

Funciones vectoriales

Facultad de Ingeniería

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

Definición

Una función con valores vectoriales es una función del tipo

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad t \rightarrow r(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Definición

Una función con valores vectoriales es una función del tipo

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad t \rightarrow r(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son las **funciones componentes** de la función r y cada una es una función escalar.

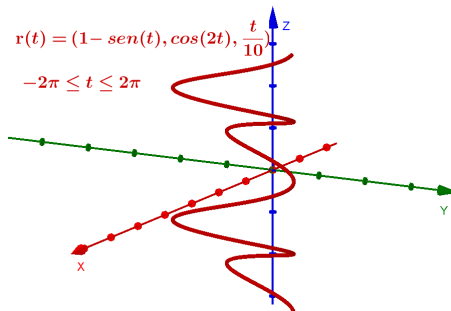
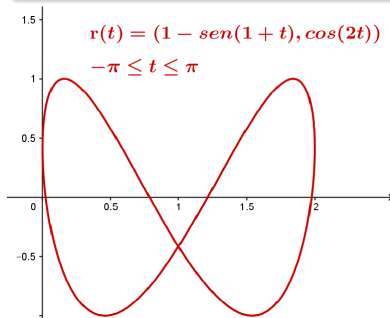
Funciones con valores vectoriales

Definición

Una función con valores vectoriales es una función del tipo

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad t \rightarrow r(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son las **funciones componentes** de la función r y cada una es una función escalar.



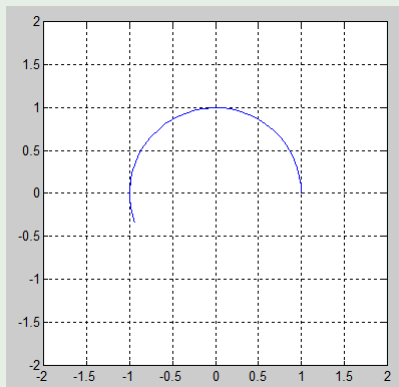
Ejemplo

1. $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

Ejemplos de funciones vectoriales

Ejemplo

1. $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

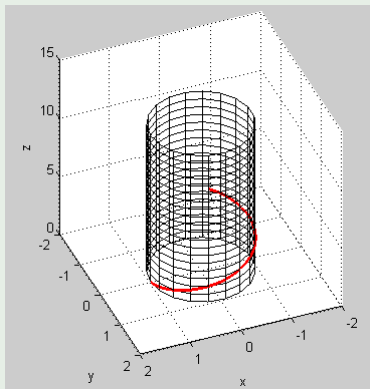


Ejemplo

2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$.

Ejemplo

2. $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



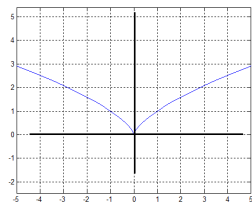
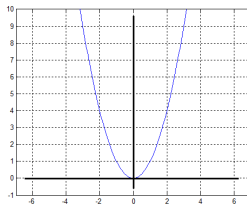
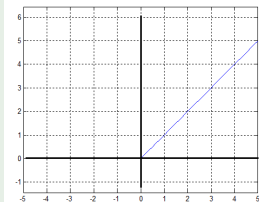
Ejemplos de funciones vectoriales

Ejemplo

3. $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. $r(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. $r(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.



1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- **Límite y continuidad**
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|r(t) - L\| < \varepsilon$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|r(t) - L\| < \varepsilon$.

Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|r(t) - L\| < \varepsilon$.

Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que

$r = (f_1, \dots, f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, \dots, n$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|r(t) - L\| < \varepsilon$.

Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que

$r = (f_1, \dots, f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, \dots, n$.

SIN DEMOSTRAR

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces r es continua en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces r es continua en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$ y $t_0 \in [a, b]$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces r es continua en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Teorema

*Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$ y $t_0 \in [a, b]$.
 r es continua en t_0 si y solo si f_i es continua en t_0 , $i = 1, \dots, n$.*

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces r es continua en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Teorema

*Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$ y $t_0 \in [a, b]$.
 r es continua en t_0 si y solo si f_i es continua en t_0 , $i = 1, \dots, n$.*

DEMOSTRAR

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos primero que $r = (f_1, \dots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0 .

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos primero que $r = (f_1, \dots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0 .

Como f_i es una función definida en $[a, b]$ y tiene valores reales, por lo aprendido en AM1, sabemos que habremos probado que f_i es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos primero que $r = (f_1, \dots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0 .

Como f_i es una función definida en $[a, b]$ y tiene valores reales, por lo aprendido en AM1, sabemos que habremos probado que f_i es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$.

Por hipótesis sabemos que r es continua en t_0 y, según la definición de continuidad, esto significa que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$; a su vez, esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f_1(t), \dots, f_n(t)) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)).$$

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos primero que $r = (f_1, \dots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0 .

Como f_i es una función definida en $[a, b]$ y tiene valores reales, por lo aprendido en AM1, sabemos que habremos probado que f_i es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$.

Por hipótesis sabemos que r es continua en t_0 y, según la definición de continuidad, esto significa que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$; a su vez, esto implica que

$\lim_{t \rightarrow t_0} (f_1(t), \dots, f_n(t)) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$. Por el teorema anterior,

tenemos que $\left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos primero que $r = (f_1, \dots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0 .

Como f_i es una función definida en $[a, b]$ y tiene valores reales, por lo aprendido en AM1, sabemos que habremos probado que f_i es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$.

Por hipótesis sabemos que r es continua en t_0 y, según la definición de continuidad, esto significa que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$; a su vez, esto implica que

$\lim_{t \rightarrow t_0} (f_1(t), \dots, f_n(t)) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$. Por el teorema anterior,

tenemos que $\left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$.

En particular, $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$, con lo cual f_i es continua en t_0 .

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes f_1, \dots, f_n , son continuas en t_0 . Según la definición, habremos probado que r es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes f_1, \dots, f_n , son continuas en t_0 . Según la definición, habremos probado que r es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Ahora bien, $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right)$ de acuerdo a la propiedad anterior; así

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes f_1, \dots, f_n , son continuas en t_0 . Según la definición, habremos probado que r es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Ahora bien, $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right)$ de acuerdo a la propiedad anterior; así

$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$, ya que cada una de las funciones f_i son continuas en t_0 por hipótesis;

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes f_1, \dots, f_n , son continuas en t_0 . Según la definición, habremos probado que r es continua en t_0 si probamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Ahora bien, $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right)$ de acuerdo a la propiedad anterior; así

$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$, ya que cada una de las funciones f_i son continuas en t_0 por hipótesis; pero $(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)) = r(t_0)$ y la prueba ha concluido.

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- **Derivación de funciones vectoriales**
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de r con respecto a t en t_0 por

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de r con respecto a t en t_0 por

$$r'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de r con respecto a t en t_0 por

$$r'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

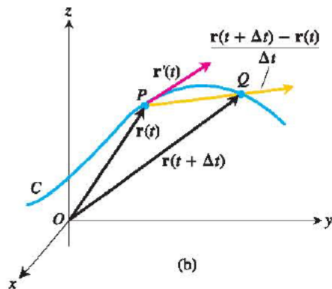
Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de r con respecto a t en t_0 por

$$r'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$ y $t_0 \in (a, b)$.

Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$ y $t_0 \in (a, b)$.

Entonces $r'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$.

Teorema

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $r = (f_1, \dots, f_n)$ y $t_0 \in (a, b)$.

Entonces $r'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$.

DEMOSTRACIÓN DEJADA COMO TAREA

Definición

Una función vectorial r definida en $[a, b]$ es una curva suave si r' es continua y $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Definición

Una función vectorial r definida en $[a, b]$ es una curva **suave** si r' es continua y $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Por otra parte, se dice que r define una **curva suave por partes** si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (2t, 2t)$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (2t, 2t)$;
- $r(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (2t, 2t)$;
- $r(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (3t^2, 3t^2)$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (2t, 2t)$;
- $r(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (3t^2, 3t^2)$;
- $r(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

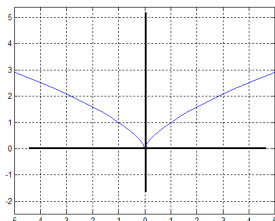
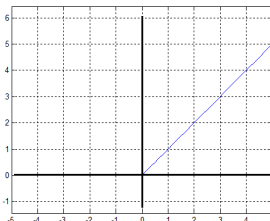
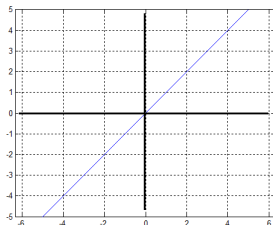
Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (2t, 2t)$;
- $r(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (3t^2, 3t^2)$;
- $r(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. $r'(t) = (3t^2, 2t)$.

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $r(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (1, 1)$;
- $r(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (2t, 2t)$;
- $r(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $r'(t) = (3t^2, 3t^2)$;
- $r(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. $r'(t) = (3t^2, 2t)$.



Si \mathbf{r} es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces

- 1 La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$.
- 2 La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez $= \|\mathbf{v}\|$.
- 3 La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.
- 4 Si $\mathbf{v} \neq 0$, el vector unitario $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es la dirección del movimiento en el instante t .

Reglas de derivación de funciones vectoriales

Reglas de derivación de funciones vectoriales: demostrar alguna en clase, todas en casa. La del producto vectorial está incompleta en el libro.

Teorema

Sean u y v funciones vectoriales derivables de t , C un vector constante, c un escalar y f una función escalar de una variable real derivable.

Función constante $\frac{dC}{dt} = 0$

Múltiplos escalares $\frac{d}{dt}[cu(t)] = cu'(t)$

$$\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$$

Suma y resta $\frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] = u'(t) \pm v'(t)$

Producto punto $\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$

Producto vectorial $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$

Regla de la cadena $\frac{d}{dt}[u(f(t))] = f'(t)u'(f(t))$

Derivada del producto vectorial

Producto vectorial:

Producto vectorial:

sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ funciones vectoriales y probemos que $\frac{d}{dt}[u \times v] = u' \times v + u \times v'$.

Derivada del producto vectorial

Producto vectorial:

sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ funciones vectoriales y probemos que $\frac{d}{dt}[u \times v] = u' \times v + u \times v'$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[u \times v] &= \frac{d}{dt} (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\&= \left(\frac{d}{dt}(u_2 v_3 - u_3 v_2), \frac{d}{dt}(u_3 v_1 - u_1 v_3), \frac{d}{dt}(u_1 v_2 - u_2 v_1) \right) \\&= (u'_2 v_3 + u_2 v'_3 - u'_3 v_2 - u_3 v'_2, u'_3 v_1 + u_3 v'_1 - u'_1 v_3 - u_1 v'_3, \\&\quad u'_1 v_2 + u_1 v'_2 - u'_2 v_1 - u_2 v'_1) \\&= (u'_2 v_3 - u'_3 v_2, u'_3 v_1 - u'_1 v_3, u'_1 v_2 - u'_2 v_1) \\&\quad + (u_2 v'_3 - u_3 v'_2, u_3 v'_1 - u_1 v'_3, u_1 v'_2 - u_2 v'_1) \\&= u' \times v + u \times v'.\end{aligned}$$

Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:

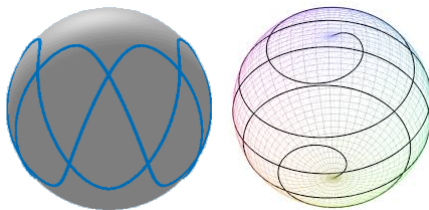
Si $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de magnitud constante (i.e. $|r(t)| = cte$ en $[a, b]$), entonces $r(t)$ es ortogonal a $r'(t)$ en todo $t \in [a, b]$.

Funciones vectoriales de magnitud constante

Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:

Si $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de magnitud constante (i.e. $|r(t)| = cte$ en $[a, b]$), entonces $r(t)$ es ortogonal a $r'(t)$ en todo $t \in [a, b]$.



DEMOSTRAR

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$.

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$.

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$.

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0,$$

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0,$$

lo cual prueba que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son ortogonales para todo $t \in [a, b]$.

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

Definición

Una función vectorial derivable R es una **antiderivada** de una función vectorial r en un intervalo I si $R'(t) = r(t)$ para todo $t \in I$.

Definición

Una función vectorial derivable R es una **antiderivada** de una función vectorial r en un intervalo I si $R'(t) = r(t)$ para todo $t \in I$.

La **integral indefinida** de r con respecto a t en I es el conjunto de todas las antiderivadas de r en I y se denota por $\int r(t)dt$. Si R es cualquier antiderivada de r , entonces

$$\int r(t)dt = R(t) + C,$$

donde C es un vector constante arbitrario.

Integración de funciones vectoriales

Definición

Una función vectorial derivable R es una **antiderivada** de una función vectorial r en un intervalo I si $R'(t) = r(t)$ para todo $t \in I$.

La **integral indefinida** de r con respecto a t en I es el conjunto de todas las antiderivadas de r en I y se denota por $\int r(t)dt$. Si R es cualquier antiderivada de r , entonces

$$\int r(t)dt = R(t) + C,$$

donde C es un vector constante arbitrario.

Si las funciones componentes de $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ son integrables en $[a, b]$, entonces r es **integrable** en $[a, b]$ y la **integral definida** de r en $[a, b]$ es

$$\int_a^b r(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt \right).$$

Ejemplo: antiderivar $r(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $r(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1) dt = (\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $r(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1) dt = (\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\int_0^\pi r(t) dt$.

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $r(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1) dt = (\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\int_0^\pi r(t) dt$.

$$\int_0^\pi (\cos t, t^2, e^t + 1) dt = \left(\int_0^\pi \cos t dt, \int_0^\pi t^2 dt, \int_0^\pi (e^t + 1) dt \right)$$

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $r(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1) dt = (\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\int_0^\pi r(t) dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\cos t, t^2, e^t + 1) dt &= \left(\int_0^\pi \cos t dt, \int_0^\pi t^2 dt, \int_0^\pi (e^t + 1) dt \right) \\ &= \left(\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t \right) \Big|_0^\pi \end{aligned}$$

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $r(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1) dt = (\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\int_0^\pi r(t) dt$.

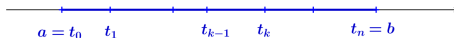
$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\cos t, t^2, e^t + 1) dt &= \left(\int_0^\pi \cos t dt, \int_0^\pi t^2 dt, \int_0^\pi (e^t + 1) dt \right) \\ &= (\sin t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) \Big|_0^\pi = (0, \frac{\pi^3}{3}, e^\pi + \pi - 1). \end{aligned}$$

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

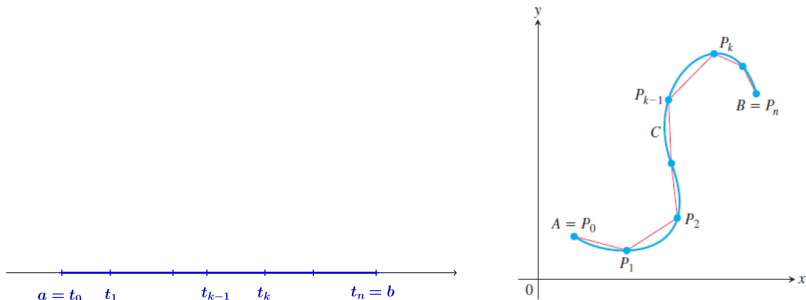
Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva C .



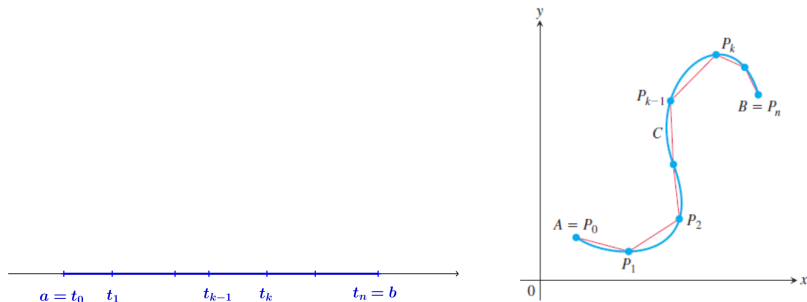
Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva C .



Longitud de arco

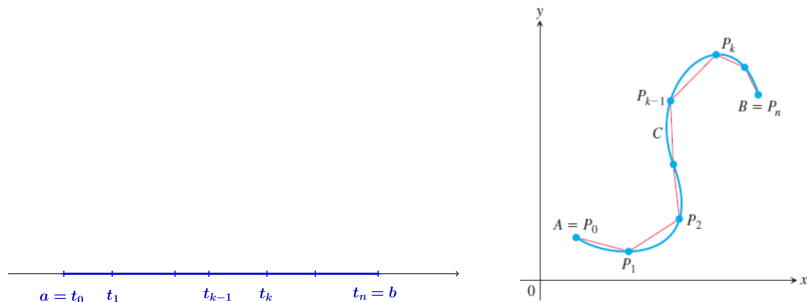
Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva C .



Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$, induce una partición en C .

Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva C .

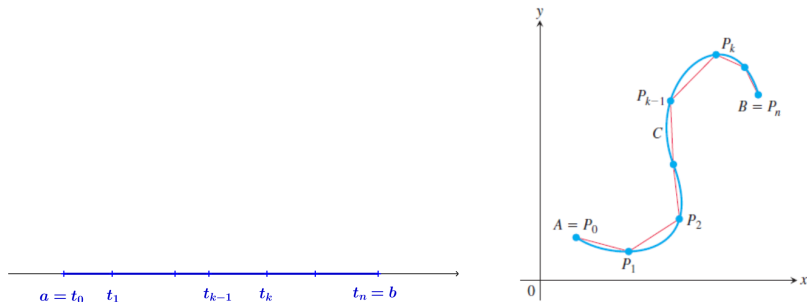


Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$, induce una partición en C .

Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k .

Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva C .

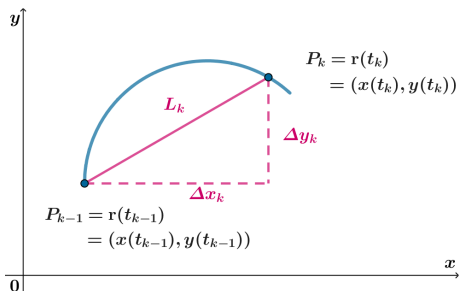


Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$, induce una partición en C .

Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k . Sumaremos las longitudes de los segmentos L_k , con extremos en los puntos $P_{k-1} = \mathbf{r}(t_{k-1})$ y $P_k = \mathbf{r}(t_k)$, para $k = 1, \dots, n$.

Longitud de arco

Aproximaremos la longitud de cada subarco por medio de la longitud del segmento L_k :



$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Si las funciones componentes de r , x y y (funciones de t) satisfacen (cada una) las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, entonces existen puntos t_k^* y t_k^{**} en (t_{k-1}, t_k) tales que

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = x'(t_k^*)\Delta t_k$$

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k^{**})(t_k - t_{k-1}) = y'(t_k^{**})\Delta t_k$$

Así

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*)\Delta t_k)^2 + (y'(t_k^{**})\Delta t_k)^2}$$

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** L se aproxima por

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k.$$

Aunque esta no es una suma de Riemann, si las funciones x' y y' son continuas en $[a, b]$, el límite para $\|P\| \rightarrow 0$ es la integral. Por esto:

Longitud de arco de una curva suave

La longitud de arco de una curva suave (plana o en el espacio) dada por $r(t)$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b , es

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** L se aproxima por

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2} \Delta t_k.$$

Aunque esta no es una suma de Riemann, si las funciones x' y y' son continuas en $[a, b]$, el límite para $\|P\| \rightarrow 0$ es la integral. Por esto:

Longitud de arco de una curva suave

La longitud de arco de una curva suave (plana o en el espacio) dada por $r(t)$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b , es

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt.$$

Definición

Dada una curva suave por r , $a \leq t \leq b$, se define la función longitud de arco (con punto base $r(a)$) para cada $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t |r'(\tau)| d\tau.$$

Observación: debe notarse que por ser suave la curva se satisfacen las hipótesis del T.F. del cálculo. Luego se tiene que s es derivable en cada $t \in [a, b]$ y

$$s'(t) = |r'(t)|.$$

Además, $ds = |r'(t)|dt$.

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave?

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |r'(\tau)| d\tau$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1),$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1), \quad 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1), \quad 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$

c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $r(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $r'(t) = (2t, 2t)$;
 $|r'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |r'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1), \quad 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$

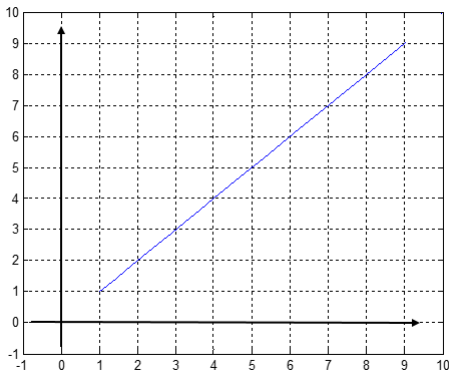
c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Despejando t en $s = \sqrt{2}(t^2 - 1)$ (lo cual es posible si $s(t)$ es biyectiva), la nueva parametrización es

$$u(s) = r(t(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right), \quad 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}$$

¿En qué difieren r y u ?

$$r(t) = (t^2, t^2), \quad 1 \leq t \leq 3, \quad \text{y} \quad u(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right), \quad 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$



$$\begin{array}{ll} r(1) = (1, 1) & u(0) = (1, 1) \\ r(2) = (4, 4) & u(\sqrt{2}) = (2, 2) \\ r(3) = (9, 9) & u(2\sqrt{2}) = (3, 3) \end{array}$$

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau$$

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$u(s) = r(t) = r\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right),$$

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$u(s) = r(t) = r\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right),$$

$$-\sqrt{2}\pi \leq s \leq \sqrt{2}\pi.$$

Parámetro longitud de arco

Dada $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^t |r'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

c) reparametrizar la curva dada por r , usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$u(s) = r(t) = r\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right),$$

$$-\sqrt{2}\pi \leq s \leq \sqrt{2}\pi.$$

Observación: el punto de la curva, $(-1, 0, \pi)$, corresponde a $r(\pi)$ y a $u(0)$.

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- **Vector tangente unitario**
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

Vector tangente unitario

Definición

Dada r definida en $[a, b]$, se define

$$T(t) := \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

si $r'(t) \neq 0$.

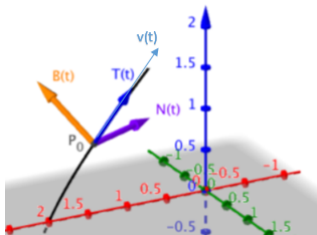
Vector tangente unitario

Definición

Dada r definida en $[a, b]$, se define

$$T(t) := \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

si $r'(t) \neq 0$.



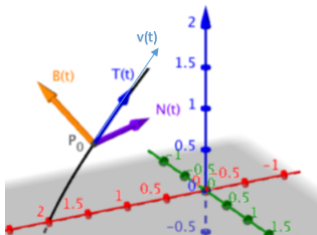
Vector tangente unitario

Definición

Dada r definida en $[a, b]$, se define

$$T(t) := \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

si $r'(t) \neq 0$.



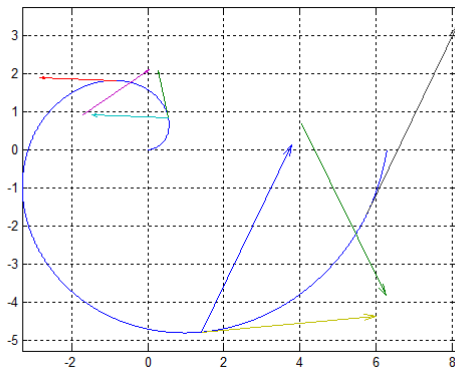
Observación: ¿Qué pasaría si $r'(t) = 0$ para algún valor de t ?

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- **Curvatura**
- Vectores normal unitario principal y binormal

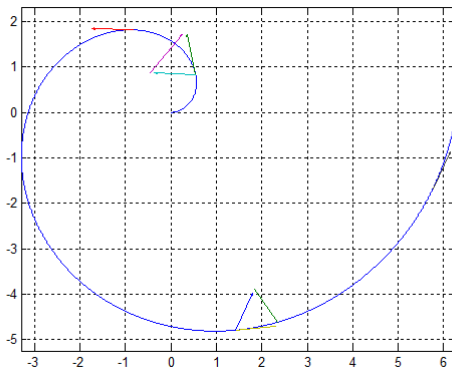
Motivación de la definición:

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Motivación de la definición:

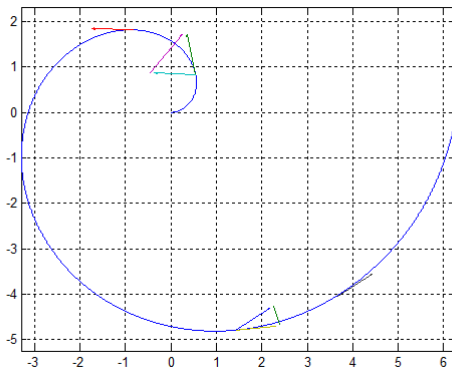
$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Curvatura

Motivación de la definición:

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left| \frac{dT}{ds} \right|$.

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left| \frac{dT}{ds} \right|$.
Fórmula de cálculo:

$$\kappa = \left| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}.$$

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left| \frac{dT}{ds} \right|$.
Fórmula de cálculo:

$$\kappa = \left| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}.$$

Observación: por la definición de $s(t) = \int_{t_0}^t |r'(\tau)| d\tau$, si r es suave se puede aplicar el T.F.Cálculo y se tiene que $s'(t) = |r'(t)|$, lo cual permite escribir

$$\frac{ds}{dt} = |r'(t)|; \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|r'(t)|}.$$

Ejemplo: recta.

Dada una recta por $r(t) = (a + dt, b + et, c + ft)$, $t \in \mathbb{R}$,

Ejemplo: recta.

Dada una recta por $r(t) = (a + dt, b + et, c + ft)$, $t \in \mathbb{R}$, la curvatura en un punto se puede calcular haciendo $\kappa(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$:

$$r'(t) = (d, e, f); \quad |r'(t)| = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2};$$

Ejemplo: recta.

Dada una recta por $r(t) = (a + dt, b + et, c + ft)$, $t \in \mathbb{R}$, la curvatura en un punto se puede calcular haciendo $\kappa(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$:

$$r'(t) = (d, e, f); \quad |r'(t)| = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2};$$

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}}(d, e, f) = \text{cte}; \quad T'(t) = (0, 0, 0); \quad \kappa(t) = 0.$$

Ejemplo: circunferencia.

Dada una circunferencia por $r(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
($R > 0$),

Ejemplo: circunferencia.

Dada una circunferencia por $r(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ($R > 0$), la curvatura en un punto se puede calcular haciendo

$$\kappa(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}:$$

$$r'(t) = (-R \sin t, R \cos t); |r'(t)| = R;$$

Ejemplo: circunferencia.

Dada una circunferencia por $r(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ($R > 0$), la curvatura en un punto se puede calcular haciendo

$$\kappa(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}:$$

$$r'(t) = (-R \sin t, R \cos t); |r'(t)| = R;$$

$$T(t) = (-\sin t, \cos t); T'(t) = (-\cos t, -\sin t); \kappa(t) = \frac{1}{R}.$$

Ejemplo: circunferencia.

Dada una circunferencia por $r(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ($R > 0$), la curvatura en un punto se puede calcular haciendo

$$\kappa(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}:$$

$$r'(t) = (-R \sin t, R \cos t); |r'(t)| = R;$$

$$T(t) = (-\sin t, \cos t); T'(t) = (-\cos t, -\sin t); \kappa(t) = \frac{1}{R}.$$

La curvatura en cada punto es la misma y depende del radio de la circunferencia.

Otra fórmula de cálculo

La siguiente fórmula es de mucha utilidad. Véase el ejercicio 29 del TP 1.

Otra fórmula de cálculo

La siguiente fórmula es de mucha utilidad. Véase el ejercicio 29 del TP 1.

La curvatura de una curva suave $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in [a, b]$, donde las funciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son dos veces derivables, está dada por la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

(un punto indica derivada primera y dos puntos indican derivada segunda, ambas con respecto a t).

1 Funciones vectoriales

- Funciones con valores vectoriales
- Límite y continuidad
- Derivación de funciones vectoriales
- Integración de funciones vectoriales
- Longitud de arco
- Vector tangente unitario
- Curvatura
- Vectores normal unitario principal y binormal

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|T| = 1;$$

$$T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

El vector $\frac{dT}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ y es ortogonal a T .

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|T| = 1; \quad T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

El vector $\frac{dT}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ y es ortogonal a T .

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$.

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|T| = 1; \quad T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

El vector $\frac{dT}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ y es ortogonal a T .

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|T| = 1; \quad T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

El vector $\frac{dT}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ y es ortogonal a T .

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$$

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|T| = 1; \quad T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

El vector $\frac{dT}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ y es ortogonal a T .

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa} = \frac{\frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}}{\left| \frac{dT}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right|}$$

Vector normal unitario principal

Recordemos:

$$|T| = 1; \quad T'(t) \cdot T(t) = 0.$$

El vector $\frac{dT}{ds}$ es, por la regla de la cadena, $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}$: es múltiplo de $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ y es ortogonal a T .

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$.

Fórmula de cálculo:

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa} = \frac{\frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}}{\left| \frac{dT}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right|} = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}.$$

El plano determinado por los vectores T y N se llama plano osculador; contiene al vector aceleración.

Vector binormal

El vector **binormal** en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $B = T \times N$.

Vector binormal

El vector **binormal** en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $B = T \times N$.

Observación: $|B| = ?$

Vector binormal

El vector **binormal** en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $B = T \times N$.

Observación: $|B| = ?$

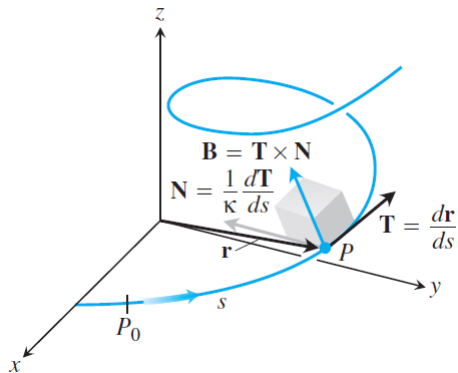
Marco TNB

Vector binormal

El vector **binormal** en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Observación: $|\mathbf{B}| = ?$

Marco TNB



Componentes tangencial y normal de la aceleración

Recordar que en una curva suave, tenemos que

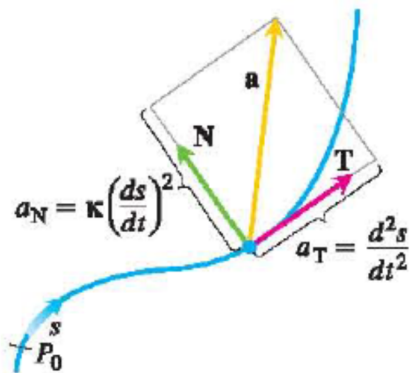
$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{dr/dt}{ds/dt} = \frac{dr}{ds}; \quad \text{luego} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = T \frac{ds}{dt}.$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(T \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{ds}{dt} T'(t) + \frac{d^2s}{dt^2} T \\ &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{dT}{ds} + \frac{d^2s}{dt^2} T \\ &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \kappa N + \frac{d^2s}{dt^2} T \\ a(t) &= |r'(t)|^2 \kappa N + \frac{d}{dt} |r'(t)| T \end{aligned}$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{a}(t) = |r'(t)|^2 \kappa \mathbf{N} + \frac{d}{dt}|r'(t)| \mathbf{T}$$



Regla de cálculo:

$$\text{De } |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_T^2 + a_N^2,$$

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$