Ejercicio nro 1.

1

$f(t) = \frac{3}{4}t$; $0 \leq t \leq 8$; $f(t+8) = f(t)$; $\forall t \longrightarrow T = 8$.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+in\omega_0 t}$, con $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$.

$c_0 = \frac{1}{8}\int_0^8 \frac{3}{4}t\,dt = \frac{3}{32}\frac{t^2}{2}\Big|_0^8 = \frac{3}{2}\cdot\frac{64}{32} = 3$

~~Como~~ Obtenemos la serie de Fourier de f como su extensión periódica dado que no está definida en un intervalo simétrico alrededor de cero su período.

Entonces será $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$.

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$.

$c_n = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{2}{2T}\int_0^T f(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]dt$, $n \neq 0$.

$c_n = \frac{2}{2T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega_0 t}\,dt$.

$c_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}8}\frac{1}{8}\int_0^8 \frac{3}{4}t\, e^{-in\frac{\pi}{4}t}\,dt = -\frac{3}{8}\frac{1}{n\pi j}\left\{ e^{-\frac{in\pi}{4}t}\, t\Big|_0^8 - \int_0^8 e^{-\frac{in\pi}{4}t}\,dt \right\}$

$c_n = -\frac{3}{8n\pi}\frac{1}{j}\left\{ e^{-in\pi 2}\,8 - \cancel{\frac{4}{in\pi}\left(e^{-i2n\pi} - 1\right)} \right\}$, $e^{-in\pi 2} \to 1$, $e^{-i2n\pi} \to 1$, $\to 0$.

$c_n = \frac{-3}{\cancel{8}n\pi}\frac{1}{i}\cancel{8} = \frac{-3}{n\pi i} = \frac{-3}{4\frac{n\pi}{4}i} = \frac{-3/4i}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$

Luego $f \sim 3 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{-3/4i}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)} e^{+i\left(\frac{n\pi}{4}\right)t} = \boxed{3 - \frac{3}{4i}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)} e^{+i\left(\frac{n\pi}{4}\right)t}}$

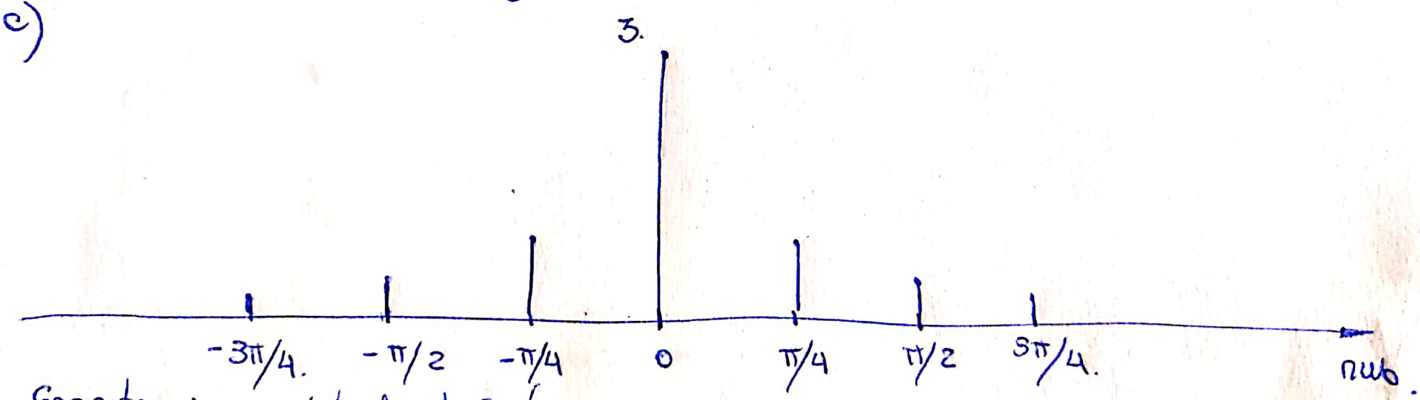
$C_{-3} = \dfrac{-3/4i}{-3\pi/4} = \dfrac{1}{\pi i}$ $\qquad C_3 = \dfrac{-3/4i}{3\pi/4} = \dfrac{-1}{\pi i} \longrightarrow |C_3| \approx 0{,}32$

$C_{-2} = \dfrac{-3/4i}{-2\pi/4} = \dfrac{3}{2\pi i}$ $\qquad C_2 = \dfrac{-3/4i}{2\pi/4} = \dfrac{-3}{2\pi i} \longrightarrow |C_2| \approx 0{,}48$

$C_{-1} = \dfrac{-3/4i}{-\pi/4} = \dfrac{3}{\pi i}$ $\qquad C_1 = \dfrac{-3/4i}{\pi/4} = \dfrac{-3}{\pi i} \longrightarrow |C_1| \approx 0{,}95$

$C_0 = 3. \longrightarrow$ no se obtiene según la fórmula de c_k.

c)



Espectro de amplitud discreto.

Ejercicio Nro 2.

$f(t) = e^{-4|t|} \quad \forall t.$

Es una función no periódica.

Recordemos que: $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \rightarrow$ no.

Consideremos nuevamente.

$$f_T(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{+jn\omega_0 t}$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t}$$

aca tuvimos que haber usado γ.

Si $T \to \infty \quad \omega_0 \to 0$ tenemos $\Delta\omega$.

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \right) e^{jn\Delta\omega t}$$

cuando $\Delta\omega \to 0$ tenemos $\Delta\omega = d\omega$.

y $n d\omega = \omega \rightarrow$ una variable continua no discreta.

obtenemos $f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega \right]$

o bien, si $c_\omega = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \rightarrow$ dado que $T/2 \to \infty$, $-T/2 \to -\infty$.

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_\omega e^{j\omega t} d\omega}$$

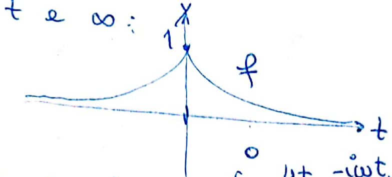
transformada de Fourier de f.

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|}\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Analicemos primero a $f = e^{-4|t|}$ → $f = e^{-4t}$; $t \geq 0$. / $f = e^{4t}$; $t < 0$.

entre t e ∞:



$$\mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} e^{4t} e^{-i\omega t}\, dt + \lim_{d \to \infty} \int_{0}^{d} e^{-4t} e^{-i\omega t}\, dt.$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} e^{(4-\omega i)t}\, dt + \lim_{d \to \infty} \int_{0}^{d} e^{(-4-i\omega)t}\, dt.$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{c \to -\infty} \frac{1}{4-\omega i}\, e^{(4-\omega i)t}\Big|_{c}^{0} + \lim_{d \to \infty} \frac{-1}{4+\omega i}\, e^{(-4-i\omega)t}\Big|_{0}^{d}$$

parte real positiva. parte real negativa.

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{4-\omega i} + \frac{+1}{4+\omega i}$$

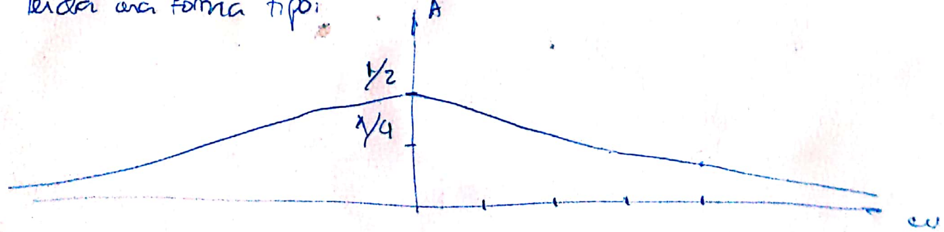
$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{4+\omega i + 4 - \omega i}{16 - \omega^2 i^2} = \boxed{\frac{8}{16+\omega^2}}$$ → recordar que ω es una cantidad real.

~~$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\omega i}{16+\omega^2} e^{i\omega t} d\omega =$~~

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{16+\omega^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega.}$$

b) El espectro de amplitud viene dado por la amplitud en función de la frecuencia. Tenemos $C_\omega = \frac{8}{16+\omega^2}$

Tendrá una forma tipo:



Ejercicio nro 3.

$f_1(t) = e^{-4|t|} \quad \forall t.$

$f_2(t) = \begin{cases} 0 \; ; & -\infty < t < 0 \\ 1 \; ; & 0 \leq t < \infty. \end{cases}$ función escalón unitario.

$\rightarrow \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) = \dfrac{8}{16 + \omega^2}$

$$F[f_2(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt. = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt. = \lim_{c \to \infty.} \left. \frac{-e^{-i\omega t}}{i\omega} \right|_0^c$$

$$F[f_2(t)](\omega) = 0 + \frac{1}{i\omega}$$

[ponemos cero cuando en realidad no tiende a ningún número complejo en específico y todos ellos tienen módulo 1

Ejercicio nro 4

$n=1$ $n=1$

$f(t) =$

Ejercicio Nro 4.

a) $\dot{y} + ky = x(t)$

* Regla $\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \, \mathcal{F}[f](\omega)$.

* Además $\mathcal{F}$ es un operador lineal.

Luego:

$$\mathcal{F}[\dot{y} + ky](\omega) = \mathcal{F}[x](\omega)$$

$$i\omega \, \mathcal{F}[y](\omega) + k \, \mathcal{F}[y](\omega) = \mathcal{F}[x](\omega)$$

$$\mathcal{F}[y](\omega)\,(i\omega + k) = \mathcal{F}[x](\omega)$$

$$\underbrace{\mathcal{F}[y](\omega)}_{\text{transformada de la salida}} = \frac{\mathcal{F}[x](\omega)}{i\omega + k}$$

$\mathcal{F}[x](\omega)$ → transformada de la entrada.

$$\boxed{H_\omega = \frac{1}{i\omega + k}}$$

→ cociente entre salidas y entradas (transformadas)

Ahora para la segunda

b) $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = x(t)$

$$\{m(i\omega)^2 + bi\omega + k\}\,\mathcal{F}[y](\omega) = \mathcal{F}[x](\omega)$$

$$\boxed{\mathcal{F}[y](\omega) = \frac{\mathcal{F}[x](\omega)}{m(i\omega)^2 + bi\omega + k}} \longrightarrow H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + bi\omega + k}$$

Vemos que es parecido a lo que vimos en trasformada de laplace, es decir, es el polinomio característico evaluado en $i\omega$

Obtendríamos $y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\cdot \mathcal{F}[x](\omega)\,d\omega.$

Transformada rápida de fourier.

read ("archivo d...