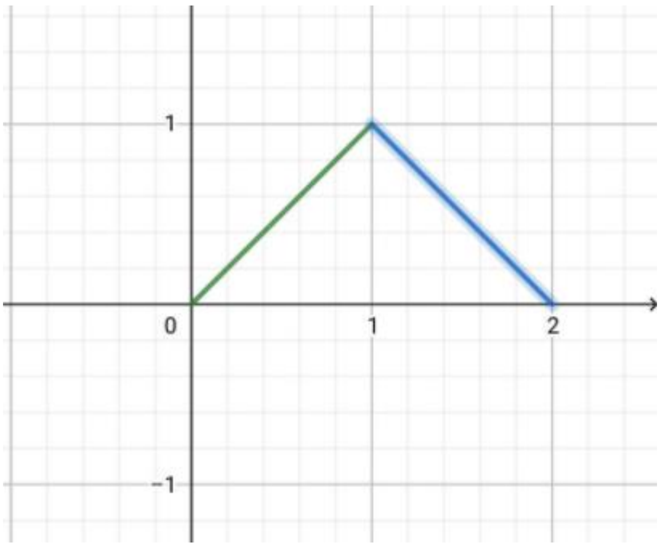
I. 3-3.86

La función de densidad de las ventas diarias de una bomba en una estación de servicio (expresada en miles de pesos) es:

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 < y < 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2, \\ 0, & cq. otro\ caso \end{cases}$$

a) Grafique la función densidad



b) Encuentre la función distribución acumulada

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\, dt$$

$$F(y) = \int_{0}^{y} t\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^y = \frac{y^2}{2};\, 0 < y < 1$$

$$F(y) = \int_{1}^{y} (2 - t)\, dt = 2t - \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^y = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}$$

Pero debe tenerse en cuenta que F(y) en el tramo (0,1) ya acumula 0,5 pues

$$F(1) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

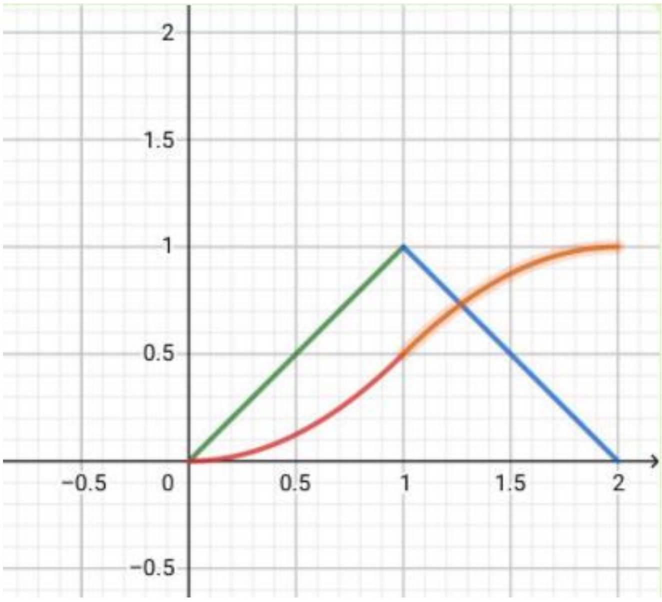
entonces

$$F(y) = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$F(y) = 2y - \frac{y^2}{2} - 1; 1 \leq y \leq 2$$

c) Grafique la función distribución acumulada.

Nota: se observan *f*(*y*) y *F*(*y*)



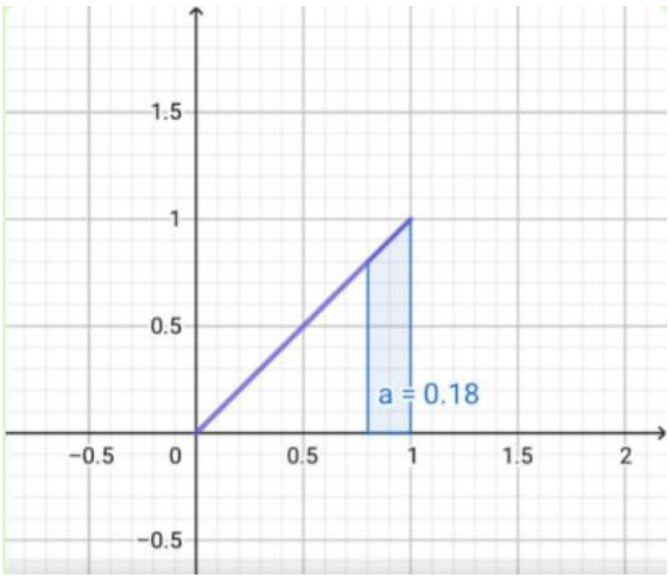
d) Calcule la probabilidad de que las ventas un día cualquiera estén entre \$800 y \$1200

Utilizando *F*(*y*) se tiene (evitando así volver a integrar *f*(*y*))

$$P(0{,}8 < Y < 1{,}2) =$$

$$P(0{,}8 < Y < 1) = F(1) - F(0{,}8)\ en\ (0{,}1)$$

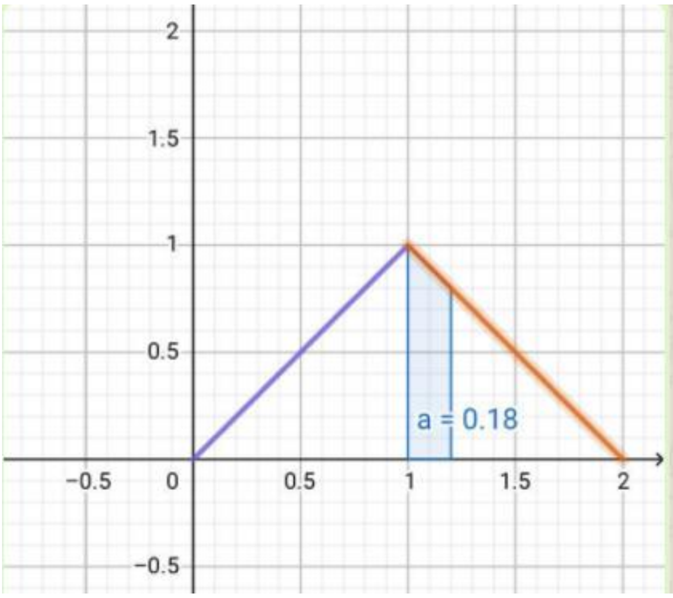
$$P(0{,}8 < Y < 1) = 0{,}5 - \frac{0{,}8^2}{2} = 0{,}18\ en\ (0{,}1)$$



Más

$$P(1 < Y < 1{,}2) = F(1{,}2) - F(1)\ en\ [1{,}2]$$

$$P(0{,}8 < Y < 1) = 2 \cdot 1{,}2 - \frac{1{,}2^2}{2} - 1 - \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 1\right) = 0{,}18\ en\ [1{,}2]$$



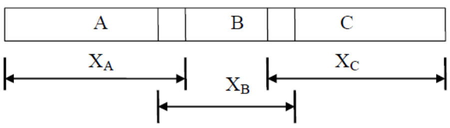
(ambas gráficas muestran las áreas respectivas bajo *f*(*y*))

Entonces,

$$P(0{,}8 < Y < 1{,}2) = 0{,}8 + 0{,}18 = 0{,}36$$

II. 3-4.110

Una barra recta se forma conectando tres tramos A, B y C, cada uno fabricado con una máquina distinta. Las longitudes de cada tramo, medidas en pulgadas, se identifican con las variables X_A, X_B y X_C respectivamente. Se sabe también que las longitudes de los tres tramos están distribuidas normalmente con media y varianza iguales a (20; 0,04), (14; 0,01) y (26; 0,04) respectivamente. Como se indica en la figura, las tres secciones se unen superponiéndose 2 pulgadas en cada conexión. Suponga que la barra se puede utilizar en la construcción del árbol del generador de una central si su longitud total en pulgadas está entre 55,7 y 56,3. ¿Cuál es la probabilidad de que la barra pueda ser utilizada con el fin previsto?



Para resolver este problema se considerarán los siguientes teoremas sobre variables aleatorias y propiedades de valor esperado

1. Sea X una variable aleatoria expresada de la forma aX+b, entonces su media y varianza son, respectivamente:

- $\mu_{(aX+b)} = E(aX+b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b = a\mu_x + b$
- $\sigma^2_{(aX+b)} = E\left[\left((aX+b) - \mu_{(aX+b)}\right)^2\right] = E[(aX+b-a\mu-b)^2]$

$$= E[(aX-a\mu)^2] = E[a^2(X-\mu)^2]$$
$$= a^2E[(X-\mu)^2]$$
$$= a^2\sigma_x^2$$

$(Como\ puede\ verse, la\ varianza\ no\ se\ ve\ afectada\ por\ una\ constante\ b\ mientras\ que\ la\ media\ sí)$

Como consecuencia:

2. Sea Y una variable aleatoria tal que

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots a_nX_n$$

y X_1, X_2, …, X_n, n variables aleatorias e independientes con distribución normal y medias μ_1, μ_2 … μ_n y σ_1^2, σ_2^2,…, σ_n^2 varianzas, respectivamente

Entonces

$$Y \sim n(y;\mu_Y,\sigma_Y^2)\ \ siendo:$$

$$\mu_Y = E(Y) = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots a_n\mu_n$$

$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots a_n^2\sigma_n^2$$

<u>Datos del problema</u>

$X_A: longitud\ de\ la\ barra\ A, en\ pulgadas$

$X_A \sim n(x;\mu_A = 20, \sigma_A^2 = 0{,}04)$

$X_B: longitud\ de\ la\ barra\ B, en\ pulgadas$

$X_B \sim n(x;\mu_B = 14, \sigma_B^2 = 0{,}01)$

$X_C: longitud\ de\ la\ barra\ C, en\ pulgadas$

$X_C \sim n(x;\mu_C = 26, \sigma_C^2 = 0{,}04)$

$Y: longitud\ total\ de\ la\ barra, en\ pulgadas$

$Y = X_A + X_B + X_C - 4$ (porque se le restan 2 pulgadas en cada empalme)

De acuerdo a lo visto,

$$\mu_Y = E(Y) = E(X_A + X_B + X_C - 4) =$$

$$= E(X_A) + E(X_B) + E(X_C) - E(4)$$

$$= a_1\mu_A + a_2\mu_B + \cdots a_n\mu_C - 4 = 20 + 14 + 26 - 4$$

$$\mu_Y = 56\, pulgadas$$

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_A^2 + a_2^2\sigma_B^2 + \cdots a_n^2\sigma_C^2$$

$$= 0{,}04 + 0{,}1 + 0{,}04 = 0{,}09$$

(los coeficientes a valen 1 en este caso)

Finalmente

$$Y \sim n(y; \mu_Y = 56, \sigma_Y^2 = 0{,}09)$$

El problema pide encontrar $P(55{,}7 < Y < 56{,}3)$. Así, estandarizando y buscando las áreas respectivas en la tabla normal estándar obtenemos:

$$P(55{,}7 < Y < 56{,}3) = P\left(\frac{55{,}7 - 56}{\sqrt{0{,}09}} < Z < \frac{56{,}3 - 56}{\sqrt{0{,}09}}\right)$$

$$P(-1 < Z < 1) = 0{,}68269$$