Trabajo Práctico 5

Ecuaciones diferenciales

NOTA: Muchos ejercicios de este trabajo práctico han sido tomados del libro "Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera" de Zill y Wright, octava edición, Cengage Learning.

1. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no lineales; indique el orden.

   a) $(x-y)y' - 4xy + 5y = \cos x$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$

   c) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$

   d) $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$

   e) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$

   f) $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$

   g) $(2x+y+1)y' = 1$

   h) $(2x+\ln x+1)y' = 1$

   i) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

   j) $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$

   k) $(sen\theta)y'' - (cos\theta)y' = 2$

2. Compruebe que la función indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

   a) $2y' + y = 0;\ y = e^{-x/2}$

   b) $y' + 20y = 24;\ y = 6/5 - 6/5e^{-20x}$

   c) $(y-x)y' = y - x + 8;\ y = x + 4\sqrt{x+2}$

3. Compruebe que la función indicada es solución implícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

   a) $y' = (y-1)(1-2y);\ \ln\dfrac{2y-1}{y-1} = x$

   b) $2xy + (x^2-y)y' = 0;\ -2x^2y + y^2 = 1$

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es solución explícita de la ecuación diferencial dada. Indique el intervalo de definición I apropiado para cada solución.

   a) $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$

   b) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2;\ y = Ax^{-1} + Bx + Cx\ln x + 4x^2$

5. Determine el o los valores de m para que $y = e^{mx}$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$.

6. Determine los valores de los coeficientes A y B de la solución $y = A\cos x + B\operatorname{sen} x$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, para resolver el problema de valores iniciales con $y(0) = -1$ y $y'(0) = 8$.

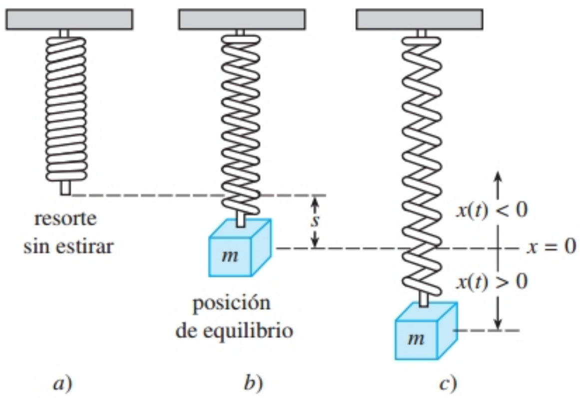
7. Determine los valores de los coeficientes A y B de la solución $y = Ae^x + Be^{-x}$ de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, para resolver los problemas de valores iniciales cuyas condiciones se especifican a continuación:

   a) $y(0) = 1, y'(0) = 2$
   b) $y(-1) = 5, y'(-1) = -5$

8. Determine los valores de los coeficientes A y B de la solución $y = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, para resolver el problema de valores iniciales con $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

9. Se desea encontrar una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto tenga una pendiente dada por $8e^{2x} + 6x$ y cuyo gráfico interseca al eje y en el punto (0,9). Plantee un PVI que permita hallarla.

10. Una masa m se fija a un extremo de un resorte. El resorte se estira s unidades y cuelga en reposo en su posición de equilibrio tal como se muestra en la figura. Posteriormente, el sistema se pone en movimiento, siendo $x(t)$ la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que las fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso, la fuerza de restauración del resorte, la fuerza debida a la fricción, que ocasiona un amortiguamiento del movimiento del cuerpo y una fuerza externa que fuerza el movimiento. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento (Ley de Hooke: la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total), para cada caso:



   a) Movimiento libre no amortiguado.
   b) Movimiento libre amortiguado.
   c) Movimiento forzado.

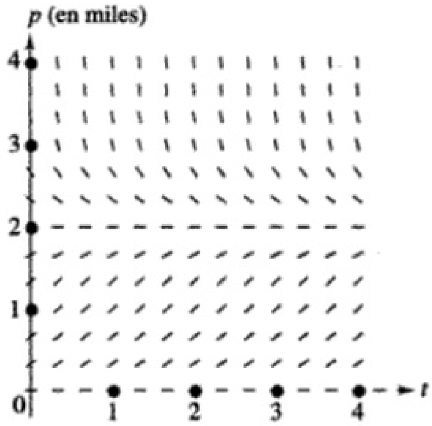
11. La población p (en miles) de determinada especie en el instante t está dada por la ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = p(2 - p)$$

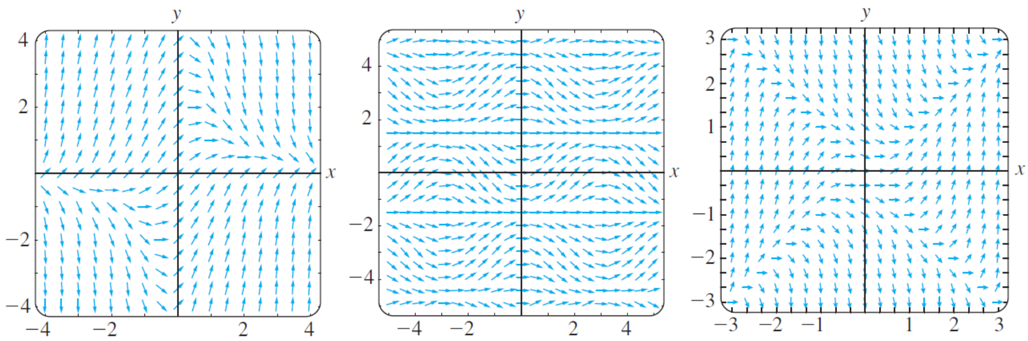
En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente, analice y responda:

   a) Si la población inicial es 3000 (es decir $p(0) = 3$), ¿qué se puede decir acerca de la población en el límite $\lim_{t\to\infty} p(t)$?
   b) ¿Puede una población de 1000 declinar hasta 500?

c) ¿Puede una población de 1000 crecer hasta 3000?



12. Dados los siguientes campos direccionales:



a) Indique a qué campo direccional corresponde cada ecuación:

$$i)\ y' = x^2 - y^2 \qquad ii)\ y' = 1 - xy \qquad iii)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$$

b) Para la ecuación dada en *ii*) represente en el gráfico correspondiente las curvas solución correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

1) $y(0) = 0$;

2) $y(2) = 2$.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ecuaciones Separables

13. Resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables si es posible:

a) $\dfrac{dy}{dx} = sen(5x)$

b) $dx + e^{3x}dy = 0$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$ (Encuentre dos soluciones singulares.)

14. Resuleva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ y encuentre una solución singular.

15. Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2+1)$, $x(\frac{\pi}{4}) = 1$.

16. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, si un objeto de temperatura T se introduce en un medio a temperatura M, la razón de cambio de la temperatura es proporcional a la diferentica $M - T$. Esto produce la ecuación diferencial $dT/dt = k(M - T)$.

    a) Resuelva la ecuación diferencial en términos de T.

    b) Una cerveza fría, inicialmente a $2°C$, se calienta hasta $5°C$ en 3 minutos estando en un cuarto a $21°C$. Determine la temperatura de la cerveza si uno se demora 30 minutos en tomarla.

Ecuaciones Lineales

17. Determine si la ecuación diferencial dada es lineal. Si es así, halle la solución general y el intervalo I en el que está definida.

    a) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

    b) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

    c) $y' + 3x^2y = x^2$

18. Resuelva el siguiente PVI: $\dfrac{dy}{dx} = x + 5y$, $y(0) = 3$.

19. Al determinar el factor integrante en la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden no usamos una constante de integración en la integral de $P(x)$, indique por qué.

Ecuaciones Exactas

20. Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta resuélvala.

    a) $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$

    b) $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\dfrac{1}{y} + x \ln y)dy = 0$

    c) $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x \cos y - y)dy = 0$

21. Considere la ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)y'(x) = 0$. Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y que f es una función potencial de $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^2$. Si es posible, indique una solución a ecuación planteada. Si no es posible, explique por qué.

22. Resuelva el siguiente PVI:

$$(4y - 2t - 5)dt + (6y + 4t - 1)dy = 0,\ y(-1) = 2$$

23. Determine el valor de k para el que la ecuación diferencial es exacta:

$$(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)dy = 0$$

24. *a*) Muestre que una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación $(4xy+3x^2)dx+(2y+2x^2)dy=0$ es $x^3+2x^2y+y^2=c$.

b) Demuestre que las condiciones iniciales $y(0)=-2$ y $y(1)=1$ determinan la misma solución implícita.

c) Encuentre las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial dada, tales que $y_1(0)=-2$ y $y_2(1)=1$.

25. Responda verdadero o falso y justifique:
Toda ecuación de primer orden separable $\dfrac{dy}{dx}=g(x)h(y)$ es exacta.

Ecuaciones con soluciones por sustitución

26. Resuelva las siguientes *ecuaciones de Bernoulli* usando sustituciones adecuadas:

a) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx}-5y=-\dfrac{5}{2}xy^3$

c) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2y^2$

27. En el estudio de la población dinámica, uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la ecuación logística

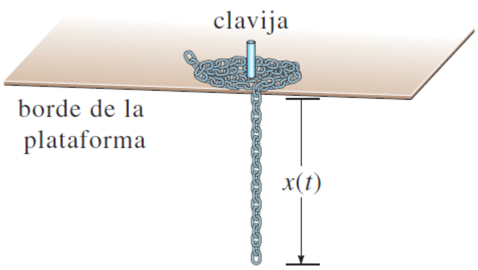
$$P'(t)=P(t)(a-bP(t)),$$

donde a y b son constantes positivas. Resuelva la ecuación. Indique en qué instante la tasa de crecimiento de la población es máxima.

28. Una parte de una cadena de 8 pies de longitud está enrollada sin apretar alrededor de una clavija en el borde de una plataforma horizontal, y la parte restante de la cadena cuelga sobre el borde de la plataforma. Suponga que la longitud de la cadena que cuelga es de 3 pies, que la cadena pesa 2 lb/pie y que la dirección positiva es hacia abajo. Comenzando en $t=0$ segundos, el peso de la cadena que cuelga causa que la cadena sobre la plataforma se desenrolle suavemente y caiga al piso. Si $x(t)$ denota la longitud de la cadena que cuelga de la mesa al tiempo $t>0$, entonces $v=dx/dt$ es su velocidad. Cuando se desprecian todas las fuerzas de rozamiento se puede demostrar que un modelo matemático que relaciona v con x está dado por

$$x\,v\,v'+v^2=32x.$$

Resuelva la ecuación.



Ejercicios integradores:

29. Clasifique cada ecuación diferencial como separable, exacta, lineal, Bernoulli o ninguna. Algunas ecuaciones pueden ser de más de una clase. No las resuelva.

    a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x}$

    b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$

    c) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = -y + 10$

    d) $(y^2+1)dx = y\sec^2 x dy$

    e) $y(\ln x - \ln y)dx = (x \ln x - x \ln y - y)dy$

    f) $t\dfrac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$

    g) $(2x+y+1)y' = 1$

30. Clasifique cada ecuación diferencial y resuelva.

    a) $y' = (xy)^{1/4}$

    b) $y' + y = xe^{-x} + 1$

    c) $2ydx - xdy = 0$

    d) $(2x^2+4xy)dx + (2x^2+y^2)dy = 0$

    e) $xy' + y = x^4y^3$

31. Encuentre si existe $M(x,y)$ para que la ecuación $M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x})dy = 0$ sea exacta.

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Problemas de valor inicial y frontera

32. En los siguientes problemas se dan las soluciones generales de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Encuentre el miembro de esta familia que resuelve el problema propuesto de valor inicial o de frontera.

    a) $y = C_1x + C_2x\ln x$, $x^2y'' - xy' + y = 0$, $(0,\infty)$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

    b) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, $y'' - y = 0$, $(-\infty,\infty)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

    c) $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x \operatorname{sen} x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$, $(-\infty,\infty)$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

Ecuaciones Homogéneas

33. En los siguientes problemas encuentre un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el problema de valor inicial dado tiene una solución única.

    a) $(x-y)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

    b) $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

34. Determine si las siguientes funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty,\infty)$:

    a) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$

b) $f_1(x) = 5,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

c) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$

35. ¿Qué deben cumplir las funciones y_1 e y_2 definidas en un mismo intervalo I para que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sea una solución general de la ecuación diferencial $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ en I?

36. Compruebe que las siguientes funciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo dado. Forme la solución general.

    a) $y'' - y' - 12y = 0$; $y_1 = e^{-2x}$, $y_1 = e^{4x}$, $(-\infty, \infty)$.

    b) $y^{(4)} + y'' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$.

37. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones:

    a) $4y'' + y' = 0$

    b) $y'' + 8y' + 16y = 0$

    c) $y'' - 3y' + 2y = 0$

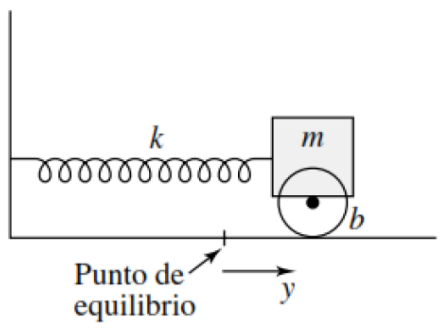
    d) $2y'' + 2y' + y = 0$

    e) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

    f) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

38. Un cuerpo de masa $m = 1kg$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 25N/m$. Exprese la ecuación del movimiento para los casos en que el movimiento está amortiguado, considerando que el amortiguamiento se modela a través de un término proporcional a la velocidad (de sentido contrario), cuya constante de proporcionalidad es b. Identifique la frecuencia natural del sistema. Resuelva para los casos en que b vale 0, 6, 10 y 12 (kg/s), con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Interprete cada solución en términos de movimiento subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado.

39. Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa m unida a un resorte fijo en un extremo, como se muestra en la figura. Proponga una ecuación diferencial que gobierne el movimiento de este oscilador, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte y la fricción (amortiguamiento). Posteriormente, resuelva la ecuación diferencial suponiendo que el amortiguamiento es cero. Determine la frecuencia de oscilación del sistema.



Ecuaciones no Homogéneas

40. En los siguientes problemas compruebe que la familia dada es solución de la ecuación diferencial no homogénea:

a) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x$, $(-\infty, \infty)$.

b) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$, $y = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$, $(0, \infty)$.

41. En cada caso, obtenga la solución general usando coeficientes indeterminados:

a) $4y'' + 3y' + 2y = 6$

b) $y'' + y' - 6y = 2x$

c) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

d) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$

e) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$

f) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

42. En cada caso, obtenga la solución general usando variación de parámetros:

a) $y'' + y = \sec x$

b) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

c) $y'' + y = \tan x$

d) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

e) $y'' + y = \sec^2 x$

43. Obtenga la solución para los siguientes problemas de valor inicial:

a) $4y'' - y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) $y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

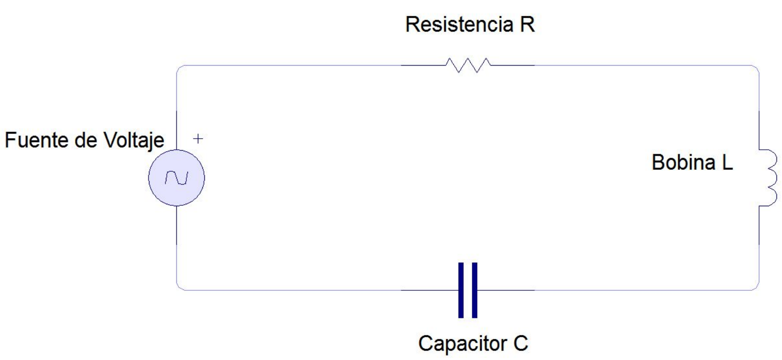
c) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$.

d) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$.

44. El circuito RLC en serie de la figura tiene una fuente de voltaje dada por $E(t) = \operatorname{sen} 100t$ voltios (V), una resistencia de 0,02 ohms (Ω), una bobina de 0,001 henrios (H) y un capacitor de 2 faradios (F). (Se han elegido estos valores por conveniencia, los valores típicos para el capacitor son mucho menores).

a) Obtenga una ecuación diferencial que modele el problema, teniendo en cuenta las leyes de Kirchhoff.

b) Si la corriente y la carga iniciales del capacitor son cero, determine la corriente en el circuito en función del tiempo.



45. Un cuerpo de masa $m = 1kg$ se cuelga de un resorte cuya constante es $k = 2N/m$. Suponga que el amortiguamiento depende de $b = 2\,kg/s$ y se imprime una fuerza que mueve el extremo superior del resorte según $f(t) = 4\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t)$. Halle la ecuación del movimiento. Distinga los términos transitorio y de estado estable de la solución.

Ecuaciones de Euler

46. En cada caso, determine la solución general para la ecuación de Euler dada. Suponga $x > 0$.

    a) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$
    b) $x^2y'' - 6y = 0$
    c) $4x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$
    d) $x^2y'' + xy' = 0$

47. En cada caso, resuelva el problema de valor incial solicitado:

    a) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, y(1) = 1, y'(1) = -1$
    b) $x^2y'' - xy' + y = 0, y(1) = 1, y'(1) = -1$

Soluciones en series de potencias

48. Para cada ecuación diferencial, use series de potencias para obtener la solución general:

    a) $y' + 2xy = 0$
    b) $y'' + y = 0$
    c) $y'' + 2y = 0$
    d) $2y'' + xy' + y = 0$

Ejercicios tomados en exámenes

49. Indique si la ecuación diferencial $2xy + x^2y' = 0$ es o no separable, si es o no lineal y si es o no exacta. Justifique.

50. La ecuación diferencial $y^2 + 2xyy' = 0$ es exacta y corresponde a otros tipos también. Usando solamente el hecho de que es exacta, resuelva el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial $y^2 + 2xyy' = 0$, sujeto a la condición $y(1) = 2$.

51. Resuelva $x^2y\,dx = (y - \frac{x^3}{3})\,dy$, tal que $y(1) = 2$.

52. Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' - 2y = x$.

53. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

    a) $\boxed{}$ La función $y \equiv -2$ es una solución singular de la ecuación $y' = y^2 - 4$. (Aclaración: $y = 2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$ es una familia de soluciones de la ecuación dada.)
    b) $\boxed{}$ Toda ecuación diferencial de primer orden separable, es exacta.

54. Halle la solución general de $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$, para $x > 0$.

55. Resuelva: $4y'' + 36y = \operatorname{cosec}(3x)$.

56. *a*) Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 0.$$

b) Halle una solución (general) para la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y = 25\cos(4t). \tag{1}$$

c) ¿Es verdad que toda solución de (1) es de la forma que usted obtuvo en el ítem anterior? Justifique.

57. Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.

58. Dada la ecuación $y'' - y = 2^x$, se sabe que $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada, $y'' - y = 0$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ¿Es verdad que una solución general de $y'' - y = 2^x$ es $y_G = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{2^x}{\ln^2 2 - 1}$? Justifique su respuesta mediante la aplicación del o de los teoremas correspondientes.
Si le resulta útil, recuerde que $2^x = e^{x\ln 2}$.

59. Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y''+y'-2y = x^2-x+2$.

60. Encuentre una solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

61. Indique en cada caso si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F), **justificando** su respuesta.

a) $\boxed{}$ Si en un intervalo I se tiene que y_1 y y_2 son funciones de x, soluciones de la ecuación diferencial $y'' + a_1y' + a_0y = 0$, tales que $W(y_1, y_2) \neq 0$ para al menos un valor de $x \in I$, entonces una expresión para la solución general de $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ es $y = c_1y_1 + c_2y_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

b) $\boxed{}$ Dada la ecuación diferencial lineal $a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, si y_1, y_2 y y_3 son soluciones de la ecuación diferencial, entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ es una expresión para la solución general de la ecuación diferencial.

c) $\boxed{}$ Si y_1 y y_2 son funciones de x, soluciones de la ecuación diferencial $y'' + a_1y' + a_0y = 0$, entonces una expresión para la solución general de $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ es $y = c_1y_1 + c_2y_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

d) $\boxed{}$ Resolver $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ sujeto a $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, donde $y_0, y_1, ...y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas, es resolver un problema con condiciones de frontera de n-ésimo orden.

e) $\boxed{}$ Si y_1 es una función de x que es solución particular de la ecuación diferencial $a_ny^{(n)} + ... + a_1y' + a_0y = f_1(x)$ y y_2 es una función de x que es solución particular de la ecuación diferencial $a_ny^{(n)} + ... + a_1y' + a_0y = f_2(x)$, entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es una solución particular de la ecuación diferencial $a_ny^{(n)} + ... + a_1y' + a_0y = f_1(x) + f_2(x)$.

Lista de ejercicios seleccionados: 1, 2ac, 3a, 4a, 6, 9, 11, 13b, 14, 17b, 18, 20, 22, 26ac, 34, 37, 41bcf, 42be, 43c, 46a, 48a.