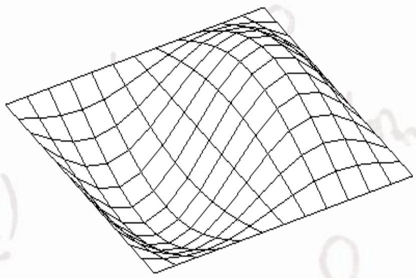
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

# MATEMÁTICA AVANZADA



Silvia RAICHMAN – Aníbal MIRASSO - Eduardo TOTTER

## Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Método de Diferencias Finitas

Ingeniería en Mecatrónica

FACULTAD DE INGENIERÍA
Universidad Nacional de Cuyo

Agosto de 2019

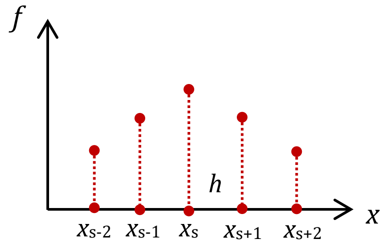
# MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

## APROXIMACIÓN DE DERIVADAS POR DIFERENCIAS FINITAS

El desarrollo de la función $f(x)$ diferenciable en Serie de Taylor alrededor del punto $x = a$ está dado por:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) \quad + \cdots \qquad (0)$$

Discretizamos la variable $x$ utilizando un paso fijo $h$ entre abscisas consecutivas, tal como indica la siguiente figura:




Si $a = x_s$ , el desarrollo en Serie de Taylor de la función $f(x)$ en $x = x_s \pm nh$ está dado por:

$$\boxed{f(x_s \pm nh) = f(x_s) \pm nhf'(x_s) + \frac{(nh)^2}{2!}f''(x_s) \pm \frac{(nh)^3}{3!}f'''(x_s) + \cdots} \qquad (1)$$

Haciendo $n = \pm 1$ y $n = \pm 2$ en la expresión (1) resulta :

Para $n = -2$ : $f_{s-2} = f_s - 2hf'_s + 2h^2f''_s - \frac{4}{3}h^3f'''_s + \cdots$ (2)

Para $n = -1$ : $f_{s-1} = f_s - hf'_s + \frac{1}{2}h^2f''_s - \frac{1}{3}h^3f'''_s + \cdots$ (3)

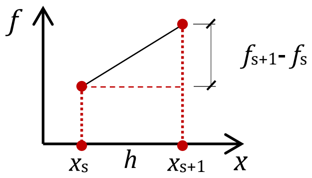
Para $n = +1$ : $f_{s+1} = f_s + hf'_s + \frac{1}{2}h^2f''_s + \frac{1}{3}h^3f'''_s + \cdots$ (4)

Para $n = +2$ : $f_{s+2} = f_s + 2hf'_s + 2h^2f''_s + \frac{4}{3}h^3f'''_s + \cdots$ (5)

Para obtener la derivada primera,

de la ecuación (4) obtenemos:

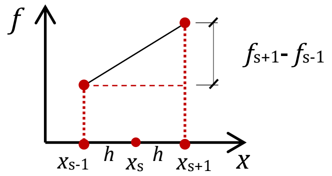
$$f'_s = \frac{[f_{s+1} - f_s]}{h} + O(h) \qquad (6)$$




Se denomina **diferencia hacia adelante** o "**estrella**" hacia adelante. "Estrella" es el conjunto de puntos o estaciones auxiliares utilizadas para evaluar las derivadas.

A partir de las ecuaciones (4) y (3), y haciendo la diferencia entre ambas, obtenemos:

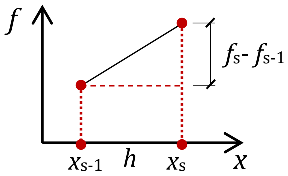
$$f'_s = \frac{[f_{s+1} - f_{s-1}]}{2h} + O(h^2) \qquad (7)$$




Esta expresión para la evaluación de la primera derivada de $f(x)$ en el punto $x_s$, se denomina **diferencia central.**

De la ecuación (3) se deduce la siguiente expresión:

$$f'_s = \frac{[f_s - f_{s-1}]}{h} + O(h) \qquad (8)$$




Esta expresión para la evaluación de la primera derivada de $f(x)$ en el punto $x_s$, se denomina **diferencia hacia atrás.**

Para obtener una expresión para la derivada segunda, sumamos las expresiones (4) y (3), de donde resulta:

$$f''_s = \frac{[f_{s+1} - 2f_s + f_{s-1}]}{h^2} + O(h^2) \qquad (9)$$

Es posible obtener también las siguientes expresiones para las derivadas tercera y cuarta en el punto de abscisa $x_s$:

$$f'''_s = \frac{[-f_{s-2} + 2f_{s-1} - 2f_{s+1} + f_{s+2}]}{2h^3} + O(h^2) \qquad (10)$$

$$f''''_s = \frac{[f_{s-2} - 4f_{s-1} + 6f_s - 4f_{s+1} + f_{s+2}]}{h^4} + O(h^2) \qquad (11)$$

A partir de una función dada en forma discreta, las expresiones anteriores pueden utilizarse para evaluar en forma aproximada los valores de derivadas en un punto cualquiera de dicha función.

**Ejemplo de aplicación.**

Vamos a calcular la derivada primera de la función $tg(x)$ en $x$=1, mediante tres aproximaciones diferentes y distintos valores del paso $h$. En primer lugar obtenemos la solución exacta como referencia para luego comparar con los valores aproximados obtenidos.

$$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

Por lo tanto:

$f'_{1ex}$=3.425518821

Calcularemos el error obtenido para cada paso $h$, de la siguiente manera:

$$e(h_i) = \left|\frac{f'_1 - f'_{1ex}}{f'_{1ex}}\right| 100$$

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para 4 valores del paso h, utilizando las expresiones aproximadas para la derivada primera, obtenidas anteriormente.

| Fórmula para $f'$ | | $h_1$=0.1 | $h_2$=0.05 | $h_3$=0.02 | $h_4$=0.01 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ecuación (8) | $f'_1$ | 2.9725 | 3.1805 | 3.3225 | 3.3731 |
| | $e(h_i)$ | 13.20% | 7.10% | 3.00% | 1.50% |
| | $e(h_i)/e(h_{i+1})$ | 1.90 | 2.36 | 2.00 | - |
| | $h_i/h_{i+1}$ | 2.00 | 2.50 | 2.00 | - |
| Ecuación (6) | $f'_1$ | 4.0735 | 3.7181 | 3.5361 | 3.4798 |
| | $e(h_i)$ | 18.90% | 8.50% | 3.20% | 1.60% |
| | $e(h_i)/e(h_{i+1})$ | 2.22 | 2.65 | 2.00 | - |
| | $h_i/h_{i+1}$ | 2.00 | 2.50 | 2.00 | - |
| Ecuación (7) | $f'_1$ | 3.523 | 3.4493 | 3.4293 | 3.4265 |
| | $e(h_i)$ | 2.80% | 0.69% | 0.11% | 0.03% |
| | $e(h_i)/e(h_{i+1})$ | 4.06 | 6.30 | 3.70 | - |
| | $h_i/h_{i+1}$ | 2.00 | 2.50 | 2.00 | - |

# APLICACIÓN A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

Hasta ahora hemos supuesto conocido un conjunto de valores de la función $f(x)$ en un dominio y hemos empleado diferencias finitas para aproximar derivadas.

Ahora suponemos que la función $f(x)$ es desconocida en todo el dominio y que sólo se la conoce en el contorno. Aproximaremos la solución de ecuaciones diferenciales por medio de diferencias finitas.

Dado el siguiente modelo matemático, donde $A$ y $B$ son operadores diferenciales:

$$\begin{cases} A\big(u(x,t)\big) = 0 & en\ \Omega \quad (dominio) \\ B(u(x,t) = 0 & en\ S_\Omega \quad (frontera) \end{cases}$$

El modelo numérico se obtiene a partir del siguiente procedimiento:

1) Se **discretiza el dominio**, adoptando una serie de puntos o estaciones de referencia.
2) Se **transforma** la **ecuación diferencial** sustituyendo las derivadas por una aproximación numérica, obteniendo la **forma discreta de la ecuación diferencial.**
3) Se aplica la **forma discreta** obtenida en 2), **en los puntos del dominio**.
4) Se aplican las **condiciones de borde** del problema al sistema obtenido en 3).
5) Se resuelve el sistema discreto obtenido en 4), obteniendo una **solución discreta**, es decir, un número finito de incógnitas.

**Observación:**

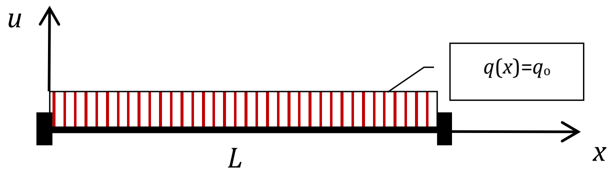
El sistema discreto que se obtiene en el paso 5), puede ser:

- Sistema de ecuaciones lineales,
- Problema de valores y vectores propios,
- Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que se lleva a un sistema de ecuaciones lineales o a un problema de valores y vectores propios.

Esto depende de si la ecuación diferencial original es una ecuación diferencial ordinaria o parcial, homogénea o no homogénea.

**Ejemplo de aplicación**:

A partir de la utilización del Método de Diferencia Finitas (MDF), se estudiará el problema de la flexión elástica de una viga de longitud $L$, doblemente empotrada en sus extremos y sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida contenida en el plano de flexión de la misma. El problema descripto se representa en forma esquemática en la siguiente figura:




En el caso de una viga de sección transversal constante, con momento de inercia $I$ y módulo de elasticidad longitudinal $E$, el modelo matemático que gobierna la deflexión de la viga está dado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden:

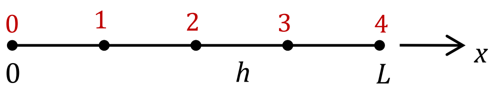
$$\boxed{EI\frac{d^4u}{dx^4} = q(x)}$$

Las condiciones de borde del problema, están dadas por las siguientes expresiones, las cuales corresponden a extremos empotrados:

$$CB: \begin{cases} u(0) = u(L) = 0 \\ \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

La aplicación del procedimiento descripto en los párrafos precedentes implica los siguientes pasos:

**Primer paso:** Se **discretiza** el dominio, adoptando una serie de puntos o estaciones de referencia. En este caso se adopta un paso $h$=0.25$L$



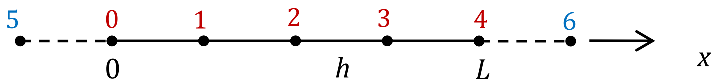

**Segundo paso:** Se **transforma** la **ecuación diferencial** sustituyendo las derivadas por una aproximación numérica, obteniendo la forma discreta de la ecuación diferencial. En este caso se utiliza la siguiente fórmula de derivación que aproxima la derivada cuarta de la función (ecuación 11):

$$\left.\frac{d^4u}{dx^4}\right|_i \approx \frac{[u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}]}{h^4} \qquad O(h^2)$$

La ecuación diferencial discretizada, está entonces dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{EI\frac{[u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}]}{h^4} = q(x)}$$

Se aplica la forma discreta presentada en los puntos del dominio. Para ello es necesario definir dos puntos ficticios fuera de dicho dominio, de acuerdo al siguiente esquema:




De esta manera, aplicando la fórmula de derivación sucesivamente en los nodos 1, 2 y 3 y teniendo en cuenta que en este caso $q(x)=q_0$, tendremos:

$$EI\frac{[u_5 - 4u_0 + 6u_1 - 4u_2 + u_3]}{h^4} = q_0$$

$$EI\frac{[u_0 - 4u_1 + 6u_2 - 4u_3 + u_4]}{h^4} = q_0$$

$$EI\frac{[u_1 - 4u_2 + 6u_3 - 4u_4 + u_6]}{h^4} = q_0$$

**Tercer paso:** Se aplican las **condiciones de borde** del problema al sistema obtenido. En ambos extremos se tiene que:

$$u_0 = u_4 = 0$$

La condición de borde dada por $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L} = 0$ implica la imposibilidad de rotación de los extremos de la viga. A partir de la aproximación central para la derivada primera dada por la expresión (7) se tiene que :

$u_5=u_1$ y $u_3=u_6$

De esta manera se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$EI\,\frac{[7u_1 - 4u_2 + u_3]}{h^4} = q_0$$

$$EI\,\frac{[-4u_1 + 6u_2 - 4u_3]}{h^4} = q_0$$

$$EI\,\frac{[u_1 - 4u_2 + 7u_3]}{h^4} = q_0$$

Cuya expresión matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{q_0 h^4}{EI}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para una viga de acero ($E$=2100000kg/cm2) con un momento de inercia $I$=2140cm$^4$, una longitud $L$=300cm y una carga $q_0$=800 kg/m, tendremos:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0563251 \\ 0.0563251 \\ 0.0563251 \end{bmatrix}$$

La resolución del sistema presentado, brinda los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03520 \\ 0.05633 \\ 0.03520 \end{bmatrix}$$

Con el objeto de mejorar la precisión de los resultados obtenidos, se presenta a continuación la resolución del problema planteado, en este caso para un paso de discretización $h$=$L$/12=0.25m.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $u_1$ | | 0.0006954 |
| -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $u_2$ | | 0.0006954 |
| 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $u_3$ | | 0.0006954 |
| 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $u_4$ | | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $u_5$ | | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | 0 | 0 | | $u_6$ | = | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | 0 | | $u_7$ | | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | 0 | | $u_8$ | | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | 1 | | $u_9$ | | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 6 | -4 | | $u_{10}$ | | 0.0006954 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 | 7 | | $u_{11}$ | | 0.0006954 |

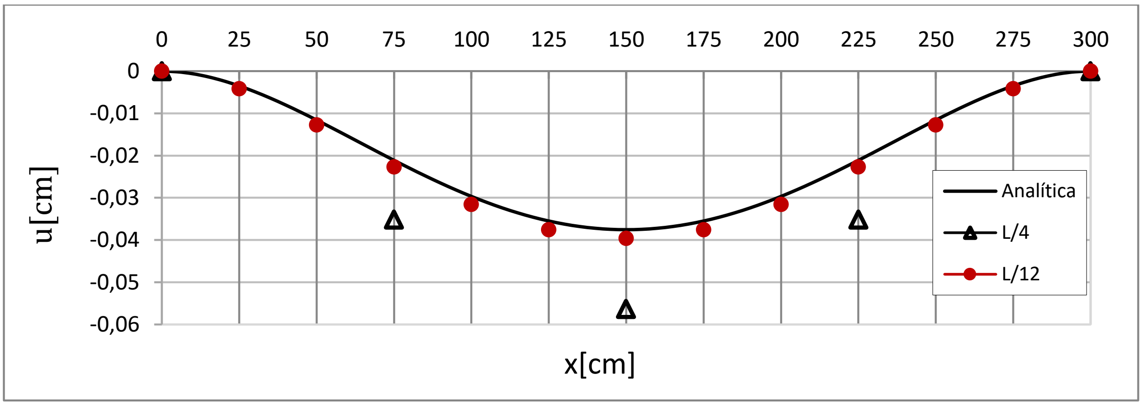
La resolución de dicho sistema brinda los siguientes valores:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | | 0.00414 | | |
| $u_2$ | | 0.01275 | | |
| $u_3$ | | 0.02269 | | |
| $u_4$ | | 0.03152 | | |
| $u_5$ | | 0.03752 | | |
| $u_6$ | = | 0.03964 | mm | |
| $u_7$ | | 0.03752 | | |
| $u_8$ | | 0.03152 | | |
| $u_9$ | | 0.02269 | | |
| $u_{10}$ | | 0.01275 | | |
| $u_{11}$ | | 0.00414 | | |

La solución analítica al problema planteado esta dada por la siguiente expresión:

$$u = -\frac{q_0 x^2}{24EI}(L-x)^2$$

De esta manera y a los efectos de comparar los resultados obtenidos, representamos gráficamente los mismos.




Del análisis del gráfico realizado, es posible apreciar la mayor precisión de los resultados obtenidos a partir de la discretización con un paso $h$=$L/12$.

En la siguiente tabla, se presentan los errores relativos cometidos en cada uno de los casos de discretización del dominio espacial y su comparación con los valores analíticos para tres secciones transversales características de la viga del problema planteado.

| $x$ [cm] | Solución analítica | Discretización $h_1$=L/4 | Discretización $h_2$=L/12 | Error₁ $h_1$=L/4 | Error₂ $h_2$=L/12 | $h_1/h_2$ | Error₁/Error₂ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | -0.021122 | -0.03520 | -0.02269 | 66.7% | 7.4% | 3.0 | 8.99 |
| 150 | -0.03755 | -0.05633 | -0.03964 | 50.0% | 5.6% | 3.0 | 8.99 |
| 225 | -0.021122 | -0.03520 | -0.02269 | 66.7% | 7.4% | 3.0 | 8.99 |

La Tabla permite observar que mientras la razón de pasos es de 3, los errores disminuyen alrededor de un factor 9, lo cual se explica a partir del hecho de que el error de la fórmula de derivación utilizada para la derivada cuarta es $O(h^2)$.

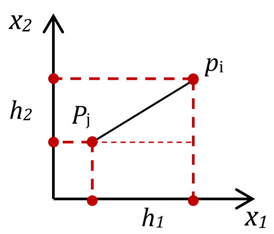
## PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

Decimos que el problema es bidimensional cuando la descripción del dominio estudiado depende de dos parámetros coordenados.

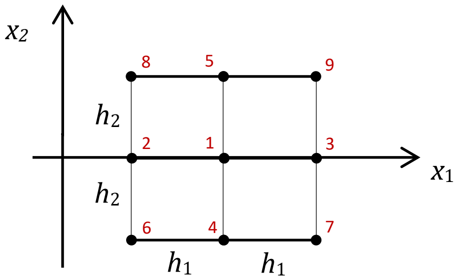
El procedimiento de diferencias finitas se aplica de la misma forma, sólo que ahora se trabajará con derivadas parciales. La expansión en serie de Taylor para $f(x_1, x_2)$ es:

$$f_i = f_j + h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_j + h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_j + \frac{{h_1}^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\right|_j + \frac{{h_2}^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}\right|_j + \frac{2}{2!} h_1 h_2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_j$$
$$+ \frac{{h_1}^3}{3!} \left.\frac{\partial^3 f}{\partial {x_1}^3}\right|_j + \frac{{h_2}^3}{3!} \left.\frac{\partial^3 f}{\partial {x_2}^3}\right|_j + \frac{3}{3!} {h_1}^2 h_2 \left.\frac{\partial^3 f}{\partial {x_1}^2 \partial x_2}\right|_j + \frac{3}{3!} {h_2}^2 h_1 \left.\frac{\partial^3 f}{\partial {x_2}^2 \partial x_1}\right|_j$$
$$+ \cdots$$

El número de estaciones auxiliares depende del orden de la máxima derivada que se quiera aproximar.




Si se desean aproximar todas las derivadas parciales segundas: $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ serán necesarias 6 estaciones auxiliares, configurando una "**estrella**". Sea por ejemplo la siguiente distribución regular de estaciones, con espaciamientos constantes $h_1$ y $h_2$ en direcciones $x_1$ y $x_2$ respectivamente.




Es posible obtener las siguientes expresiones para las primeras y segundas derivadas:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_1 \cong [f_3 - f_2]\frac{1}{2h_1}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_1 \cong [f_5 - f_4]\frac{1}{2h_2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\right|_1 \cong [f_3 - 2f_1 + f_2]\frac{1}{{h_1}^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}\right|_1 \cong [f_5 - 2f_1 + f_4]\frac{1}{{h_2}^2}$$

Observamos que las derivadas primeras y las derivadas segundas son idénticas a las obtenidas para problemas unidimensionales respecto a cada dirección. La derivada segunda cruzada resulta:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_1 \cong [f_6 - f_7 - f_8 + f_9]\frac{1}{4h_1 h_2}$$

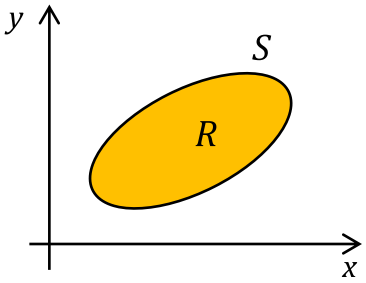
## ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELÍPTICAS

Las ecuaciones diferenciales parciales elípticas de **Laplace**, **Poisson** y **Helmholtz**, están dadas por:

| | |
|---|---|
| $\nabla^2 u = 0$ | Ecuación de **Laplace** |
| $\nabla^2 u = f(x,y)$ | Ecuación de **Poisson** |
| $\nabla^2 u + f(x,y)u = g(x,y)$ | Ecuación de **Helmholtz** |

donde $\nabla^2 \mathrm{u} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2}$ se denomina Laplaciano de $u(x,y)$.

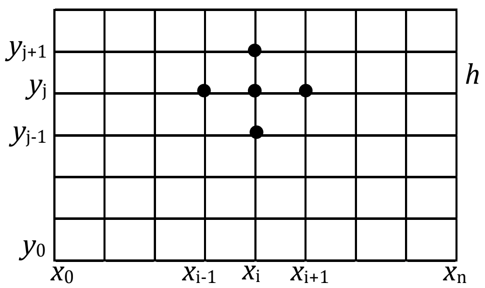
Conocidos los valores que debe tomar la función $u$ (problema de Dirichlet), o su derivada normal $\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0$ (problema de Neumann) en la frontera de una región rectangular R del plano, estos problemas pueden resolverse mediante el **método de diferencias finitas.**




$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2 u = f(x,y) \qquad en\ (x,y)\epsilon\ R \\ \mathrm{u}(x,y) = g(x,y)\ \ para\ (x,y)\epsilon\ S \end{array}}$$

Las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son continuas en sus dominios y se garantiza una solución única.

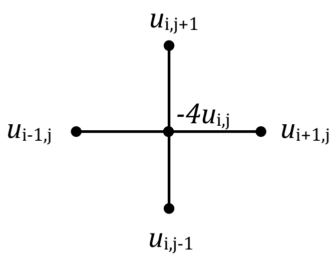
Consideramos la región $R$ rectangular: $R = \{(x,y): 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b\}$ y la dividimos en $n$-1 x $m$-1 cuadrados de lado $h$. Es decir $a$=$nh$ y $b$=$mh$ .




**Estrella**: Esquema para $\nabla^2 u_{ij}$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} \cong \left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]\frac{1}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} \cong \left[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right]\frac{1}{h^2}$$




Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Poisson, la forma discreta de ésta resulta:

$$\boxed{\nabla^2 u_{i,j} = \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right]\frac{1}{h^2} = f_{i,j}}$$

Esta expresión relaciona el valor de la función $u_{i,j}$ con sus cuatro valores adyacentes ($u_{i+1,j}$ ; $u_{i-1,j}$ ; $u_{i,j+1}$ ; $u_{i,j-1}$) como muestra el esquema para $\nabla^2 u$.