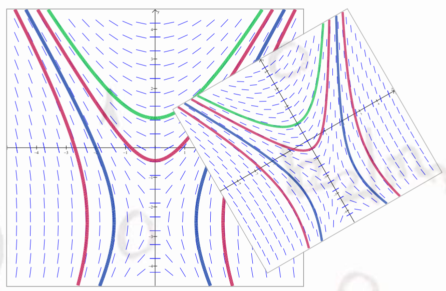
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

MATEMÁTICAS AVANZADAS



Transformada Discreta de Fourier

Ejemplos

FACULTAD DE INGENIERÍA
Universidad Nacional de Cuyo

2020

MATEMÁTICAS AVANZADAS 2020

Transformada Discreta de Fourier – Ejemplos

Ejemplo 1:

Sea el registro discreto de una determinada señal, indicado en la en la *Tabla* 1.

t_j	*Valores de la señal*
$t_0=0.0$	$f_0=1.0$
$t_1=2.3$	$f_1=0.0$
$t_2=4.6$	$f_2=0.0$
$t_3=6.9$	$f_3=1.0$
$t_4=9.2$	$f_4=0.0$
$t_5=11.5$	$f_5=0.0$
$t_6=13.8$	$f_6=0.0$
$t_7=16.1$	$f_7=1.0$

Tabla 1.

Período discreto: N=8

Frecuencia fundamental: $w_0 = \frac{2\pi}{N}$

Aproximación por Mínimos cuadrados:

$$y = \sum c_k \Phi_k(\tau)$$

Funciones Base: $\Phi_k(\tau) = e^{ik\omega_0\tau}$

Los coeficientes c_k se obtienen a partir de: $\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{f}$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones base $\Phi_k(t)$, cada c_k resulta:

$$\boxed{c_k = \frac{\langle \boldsymbol{f}.\ \boldsymbol{\Phi_k}(\tau_j)^*\rangle}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\, e^{-ikw0n}}$$

(recordamos que $(\ )^*$ representa complejo conjugado)

Para k=0 obtenemos:

$$c_0 = \frac{\langle \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi_k}(t_j)^*\rangle}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\, e^0 = 3/8$$

c_0 es la media aritmética del vector $\boldsymbol{f}$.

El resto de los valores de c_k los calculamos a partir de un código en Matlab o Scilab. Los resultados se indican en la *Tabla* 2.

k	c_k	$\lvert c_k \rvert$
-4	- 0.125	0.125
-3	0.125	0.125
-2	0.125 - 0.25i	0.2795
-1	0.125	0.125
0	0.375	0.375
1	0.125	0.125
2	0.125 + 0.25i	0.2795
3	0.125	0.125

Tabla 2.

En la *Figura* 1. se muestran las funciones de aproximación y_1, y_2, y_3, obtenidas cada una de ellas con las 3, 5 y 7 primeras funciones base respectivamente. Al añadir el término correspondiente a c_{-4}, y considerando la parte real de la aproximación, ésta pasa por todos los puntos dato, tal como muestra la curva y_4

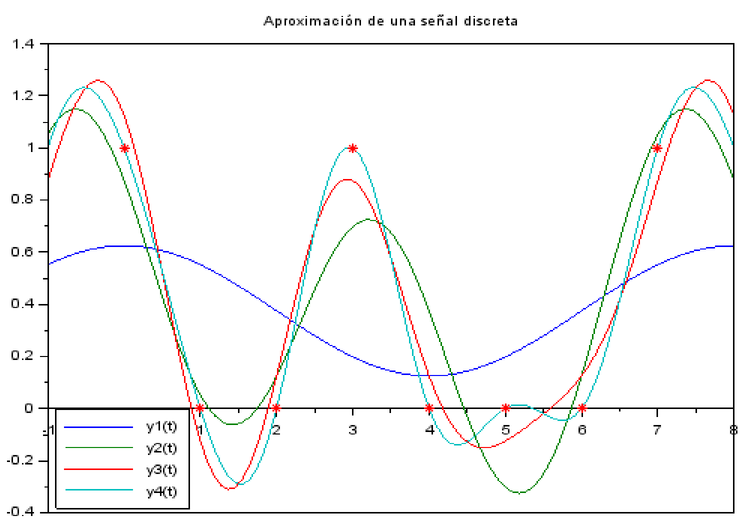


Figura 1.

En la *Figura* 2. se representan los valores de $|c_k|$ en función de k, obteniendo el *espectro* asociado a los datos.

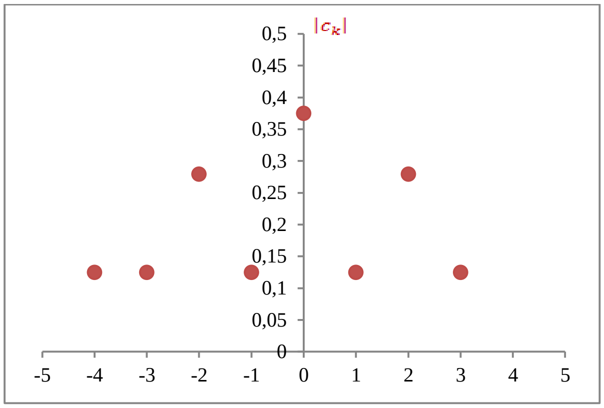


Figura 2.

Con el comando *fft* de Matlab o Scilab, a partir del vector dato ***f***, se obtienen las componentes de la *Transformada Discreta de Fourier*. Para nuestro ejemplo tenemos siguientes valores:

$$C = [\ 0.375 \quad 0.125 \quad 0.125 - 0.25i \quad 0.125 \ - 0.125 \quad 0.125 \quad 0.125 + 0.25i \quad 0.125\ ]$$

Observamos que son la solución al problema dado, sólo que el orden corresponde a:

$$c_0, c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}\ , c_{-4},\ \ c_3\ , c_2,\ c_1.$$

Ejemplo 2:

El registro discreto de la *Tabla* 3., corresponde a la presión del viento sobre una superficie cilíndrica dado por el Reglamento CIRSOC 102

Ángulo (gr)	*Presión*	*Ángulo (gr)*	*Presión*
0	1,00	180	-1,20
10	0,90	190	-1,20
20	0,70	200	-1,20
30	0,35	210	-1,20
40	0,00	220	-1,20
50	-0,50	230	-1,20
60	-0,80	240	-1,25
70	-1,10	250	-1,28
80	-1,23	260	-1,30
90	-1,30	270	-1,30
100	-1,30	280	-1,23
110	-1,28	290	-1,10
120	-1,25	300	-0,80
130	-1,20	310	-0,50
140	-1,20	320	0,00
150	-1,20	330	0,35
160	-1,20	340	0,70
170	-1,20	350	0,90

Tabla 3.

Los valores de c_k dados por la expresión:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n\, e^{-ikw0n}$$

se obtienen a partir de un código Scilab, y los resultados correspondientes se indican en la *Tabla* 4.

k	c_k	$\|c_k\|$
-3	0.1123084	0.1123084
-2	0.3012501	0.3012501
-1	0.4424320	0.4424320
0	- 0.7172222	0.7172222
1	0.4424320	0.4424320
2	0.3012501	0.3012501
3	0.1123084	0.1123084

Tabla 4.

En la *Figura* 3. se muestran las funciones de aproximación y_1, y_2, y_3, obtenidas cada una de ellas con las 3, 5 y 7 primeras funciones base respectivamente.

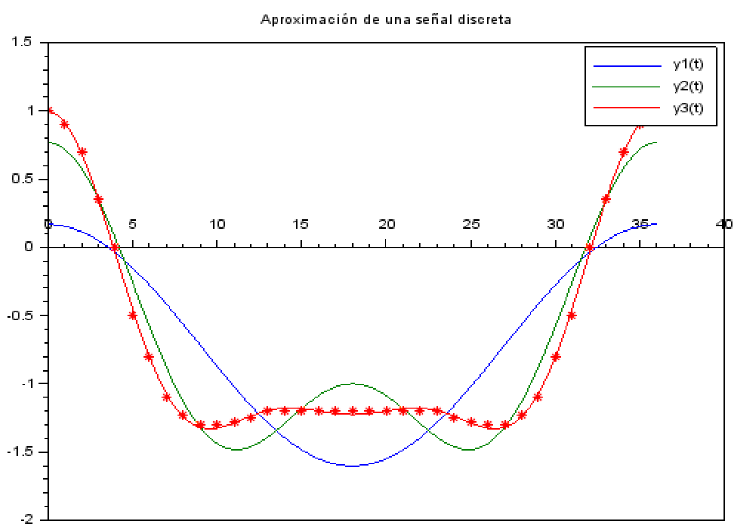


Figura 3.

En la *Figura* 4. se representan los valores de $|c_k|$ en función de *k*, obteniendo el *espectro* asociado a los datos.

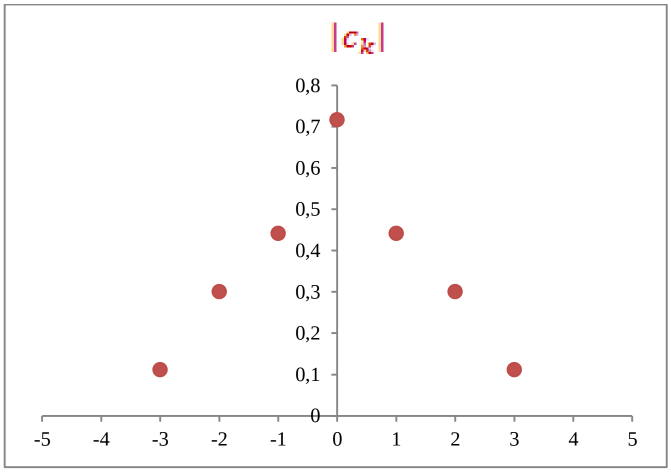


Figura 4.

Valores obtenidos con el comando fft:

column 1 to 12
- 0.7172222 0.4424320 0.3012501 0.1123084 0.0059498 - 0.0074208 - 0.0041667 - 0.0021288 0.0024090 0.0011111 0.0016203 0.0034749

column 13 to 24
0.0002778 - 0.0013503 - 0.0028704 - 0.0050862 - 0.0000254 0.0066597 0.0083333 0.0066597 - 0.0000254 - 0.0050862 - 0.0028704 - 0.0013503

column 25 to 36
0.0002778 0.0034749 0.0016203 0.0011111 0.0024090 - 0.0021288 - 0.0041667 - 0.0074208 0.0059498 0.1123084 0.3012501 0.4424320

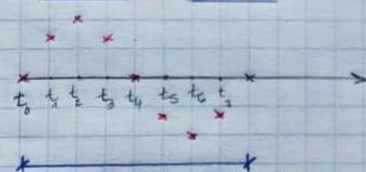
Ejemplo 3:

EJEMPLO: Sea el siguiente registro discreto de una determinada señal

n	t_n	f_n: valores de la señal
0	$t_0 = 0$	$f_0 = 0$
1	$t_1 = 1/8$	$f_1 = 0.707$
2	$t_2 = 1/4$	$f_2 = 1.0$
3	$t_3 = 3/8$	$f_3 = 0.707$
4	$t_4 = 1/2$	$f_4 = 0$
5	$t_5 = 5/8$	$f_5 = -0.707$
6	$t_6 = 3/4$	$f_6 = -1$
7	$t_7 = 7/8$	$f_7 = -0.707$

$\Delta t = 1/8$ seg ; $N = 8$

Período T: $T = N\Delta t$



$T = N\Delta t = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ seg

Período discreto: $\boxed{N = 8}$ (cantidad de subintervalos que contiene 1 período)

Frecuencia fundamental: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{4}}$

Aproximación por mínimos cuadrados de la señal discreta

Aproximamos por mínimos cuadrados nuestra señal discreta, usando como variable independiente el índice del punto, en vez del tiempo 't'. La aproximación la buscamos dentro de la familia de exponenciales complejos:

$$\boxed{\phi_k(\tau) = e^{kj\omega_0\tau} = \cos(k\omega_0\tau) + j\,\mathrm{sen}(k\omega_0\tau) \; ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3}$$

Cada función $\phi_k(\tau)$ se evalúa en los puntos dato, es decir, generamos vectores de la forma:

$$\boxed{\vec{\Phi}_k = [\phi_k(0) \;\; \phi_k(1) \cdots \phi_k(N-1)]^T}$$

La aproximación por mínimos cuadrados es:

$$\boxed{y(\tau) = \sum_k \overset{?}{c_k}\, \phi_k(\tau)}$$

Los coeficientes c_k se obtienen de: $\boxed{\Phi^T \Phi\, \vec{c} = \Phi^T \vec{f}}$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones base, cada coeficiente c_k está dado por: $c_k = \frac{\langle \vec{f} . \vec{\Phi}_k \rangle}{N}$ $\qquad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jk\omega_0 n}$

Los valores de c_k son las coordenadas del vector $\vec{f}$ (registro discreto de una señal) en la base de los exponenciales complejos.
El conjunto de coordenadas c_k se denomina TRANSFORMADA DISCRETA de FOURIER de la señal discreta, y al módulo $|c_k|$ se lo denomina ESPECTRO

✓ Cálculo de c_0: $(k=0)$ $\boxed{c_0 = \frac{1}{N} \langle \vec{f} . \vec{\Phi}_0 \rangle}$ con $k=0$, $\phi_0(z) = e^0 = 1$

Por lo tanto: $\vec{\Phi}_0 = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$

$$c_0 = \frac{1}{8}(0+0.707+1+0.707+0-0.707-1-0.707) = 0 \checkmark$$

$$\boxed{c_0 = 0}$$

✓ Cálculo de c_1: $\boxed{c_1 = \frac{1}{N} \langle \vec{f} . \vec{\Phi}_1 \rangle}$ con $k=1$, $\phi_1(z) = e^{j\omega_0 z}$, $\omega_0 = \pi/4$

$$\vec{\Phi}_1 = [1\ \ e^{-j\pi/4}\ \ e^{-j\pi/2}\ \ e^{-j\frac{3\pi}{4}}\ \ e^{-j\pi}\ \ e^{-j\frac{5\pi}{4}}\ \ e^{-j\frac{3}{2}\pi}\ \ e^{-j\frac{7\pi}{4}}]$$

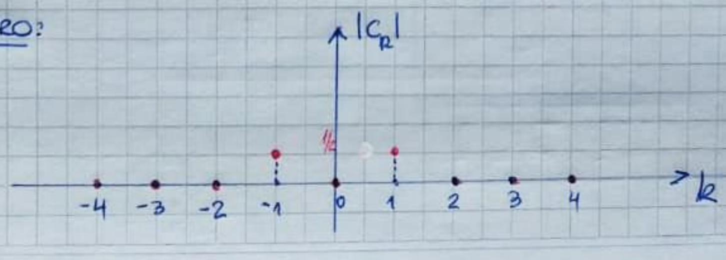
[usando: $e^{jx} = \cos x + j\,\mathrm{sen}\,x$]

$$c_1 = \frac{1}{8}\left[0.707\left(e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right) - 0.707\left(e^{-j\frac{5\pi}{4}} + e^{-j\frac{7\pi}{4}}\right) + e^{-j\pi/2} - e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right] =$$

$$c_1 = \frac{1}{8}[-j-j-2j] = -\frac{1}{2}j \qquad \boxed{c_1 = \frac{1}{2}j}$$

Análogamente se obtienen: $\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2}j;\ \ c_2 = c_{-2} = c_3 = c_{-3} = c_4 = c_{-4} = 0}$

ESPECTRO:



Con el comando fft de Matlab o Scilab, a partir del vector $\vec{f}$ (señal discreta) se obtienen las componentes de la TRANSFORMADA DISCRETA de FOURIER.

Para nuestro ejemplo se obtiene:

$$\vec{C} = [0 \quad 0.4999j \quad 0 \quad -0.0000378j \quad 0 \quad 0.0000378i \quad 0 \quad -0.4999j]$$

el orden corresponde a: $c_0, c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, c_{-4}, c_3, c_2, c_1$

Evaluamos la Aproximación por Mínimos Cuadrados: $\boxed{y(z) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 z}}$

$$y(z) = \underbrace{c_0}_{=0} e^{0z} + \underbrace{c_{-1}}_{=1/2j} e^{-j\omega_0 z} + \underbrace{c_1}_{=-1/2j} e^{j\omega_0 z} + \underbrace{c_{-2}}_{=0} e^{-2j\omega_0 z} + \underbrace{c_2}_{0} e^{2j\omega_0 z} + \dots \qquad [\omega_0 = \pi/4]$$

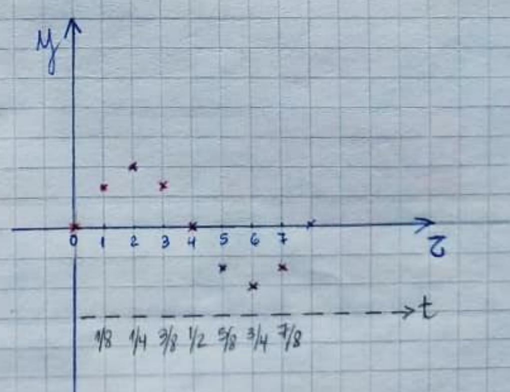
$$y(z) = \frac{1}{2}j\, e^{-j\frac{\pi}{4}z} - \frac{1}{2}j\, e^{j\frac{\pi}{4}z} = \frac{1}{2}j\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}z\right) + j\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}z\right)\right] - \frac{1}{2}j\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}z\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(j)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right) - \frac{1}{2}(j)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right)$$

Recordamos que 'z' es la variable independiente que indica el índice del punto.

$$\boxed{y(z) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right)}$$

$n(z)$	$t_n\ (t_z)$
0	0
1	1/8
2	1/4
3	3/8
4	1/2
5	5/8
6	3/4
7	7/8



$t_n = t_0 + n\Delta t$

$t_{(z)} = t_0 + z\Delta t$

$$z = \frac{t_z - 0}{\Delta t} = \frac{t}{1/8} = 8t \implies y(z) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}z\right) \implies \boxed{y(t) = \mathrm{sen}(2\pi t)}$$