Transformada de Laplace. Guía de estudio y ejercicios.

Contenido

Introducción.

El propósito de esta guía de estudio es destacar los principales conceptos de Transformada de Laplace para ser utilizados en la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con valores iniciales; y su uso en la descripción de sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo.

El modelo matemático que describe el comportamiento de sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo se puede describir mediante una EDO con coeficientes reales y constantes, como por ejemplo:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = g(t) \quad con \quad x(0) = x_0 \quad \frac{dx(0)}{dt} = b_0$$

Siendo *x(t)* la respuesta del sistema ante la acción externa g(t).

Al aplicar Transformada de Laplace a la EDO resulta una relación algebraica entre *X(s)* y *G(s)*, en el plano s de variable compleja, mediante una función racional estrictamente propia

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H(s) \cdot G(s)$$

Siendo **H(s) la función de transferencia del sistema**; *N(s)* y *D(s)* son polinomios de coeficientes reales, con grado polinómico de *N(s)* menor al grado polinómico de *D(s).*

Mediante la identificación de **los polos de la *X(s)***, y considerando la posibilidad de expresar *X(s)* en forma de **fracciones parciales**, es posible obtener la respuesta *x(t)* en el dominio del tiempo sólo considerando algunas Transformadas de Laplace de funciones simples.

Transformada de Laplace permite:

- Cambiar un problema diferencial en el dominio del tiempo por un problema algebraico en el dominio complejo o Plano *s*.
- Distinguir en la respuesta del sistema el aporte de las condiciones iniciales y de la acción externa.
- Saber la respuesta en el tiempo de un sistema dinámico conociendo la posición de los polos y ceros del sistema en el Plano *s*.
- Resolver integrales de convolución en general y la integral de Duhamel en particular.

Transformada de Laplace. Definición, Ejemplos y Propiedades

Dada una función *f(t)* de R en R, continua por tramos en el intervalo de números reales mayores o iguales a cero, se define Transformada de Laplace a la función *F(s)*, que resulta de la siguiente integral

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

siendo *s* una variable compleja. De este modo, la función *f(t)* de R en R se transforma en una función *F(s)* de C en C (función de variable compleja, cuyo resultado es un número complejo).

Existencia de la Transformada de Laplace.

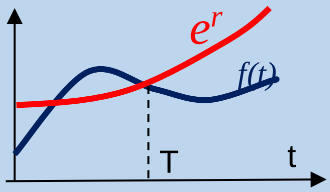
En Zill y Cullen (2002), Edwards y Penny (2009) se presentan el Teorema de Existencia de la Transformada de Laplace, estableciendo que:

> Es condición suficiente para que exista la Transformada de Laplace de la función *f(t)* garantizar que la integral que la define sea convergente.
> Esto se asegura cuando se cumple que:
>
> > la función *f(t)* es continua por tramos
> >
> > la función *f(t)* es orden exponencial r para t >T

Una función *f(t)* es orden exponencial r para t>T , cuando existen números reales positivos r y M tales que

$$|f(t)| \le M\, e^{rt}$$

$$|f(t) \cdot e^{-rt}| \le M$$



Transformada de Laplace de la Función Impulso Unitario o función Delta de Dirac.

Se define a la función de Delta de Dirac o función Impulso unitario, y se la representa con *δ(t)*, a la función que tiene las siguientes propiedades:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si\ \ t = a \\ 0 & si\ \ t \neq a \end{cases}$$

y las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\, f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t-a)\, f(t)\, dt = f(a)$$

La Transformada de Laplace de la Función Delta de Dirac resulta:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \delta(t) \cdot dt = 1$$

Transformada de Laplace de la Función de Heaviside o Escalón.

Se define a la función de Heaviside o función Escalón, y se la representa con $u_s(t)$, a la función que vale cero para tiempos menores que cero; y vale uno para los tiempos mayores o iguales a cero.

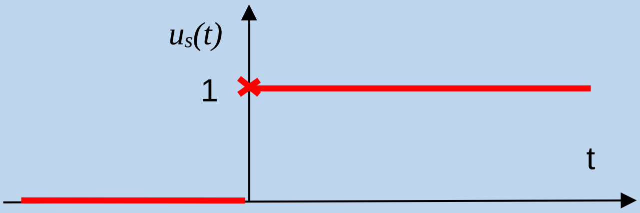
La Transformada de Laplace resulta:

$$L[u_s(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u_s(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{s} \;\; con \;\; s > 0$$

En la Figura se puede observar la Función en el dominio del tiempo; el módulo de (1/s) en el dominio s o plano complejo, y sus trazas para valores constantes de la parte real de la variable s.

<u>En el dominio del tiempo</u>

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t < 0 \\ 1 & si \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

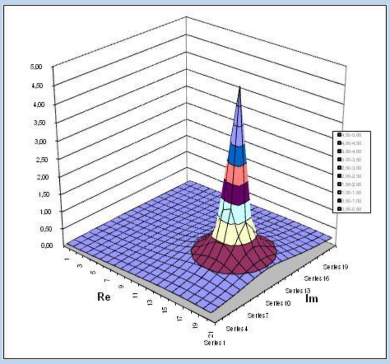


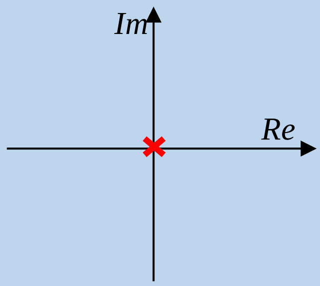
<u>En el Plano s</u>

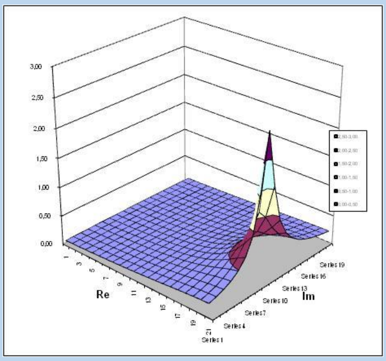
$$L[u_s(t)] = F(s) = \frac{1}{s} \;\; con \;\; s > 0$$

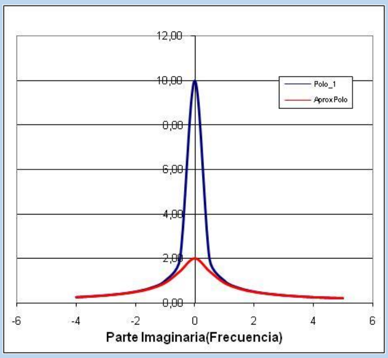
Singularidad en p=(0 +j 0)

Para visualizar la *F(s)* es necesario visualizar su módulo y su argumento, ya que se trata de un resultado complejo. En la siguiente gráfica se puede observar el módulo de *F(s)*, su traza en un plano de parte real constante y la posición del polo en el Plano s.









Transformada de Laplace de la Función Exponencial.

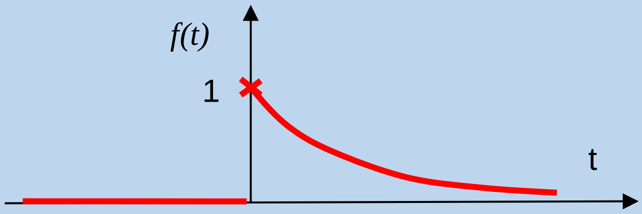
La Transformada de Laplace resulta:

$$L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at} \cdot dt = \frac{1}{s+a} \;\; con \; s > -a$$

En la Figura se puede observar la Función en el dominio del tiempo; el módulo de (1/(s+a)) en el dominio s o plano complejo, y sus trazas para valores constantes de la parte real de la variable s.

<u>En el dominio del tiempo</u>

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t < 0 \\ e^{-at} & si \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

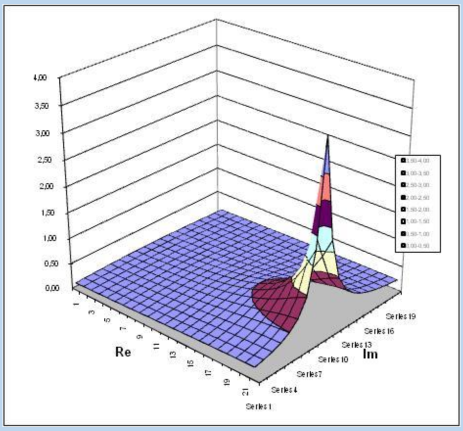


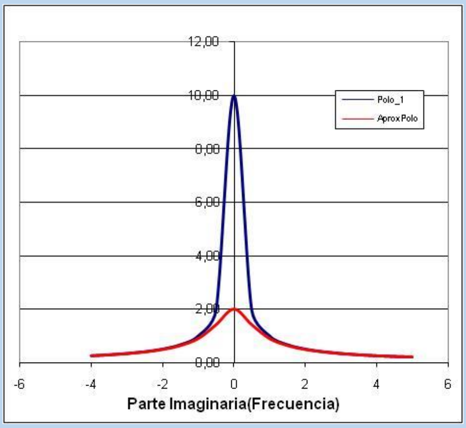
<u>En el Plano s</u>

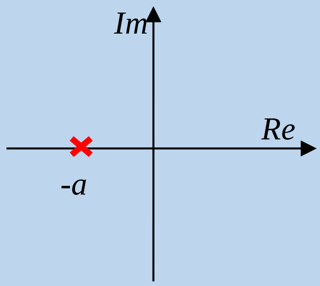
$$L[e^{-at}] = F(s) = \frac{1}{s+a} \;\; con \; s > -a$$

Singularidad en p=(-a +j 0)

En la siguiente gráfica se puede observar el módulo de *F(s)*, su traza en un plano de parte real constante y la posición del polo en el Plano s.







Es oportuno destacar que la función 1/(s+a) se puede obtener de la función 1/s desplazándola a s=-a. Es decir, se trata de una traslación de la función 1/s en el plano s. Esto es un caso particular de la propiedad de traslación en s de la Transformada de Laplace.

Transformada de Laplace de la Función Rampa.

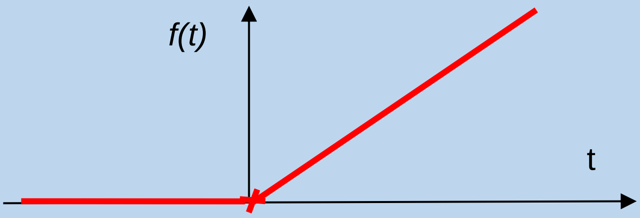
La Transformada de Laplace resulta:

$$L[at] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at \cdot dt = \frac{a}{s^2} \quad con \;\; s > 0$$

En la Figura se puede observar la Función en el dominio del tiempo; el módulo de F(s)en el dominio s o plano complejo, y sus trazas para valores constantes de la parte real de la variable s.

<u>En el dominio del tiempo</u>

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t < 0 \\ at & si \;\; t \geq 0 \end{cases}$$

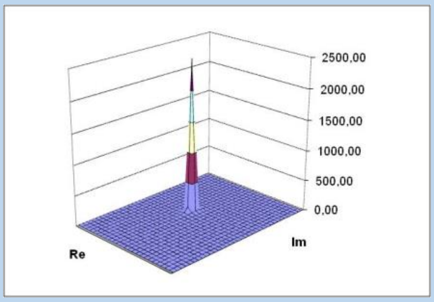


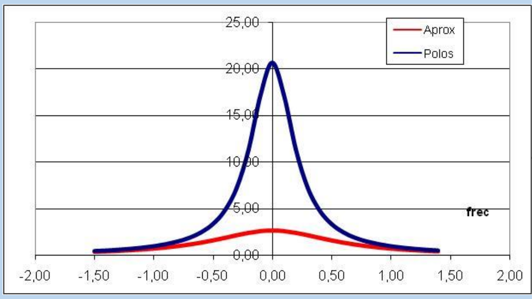
<u>En el Plano s</u>

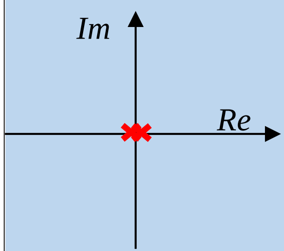
$$L[at] = F(s) = \frac{a}{s^2} \quad con \;\; s > 0$$

Singularidad Doble en p=(0 +j 0)

En la siguiente gráfica se puede observar el módulo de *F(s)*, la traza en un plano de parte real constante y la posición del polo en el Plano s.







Ejercicio: Usando integración por partes, y la condición de convergencia de Transformada de Laplace (eventualmente la Regla de L'Hopital de limites indeterminados), probar que

- $L[at] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at \cdot dt = \frac{a}{s^2} \quad con \;\; s > 0$
- $L[at^2] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at^2 \cdot dt = \frac{a \cdot 2}{s^3} \quad con \;\; s > 0$
- $L[at^3] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at^3 \cdot dt = \frac{a \cdot 3!}{s^4} \quad con \;\; s > 0$
- ¿Es posible generalizar para t^n, siendo n un número entero positivo?

Transformada de Laplace de la Función Seno.

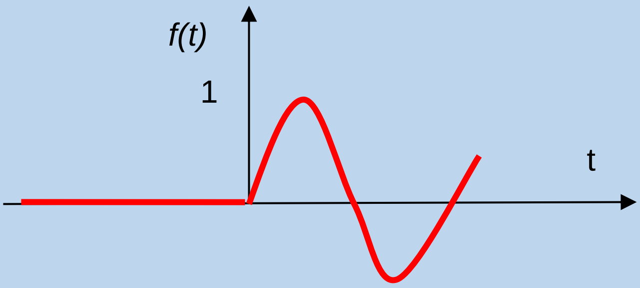
La Transformada de Laplace resulta:

$$L[\sin(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin(at) \cdot dt = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad con \ s > 0$$

En la Figura se puede observar la Función en el dominio del tiempo; el módulo de F(s)en el dominio s o plano complejo, y sus trazas para valores constantes de la parte real de la variable s.

<u>En el dominio del tiempo</u>

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \ \ t < 0 \\ \sin(at) & si \ \ t \geq 0 \end{cases}$$



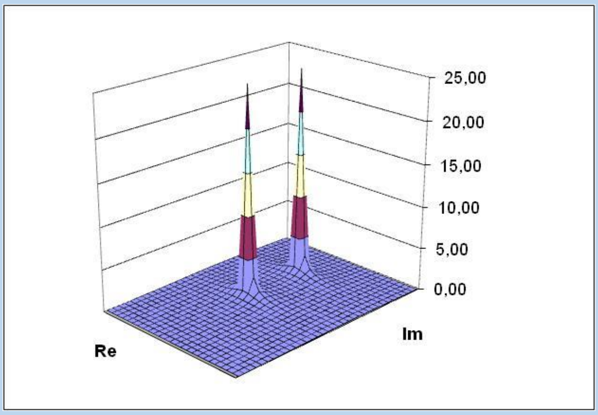
<u>En el Plano s</u>

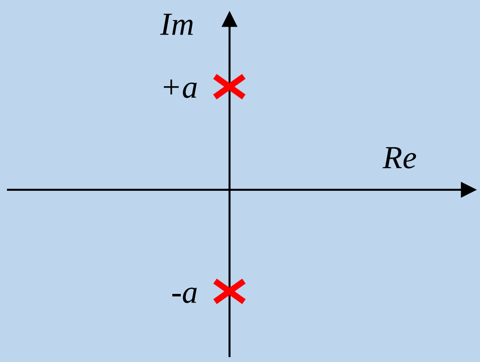
$$L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad con \ s > 0$$

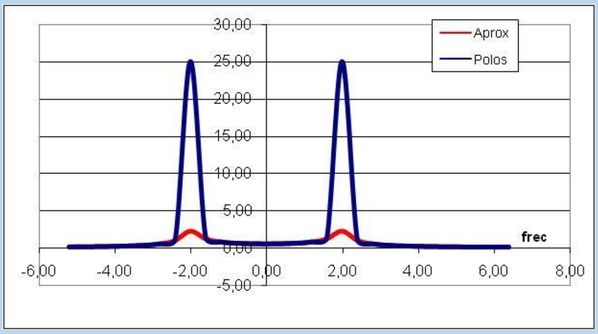
Singularidad Doble en p=(0 ±j a)

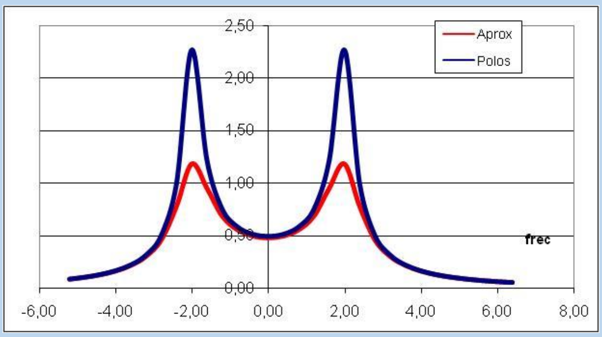
F(s) no tiene ceros.

En la siguiente gráfica se puede observar el módulo de *F(s)*, la traza en un plano de parte real constante y la posición del polo en el Plano s.









Transformada de Laplace de la Función Coseno.

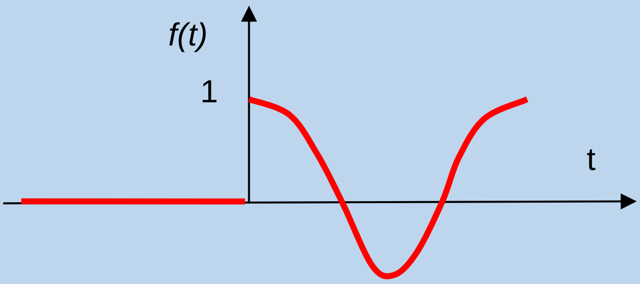
La Transformada de Laplace resulta:

$$L[\cos(at)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \cos(at) \cdot dt = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad con \ s > 0$$

En la Figura se puede observar la Función en el dominio del tiempo; el módulo de F(s)en el dominio s o plano complejo, y sus trazas para valores constantes de la parte real de la variable s.

<u>En el dominio del tiempo</u>

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \ \ t < 0 \\ \cos(at) & si \ \ t \geq 0 \end{cases}$$



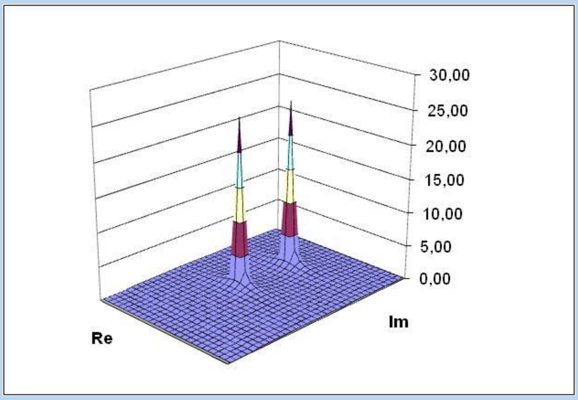
<u>En el Plano s</u>

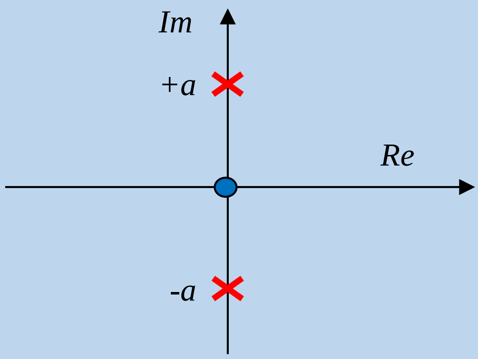
$$L[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad con \ s > 0$$

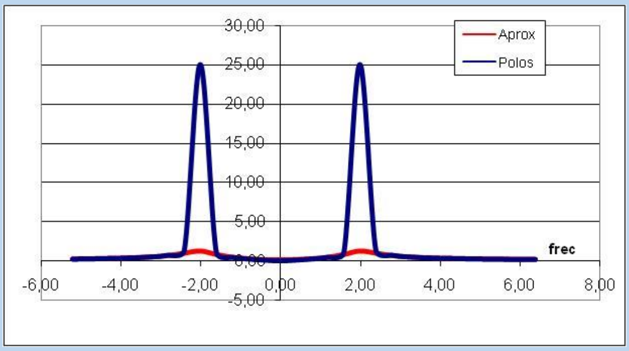
Singularidad Doble en p=(0 ±j a)

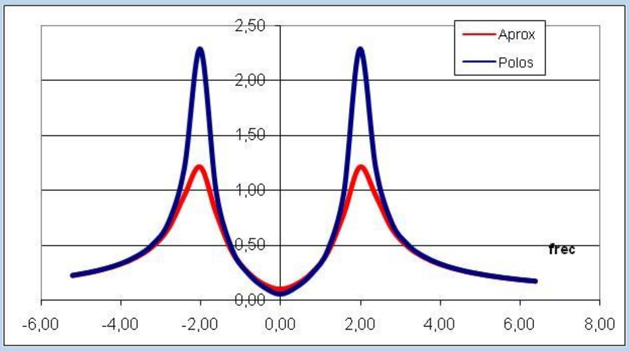
F(s) tiene un cero en p=(0 ±j 0).

En la siguiente gráfica se puede observar el módulo de *F(s)*, la traza en un plano de parte real constante y la posición del polo en el Plano s.









Ejercicio: La denominada Identidad de Euler permite calcular la exponencial de un número imaginario mediante funciones trigonométricas. Esto es

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\,sen(\omega t)$$

Considerando la Identidad de Euler para argumento *(ωt)* y para *($-\omega t$)*; demostrar que

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$sen(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Ejercicio: Encontrar la Transformada de Laplace de la siguiente función exponencial

- $L\left[e^{j\omega t}\right] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{j\omega t} \cdot dt =$

Es posible obtener una expresión donde en el denominador sólo haya números reales

- $L\left[e^{j\omega t}\right] = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$

Según la identidad de Euler

$$L\left[e^{j\omega t}\right] = L\left[\cos(\omega t) + j\,sen(\omega t)\right]$$

Al considerar que la Transformada de Laplace es una transformada que preserva las con combinaciones lineales; y comparando con el resultado obtenido en el inciso anterior, es posible obtener

$$L\left[\cos(\omega t) + j\,sen(\omega t)\right] =$$

de donde se concluye que

$$L\left[\cos(\omega t)\right] = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$L\left[\,sen(\omega t)\right] = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Ejercicio: Encontrar la Transformada de Laplace de

$$L\left[sen(\omega t)\right] = L\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] =$$

$$L\left[\cos(\omega t)\right] = L\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] =$$

Transformada de Laplace de funciones particulares.

Comprobar aplicando la definición de Trasformada de Laplace, la relación entre las siguientes funciones, y sus funciones transformadas.

f(t)	F(s)=L(f(t))	Para todo
$b=b.u_s(t)$	b/s	$s>0$
$a.t^n$	$a\,n!/s^{n+1}$	$s>0$
$e^{-a.t}$	$1/(s+a)$	$s>-a$; $s>0$
$e^{+a.t}$	$1/(s-a)$	$s>+a$;
sen(bt)	$b/(s^2+b^2)$	
cos(bt)	$s/(s^2+b^2)$	
senh(bt)	$b/(s^2-b^2)$	
cosh(bt)	$s/(s^2-b^2)$	
$\delta(t-a)$	$e^{-a.s}$	

Para obtener las transformadas de las funciones trigonométricas y las hiperbólicas, hacer uso de la definición de las mismas en términos de la función exponencial.

$u_s(t)$ es la función escalón unitario. $\delta(t-a)$, es la función Delta de Dirac en t=a

Principales propiedades de la Transformada de Laplace.

$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]$	$\alpha\ F(s)+\beta\, G(s)$
$L[df(t)/dt]$	$s\,F(s)-f(0)$
$L[d^2f(t)/dt^2]$	$s^2\,F(s)-s\,f(0)-df/dt(0)$
$L\left[\int f(t)dt\right]$	$(1/s)\,F(s)$
$L[e^{+a.t}f(t)]$	$F(s-a)$
$L[f(t-\alpha)\,u_s(t-\alpha)]$	$e^{-s.\alpha}\ F(s)$
$\lim_{t\to\infty}(f(t))$	$\lim_{s\to 0}(s.F(s))$
$L[f(t)\ o\ g(t)]$	$F(s)\ \ G(s)$

Propiedades de la Transformada de Laplace.

Comprobar aplicando la definición de Trasformada de Laplace, las siguientes propiedades,

- **Propiedad de combinación lineal**

Dadas las función *f(t)* y *g(t)*en el dominio de los números reales, se conocen sus transformadas de Laplace *F(s)* y *G(s)* en el dominio complejo s. Entonces se cumple que

$$\mathrm{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\ \mathrm{L}[f(t)]+\beta\,\mathrm{L}[g(t)]=\alpha\ \mathrm{F(s)}+\beta\,\mathrm{G(s)}$$

Para probar esta propiedad es posible partir de la definición de Trasformada de Laplace, y aplicar propiedades de la integración. Así se parte de

$$L[\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t)]=\int_0^{\infty}[\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t)]\cdot e^{-st}\cdot dt$$

Pero la integración es distributiva respecto de la suma,

$$L[\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t)]=\int_0^{\infty}[\alpha\cdot f(t)]\cdot e^{-st}\cdot dt+\int_0^{\infty}[\beta\cdot g(t)]\cdot e^{-st}\cdot dt$$

Y para el proceso de integración, los coeficientes de la combinación lineal α,β son constantes, por lo que pueden salir fuera del símbolo integral, de modo que

$$L[\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t)]=\alpha\cdot\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt+\beta\cdot\int_0^{\infty}g(t)\cdot e^{-st}\cdot dt$$

Pero cada integral es la Trasformada de Laplace, de las funciones f(t) y g(t) respectivamente. Así resulta

$$L[\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t)]=\alpha\cdot F(s)+\beta\cdot G(s)$$

- **Propiedad de derivación**

Transformada de la Derivada Primera de una Función

Dada la función *f(t)* en el dominio de los números reales, que se conoce su transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s. Entonces se cumple que

$$\mathrm{L}[\mathrm{d}f(t)/dt]=\mathrm{s\ F(s)}-f(0)$$

Se parte de la definición de Trasformada de Laplace,

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^{\infty}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\cdot e^{-st}\cdot dt$$

Es posible aplicar integración por partes, y obtener

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\left(f(t)\cdot e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t\to\infty}-\int_0^{\infty}f(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}\cdot dt$$

que se escribe como

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\lim_{t\to\infty}f(t)\cdot e^{-st}-\left(f(t)\cdot e^{-st}\right)\Big|_{t=0}+s\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt$$

En la última igualdad el limite vale cero, ya que la Transformada de Laplace de f(t) existe, y para que ello ocurra dicho límite debe valer cero.

Por otra parte, la integral del tercer sumando es por definición la función *F(s)* Transformada de Laplace de f(t). De modo que resulta

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + s \cdot F(s)$$

Transformada de la Derivada Segunda de una Función

Dada la función *f(t)* en el dominio de los números reales, con Transformada de Laplace en el dominio complejo s, F(s) conocida; y se sabe que la Transformada de Laplace de su derivada *df/dt* también existe, entonces se cumple que

$$L[d^2 f(t)/dt^2] = s^2\, F(s) - s\, f(0) - df/dt(0)$$

Se parte de la definición de Trasformada de Laplace,

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \int_0^\infty \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Es posible aplicar integración por partes, y obtener

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \left(\frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \cdot (-s) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

que se escribe como

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} - \left(\frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st}\right)\Big|_{t=0} + s \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt$$

En la última igualdad el limite vale cero, ya que la Transformada de Laplace de *df(t)/dt* existe, y para que ello ocurra dicho límite debe valer cero. Por otra parte, la integral del tercer sumando es por definición la función Transformada de Laplace de *df(t)/dt*, que se calculó anteriormente. De modo que resulta

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} - \left(\frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st}\right)\Big|_{t=0} + s \cdot [-f(0) + s \cdot F(s)]$$

De donde

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

- **Propiedad de traslación en el dominio complejo**

Dada la función *f(t)* en el dominio de los números reales, se conoce su transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s. Entonces se cumple que

$$L[e^{+a.t} f(t)] = F(s-a)$$

- **Propiedad de traslación en el dominio real**

Dada la función *f(t)* en el dominio de los números reales, se conoce su transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s. Entonces se cumple que

$$L[f(t-\alpha)\, u_s(t-\alpha)] = e^{-s.\alpha}\; L[f(t)] = e^{-s.\alpha}\; F(s)$$

- **Teorema del valor final**

Dada la función *f(t)* en el dominio de los números reales, se conoce su transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s. Entonces se cumple que

$$\lim_{t\to\infty}(f(t)) = \lim_{s\to 0}(s.F(s))$$

- **Propiedad de integración**

Dada la función *f(t)* en el dominio de los números reales, se conoce su transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s. Entonces se cumple que

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\cdot F(s)$$

Teorema de convolución

La convolución entre dos funciones función *f(t)* y *g(t)*en el dominio de los números reales, es una operación que surge en distintas aplicaciones de la matemática, y se define como una nueva función c*(t)* que es el resultado de la siguiente integral

$$c(t) = f(t) \circ g(t) = \int_0^t g(t-\xi)\cdot f(\xi)\cdot d\xi$$

En el contexto de Transformada de Laplace, el Teorema de Convolución establece que:

> **Dadas las funciones *f(t)* y *g(t)*en el dominio de los números reales, cuyas transformadas de Laplace *F(s)* y *G(s)* en el dominio complejo s, son conocidas, entonces se cumple que**

$$\boldsymbol{L[c(t)] = L[f(t) \circ g(t)] = F(s)\cdot G(s)}$$

En forma alternativa se puede enunciar como: *"La Transformada de Laplace de la integral de convolución de f(t) y g(t) es el producto de las funciones F(s) y G(s)"*.

Para una demostración del Teorema de Convolución se puede recurrir a diversos libres de Análisis Matemático, o de Ecuaciones diferenciales, tales como Zill y Cullen (2002), Nagle et al., (2001)

El Método de Variación de Parámetros para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales, hace uso de la integral de convolución.

En las aplicaciones de Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales, surge siempre el producto de funciones racionales de la forma $F(s)\cdot G(s)$ que llevado al dominio del tiempo se trata de la convolución de ambas funciones *f(t)* y *g(t)*.

En el contexto ingeniería civil la integral de convoución recibe el nombre de integral de Duhamel.

Aplicación de la Transformada de Laplace a la solución de EDO.

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = b \cdot u(t) \qquad con \quad x(0) = x_0$$

Con *u(t)* la función escalón unitario. Comprobar aplicando la Trasformada de Laplace, que la transformada de Laplace *X(s)* de la respuesta en el tiempo *x(t)* está dada por las siguientes expresiones,

$$X(s) = x_0 \cdot \frac{1}{s+k} + \frac{1}{s+k} \cdot \frac{b}{s} = x_0 \cdot H(s) + H(s) \cdot \frac{b}{s} \qquad con \; H(s) = \frac{1}{s+k}$$

X(s) se puede expresar como la suma de las Transformadas de Laplace de la denominada *solución natural* (que considera la condición inicial); y de la denominada *solución forzada*

$$X(s) = X_n(s) + X_f(s)$$

$$X_n(s) = x_0 \cdot \frac{1}{s+k} = x_0 \cdot H(s)$$

$$X_f(s) = \frac{1}{s+k} \cdot \frac{b}{s} = H(s) \cdot \frac{b}{s} \qquad con \; H(s) = \frac{1}{s+k}$$

Es simple advertir que la función en el tiempo cuya Transformada de Laplace es $X_n(s)$ es la función exponencial. Es decir;

$$L[x_n(t)] = x_0 \cdot L\left[e^{-k \cdot t}\right] = x_0 \cdot \frac{1}{s+k}$$

La función $X_f(s)$ es el producto de dos funciones en la variable s; por lado la función H(s) y por el otro la función (1/s). Al considerar el Teorema de Convolución es posible asegurar que la función el tiempo correspondiente a la solución forzada $x_f(t)$ es la convolución de la $e^{-k \cdot t}$ y *b u(t)* que es la acción externa dada por el término independiente de la ecuación diferencial.

$$L[x_f(t)] = L\left[e^{-k \cdot t} \circ b \cdot u(t)\right] = \frac{1}{s+k} \cdot \frac{1}{s}$$

Para determinar el resultado de la convolución, y así obtener la solución forzada $x_f(t)$ es posible llevar la función $X_f(s)$ a la forma de **Fracciones Parciales.**

$$X_f(s) = \frac{1}{s+k} \cdot \frac{b}{s} = \frac{A}{s+k} + \frac{B}{s}$$

Donde se distinguen los **polos** de la función (s=-k, s=0). Los **residuos A y B** se puede probar que valen A=-B=-(b/k), tal como se muestra más adelante en el primer ejemplo del título “Funciones Racionales”. Así la respuesta en el tiempo resulta:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t} + (b/k) \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$$

La solución *x(t)* así expresada distingue claramente la incidencia de la condición inicial x_0 y de la acción externa al sistema dada por el término independiente de la EDO, en este caso la función escalón multiplicada por la constante *b*. Tanto la solución natural como la forzada, tienen incidencia de la función $h(t) = e^{-k \cdot t}$, cuya Transformada de Laplace es la H(s), que es la denominada Función de Transferencia tal como se verá en el siguiente punto.

La solución resultante coincide con la obtenida mediante el Método de Variación de Parámetros (Zill y Cullen (2002), Edwards y Penny (2009)).

Función de Transferencia

La Función de Transferencia *H(s)* se define como la Transformada de Laplace de la respuesta en el tiempo del sistema, para condiciones iniciales nulas; y para una acción externa dada por la función Delta de Dirac o impulso unitario.

Al considerar el sistema descripto por la siguiente EDO,

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = \delta(t) \qquad\qquad con \quad x(0) = 0$$

Se tiene que al aplicar Transformada de Laplace

$$X(s) \cdot (s+k) = 1$$

De donde se obtiene

$$X(s) = H(s) = \frac{1}{s+k}$$

La Función de Transferencia *H(s)* se define alternativamente a como el cociente entre la Transformada de Laplace de la respuesta en el tiempo de un sistema dado, con condiciones iniciales nulas; y la Transformada de Laplace de la acción externa aplicada a dicho sistema (término independiente de la EDO)

Al considerar el sistema descripto por la siguiente EDO,

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = g(t) \qquad\qquad con \quad x(0) = 0$$

Con *g(t)* una acción externa cualquiera. Al aplicar Transformada de Laplace se tiene

$$X(s) \cdot (s+k) = G(s)$$

de donde es posible definir

$$H(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{1}{s+k}$$

La Función de Transferencia H(s) es una función racional en el Plano s que caracteriza al sistema. Sus polos están asociados directamente con la respuesta en el tiempo de las soluciones homogéneas de la representación del sistema en el dominio del tiempo mediante EDO.

Un sistema puede describirse mediante la EDO con su respuesta homogénea o alternativamente con la Función de Transferencia H(s) y la posición de sus polos en el Plano s. Al trabajar con combinaciones de sistemas, la respuesta de un sistema es entrada de otro sistema, y así se pueden encadenar varios sistemas para con su ensamble generar un sistema complejo. Al representar dicha situación en el dominio del tiempo se vuelve necesario combinar los operadores diferenciales cuando se trabaja en el dominio del tiempo, y ello puede volverse muy complejo. Al representar los sistemas por sus funciones de transferencia, la combinación de los sistemas representados en el plano s se realiza en forma mucho mas simple por operaciones algebraicas entre las *H(s)* de los distintos subsistemas.

Funciones Racionales

Tanto la denominada *Función de Transferencia* de un sistema, como a Transformada de Laplace de la respuesta en el tiempo *x(t)*, son funciones racionales que se pueden expresar como *X(s)* y que están dadas como el cociente de dos funciones polinómicas en s con coeficientes reales,

$$X(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+.........+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+.........+a_2 s^2+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad con \quad m\le n$$

Se denominan ceros de la Función *X(s)* a los valores de $s=r_k$ que anulan al polinomio *N(s)*. Se denominan polos de *X(s)* a los valores de $s=p_k$ que anulan al polinomio *D(s)*, y hacen que *X(s)* sea singular.

Es posible expresar *X(s)* en la forma de **Ceros Polos Ganancia** cuando se conocen los ceros y los polos de *X(s)*. Para ello se escriben el *N(s)* y el *D(s)* en forma factorizada.

$$X(s)=K\,\frac{(s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)...........(s-r_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)...........(s-p_n)}$$

Es posible expresar *X(s)* en la forma de **Fracciones Parciales** cuando se conocen los polos de *D(s)* y se hace uso de los denominados residuos A_k. Así resulta simple encontrar las funciones en el tiempo cuyas transformadas de Laplace son cada una de las fracciones parciales. De esta manera se evita el cálculo de la Transformada inversa de Laplace.

Cuando se tienen n polos distintos, *X(s)* en forma de fracciones parciales resulta:

$$X(s)=\frac{A_1}{(s-p_1)}+\frac{A_2}{(s-p_2)}+\frac{A_3}{(s-p_3)}+.......\frac{A_n}{(s-p_n)}$$

Cuando se tiene un polo p_r repetido m veces, *X(s)* en forma de fracciones parciales resulta:

$$X(s)=\frac{B_1}{(s-p_r)}+\frac{B_2}{(s-p_r)^2}+\frac{B_3}{(s-p_r)^3}+.......\frac{B_m}{(s-p_r)^m}$$

Cuando hay *n* polos distintos y un polo repetido *r* veces, *X(s)* en forma de fracciones parciales resulta

$$X(s)=\frac{A_1}{(s-p_1)}+\frac{A_2}{(s-p_2)}+\frac{A_3}{(s-p_3)}+.......\frac{A_n}{(s-p_n)}+$$
$$+\frac{B_1}{(s-p_r)}+\frac{B_2}{(s-p_r)^2}+\frac{B_3}{(s-p_r)^3}+.......\frac{B_m}{(s-p_r)^m}$$

Para obtener los valores de los residuos A_k y B_k siempre es posible plantear dos posibilidades:

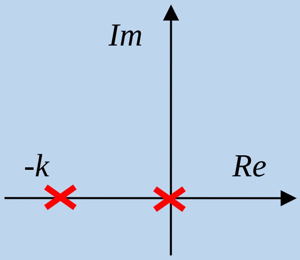
- Mediante la solución del **sistema de ecuaciones lineales** que surge de realizar la operación de suma de las fracciones parciales e igualar los coeficientes de los numeradores de ambos miembros de *X(s)*;
- Mediante el empleo de **funciones implícitas**.

Cuando hay polos complejos siempre son complejos conjugados, ya que se consideran polinomios de coeficientes reales. Cuando hay polos complejos, para obtener los valores de los residuos A_k y B_k resulta conveniente la forma polar para los complejos. Para evitar el uso de números complejos suele ser de utilidad usar la estrategia de **completar cuadrados.**

Ejemplo de Polos Reales y Distintos, mediante SEL

Sea la función racional

$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b}{s(s+k)} = \frac{1}{(s+k)} \cdot \frac{b}{s}$$



Cuyos polos son s=-k y s=0.

La forma en fracciones parciales resulta

$$X_f(s) = \frac{A}{s+k} + \frac{B}{s}$$

A partir de las fracciones parciales es posible expresar

$$X_f(s) = \frac{A}{(s+k)} \cdot \frac{s}{s} + \frac{B}{s} \cdot \frac{(s+k)}{(s+k)} = \frac{s(A+B)+B \cdot k}{s(s+k)}$$

De comparar ésta última expresión de $X_f(s)$ con la expresión original de $X_f(s)$ se tiene

$$\begin{cases} B \cdot k = b \\ (A+B) = 0 \end{cases}$$

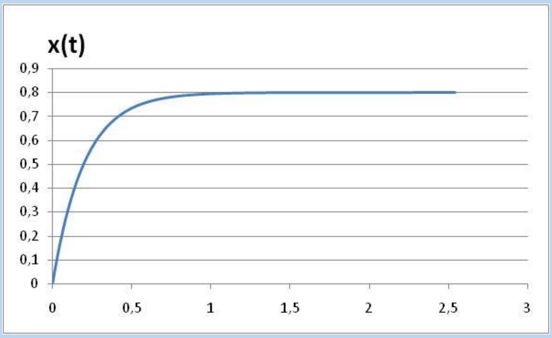
Y resulta que A=-B=-(b/k), y su valor es **inversamente proporcional a la distancia entre los polos p=0 y p=-k**. Así la expresión de fracciones parciales es

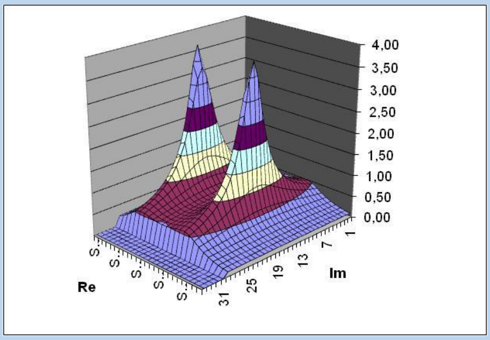
$$X_f(s) = \frac{-b/k}{s+k} + \frac{b/k}{s}$$

Las funciones en el tiempo cuyas Transformadas de Laplace son $X_f(s)$ resultan las siguientes:

$$x_f(t) = \frac{-b}{k} \cdot e^{-kt} + \frac{b}{k}$$

Las gráficas de $x_f(t)$ y del módulo de $X_f(s)$ son las siguientes para b=4 y k=5:





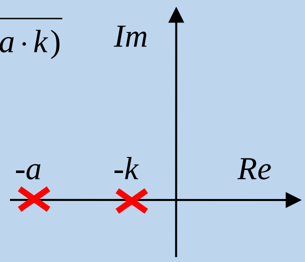
Se puede observar que los polos de $X_f(s)$ están ambos en el eje Real, con componente imaginaria nula.

Se debe destacar que cada polo tiene una función en el tiempo asociada. Mientras el polo es real y negativo la respuesta en el tiempo es exponencial decreciente. Cuando el polo es nulo, la respuesta en el tiempo es la función escalón. En ambos casos la respuesta en el tiempo está acotada. Por el contario, si el polo es real y positivo, la respuesta en el tiempo es exponencial creciente, y la respuesta deja de ser acotada.

Ejemplo de Polos Reales y Distintos, mediante Función Implícita

Sea la función racional

$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b}{(s+a)(s+k)} = \frac{b}{(s^2 + s(k+a) + a \cdot k)}$$



cuyos polos son s=-k y s=-a.

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s) = X_f(s) - \frac{A}{(s+k)} - \frac{B}{(s+a)} = 0 \quad \forall s$$

Si se multiplica la función implícita *φ(s)* por *(s+k)*, resulta

$$\varphi(s) \cdot (s+k) = X_f(s) \cdot (s+k) - \frac{A}{(s+k)} \cdot (s+k) - \frac{B}{(s+a)} \cdot (s+k) = 0 \quad \forall s$$

En particular si se toma limite cuando s tiende a (-k) resulta

$$\lim_{s \to -k} [\varphi(s) \cdot (s+k)] = \lim_{s \to -k} \left(X_f(s) \cdot (s+k) - A - \frac{B}{(s+a)} \cdot (s+k) \right) = 0$$

De donde

$$A = \lim_{s \to (-k)} \left(X_f(s) \cdot (s+k) \right) = \lim_{s \to (-k)} \left(\frac{b}{(s+a)(s+k)} \cdot (s+k) \right) = \frac{b}{(-k+a)}$$

Análogamente, mediante un razonamiento similar resulta

$$B = \lim_{s \to (-a)} \left(X_f(s) \cdot (s+a) \right) = \lim_{s \to (-a)} \left(\frac{b}{(s+a)(s+k)} \cdot (s+a) \right) = \frac{b}{(-a+k)}$$

Los residuos resultan **inversamente proporcional a la distancia entre los polos p=-a y p=-k**. Así la expresión de fracciones parciales es

$$X_f(s) = \frac{(b/(-k+a))}{s+k} + \frac{(b/(-a+k))}{s+a}$$

Las funciones en el tiempo cuyas Transformadas de Laplace son $X_f(s)$ resultan las siguientes:

$$x_f(t) = \frac{b}{(a-k)} \cdot e^{-kt} + \frac{b}{(k-a)} \cdot e^{-at}$$

Notar que la respuesta en t es inversamente proporcional a la distancia entre polos.

En resumen: Cuando se tienen polos reales y distintos es posible calcular el residuo asociado a cada polo mediante:

$$\boxed{A_k = \lim_{s \to (p_k)} \left(X_f(s) \cdot (s - p_k) \right) = \frac{\Pi(p_k - z_j)}{\Pi(p_k - p_i)} \quad con\ j = 1 : Nceros \ \ i = 1 : Npolos \ \ i \neq k}$$

Para expresar

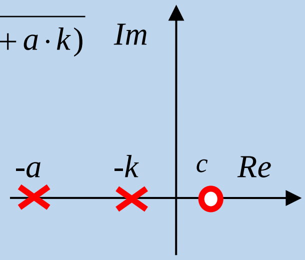
$$\boxed{X_f(s) = \sum_{k=1, N^\circ de\ polos} \left(\frac{A_k}{s - p_k} \right)}$$

Este resultado es válido también para polos complejos conjugados.

Ejemplo Xf(s) con Polos Reales Distintos, y con un Cero mediante Función Implícita

Sea la función racional

$$X_f(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{s-c}{(s+a)(s+k)}=K\frac{s-c}{(s^2+s(k+a)+a\cdot k)}$$



cuyos polos son s=-k y s=-a.

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s)=X_f(s)-\frac{R_1}{(s+k)}-\frac{R_2}{(s+a)}=0 \quad \forall s$$

Si se multiplica la función implícita $\varphi(s)$ por $(s+k)$, resulta

$$\varphi(s)\cdot(s+k)=X_f(s)\cdot(s+k)-\frac{R_1}{(s+k)}\cdot(s+k)-\frac{R_2}{(s+a)}\cdot(s+k)=0 \quad \forall s$$

En particular si se toma limite cuando s tiende a (-k) resulta

$$\lim_{s\to -k}\left[\varphi(s)\cdot(s+k)\right]=\lim_{s\to -k}\left(X_f(s)\cdot(s+k)-R_1-\frac{R_2}{(s+a)}\cdot(s+k)\right)=0$$

De donde

$$A=\lim_{s\to(-k)}\left(X_f(s)\cdot(s+k)\right)=\lim_{s\to(-k)}\left(K\frac{s-c}{(s+a)(s+k)}\cdot(s+k)\right)=K\frac{-k-c}{(-k+a)}$$

Análogamente, mediante un razonamiento similar resulta

$$B=\lim_{s\to(-a)}\left(X_f(s)\cdot(s+a)\right)=\lim_{s\to(-a)}\left(K\frac{s-c}{(s+a)(s+k)}\cdot(s+a)\right)=K\frac{-a-c}{(-a+k)}$$

Notar que el residuo asociado a un polo, es inversamente proporcional a la distancia entre polos, y directamente proporcional a la distancia entre dicho polo y el cero. Así la expresión de fracciones parciales es

$$X_f(s)=K\left[\frac{(-k-c)}{(-k+a)}\left(\frac{1}{s+k}\right)+\left(\frac{1}{s+a}\right)\left(\frac{(-a-c)}{(-a+k)}\right)\right]$$

Las funciones en el tiempo cuyas Transformadas de Laplace son $X_f(s)$ resultan las siguientes:

$$x_f(t)=K\left[\frac{(-k-c)}{(-k+a)}\cdot e^{-kt}+\cdot e^{-at}\left(\frac{-a-c}{-a+k}\right)\right]$$

Cuando el cero "se acerque" a un polo, la respuesta en el tiempo asociada a dicho polo tiende a desaparecer.

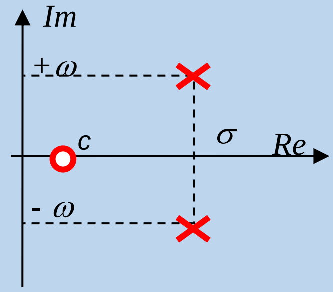
Ejercicio: para $X_f(s)=\dfrac{As-B}{(s-a)(s-k)}$, establecer la posición de polos y ceros, el valor de los residuos la expresión de la solución en el tiempo.

Analizar ¿qué ocurre si B=0?. Analizar ¿qué ocurre si A=0?; y en este caso, ¿dónde va el cero?

Ejemplo de Polos Complejos Conjugados, mediante función implícita

Sea la función racional

$$X_f(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{s-c}{(s-p)(s-pc)}$$

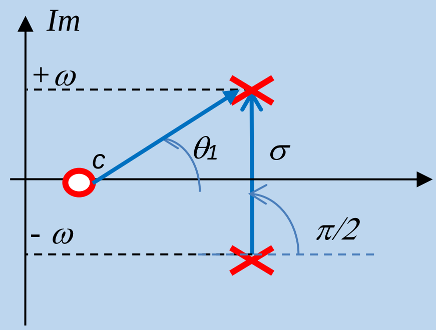


cuyos polos son complejos conjugados: $p=(\sigma+j\omega)$, $pc=(\sigma-j\omega)$

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s)=X_f(s)-\frac{R_1}{(s-p)}-\frac{R_2}{(s-pc)}=0 \quad \forall s$$

Haciendo uso de las propiedades de funciones implícitas, los residuos se pueden calcular haciendo uso de la forma polar o cartesiana.



Alternativa con uso de la forma polar para los residuos.

$$R_1=\lim_{s\to(p)}\left(X_f(s)\cdot(s-p)\right)=\lim_{s\to(p)}\left(K\frac{(s-p)(s-c)}{(s-p)(s-pc)}\right)$$

$$R_1=K\frac{p-c}{p-pc}=K\frac{\rho_1\cdot e^{j\theta_1}}{2\omega\cdot e^{j\pi/2}}=K\rho_R\cdot e^{j\theta_R}$$

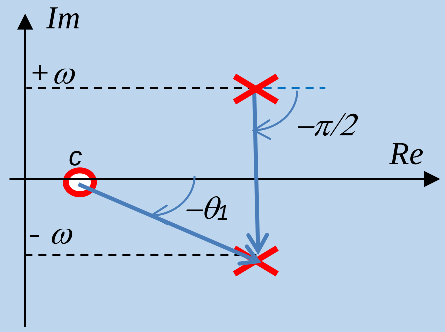
Siendo el numerador *(p-c)* representado por el vector que une el cero con el polo p cuyo modulo ρ_1 y su argumento θ_1 son:

$$\rho_1=\sqrt{\left(\omega^2+(\sigma-c)^2\right)} \qquad \theta_1=arctg(\frac{\omega}{\sigma-c})$$

El denominador *(p-pc)* está representado por el vector que une el polo pc con el polo p cuyo modulo 2ω y su argumento $\pi/2$. Así el residuo R_1 asociado al polo p tiene módulo ρ_R dado por el cociente entre los módulos del numerador y el denominador, y como argumento θ_R la resta de los argumentos del numerado y el denominador:

$$\rho_R=\rho_1/(2\omega) \qquad \theta_R=\theta_1-\pi/2$$

Similarmente para el residuo R_2, se tiene:



$$R_2=\lim_{s\to(p)}\left(X_f(s)\cdot(s-pc)\right)=\lim_{s\to(pc)}\left(\left(K\frac{(s-pc)(s-c)}{(s-p)(s-pc)}\right)\right)$$

$$R_2=K\frac{pc-c}{pc-p}=K\frac{\rho_1\cdot e^{-j\theta_1}}{2\omega\cdot e^{-j\pi/2}}=K\rho_R\cdot e^{-j\theta_R}$$

Resultan que los residuos de polos complejos conjugados son valores también complejos conjugados.

Notar que los residuos asociados a polos complejos conjugados, son inversamente proporcionales a la distancia (2ω) entre los polos complejos conjugados, y directamente proporcional a la distancia ρ_1 entre dichos polos y el cero.

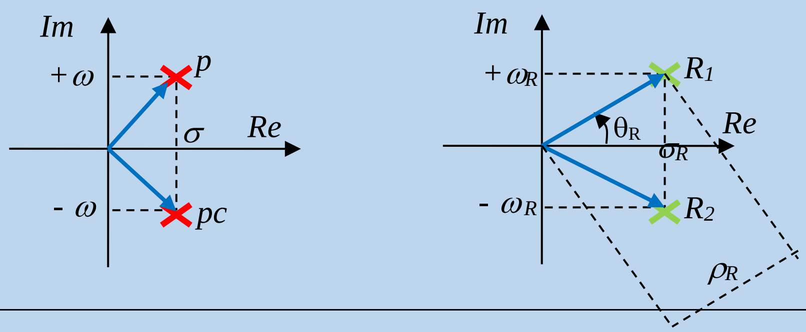
La expresión en fracciones parciales es

$$\boxed{X_f(s) = \frac{R_1}{(s-p)} + \frac{R_2}{(s-pc)}}$$

Siendo los polos p y pc complejos conjugados, como así también los residuos R_1 y R_2.

$$p = \sigma + j\cdot\omega \qquad R_1 = K(\sigma_R + j\cdot\omega_R) = K\rho_R \cdot e^{+j\theta_R}$$

$$pc = \sigma - j\cdot\omega \qquad R_2 = K(\sigma_R - j\cdot\omega_R) = K\,\rho_R \cdot e^{-j\theta_R}$$



Resulta así que la función el tiempo cuya transformada de Laplace es $X_f(s)$ es la siguiente

$$x_f(t) = R_1 \cdot e^{p\cdot t} + R_2 \cdot e^{pc\cdot t}$$

que al considerar los valores obtenidos de R_1 y R_2 resulta

$$x_f(t) = K\rho_R \cdot e^{j\theta_R} \cdot e^{(\sigma+j\omega)\cdot t} + K\rho_R \cdot e^{-j\theta_R} \cdot e^{(\sigma-j\omega)\cdot t} = K\rho_R \cdot e^{(\sigma\cdot t)}\left(e^{j(\omega t+\theta_R)} + e^{-j(\omega t+\theta_R)}\right)$$

$$\boxed{x_f(t) = K \cdot 2 \cdot \rho_R \cdot e^{(\sigma\cdot t)} \cdot \cos(\omega\cdot t + \theta_R)}$$

$$x_f(t) = K \cdot 2 \cdot \frac{\rho_1}{2\omega} \cdot e^{(\sigma\cdot t)} \cdot \cos(\omega\cdot t + \theta_R)$$

La respuesta en el tiempo es una armónica con frecuencia que tiene que ver con la parte imaginaria de los polos. La variación de extremos de la armónica tiene depende de la parte real de los polos, así para s positivos la respuesta diverge, mientras que para s negativos converge a cero. Por otra parte la amplitud de la función armónica es directamente proporcional a la distancia ρ_1 entre el cero y los polos conjugados, e inversamente proporcional a la distancia (2ω) entre los polos complejos conjugados.

Si se desarrolla el $\cos(\omega\cdot t + \theta_R)$, y se distribuye ρ_1, resulta

$$x_f(t) = K \cdot \frac{e^{(\sigma\cdot t)}}{\omega} \cdot \left[\rho_1 \cos(\theta_R) \cdot \cos(\omega\cdot t) - \rho_1 \sin(\theta_R) \cdot \sin(\omega\cdot t)\right]$$

Al considerar que $\theta_R = \theta_1 - \pi/2$, con lo que $\cos(\theta_1 - \pi/2)$ es $\sin(\theta_1)$, y $\sin(\theta_1 - \pi/2)$ es $(-\cos(\theta_1))$, resulta

$$x_f(t) = K\frac{e^{(\sigma\cdot t)}}{\omega} \cdot \left[\rho_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\omega\cdot t) \qquad + \rho_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\omega\cdot t)\right]$$

$$x_f(t) = K \cdot e^{(\sigma\cdot t)} \cdot \left[\cos(\omega\cdot t) \qquad + \frac{(\sigma - c)}{\omega} \cdot \sin(\omega\cdot t)\right]$$

Ejercicio.

Considerar que ocurre si *c tiende a 0.*

¿A qué valor tienden R_1 y R_1?

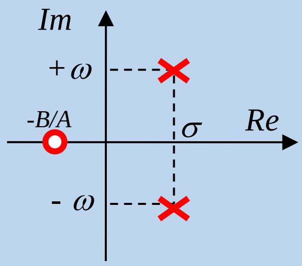
¿Cómo resulta la solución?

Considerar que ocurre si *c tiende a* σ, y responder las mismas preguntas anteriores

Ejemplo de Polos Complejos Conjugados, mediante función implícita

Sea la función racional

$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{As+B}{(s-p)(s-pc)}$$



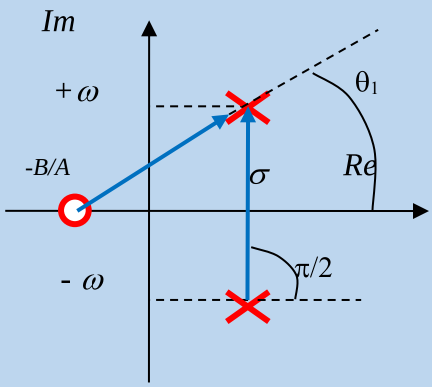
cuyos polos son complejos conjugados: $p = (\sigma + j\omega)$, $pc = (\sigma - j\omega)$

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s) = X_f(s) - \frac{R_1}{(s-p)} - \frac{R_2}{(s-pc)} = 0 \quad \forall s$$

Haciendo uso de las propiedades de funciones implícitas, los residuos se pueden calcular haciendo uso de la forma polar o cartesiana.

Alternativa con uso de la forma polar para los residuos.



$$R_1 = \lim_{s\to(p)}\left(X_f(s)\cdot(s-p)\right) = \lim_{s\to(p)}\left(\frac{(s-p)(As+B)}{(s-p)(s-pc)}\right)$$

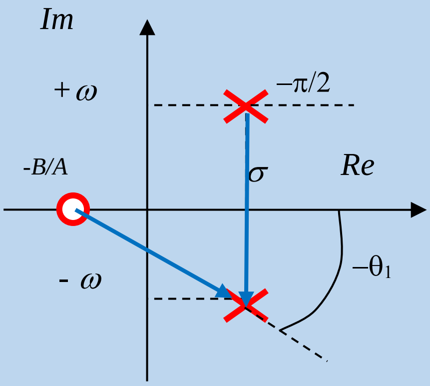
$$R_1 = A\frac{p+(B/A)}{p-pc} = A\frac{\rho_1\cdot e^{j\theta_1}}{2\omega\cdot e^{j\pi/2}} = A\rho_R\cdot e^{j\theta_R}$$

Siendo el numerador *(p+B/A)* representado por el vector que une el cero con el polo p cuyo modulo ρ_1 y su argumento θ_1 son:

$$\rho_1 = \sqrt{\left(\omega^2 + (\sigma+(B/A))^2\right)} \qquad \theta_1 = arctg\left(\frac{\omega}{\sigma+(B/A)}\right)$$

El denominador *(p-pc)* está representado por el vector que une el polo pc con el polo p cuyo modulo 2ω y su argumento $\pi/2$. Así el residuo R_1 asociado al polo p tiene módulo ρ_R dado por el cociente entre los módulos del numerador y el denominador, y como argumento θ_R la resta de los argumentos del numerado y el denominador:

$$\rho_R = \rho_1/(2\omega) \qquad \theta_R = \theta_1 - \pi/2$$



Similarmente para el residuo R_2, se tiene:

$$R_2 = \lim_{s\to(p)}\left(X_f(s)\cdot(s-pc)\right) = A\rho_R\cdot e^{-j\theta_R}$$

Resultan que los residuos de polos complejos conjugados son valores también complejos conjugados.

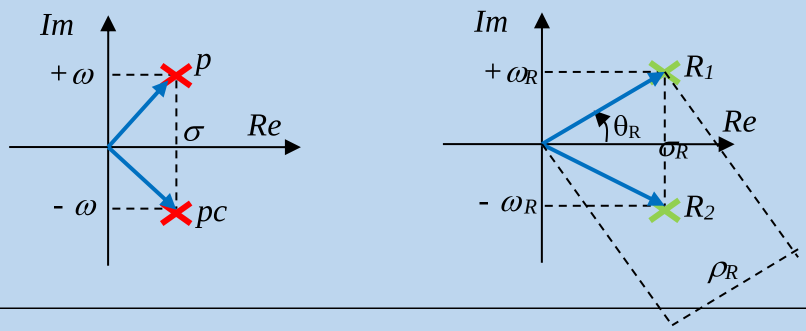
Notar que los residuos asociados a polos complejos conjugados, son inversamente proporcionales a la distancia (2ω) entre los polos complejos conjugados, y directamente proporcional a la distancia ρ_1 entre dichos polos y el cero.

La expresión en fracciones parciales es

$$\boxed{X_f(s)=\frac{R_1}{(s-p)}+\frac{R_2}{(s-pc)}}$$

Siendo los polos p y pc complejos conjugados, como así también los residuos R_1 y R_2.

$$p=\sigma+j\cdot\omega \qquad R_1=A(\sigma_R+j\cdot\omega_R)=A\rho_R\cdot e^{+j\theta_R}$$
$$pc=\sigma-j\cdot\omega \qquad R_2=A(\sigma_R-j\cdot\omega_R)=A\rho_R\cdot e^{-j\theta_R}$$



Resulta así que la función el tiempo cuya transformada de Laplace es $X_f(s)$ es la siguiente

$$x_f(t)=R_1\cdot e^{p\cdot t}+R_2\cdot e^{pc\cdot t}$$

que al considerar los valores obtenidos de R_1 y R_2 resulta

$$x_f(t)=A\rho_R\cdot e^{j\theta_R}\cdot e^{(\sigma+j\omega)\cdot t}+A\rho_R\cdot e^{-j\theta_R}\cdot e^{(\sigma-j\omega)\cdot t}=A\rho_R\cdot e^{(\sigma\cdot t)}\left(e^{j(\omega t+\theta_R)}+e^{-j(\omega t+\theta_R)}\right)$$

$$\boxed{x_f(t)=A\cdot 2\cdot\rho_R\cdot e^{(\sigma\cdot t)}\cdot\cos(\omega\cdot t+\theta_R)}$$

$$x_f(t)=A\cdot 2\cdot\frac{\rho_1}{2\omega}\cdot e^{(\sigma\cdot t)}\cdot\cos(\omega\cdot t+\theta_R)$$

La respuesta en el tiempo es una armónica con frecuencia que tiene que ver con la parte imaginaria de los polos. La variación de extremos de la armónica tiene depende de la parte real de los polos, así para s positivos la respuesta diverge, mientras que para s negativos converge a cero. Por otra parte la amplitud de la función armónica es directamente proporcional a la distancia ρ_1 entre el cero y los polos conjugados, e inversamente proporcional a la distancia (2ω) entre los polos complejos conjugados.

Si se desarrolla el $\cos(\omega\cdot t+\theta_R)$, resulta

$$x_f(t)=A\cdot e^{(\sigma\cdot t)}\cdot 2\frac{\rho_1}{2\omega}\cdot\left[\cos(\theta_R)\cdot\cos(\omega\cdot t)-\sin(\theta_R)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

$$x_f(t)=A\cdot e^{(\sigma\cdot t)}\cdot\left[\frac{\rho_1}{\omega}\cos(\theta_R)\cdot\cos(\omega\cdot t)-\frac{\rho_1}{\omega}\sin(\theta_R)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

Al considerar que $\theta_R=\theta_1-\pi/2$

$$x_f(t)=A\frac{e^{(\sigma\cdot t)}}{\omega}\cdot\left[\rho_1\cdot\cos(\theta_1-\pi/2)\cdot\cos(\omega\cdot t)-\rho_1\cdot\sin(\theta_1-\pi/2)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

$$x_f(t)=A\frac{e^{(\sigma\cdot t)}}{\omega}\cdot\left[\rho_1\cdot\sin(\theta_1)\cdot\cos(\omega\cdot t)\qquad+\rho_1\cdot\cos(\theta_1)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

$$x_f(t) = A\frac{e^{(\sigma\cdot t)}}{\omega}\cdot\left[\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) \qquad +(\sigma + B/A)\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

$$x_f(t) = e^{(\sigma\cdot t)}\cdot\left[A\cdot\cos(\omega\cdot t) \qquad + \frac{(A\sigma + B)}{\omega}\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

Ejercicio.

Considerar que ocurre si *A tiende a 0.*¿A qué tienden R_1 y R_1?, ¿A qué tiende el cero?

Ejercicio.

Considerar la X(s) dada y encontrar sus polos, ceros y la respuesta en el tiempo trabajando en forma polar, y luego llevando a una combinación de senos y cosenos

$$X_f(s) = \frac{5\cdot s - 4}{s^2 + 0{,}4\cdot s + 9{,}04}$$

$$X(s) = \frac{s+4}{s^2 + s + 3}$$

$$X_f(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 5}$$

Alternativa con uso de la forma cartesiana para los residuos.

$$R_1 = \lim_{s\to(p)}\left(X_f(s)\cdot(s-p)\right) = \lim_{s\to(p)}\left(K\frac{s-c}{s-pc}\right) = K\frac{(\sigma+j\omega)-c}{p-pc} = K\frac{(\sigma-c)+j\omega}{2j\omega} = \frac{K}{2}(1-j\frac{\sigma-c}{\omega})$$

$$R_2 = \lim_{s\to(pc)}\left(X_f(s)\cdot(s-pc)\right) = \lim_{s\to(pc)}\left(K\frac{s-c}{s-p}\right) = K\frac{(\sigma-j\omega)-c}{pc-p} = K\frac{(\sigma-c)-j\omega}{-2j\omega} = \frac{K}{2}(1+j\frac{\sigma-c}{\omega})$$

que son complejos conjugados. Resulta así que

$$X_f(s) = \frac{R_1}{(s-p)} + \frac{R_2}{(s-pc)}$$

y la función el tiempo asociada es

$$x_f(t) = R_1\cdot e^{p\cdot t} + R_2\cdot e^{pc\cdot t} = R_1\cdot e^{(\sigma+j\omega)\cdot t} + R_2\cdot e^{(\sigma-j\omega)\cdot t} = e^{(\sigma\cdot t)}\left(R_1\cdot e^{(j\omega)\cdot t} + R_2\cdot e^{(-j\omega)\cdot t}\right)$$

que al considerar los valores obtenidos de R_1 y R_2 resulta

$$x_f(t) = \frac{K}{2}e^{(\sigma\cdot t)}\left(\left[1-j\frac{\sigma-c}{\omega}\right]\cdot e^{(j\omega)\cdot t} + \left[1+j\frac{\sigma-c}{\omega}\right]\cdot e^{(-j\omega)\cdot t}\right)$$

Se pueden reagrupar términos

$$x_f(t) = K\cdot e^{(\sigma\cdot t)}\left(\left(\frac{e^{(j\omega)\cdot t}+e^{(-j\omega)\cdot t}}{2}\right) + \left(\frac{\sigma-c}{\omega}\right)\frac{j}{2}\left(e^{(-j\omega)\cdot t} - e^{(j\omega)\cdot t}\right)\right)$$

Al considerar las definiciones de senos y cosenos en forma de exponenciales complejas, resulta

$$x_f(t) = K\cdot e^{\sigma\cdot t}\left[\cos(\omega\cdot t) + \frac{(\sigma-c)}{\omega}\cdot\sin(\omega\cdot t)\right]$$

Es el mismo resultado obtenido al considerar la forma polar de los residuos.

Es oportuno destacar que:

Los residuos de polos complejos conjugados serán siempre valores complejos conjugados.

La suma de dos fracciones parciales de polos complejos conjugados, siempre genera una forma lineal en el numerador. Si se hace la suma de las fracciones parciales resulta

$$X_f(s) = \frac{R}{(s-p)} + \frac{R_C}{(s-pc)} = \frac{R\ (s-pc) + R_C(s-p)}{(s-p)(s-pc)}$$

entonces se obtiene que el numerador es

$$R\ (s-pc) + R_C(s-p) = s(R+R_C) - (R\cdot pc + R_C\cdot p)$$

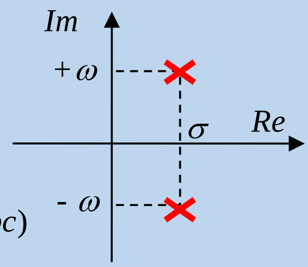
que resulta en un polinomio lineal ($A\cdot s+B$) por la relación entre complejos y complejos conjugados. Así es que se puede expresar

$$X_f(s) = \frac{R}{(s-p)} + \frac{R_C}{(s-pc)} = \frac{As+B}{(s-p)(s-pc)}$$

Ejemplo de Polos Complejos Conjugados. Suma de Cuadrados.

Sea la función racional **sin ceros** en la forma

$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K}{(s-p)(s-pc)}$$



cuyos polos son complejos conjugados: $p = (\sigma + j\omega)$, $pc = (\sigma - j\omega)$

El denominador *D(s)* también se puede escribir en la forma

$$D(s) = (s-p)(s-pc) = s^2 - s\cdot(p+pc) + (p\cdot pc)$$
$$D(s) = s^2 - s\cdot(2\sigma) + (\sigma^2 + \omega^2)$$
$$D(s) = (s-\sigma)^2 + \omega^2$$

Es decir que el denominador se puede escribir como suma de cuadrados cuando hay polos complejos conjugados. Siendo la suma de los cuadrados de s menos la parte Real de los polos; y de la parte imaginaria de los polos. Entonces resulta que es posible expresar

$$X_f(s) = \frac{K}{D(s)} = \frac{K}{(s-p)(s-pc)} = \frac{K}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} = \frac{K}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

dado que la función es racional estrictamente propia y así el numerador tiene grado polinómico menor al denominador. Es conveniente escribir la $X_f(s)$ de la siguiente forma

$$X_f(s) = \frac{K}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} = \frac{K}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

Se puede identificar que la $\left(\frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}\right)$, es la función $\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right)$ trasladada en σ. Es decir que se trata de la transformada de Laplace de la función *sin(ωt)* respectivamente trasladadas en σ. De esta forma es posible asociar con la propiedad de traslación en el dominio s de la Transformada de Laplace y asegurar que dada

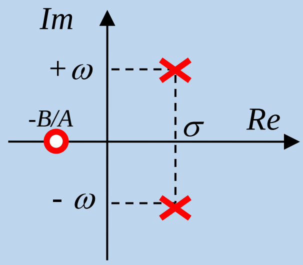
$$X_f(s) = \frac{K}{(s-p)(s-pc)} = \frac{K}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

la función en el dominio del tiempo asociada es

$$x_f(t) = \frac{K}{\omega}\cdot e^{\sigma\cdot t}\cdot \sin(\omega\cdot t)$$

Que se trata de una función sólo de variable real. Es una función trigonométrica con evolvente dada por la función exponencial.

Ejemplo de Polos Complejos Conjugados. Suma de Cuadrados.



Sea la función racional con **un cero** en la forma

$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A \cdot s + B}{(s-p)(s-pc)}$$

cuyos polos son complejos conjugados: $p = (\sigma + j\omega)$, $pc = (\sigma - j\omega)$

Se trata de una función es racional estrictamente propia y así el numerador tiene grado polinómico menor al denominador.

El denominador *D(s)* también se puede escribir en la forma

$$D(s) = (s-p)(s-pc) = s^2 - s \cdot (p + pc) + (p \cdot pc)$$

$$D(s) = s^2 - s \cdot (2\sigma) + (\sigma^2 + \omega^2) = (s-\sigma)^2 + \omega^2$$

el denominador se puede escribir como la suma de los cuadrados de s menos la parte Real de los polos; y el cuadrado de la parte imaginaria de los polos. Entonces, resulta que es posible expresar a $X_f(s)$ en la forma

$$X_f(s) = \frac{A \cdot s + B}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} = A \cdot \frac{s + (B/A)}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

Es conveniente escribir la $X_f(s)$ de la siguiente forma

$$X_f(s) = \frac{A \cdot s}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} + \frac{+B}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} + \left[\frac{A \cdot \sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} - \frac{A \cdot \sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right]$$

que reagrupando términos resulta

$$X_f(s) = A \cdot \left(\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right) + \left(\frac{B + A \cdot \sigma}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right)$$

Se puede identificar que $\left(\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right)$ es la función $\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$ trasladada en σ. Análogamente la $\left(\frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \right)$, es la función $\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$ trasladada en σ. Es decir que se trata de la transformada de Laplace de las funciones *cos(ωt)* y *sin(ωt)* respectivamente trasladadas en σ. De esta forma es posible asociar con la propiedad de traslación en el dominio s de la Transformada de Laplace y asegurar que dada

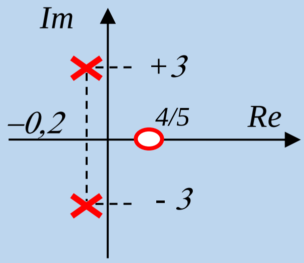
$$X_f(s) = \frac{N(s)}{(s-p)(s-pc)} = \frac{A \cdot s + B}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

la función en el dominio del tiempo asociada es

$$x_f(t) = e^{\sigma \cdot t} \left[A \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{(B + A \cdot \sigma)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right] = A e^{\sigma \cdot t} \left[\cos(\omega \cdot t) + \frac{((B/A) + \sigma)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right]$$

Se trata de una función sólo de variable real. Es una función trigonométrica con evolvente dada por la función exponencial**. Si *A* es distinto de cero, aparece una respuesta en coseno, y la respuesta de la función seno es proporcional a la distancia entre el cero de $X_f(s)$ y la parte real del polo de $X_f(s)$. Si *A* es cero, la respuesta coincide con el caso anterior.**

Sea el caso de



$$X_f(s) = \frac{5 \cdot s - 4}{s^2 + 0{,}4 \cdot s + 9{,}04}$$

El denominador tiene polos complejos en (-0,2+j3 y (0,2-j3).

Es conveniente expresarlo de la siguiente forma:

$$D(s) = s^2 + 0{,}4 \cdot s + 9{,}04 = s^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot s + 0{,}2^2 - 0{,}2^2 + 9{,}04$$

Cuando se suma y resta $(0{,}2)^2$ se da lugar a que aparezca un cuadrado perfecto que involucra a (1/2) del término en s. El denominador es

$$D(s) = s^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot s + 0{,}2^2 - 0{,}2^2 + 9{,}04 = (s + 0{,}2)^2 + (-0{,}2^2 + 9{,}04) = (s + 0{,}2)^2 + (3)^2$$

Así es posible expresar

$$X_f(s) = \frac{5s - 4}{s^2 + 0{,}4 \cdot s + 9{,}04} = \frac{5s - 4}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} = \frac{5s}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} - \frac{4}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2}$$

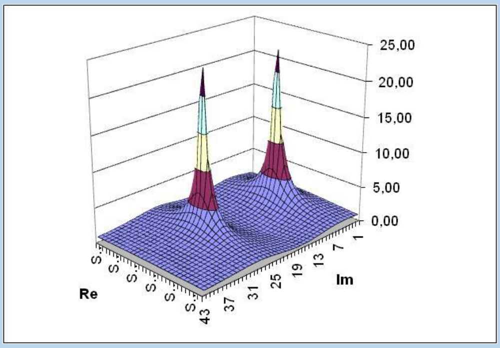
$$X_f(s) = \frac{5s}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} + \frac{5 \cdot 0{,}2}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} - \frac{5 \cdot 0{,}2}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} - \frac{4}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2}$$

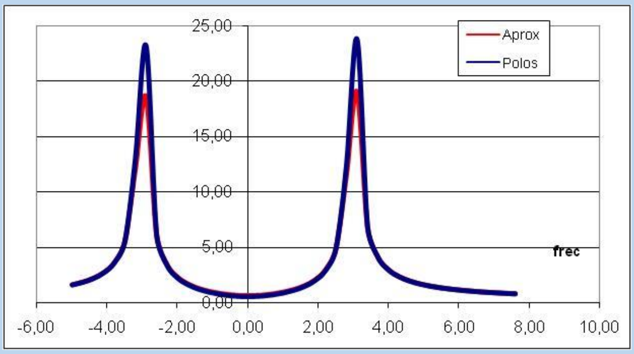
$$X_f(s) = 5\frac{s + 0{,}2}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} + \frac{-5 \cdot 0{,}2 - 4}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} = 5\frac{s + 0{,}2}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} + (\frac{-5 \cdot 0{,}2 - 4}{3})\frac{3}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2}$$

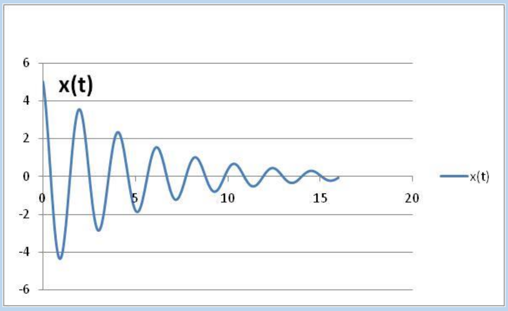
$$X_f(s) = 5\frac{s + 0{,}2}{(s + 0{,}2)^2 + 3^2} - \frac{5}{3}\frac{3}{(s + 0{,}2)^2 + 3^3}$$

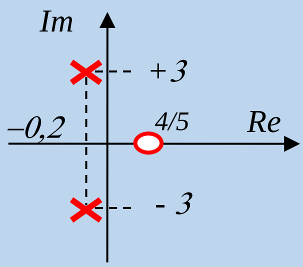
La función en el tiempo asociada es $x_f(t) = e^{-0{,}2 \cdot t}\left[5\cos(3 \cdot t) - \frac{5}{3} \cdot \sin(3 \cdot t)\right]$

En las graficas se puede observar el módulo de Xf(s), sus trazas para valores de s con parte real constante y la respuesta en el dominio del tiempo.



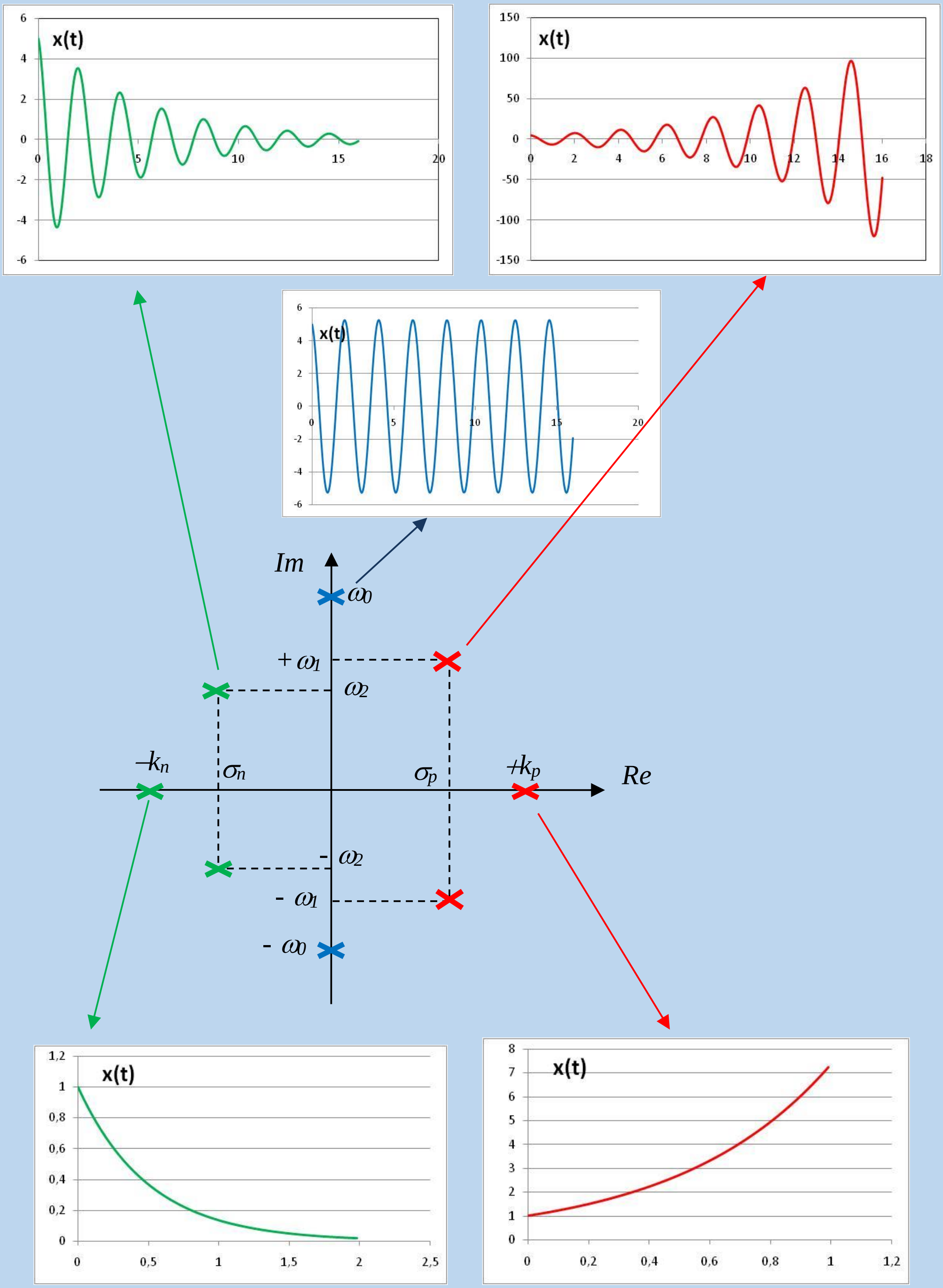






Posición de los Polos y respuesta en el tiempo

A partir de poder expresar una función racional *X(s)* en la forma de fracciones parciales es posible asociar por **cada polo real** una respuesta típica en el tiempo; y también por **cada par de polos complejos conjugados**.



Ejercicios de Funciones Racionales

Dadas las siguientes funciones racionales, encontrar la forma de Ceros Polos Ganancia; la forma de Fracciones Parciales; y de ser posible, la función *x(t)*, cuya Transformada de Laplace es *X(s)*.

Graficar la posición de los polos en el Plano s; y cualitativamente la respuesta en el dominio del tiempo asociada a cada polo. Comprobar la validez del Teorema del Valor Final.

Polos Reales y Distintos

- $X(s) = \dfrac{4}{s^2 + 4 \cdot s}$
- $X(s) = \dfrac{3 \cdot s + 4}{s^2 + 3 \cdot s + 2}$
- $X(s) = \dfrac{2 \cdot s + 3}{s^3 + 4 \cdot s^2 + 3 \cdot s}$

Polos Reales e Iguales

- $X(s) = \dfrac{s - 1}{s^2 - 4s + 4}$
- $X(s) = \dfrac{2}{s^2 \cdot (s + 4)}$

Polos Complejos

- $X(s) = \dfrac{4 \cdot s + 3}{s^2 + \omega^2}$ por Sistema de Ecuaciones y Completando cuadrados
- $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 10}$ Completando cuadrados
- $X(s) = \dfrac{s + 4}{s^2 + s + 3}$ Completando cuadrados
- $X(s) = \dfrac{s + 1}{s^2 - 2s + 5}$ Completando cuadrados

Polos Reales y Complejos

- $X(s) = \dfrac{1}{s + k} \cdot \dfrac{9}{s^2 + 25}$
- $X(s) = \dfrac{1}{s + 3} \cdot \dfrac{6 \cdot s^2 + 50}{s^2 + 4}$

Ejercicios de Aplicación de Transformada de Laplace para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Para las siguientes EDO, aplicar Transformada de Laplace y

- Encontrar la transformada de Laplace *X(s)* de la respuesta en el tiempo *x(t)*.
- Distinguir las partes de *X(s)* que depende de las condiciones iniciales y las que depende de la acción externa o término independiente de la EDO
- Expresar la X(s) en la forma de Fracciones Parciales
- Encontrar la respuesta en el dominio del tiempo.
- Expresar la Función de Transferencia del sistema
- Asociar los polos de la Función de Transferencia con los polos de X(s)
- Asociar la respuesta en el tiempo asociada a cada polo

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2 \cdot x(t) = 0$$

$$x(0) = 3; \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 13$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = a * t$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = \sin(a * t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

$$x(0) = 4; \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 3$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 2 \cdot x(t) = 4\cos(t) + 2sen(t)$$

$$x(0) = 0; \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 10$$

Encontrar la transformada de Laplace *X(s)* de la respuesta en el tiempo *x(t)*. Expresarlo en fracciones parciales y justificar que la respuesta en el tiempo es

$$x(t) = (10-2)e^{-t}sen(t) + 2 \cdot sen(t)$$

Apéndice I. Aplicación de Transformada de Laplace en la elección de parámetros de un atenuador de oscilaciones.

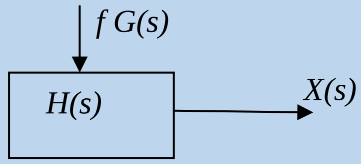
Sea un sistema masa resorte inicialmente en reposo que recibe una **perturbación** dada por $f\,g(t)$. El modelo matemático que describe su comportamiento es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_1^2\cdot x(t)=f\;g(t)\quad con\quad x(0)=0\;\;\frac{dx(0)}{dt}=0$$

Siendo $x(t)$ la respuesta del sistema ante la perturbación dada por la acción externa $f\,g(t)$. Al aplicar Transformada de Laplace a la EDO resulta

$$X(s)=f\,\frac{G(s)}{s^2+\omega_1^2}=H(s)\cdot f\cdot G(s)$$

Es posible representar este sistema con un diagrama de bloques en la siguiente forma



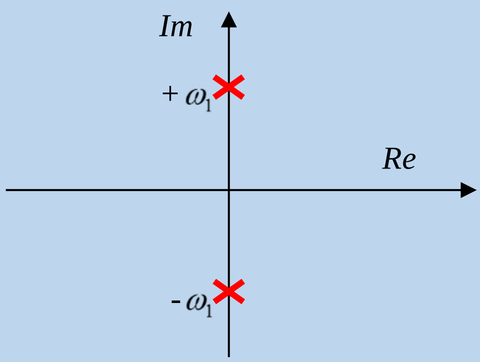
Para el caso particular que la acción externa sea la función Delta de Dirac, cuya Transformada de Laplace es 1, la transformada de Laplace de la respuesta del sistema es la denominada función de transferencia del sistema, y está dada por

$$H(s)=\frac{1}{s^2+\omega_1^2}$$

En el plano complejo s existen dos polos que son valores imaginarios dados por $\pm\,j\omega_1$

La respuesta en el tiempo $x(t)$, para esa acción externa perturbadora del sistema que es la función Delta de Dirac resulta la siguiente función

$$x(t)=\frac{f}{\omega_1}\sin(\omega_1\cdot t)$$



que representa un movimiento oscilatorio armónico permanente. Ante cualquier otra acción externa definida por la función g(t), también existirá una respuesta del sistema x(t) que lo sacará de su situación de reposo.

A los efectos de atenuar el movimiento inducido por la perturbación $f\,g(t)$, o acción externa al sistema, se introduce una acción “inteligente” que controle la oscilación y tenga como propósito lograr que la función $x(t)$ alcance un valor de referencia $x_R(t)$. Dicho valor de referencia será el valor nulo si se pretende atenuar totalmente el movimiento generado por la perturbación.

El modelo matemático en el dominio del tiempo del nuevo sistema que describe esta situación es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_1^2\cdot x(t)=f\;g(t)+\;f_C(e(t))\quad con\quad x(0)=0\;\;\frac{dx(0)}{dt}=0$$

$$f_C(e(t)) = K \cdot (z_1 \cdot e(t) + \frac{de(t)}{dt})$$
$$e(t) = x_R(t) - x(t)$$

Siendo *e(t)* la denominada función error. Para lograr el objetivo $x_R(t)$ del sistema con constante ω_1 y perturbación $f\, g(t)$ conocidos, las constantes *K y* z_1 deben determinarse adecuadamente.

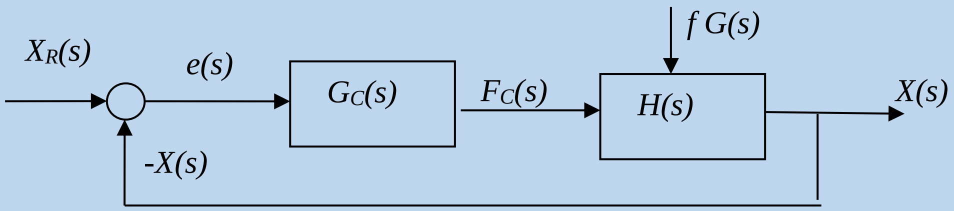
Al aplicar Transformada de Laplace a la EDO del nuevo sistema resulta

$$X(s) = f\frac{G(s)}{s^2+\omega_1^2} + \frac{F_C(s)}{s^2+\omega_1^2} = H(s)\cdot f \cdot G(s) + H(s)\cdot F_C(s)$$

$$F_C(s) = K\cdot(s+z_1)\cdot e(s)$$
$$= K \cdot G_C(s)\cdot e(s)$$

$$e(s) = (X_R(s) - X(s))$$

Es posible representar este nuevo sistema con un diagrama de bloques en la siguiente forma



De reemplazar *e(s)* y *Fc(s)* en *X(s)*, es posible obtener la transformada de Laplace de la respuesta del nuevo sistema, que resulta

$$X(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)\cdot K\cdot G_C(s)}\cdot f\cdot G(s) + \frac{H(s)\cdot K\cdot G_C(s)}{1+H(s)\cdot K\cdot G_C(s)}\cdot X_R(s)$$

o bien

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+\omega_1^2)}\cdot\frac{f\cdot G(s)}{\cdot(1+\frac{K\cdot(s+z_1)}{(s^2+\omega_1^2)})} + \frac{1}{(s^2+\omega_1^2)}\cdot\frac{K\cdot(s+z_1)}{(1+\frac{K\cdot(s+z_1)}{(s^2+\omega_1^2)})}\cdot X_R(s)$$

Es oportuno destacar que se distingue la contribución en la respuesta *X(s)* de la perturbación externa *f G(s)* y del valor de referencia objetivo $X_R(s)$. Para ambas contribuciones se tiene el mismo denominador, que define polos del nuevo sistema.

$$(s^2+\omega_1^2)(1+\frac{K\cdot(s+z_1)}{(s^2+\omega_1^2)}) = (s^2+\omega_1^2) + K\cdot(s+z_1) = s^2 + s\cdot K + \omega_1^2 + K\cdot z_1 = 0$$
$$s^2 + s\cdot K + (\omega_1^2 + K\cdot z_1) = (s-p_1)\cdot(s-p_2) = s^2 - s\cdot(p_1+p_1) + (p_1\cdot p_2) = 0$$

De donde se puede obtener que $K = (p_1+p_2)$ y $(\omega_1^2 + K\cdot z_1) = (p_1)\cdot(p_2)$, que elegidos p_1 y p_2 para lograr un determinado comportamiento, permite obtener *K* y z_1 mediante la "asignación de polos"

Caso de Análisis 1. Perturbación dada por un Impulso, y atenuación total

Cuando se considera como perturbación la función Delta de Dirac, y se persigue atenuar totalmente la oscilación, se tiene que

$$f\,g(t) = f\,\delta(t) \qquad \Rightarrow \qquad f\,G(s) = f$$
$$x_R(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_R(s) = 0$$

y así resulta

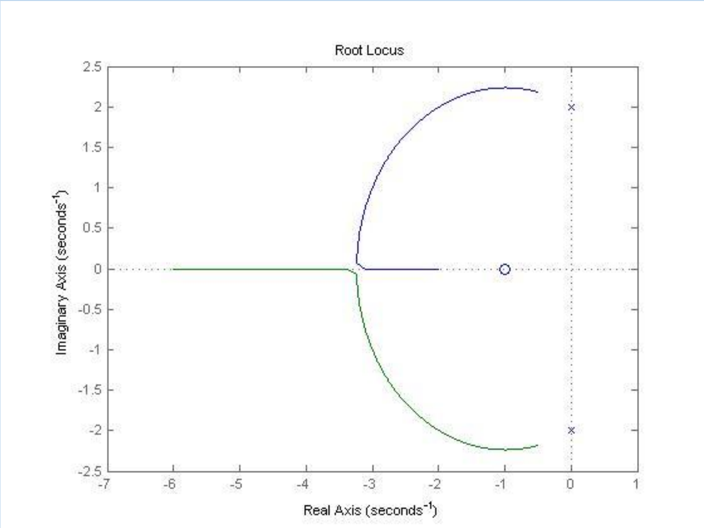
$$X(s) = \frac{1}{(s^2+\omega_1^2)} \cdot \frac{f}{\cdot(1+\dfrac{K\cdot(s+z_1)}{(s^2+\omega_1^2)})} = \frac{f}{((s^2+\omega_1^2)+K\cdot(s+z_1))}$$

Para un sistema tal que $\omega_1 = 2$, se propone que $z_1=1$, quedando como parámetro variable K. Los polos quedan definidos por los valores de s que anulan el denominador de X(s). Es decir,

$$((s^2+\omega_1^2)+K\cdot(s+z_1)) = ((s^2+4)+K\cdot(s+1)) = 0$$
$$((s^2+K\cdot s+(\omega_1^2+K\cdot z_1)) = ((s^2+K\cdot s+(4+K\cdot 1)) = 0$$

Comprobar que para para distintos valores de K, los polos evolucionan según se muestra en la siguiente Tabla y se ilustra en la siguiente gráfica

K	Polo 1	Polo 2
0	2j	-2j
0,5		
2,5		
5		
$2(1+\sqrt{5})$	$-(1+\sqrt{5})$	$-(1+\sqrt{5})$
10		
100		
1000		



Obtener para cada caso la respuesta x(t).

Discutir que valor de K es conveniente para el z_1=1 propuesto.

Hacer el mismo análisis pero proponiendo que z_1=0

Hacer el mismo análisis pero proponiendo que z_1=-1,

Apéndice II. Ejercicios de Sistemas

Aplicando Transformada de Laplace encontrar la respuesta de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\cdot\delta(t) \qquad con \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

Bibliografía

(Edwards y Penny, 2009) *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, C. H. Edwards, D. E. Penny, Pearson Educación, Prentice Hall, 2009. ISBN 978-970-26-1285-8.

(Lindner, 2001) *Introducción a las Señales y los Sistemas*, D. K. Lindner, Mc Graw Hill, 2002. ISBN 980-373-049-5.

(Nagle et al., 2001) *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, R. K. Nagle, E. B. Snaff, A. D. Snaider, Pearson Educación, 2001. ISBN 968-444-483-4.

(Zill y Cullen, 2001) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*, D. G. Zill, M. R. Cullen, Thomsom Learning, 2001. ISBN 970-686-133-5.

(Zill y Cullen, 2002) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores de Frontera*, D.G.Zill, M.R. Cullen, Thomson Learning, 2002.