Estadística Técnica. Probabilidad y Estadística
Facultad de Ingeniería.
Unidad Temática 3.3

Algunas Distribuciones de probabilidad continuas.

Universidad Nacional de Cuyo **2020**
Profesor: Julián Martínez

Distribución uniforme. Distribución Normal. Aproximación de Binomial por Normal. Distribuciones: Gamma, Exponencial, chi–cuadrado, Logarítmica Normal y de Weibull. Aplicaciones.

1. Distribución uniforme

Es la distribución más simple; se caracteriza por tener una función densidad plana y, por ello, es constante en un intervalo cerrado [A, B]

Definición VI.1

Sea X una variable aleatoria continua en el intervalo [A, B] con distribución uniforme. Su función densidad de probabilidad, entonces, es

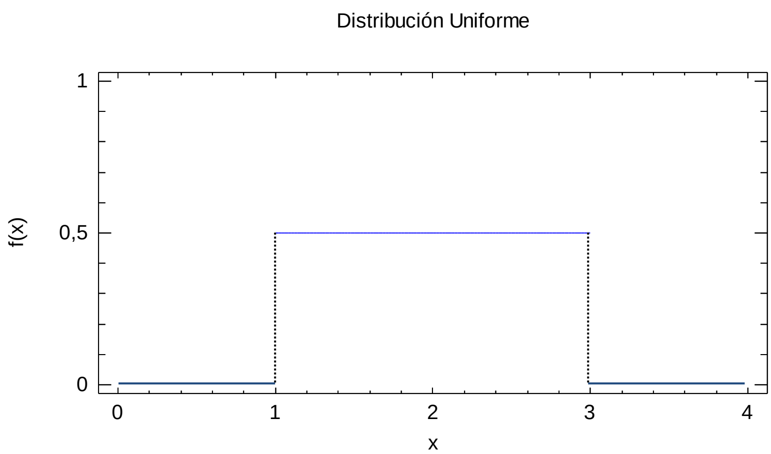
$$f(x, A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A}, & A \leq x \leq B \\ 0, & en\ cq.otro\ caso \end{cases}$$

Y su valor esperado y varianza son

$$E(X) = \mu = \frac{A+B}{2};\ Var(X) = \sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$$

En la figura 1 se muestra la función densidad para una variable aleatoria con una distribución uniforme en el intervalo [1,3]

Figura 1



2. Distribución normal

Es una de las distribuciones continuas más importantes en el campo de la estadística. Su gráfica, llamada curva normal, es la campana de Gauss, la cual describe razonablemente bien muchos fenómenos naturales y artificiales (como la estatura en poblaciones grandes, experimentos meteorológicos, errores en las mediciones científicas, errores en las especificaciones de partes

fabricadas en forma estandarizada, etc.) Proporciona también la base sobre la que se fundamenta gran parte de la teoría de la estadística inferencial.
Una variable aleatoria continua X cuya distribución de probabilidad tiene forma de campana de Gauss se llama variable aleatoria normal. Esta distribución depende de los parámetros media μ y desvío estándar σ. La función densidad se denota $X \sim n(x; \mu, \sigma)$

Definición VI.2

Una variable aleatoria continua X tiene distribución de probabilidad normal si su función densidad está dada por

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

Y su media y varianza son

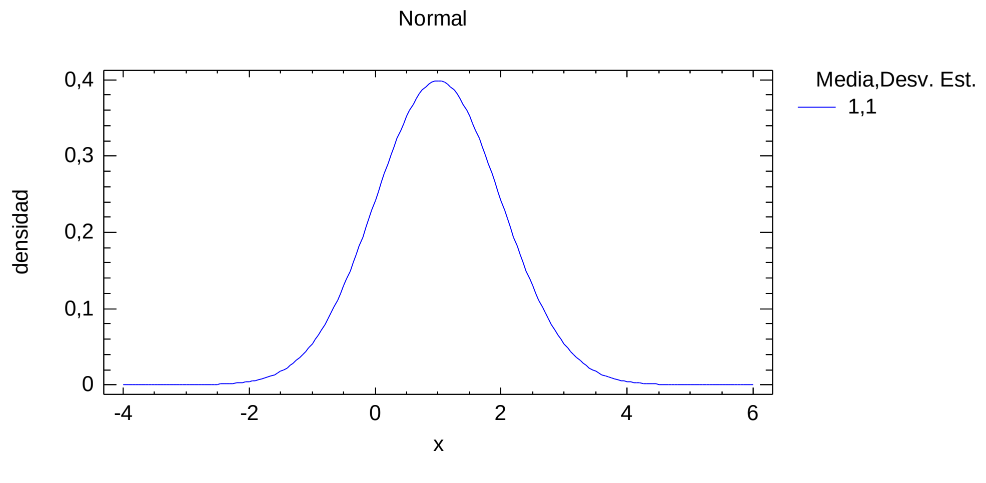
$$E(X) = \mu$$
$$E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

Una vez especificadas μ y σ^2, la curva normal queda completamente determinada. De aquí que estos son los parámetros de la distribución. Es decir, que su media y varianza son sus propios parámetros.
Características de la distribución normal:

I. Media, mediana y moda se dan en el punto sobre X en el que ocurre el máximo, es decir en $x=\mu$
II. La curva es simétrica alrededor del eje vertical que pasa por $x=\mu$.
III. Tiene sus puntos de inflexión en $x=\mu\pm\sigma$. Es cóncava hacia abajo si $\mu-\sigma< x<\mu+\sigma$ y cóncava hacia arriba en cualquier otro punto.
IV. Es asintótica con respecto al eje x.
V. Aproximadamente 68,3% de los valores de la variable se encuentra el intervalo $\mu \pm 1\sigma$; aproximadamente 95,5% de los valores de la variable se encuentra en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ y aproximadamente 99,7% de los valores de la variable se encuentra en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$.

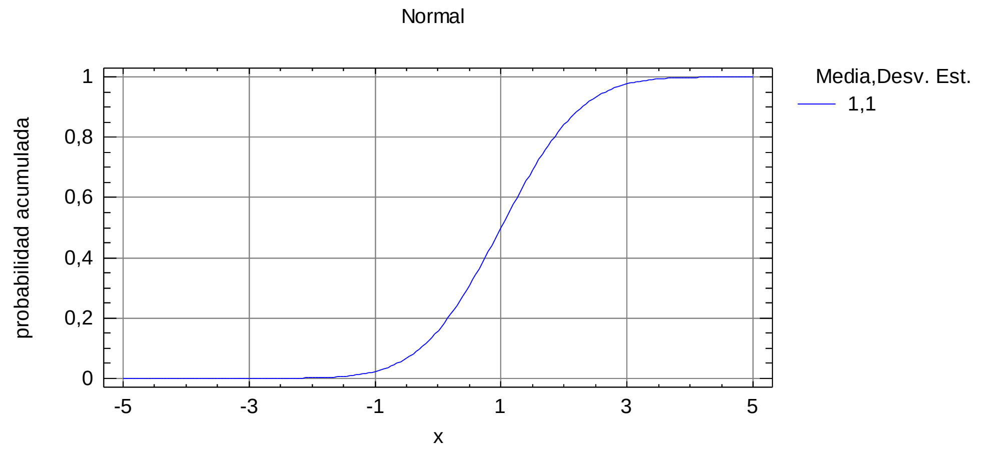
La figura 2 muestra una distribución normal con media 1 y desviación estándar 1

Figura 2

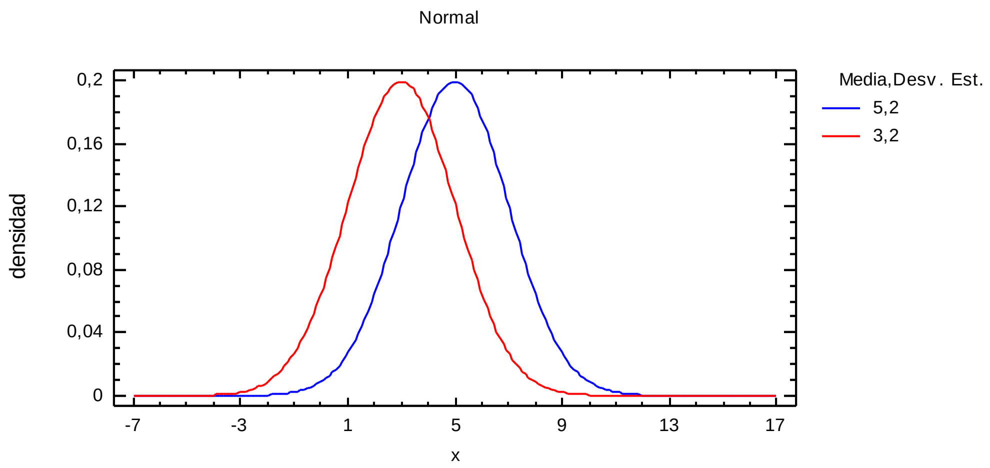


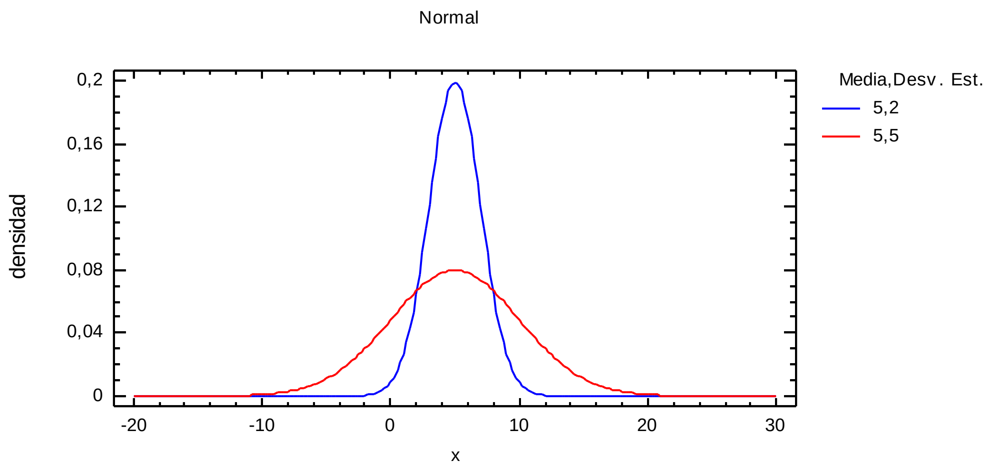
La figura 3 muestra la distribución normal acumulada con media 1 y desvío estándar 1

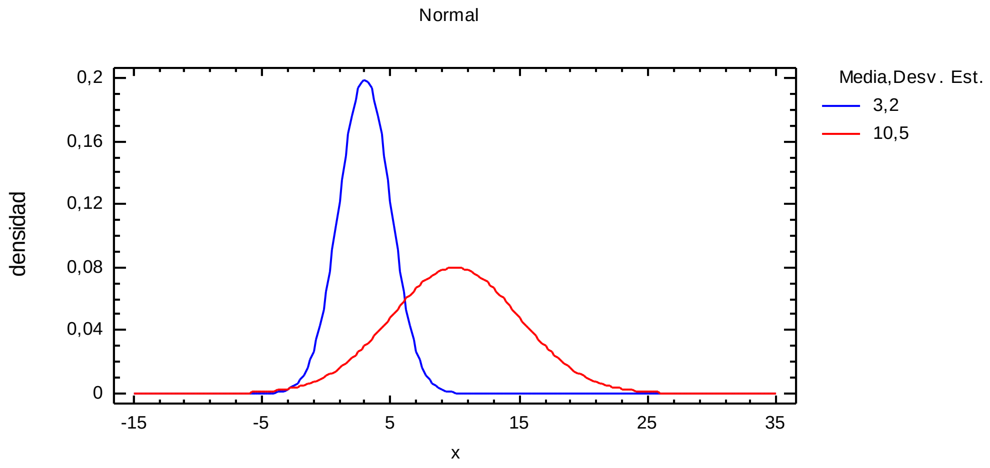
Figura 3



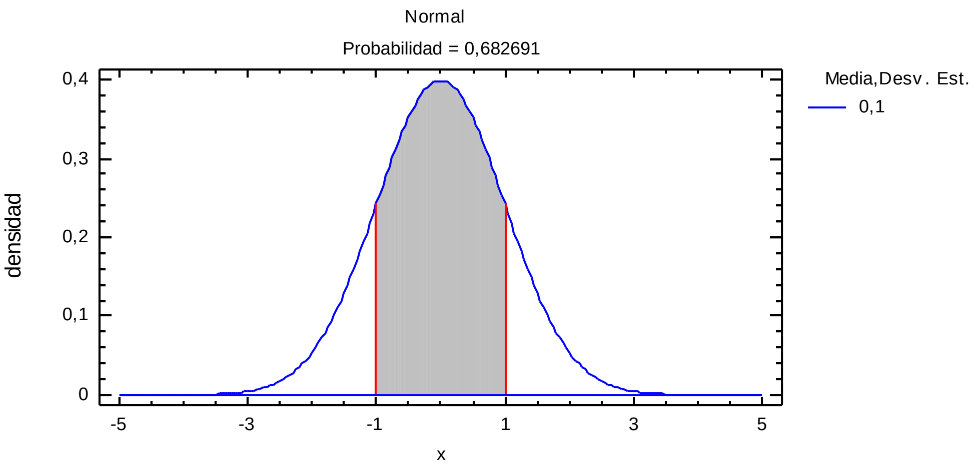
Como se dijo, una vez especificados los valores μ y σ, la curva normal queda determinada por completo. Esto puede verse en las siguientes figuras

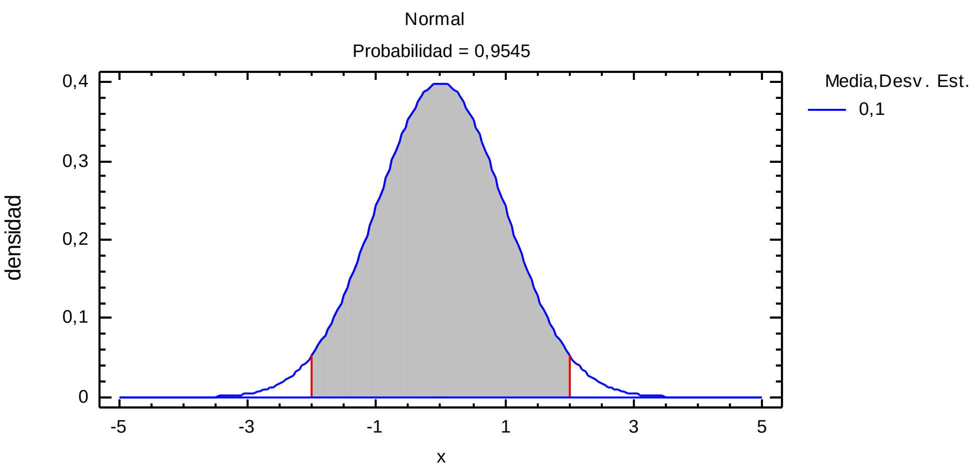


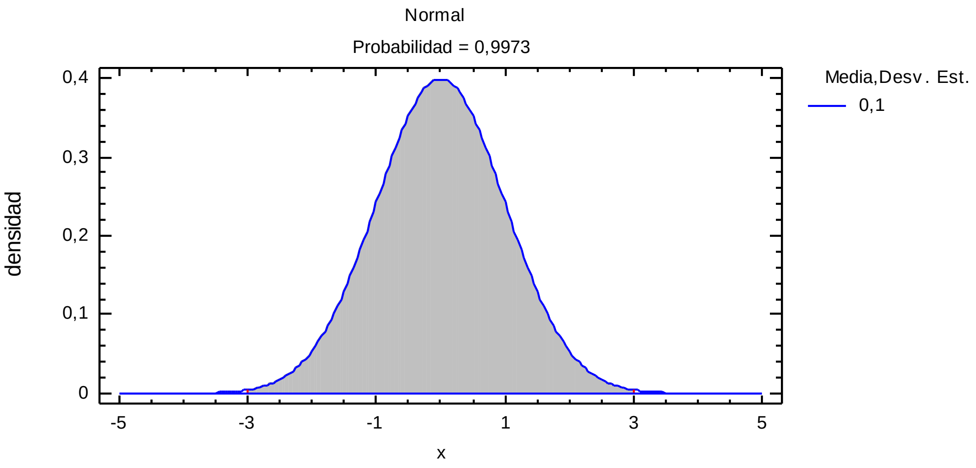




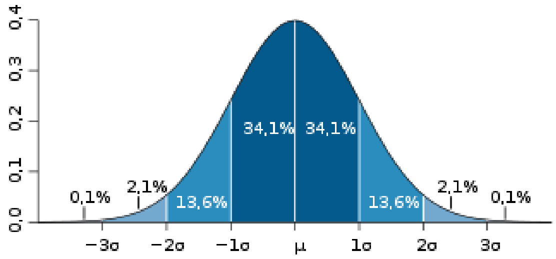
Lo descripto en (V) puede verse gráficamente a continuación







Resumido en una sola gráfica, lo anterior puede verse entonces



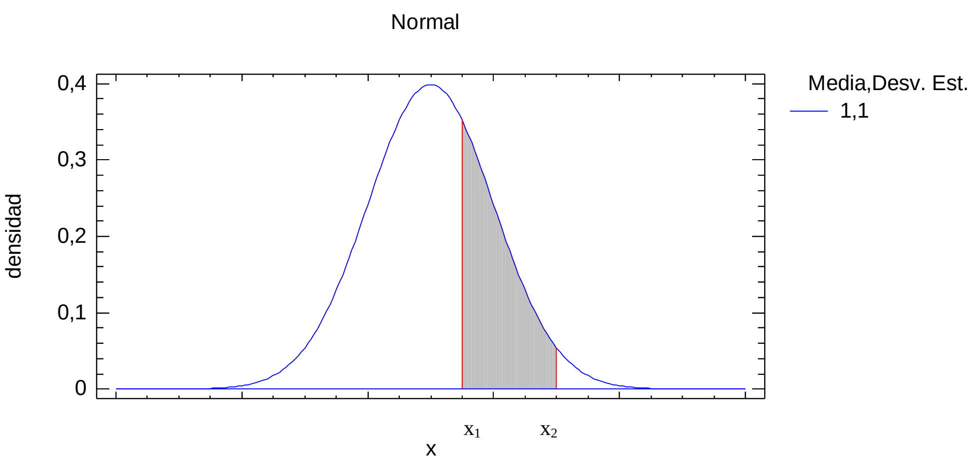
Probabilidades bajo la curva normal.

Como cualquier distribución de variable continua, el área total bajo la curva normal es igual a 1, de tal forma que la probabilidad de que la variable tome cualquier valor entre otros dos, x_1 y x_2 en su dominio, es el área bajo la curva limitada entre estos dos valores. Es decir:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Esto puede apreciarse en la figura 4

Figura 4



Distribución normal estándar

Recordemos que si a una variable aleatoria X se le resta su media y se la divide por su desvío estándar se obtiene una variable estandarizada con media μ=0 y σ=1, es decir

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Así, vemos que

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Donde $x = z\sigma + \mu, por\ lo\ que\ dx = \sigma dz$; $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ y $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$

Entonces: $P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$

Definición VI.3

La distribución normal de una variable aleatoria Z con media μ=0 y desvío estándar σ=1 se denomina **distribución normal estándar**

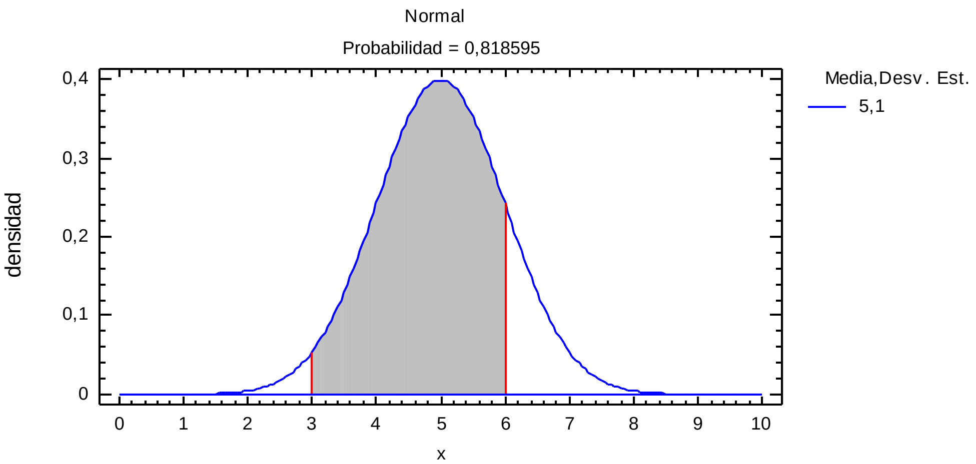
El área encerrada bajo la curva normal entre x_1 y x_2 resulta igual a la encerrada entre z_1 y z_2 bajo la normal estándar. Esta área está tabulada para una gran cantidad de valores de z, con lo cual el problema de encontrar probabilidades se reduce a simplemente estandarizar los valores x de interés y hallar la probabilidad como un resultado de dicha tabla.

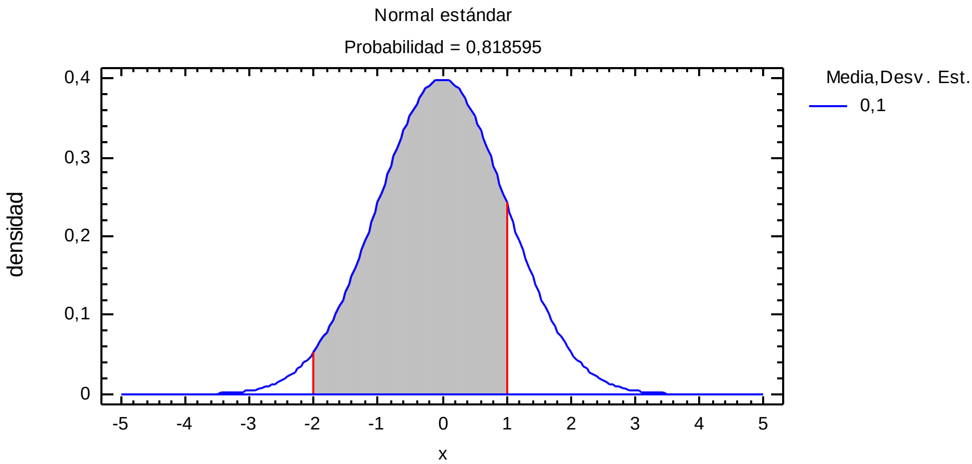
Ejemplo 1: sea X una v. a. con distribución de probabilidad normal, con μ = 5 y σ = 1, calcular la probabilidad de que la variable tome valores entre 3 y 6.
Tomando $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$, entonces

$$z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{3-5}{1} = -2 \qquad z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{6-5}{1} = 1$$

Puede verse esto en las respectivas gráficas de densidad de la figura 5

Figura 5





Las áreas son iguales bajo sus respectivas curvas, por lo tanto, también son sus probabilidades. Entonces, puede escribirse

$$P(x_1 < X < x_2) = P(3 < X < 6) = P(-2 < Z < 1) = 0{,}81859$$

Ejemplo 2: De acuerdo con el teorema de Chebyshev, la probabilidad de que una variable tome un valor dentro de las dos desviaciones estándar de la media es, al menos, 3/4.

Recordando que

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Si k = 2, entonces

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

Si X es una variable aleatoria distribuida normalmente con media μ y desvío estándar σ, entonces

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} = -2 \qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma} = 2$$

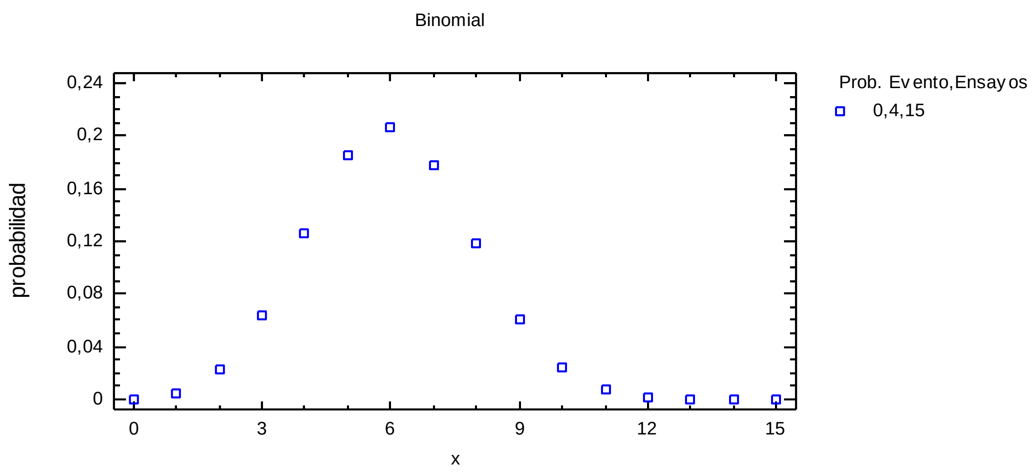
y por lo tanto

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9545$, resultado que confirma al teorema, dado que es mayor que 0,75.

Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal

Sea una variable aleatoria binomial con función masa de probabilidad $b(x; n = 15, p = \frac{4}{10})$ con $x = 0,1,2,\ldots,15$

Figura 6

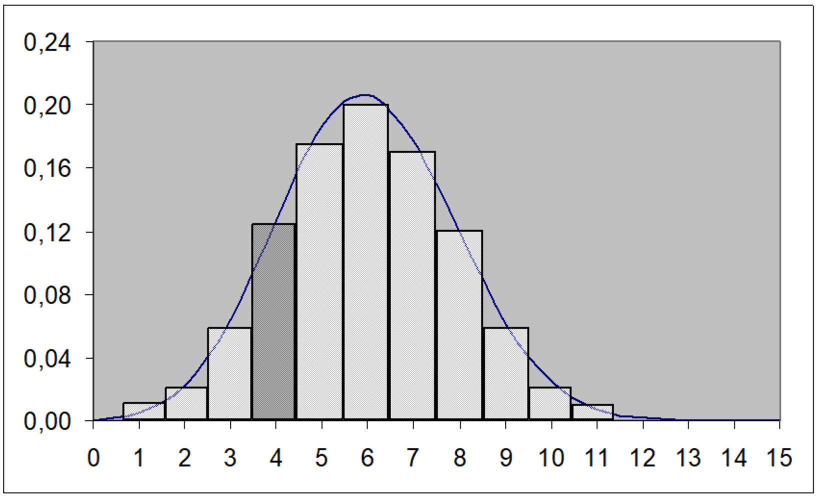


¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria tome exactamente el valor 4? En símbolos, y resolviendo:

$$P(X = 4) = b(4; n = 15, p = \frac{4}{10}) = 0{,}1268$$

Este valor coincide numéricamente con el área del rectángulo del histograma de probabilidades para la distribución binomial, figura 7, tal como se vio en la Unidad III.

Figura 7



Ahora bien, la forma de la función densidad es bastante simétrica, y si se conectaran (imaginariamente) los puntos de probabilidad se observaría una gráfica similar a la distribución normal. Sabemos que la distribución binomial se hace simétrica cuando p = 0,5, por lo que en ese caso el parecido sería idéntico, si no fuera porque la binomial es discreta mientras que la normal es continua. Bajo ciertas condiciones, este razonamiento es válido, y puede pensarse en utilizar una distribución normal para realizar el cálculo de probabilidades binomiales.
¿De qué manera puede hacerse esto?
Primero, debe recordarse que $P(X=x)=0$ para cualquier variable continua, por lo que si vamos a calcular probabilidades binomiales con una normal, deberemos pensar en un intervalo. Observando la figura, el intervalo más apropiado es $3{,}5 \leq x \leq 4{,}5$. La probabilidad exacta puede

verse en el área del rectángulo del histograma de probabilidad discreto para la variable binomial por encima de x = 4. Pero el área debajo de la curva normal, en el intervalo mencionado es también una probabilidad, y muy similar a la buscada. La diferencia constituye el **error** al utilizar la distribución normal en lugar de la binomial. Este error disminuirá a medida que n, la cantidad de experimentos, se haga cada vez más grande y, en general, siempre que p no esté demasiado cerca de 0 ni de 1.
A continuación, se enuncia el siguiente **teorema**

Si X es una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad binomial, entonces la forma limitante de la distribución de la variable estandarizada Z es la normal estándar siempre que la muestra sea suficientemente grande. Es decir:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim n(z; 0,1)$$

Para $n \to \infty$, donde $\mu = E(X) = np$ y $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = npq$

Este teorema indica que la forma limitante de la distribución binomial es la normal estándar, siempre que la muestra sea grande, pero cuidando que n y p no estén demasiado cerca de 0 o 1 (debido a que en estas circunstancias la distribución binomial se vuelve demasiado sesgada). Como criterio práctico se establece que la aproximación es suficientemente buena cuando $\boldsymbol{np \geq 5 \wedge nq \geq 5}$

En el ejemplo dado np = 6 (>5) y nq = 9 (>5); como la regla dada por el criterio práctico se cumple, entonces

$$z_1 = \frac{3,5 - 6}{1,897} = -1,32 \qquad z_2 = \frac{4,5 - 6}{1,897} = -0,79$$

donde σ^2 = npq = 15x0,4x0,6= 3,6 y por lo tanto $\sigma = \sqrt{3,6}$ = 1,897, por lo que

$$P(X = 4) \approx P(3,5 < X < 4,5) = P(-1,32 < Z < -0,79) = 0,1214 \text{ (de tablas)}$$

Comparando con el valor exacto 0,1268, el error absoluto porcentual cometido es 0,54%, un resultado muy aceptable.

El factor 0,5 utilizado en el intervalo no es casual; se utiliza siempre, sin importar si el intervalo es de dos extremos o de uno solo, y siempre **se utiliza de forma tal que aumente el área a calcular**. Este factor recibe el nombre de **factor de corrección por continuidad**.

En general:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx P(x_1 - 0,5 < X < x_2 + 0,5)$$
$$P(X \leq x_1) \approx P(X < x_1 + 0,5)$$
$$P(X \geq x_1) \approx P(X > x_1 - 0,5)$$

3. Distribución gamma

Definición VI.4

Una variable aleatoria continua X tiene distribución de probabilidad gamma, con parámetros α y β, si su función densidad está dada por

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0\\ 0, & en\ cq.otro\ caso\end{cases}$$

para α>0, β>0

La distribución gamma deriva su nombre de la función gamma, la cual se define:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

para α>0

Si se la integra por partes, con $u=x^{\alpha-1}$ y $dv=e^{-x}\,dx$, se obtiene

$$\Gamma(\alpha)=-x^{\alpha-1}e^{-x}+\int_0^{\infty}(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx=(\alpha-1)\int_0^{\infty}x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

Aplicando sucesivamente la fórmula se obtiene

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\Gamma(\alpha-3)$$

Si $\alpha=n$ ($\forall\, n\in\mathbf{Z}^{+}$)

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(1)$$

y por definición de función gama

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}]_0^{\infty}=1$$

Por lo que

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Una propiedad importante de Γ(α) es que

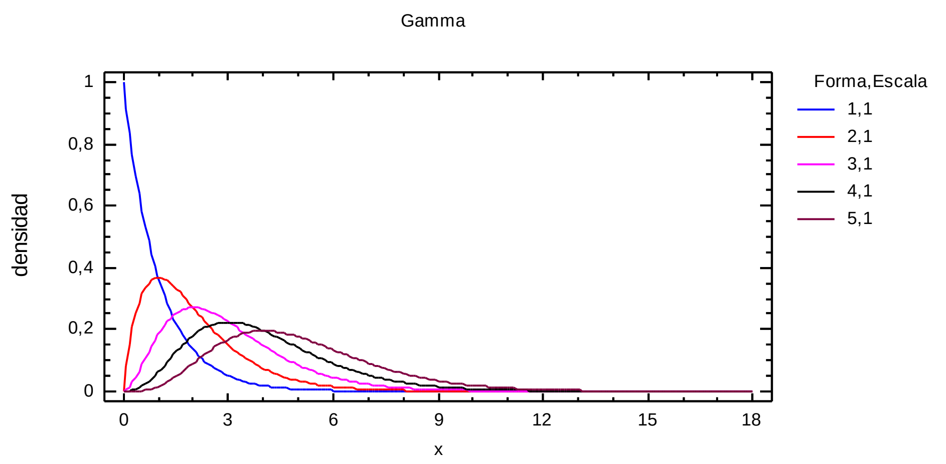
$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

La media y la varianza de la distribución gamma son

$$E(X)=\alpha\beta=\mu$$
$$E[(X-\mu)^2]=\alpha\beta^2=\sigma^2$$

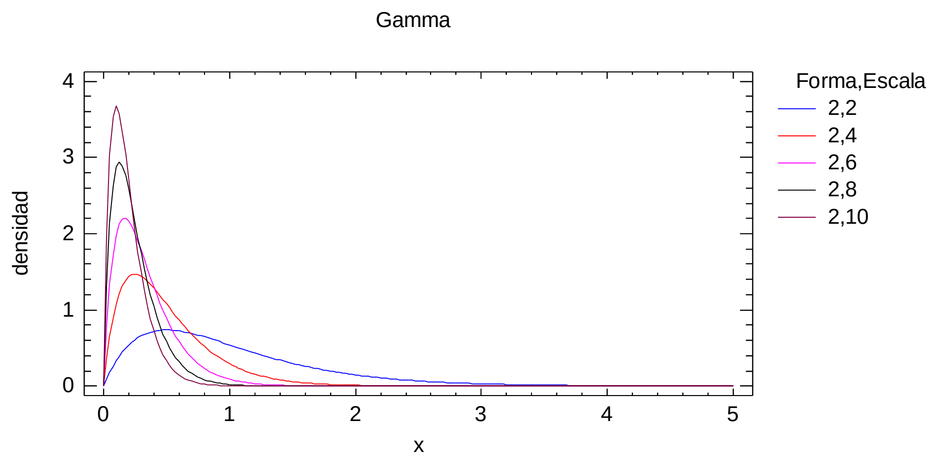
La importancia de la distribución gamma reside en el hecho de que, variando los valores de sus parámetros α y β, se obtienen de ella diferentes funciones de distribución de probabilidad, por lo que **define una familia de funciones**. A **α** se lo conoce como **parámetro de forma** y a **β** como **parámetro de escala**. En la figura 8 se ven algunas distribuciones gamma para diferentes valores de α y para β igual a 1

Figura 8



En la figura 9 se ven algunas distribuciones gamma para diferentes valores de β y α igual a 2

Figura 9



4. Distribución exponencial

Si en la distribución gamma se hace α=1 se obtiene la distribución exponencial.

Definición VI.5

Una variable aleatoria continua *X* tiene distribución de probabilidad exponencial si su función densidad está dada por

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0, \beta > 0 \\ 0, & en\ cq.\ otro\ caso \end{cases}$$

(Recordar que Γ(1) =1).

Para indicar la distribución se emplea la notación $X \sim e(x;\beta)$

De este modo, la media y la varianza de la distribución exponencial son

$$E(X) = \beta = \mu$$
$$E[(X-\mu)^2] = \beta^2 = \sigma^2$$

Una forma de expresar la distribución exponencial es haciendo 1/β= λ, por lo que

$$f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$$

y entonces para indicar la distribución, se emplea la notación $X \sim e(x;\lambda)$. Así,

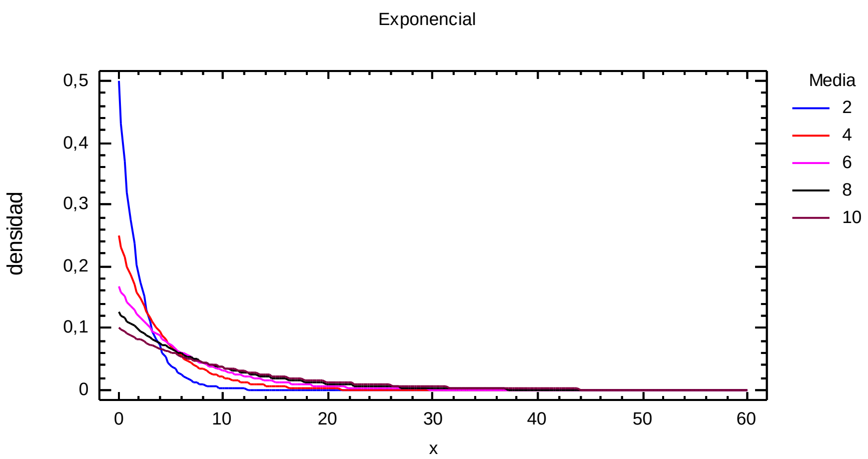
$$E(X)=\beta=1/\lambda=\mu$$
$$E[(X-\mu)^2]=\beta^2=1/\lambda^2=\sigma^2$$

Resulta de mucha utilidad hallar la distribución exponencial acumulada.

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt; \quad t: t \le x; x > 0$$
$$F(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt; \quad -\lambda t = u \Rightarrow -\lambda dt = du \Rightarrow dt = (-1/\lambda)du$$
$$F(x) = -\lambda \frac{1}{\lambda} \int_0^{-\lambda t} e^u\,du = -e^u]_0^{-\lambda t}$$
$$F(x) = -\left(e^{-\lambda x} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

En la figura 7 se ven distintas distribuciones exponenciales para diferentes valores de β. (Comparar con la figura 10 en donde la primer función gamma tiene α=1)

Figura 10



El uso de β como 1/λ (recordemos que λ es el parámetro de la distribución de Poisson) no es fortuito.

La distribución de Poisson se utiliza para calcular la probabilidad de una cantidad específica de eventos que suceden durante un intervalo de tiempo, en el que la tasa o frecuencia de ocurrencia es λ; mientras que la distribución del tiempo transcurrido entre dos eventos sucesivos de Poisson es la exponencial con parámetro β =1/λ

Ejemplo 3:

En una ciudad de tamaño mediano las emergencias en el departamento de bomberos se dan según un proceso de Poisson con una tasa de una llamada cada dos días. Si se analiza un período de un día: a) ¿Cuán probable es que haya más de una llamada? b) ¿Si acaba de ingresar una llamada, cuál es la probabilidad de que transcurran más de dos días antes de la próxima? c) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran menos de un día antes de la próxima? d) ¿cuánto tiempo se espera que transcurra en promedio entre dos llamadas sucesivas?

Definamos variables y sus distribuciones

Y: "cantidad de llamadas de emergencia que ocurren en un período de dos días" (v.a.d.)
$Y \sim p(y; \lambda = 0{,}5)$
X: "tiempo transcurrido entre dos llamadas de emergencia que siguen un proceso de Poisson con λ=2" (v.a.c.)
$X \sim e(x; \lambda = 0{,}5)$

La tasa o frecuencia de llamadas es λ=0,5 ya que hay una llamada cada dos días, o sea $\lambda = 0{,}5 = \left[\frac{1 \text{ (llamadas)}}{2 \text{ (días)}}\right]$

a) $P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0{,}9098 = 0{,}0902$
b) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2*0{,}5}) = e^{-2*0{,}5} = 0{,}3679$
c) $P(X < 1) = F(1) = 1 - e^{-1*0{,}5} = 0{,}3935$
d) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$ (días)

Mientras que la distribución exponencial describe el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia de un evento de Poisson, el tiempo que transcurre hasta un número específico de eventos de Poisson es una variable aleatoria con función distribución de probabilidad gamma. Este número específico es el parámetro α. Así, cuando α=1 ocurre el caso de la distribución exponencial.

5. Distribución ji-cuadrado

Otro caso especial de la función gamma se obtiene al hacer α=ν/2 y β=2, donde ν es un entero positivo llamado grados de libertad. (El concepto de grados de libertad será estudiado en la UT4)

Definición VI.6

Una variable aleatoria continua *X* tiene distribución de probabilidad χ^2 (se lee "ji-cuadrado"), con parámetro ν, si su función densidad está dada por

$$f(x; \nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\left(\frac{\nu}{2-1}\right)} e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}, & x > 0 \\ 0, & en\ cq. otro\ caso \end{cases}$$

Para indicar la distribución, se emplea la notación

$$X \sim \chi^2(x; \nu)$$

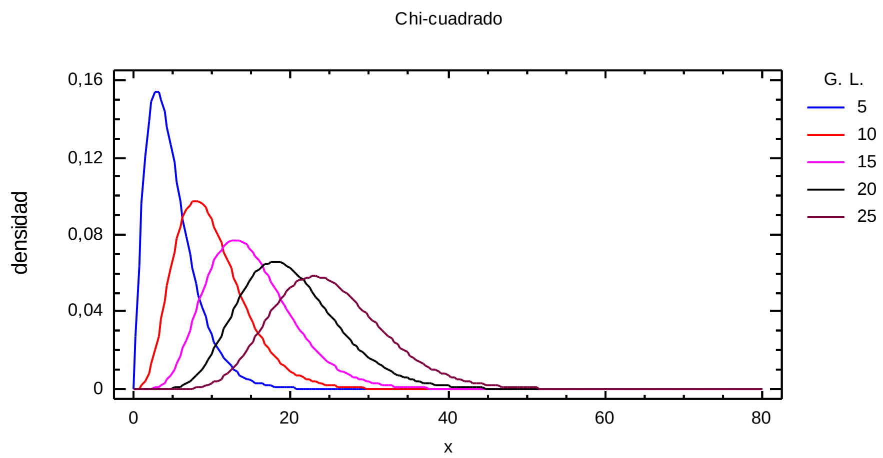
Reemplazando α y β en la media y varianza de la distribución gamma se obtienen las correspondientes a la distribución chi-cuadrado.

La media y la varianza de la distribución chi-cuadrado son

$$E(X) = \nu = \mu$$
$$E[(X-\mu)^2] = 2\nu = \sigma^2$$

Esta distribución juega un papel vital en inferencia estadística, junto con la distribución **t de Student** y **f de Fischer**.

Figura 11



Puede observarse en la figura 11 que la forma de la distribución es sesgada a derecha, aunque el sesgo disminuye a medida que aumenta su parámetro (los grados de libertad ν)

6. Distribución logarítmica normal

También llamada log-normal, se aplica en casos donde una transformación de logaritmo natural tiene como resultado una distribución normal.

Definición VI.7

Una variable aleatoria continua X tiene distribución log-normal si la variable aleatoria Y=ln$X$ tiene distribución normal con media μ y desviación estándar σ y su función densidad es

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

y su media y varianza son

$$E(X) = e^{\frac{\mu+\sigma^2}{2}}$$
$$E[(X-\mu)^2] = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

Debe tenerse cuidado porque aquí μ y σ no son la media y la desviación estándar de X sino de ln$X$.

Mientras que la variable aleatoria normal se considera en muchos casos como el modelo apropiado para representar la suma de una gran cantidad de errores pequeños, la distribución log-normal representa el efecto multiplicativo de éstos. Se la emplea, entre otras cosas, para evaluar el efecto de la fatiga sobre materiales.

Ejemplo 4:
Se sabe, empíricamente, que la concentración de contaminantes producidos por plantas químicas exhibe un comportamiento similar a la distribución log-normal. La concentración de cierto contaminante, en p.p.m. se modela adecuadamente con esta distribución, con μ=3,2 y σ=1. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración exceda las 8 p.p.m.?

X: “concentración del contaminante, en p.p.m.”
$X \sim ln(x; \mu, \sigma)$

$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$

La distribución log-normal tiene una distribución acumulada
$F(X, \mu, \sigma) = P(\ln(X) \leq \ln(x)) = P\left(Z < \dfrac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$
Por lo que
$F(8) = P\left(Z < \dfrac{\ln(8) - 3{,}2}{1}\right) = P(Z < -1{,}12) = 0{,}13136$
Entonces

$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0{,}13136 = 0{,}86864$

7. Distribución de Weibull

Componentes idénticos sujetos a idénticas condiciones fallarán en distintos momentos de forma impredecible. En estos casos el tiempo de operación antes de que aparezcan fallas se modela con esta distribución, la cual es otro caso de la distribución gamma.

Definición VI.8

Una variable aleatoria continua tiene distribución de probabilidad de Weibull, con parámetros α y β si su función densidad está dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x \beta}, & x > 0;\ \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

Y su media y varianza son:

$$E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$
$$E[(X - \mu)^2] = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

Ejemplo 5:

La vida útil de un determinado tipo de máquina antes de que empiece a fallar, medida en miles de horas, sigue una distribución de Weibull con parámetros α=2 y β=7. ¿Cuál es la probabilidad de que una de estas máquinas trabaje 10000 horas antes de que comience a fallar?

X: "tiempo de operación de la máquina, en miles de horas, antes de que falle"
$X \sim w(x; \alpha = 2, \beta = 7)$

Nuevamente, es útil conocer la expresión de la función distribución acumulada F(x).

$$F(x) = 1 - e^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

Entonces,

$$P(X > 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - e^{\left(\frac{10}{7}\right)^{2}}\right) = 0{,}1299$$