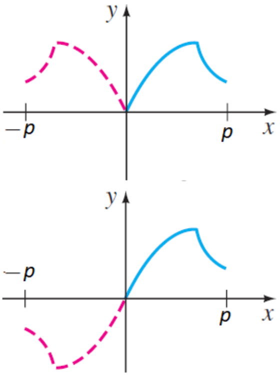
Series de Fourier

Facultad de Ingeniería

Recorrido-SERIES DE FOURIER

1. Producto escalar y familias ortogonales de funciones
   - Producto escalar y ortogonalidad de funciones
   - Familias ortogonales de funciones
2. Series trigonométricas de Fourier
   - Introducción
   - Serie de Fourier generada por f
   - Convergencia de series de Fourier
3. Series de senos y cosenos de Fourier
      - Funciones pares e impares: propiedades
      - Funciones periódicas
      - Serie de Fourier para una función par
      - Serie de Fourier para una función impar
      - Extensiones de funciones definidas en semiintervalos
   - Serie de cosenos de Fourier
   - Serie de senos de Fourier
   - Serie de Fourier de una función definida en un semiintervalo

Sean $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$ y $g : [-p, p] \to \mathbb{R}$.



Si f es par, $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$.

Si f es impar, $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$.

Si f y g son ambas pares o ambas impares, $f\,g$ es par.

Si f es par y g es impar, $f\,g$ es impar.

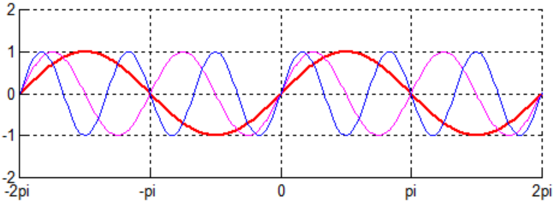
Funciones periódicas

Una función f es periódica si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier número positivo P con esta propiedad se llama periodo o período. El menor de los periodos de una función se llama periodo fundamental de la misma.

Ejemplos:

La función $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene periodos 2π, 4π, 6π,... y su periodo fundamental es 2π.

La función $g(x) = \text{sen}(2x)$ tiene periodos π, 2π, 3π,... y su periodo fundamental es π.



Funciones periódicas

Una función f es periódica si $f(x+P) = f(x)$ para todo x. P es una constante positiva. Cualquier número positivo P con esta propiedad se llama periodo o período. El menor de los periodos de una función se llama periodo fundamental de la misma.

Ejemplos:

La función $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene periodos 2π, 4π, 6π,... y su periodo fundamental es 2π.

La función $g(x) = \text{sen}(2x)$ tiene periodos π, 2π, 3π,... y su periodo fundamental es π.

Cada término de la serie

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \text{sen}(nx) \right)$$

tiene periodo 2π. Luego la serie tiene periodo 2π.

Serie de Fourier generada por una función par

Sea $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f:

1) Si f es par,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Serie de Fourier generada por una función impar

Sea $f : [-p, p] \to \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f:

2) Si f es impar,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0;$$

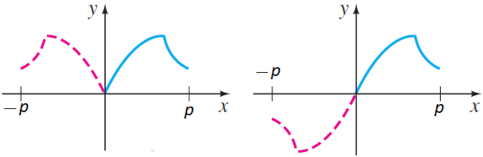
$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Extensiones par e impar de una función definida en un semiintervalo

Dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, se puede definir una nueva función, extensión de f al intervalo $[-L, L]$, que sea par o impar (esta última, si $f(0) = 0$):



Extensión par:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ f(x) \text{ si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Extensión impar (asumimos $f(0) = 0$):

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ 0 \text{ si } x = 0; \\ f(x) \text{ si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Serie de cosenos de Fourier

La **serie de cosenos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión par de** f.

Serie de cosenos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ f(x) \text{ si } 0 \leq x \leq L. \end{cases} \qquad L = p.$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Serie de senos de Fourier

La **serie de senos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión impar de** f.

Serie de senos de Fourier

Para $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, la extensión impar es:

$$h : [-L, L] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ si } -L \leq x < 0; \\ 0 \text{ si } x = 0; \\ f(x) \text{ si } 0 < x \leq L. \end{cases} \qquad L = p.$$

Coeficientes para la serie de senos de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = 0, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} h(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Serie de Fourier de una función definida en un semiintervalo

Si se desarrolla la función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ en serie de Fourier, igualando $[0, L] = [0, 2p]$ y $L = 2p$, se obtienen los coeficientes de Fourier

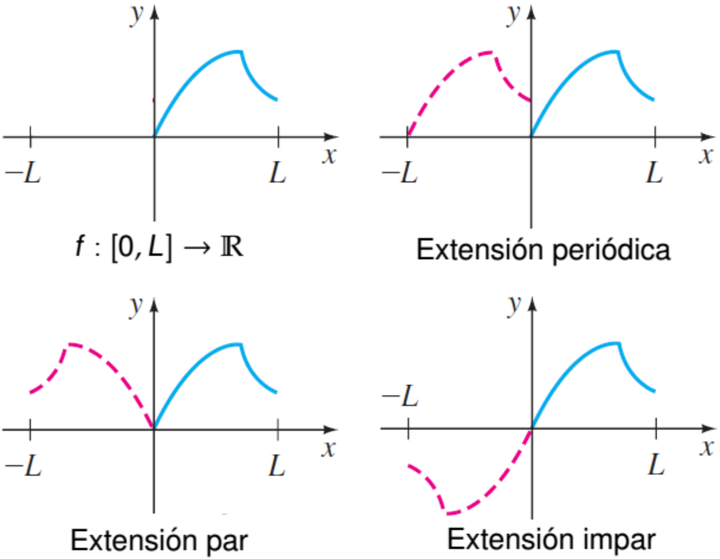
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

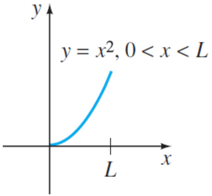
$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, \cdots$$

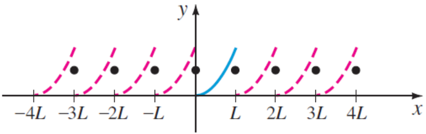
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Ilustraciones de extensiones de funciones

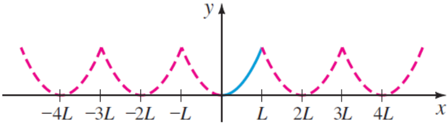


Ilustraciones de tipos de series

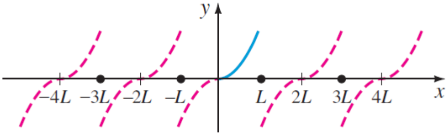




Serie de Fourier



Serie del coseno

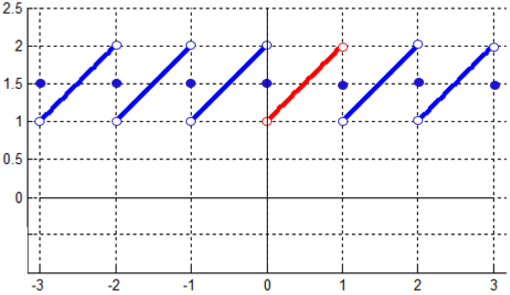


Serie del seno

Ejemplo

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.
Los coeficientes de Fourier de f son $a_0 = 3$, $a_n = 0$ y $b_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots.$
Halle la serie de Fourier generada por f, F, e indique cuánto valen $F(0)$ y $F(-1)$.

$$F(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x).$$

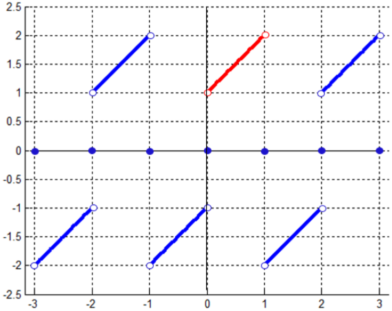


$$F(0) = 1,5; \quad F(-1) = 1,5.$$

Ejemplo

Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$.

1. Plantee fórmulas para calcular los coeficientes de la serie de senos de Fourier de f, F.
   $a_0 = 0$, $a_n = 0$ y $b_n = 2\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n)$, $n = 1, 2, \ldots$.
2. Represente gráficamente la función F en $[-3, 3]$.



3. Indique cuánto valen $F(-2)$ y $F(\frac{3}{2})$.