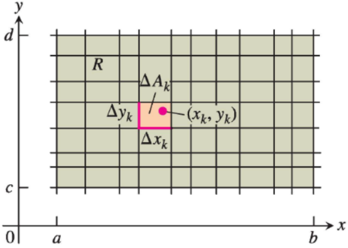
Integrales de funciones de varias variables

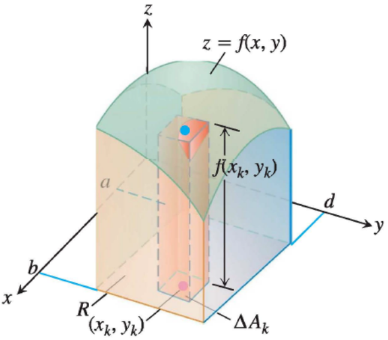
Ingeniería

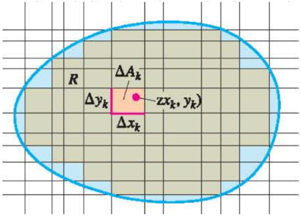
Recorrido

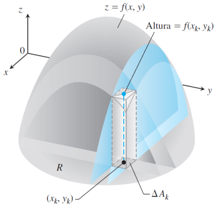
Recorrido

Definición de integral doble

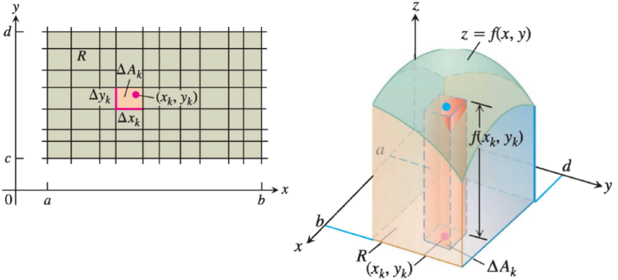








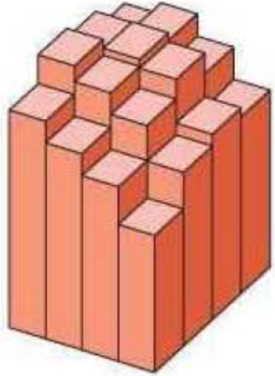
Definición de integral doble sobre rectángulos



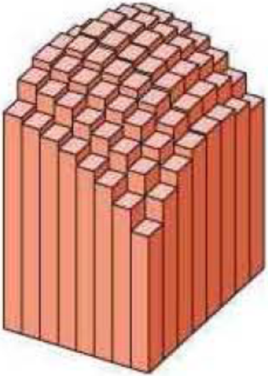
1 Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R. Definimos una partición de R, formada por $n \times n$ subrectángulos y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$.
Si el límite $\lim_{\|P\| \to 0} S_n$ existe para cualquier elección de (x_i, y_j), se dice que f es **integrable** sobre R y que la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n. La integral se denota por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

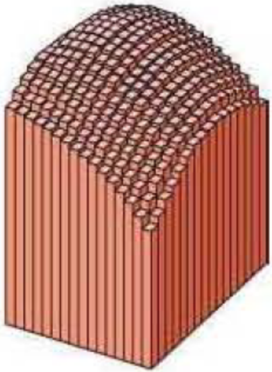
Interpretación: si $f(x, y) \geq 0$ la integral es un volumen



(a) $n = 16$

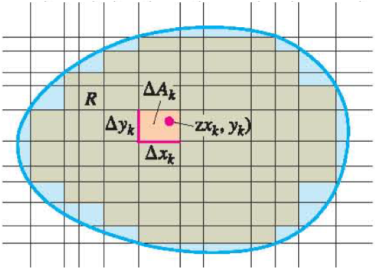


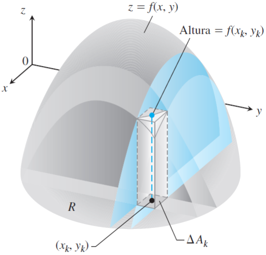
(b) $n = 64$



(c) $n = 256$

Definición de integral doble sobre otras regiones





2 Sea f una función definida y acotada en una región acotada, R. Definimos una partición de R, formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A_{ij}$.
Si el límite $\lim_{\|P\|\to 0} S_n$ existe, para cualquier elección de (x_i, y_j), se dice que f es **integrable** sobre R y que la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n. La integral se denota por

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_R f(x, y)dx\, dy.$$

Propiedades de las integrales dobles

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R, entonces f es integrable en R.

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R, entonces:

2 $$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA.$$

3 $$\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA.$$

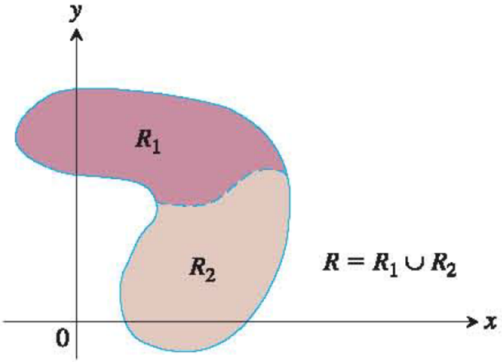
4 Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$,

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

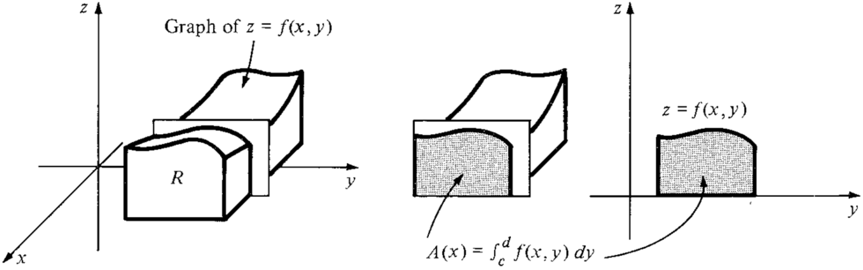
5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

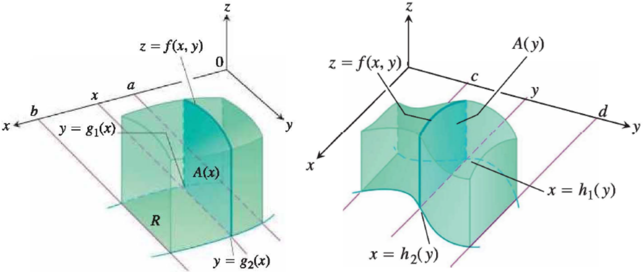
$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA.$$



Recorrido

Integrales iteradas: Principio de Cavalieri





Teorema de Fubini

Teorema

Si f es una función continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx\,dy.$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy\,dx.$$

- *R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx\,dy.$$

Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy, acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

A B C

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy\, dx = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx\, dy$$

Rta: $\frac{216}{35} \approx 6,17$.

Recorrido

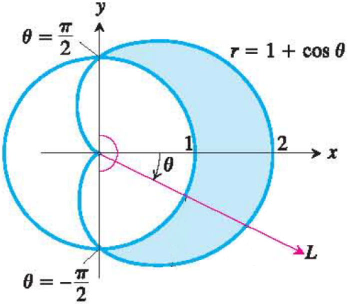
Áreas por doble integración

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$:

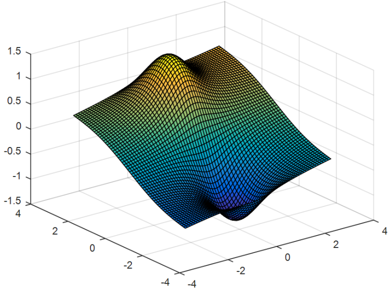


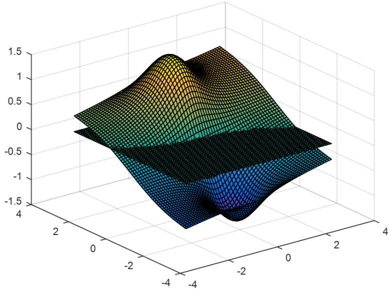
Valor medio de una función integrable en una región acotada R

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R. Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$





Recorrido

Recorrido

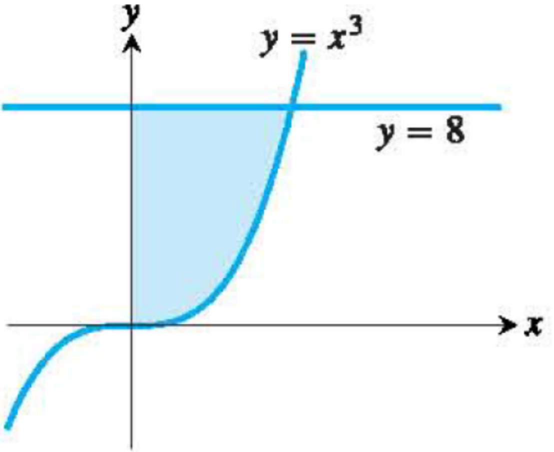
Recorrido

Recorrido

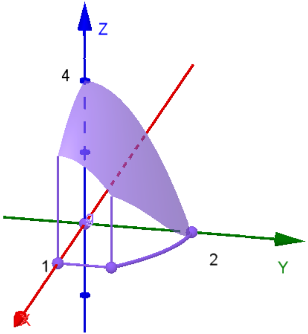
Recorrido

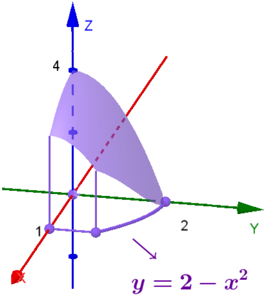
Otros ejemplos

1) Escriba dos integrales iteradas para hallar $\iint_R f(x,y)dA$ sobre la región R dada en el gráfico.



2) ¿Qué calcula la integral $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy\, dx$? ¿Cuánto vale?
SOLUCIÓN:





$$\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy\, dx = \frac{158}{35} \simeq 4{,}5143$$