variable según "r"

Ahora vamos por la expresión de "i"

para eso nos valemos de la densidad de corriente J, que es uniforme en todo el volumen $J = cte$

$$J = \frac{I}{A} \quad y \quad J = \frac{i}{A_r} \quad (A_r: \text{área para } r)$$

I total: máxima

$$\frac{i}{A_r} = \frac{I}{A} \Rightarrow i = I \frac{A_r}{A} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$\boxed{i = I \frac{r^2}{R^2}} \quad ④ \longrightarrow \text{sustituyo en } ③$$

$$B = \frac{\mu i}{2\pi r} = \frac{\mu I r^2}{2\pi r \cdot R^2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{r}{R^2}\right)} \quad ⑤ \longrightarrow \text{sustituyo en } ②$$

② $\delta_B = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\left[\frac{\mu I}{2\pi}\frac{r}{R^2}\right]^2}{2\mu} = \frac{\frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2}\left(\frac{r^2}{R^4}\right)}{2\mu}$

$$\boxed{\delta_B = \frac{\mu I^2}{8\pi^2}\frac{r^2}{R^4}}$$

Ya con ésto en la expresión ①

$$\boxed{dU = \delta_B \, dVol} \quad ①$$

nos queda dar la expresión dVol

$dVol = d(Vol) = d(L\pi r^2) = $ "$2\pi r L \, dr$"

Teng δ_B y dVol, sustituyo en ① y luego integro

10.11

Cuando la llave está mucho tiempo en la posición 1, el capacitor tiene carga máxima y en este caso no hay corriente, tiene el capacitor una energía almacenada: $U_{máx} = \frac{1}{2}C.V^2$

Una vez puesta la llave en posición 2 la energía va oscilando entre L y C, supuestos ideales, por lo que usaremos el principio de conservación de la energía en este caso.

$$U_{máx} = U_C + U_L \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{1}{2}C.V^2 = \tfrac{1}{2}C.v^2 + \tfrac{1}{2}L.I^2 \qquad \Rightarrow \qquad V^2 = v^2 + \tfrac{L}{C}.I^2$$

$$V^2 = v^2 + \tfrac{L}{C}.I^2$$

$$V^2 = (12{,}7V)^2 + \frac{0{,}33H}{0{,}0012F}.(0{,}768A)^2$$

$$V^2 = 161{,}29.V^2 + 275\ x\ 0{,}59.V^2 \qquad \Rightarrow \qquad V^2 = 161{,}29.V^2 + 162{,}20.V^2 = 324{,}49.V^2$$

$$V \cong 18V$$