



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD
DE INGENIERÍA**

TÓPICOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2020

Dra. Dalía Bertoldi

Mgter. Verónica E. Gayá

Dra. Mercedes Larriqueta

Lic. Julio A. Ruiz

Colaborador: Gonzalo Fernández

Este texto ha sido desarrollado por algunos docentes de la cátedra Análisis Matemático II de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, con el apoyo económico de la Facultad. Pretende abarcar los contenidos de cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, series de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales que enseñamos en el espacio curricular Análisis Matemático II, que se dictan en el segundo año de la carrera.

Suponemos conocidos los contenidos básicos del álgebra lineal y de geometría analítica, así como los que se relacionan más directamente con los temas del cálculo vectorial, que son los de cálculo de una variable real. Asimismo asumimos que el lector está familiarizado ya con los temas (previos) de funciones vectoriales y funciones de varias variables, diferenciales e integrales múltiples.

Este texto es un complemento a las clases de tipo teórico y/o práctico que dictamos en la Facultad de Ingeniería.

Índice

Prefacio	I
Índice	III
1. Campos vectoriales	1
1.1. Definición y ejemplos	1
1.1.1. Campo eléctrico	2
1.2. Integral de línea	3
1.2.1. Integrales de línea de campos escalares	3
1.2.2. Integrales de línea de campos vectoriales	7
1.2.3. Integral de línea de un campo escalar con respecto a los ejes coordenados	10
1.2.4. Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales	12
1.2.5. Teoremas destacados	13
1.3. Rotacional y divergencia de campos vectoriales	17
1.3.1. Operador nabla	17
1.3.2. Interpretación del rotacional y de la divergencia de un campo vectorial	19
1.3.3. Propiedades	27
1.3.4. Laplaciano	27
1.3.5. Formas diferenciales exactas	29
1.4. Teorema de Green	30
1.4.1. Regiones simples	31
1.4.2. Teorema de Green en regiones más generales	34
1.4.3. Otra forma del Teorema de Green	35
1.4.4. Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas	35
1.5. Superficies	37
1.5.1. Superficies orientadas	42
1.6. Integral de superficie	43
1.6.1. Integrales de superficie de campos escalares	43
1.6.2. Integrales de superficie de campos vectoriales	44
1.7. Teoremas de Stokes y de Gauss	48
1.7.1. Teorema de Stokes	48
1.7.2. Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3	51
1.7.3. Teorema de la divergencia de Gauss	54
1.7.4. Interpretación de la divergencia de un campo vectorial	55
1.7.5. Comparación de los teoremas de Green, Gauss y Stokes	56
1.7.6. Aplicaciones: Ley de Gauss y Ley de Faraday	56

2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	58
2.1. Introducción	58
2.1.1. Definición y clasificación	58
2.1.2. Soluciones, problemas con valores iniciales y de frontera	59
2.1.3. Campos direccionales	63
2.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden	64
2.2.1. Separación de variables	64
2.2.2. Ecuaciones lineales de primer orden	66
2.2.3. Ecuaciones exactas	69
2.2.4. Ecuaciones de Bernoulli	72
2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior	72
2.3.1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior	73
2.3.2. Dependencia e independencia lineal de soluciones	74
2.3.3. Solución general de una EDO lineal homogénea	75
2.3.4. Solución general de una EDO lineal no homogénea	77
2.3.5. EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes	79
2.3.6. EDO lineales no homogéneas	83
2.3.7. Ecuaciones de Euler	87
2.3.8. Soluciones en series de potencias	88
3. Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales	90
3.1. Conceptos preliminares	90
3.1.1. Producto interno	90
3.2. Series de Fourier	95
3.2.1. Convergencia	100
3.2.2. Series de senos y cosenos de Fourier	103
Bibliografía	109
Índice alfabético	109

Capítulo 1

Campos vectoriales

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1. Un campo vectorial es una función \mathbf{F} que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, \dots, x_n) \in A$, \mathbf{F} le asigna un vector de \mathbb{R}^m dado por

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n));$$

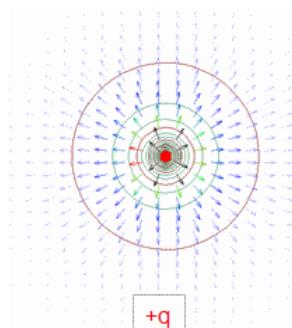
las funciones f_1, \dots, f_m se llaman funciones componentes de \mathbf{F} .

Un campo de vectores en el espacio tiene una fórmula como

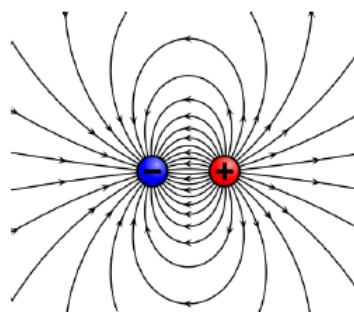
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

y se presenta, por ejemplo, en los campos de velocidades en un fluido; en los campos gradientes; en los campos de fuerzas en el espacio, en los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios en el espacio, etc.

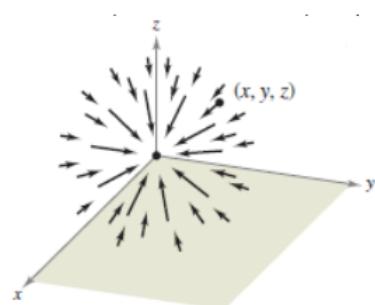
Veamos algunos gráficos de ejemplos de campos vectoriales.



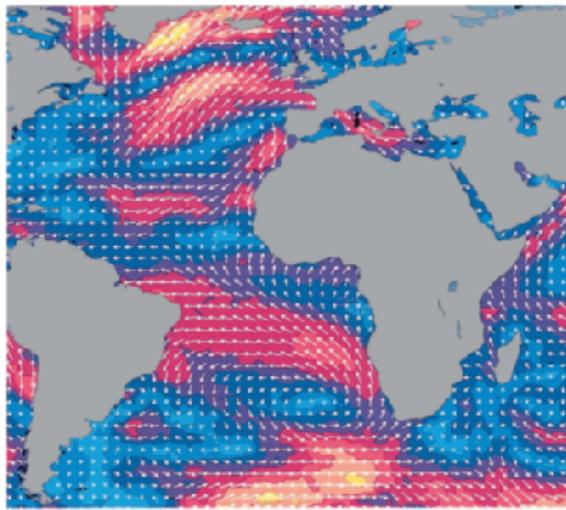
Campo eléctrico generado por una carga puntual.



Campo eléctrico generado por un dipolo.



Campo gravitatorio.



Campo de velocidades.

El gradiente de un campo escalar f , es un campo vectorial.

1.1.1. Campo eléctrico

Campo eléctrico generado por una carga puntual.

Dada una carga puntual Q_1 ésta modifica el espacio de manera tal que si se posiciona otra carga puntual Q en cualquier punto dado del espacio, ésta última se verá afectada por una fuerza que representamos por un vector \mathbf{F} . De acuerdo a la Ley de Coulomb, esta fuerza vendrá dada por $\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q}{4\pi\epsilon R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$, donde $\epsilon > 0$ es una constante cuyo valor depende del medio, \mathbf{R} es el vector $Q - Q_1$ si Q_1 y Q tienen el mismo signo y $Q_1 - Q$ si los signos son opuestos y R es el módulo de \mathbf{R} .

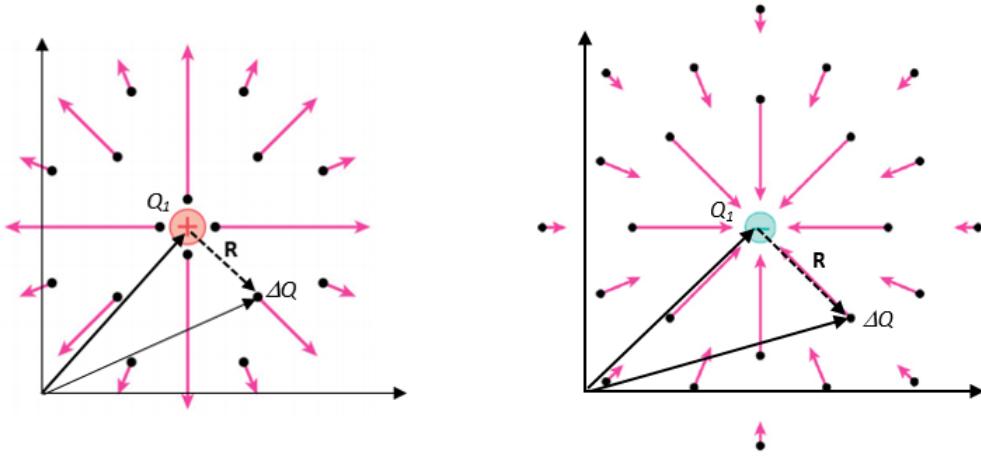
Definimos el valor del campo eléctrico \mathbf{E} en un punto como la fuerza, por unidad de carga, sobre una carga de prueba positiva en el punto, con tal que la carga de prueba ΔQ sea suficientemente pequeña para que no perturbe el campo que se está midiendo:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{\Delta Q} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Si identificamos con \mathbf{r} la posición de la carga de prueba ΔQ y con \mathbf{r}' la posición de la carga que genera el campo eléctrico, Q_1 , podemos determinar el valor del campo eléctrico \mathbf{E} en la posición \mathbf{r} (y similarmente, en cualquier punto del espacio):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.1)$$

donde la notación $Q_1(\mathbf{r}')$ indica la carga Q_1 en la posición \mathbf{r}' . Este es un ejemplo muy importante de campo vectorial.



Campo eléctrico generado por dos cargas puntuales; dipolos.

Si se considera dos cargas puntuales en el espacio, éstas generan un campo eléctrico que se puede determinar efectuando la suma vectorial de los dos campos eléctricos individuales.

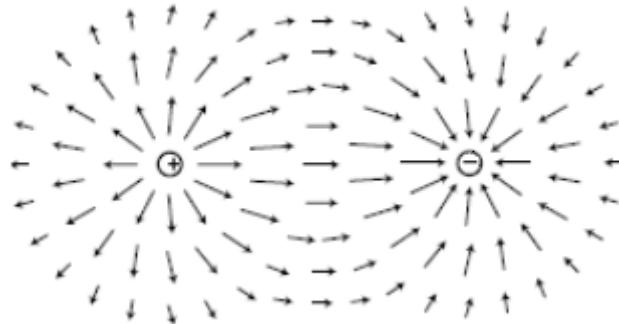
Digamos que las cargas puntuales que generan el campo eléctrico son $Q_1 > 0$ y $Q_2 < 0$ y sus vectores posición son, respectivamente, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Entonces los campos eléctricos generados por cada una de ellas son, según (1.1),

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{Q_1(\mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -\frac{Q_2(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}.$$

Así, el campo vectorial \mathbf{E} generado por las presencia **simultánea** de ambas cargas, viene dado por la suma **vectorial**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{Q_1(\mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{Q_2(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}.$$

Se obtiene un campo vectorial de este tipo:



1.2. Integral de línea

1.2.1. Integrales de línea de campos escalares

En Análisis Matemático I se vio cómo hallar áreas de regiones planas comprendidas entre un eje y el gráfico de una función de una variable real. Buscamos generalizar este procedimiento para hallar

áreas de regiones bajo la gráfica de una función de dos variables y sobre una curva plana incluida en el dominio de la función. Esta es la integral de línea de un campo escalar.

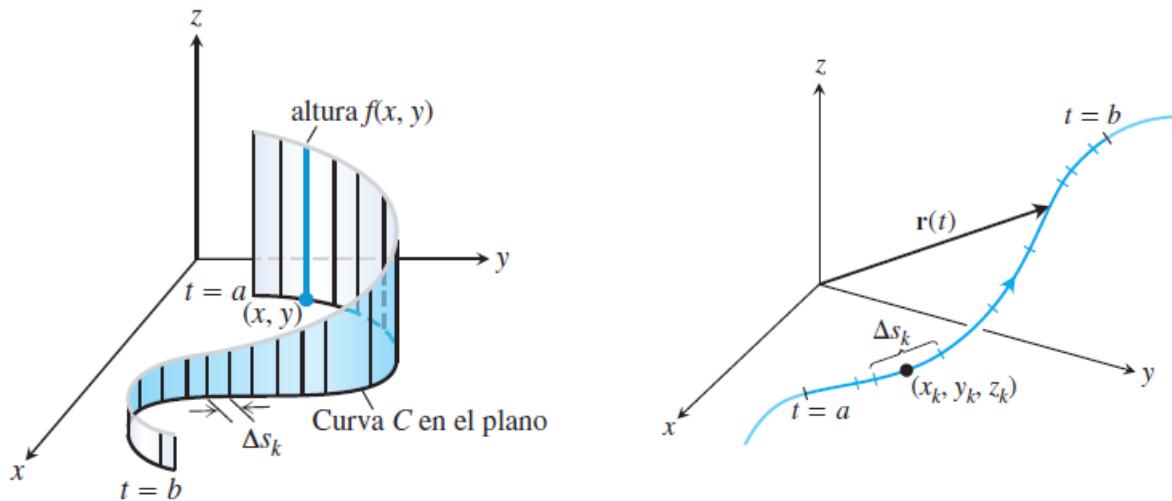
Definición 1.2.1. Dada una curva C y una representación paramétrica suave de la misma, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido en una región abierta D , que contiene a C , se define la integral de línea de f a lo largo de C por

$$\int_C f \, ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Observación 1.2.2. Debe destacarse el hecho (que no probaremos) de que el valor de la integral de línea es **independiente** de la representación paramétrica suave de la curva C .

Interpretación de la integral de línea de un campo escalar: si f está definida en $D \subset \mathbb{R}^2$ y toma valores no negativos a lo largo de la curva C , que está incluida en D , la integral de línea $\int_C f \, ds$ se puede interpretar como el área de la superficie S bajo el gráfico de f y por encima de la curva C . Es decir, el área de la “cortina” o “pared” sobre la curva C y bajo el gráfico de f .

Si f está definida en $D \subset \mathbb{R}^3$ y toma valores no negativos a lo largo de la curva C incluida en D , la integral de línea $\int_C f \, ds$ se puede interpretar como la masa del alambre ubicado sobre la curva C cuando la densidad en cada punto viene dada por f .



Origen de la definición

Supongamos que tenemos una curva suave C y una función f tales que se cuenta con una representación vectorial paramétrica \mathbf{r} definida en $[a, b]$ de C , y que f está definida en una región abierta que contiene a C . Una partición del intervalo $[a, b]$ (digamos $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$), induce una partición en la curva suave C (dada por puntos sobre C , digamos $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, $P_0 = A$, $P_n = B$). La continuidad de \mathbf{r} asegura que al afinar la partición \mathcal{P} del intervalo $[a, b]$, se achicará la distancia entre los correspondientes puntos de la curva C .

Entonces el área de la “cortina” viene dada por $\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}(t_k)) \Delta s_k$.

Recordando que $s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)| dt$, por el TFC tenemos $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ y el área se puede calcular como

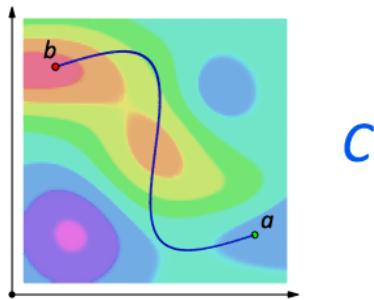
$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

que es exactamente la integral $\int_C f ds$.

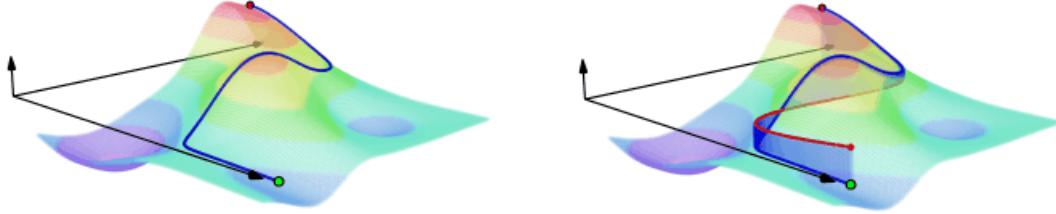
Hay una animación en la página de Khan Academy que se puede hallar en
<https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/line-integrals-for-scalar-functions-articles/a/line-integrals-in-a-scalar-field>

Incluimos algunas imágenes tomadas de dicha animación que ilustran el concepto de integral de línea de un campo escalar.

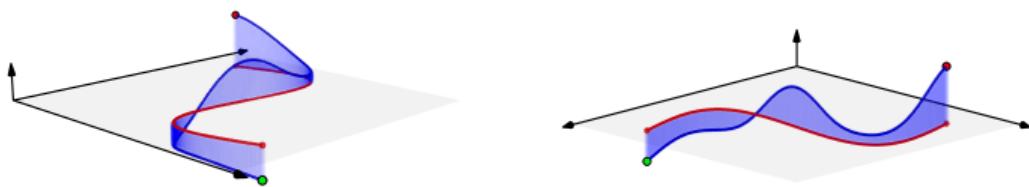
El siguiente es un mapa de contornos del campo escalar f y en esta región se encuentra la curva C .



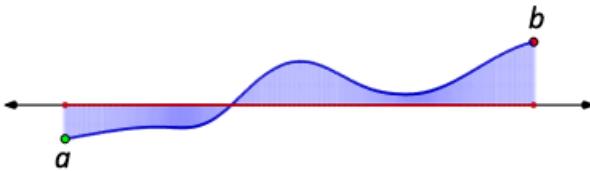
Para visualizar el valor de la integral (la diferencia de áreas de la “cortina”), se presenta el gráfico de f en \mathbb{R}^3 :



Aislando la superficie que nos interesa, obtenemos:



Si la pudiéramos estirar, se podría apreciar qué calcula esta integral:



$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt.$$

Propiedades

Las siguientes propiedades se presentan sin demostración. Para ello, supongamos que C_1 y C_2 son curvas incluidas en el dominio de f .

1. Aditividad: si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2 , de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2 , entonces $\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds$.
2. Independencia de la parametrización: $\int_{C_1} f \, ds = \int_{C_2} f \, ds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.
3. Dependencia de la trayectoria: en general, $\int_{C_1} f \, ds \neq \int_{C_2} f \, ds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aún en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y punto final.

Ejemplo 1.2.3 (Independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria). Se desea calcular el área bajo el gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ y sobre ciertas curvas del plano xy . Para ello se trabajará con dos parametrizaciones distintas de la curva $x^2 + y^2 = 4$, dadas por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Y se considerará también otra curva, parametrizada por \mathbf{r}_3 que, aunque tiene los mismos puntos inicial y final que \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , está formada en general por otro conjunto de puntos del plano.

Sea $\mathbf{r}_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Se puede observar que $\mathbf{r}'_1(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ y que $|\mathbf{r}'_1(t)| = 2$. En este caso, el área que se desea hallar es

$$\begin{aligned} A &= \int_{C_1} f \, ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}_1(t)) |\mathbf{r}'_1(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} (12 \cos^2 t + 4 \sin^2 t) 2 \, dt \\ &= 24 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt + 8 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si consideramos ahora $\mathbf{r}_2(t) = (2 \cos(2t), 2 \sin(2t))$, $0 \leq t \leq \pi$, se tiene que $\mathbf{r}'_2(t) = (-4 \sin(2t), 4 \cos(2t))$ y que $|\mathbf{r}'_2(t)| = 4$. El cálculo del área nos da

$$A = \int_{C_2} f \, ds = \int_0^\pi f(\mathbf{r}_2(t)) |\mathbf{r}'_2(t)| \, dt = \int_0^\pi (12 \cos^2(2t) + 4 \sin^2(2t)) 4 \, dt.$$

Haciendo la sustitución $u = 2t$, se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi} (12 \cos^2 u + 4 \sin^2 u) \frac{4}{2} \, du,$$

que es igual a (1.2).

Por otra parte, si definimos $\mathbf{r}_3(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tenemos $\mathbf{r}'_3(t) = (-\sin t, \cos t)$ y $|\mathbf{r}'_3(t)| = 1$. Así, la integral de línea de f a lo largo de la curva C_3 , descrita por \mathbf{r}_3 (que no es la misma

que C_1 ni C_2), da

$$\begin{aligned}\int_{C_3} f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}_3(t)) |\mathbf{r}'_3(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} 3((1 + \cos t)^2 + \sin^2 t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3(1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = 12\pi,\end{aligned}$$

que es claramente distinta del valor del área sobre la curva descrita por C_1 o C_2 . Hemos verificado que el valor de una integral de línea de un campo escalar no depende de la parametrización que se escoja para la curva pero sí depende, en general, de la trayectoria que la curva recorre.

1.2.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Motivación

Cuando deseamos calcular el trabajo de una fuerza *no necesariamente constante* a lo largo de una trayectoria *no necesariamente recta*, no podemos aplicar la fórmula $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$ que multiplica escalarmente fuerza y desplazamiento. Nos vemos forzados a hacer otra cosa. Entonces se propone descomponer la trayectoria en pequeñas porciones y, considerando que la fuerza es prácticamente constante a lo largo de cada pequeña porción casi recta de la trayectoria, hacer el cálculo usual y aproximar el trabajo total mediante una suma.

Si la fuerza variable \mathbf{F} (continua) aplica sobre un cuerpo a lo largo de una curva C parametrizada por una función vectorial paramétrica \mathbf{r} , $a \leq t \leq b$, al pasar de una posición $\mathbf{r}(t_0)$ a otra, $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$, la fuerza realiza un trabajo

$$\begin{aligned}\Delta W &\approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_0)) \cdot (\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)) \\ \Delta W &\approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \Delta \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Llamando \mathbf{T} al vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{r}(t_0)$ y recordando que

$$\Delta \mathbf{r} \approx \mathbf{T} \cdot \Delta s,$$

donde Δs es la longitud del subarco comprendido entre $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$, la cantidad ΔW se puede expresar como

$$\Delta W \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{T} \Delta s.$$

Si tomamos una partición del intervalo $[a, b]$, digamos $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$, donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, lo suficientemente fina como para poder suponer que a lo largo de cada arco entre $\mathbf{r}(t_{k-1})$ y $\mathbf{r}(t_k)$ la fuerza es casi constante (acá estamos usando la continuidad de la función \mathbf{F}), podemos aproximar el trabajo total que realiza \mathbf{F} a lo largo de la curva C por

$$W \approx \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_k)) \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k,$$

donde \mathbf{T}_k es el vector tangente unitario a la curva en el punto $\mathbf{r}(t_k)$ y Δs_k es la longitud del subarco de la curva C comprendido entre $\mathbf{r}(t_{k-1})$ y $\mathbf{r}(t_k)$. Esta aproximación será mejor cuanto más pequeños sean los subintervalos de la partición.

Esto nos lleva a presentar la siguiente definición.

Definición de integrales de línea de campos vectoriales

Definición 1.2.4. Sea \mathbf{F} un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre la curva suave C . Definimos la integral de \mathbf{F} a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de C :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{T} es el vector tangente unitario a la curva C en cada punto.

Observación 1.2.5 (Fórmula de cálculo de integrales de línea de campos vectoriales.). Dado que el integrando $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ en (1.3) es un escalar, en vista de la Definición 1.2.1, la integral de línea de un campo escalar \mathbf{F} a lo largo de una curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, incluida en el dominio de \mathbf{F} , se puede calcular haciendo

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Debe destacarse el hecho de que el valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C , que se desprende de la Propiedad 2 en la página 6.

Observación 1.2.6. Se tiene que $\int_C \mathbf{F} ds = -\int_{-C} \mathbf{F} ds$ si $-C$ es la curva formada por los mismos puntos que C pero recorrida en sentido contrario.

Interpretación: trabajo y flujo

Si \mathbf{F} representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza \mathbf{F} sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Si \mathbf{F} es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de \mathbf{F} se llama **flujo de \mathbf{F} a lo largo de C** .

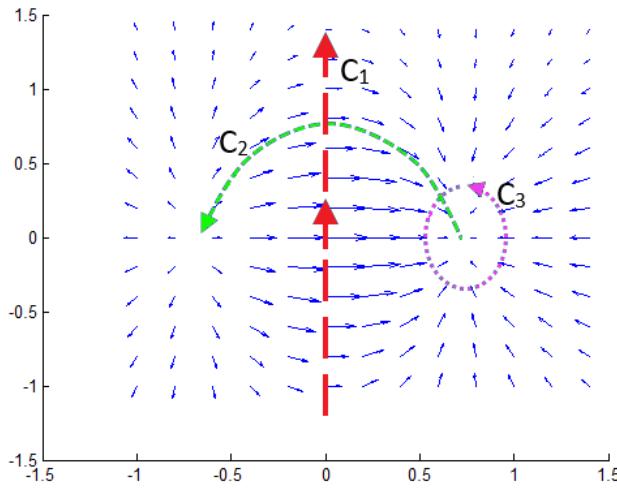
Si C es **cerrada**, el flujo de \mathbf{F} a lo largo de C se llama **circulación de \mathbf{F} a lo largo de C** .

Para integrales a lo largo de curvas **cerradas** se suele usar el símbolo \oint_C . Puede añadirse una flecha que indica el sentido cuando se trata de una curva cerrada plana: \oint_C o \oint_C .

Si C es una curva **plana** simple y cerrada, positivamente orientada, el flujo de \mathbf{F} a **través hacia fuera de C** es la integral de línea de la componente **normal** hacia fuera de \mathbf{F} a lo largo de C :

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Ejemplo 1.2.7. Sean el campo vectorial \mathbf{F} y las curvas C_1 , C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Indique los signos de $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$.

1. Para conocer el signo de $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, se analiza la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de la curva. En este caso \mathbf{F} es ortogonal a la curva en cada punto. Luego, la componente tangencial de \mathbf{F} sobre C_1 es cero, en cada punto. Así, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
2. Para conocer el signo de $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, igual que antes se analiza la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de la curva. En este caso se puede notar que, en cada punto de la curva, el ángulo que forman \mathbf{F} y el vector tangente unitario a la misma en el mismo punto, es obtuso. En consecuencia, la componente tangencial de \mathbf{F} es negativa en cada punto de C_2 y así, $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0$.
3. Para conocer el signo de $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, se analiza la componente normal de \mathbf{F} a lo largo de la curva C_3 . El ángulo que forman, en cada punto de la curva, \mathbf{F} y el vector normal unitario hacia fuera de la curva, es obtuso. En consecuencia, la componente normal de \mathbf{F} es negativa en cada punto de C_3 y así, $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds < 0$.

Ejemplo 1.2.8. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, x, 0)$, determinar la circulación de \mathbf{F} a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.9. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x)$ a través y hacia fuera de la circunferencia C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Debemos calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ pero no conocemos a priori el vector \mathbf{n} . Según cuál sea el sentido de circulación de la curva plana C , \mathbf{n} será $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ o $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{T}$ (para calcular los productos vectoriales consideramos los vectores como vectores de \mathbb{R}^3 con tercera componente nula, cuando haga falta). En nuestro caso, $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = (\cos t, \sin t)$ y $|\mathbf{r}'(t)| = |(-\sin t, \cos t)| = 1$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n} |\mathbf{r}'(t)| dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t) \cdot (\cos t, \sin t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t) dt \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

1.2.3. Integral de línea de un campo escalar con respecto a los ejes coordenados

En algunos casos aparecen este tipo de integrales de línea de campos escalares.

Comenzamos introduciendo una notación conveniente para las integrales de línea de campos vectoriales. Si $\mathbf{F} = (M, N)$ y $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, es una parametrización suave de una curva C incluida en el dominio de \mathbf{F} ,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b [M(x(t), y(t)) x'(t) + N(x(t), y(t)) y'(t)] dt \\
&= \int_a^b M(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b N(x(t), y(t)) y'(t) dt.
\end{aligned}$$

Entonces anotamos:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C M dx + \int_C N dy = \int_C M dx + N dy, \quad (1.4)$$

donde hemos usado la notación

$$\int_C M dx = \int_a^b M(x(t), y(t)) x'(t) dt \text{ y } \int_C N dy = \int_a^b N(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

En vista de lo anterior introducimos la siguiente definición:

Definición 1.2.10. Dado un campo escalar f y una curva suave C incluida en el dominio de f , parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $(a \leq t \leq b)$, se llama **integral de línea del campo escalar f con respecto a x** a

$$\int_C f dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad (1.5)$$

Similarmente,

$$\int_C f dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt \quad (1.6)$$

es la **integral de línea del campo escalar f con respecto a y** .

Ejemplo 1.2.11. Calcule la integral de línea del campo escalar dado por $f(x, y) = xy$ a lo largo del

arco de parábola C parametrizado por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, con respecto a x .

$$\int_C f(x, y) dx = \int_C xy dx.$$

Recordando (1.5),

$$\int_C f(x, y) dx = \int_0^1 t t^2 1 dt = \frac{1}{4}.$$

Con esta notación, la integral de línea del campo vectorial \mathbf{F} a lo largo de C se puede expresar como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C M dx + \int_C N dy = \int_C M dx + N dy,$$

Similarmente, si se tiene una curva suave C en el espacio, la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$ a lo largo de C se puede expresar como $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C M dx + N dy + P dz$.

Por otra parte, la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ a través hacia fuera de C , cuando C es una curva plana cerrada y positivamente orientada, se puede expresar como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} ds.$$

Por estar la curva C positivamente orientada, el vector normal unitario **hacia fuera** en cada punto de la curva C , se puede expresar como el producto vectorial entre el vector tangente unitario \mathbf{T} y el versor $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, de esta manera:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k},$$

si hacemos la extensión natural de los vectores a \mathbb{R}^3 . Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} ds = \oint_C \mathbf{T} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{F} ds$$

y, aplicando propiedad del producto mixto de vectores, la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ se puede expresar como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{k} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (1.7)$$

Hacemos el producto vectorial entre \mathbf{k} y \mathbf{F} (sus extensiones naturales a \mathbb{R}^3) y obtenemos

$$\mathbf{k} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}.$$

Sustituimos en (1.7):

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C (-N, M) \cdot \mathbf{T} ds,$$

que no es otra cosa que la integral de línea de la componente tangencial de *otro* campo vectorial, $\mathbf{G} = (-N, M)$, cuyas componentes tienen las mismas propiedades que las componentes de \mathbf{F} . En virtud de la expresión (1.4) para integrales de línea de componentes tangenciales de campos vectoriales, obtenemos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C M dy - N dx.$$

1.2.4. Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

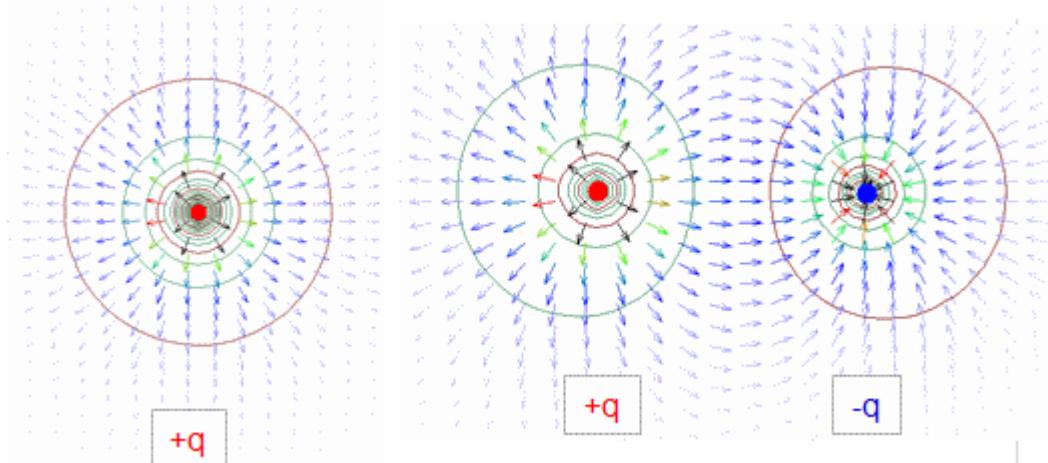
Definición 1.2.12. Sea \mathbf{F} un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D , la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias desde A hasta B . Entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria** en D y el campo vectorial \mathbf{F} es **conservativo** en D .

Definición 1.2.13. Si \mathbf{F} es un campo vectorial definido en una región abierta D y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D , entonces f se llama **función potencial de \mathbf{F}** .

Definición 1.2.14. Las **líneas de flujo** de un campo vectorial \mathbf{F} son aquellas curvas en el dominio de \mathbf{F} , tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de \mathbf{F} .

Ejemplo 1.2.15 (Para reflexionar).

1. ¿Cuáles son las líneas de flujo en campos eléctricos generados por una carga puntual o por un dipolo?



2. Si un campo vectorial \mathbf{F} es el gradiente de alguna función potencial f , justifique que las líneas de flujo de \mathbf{F} y las curvas de nivel de f son ortogonales en cada punto en que se cortan.

Principio del trabajo y la energía

Si \mathbf{F} representa un **campo de fuerzas** y una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva suave C incluida en el dominio de \mathbf{F} , ocupando la posición $\mathbf{r}(t)$, durante un intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$, entonces el **trabajo** realizado por \mathbf{F} en ese intervalo es

$$W = \int_{\mathbf{r}(a)}^{\mathbf{r}(b)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (1.8)$$

Según la segunda Ley de Newton, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$ con lo cual

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{r}'(t)\|^2). \quad (1.9)$$

Sustituyendo (1.16) en (1.15),

$$W = \int_a^b \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{r}'(t)\|^2) dt = \frac{m}{2} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 \Big|_a^b = \frac{m}{2} (\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2).$$

Recordando que la energía cinética de la partícula está definida por $\frac{1}{2}m v^2(t)$, hemos probado que **el trabajo realizado por F durante un intervalo de tiempo es la variación de la energía cinética en ese intervalo.**

Principio de conservación de la energía mecánica

Sea \mathbf{F} un campo de fuerzas continuo con un potencial f en un conjunto conexo abierto D . El T.F. de integrales de línea dice que el trabajo realizado para mover una partícula desde A hasta (x, y, z) a lo largo de una curva suave por partes en D es $f(x, y, z) - f(A)$; antes probamos que el trabajo es la variación de la energía cinética de la partícula, $k(x, y, z) - k(A)$. Luego

$$k(x, y, z) - k(A) = f(x, y, z) - f(A),$$

$$k(x, y, z) - f(x, y, z) = k(A) - f(A). \quad (1.10)$$

Llamamos **energía potencial** de la partícula a $-f(x, y, z)$.

Si A se mantiene fijo y (x, y, z) varía en D , (1.10) dice que $k(x, y, z) + (-f(x, y, z)) = cte$.

Principio de conservación de la energía mecánica Si un campo de fuerzas es un gradiente, la suma de las energías cinética y potencial de una partícula que se desplaza en dicho campo es constante.

1.2.5. Teoremas destacados

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios que se hace con frecuencia en esta sección.

Algunos ya son conocidos:

- 1) Curvas suaves por partes (nro. finito curvas suaves unidas).
- 2) Campos vectoriales que tienen componentes con derivadas parciales de primer orden continuas.
- 3) Los dominios D son conjuntos o regiones abiertas.

Aparecen también los conceptos de región **conexa y simplemente conexa**.

4) Una región **abierta** D , incluida en \mathbb{R}^n , es **conexa** si para todo par de puntos A y B de D existe una curva suave en D que une A y B .

5) Una región abierta y conexa D de \mathbb{R}^n es **simplemente conexa** si para todo par de puntos A y B en D y todo par de curvas C_1 y C_2 de D que unen A con B , existe una familia de curvas en D que unen A con B tales que varían con continuidad dentro de D .

Ejemplo 1.2.16.

1. \mathbb{R}^2 sin el origen es un conjunto abierto y conexo pero no es simplemente conexo;
2. \mathbb{R}^3 sin el origen es un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo;
3. \mathbb{R}^3 sin un eje coordenado es un conjunto abierto y conexo pero no es simplemente conexo;

4. Un toroide (rosquita) sin su frontera es un conjunto abierto y conexo pero no es simplemente conexo.

Teorema 1.2.17 (Teorema Fundamental de Integrales de Línea).

Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región abierta conexa D que contiene a C . Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Demostración. Suponga que A y B son dos puntos de la región D y que C es una curva suave en D que une los puntos A y B , parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $a \leq t \leq b$.

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt && \text{(por def. integral de línea)} \\ &= \int_a^b (f_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_y(\mathbf{r}(t))y'(t) + f_z(\mathbf{r}(t))z'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) dt && \text{(por regla de la cadena)} \end{aligned}$$

Si llamamos $w = f \circ \mathbf{r}$, nos queda:

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) dt = \int_a^b w'(t) dt \\ &= w(b) - w(a) && \text{(por T. fundamental del cálculo)} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) && \text{(por definición de } w) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.18 (Los campos conservativos son campos gradientes^{a)}.

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta D en el espacio. Entonces \mathbf{F} es un campo conservativo si y sólo si \mathbf{F} es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable f .

^aSe puede ver un video de esta prueba en <https://youtu.be/eDvh0svn4IE>

Demostración. \Leftarrow) Probaremos primero que si \mathbf{F} es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable f , entonces es un campo vectorial conservativo. Para ello, supongamos que $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función diferenciable f .

Según el Teorema Fundamental de integrales de línea (Teorema 1.2.17), dado que $\mathbf{F} = \nabla f$, se tiene que $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$: el valor de la integral de línea sólo depende de los puntos A y B , no de la trayectoria, cualesquiera sean A y B en D . Luego $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D . En consecuencia, \mathbf{F} es conservativo en D según la definición de campo vectorial conservativo en D (Definición 1.2.12).

\Rightarrow) Probaremos ahora que si \mathbf{F} es conservativo en D , entonces \mathbf{F} es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable f . Para ello, supongamos que \mathbf{F} es conservativo en D , es decir que la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D .

Realizamos esta parte de la prueba en dos pasos:

- Definimos f en D . Para hacerlo, elegimos un punto $A \in D$, arbitrario fijo, y definimos f así:

$$f(A) = 0 \quad f(B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ para cualquier otro punto } B \in D.$$

Verificamos que f esté bien definida: debe satisfacer las condiciones de existencia de imagen y de unicidad de imagen. Dado un punto cualquiera de D , digamos B , existe al menos una curva C , desde A hasta B , incluida en D , dado que D es una región conexa y abierta. Luego, podemos calcular $f(B) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Note la importancia de la hipótesis de ser conexo y abierto D . La unicidad de este valor se desprende del hecho de ser la integral de línea de \mathbf{F} independiente de la trayectoria en D , según se ha supuesto en esta parte de la prueba.

- Probamos que $\nabla f = \mathbf{F}$. Basta probar que $f_x(x, y, z) = M(x, y, z)$; $f_y(x, y, z) = N(x, y, z)$; $f_z(x, y, z) = P(x, y, z)$.

Probemos primero que $f_x(x_0, y_0, z_0) = M(x_0, y_0, z_0)$ para un punto arbitrario $(x_0, y_0, z_0) \in D$:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_A^{(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^{(x_0, y_0, z_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Si parametrizamos el segmento desde el punto (x_0, y_0, z_0) hasta el punto $(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ por $\mathbf{r}(t) = (t, y_0, z_0)$, $x_0 \leq t \leq x_0 + \Delta x$, se puede escribir la última integral (1.11) como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (M(\mathbf{r}(t)), N(\mathbf{r}(t)), P(\mathbf{r}(t))) \cdot (1, 0, 0) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} M(\mathbf{r}(t)) dt, \end{aligned} \tag{1.12}$$

y así, sustituyendo (1.12) en (1.11), obtenemos

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} M(\mathbf{r}(t)) dt. \tag{1.13}$$

Si M es continua en D y \mathbf{r} es continua en $[x_0, x_0 + \Delta x]$, $M \circ \mathbf{r}$ también es continua en $[x_0, x_0 + \Delta x]$ y así, según el Teorema del valor medio de integrales¹, existe c entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ tal que

$$M(\mathbf{r}(c)) = \frac{1}{x_0 + \Delta x - x_0} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} M(\mathbf{r}(t)) dt.$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (1.13), obtenemos

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(\mathbf{r}(c)),$$

¹Si una función g es continua en $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$.

donde c es cierto número entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. La **continuidad** de $M \circ \mathbf{r}$ asegura que el límite anterior existe y es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = M(\mathbf{r}(x_0)) = M(x_0, y_0, z_0).$$

De manera similar, se puede probar que $f_y(x_0, y_0, z_0) = N(x_0, y_0, z_0)$ y $f_z(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0)$, con lo cual se concluye la prueba.

□

Observación 1.2.19. Cabe destacar que hemos definido una función f a partir de un punto $A \in D$, arbitrario. ¿En qué cambia la función f si se la define a partir de **otro** punto de D , digamos A_1 ?

Lo que obtendríamos es otra función, digamos f_1 . Pero ¿cuál es la diferencia entre f y f_1 ? Sabemos que para cualquier punto $B \in D$, $f(B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Por otra parte, $f_1(B) = \int_{A_1}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Pero por ser \mathbf{F} conservativo en D ,

$$f_1(B) = \int_{A_1}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + f(B),$$

lo cual nos permite comprobar que la diferencia entre f y f_1 es tan solo una constante: la constante dada por $f_1(A) = \int_{A_1}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Teorema 1.2.20 (Propiedad de lazos en campos conservativos^a).

Sean D una región abierta y conexa y \mathbf{F} un campo vectorial definido en D . Entonces \mathbf{F} es conservativo en D si y sólo si para todo lazo C en D , se tiene $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

^aSe puede ver una prueba de este Teorema en <https://youtu.be/pe7153doD0c>

Demostración. Supongamos, para probar la primera implicación, que \mathbf{F} es conservativo en D , que C es un lazo en D y que A y B son dos puntos en C . Estos puntos determinan dos subarcos, digamos C_1 , que va desde A hasta B , y C_2 , desde B hasta A , tales que uno seguido del otro forman C . Entonces

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Las integrales en (1.14) están planteadas sobre trayectorias distintas pero con mismo punto inicial A y final, B . La hipótesis de que \mathbf{F} es conservativo en D justifica que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

probando la igualdad deseada.

Para probar la segunda implicación, supongamos que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo lazo C en D . Probaremos que la integral de línea de \mathbf{F} es independiente de la trayectoria en D . Para ello consideraremos dos puntos cualesquiera de D , digamos A y B , y veamos que la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de cualquier trayectoria incluida en D , desde A hasta B , vale lo mismo. Supongamos que C_1 y C_2 son

dos curvas suaves incluidas en D , que van desde A hasta B . Probaremos que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ mostrando que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Aplicando la definición de integral de línea de un campo vectorial, tenemos

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \left(- \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

donde C es el lazo formado por C_1 seguida de $-C_2$; la última integral es nula por la hipótesis correspondiente a esta parte de la prueba.

□

1.3. Rotacional y divergencia de campos vectoriales

Definición 1.3.1. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M_1, \dots, M_k)$, cada una de cuyas k funciones componentes es un campo escalar $M_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, se define la divergencia de \mathbf{F} , por $\operatorname{div} \mathbf{F} = M_{1x_1} + M_{2x_2} + \dots + M_{kx_k}$.

Observación 1.3.2. En el caso en que $\mathbf{F} = (M, N)$ esté definido en \mathbb{R}^2 , entonces $\operatorname{div} \mathbf{F} = M_x + N_y$ y si $\mathbf{F} = (M, N, P)$ está definido en \mathbb{R}^3 , entonces $\operatorname{div} \mathbf{F} = M_x + N_y + P_z$.

A diferencia de lo que ocurre con la divergencia, el rotacional de un campo vectorial sólo se define para campos vectoriales en \mathbb{R}^3 (en \mathbb{R}^2 se trabaja con la llamada componente k del rotacional, considerando una tercera componente nula para el campo vectorial).

Definición 1.3.3. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se define el rotacional de \mathbf{F} por $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$.

Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$, la componente k del rotacional de \mathbf{F} es $N_x - M_y$.

1.3.1. Operador nabla

Una forma conveniente de recordar estas definiciones es por medio del **operador diferencial vectorial nabla**, $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Ya hemos usado este operador antes, al hallar el gradiente de un campo escalar:

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) \quad \text{y} \quad \nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z).$$

Cuando trabajamos con un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se aplica por medio de un producto, como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = (P_y - N_z)\mathbf{i} + (M_z - P_x)\mathbf{j} + (N_x - M_y)\mathbf{k}$$

o

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (M, N, P) = M_x + N_y + P_z.$$

Así,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Criterio de componentes para campos conservativos

Antes de dar una interpretación al rotacional y a la divergencia, podemos relacionar el rotacional con la propiedad de ser conservativo un campo vectorial, a través del siguiente teorema.

Teorema 1.3.4 (Criterio de componentes para campos conservativos^a).

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en una región conexa y abierta D , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces:

1. Si \mathbf{F} es conservativo en D , entonces $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.
2. Si D también es simplemente conexo y $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en D , entonces \mathbf{F} es conservativo en D .

^aSe puede ver una prueba de este Teorema en https://youtu.be/C_w6Pi-mVlM

Observación 1.3.5. El nombre de este teorema se debe a que la condición $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ se puede expresar en términos de las componentes del campo vectorial \mathbf{F} de la siguiente manera:

$$P_y = N_z, \quad M_z = P_x, \quad N_x = M_y.$$

Demostración.

1. Supongamos que \mathbf{F} es conservativo y probemos que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Aplicando el Teorema 1.2.18 sabemos que, por ser conservativo, \mathbf{F} es el gradiente de alguna función diferenciable, f ; es decir, existe una función f definida en D tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Luego $M = f_x$, $N = f_y$ y $P = f_z$ en D . Dado que el rotacional de \mathbf{F} es el vector $(P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$, recordando que $M = f_x$ tiene derivadas parciales continuas de primer orden y lo mismo pasa con N y con P , sustituyendo y aplicando el teorema de la derivada mixta se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0, 0, 0).$$

2. Se probará después de haber probado el Teorema de Stokes (véase la página 51).

□

Ejemplo 1.3.6. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, z e^{yz}, x + y e^{yz} + 1)$.

a) Determine si \mathbf{F} es o no conservativo y, en caso afirmativo, indique en qué conjunto.

El dominio de \mathbf{F} es \mathbb{R}^3 (que es un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo). El rotacional de \mathbf{F} es

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

y así, según el criterio de componentes para campos conservativos, \mathbf{F} es conservativo en \mathbb{R}^3 .

b) En caso afirmativo, halle una función potencial de \mathbf{F} , f .

Dado que \mathbf{F} es conservativo, existe una función potencial, f . Una manera de buscarla es, entendiendo que $\mathbf{F} = \nabla f$, es decir, $(M, N, P) = (f_x, f_y, f_z)$, igualar $M = f_x$ y antiderivar con respecto a x :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int M dx = \int z dx, \\ f(x, y, z) &= zx + g(y, z), \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde la constante de integración, $g(y, z)$, es una función que solo depende de y y z .

A su vez, f debe cumplir $f_y = N$; por un lado, derivando (1.15) obtenemos $f_y(x, y, z) = g_y(y, z)$ y, por otro, $N(x, y, z) = ze^{yz}$. Igualando estas dos expresiones queda $g_y(y, z) = ze^{yz}$ y antiderivando con respecto a y se obtiene $g(y, z) = e^{yz} + h(z)$, donde la constante de integración es una función $h(z)$, función de z . Así, sustituyendo en (1.15),

$$f(x, y, z) = zx + e^{yz} + h(z).$$

Para determinar la función desconocida h igualamos $f_z = P$, obteniendo $x + ye^{yz} + h'(z) = x + ye^{yz} + 1$, de donde $h'(z) = 1$, es decir, $h(z) = z + k$. Así se obtiene la familia de funciones potenciales

$$f(x, y, z) = xz + e^{yz} + z + k;$$

un valor fijo de k , por ejemplo $k = 0$, provee **una** función potencial, como $f(x, y, z) = xz + e^{yz} + z$.

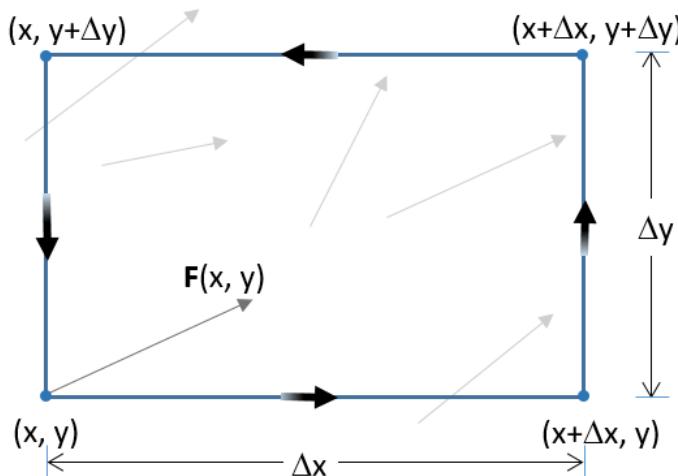
1.3.2. Interpretación del rotacional y de la divergencia de un campo vectorial

Interpretación del rotacional de un campo vectorial

Para dar una interpretación del rotacional, analizamos primero el caso de un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . En este caso estudiamos la **componente k del rotacional** asociada al campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ dado que, como ya mencionamos, el rotacional solo se define para campos vectoriales en \mathbb{R}^3 . Definiremos la *densidad de circulación* del campo vectorial \mathbf{F} en (x, y) , que se relaciona con la interpretación del rotacional de \mathbf{F} .

Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas, definido en una región abierta y conexa; supóngase que \mathbf{F} representa la velocidad en cada punto de un fluido; sea $P(x, y)$ un punto en el dominio de \mathbf{F} ; sea C una curva cerrada incluida en el dominio de \mathbf{F} , positivamente orientada, suave por partes, con un vértice en P y formada por la unión de cuatro segmentos consecutivos, paralelos a los ejes coordenados, es decir que forma un rectángulo cuyos otros vértices son $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ y $(x, y + \Delta y)$ y supóngase que Δx y Δy son suficientemente pequeños para que todo ese rectángulo esté incluido en el dominio de \mathbf{F} .

La circulación de \mathbf{F} a lo largo de C se puede calcular sumando las integrales de línea de \mathbf{F} a lo largo de cada uno de los segmentos que forman el rectángulo.



Así,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x+\Delta x, y)}^{(x+\Delta x, y+\Delta y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x+\Delta x, y+\Delta y)}^{(x, y+\Delta y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x, y+\Delta y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Si Δx y Δy son pequeños y \mathbf{F} es continuo en C , el valor de \mathbf{F} es casi constante a lo largo de cada uno de los segmentos que forman a C . Entonces la integral de línea a lo largo de cada segmento es aproximadamente igual al valor de \mathbf{F} evaluado en algún punto del segmento, multiplicado escalarmente por el vector desplazamiento. Entonces, para simplificar las cuentas elegimos en cada segmento el punto más próximo a (x, y) y obtenemos la aproximación

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j}\Delta y + \mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i})\Delta x + \mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta y. \quad (1.16)$$

Resolvemos cada uno de los productos escalares en el segundo miembro de (1.16). Por ejemplo el primer término, $\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\Delta x$, se convierte en

$$(M(x, y), N(x, y)) \cdot (1, 0)\Delta x = M(x, y)\Delta x.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &\approx M(x, y)\Delta x + N(x + \Delta x, y)\Delta y - M(x, y + \Delta y)\Delta x - N(x, y)\Delta y \\ &= M(x, y)\Delta x - M(x, y + \Delta y)\Delta x + N(x + \Delta x, y)\Delta y - N(x, y)\Delta y. \end{aligned} \quad (1.17)$$

De la definición de derivada parcial de M con respecto a y en (x, y) ,

$$M_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{M(x, y + \Delta y) - M(x, y)}{\Delta y},$$

para Δy pequeño, tenemos la aproximación

$$M(x, y + \Delta y) - M(x, y) \approx M_y(x, y)\Delta y,$$

y así

$$(M(x, y + \Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx M_y(x, y)\Delta x\Delta y. \quad (1.18)$$

Similarmente, de la definición de derivada parcial de N con respecto a x en (x, y) ,

$$(N(x + \Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx N_x(x, y)\Delta x\Delta y. \quad (1.19)$$

Sustituyendo (1.18) y (1.19) en (1.17),

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx (N_x(x, y) - M_y(x, y))\Delta x\Delta y,$$

que nos muestra que la circulación de \mathbf{F} a lo largo de un rectángulo muy pequeño es aproximadamente $N_x(x, y) - M_y(x, y)$ multiplicada por el área del rectángulo. En virtud de ello, se define la *densidad*

de circulación de \mathbf{F} en el punto (x, y) por

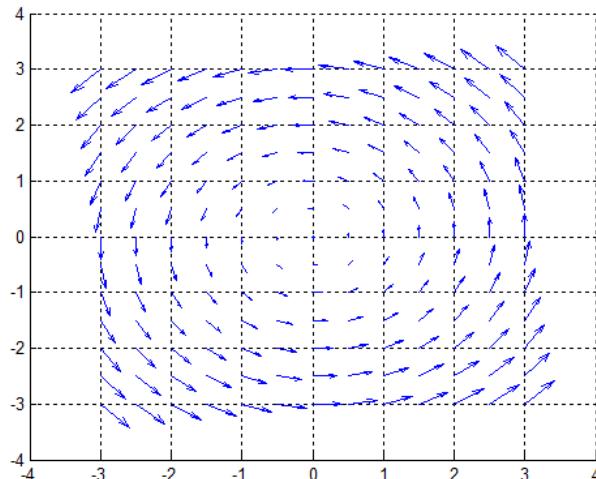
$$\frac{\text{circulación a lo largo del rectángulo}}{\text{área del rectángulo}} \approx N_x(x, y) - M_y(x, y).$$

Podemos apreciar que la componente k del rotacional de \mathbf{F} en (x, y) , en el caso de un campo vectorial definido en \mathbb{R}^2 , da la *densidad de circulación* del campo vectorial en el punto (x, y) . Por ello podemos interpretar la componente k del rotacional del campo vectorial \mathbf{F} en (x, y) como la *tendencia a arremolinarse* del fluido alrededor de dicho punto.

Observación 1.3.7. *No se debe confundir la componente \mathbf{k} del rotacional en un punto P con el valor del campo ni con la dirección de la línea de flujo del campo en P . En un campo de velocidades de un fluido las líneas de flujo indican la trayectoria que seguiría una partícula en ese fluido, mientras que el rotacional (la componente k del rotacional si estamos en \mathbb{R}^2) indica la tendencia de esa partícula a rotar sobre sí misma (mientras se traslada siguiendo la línea de flujo). En particular, si el rotacional de un campo vectorial es nulo, el campo se llama **irrotacional**.*

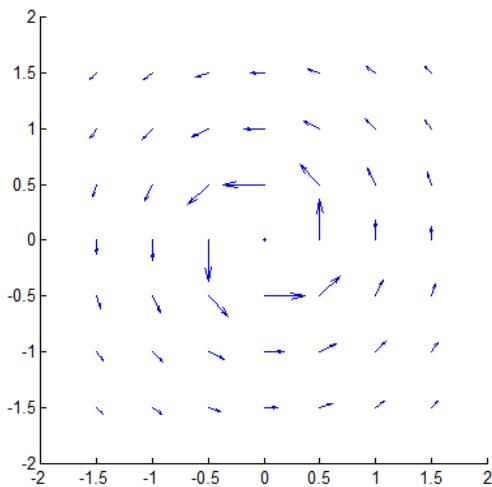
Ejemplos

Ejemplo 1.3.8. (Rotación uniforme.) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (-cy, cx)$ un campo de velocidades de un fluido. Véase el gráfico siguiente para el caso $c > 0$.



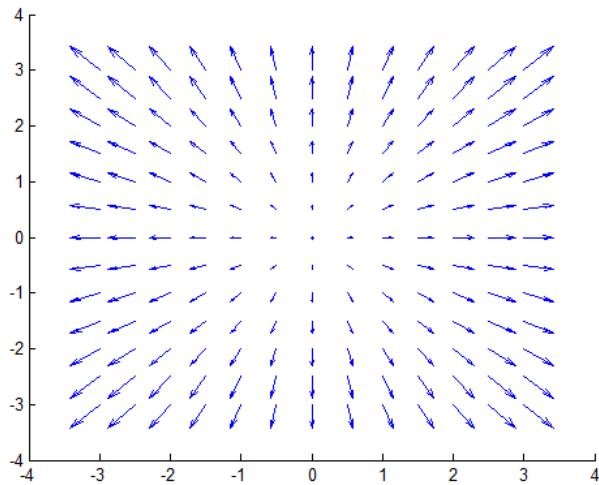
En este caso la componente k del rotacional es $2c$. Aunque las líneas de flujo indican que un cuerpo muy pequeño en ese fluido se movería a lo largo de una circunferencia centrada en el origen, la componente k del rotacional distinta de cero indica que el cuerpo tendería a rotar (en sentido antihorario si $c > 0$). Además, en virtud del Teorema 1.3.4, se aprecia que este campo vectorial no es conservativo en \mathbb{R}^2 . También se puede verificar sin mucha dificultad que el flujo de \mathbf{F} a lo largo de cualquier circunferencia centrada en el origen y radio positivo (positivamente orientada) es no nulo, lo cual según el Teorema 1.2.20 no hace más que confirmar que este campo vectorial no es conservativo en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3.9. (Remolino.) Sea $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$ un campo de velocidades de un fluido. Véase el gráfico siguiente.



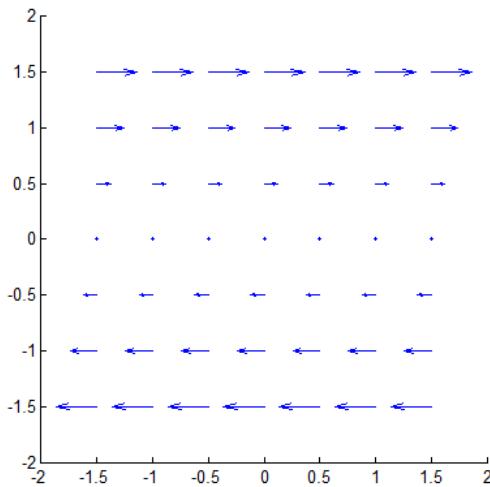
En este caso la componente k del rotacional es 0, con lo cual el campo vectorial es **irrotacional**. Al igual que en el ejemplo anterior, las líneas de flujo indican que un cuerpo muy pequeño en ese fluido se mueve a lo largo de una circunferencia centrada en el origen. Pero ahora la componente k del rotacional es cero y eso indica que el cuerpo tenderá a **no** rotar. Con respecto a la propiedad de ser conservativo este campo vectorial en su dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, no podemos sacar conclusiones a priori ya que el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo y no se puede aplicar el Criterio de componentes para campos conservativos (Teorema 1.3.4). En este ejemplo, como en el anterior, se puede verificar que el flujo de \mathbf{F} a lo largo de cualquier circunferencia centrada en el origen y radio positivo (positivamente orientada) es no nulo, con lo que, igual que antes, el Teorema 1.2.20 afirma que este campo vectorial no es conservativo en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3.10. (Expansión uniforme.) Sea $\mathbf{F}(x,y) = (cx, cy)$. El gráfico siguiente ilustra el caso $c > 0$.



Se aprecia que las líneas de flujo son semirrectas que parten desde el origen de coordenadas. La componente k del rotacional es 0, con lo cual el campo vectorial es **irrotacional** y un cuerpo pequeño tiende a no rotar cuando se halla en este fluido. Además notamos que se trata de un campo vectorial conservativo en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3.11. (Flujo cortante.) Sea $\mathbf{F}(x,y) = (y, 0)$, representado en el gráfico siguiente.



La componente k del rotacional es -1 . En este caso, aunque las líneas de flujo son rectas paralelas al eje x , un cuerpo pequeño tiende a rotar en sentido horario cuando se halla en este fluido (cualquiera sea la posición que ocupe en el plano). Por otra parte, concluimos que este campo vectorial no es conservativo en \mathbb{R}^2 .

Una interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3 se dará después de haber visto el teorema de Stokes.

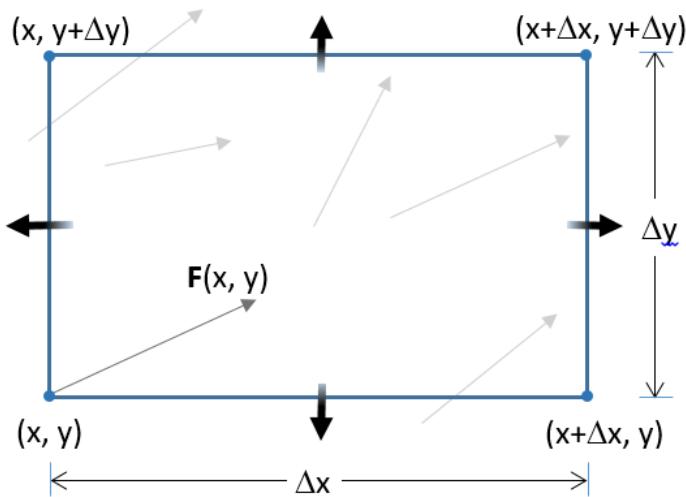
Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

La divergencia de un campo vectorial tiene una interpretación física importante. Si suponemos que \mathbf{F} es un campo de velocidades de un fluido, entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}$ representa la tasa de expansión por unidad de volumen (o de área, en \mathbb{R}^2) bajo el flujo del fluido. Así, si $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$, el fluido está en *compresión*; si $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$, el fluido está en *expansión*; finalmente, si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, el campo vectorial se llama **solenoidal** y decimos que el fluido es *incompresible*.

Para sustenttar esta interpretación de la divergencia de un campo vectorial, igual que con el rotacional, analizamos primero el caso de un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . En este caso estudiamos la **divergencia** del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$. Definiremos la *densidad de flujo* del campo vectorial \mathbf{F} en (x, y) , que se relaciona con la interpretación de la divergencia de \mathbf{F} .

Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas, definido en una región abierta y conexa; supóngase que \mathbf{F} representa la velocidad de un fluido en cada punto del plano; sea $P(x, y)$ un punto en el dominio de \mathbf{F} ; igual que antes, consideramos una curva cerrada C incluida en el dominio de \mathbf{F} , positivamente orientada, suave por partes, con un vértice en P y formada por la unión de cuatro segmentos consecutivos, paralelos a los ejes coordenados, es decir que forma un rectángulo cuyos otros vértices son $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ y $(x, y + \Delta y)$ y suponemos que Δx y Δy son suficientemente pequeños para que todo ese rectángulo esté incluido en el dominio de \mathbf{F} .

Para conocer la *densidad de flujo* del campo vectorial \mathbf{F} en (x, y) , calculamos *el flujo hacia fuera*, es decir, la integral de línea de *la componente normal hacia fuera* de \mathbf{F} a través de la curva pequeña C alrededor de (x, y) . El flujo hacia fuera de \mathbf{F} a través de C se puede calcular sumando las integrales de línea de la componente normal de \mathbf{F} a través de cada uno de los segmentos que forman el rectángulo.



Así,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{(x+\Delta x, y)}^{(x+\Delta x, y+\Delta y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{(x+\Delta x, y+\Delta y)}^{(x, y+\Delta y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{(x, y+\Delta y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Si Δx y Δy son pequeños y \mathbf{F} es continuo en C , el valor de \mathbf{F} es casi constante a lo largo de cada uno de los segmentos que forman a C . Entonces la integral de línea a lo largo de cada segmento se aproxima al valor de \mathbf{F} evaluado en algún punto del segmento multiplicado escalarmente por el vector normal unitario en ese punto y multiplicado por la longitud del segmento. Es decir,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \approx \mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta x + \mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i}\Delta y + \mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j}\Delta x + \mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{i})\Delta y, \quad (1.20)$$

donde en cada segmento hemos elegido el punto más próximo a (x, y) , para simplificar las cuentas (ya habíamos establecido que, por continuidad, cualquier punto en el segmento daría una buena aproximación). Resolvemos cada uno de los productos escalares en el segundo miembro de (1.20). Por ejemplo el primer término, $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta x$, se convierte en

$$(M(x, y), N(x, y)) \cdot (0, -1)\Delta x = -N(x, y)\Delta x.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &\approx -N(x, y)\Delta x + M(x + \Delta x, y)\Delta y + N(x, y + \Delta y)\Delta x - M(x, y)\Delta y \\ &= -N(x, y)\Delta x + N(x, y + \Delta y)\Delta x + M(x + \Delta x, y)\Delta y - M(x, y)\Delta y. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Igual que antes, de la definición de derivada parcial de N con respecto a y en (x, y) ,

$$N_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{N(x, y + \Delta y) - N(x, y)}{\Delta y},$$

y tenemos, para Δy pequeño, la aproximación

$$N(x, y + \Delta y) - N(x, y) \approx N_y(x, y)\Delta y$$

con lo cual

$$(N(x, y + \Delta y) - N(x, y))\Delta x \approx N_y(x, y)\Delta x\Delta y. \quad (1.22)$$

Similarmente, de la definición de derivada parcial de M con respecto a x en (x, y) ,

$$(M(x + \Delta x, y) - M(x, y))\Delta y \approx M_x(x, y)\Delta x\Delta y. \quad (1.23)$$

Sustituyendo (1.22) y (1.23) en (1.21),

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \approx (M_x(x, y) + N_y(x, y))\Delta x\Delta y,$$

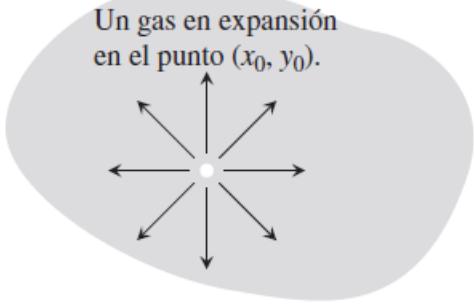
que nos muestra que el flujo de \mathbf{F} a través de un rectángulo muy pequeño es aproximadamente $M_x(x, y) + N_y(x, y)$ multiplicada por el área del rectángulo. En virtud de ello, se define la *densidad de flujo* de \mathbf{F} en el punto (x, y) por

$$\frac{\text{flujo a través del rectángulo}}{\text{área del rectángulo}} \approx M_x(x, y) + N_y(x, y).$$

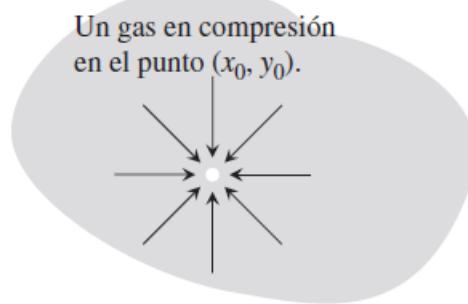
Así se ve que la divergencia de \mathbf{F} en (x, y) da la *densidad de flujo* del campo vectorial en el punto (x, y) . Por ello podemos interpretar la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} en (x, y) como la *tendencia a alejarse del punto* (x, y) del fluido. Esta interpretación se mantiene en el caso de tratarse de un campo vectorial definido en \mathbb{R}^n .

Un punto del dominio de \mathbf{F} en el que la divergencia es positiva se llama **fuente** y un punto en el que la divergencia es negativa se llama **sumidero**.

Fuente: $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) > 0$



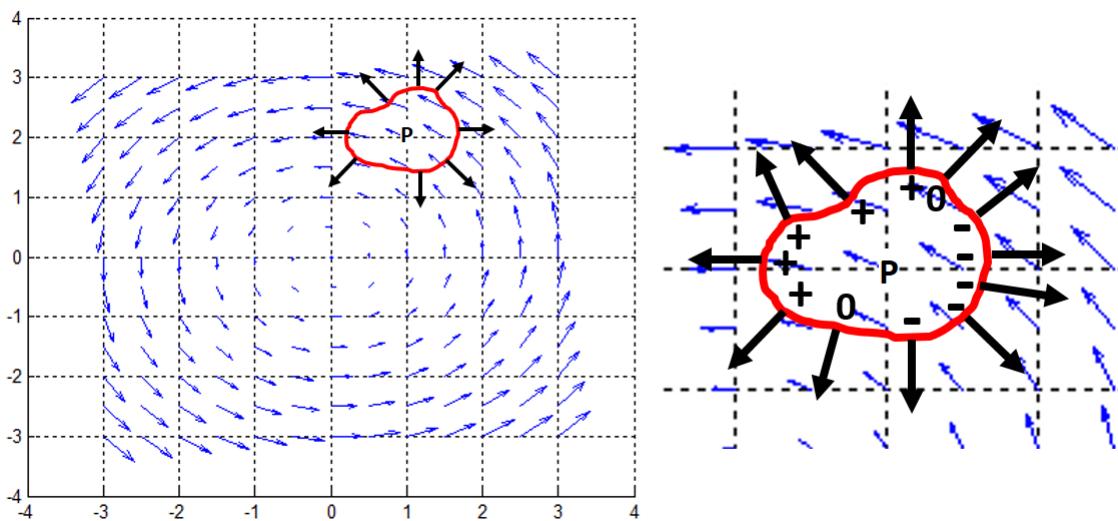
Sumidero: $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0) < 0$



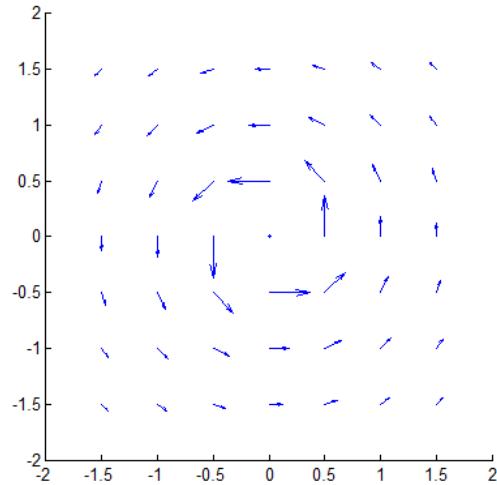
Ejemplos

Analicemos la divergencia de los mismos ejemplos para los cuales estudiamos la componente k del rotacional.

Ejemplo 1.3.12. (Rotación uniforme.) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (-cy, cx)$ un campo de velocidades de un fluido. En este caso la divergencia es 0 en todos los puntos, es decir que este campo vectorial es **campo solenoideal** y, si por tratarse de un campo de velocidades de un fluido, el fluido es incompresible. La interpretación de esta información es que, en cualquier punto P , el flujo de \mathbf{F} a través hacia fuera de cualquier curva pequeña alrededor de P es cero, es decir que el flujo entrante es igual al flujo saliente. Véase el gráfico y el detalle, a la derecha. En el detalle se puede ver algunos vectores normales unitarios a la curva y el signo que tendría el producto punto del vector normal con el campo vectorial en ese punto. El módulo depende del ángulo que forman el campo vectorial y el vector normal en cada punto. La divergencia nula en P indica que la integral de dichos productos escalares a lo largo de C es nula.

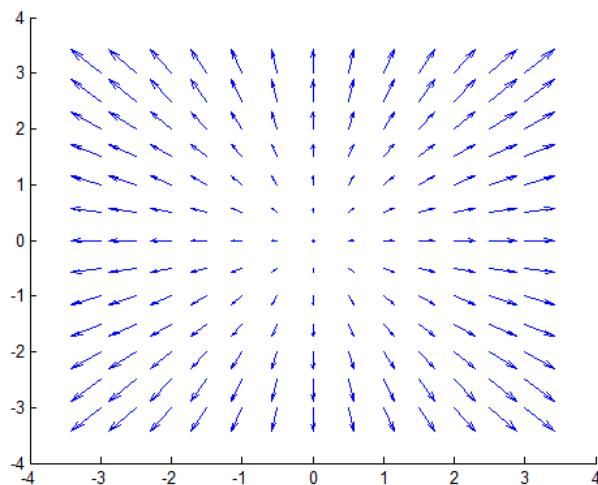


Ejemplo 1.3.13. (Remolino.) Sea $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ un campo de velocidades de un fluido. Véase el gráfico siguiente.



En este caso la divergencia es 0 y, al igual que en el ejemplo anterior, se trata de un campo vectorial solenoidal y, al ser un campo de velocidades de un fluido, el fluido es incompresible.

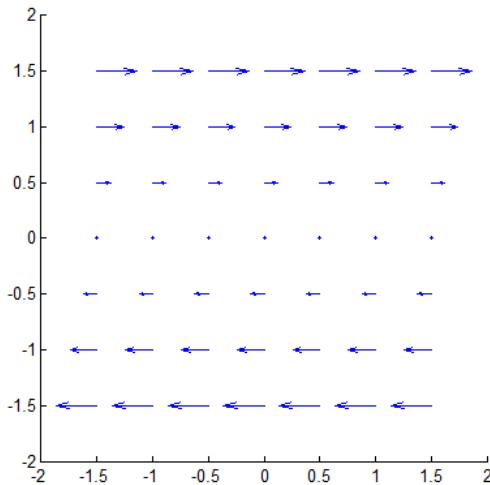
Ejemplo 1.3.14. (Expansión uniforme.) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (cx, cy)$, $c > 0$. El gráfico siguiente ilustra este caso.



La divergencia de este campo vectorial es $2c > 0$. El fluido está sujeto a una expansión uniforme.

Notemos que si fuera $c < 0$, la divergencia sería $2c < 0$ y diríamos que el fluido está en compresión uniforme.

Ejemplo 1.3.15. (Flujo cortante.) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$, representado en el gráfico siguiente.



La divergencia es 0. Se trata de un campo vectorial solenoideal.

1.3.3. Propiedades

Teorema 1.3.16.

1. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$.
2. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$.
3. Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas de segundo orden continuas, entonces la divergencia del rotacional de \mathbf{F} es cero: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.
4. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.
5. Si f es un campo escalar con derivadas de segundo orden continuas, entonces el rotacional del gradiente de f es el vector nulo: $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.
6. $\operatorname{rot} \nabla f = \mathbf{0}$.

La demostración de estas propiedades es sencilla, por lo cual las se deja como ejercicio.

1.3.4. Laplaciano

El Laplaciano de un campo escalar y el de un campo vectorial, son conceptos de importancia en física.

Definición 1.3.17. El Laplaciano de un campo escalar f se anota Δf y se define por la divergencia del gradiente de f :

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

También se usa la notación $\Delta f = \nabla^2 f$.

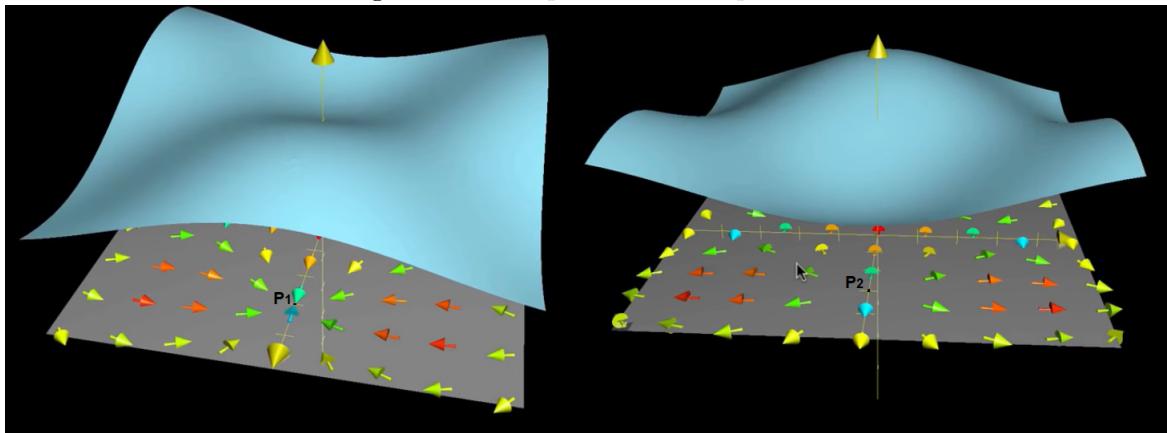
El Laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$ se anota $\Delta \mathbf{F}$ o $\nabla^2 \mathbf{F}$ y es el vector de los Laplacianos de las funciones componentes de \mathbf{F} :

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 M, \nabla^2 N, \nabla^2 P).$$

Una interpretación del Laplaciano de un campo escalar se puede encontrar en el video de Khan Academy cuyo link es

<https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/laplacian/v/laplacian-intuition>. Transcribimos en la siguiente figura algunas imágenes tomadas de dicho video. En ellas aparece el gráfico de una función de dos variables, f , y se puede ver el vector gradiente de f representado en el dominio de f , en el plano xy ; los colores de estos vectores representan sus módulos (de menor a mayor: celeste, verde, amarillo, naranja, rojo). En el caso de un punto P_1 en que la función f presenta un máximo local, se puede apreciar cómo la divergencia del campo vectorial ∇f es negativa en P_1 ; por otra parte, si la función f presenta un mínimo local en P_2 , la divergencia de ∇f es positiva en P_2 .

Figura 1.1: Interpretación del Laplaciano



Si $f(P_1)$ es máximo, $\Delta f(P_1) < 0$; si $f(P_2)$ es mínimo, $\Delta f(P_2) > 0$.

Propiedad:

1. El Laplaciano de un campo escalar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cumple:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{x_n^2}.$$

2. El Laplaciano de un campo vectorial definido en \mathbb{R}^3 cumple:

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Dejamos la demostración como ejercicio.

1.3.5. Formas diferenciales exactas

Definición 1.3.18. Una *forma diferencial* es una expresión de la forma

$$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz,$$

donde M , N y P son funciones definidas en un dominio D .

Una forma diferencial es **exacta** cuando es la diferencial de un campo escalar f en D .

Teorema 1.3.19 (Condición necesaria y suficiente para formas diferenciales exactas). Una forma diferencial $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$, donde M , N y P son funciones continuas definidas en una región abierta, conexa y simplemente conexa D , es una forma diferencial exacta si y sólo si

$$P_y = N_z, \quad M_z = P_x, \quad N_x = M_y,$$

esto es, si y solo si el rotacional de $\mathbf{F} = (M, N, P)$ es el vector nulo en D .

Demostración.

Probamos las dos implicaciones.

\Rightarrow) Si $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ es una forma diferencial exacta, entonces existe un campo escalar f definido en D tal que

$$M = f_x; \quad N = f_y; \quad P = f_z;$$

es decir que el campo vectorial dado por $\mathbf{F} = (M, N, P)$ es el gradiente de f :

$$(M, N, P) = \nabla f.$$

Luego, por la primera parte del Teorema 1.2.18, $\mathbf{F} = (M, N, P)$ es conservativo en D . Entonces, según el criterio de componentes para campos conservativos (Teorema 1.3.4), el rotacional de \mathbf{F} es nulo, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, es decir,

$$P_y = N_z, \quad M_z = P_x, \quad N_x = M_y.$$

\Leftarrow) Por otra parte, si $P_y = N_z$, $M_z = P_x$, $N_x = M_y$, es decir si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, y la región D es abierta, conexa y simplemente conexa, entonces \mathbf{F} es conservativo en D , según la parte (ii) del Teorema 1.3.4, y existe una función potencial f para \mathbf{F} , definida en D , según el Teorema 1.2.18. Por ser una función potencial para \mathbf{F} (Definición 1.2.13), f cumple $\nabla f = \mathbf{F}$, es decir

$$f_x = M, \quad f_y = N, \quad f_z = P,$$

y la forma diferencial $Mdx + Ndy + Pdz$ es exacta.

□

Ejemplo 1.3.20 (Ejemplo de aplicación de formas diferenciales exactas).

Si $M dx + N dy + P dz$ es una forma diferencial exacta, la integral de línea $\int_C M dx + N dy + P dz$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$\int_C M dx + N dy + P dz = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A),$$

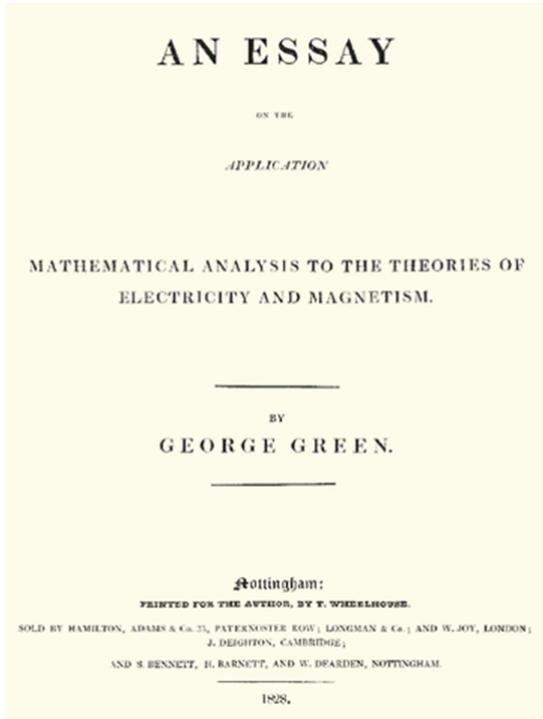
ya que $\mathbf{F} = \nabla f$ es un campo vectorial conservativo y se puede aplicar el Teorema Fundamental de Integrales de Línea (Teorema 1.2.17). Sólo resta hallar la función potencial de \mathbf{F} , f , y evaluarla en los valores correspondientes.

También nos referiremos a formas diferenciales exactas más adelante, cuando estudiemos ecuaciones diferenciales.

1.4. Teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple C y una integral doble sobre la región plana limitada por C . Este teorema recibe su nombre del científico británico George Green, y resulta ser un caso especial del más general teorema de Stokes. Aplicaciones del teorema de Green aparecen en la publicación de este autor de 1828 llamada “Un análisis de las aplicaciones del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo” (Figura 1.2).

Figura 1.2: Publicación de Green.



“Un análisis de las aplicaciones del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo” (1828).

Estudiamos dos formas del Teorema de Green: la forma tangencial y la forma normal. Probamos la primera (probamos un caso particular y luego analizamos cómo se puede extender la aplicación del Teorema a casos más generales) y luego probamos que si la forma tangencial vale, entonces vale la forma normal del Teorema.

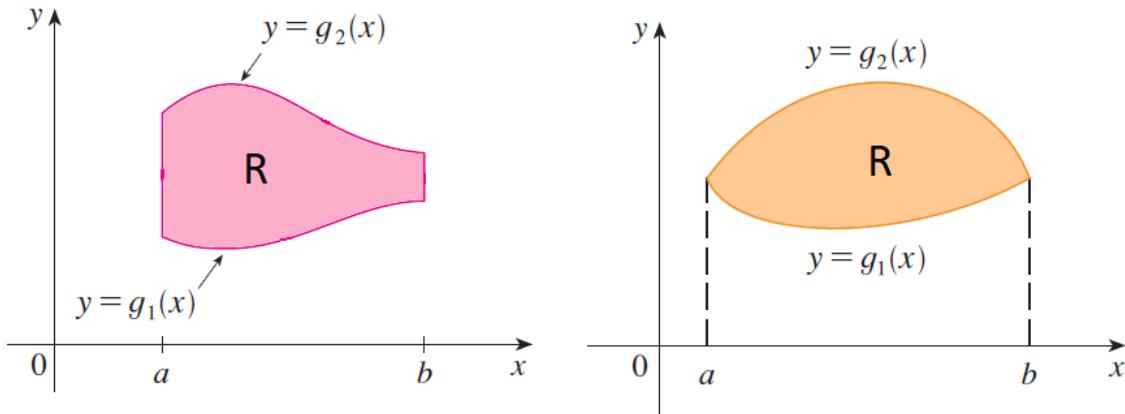
1.4.1. Regiones simples

El caso particular que probaremos es aquel en que la región encerrada por la curva es *simple*. Para definir una región simple, debemos primero comprender qué es una región plana de tipo 1 y qué es una región plana de tipo 2. Una región plana R es de **tipo 1** cuando se puede describir de la siguiente manera:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

para funciones continuas g_1 y g_2 definidas en $[a, b]$. La figura 1.3 muestra ejemplos de regiones tipo 1.

Figura 1.3: Regiones de tipo 1.

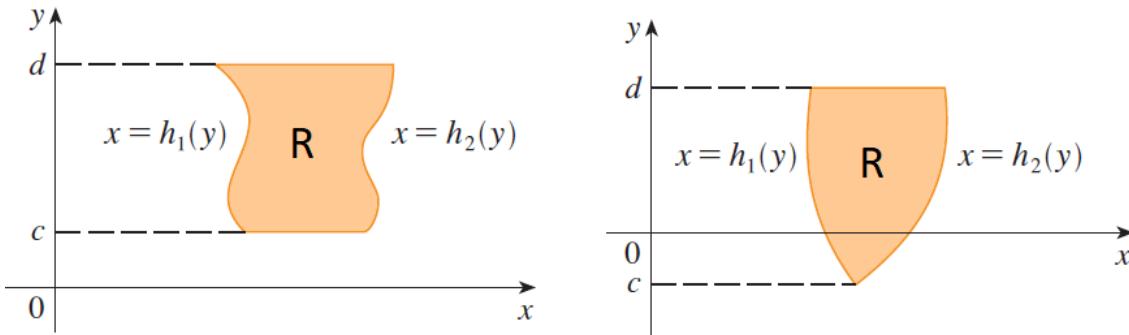


Una región R es de **tipo 2** cuando se puede describir como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

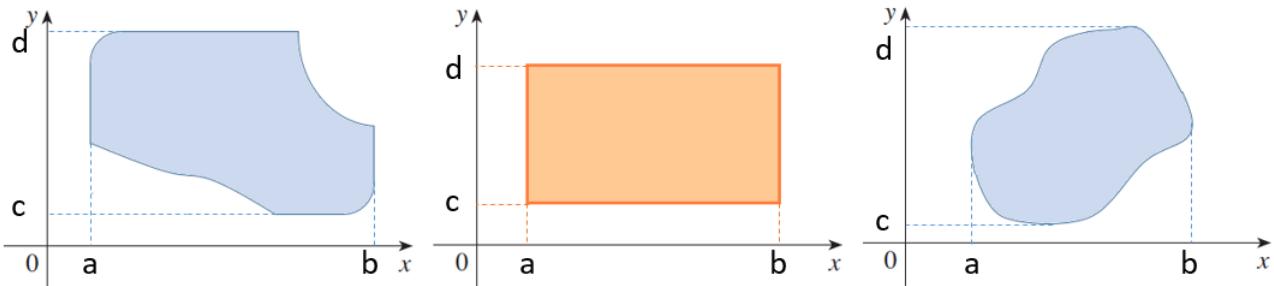
para funciones continuas h_1 y h_2 definidas en $[c, d]$. La figura 1.4 muestra ejemplos de regiones de tipo 2.

Figura 1.4: Regiones de tipo 2.



Una región que es a la vez de tipo 1 y de tipo 2 se llama **región simple**. La figura 1.5 muestra ejemplos de regiones simples.

Figura 1.5: Regiones simples

**Teorema 1.4.1 (Forma tangencial del Teorema de Green^a).**

Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada, que encierra una región D en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial donde M y N tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contiene a D . Entonces la circulación en sentido antihorario de \mathbf{F} alrededor de C es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.24)$$

^aSe puede ver una prueba de este Teorema en <https://youtu.be/Eacngk1Mp34>

Demostración. Se probará el caso especial en que la región D encerrada por la curva C es simple, es decir que se puede ver a la vez como una región de tipo 1 y de tipo 2.

Recordando que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \oint_C M dx + N dy$ ((1.4), página 10), el Teorema de Green quedará demostrado si se prueba que:

$$\int_C M(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dA \quad (1.25)$$

y

$$\int_C N(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dA \quad (1.26)$$

Para demostrar la ecuación (1.25) se usará el hecho de que la región D es una región de tipo 1: es decir, que D es una región comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de x , de la siguiente manera:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

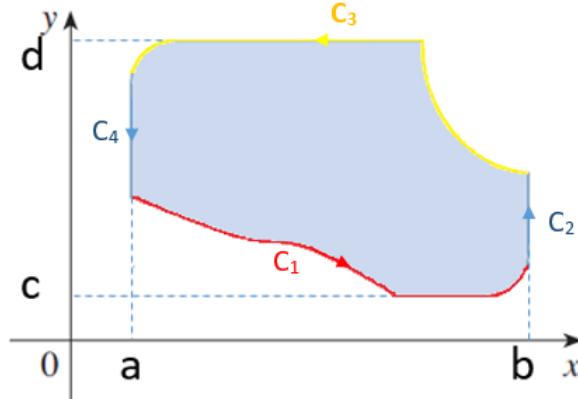
donde g_1 y g_2 son funciones continuas.

De esta forma, el lado derecho de la ecuación (1.25) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))] dx \quad (\text{T. fundamental del cálculo.}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Para escribir el lado izquierdo de la ecuación (1.25), sabiendo que D es de tipo 1, se supone el caso más general posible para la curva C que encierra a la región D y se descompone la curva C en cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 , tal como se muestra en la figura siguiente (en algunos casos podría ocurrir

que alguna de estas cuatro curvas solo fuera un punto):



Así:

$$\int_C M(x, y) dx = \int_{C_1} M(x, y) dx + \int_{C_2} M(x, y) dx + \int_{C_3} M(x, y) dx + \int_{C_4} M(x, y) dx. \quad (1.28)$$

Parametrizamos las curvas interviniéntes; dado que es más fácil parametrizar $-C_3$ y $-C_4$ trabajamos con estas últimas en lugar de las curvas C_3 y C_4 , de esta manera:

$$\begin{aligned} C_1 &: \mathbf{r}_1(t) = (t, g_1(t)), \quad (a \leq t \leq b) \\ C_2 &: \mathbf{r}_2(t) = (b, t), \quad (c_1 \leq t \leq d_1) \\ -C_3 &: \mathbf{r}_3(t) = (t, g_2(t)), \quad (a \leq t \leq b) \\ -C_4 &: \mathbf{r}_4(t) = (a, t), \quad (c_2 \leq t \leq d_2) \end{aligned}$$

Entonces, aplicando la definición de integral de línea con respecto a x en (1.28), tenemos

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y) dx &= \int_{C_1} M(x, y) dx + \int_{C_2} M(x, y) dx - \int_{-C_3} M(x, y) dx - \int_{-C_4} M(x, y) dx \\ &= \int_a^b M(t, g_1(t)) 1 dt + \int_{c_1}^{d_1} M(b, t) 0 dt - \int_a^b M(t, g_2(t)) 1 dt - \int_{c_2}^{d_2} M(a, t) 0 dt \\ &= \int_a^b M(t, g_1(t)) dt - \int_a^b M(t, g_2(t)) dt \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x)) dx - \int_a^b M(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))] dx \end{aligned} \quad (1.29)$$

Los resultados (1.27) y (1.29) prueban la igualdad dada por la ecuación (1.25).

La ecuación (1.26) se puede probar análogamente, expresando D como una región de tipo 2:

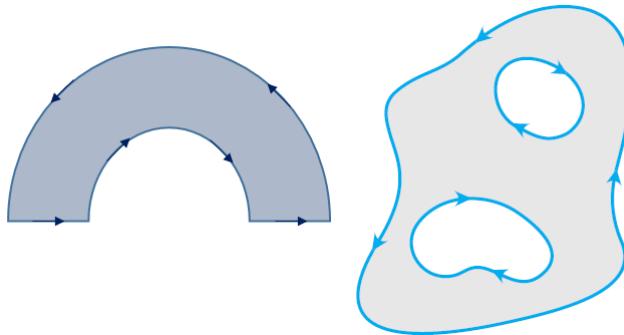
$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son funciones continuas. Se deja los detalles al estudiante.

De esta manera queda probado el Teorema. \square

1.4.2. Teorema de Green en regiones más generales

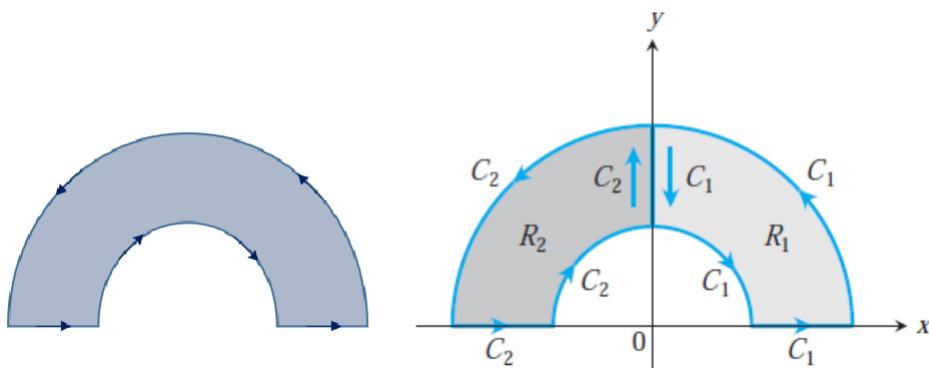
El teorema de Green también se aplica a otras regiones más generales, como las que se ilustran en la siguiente figura, pero aquí no se hará la demostración.



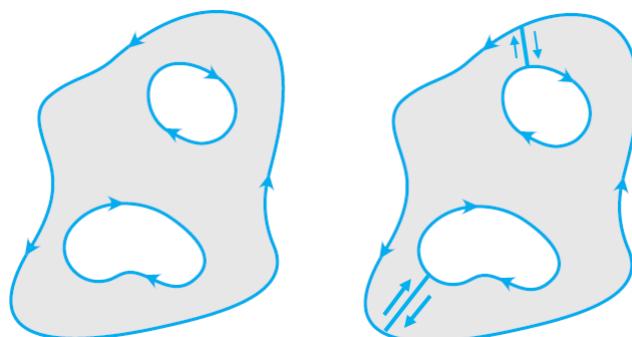
Preste especial atención a la región de la derecha de la figura, que no es simplemente conexa. Esto implica que tiene una curva frontera “dentro”. ¿Qué significa en este caso “positivamente orientada”? Se da a las curvas una orientación tal que la región R está siempre del lado izquierdo cuando las curvas son recorridas en las direcciones que se indican. Eso significa, en casos como este, que las curvas en la frontera están positivamente orientadas. Con esta convención, el teorema de Green es válido para regiones que no son simplemente conexas.

Una explicación de por qué sigue siendo válido el Teorema de Green en regiones como las anteriores y de por qué se debe orientar las curvas de esa manera, es la siguiente.

Dada una región que se puede descomponer en la unión disjunta de regiones simples, se puede aplicar el Teorema de Green a cada una de las regiones simples y luego sumar. Sin embargo en las “uniones” estaremos sumando dos integrales de línea en direcciones contrarias y la suma será nula. Véase la imagen presentada a continuación.



Para regiones más generales, la idea es la misma, como muestra la figura siguiente.



De esta manera se puede comprender por qué la orientación de las curvas debe hacerse de esa manera y cómo es que se puede aplicar el Teorema de Green a regiones más generales.

Finalmente hay que observar que, así como enunciamos el teorema de Green para el plano xy , también se aplica para cualquier región plana R contenida en algún plano en el espacio, limitada por una curva C .

1.4.3. Otra forma del Teorema de Green

Así como la forma tangencial del Teorema de Green es un caso particular del Teorema de Stokes (que veremos más adelante, en la Sección 1.7), el Teorema de Green también se puede expresar de forma normal, para obtener un caso particular del Teorema de la Divergencia de Gauss (que también veremos en la Sección 1.7).

Teorema 1.4.2. *Sea C una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada, que encierra una región D en el plano. Sea $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo vectorial tal que M y N tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contiene a D . Entonces, el flujo de \mathbf{F} a través hacia fuera de C es igual a la doble integral de la divergencia de \mathbf{F} sobre la región D encerrada por C :*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy.$$

Demostración. Para demostrar esta forma del Teorema Green, dado que hemos probado la anterior, vamos a probar que, si es cierta la forma tangencial del teorema, también vale la forma normal del mismo.

Repetiendo el procedimiento que ya usamos en la página 10, expresamos el vector normal unitario **hacia fuera** en cada punto de la curva C , positivamente orientada, como el producto vectorial entre el vector tangente unitario \mathbf{T} y el versor $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ (haciendo la extensión natural de los vectores a \mathbb{R}^3). Entonces aplicamos propiedad del producto mixto de vectores, para obtener:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} ds = \oint_C \mathbf{T} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{F} ds = \oint_C \mathbf{k} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \oint_C (-N, M) \cdot \mathbf{T} ds.$$

Esta última es la integral de línea de la componente tangencial del campo vectorial, $\mathbf{G} = (-N, M)$, cuyas componentes tienen todas las propiedades necesarias para aplicar el Teorema de Green en su forma tangencial. Luego, según la forma tangencial del Teorema de Green aplicada al campo vectorial \mathbf{G} ,

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_D (M_x - (-N_y)) dA = \iint_D (M_x + N_y) dA,$$

y así, hemos probado que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D (M_x + N_y) dA.$$

□

1.4.4. Aplicación del Teorema de Green al cálculo de áreas

El área de una región plana se puede calcular mediante la fórmula $A = \iint_R 1 dA$. Si una curva cerrada simple positivamente orientada en el plano, C , y la región R que encierra satisfacen las

hipótesis del teorema de Green, el área de R ,

$$A = \iint_R 1 \, dA,$$

en virtud del Teorema de Green, se puede igualar a la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ (cuyas componentes deben tener derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contenga a R), siempre que $N_x - M_y = 1$. Por ejemplo si tomamos $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ se satisface esa condición. La condición $N_x - M_y = 1$ también se cumple si tomamos $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ o $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$. Hay más campos vectoriales $\mathbf{F} = (M, N)$ que cumplen $N_x - M_y = 1$: cualquiera de ellos nos llevará al resultado correcto, en tanto se satisfagan las hipótesis del teorema de Green. Así, por ejemplo, dado que por el Teorema de Green tenemos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy,$$

si se toma

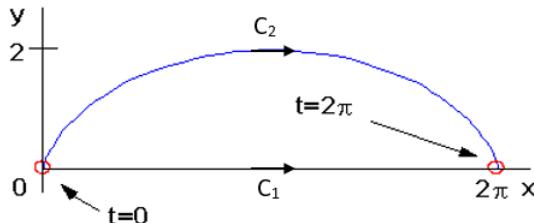
$$M(x, y) := -\frac{y}{2}, \quad N(x, y) := \frac{x}{2}, \quad \mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right)$$

entonces el área de la región R encerrada por la curva C es

$$A = \iint_R 1 \, dA = \iint_R (N_x - M_y) \, dx \, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C M \, dx + N \, dy = \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy.$$

Ejemplo 1.4.3. Determinar el área de la región encerrada por el arco de la cicloide dado por $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y el eje x .

Parametrizamos la curva C_1 que es la porción del eje x entre 0 y 2π : $\mathbf{s}(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Y observamos que la parametrización dada por \mathbf{r} recorre el arco de cicloide de izquierda a derecha; si llamamos a esta curva C_2 , vemos que para cerrar una curva simple necesitamos recorrer este arco en sentido contrario y llamamos a la curva recorrida de derecha a izquierda $-C_2$.



Recordando que $\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, planteamos

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) \, dt - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Eligiendo el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ y resolviendo las integrales que se van presentando,

tenemos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} (0, t) \cdot (1, 0) dt - \int_0^{2\pi} (0, t - \sin t) \cdot (1 - \cos t, \sin t) dt \\
 &= 0 - \int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin^2 t) dt \\
 &= - \left(-t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right) \\
 &= 3\pi.
 \end{aligned}$$

Luego el área buscada es $A = 3\pi$ unidades de área.

1.5. Superficies

Así como hemos estudiado curvas, sus parametrizaciones y sus longitudes, ahora presentamos superficies.

Superficies paramétricas

Hemos visto tres formas de definir curvas:

Forma *explícita*, en que la curva es el gráfico de una función de una variable: $y = f(x)$.

Forma *implícita*, en que la curva es una curva de nivel de una función de dos variables: $F(x, y) = 0$.

Forma *vectorial paramétrica*: la curva es el gráfico de una función de la forma $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$.

Para superficies hemos visto:

Forma *explícita*, en que la superficie es el gráfico de una función de dos variables: $z = f(x, y)$.

Forma *implícita*, en que la superficie es una superficie de nivel de una función de tres variables: $F(x, y, z) = 0$.

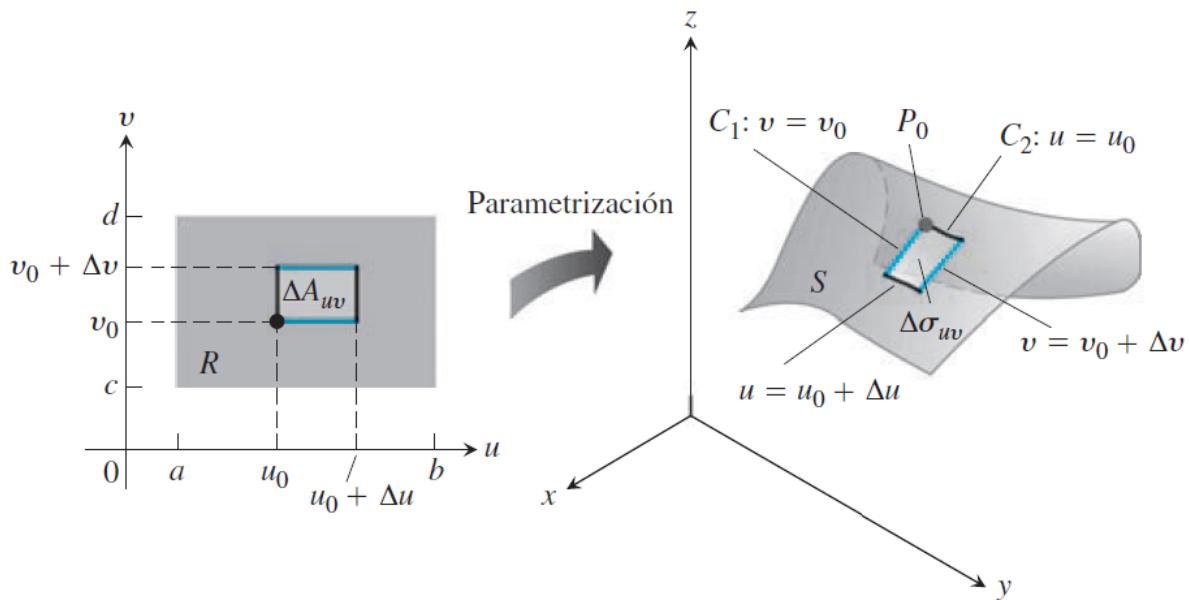
Ahora veremos la forma paramétrica para definir superficies.

Definición 1.5.1. Sea

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} : R \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (u, v) &\mapsto x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

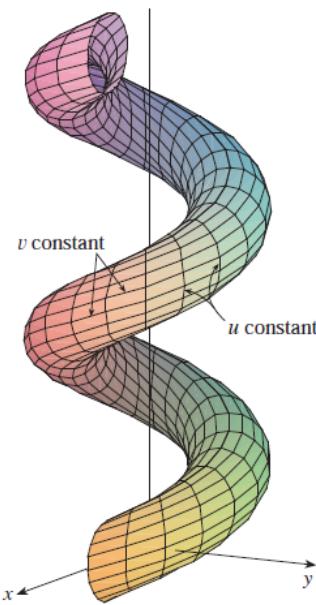
una función vectorial definida en una región R del plano uv , inyectiva en el interior de R . La superficie S es el rango de \mathbf{r} y decimos que está parametrizada por \mathbf{r} ; u y v son los parámetros y R es el dominio de los parámetros.

Se observa que, al tratarse de la imagen de una función que depende de *dos* parámetros, obtenemos en general una *superficie*.



La parametrización de superficies nos permite representar una amplísima gama de superficies. Por ejemplo la superficie paramétrica dada por $\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u, u + \operatorname{cos} v)$, $0 \leq u \leq 4\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ se puede ver en el gráfico siguiente:

Figura 1.6: Ejemplo de superficie paramétrica



$$\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u, u + \operatorname{cos} v), \quad 0 \leq u \leq 4\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

En la Definición 1.5.1 podemos apreciar que, dejando fijo un valor de uno de los parámetros, digamos $u = u_0$, y permitiendo que varíe el otro parámetro, v , obtenemos una función de un solo parámetro: $\mathbf{r}(u_0, v)$. Esta, como vimos antes, describe una curva paramétricamente. Tal curva se llama *curva reticular* de la superficie S . Lo mismo ocurre si se fija $v = v_0$ y se hace variar u , para obtener $\mathbf{r}(u, v_0)$. El análisis de las distintas curvas reticulares nos permite estudiar la superficie parametrizada por \mathbf{r} . En la Figura 1.6 se puede ver las curvas reticulares que son circunferencias y hélices, según se fije u o v .

Estas funciones \mathbf{r} se pueden derivar parcialmente por medio de los límites usuales:

Definición 1.5.2. Dada una función $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u(u, v) := \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} \quad (1.30)$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) := \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v}, \quad (1.31)$$

siempre que los límites existan.

Podemos observar que la derivada parcial de \mathbf{r} con respecto a u en (u_0, v_0) , $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$, es un vector tangente a la curva reticular que se obtiene fijando $v = v_0$ en el punto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$; similarmente, el vector $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ es un vector tangente a la curva reticular dada por $\mathbf{r}(u_0, v)$ en el punto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Introducimos ahora una fórmula de cálculo para estas derivadas parciales.

Teorema 1.5.3. Para una función \mathbf{r} como en la Definición 1.5.1, se tiene que \mathbf{r} es derivable parcialmente con respecto a u si y sólo si las funciones componentes x , y y z lo son y, en este caso,

$$\mathbf{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)); \quad (1.32)$$

similarmente, \mathbf{r} es derivable parcialmente con respecto a v si y sólo si las funciones componentes x , y y z lo son y, en este caso,

$$\mathbf{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)). \quad (1.33)$$

No la demostramos.

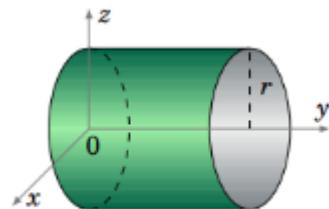
Veamos otros ejemplos:

- Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la esfera con centro en el origen y radio 3.

Solución: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos \theta \sin \phi, 3 \sin \theta \sin \phi, 3 \cos \phi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Observar que cuando $\phi = 0$, $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (0, 0, 3)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, es decir que \mathbf{r} no es inyectiva en la frontera del dominio de los parámetros.

- Dé una representación paramétrica de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ entre $y = 0$ y $y = 1$.



Solución: $\mathbf{r}(\theta, y) = (\frac{1}{2} \cos \theta, y, \frac{1}{2} \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

3. ¿Cómo parametrizamos una superficie S que es el gráfico de una función f de dos variables?

Solución: una forma sencilla de hacerlo es

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D(f).$$

Superficies suaves

Definición 1.5.4. Una superficie S parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in R$, es **suave** si \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ en R .^a

^aUna función vectorial, como \mathbf{r} , es diferenciable en su dominio R , si es diferenciable en un conjunto abierto $A \supset R$.

Cabe destacar que una superficie suave no tendrá puntas ni picos. Además, se puede observar que, aunque la definición de superficie suave nos recuerda a la de curva suave, en este caso pedimos más que la no anulación de las derivadas \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v : \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v no pueden ser paralelos (ya que, en ese caso, la superficie estaría colapsando en una curva).

Área de una superficie suave dada paramétricamente

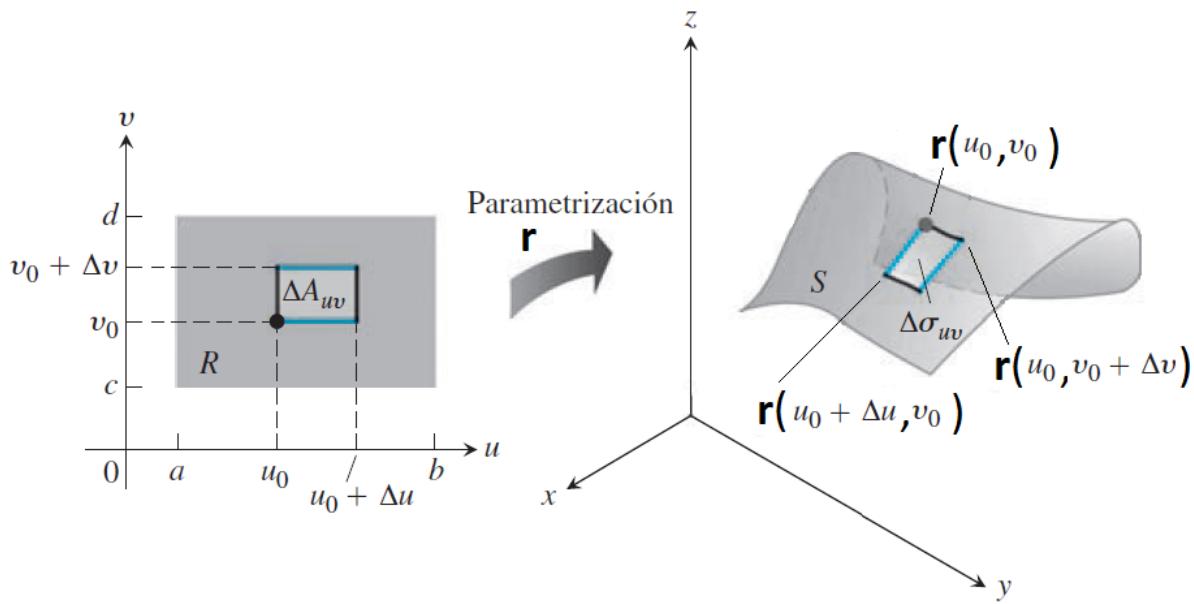
Nuestro objetivo es encontrar una fórmula para calcular el área de una superficie **suave** S , dada paramétricamente por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$. Por tratarse de una superficie suave, tenemos que los vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v no son paralelos ni nulos y determinan un paralelogramo tangente a S en cada punto $\mathbf{r}(u, v) \in S$, excepto, posiblemente, en los puntos $\mathbf{r}(u, v)$ con (u, v) en la frontera del dominio de los parámetros.

Definición 1.5.5 (Área de una superficie suave parametrizada). *Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde R es una región simple, se define el área de S por*

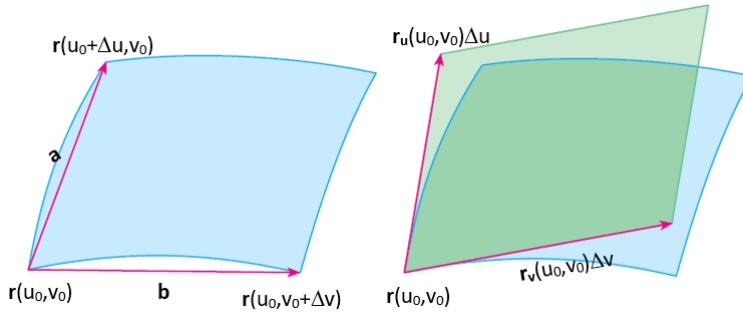
$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

Observación 1.5.6. Debe destacarse el hecho (que no probaremos) de que el área de una superficie es independiente de la parametrización que se haga de la misma.

Justificación de esta fórmula para el área: tomamos una partición de la región R y consideramos un subrectángulo genérico con vértices (u_0, v_0) , $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ y $(u_0, v_0 + \Delta v)$ y la imagen de éste por \mathbf{r} , que es una porción de la superficie S , digamos $\Delta\sigma_{uv}$.



Se puede aproximar el área de $\Delta\sigma_{uv}$ con el módulo del producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$, que son los vectores que van desde $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ hasta los dos “vértices” contiguos.



Pero a su vez, puede aproximarse cada uno de estos vectores: de la definición de derivada de \mathbf{r} con respecto a u tenemos, para un valor de $\Delta u > 0$ pequeño,

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u} \approx \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

de donde

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u.$$

Similarmente,

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v.$$

En consecuencia

$$\mathbf{a} \approx \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u \quad \text{y} \quad \mathbf{b} \approx \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v.$$

Entonces tenemos la fórmula para aproximar el área de una porción $\Delta\sigma_{uv}$ de la superficie S :

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \approx \|\mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v\| = \|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\| \Delta u \Delta v;$$

dado que el área de la superficie S se puede calcular sumando las áreas de todas las porciones $\Delta\sigma_{uv}$,

tenemos:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \| \mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j) \| \Delta u_i \Delta v_j$$

y, tomando límites,

$$A = \iint_R \| \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \| du dv.$$

Ejemplo 1.5.7. Plantee una integral para calcular el área de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = 1$, parametrizada por $\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 1$.

$$A = \iint_R | \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v | du dv$$

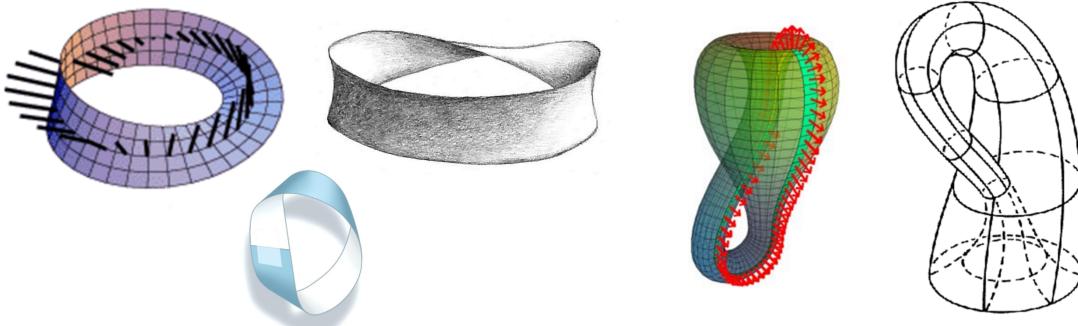
$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta), \quad | \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y | = 2.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2 dy d\theta = 4\pi.$$

1.5.1. Superficies orientadas

El concepto de superficie orientable es esencial para el cálculo de integrales de superficie de campos vectoriales. Comencemos analizando dos ejemplos de superficies que no son orientables: la cinta de Möbius (que se construye uniendo los dos extremos de una cinta pero de manera invertida) y la botella de Klein. Como se puede apreciar en la siguiente figura, es imposible reconocer dos caras en alguna de estas superficies. Si se quisiera, por ejemplo, colorear una cara de rojo y otra de otro color, y se comenzara a colorear de rojo, terminaríamos habiendo coloreado la totalidad de la superficie de rojo. Esto es lo que caracteriza a estas superficies: no tienen dos caras.



Cinta de Möbius (Moebius)

Botella de Klein

Definición 1.5.8 (Superficies orientables y orientadas). Una superficie suave S es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial \mathbf{n} que a cada punto de S le asigna un vector normal unitario de manera continua, es decir, que varíe en forma continua con la superficie.

Una superficie suave S está **orientada** cuando ya se ha definido un tal campo vectorial \mathbf{n} sobre S .

Observación 1.5.9. Nótese que en la definición de superficie orientable se requiere que en la asignación de un vector normal unitario en cada punto no haya cambios abruptos. En las superficies no orientables de la figura anterior sí se puede definir un vector normal unitario en cada punto, pero esta asignación no puede hacerse de manera continua.

Ejemplo a modo de observación: Un cono sin su vértice (o un tronco de cono) es una superficie suave. Un cono (con su vértice) **no es una superficie suave**.

Definición 1.5.10. Una superficie suave por partes se llama **cerrada** cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la “interior”, que es acotada, y la “exterior”, que es no acotada.

Definición 1.5.11. Una superficie suave **cerrada** está **orientada positivamente** si el vector normal en cada punto de S apunta hacia fuera de S .

Observación: Si la superficie es suave por partes, podemos extender esta idea.

Ejemplo 1.5.12. Una esfera es una superficie suave cerrada (ya que separa el espacio en dos regiones); un cilindro parabólico es una superficie suave que no es cerrada; una porción de cilindro circular unido a dos círculos que hagan las veces de “tapa” y “base” (como una lata cilíndrica de conservas) es una superficie suave por partes cerrada; un parabolóide elíptico es una superficie suave que no es cerrada; una porción de parabolóide elíptico junto con una elipse de dimensiones convenientes ubicada como “tapa” forman una superficie cerrada, suave por partes.

1.6. Integral de superficie

Igual que cuando presentamos integrales de línea, primero definiremos integrales de superficie para campos escalares y luego, para campos vectoriales.

1.6.1. Integrales de superficie de campos escalares

Definición 1.6.1. Dada la superficie suave $S \subset \mathbb{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde R es una región simple, y dado el campo escalar f continuo definido en S , se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

La justificación de esta definición es similar a la justificación para la definición de área de una superficie. Si S está parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$, tomamos una partición en R y

$$\iint_S f d\sigma \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \Delta\sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \|\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

y, tomando límites,

$$\iint_S f d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv,$$

lo cual justifica la definición que hemos dado.

Observación 1.6.2. Debe destacarse el hecho (que no probaremos) de que el valor de la integral de superficie es independiente de la representación paramétrica suave de la superficie S .

Ejemplo 1.6.3. Se desea plantear una integral para calcular la masa de una capa delgada cortada del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por los planos $y = 0$ y $y = 1$ (superficie cilíndrica), sabiendo que la densidad en

cada punto viene dada por $\delta(x, y, z)$. La masa de una capa delgada se calcula por:

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dA.$$

En nuestro ejemplo se puede parametrizar la superficie por

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

de donde $\mathbf{r}_\theta(\theta, y) = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta)$, $\mathbf{r}_y(\theta, y) = (0, 1, 0)$, $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y(\theta, y) = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta)$ y $\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y\| = 2$. Así, la masa se puede obtener haciendo

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \delta(2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta) 2 dy d\theta.$$

1.6.2. Integrales de superficie de campos vectoriales

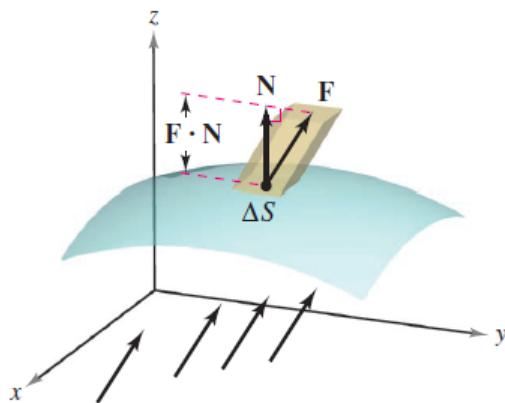
Definición 1.6.4. Sean \mathbf{F} , un campo vectorial acotado con componentes continuas y S , una superficie orientada y suave por partes incluida en el dominio de \mathbf{F} .

El **flujo** de \mathbf{F} a través de S en la dirección de \mathbf{n} es la integral de superficie de la componente normal de \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{n} :

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Notación: si la superficie S es cerrada, en ocasiones se usa la notación

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



Fórmula de cálculo:

Si S está parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces el flujo de \mathbf{F} a través de S se puede calcular como

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv \quad (1.34)$$

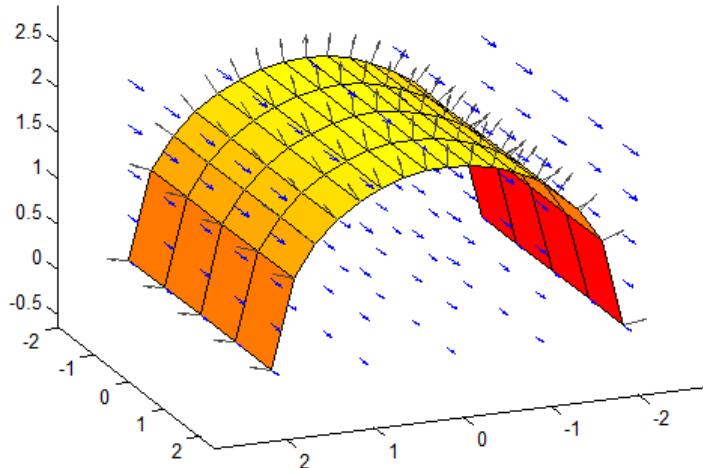
o

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u) du dv, \quad (1.35)$$

dependiendo de la orientación dada en S por \mathbf{n} : se debe usar siempre la fórmula en la que el producto vectorial $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ o $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$ sea múltiplo positivo de \mathbf{n} . Es decir, si \mathbf{n} es múltiplo positivo de $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, se usa la fórmula (1.34). Si, por el contrario, resultan tener sentidos opuestos, se debe usar la fórmula (1.35).

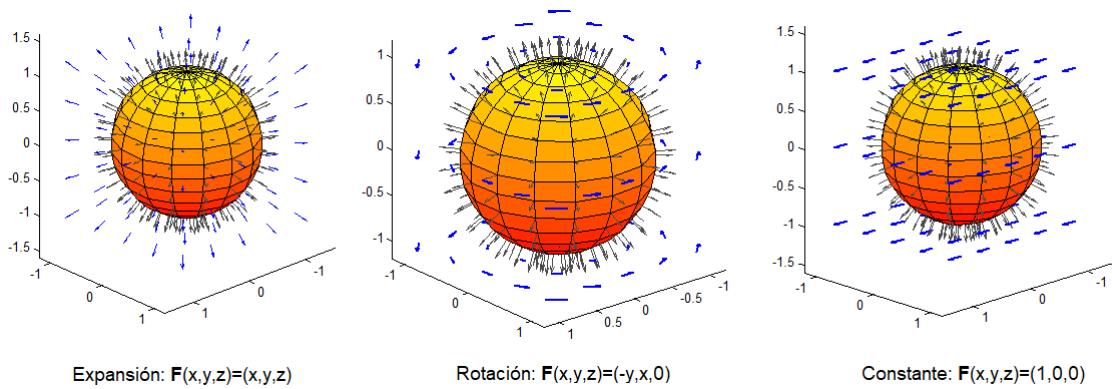
Observación 1.6.5. *Debe destacarse el hecho (que no probaremos) de que el valor de la integral de superficie es independiente de la representación paramétrica suave de la superficie S .*

Ejemplo 1.6.6. *Sean el campo vectorial \mathbf{F} (en azul) y la superficie orientada S dados en el siguiente gráfico. Indique el signo de $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.*



Solución: Si en un punto cualquiera de la superficie S analizamos las direcciones del campo vectorial \mathbf{F} y el vector normal unitario \mathbf{n} , podemos apreciar que en este caso son ortogonales. Así, la componente normal de \mathbf{F} es cero en cada punto y $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$.

Ejemplo 1.6.7. *Sean la superficie S que es una esfera centrada en el origen positivamente orientada, y los campos vectoriales $\mathbf{F}_1(x, y, z) = (x, y, z)$, $\mathbf{F}_2(x, y, z) = (-y, x, 0)$ y $\mathbf{F}_3(x, y, z) = (1, 0, 0)$, representados en el siguiente gráfico (en azul). Haga una estimación del signo de $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, para cada caso, justificando su respuesta.*



Solución: Para cada caso estudiaremos la dirección del campo vectorial y su componente normal sobre la esfera. Finalmente, estimaremos la integral de manera intuitiva (haciendo una suma).

1. Si en un punto cualquiera de la esfera S analizamos las direcciones del campo vectorial \mathbf{F}_1 (expansión) y el vector normal unitario \mathbf{n} , podemos apreciar que en este caso son paralelos y tienen el mismo sentido. Así, la componente normal de \mathbf{F}_1 es **positiva** en cada punto y $\iint_S \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} d\sigma > 0$. Esta idea se intuye por el hecho de que se aprecia en el gráfico un flujo “saliente” de la esfera.
2. Si en un punto cualquiera de la esfera S analizamos las direcciones del campo vectorial \mathbf{F}_2 (rotación alrededor del eje z) y el vector normal unitario \mathbf{n} , podemos apreciar que en este caso son ortogonales. Así, la componente normal de \mathbf{F}_2 es **cero** en cada punto y $\iint_S \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$.
3. Si en distintos puntos de la esfera S analizamos las direcciones del campo vectorial \mathbf{F}_3 (campo vectorial constante) y el vector normal unitario \mathbf{n} , podemos ver ahora que en algunos casos son paralelos con el mismo sentido, en otros casos son paralelos con sentidos contrarios, en otros casos son ortogonales y en otros, forman otros ángulos. Así, podemos suponer que al sumar todos los efectos obtendremos una suma nula y $\iint_S \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$. Esta idea también se puede intuir por el hecho de que se aprecia en el gráfico que el flujo “entrante” es igual al flujo “saliente” de la esfera.

Ejemplo 1.6.8. Halle el flujo del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ a través de la superficie S que es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 1$, en la dirección que se aleja del eje y .

Solución: queremos hallar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$. Para ello, parametrizamos la superficie S :

$$\mathbf{r}(\theta, y) = (2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Para aplicar alguna de las fórmulas (1.34) o (1.35), debemos hallar las derivadas parciales de las componentes de \mathbf{r} y calcular su producto vectorial:

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, y) = (-2 \sin \theta, 0, 2 \cos \theta), \quad \mathbf{r}_y(\theta, y) = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_\theta(\theta, y) \times \mathbf{r}_y(\theta, y) = (-2 \cos \theta, 0, -2 \sin \theta).$$

Para decidir cuál de las dos fórmulas de cálculo usar, analizamos el vector $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_y$ en un punto de S : por ejemplo podemos escoger los valores $\theta = 0$ y $y = 0$ de los parámetros y evaluamos $\mathbf{r}(0, 0) = (2, 0, 0)$, que es un punto de S y en ese punto calculamos el vector dado por $\mathbf{r}_\theta(0, 0) \times \mathbf{r}_y(0, 0) = (-2, 0, 0)$.

Estudiamos en qué sentido apunta este vector cuando se aplica en el punto $\mathbf{r}(0, 0)$ y en este caso resulta que apunta en la dirección hacia el eje y . Como el enunciado pide hallar la integral de superficie de \mathbf{F} sobre S en la dirección que se aleja del eje y , debemos trabajar con la fórmula (1.35), que es equivalente a (1.34) cambiada de signo (ya que, por propiedad del producto vectorial, cualesquiera sean los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} de \mathbb{R}^3 , $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$). Así, según (1.35):

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (y, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \cdot (2 \cos \theta, 0, 2 \sin \theta) dy d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2y \cos \theta + 4 \sin^2 \theta) dy d\theta = 4\pi.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.9. Halle el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ hacia fuera a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).

Solución: parametrizamos la superficie esférica por

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

y hallamos $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\theta(\theta, \phi) &= (-a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta \sin \phi, 0) \\ \mathbf{r}_\phi(\theta, \phi) &= (a \cos \theta \cos \phi, a \sin \theta \cos \phi, -a \sin \phi) \\ \mathbf{r}_\theta(\theta, \phi) \times \mathbf{r}_\phi(\theta, \phi) &= (-a^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \theta \sin^2 \phi, \\ &\quad -a^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - a^2 \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi) \\ &= (-a^2 \cos \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \theta \sin^2 \phi, -a^2 \sin \phi \cos \phi).\end{aligned}$$

En un punto muestra, por ejemplo $\mathbf{r}(0, \frac{\pi}{2}) = (a \cos 0 \sin \frac{\pi}{2}, a \sin 0 \sin \frac{\pi}{2}, a \cos \frac{\pi}{2}) = (a, 0, 0)$, evaluamos $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\theta\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{r}_\phi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= \\ &= \left(-a^2 \cos 0 \sin^2 \frac{\pi}{2}, -a^2 \sin 0 \sin^2 \frac{\pi}{2}, -a^2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-a^2, 0, 0).\end{aligned}$$

El vector $(-a^2, 0, 0)$ aplicado en el punto $(a, 0, 0)$ apunta hacia dentro de la esfera. Por lo tanto consideraremos el vector normal cambiado de signo (según la fórmula (1.35)). Así, el flujo que se

desea calcular es

$$\begin{aligned}
 \text{Flujo} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\phi(\theta, \phi) \times \mathbf{r}_\theta(\theta, \phi)) d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{F}(a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi) \cdot (\mathbf{r}_\phi(\theta, \phi) \times \mathbf{r}_\theta(\theta, \phi)) d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi) \cdot \\
 &\quad (a^2 \cos \theta \sin^2 \phi, a^2 \sin \theta \sin^2 \phi, a^2 \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a^3 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + a^3 \sin^2 \theta \sin^3 \phi + a^3 \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a^3 \sin^3 \phi + a^3 \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi d\theta \\
 &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)) d\phi d\theta \\
 &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi d\theta = 4a^3\pi.
 \end{aligned}$$

Observamos que, como se podría haber intuido desde un análisis gráfico, el flujo buscado es positivo.

Observación 1.6.10. Si el flujo de \mathbf{F} a través de S es k , ¿necesariamente el flujo a través de una superficie S_1 que es una parte de S con exactamente la mitad de área que S es $k/2$? La respuesta es NO. Basta imaginar el flujo de un campo vectorial constante no nulo a través de una esfera, que da cero, y compararlo con el flujo del campo vectorial a través de una de las dos semiesferas que se obtienen al cortar la esfera con un plano normal a la dirección del campo vectorial: en este caso el flujo del campo a través de esta superficie no será nulo y, sin dudas, no será la mitad del flujo a través de la superficie esférica completa.

1.7. Teoremas de Stokes y de Gauss

1.7.1. Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes data de 1850.



**GEORGE GABRIEL STOKES
(1819–1903)**

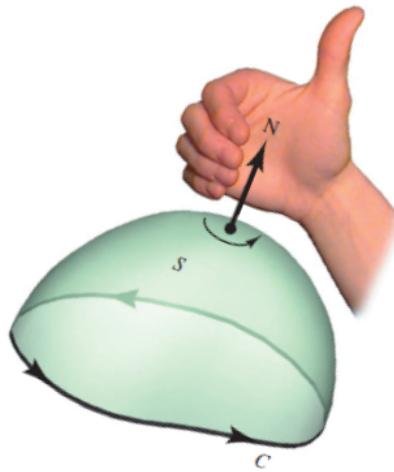
Teorema 1.7.1. Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como frontera una curva suave por partes, C . Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S . Entonces la circulación de \mathbf{F} a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, \mathbf{n} , es:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Demostramos un caso especial: aquel en que la superficie S es el gráfico de una función g de dos variables, con derivadas continuas de segundo orden. Se ofrece un video con una prueba del mismo en

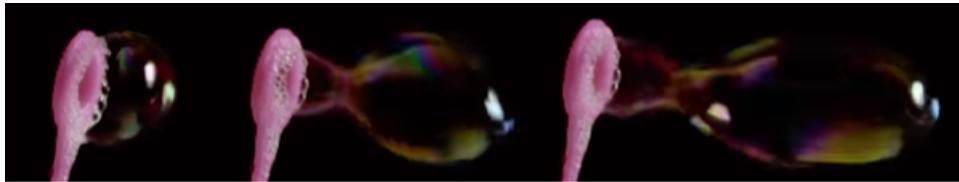
<https://www.youtube.com/watch?v=aaJgkbqjCSg>

Observación 1.7.2. 1. La curva C no necesariamente es plana: en general, es una curva en el espacio. Por ello en la hipótesis el teorema pide que la orientación de C sea positiva **con respecto a la orientación de S** .



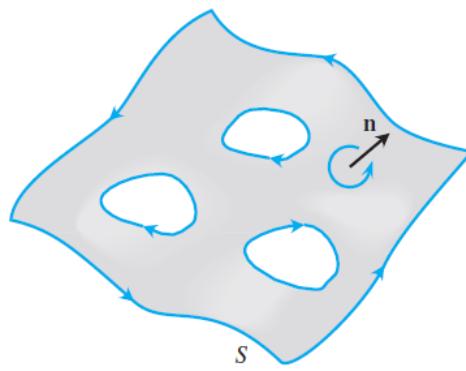
2. Para una misma curva suave C puede haber más de una superficie suave S que tiene a C como frontera. Así, si S_1 y S_2 son superficies suaves que tienen a C como frontera, siempre que \mathbf{F}

esté definido en los puntos de S_1 , S_2 y de C y se satisfagan las hipótesis del Teorema de Stokes, se tendrá que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$. Es decir que el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre S_1 y el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre S_2 son iguales.



La imagen muestra el mismo burbujo con tres burbujas distintas: son tres superficies suaves distintas con una misma curva frontera C .

3. Igual que con el Teorema de Green, podemos aplicar el Teorema de Stokes a superficies más generales, incluyendo superficies con agujeros, en tanto la orientación de cada curva sea la correspondiente.



superficies con agujeros

Ejemplo 1.7.3. Sea C la curva intersección de las superficies dadas por $y + z = 2$ y $x^2 + y^2 = 1$, orientada positivamente si se mira desde “arriba”. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$. Plantee una integral para calcular la circulación de \mathbf{F} a lo largo de la curva C .

Solución: según la definición de integral de línea podríamos calcular el flujo pedido aplicando la fórmula

$$\text{Flujo} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt,$$

pero en esta ocasión no lo haremos. En cambio, podríamos aplicar el Teorema de Stokes, para obtener

$$\text{Flujo} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Podemos considerar una (hay muchas posibles) superficie suave S que tenga a esa curva C como frontera. Elegimos la superficie plana correspondiente y la representamos paramétricamente por

$$\mathbf{r}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, 2 - r \sin t), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

El rotacional de \mathbf{F} es

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1 + 2y)$$

y así, obtenemos

$$\text{Flujo} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, 1 + 2r \sin t) \cdot (0, r, r) dr dt = \pi.$$

En la Sección 1.3 se presentó el Teorema 1.3.4 (página 18) que enuncia el criterio de componentes para campos conservativos. Ya habíamos demostrado la primera parte de este Teorema; en esta sección se presenta una idea de demostración para la segunda parte del mismo. Incluimos el enunciado completo del teorema.

Teorema (Criterio de componentes para campos conservativos).

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial definido en una región conexa y abierta D , cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces:

1. *Si \mathbf{F} es conservativo en D , entonces $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.*
2. *Si D es simplemente conexo y $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en D , entonces \mathbf{F} es conservativo en D .*

Demuestração. La demostración de la primera parte de este Teorema ya se presentó oportunamente. Probemos ahora la segunda afirmación. Para ello, supongamos que D es abierto, conexo y simplemente conexo y $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en D . Buscamos probar que \mathbf{F} es conservativo en D ; lo haremos mostrando que la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de cualquier lazo en D es nula, aplicando luego el Teorema 1.2.20. Para ello supongamos que C es una curva simple y cerrada, suave por partes incluida en D .

Aplicando un teorema de Topología, dadas las propiedades de D , se puede asegurar que existe una superficie S en D que tiene como frontera a la curva C , orientada positivamente con respecto a la orientación de C . Así:

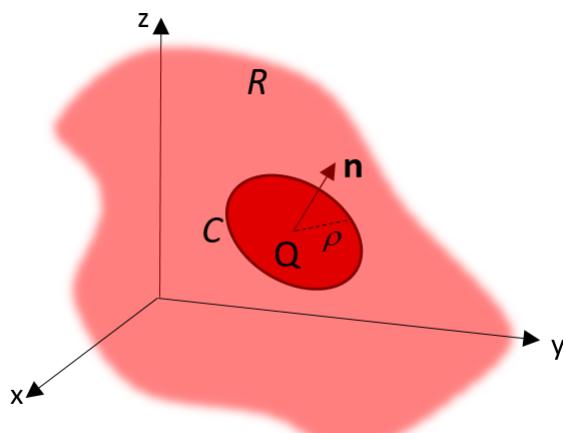
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Dado que para cualquier curva C simple, cerrada y suave por partes, incluida en D , se puede hacer lo mismo, por el Teorema 1.2.20 se tiene que \mathbf{F} es conservativo en D , lo cual concluye la prueba. \square

Observación 1.7.4. *Nótese que el Teorema de Green en su forma tangencial es un caso especial del Teorema de Stokes.*

1.7.2. Interpretación del rotacional de un campo vectorial en \mathbb{R}^3

Supongamos que \mathbf{F} es un campo de velocidades cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta R del espacio, que $Q(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de R y que \mathbf{n} es un vector unitario. Llamemos S a un disco incluido en R , con centro en Q y radio $\rho > 0$, incluido en un plano ortogonal a \mathbf{n} , y llamemos C a la circunferencia frontera de S .



El Teorema de Stokes establece que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

cuando C está orientada positivamente con respecto a la orientación dada por \mathbf{n} a S . Por ser continuas las derivadas parciales de primer orden de las componentes de \mathbf{F} , el rotacional de \mathbf{F} , $\nabla \times \mathbf{F}$, es un campo vectorial continuo en R y, en particular, es continuo en Q . Luego, el valor medio de $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ en S cumple

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) \cdot \mathbf{n} d\sigma = (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (1.36)$$

Si ahora aplicamos el Teorema de Stokes en el primer miembro de (1.36), obtenemos

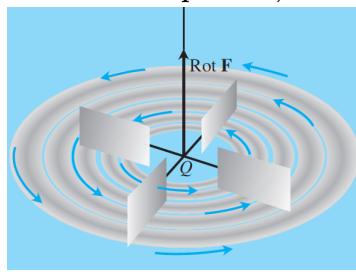
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (1.37)$$

El lado derecho de la ecuación (1.37) toma su valor máximo cuando \mathbf{n} es un múltiplo positivo de $(\nabla \times \mathbf{F})(x_0, y_0, z_0)$. Por otra parte, el lado izquierdo de la ecuación (1.37) es aproximadamente

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.38)$$

si ρ es pequeño. Pero (1.38) es la circulación de \mathbf{F} alrededor de C dividida entre el área de S , es decir, es la densidad de circulación de \mathbf{F} en Q . Si una rueda pequeña de radio r con paletas (como la de la Figura 1.7) se introduce en el fluido en el punto Q , la circulación del fluido alrededor de C afectará la rueda haciéndola girar. La rueda girará más rápido cuando la integral de circulación se maximice, y por lo tanto, girará más rápido cuando el eje de la rueda con paletas ubicado en Q , se halle en la dirección de \mathbf{n} .

Figura 1.7: Rueda con paletas, centrada en Q .



Esto nos permite interpretar al vector $\nabla \times \mathbf{F}$ en relación con la *tendencia* a arremolinarse del fluido en el punto Q . Conviene analizar el vector gradiente de \mathbf{F} con la regla de la mano derecha en varios ejemplos para terminar de comprender esta idea.

Ejemplo 1.7.5. Los campos vectoriales que mostramos a continuación se relacionan con los analizados anteriormente para campos vectoriales en \mathbb{R}^2 en los Ejemplos 1.3.8 a 1.3.15. Supondremos que representan la velocidad de un gas que fluye en el espacio y analizaremos el rotacional de cada campo vectorial, interpretando su significado físico. Están representados en la siguiente Figura.

1. Rotación: $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, -2) = -2\mathbf{k}$. Se puede apreciar, igual que en el Ejemplo 1.3.8, que el fluido presenta una tendencia a arremolinarse en cada punto, es decir que una pequeña partícula en ese medio rotaría según el vector $(0, 0, -2)$, o sea que rotaría en un plano paralelo al plano $z = 0$ y en sentido horario, mirado desde el eje z positivo. Las

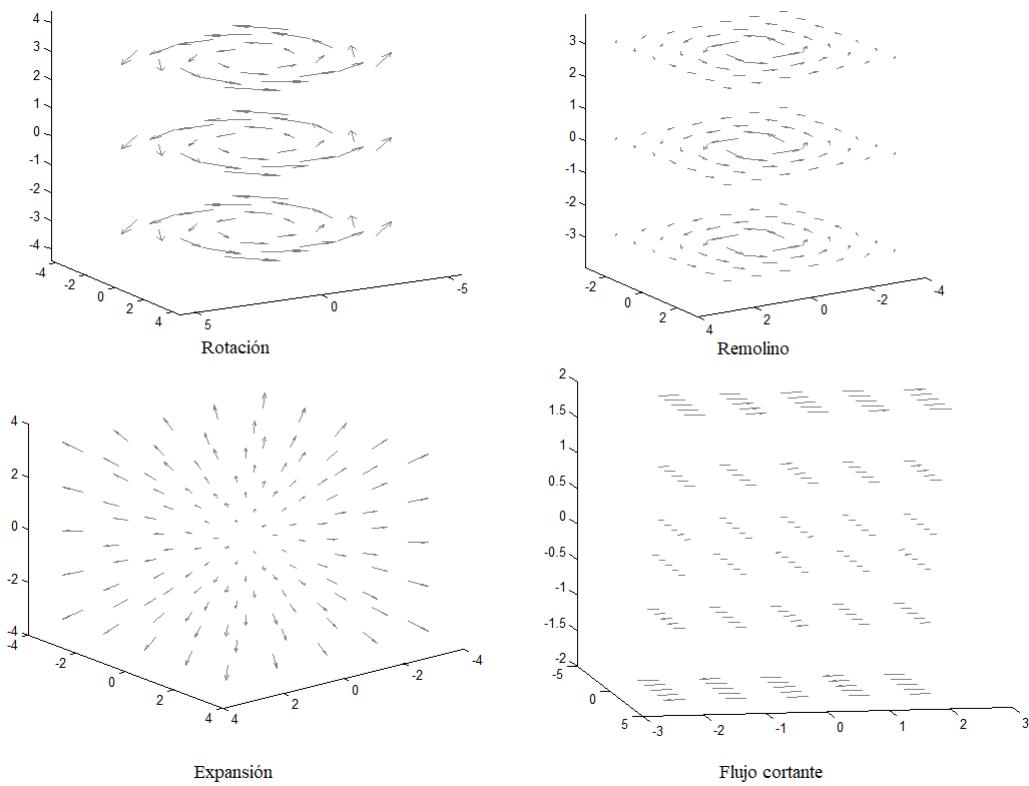
líneas de flujo son circunferencias en planos $z = c$, $c \in \mathbb{R}$, centradas en $(0, 0, c)$ y estas indican el recorrido que tendría la pequeña partícula; además, podemos ver que este campo vectorial no es conservativo en \mathbb{R}^3 (Teorema 1.3.4, página 18).

2. Remolino: $\mathbf{F}(x, y, z) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Se puede apreciar, igual que en el Ejemplo 1.3.9, que el fluido no presenta tendencia a arremolinarse alguna, es decir que un cuerpo pequeño sumergido en ese fluido, tenderá a no rotar; las líneas de flujo son, como en el ejemplo previo, circunferencias en planos $z = c$, $c \in \mathbb{R}$, centradas en $(0, 0, c)$. Con respecto a la propiedad de ser o no conservativo este campo vectorial, lo primero que debemos notar es que está definido en un conjunto D que no es \mathbb{R}^3 :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\},$$

que no es otra cosa que \mathbb{R}^3 sin el eje z . D es abierto y conexo pero no es simplemente conexo. Por este motivo no se puede aplicar el Teorema 1.3.4. ¿Cómo hacer, entonces, para decidir si es o no un campo vectorial conservativo en D ? Debemos abordar casos como éste individualmente, aplicando otras ideas que puedan ser de utilidad según la situación. En este caso no es difícil probar que para cualquier circunferencia C centrada en el eje z (incluida en un plano paralelo al plano xy , para simplificar) la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ no es nula. Luego, según el Teorema 1.2.20 (página 16), el campo \mathbf{F} no es conservativo en D . Sin embargo este campo vectorial **sí** es conservativo cuando restringimos su dominio a regiones conexas, abiertas y simplemente conexas, como por ejemplo el primer octante (¿por qué?).

3. Expansión o compresión: $\mathbf{F}(x, y, z) = (cx, cy, cz)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Igual que para el caso de \mathbb{R}^2 , el fluido no presenta tendencia a arremolinarse alguna, es decir que un cuerpo pequeño sumergido en ese fluido, no rotará. Además, se aprecia que las líneas de flujo son semirrectas que parten desde el origen y que el campo es conservativo (Teorema 1.3.4).
4. Corte: $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, z, 0)$; $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (1, 0, 0)$. El rotacional no nulo indica que una pequeña partícula en ese medio rotaría. En este caso lo haría según el vector $(1, 0, 0)$. El campo vectorial no es conservativo; las líneas de flujo son rectas.



Campos vectoriales analizados en el Ejemplo 2.3.6

1.7.3. Teorema de la divergencia de Gauss

Según Wikipedia², este teorema fue descubierto por distintos matemáticos a lo largo de la historia, de manera independiente: primero, por Lagrange en 1762; luego por Gauss, en 1813; Ostrogradsky en 1826 provee la primera prueba; Green en 1828; Poisson en 1824 y Sarrus en 1828.

Joseph-Louis Lagrange		Johann Carl Friedrich Gauss		Mikhail Ostrogradsky	
Joseph-Louis (Giuseppe Luigi), comte de Lagrange		Carl Friedrich Gauß (1777–1855), painted by Christian Albrecht Jensen		Mikhail Vasilievich Ostrogradsky	
Born	Giuseppe Lodovico Lagrangia	Born	Johann Carl Friedrich Gauß	Born	Mikhail Vasilievich Ostrogradsky
	25 January 1736		30 April 1777		September 24, 1801
	Turin, Piedmont-Sardinia		Brunswick, Duchy of Brunswick-Wolfenbüttel, Holy Roman Empire		Pashennaya
Died	10 April 1813 (aged 77)	Died	23 February 1855 (aged 77)	Died	January 1, 1862 (aged 60)
	Paris, France		Göttingen, Kingdom of Hanover		Poltava
Lagrange 1762		Gauss 1813		Ostrogradsky 1826	

²https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem_History

Teorema 1.7.6 (Teorema de la divergencia de Gauss). *Sea S una superficie **cerrada** positivamente orientada, suave por partes y sea D la región sólida encerrada por S . Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S . Entonces el flujo de \mathbf{F} a través hacia fuera de S es:*

$$\oint\!\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

El símbolo $\oint\!\oint_S$ en la expresión $\oint\!\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ indica que la integral es sobre una superficie S **cerrada**. Omitimos la demostración de este teorema.

1.7.4. Interpretación de la divergencia de un campo vectorial

Sea P un punto interior al dominio de \mathbf{F} y sea W una bola de radio r con centro en P , incluida en el dominio de \mathbf{F} . Si llamamos S a la frontera de W y V al volumen de W , tenemos de acuerdo al Teorema de la divergencia,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Aplicando el Teorema del valor medio para integrales en el segundo miembro,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) V \quad \text{para cierto } Q \in W.$$

Tomando límites obtenemos:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

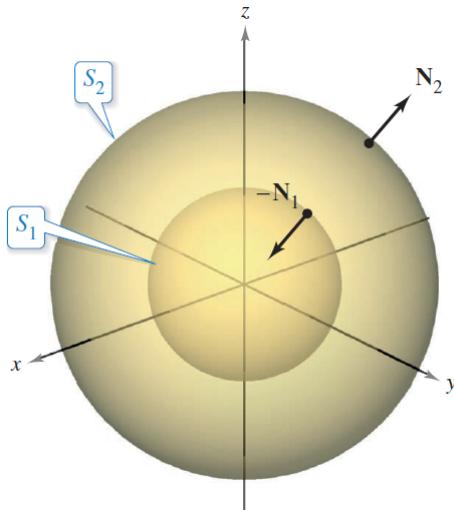
Por esto es que la interpretación física de la divergencia en el punto P es la tasa de flujo neto hacia fuera en P por unidad de volumen.

Así, si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, el punto P se llama **fuente** ya que el flujo neto alrededor de P es positivo; si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, P se llama **sumidero** para \mathbf{F} .

Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = 0$ en todo \mathbb{R}^3 , entonces \mathbf{F} se llama **solenoideal** y, si es un campo de velocidades de un fluido, decimos que el fluido es **incompresible**.

Observación 1.7.7 (Aplicación del Teorema de la divergencia en otras regiones). *Lo mismo que ocurrió antes con los Teoremas de Green y de Stokes, el Teorema de la divergencia de Gauss puede aplicarse a regiones más generales, en particular, a regiones con agujeros. Supongamos que D es la región del espacio entre las superficies esféricas S_2 y S_1 , como se ve en la imagen siguiente:*

Figura 1.8: Aplicación del Teorema de la divergencia a regiones con agujeros



Las superficies S_1 y S_2 se orientan de manera conveniente.

En este caso podemos imaginar que “cortamos” el volumen comprendido entre las dos superficies por medio de un plano, y que formamos de esta manera dos sólidos que se tocan en ese plano que los separa (concretamente se tocan en una corona circular). La frontera de cada uno de estos sólidos se puede orientar positivamente, ya que no tienen agujeros; y podemos aplicar el Teorema de Gauss en cada sólido por separado. Podemos apreciar que las orientaciones de las partes de la frontera de dichos sólidos sobre la corona circular donde los hemos separado, son opuestas, de manera que las integrales de flujo sobre esas superficies se cancelarán. Por ello la orientación de superficies de sólidos con agujeros, similarmente a lo que ocurre en los casos de los Teoremas de Green y de Stokes, debe hacerse de manera que se oriente hacia fuera la superficie “exterior” y hacia dentro la superficie “interior”.

1.7.5. Comparación de los teoremas de Green, Gauss y Stokes

Cabe destacar que la versión normal del Teorema de Green es el equivalente en \mathbb{R}^2 del Teorema de la divergencia: mientras que en el primero, C es una curva plana que encierra (es la frontera de) una región R en el plano, en el segundo la superficie S es la frontera de una región D en el espacio y

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy; \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Por otra parte, la versión tangencial del Teorema de Green es el equivalente en \mathbb{R}^2 del Teorema de Stokes: mientras que en el primero, C es una curva plana, frontera de una región R en el plano, en el segundo la curva cerrada C en el espacio es la frontera de muchas superficies S en el espacio y

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy; \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

1.7.6. Aplicaciones: Ley de Gauss y Ley de Faraday

Estos teoremas tienen aplicaciones inmediatas al electromagnetismo. Sean \mathbf{E} un campo eléctrico y \mathbf{B} un campo magnético, dependientes del tiempo, definidos en el espacio. Sea S una superficie

orientada, con frontera C . Definimos

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \text{circulación del campo eléctrico a lo largo de } C,$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \text{flujo del campo magnético a través de } S.$$

Las siguientes son dos de las Ecuaciones de Maxwell:

$$\textbf{Ley de Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.39)$$

$$\textbf{Ley de Gauss: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.40)$$

Una aplicación del Teorema de Stokes a (1.39) permite obtener la expresión integral de esta Ley:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\sigma =_* -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

(*Esta última igualdad se cumple si se puede mover $\frac{\partial}{\partial t}$ del signo de integral.)

Observación 1.7.8. *La expresión integral de la Ley de Faraday es comprobable en laboratorio: esa es una gran ventaja. A partir de la expresión integral de la Ley de Faraday se puede obtener la expresión diferencial de la misma, aplicando el Teorema de Stokes.*

En efecto, supongamos que vale $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

Entonces

$$\iint_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

para cualquier superficie S que tenga a C por frontera. Si el integrando fuese un vector no nulo en algún punto, entonces la integral sobre un pequeño disco centrado en dicho punto y normal a ese vector, sería no nula (por un argumento de continuidad).

Así podemos comprobar que, gracias al Teorema de Stokes, se puede pasar de una expresión a la otra.

Similarmente, una aplicación del Teorema de la divergencia a (1.40) nos lleva a la expresión integral de la Ley:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

2.1. Introducción

2.1.1. Definición y clasificación

Definición 2.1.1. Se llama **ecuación diferencial (ED)** a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (o variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Existen varias formas de clasificar una ED:

- **Como ordinaria o parcial.** Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) es aquella que sólo contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente. Por el contrario, una ecuación diferencial Parcial (EDP) es aquella que involucra derivadas parciales de una o más funciones con respecto a más de una variable independiente.
- **Por orden** El orden de una ED es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Si la ecuación diferencial es de orden n y tiene sólo una variable independiente puede expresarse como: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.
- **Por grado** El grado de una ED es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.
- **Como lineales o no lineales** Se dice que una ED de n -ésimo orden, con una variable independiente, es lineal si puede escribirse como:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.1)$$

donde y es una variable dependiente de x . La ecuación (2.1) también admite la expresión:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

si del contexto se desprende que y sólo depende de la variable x .

Ejemplo 2.1.2.

- $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$. Es una EDO no lineal de segundo orden, grado 1; y es variable dependiente (función) y x variable independiente.

- $\frac{d^3y}{dr^3} + \cos(r)\frac{dy}{dr} - e^r y = \sin^2(x)$. Es una EDO lineal de tercer orden, grado 1; la variable dependiente es y y r la independiente.
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\sin(y) = 0$. Es una EDO no lineal de segundo orden, grado 1; y es función de x .
- $\frac{dy}{dx} y = 1$. Es una EDO no lineal de primer orden, grado 1; y es función de x .
- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$. Es una EDO no lineal de segundo orden, grado 2; y es función de x .
- $\frac{\partial u}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Es una EDP de segundo orden y grado 1; u es una variable dependiente de, al menos, dos variables independientes x y t .

2.1.2. Soluciones, problemas con valores iniciales y de frontera

Definición 2.1.3. Se llama **solución explícita** de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$. Una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I .

Ejemplo 2.1.4.

- Una solución explícita de $x\frac{dy}{dx} = 2y$ es la función $y(x) = 3x^2$ en cualquier intervalo real que se considere.
- $y^2 + x - 3 = 0$ es una solución implícita de $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$ en el intervalo $(-\infty, 3)$.

Definición 2.1.5. Dada una ED, una **familia paramétrica de soluciones** es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros. Una **solución particular** de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a dichos parámetros. Por otro lado, una **solución singular** de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la **solución general** de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Ejemplo 2.1.6. Dada la ED $y'(x) = x\sqrt{y(x)}$, una familia uniparamétrica de soluciones es $\sqrt{y(x)} = \frac{1}{4}x^2 + c$, donde $x \in \mathbb{R}$. Notamos que el parámetro c debe ser no negativo ya que se trata de la raíz cuadrada positiva (considerar el caso $x = 0$). La familia de soluciones se puede expresar como $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$. Tomando $c = 0$ se obtiene una solución particular de la ED: $y(x) = \frac{1}{16}x^4$. Por otro lado, $y(x) = 0$ es una solución singular ya que es solución de la ED pero no se obtiene asignando un valor de c a la familia de soluciones.

Definición 2.1.7. Un **problema con valores iniciales (PVI)** consiste en una ecuación diferencial de n -ésimo orden en algún intervalo I que contiene a x_0 , sujeto a las n condiciones que la acompañan especificadas en x_0 . En un PVI hay que resolver:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

sujeto a:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Estas condiciones a las que está sujeta la solución de la ecuación diferencial se llaman **condiciones iniciales**.

Ejemplo 2.1.8. Resuelva el siguiente PVI,

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

sabiendo que la solución uniparamétrica de la ED es $y(x) = C_1 e^x$. Aplicando la condición inicial se tiene $3 = C_1 e^0$, es decir que $C_1 = 3$. Así, la solución de este PVI es $y(x) = 3e^x$.

Ejemplo 2.1.9. Resuelva el siguiente PVI,

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0, \\ y(1) = 1, y'(1) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que se sabe de antemano que $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ es una solución de la ED (se verifica fácilmente: hágalo). Con las condiciones iniciales dadas se tiene que $C_1 = \frac{2}{3} e^{-1}$ y $C_2 = \frac{1}{3} e^2$, por lo que la solución del PVI es $y(x) = \frac{2}{3} e^{x-1} + \frac{1}{3} e^{-2x+2}$.

El siguiente teorema establece bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia de una solución única para problemas de valores iniciales de primer orden.

Teorema 2.1.10. Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden

Sea R una región rectangular en el plano xy , definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R . Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R , entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y **existe una única función** y definida en I que es solución del problema con valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.11. Dada la ED $y'(x) = x\sqrt{y(x)}$, que se presentó en el ejemplo 2.1.6, una familia uniparamétrica de soluciones es $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$. Sea el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Si $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, el PVI se escribe como

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y(x)} \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

este PVI admite dos soluciones: con el valor del parámetro $c = 0$ se obtiene la solución $y = \frac{x^4}{16}$; por otra parte, la solución singular $y(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, también resuelve el PVI en este caso. Esto se debe a que el punto $(0, 0)$ no está en el interior del dominio de la función f , que es $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ (tampoco está definida en este punto la función f_y).

Si, en cambio, $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$, el PVI se escribe como

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y(x)} \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

sustituyendo estos valores en la familia de soluciones $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$, se obtiene $y(0) = (\frac{1}{4}0^2 + c)^2 = c^2 = 1$. Luego, recordando la condición $c \geq 0$, se obtiene la **única** solución $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + 1)^2$.

A continuación se presenta un teorema similar al anterior, para PVI's formados por ecuaciones **lineales** de orden superior.

Teorema 2.1.12. Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de orden superior

Sea el PVI dado por la ecuación diferencial y condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Si las funciones a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 y g son continuas en un intervalo I , $a_n(x) \neq 0$ para toda $x \in I$ y x_0 es cualquier punto de I , entonces **existe una única** solución al PVI (2.2).

Definición 2.1.13. Un **problema con valores de frontera (PVF)** consiste en una ecuación diferencial de orden dos o superior, en algún intervalo I , donde las variables dependientes y /o sus derivadas se especifican en diferentes puntos del intervalo. Un posible PVF de segundo orden sería uno en el que hay que resolver:

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeto a:

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

Estas condiciones a las que está sujeta la solución de la ecuación diferencial se llaman **condiciones de frontera o de borde**.

Otras posibles condiciones de frontera serían:

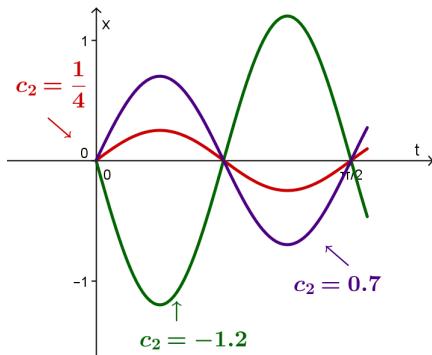
$$y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1$$

$$y'(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

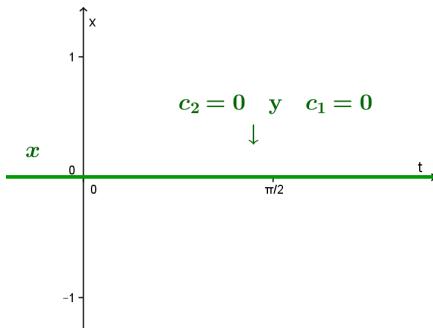
$$y'(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1$$

Ejemplo 2.1.14. La ED $x''(t) + 16x(t) = 0$ tiene como solución general $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$. Dependiendo de cuáles sean las condiciones de frontera planteadas se pueden tener distintas soluciones al PVF, por ejemplo:

a) Si $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0$, entonces el problema tiene infinitas soluciones.



b) Si $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{8}) = 0$, entonces el problema tiene solución única y es $x \equiv 0$.



c) Si $x(0) = 0, x'(\frac{\pi}{8}) = 3$, el PVF no tiene solución.

2.1.3. Campos direccionales

Es claro que el teorema de existencia y unicidad que se presentó en la sección anterior tiene gran valor, pero no da información acerca de la *naturaleza* de la solución de una ecuación diferencial. Por razones prácticas, puede ser necesario saber el valor de la solución en un determinado punto, los intervalos en los que la solución está disminuyendo o los puntos donde la solución alcanza un valor máximo. Contar con una fórmula para la solución sería de gran ayuda para determinar esto. Sin embargo, para muchas de las ecuaciones diferenciales del *mundo real*, será imposible encontrar dicha fórmula. Incluso en caso de haber obtenido una solución implícita, usarla para determinar una forma explícita, puede ser difícil. Por lo tanto, se deben utilizar otros métodos para analizar o aproximar la solución.

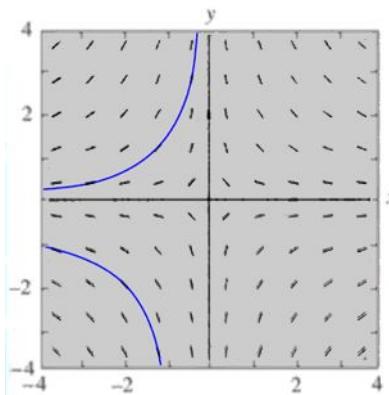
Una técnica útil para visualizar las soluciones de una ED de primer orden, es dibujar el campo de direcciones de la ecuación. Una ecuación de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ especifica una pendiente en cada punto en el plano xy donde se define f .

Un diagrama de segmentos de línea cortos dibujados en varios puntos en el plano xy para mostrar la pendiente de la curva solución se llama **campo de dirección** para la ecuación diferencial. Debido a que el campo de dirección proporciona el “flujo de soluciones”, facilita el dibujo de cualquier solución a partir de las condiciones iniciales especificadas.

Definición 2.1.15. Dada una ED $y'(x) = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama **campo direccional o campo de pendientes**.

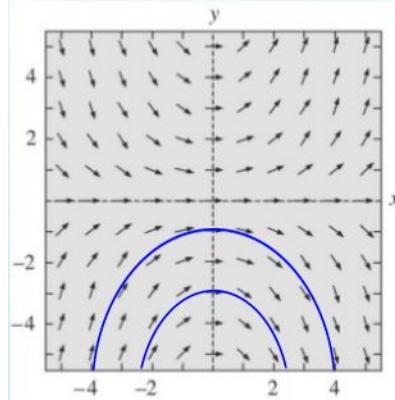
Ejemplo 2.1.16.

1. En la siguiente figura, se muestra el campo de direcciones de $dy/dx = -y/x$. En este caso, la pendiente que especifica la EDO es negativa cuando x e y tienen igual signo (primer y tercer cuadrante) y positiva cuando x e y tienen signos opuestos (segundo y cuarto cuadrantes). Además, puede predecirse que las soluciones tenderán a cero cuando x tienda a más o menos infinito y que ninguna solución podrá cruzar el eje y , ya que y tiende a más o menos infinito cuando x tiende a cero. En azul se han graficado algunas curvas solución que varían según las condiciones iniciales.



2. A continuación, se muestra el campo de direcciones de $dy/dx = 0,2xy$. En este caso, la pendiente es cero cuando x o y son cero por lo que los elementos lineales sobre los ejes son horizontales. Por otro lado, la pendiente es positiva cuando x e y tienen igual signo y negativa cuando tienen

signos opuestos. Además, en el primer cuadrante, es fácil predecir que la pendiente aumentará conforme y crezca (x fijo) y conforme x crezca (y fijo). Esto significa que a medida que x e y aumenten, los elementos lineales serán casi verticales y con pendiente positiva (un razonamiento análogo puede hacerse en los otros cuadrantes). En azul se han trazado algunas curvas solución uniendo los elementos lineales, cada curva corresponde a una condición inicial dada.



2.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Se describe a continuación distintos métodos de resolución para EDO de primer orden. Se debe tener en cuenta que la clasificación no es mutuamente excluyente, es decir, algunas EDO pertenecen a más de una clase y por lo tanto pueden resolverse usando más de un método; además no es una clasificación exhaustiva, ya que sólo abarca algunas EDO de primer orden.

2.2.1. Separación de variables

Las ecuaciones separables son una clase de ecuaciones diferenciales que se resuelve usando integración. Tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

donde f es función tanto de x (variable independiente) como de y (variable dependiente). Hallar una solución de esta ecuación diferencial significa encontrar una $y = y(x)$ definida en algún intervalo I , tal que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

para todos los x de I .

Definición 2.2.1. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es **separable** si es de la forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x)p(y(x)). \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) puede reescribirse como:

$$h(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} = g(x)$$

donde $h(y(x)) = 1/p(y(x))$.

Sea H una primitiva de h , es decir, $H' = h$. La derivada de $(H \circ y)$ es $H'(y(x)) \cdot y'(x) = h(y(x)) \cdot y'(x)$.

Así $H(y(x)) = \int g(x)dx + C$, con lo que se obtiene la solución y en forma implícita.

En la práctica, una forma cómoda de resolver esta ecuación es escribir (2.3) como $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$, o sea $h(y)dy = g(x)dx$, e integrar ambos miembros:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

Ejemplo 2.2.2.

- $y' = \frac{x-5}{y^2}$ es una ecuación diferencial separable ya puede llevarse a la forma (2.3), en este caso $g(x) = x - 5$ y $p(y) = 1/y^2$.
- $y' = y^{2x}e^{3x+4y}$ no es una ecuación diferencial separable ya que las variables x e y no pueden ser separadas como el producto de dos funciones como indica la definición.
- $(1+x)dy - ydx = 0$ es una ecuación diferencial separable ya que puede reescribirse como $y' = \frac{y}{1-x}$, por lo que $g(x) = 1/(1-x)$ y $p(y) = y$.

Ejemplo 2.2.3. Pérdida de una solución La ecuación diferencial $y'(t) = y^2(t) + y(t)$, que es a variables separables, tiene como solución la familia uniparamétrica:

$$y(t) = \frac{Ce^t}{1 - Ce^t}.$$

Sin embargo, para ningún valor de C se obtiene la solución, $y \equiv -1$, que es una solución singular; esta última se perdió cuando la ED se reescribió como $\frac{dy}{y(y+1)} = dt$ para su resolución, en el proceso de separación de variables. Es importante analizar los supuestos que realizamos al resolver ecuaciones: si en un paso suponemos $y \neq -1$, considerar por separado el caso $y = -1$, porque es posible que esto conduzca a una solución singular (o sea, que no esté en la familia paramétrica obtenida).

Ejemplo 2.2.4. Ejemplo de aplicación.

Considere el circuito que se muestra en la Figura 2.1. En el instante inicial, el interruptor está abierto y no circula corriente, es decir $I(0) = 0$. Usando la ley de voltaje de Kirchhoff, determine una expresión para la corriente a un tiempo t cuando se cierra el interruptor.

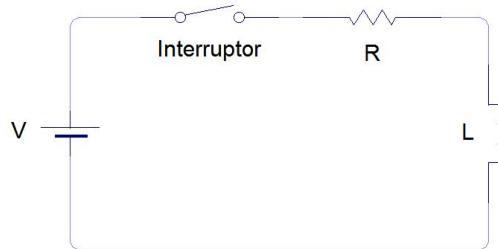


Figura 2.1: Circuito RL

Para aplicar las leyes de Kirchhoff, hay que analizar los elementos del circuito:

1. V es el voltaje constante que se proporciona al circuito (la fuente es, por ejemplo, una pila).
2. En la resistencia R hay una caída de voltaje V_R que es proporcional a la corriente I que pasa por la resistencia (Ley de Ohm): $V_R = RI$.

3. En la bobina L hay otra caída de voltaje V_L que es proporcional a la razón de cambio instantánea de la corriente I (ley de Faraday):

$$V_L = L \frac{dI}{dt}$$

Con estos elementos puede aplicarse la ley de voltaje de Kirchhoff, según la cual, en un lazo cerrado, la suma de las caídas de tensión es igual a la tensión suministrada. En este caso se tiene:

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V$$

Esta es una ED de variables separables y puede escribirse como: $\frac{dI}{V - RI} = \frac{1}{L} dt$

Integrando ambos términos y despejando I se llega a que:

$$I(t) = \frac{V}{R} - \frac{C}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (2.4)$$

donde C es la constante de integración. Para determinar C es necesario usar la condición inicial $I(0) = 0$ que da el problema. Tomando $t = 0$ en (2.4) se tiene: $0 = \frac{V}{R} - \frac{C}{R}$, de la que se deduce que $C = V$. Reemplazando, (2.4) finalmente queda:

$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Observar que si el voltaje suministrado al circuito no hubiese sido constante en el tiempo, la ED no sería de variables separables.

2.2.2. Ecuaciones lineales de primer orden

Definición 2.2.5. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es **lineal** en la variable dependiente y , si es de la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \quad (2.5)$$

donde $y = y(x)$ y a_1 , a_0 y g son funciones de x continuas en un intervalo I . Además $a_1(x) \neq 0$ para todo x de I .

Algunas ED lineales son separables, tal es el caso de:

$$y' = x + 5$$

y pueden resolverse como se desarrolló en la sección anterior. Otras ED lineales, sin embargo, no son separables, por ejemplo:

$$y' + y = x$$

En estos casos, se determina una función $\mu(x)$ tal que al multiplicar la ED lineal por $\mu(x)$, ésta resulte separable. Este método se conoce como “método del factor integrante”.

Para aplicarlo, primero se debe expresar la Ec. (2.5) en forma estándar, es decir:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \quad (2.6)$$

donde $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$ y $Q(x) = g(x)/a_1(x)$. Esto es posible porque $a_1(x) \neq 0$ para todo x en el

intervalo de interés. Luego, se multiplican ambos lados de la Ec. (2.6) por el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x) \quad (2.7)$$

y se busca $\mu(x)$ de manera que el primer miembro de la ecuación (2.7) sea la derivada del producto ($\mu(x) \cdot y(x)$), es decir,

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)] = \mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x).$$

Para eso es necesario que $\mu'(x) = P(x)\mu(x)$.

Esta última es una ED separable de la que se obtiene:

$$\begin{aligned} |\mu(x)| &= e^{\int P(x)dx + k}, \\ \mu(x) &= k_1 e^{\int P(x)dx}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde k es la constante de integración y k_1 es cualquier constante real; se verá en (2.9) que se puede omitir la constante de integración k en este paso. Con esta elección de $\mu(x)$, la Ec. (2.7) puede escribirse como: $\frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)] = \mu(x)Q(x)$, que con lo obtenido en (2.8), da la ED:

$$\frac{d}{dx} \left[k_1 e^{\int P(x)dx} y(x) \right] = k_1 e^{\int P(x)dx} Q(x), \quad (2.9)$$

en la que se puede cancelar k_1 . Por esto no se incluye la constante de integración en el factor integrante y se trabaja con la expresión

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \quad (2.10)$$

Lo que se obtiene finalmente es la ED:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x)dx} y(x) \right] = e^{\int P(x)dx} Q(x), \quad (2.11)$$

que nuevamente es separable y su solución:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x)dx + C \right]$$

donde la constante C se determina por la condición inicial.

Ejemplo 2.2.6. Resuelva la siguiente ecuación diferencial e indique un intervalo donde la solución hallada sea válida:

$$xy' - 2x^2y = 6x^2e^{x^2}.$$

Para comenzar, la ED dada debe llevarse a su forma estándar, para ello se divide ambos miembros por x . Al hacer esto se asume que el intervalo I donde vale la solución estará contenido en $(-\infty, 0)$ ó en $(0, +\infty)$.

$$y' - 2xy = 6xe^{x^2}.$$

En este ejemplo $P(x) = -2x$ y $Q(x) = 6xe^{x^2}$, con lo cual el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -2xdx} \quad \text{o sea,} \quad \mu(x) = e^{-x^2}.$$

Así

$$\frac{d}{dx} [e^{-x^2} y] = e^{-x^2} 6xe^{x^2} = 6x,$$

de donde

$$y = e^{x^2} \left(\int 6x dx \right), \quad \text{por lo tanto, } y = Ce^{x^2} + 3x^2 e^{x^2}.$$

Dicha solución es válida, por ejemplo en el intervalo $I = (0, +\infty)$.

Ejemplo 2.2.7. Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$y' - 3y = -9x$$

$$y(2) = 13$$

Como el coeficiente de y' ya es 1, se tiene que $P(x) = -3$ y el factor integrante dado por (2.10) queda $\mu(x) = e^{-3x}$. Multiplicando la ED por e^{-3x} se obtiene:

$$e^{-3x} y' - 3e^{-3x} y = -9xe^{-3x},$$

que puede escribirse como:

$$\frac{d}{dx} [e^{-3x} y] = -9xe^{-3x}$$

Integrando ambos lados de la igualdad,

$$e^{-3x} y = \int -9xe^{-3x} dx = e^{-3x}(3x + 1) + C$$

y despejando y , se tiene:

$$y = 3x + 1 + Ce^{3x}$$

Luego, aplicando la condición inicial $y(2) = 13$, se llega a que $C = 6e^{-6}$ y la solución de la ED anterior queda:

$$y = 6e^{3x-6} + 3x + 1.$$

Ejemplo 2.2.8. Ejemplo de aplicación. Considere un cuerpo de masa m que en el instante $t = 0$ se deja caer desde el reposo. Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas de sentidos opuestos: una debida a la gravedad ($F_w = mg$) y otra, a la resistencia del aire, proporcional a la velocidad v del objeto, que podemos tomar como $F_{aire} = kv$, donde k es una constante de proporcionalidad. Por la segunda ley de Newton, la sumatoria de fuerzas sobre el cuerpo está dada por la siguiente ED lineal :

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}.$$

Obtenga una expresión para la velocidad del cuerpo en función del tiempo t .

Escribiendo la ED en forma estándar se tiene que $P(t) = k/m$ y el factor integrante dado por la Ec. (2.10) queda $\mu(t) = e^{kt/m}$. Multiplicando ambos lados de la ED por $e^{kt/m}$ e identificando el término de la izquierda con el producto de la derivada, se tiene:

$$\frac{d}{dt} [e^{kt/m} v] = e^{kt/m} g$$

Después de integrar ambos lados y despejar v se llega a que :

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-kt/m}.$$

Para determinar C es necesario usar la condición inicial dada. El hecho de que el objeto inicialmente está en reposo implica que $v(0) = 0$. Con esta condición se tiene que $C = -mg/k$ y la expresión para la velocidad queda:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-kt/m} \right).$$

2.2.3. Ecuaciones exactas

La ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ también puede escribirse como

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \quad (2.12)$$

Al encontrar una expresión de la solución general, ésta incluirá las variables x , y y una constante arbitraria C . Podrá expresarse en forma implícita como

$$S(x, y) = C. \quad (2.13)$$

Si se deriva esta ecuación respecto de x , se obtiene:

$$\frac{dS}{dx}(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}y' = 0 \quad (2.14)$$

Tanto la ecuación (2.2.3) como la (2.14), pueden reformularse y expresarse como:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.15)$$

y

$$\frac{dS}{dx}(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy = 0. \quad (2.16)$$

De lo que se obtiene:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy = \frac{dS}{dx}(x, y).$$

Por lo que forma diferencial (2.15) es exacta en el mismo sentido definido en campos vectoriales.

Definición 2.2.9. La forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es **exacta** en una región D si existe una función $S(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

para toda (x, y) en D . Es decir, la diferencial total de $S(x, y)$ satisface

$$dS(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta, entonces la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{es llamada } \mathbf{ecuación exacta}$$

El siguiente teorema provee de un criterio sistemático para determinar si una ED es exacta, dado que, determinarlo a través de su definición implicaría probar con todas las funciones $S(x, y)$ concebibles. Algunas veces por simple inspección esto es factible, pero no siempre resulta tan obvio saber cuál es la S que verifica la definición.

Teorema 2.2.10. Sean las derivadas parciales $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en una región rectangular D . Entonces la ED $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ es exacta en D si y sólo si:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{para todo punto } (x, y) \in D. \quad (2.17)$$

*Demuestra*ción. Para demostrar la condición necesaria hay que probar que si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta, entonces se cumple que $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$ para todo (x, y) de D .

Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta entonces la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es exacta y existe una función S tal que:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy$$

Por lo tanto,

$$M(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial S}{\partial y}$$

Por hipótesis, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)$ existen y son continuas en D , dado que por el teorema de Clairaut se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)$$

para todo (x, y) en D , entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{en } D. \quad (2.18)$$

Para el recíproco se parte de $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$ y quiere probarse que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta; lo cual se lograría si se prueba que el campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$ es

conservativo en la región D .

Para ello se considera un lazo C cualquiera en la región D y se calcula la integral de línea de \mathbf{F} a lo largo C , $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Si se aplica el Teorema de Green, se obtiene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (N_x - M_y) dA,$$

donde R es la región encerrada por C , y dado que (2.18) asegura que $N_x = M_y$ en D , tenemos $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Como el lazo C es arbitrario, por el Teorema 1.2.20, se tiene que \mathbf{F} es conservativo en D y, según el Teorema 1.2.18, $M dx + N dy$ es una forma diferencial exacta.

□

Ejemplo 2.2.11. Resuelva la ED exacta: $3x + 1 + (3y - 1)y' = 0$.

Se reescribe la ED como $(3x + 1)dx + (3y - 1)dy = 0$ donde claramente $M(x, y) = 3x + 1$ y $N(x, y) = 3y - 1$. Es fácil ver que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad \text{corroborándose así que es exacta.}$$

Además ambas derivadas parciales son continuas en todo el plano xy , por lo que la solución es aplicable en cualquier región D en él.

La solución se encuentra utilizando la definición:

$$M(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = 3x + 1 \rightarrow S(x, y) = \int (3x + 1)dx = \frac{3}{2}x^2 + x + g(y).$$

Ahora, por la definición, se sabe que $N(x, y) = \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)$, derivando lo obtenido en el paso anterior, da:

$$N(x, y) = g'(y) = 3y - 1 \rightarrow g(y) = \int (3y - 1)dy = \frac{3}{2}y^2 - y + C$$

Por lo tanto la solución es:

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2) + (x - y) = C.$$

Ejemplo 2.2.12. Encuentre la solución de la ED:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sen x}{y(1 - x^2)}$$

sujeta a

$$y(0) = 2.$$

Primero se comprueba que la ED sea exacta, para esto se identifica $M(x, y) = \cos x \sen x - xy^2$ y $N(x, y) = y(1 - x^2)$ y se evalúan las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 2xy \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy;$$

dado que se cumple la condición (2.17), la ED es exacta. Ahora se procede a hallar la solución implícita:

$$S(x, y) = \int M(x, y)dx = \int (\cos x \sen x - xy^2)dx = \frac{\sen^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + g(y)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -x^2 y + g'(y)$$

Se sabe que esta última derivada parcial coincide con $N(x, y)$, por lo que

$$-x^2y + g'(y) = y - yx^2 \quad \text{con lo que} \quad g'(y) = y$$

por lo tanto $g(y) = \frac{y^2}{2}$. La constante será considerada al final sin pérdida de generalidad.

Así, la solución es:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{y^2(1-x^2)}{2} = C.$$

Al considerar la condición inicial $y(0) = 2$ se tiene que $C = 2$, por lo que la solución al PVI es:

$$\operatorname{sen}^2 x - y^2(1-x^2) = 4$$

2.2.4. Ecuaciones de Bernoulli

Definición 2.2.13. Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de Bernoulli, si es de la forma

$$y' + P(x)y = R(x)y^n.$$

Cuando $n = 0$ ó $n = 1$, la ecuación es lineal y ya se vió cómo resolverla. Pero si $n \neq 0$ y $n \neq 1$ estas ecuaciones requieren otro modo de resolución que consiste en hacer la siguiente transformación:

$$v = y^{(1-n)} \tag{2.19}$$

Esto reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal en v .

Ejemplo 2.2.14. Resuelva la siguiente ED: $y' + \frac{y}{x} = xy^2$ con $x \neq 0$.

Despejando y' se obtiene:

$$y' = -\frac{1}{x}y + xy^2. \tag{2.20}$$

Como en este caso $n = 2$, la transformación (2.19) queda $v = \frac{1}{y}$, y su derivada da $v' = -\frac{1}{y^2}y'$. Reemplazando y e y' en (2.20) se llega a:

$$v' = -y^{-2}\left(-\frac{1}{x}y + xy^2\right) = -\frac{1}{x}y^{-1} - x,$$

que en virtud de la transformación elegida da:

$$v' = \frac{1}{x}v - x \quad \text{o, equivalentemente, } v' - \frac{1}{x}v = -x,$$

que claramente es una ED lineal cuya solución es $v = -x^2 + cx$. Resuelta ésta ED, se vuelve a la variable original y . Recordando que $v = 1/y$ finalmente se tiene:

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx}$$

2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Se ha visto que una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes continuos representa geométricamente un campo de direcciones en una región del plano xy y que cada punto de esa región forma parte de sólo una de las curvas que solucionan dicha ecuación diferencial.

Para ecuaciones diferenciales de orden superior, aún bajo condiciones similares, el significado geométrico no es tan simple. Por ejemplo, en el caso de la familia biparamétrica $y = C_1x + C_2$, que es solución de la EDO $y'' = 0$, cada punto del plano pertenece a infinitas rectas de la familia, que son las infinitas rectas no verticales que pasan por él.

Con respecto a las EDO de orden superior, en este texto sólo se verán métodos para resolver EDO lineales con funciones coeficientes especiales (constantes o de algún tipo particular que se especificará oportunamente). Hay una amplia variedad de EDO de orden superior que no serán tratadas en este texto.

2.3.1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Con frecuencia aparecen en ingeniería y en física las ecuaciones diferenciales lineales, sobre todo de segundo orden. Las propiedades que se enuncian en esta sección son muy importantes y se refieren a la totalidad de las EDO's lineales de orden n .

Según la definición dada en 2.1, una ecuación lineal de n -ésimo orden tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

donde y es una variable dependiente de x ; a_n, \dots, a_0, g son continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo x de I .

Si $g(x) \equiv 0$ la EDO lineal se llama homogénea, es decir,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (2.21)$$

Teorema 2.3.1. Principio de superposición para ecuaciones lineales homogéneas

Sean y_1, y_2, \dots, y_k soluciones de la ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (2.22)$$

en un intervalo I . Entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k,$$

donde c_1, c_2, \dots, c_k son constantes arbitrarias, también es una solución de (2.23) en el intervalo I .

Demostración. Se demuestra el caso $k = 3$ y $n = 2$ para el cual la ED es

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (2.23)$$

con soluciones y_1, y_2 e y_3 . Quiere probarse que la combinación $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ también es solución de (2.23). Al sustituir esta solución en (2.23) se tiene:

$$\begin{aligned}
a_2y'' + a_1y' + a_0y &= a_2(c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_3y_3'') + a_1(c_1y_1' + c_2y_2' + c_3y_3') + a_0(c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3) \\
&= c_1[a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1] + c_2[a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2] + c_3[a_2y_3'' + a_1y_3' + a_0y_3] \\
&= c_10 + c_20 + c_30 \quad \text{ya que } (y_1, y_2, y_3 \text{ son soluciones de la ED}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo que la combinación también satisface (2.23). □

Como consecuencia de este teorema, tenemos el siguiente corolario de mucha importancia:

Corolario 2.3.2. *Todas las soluciones de una ED lineal homogénea dada forman un espacio vectorial de funciones (subespacio del espacio vectorial de funciones derivables hasta el orden n).*

Observación 2.3.3. *Dado que las soluciones de una ED lineal homogénea dada forman un espacio vectorial de funciones, en particular se tiene que*

- *una ecuación diferencial lineal homogénea tiene siempre la solución trivial $y = 0$ (el vector nulo pertenece al espacio vectorial);*
- *un múltiplo constante $y = c_1y_1$ de una solución y_1 de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución de ella.*

2.3.2. Dependencia e independencia lineal de soluciones

Definición 2.3.4. *Si toda solución de una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I se puede obtener a partir de una familia n-paramétrica de soluciones, $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, excepto posiblemente soluciones singulares, eligiendo apropiadamente las constantes c_1, c_2, \dots, c_n , entonces diremos que la familia es la **solución general** de dicha ecuación diferencial.*

Observación 2.3.5. *La solución general de una ecuación diferencial de orden n en un intervalo I es una expresión paramétrica (que representa a una familia de soluciones en I) tal que **toda** solución de la ecuación dada se puede obtener a partir de esta expresión, dando valores apropiados a los parámetros, excepto posiblemente las soluciones singulares.*

Ejemplo 2.3.6.

- *Para la EDO no lineal $y'(x) = x\sqrt{y}$, las funciones dadas por $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ son soluciones: se tiene una familia uniparamétrica de soluciones que es la solución general.*

Una solución particular se obtiene dando valores a c, por ejemplo $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right)^2$. Además, la función $y \equiv 0$ es solución y no es miembro de la familia, por lo que es una solución singular.

- *Para la EDO lineal de segundo orden $y''(x) - 9y(x) = 0$, las funciones $y(x) = e^{3x}$ y $y(x) = e^{-3x}$ son soluciones.*

La solución general es $y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ y es una familia biparamétrica de soluciones.

Definición 2.3.7. La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente dependiente (LD)** en I si y sólo si existen c_1, \dots, c_n , no todos nulos tales que

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0,$$

para toda t en el intervalo. En otro caso se dice que la familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente independiente (LI)** en I .

Ejemplo 2.3.8.

1. $\{f_1, f_2\}$ en $[0, 1]$, $f_1(x) = x$; $f_2(x) = |x|$. El conjunto $\{f_1, f_2\}$ es LD en $[0, 1]$ ya que $f_1 - f_2 = \mathbf{0}$.
2. $\{f_1, f_2\}$ como en el ejemplo anterior pero en $[-1, 1]$. Aquí el conjunto es LI en $[-1, 1]$.
3. $\{f_1, f_2\}$, con $f_1(x) = \operatorname{senh}(x)$ y $f_2 = \cosh(x)$, es LI en cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Lo mismo ocurre con el conjunto $\{f_3, f_4\}$, si $f_3(x) = e^x$ y $f_4(x) = e^{-x}$. Pero si se considera $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ es fácil ver que es LD, cualquiera sea el intervalo considerado en \mathbb{R}

Definición 2.3.9. El **Wronskiano** de una familia $\{f_1, \dots, f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n-1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Observación 2.3.10. Notar que si la EDO es de orden n , se debe contar con n soluciones.

Observación 2.3.11. Si la familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente dependiente en el intervalo I , entonces $W_{f_1, \dots, f_n}(x) = 0$ para toda $x \in I$. La implicación contrarrecíproca dice que si $W_{f_1, \dots, f_n}(x) \neq 0$ para al menos una $x \in I$, entonces la familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente independiente en el intervalo I .

El siguiente teorema da una afirmación más fuerte, para el caso de que las funciones sean todas soluciones de una misma ecuación diferencial.

Teorema 2.3.12. Criterio para soluciones linealmente independientes

Un conjunto de n soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I es linealmente independiente si y sólo si el Wronskiano, $W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x)$, es distinto de cero para toda $x \in I$.

2.3.3. Solución general de una EDO lineal homogénea

Definición 2.3.13. Dada una ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden, se llama **conjunto fundamental de soluciones** a cualquier conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de n soluciones de la ecuación linealmente independientes en un intervalo I .

Ejemplo 2.3.14. Como ya vimos en el Ejemplo 2.3.6, las funciones $y_1(x) = e^{3x}$ y $y_2(x)e^{-3x}$ son soluciones en \mathbb{R} de la EDO lineal de segundo orden $y''(x) - 9y(x) = 0$; el Wronskiano de esta familia de funciones es

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

y esto prueba que la familia de soluciones $\{y_1, y_2\}$ es LI y, por lo tanto, es un conjunto fundamental de soluciones de la ED de segundo orden dada.

Teorema 2.3.15. Existencia de conjunto fundamental para una ED lineal homogénea

Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (2.24)$$

cuyas funciones coeficientes a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) son continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.24) en el intervalo I .

Teorema 2.3.16. Solución general para una ecuación homogénea^a

Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (2.25)$$

cuyas funciones coeficientes a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) son continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.24) en el intervalo I . Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo se puede expresar como:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias.

^aSe ofrece una demostración de este Teorema en <https://youtu.be/Dj3xNyZ4YFs>

*Demuestra*ón. Se demuestra el caso $n = 2$. Sea

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2.26)$$

y sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental para (2.26). Se debe probar que dada cualquier solución ϕ de (2.26), ésta se puede expresar como combinación lineal de las funciones del conjunto fundamental dado.

Supongamos que ϕ es una solución en I de (2.26).

Dado que $\{y_1, y_2\}$ es una familia linealmente independiente de soluciones en I , en virtud del Teorema 2.3.12, se tiene que $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Consideremos un valor particular $x_0 \in I$, entonces $W_{y_1,y_2}(x_0) \neq 0$.

Llamemos $k_1 = \phi(x_0)$ y $k_2 = \phi'(x_0)$ y formemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 = k_1 \\ y'_1(x_0)c_1 + y'_2(x_0)c_2 = k_2 \end{cases} \quad (2.27)$$

en el que las incógnitas son c_1 y c_2 . Dado que el determinante de la matriz del sistema es $W_{y_1, y_2}(x_0) \neq 0$, este sistema tiene solución única, digamos (\bar{c}_1, \bar{c}_2) .

Observemos que la función $G(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$ es solución del problema con valores iniciales (PVI)

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0; \\ y(x_0) = k_1; \\ y'(x_0) = k_2. \end{cases} \quad (2.28)$$

y la función ϕ también resuelve el PVI (2.28). Según el Teorema 2.1.10 (de existencia de solución única para PVI), $\phi(x) = G(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x)$, con lo cual se ha probado que ϕ es una combinación lineal de las funciones y_1 e y_2 . \square

Observación 2.3.17. *Este teorema asegura que un conjunto fundamental de soluciones de una EDO lineal homogénea de orden n es una familia generadora del espacio vectorial de funciones solución de esa EDO.*

Ejemplo 2.3.18. Retomando los Ejemplos 2.3.6 y 2.3.14, para la EDO lineal de segundo orden $y''(x) - 9y(x) = 0$, aplicando el Teorema 2.3.16, dado que las funciones $y_1(x) = e^{3x}$ y $y_2(x)e^{-3x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la EDO, la solución general es $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$.

2.3.4. Solución general de una EDO lineal no homogénea

Teorema 2.3.19. Solución general para una ecuación no homogénea

Dada la ecuación diferencial lineal no homogénea de n -ésimo orden,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.29)$$

donde a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y g son continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada en el intervalo I y sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (2.29) en I . Entonces la solución general de la ecuación (2.29) en el intervalo I se puede expresar como

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p,$$

donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes arbitrarias.

Observación 2.3.20. Muchas veces la conclusión de este teorema se escribe: $y = y_c + y_p$, para indicar que es una suma de la solución general de la EDO homogénea asociada (llamada función complementaria) y de una solución particular.

*Demuestra*ción. Se prueba el caso $n = 2$, donde

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g. \quad (2.30)$$

Sea $\phi(x)$ una solución de (2.30) en I . Se debe probar que existen coeficientes \bar{c}_1, \bar{c}_2 tales que $\phi = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + y_p$.

Se tiene que y_p y ϕ son soluciones de (2.30); probaremos que la diferencia $\phi - y_p$ es solución de EDO lineal homogénea asociada a (2.30). En efecto,

$$a_2(\phi - y_p)'' + a_1(\phi - y_p)' + a_0(\phi - y_p) = a_2\phi'' + a_1\phi' + a_0\phi - a_2y_p'' - a_1y_p' - a_0y_p = g - g = 0.$$

Luego, por el Teorema 2.3.16, podemos asegurar que existen constantes \bar{c}_1 y \bar{c}_2 tales que $\phi - y_p = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2$. De esta manera se tiene que $\phi = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + y_p$. \square

Teorema 2.3.21. Principio de superposición para ED no homogéneas

Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n -ésimo orden

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),$$

⋮

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x),$$

que sólo difieren en los términos independientes.

Sean y_{p_1}, \dots, y_{p_k} soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I . Entonces,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g_1 + g_2 + \dots + g_k.$$

Demostración. Demostramos el caso $n = 2$ y $k = 3$. Debemos verificar que, si y_{p_1} es solución de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_1$, y_{p_2} es solución de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_2$ y y_{p_3} es solución de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_3$, entonces $y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ es solución de

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_1 + g_2 + g_3. \quad (2.31)$$

Se comprueba derivando:

$$\begin{aligned} & a_2(y_{p_1}'' + y_{p_2}'' + y_{p_3}'') + a_1(y_{p_1}' + y_{p_2}' + y_{p_3}') + a_0(y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}) = \\ &= (a_2y_{p_1}'' + a_1y_{p_1}' + a_0y_{p_1}) + (a_2y_{p_2}'' + a_1y_{p_2}' + a_0y_{p_2}) + (a_2y_{p_3}'' + a_1y_{p_3}' + a_0y_{p_3}) \\ &= g_1 + g_2 + g_3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta última igualdad proviene de haber elegido las y_{p_i} , con $i = 1, 2, 3$, entre las soluciones de cada ED no homogénea. \square

Ejemplo 2.3.22. Si $y_{p_1}(x) = e^{2x}$ es una solución particular de $y''(x) - 3y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x}$ e $y_{p_2}(x) = xe^x$ es una solución particular de $y''(x) - 3y'(x) + 4y(x) = 2xe^x - e^x$, por el teorema anterior se tiene que:

$$y = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = e^{2x} + xe^x$$

es una solución de:

$$y''(x) - 3y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

2.3.5. EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes

En esta sección se verá el procedimiento para resolver EDO lineales homogéneas de orden superior,

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2.33)$$

donde los coeficientes a_n, \dots, a_0 son constantes reales y $a_n \neq 0$.

EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes de segundo orden

Un caso particular de la ecuación (2.33) que tiene especial importancia ya que aparece, por ejemplo, al estudiar los sistemas masa-resorte, es aquel en el que $n = 2$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2.34)$$

donde a_2, a_1, a_0 son constantes y $a_2 \neq 0$. Para resolver (2.34) se propone como solución

$$y = e^{rx}, \quad (2.35)$$

donde r es una constante.

Si se sustituye $y = e^{rx}$ en (2.34) se tiene:

$$a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0,$$

$$e^{rx} (a_2 r^2 + a_1 r + a_0) = 0.$$

Como $y = e^{rx}$ nunca es cero, se puede dividir por esta cantidad para obtener:

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) es la **ecuación auxiliar o característica** asociada a la ecuación homogénea (2.34).

Como (2.36) es una ecuación lineal de segundo grado, puede ocurrir uno de tres casos.

- **Raíces reales distintas.** Si la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales distintas, r_1 y r_2 , sustituyéndolas en (2.35), se obtiene las soluciones $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$. Estas dos soluciones son LI en $(-\infty, \infty)$ (se propone como ejercicio verificar este hecho) y por lo tanto forman un conjunto fundamental para esta EDO. La solución de (2.34), de acuerdo al Teorema de solución general de una ecuación lineal homogénea (2.3.16), es entonces:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \quad (2.37)$$

- **Raíces reales iguales.** Si en (2.36) se tiene $r_1 = r_2 = r$, se obtiene sólo una solución exponencial $y_1 = e^{rx}$. Como la multiplicación de e^{rx} por una constante no produce una segunda solución LI con la primera, se multiplica por una función y la más sencilla es $u(x) = x$. Es fácil probar que

$y_2 = xe^{rx}$ también es solución de la ED y que y_1 y y_2 son LI en \mathbb{R} (se deja estas pruebas como ejercicio). La solución general de (2.34) es entonces:

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}. \quad (2.38)$$

- **Raíces complejas conjugadas.** Si (2.36) tiene raíces complejas conjugadas, r_1 y r_2 , digamos $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, entonces no hay diferencia entre este caso y el de raíces reales distintas, y la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (2.39)$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales en lugar de exponenciales complejas. Con este fin se usa la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, donde θ es cualquier número real. Así, $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x)$ y la ecuación (2.39) queda:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2 e^{\alpha x} (\cos\beta x - i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x} ((c_1 + c_2) \cos\beta x + i(c_1 - c_2) \sin\beta x) \end{aligned}$$

Como esta y es solución de (2.35) para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2 , aún complejos, tomando $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ se ve que $y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$ es solución y tomando $c_1 = -\frac{i}{2}$ y $c_2 = \frac{i}{2}$, se encuentra $y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$ que son soluciones LI (la prueba de esto se deja como ejercicio).

Luego, por el Teorema de solución general para una ecuación lineal homogénea (2.3.16),

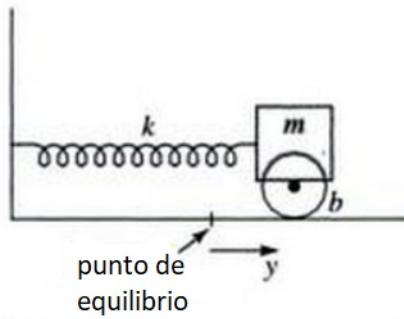
$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} (\cos\beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\sin\beta x), \quad (2.40)$$

es solución de (2.34).

Ejemplo 2.3.23.

- Dada la ED $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$, la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r - 1 = 0$ y las raíces de esta ecuación son reales distintas: $r_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $r_2 = -1 - \sqrt{2}$. En consecuencia, la solución general de la ED según (2.37) es $y(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}$.
- Dada la ED $y''(t) + 4y(t)' + 4y(t) = 0$, la ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 4 = 0$ y las raíces son reales repetidas $r = -2$. La solución general está entonces dada por (2.37) y es $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$.
- Dada la ED $y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0$, la ecuación auxiliar es $r^2 + 2r + 4 = 0$ y las raíces son complejas conjugadas: $r = -1 + i\sqrt{3}$. Luego, la solución general de la ED está dada por (2.38) y es $y(x) = c_1 e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$.

Ejemplo 2.3.24. Ejemplo de aplicación: sistema masa-resorte Suponga que tiene un sistema masa-resorte como el que se muestra en la figura. Diseñe una ecuación diferencial que gobierne el movimiento del oscilador, teniendo en cuenta que las fuerzas que intervienen son la fuerza elástica del resorte, la fricción (o amortiguamiento) y posibles influencias externas.



- Al desplazar la masa con respecto al equilibrio, el resorte se estira o comprime y ejerce una fuerza que se opone al desplazamiento. Según la ley de Hooke, esta fuerza es:

$$F_{\text{resorte}} = -ky,$$

donde k es la constante del resorte. El signo negativo indica la naturaleza de oposición de la fuerza.

- Todos los osciladores reales están sometidos a alguna fricción. Estas fuerzas son disipativas y el trabajo que realizan es transformado, por ejemplo, en calor. Como consecuencia, el movimiento está amortiguado y la magnitud de este amortiguamiento es proporcional a la velocidad, es decir:

$$F_{\text{friccion}} = -b \frac{dy}{dt}$$

donde b es el coeficiente de amortiguamiento.

- Sobre el sistema pueden actuar además otras fuerzas que se consideran externas (F_{ext}). Aunque éstas pueden ser gravitacionales, magnéticas o eléctricas, lo usual es que las fuerzas externas más importantes sean transmitidas a la masa, por ejemplo, sacudiendo el sistema.

Teniendo esto en cuenta, la Segunda Ley de Newton proporciona la ecuación diferencial del sistema masa-resorte:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_{\text{friccion}} + F_{\text{resorte}} + F_{\text{ext}}$$

Reemplazando,

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = F_{\text{ext}}(t) \quad (2.41)$$

Suponga ahora que se quiere encontrar la función desplazamiento para el caso concreto en que $F_{\text{ext}} = 0$, $m = 1$, $k = 25$ y $b = 10$. La ecuación (2.41) entonces resulta: $y'' + 10y' + 25y = 0$. La ecuación auxiliar de esta ED es $r^2 + 10r + 25 = 0$ y sus raíces son reales repetidas, $r = -5$. Por lo tanto, el desplazamiento del resorte está dado por $y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t}$.

Ejemplo 2.3.25. Otro ejemplo de aplicación. Suponga que $F_{\text{ext}} = 0$, trabajando con la ecuación (2.41), encuentre las soluciones del sistema cuando está sobreamortiguado, subamortiguado y cuando el amortiguamiento es crítico.

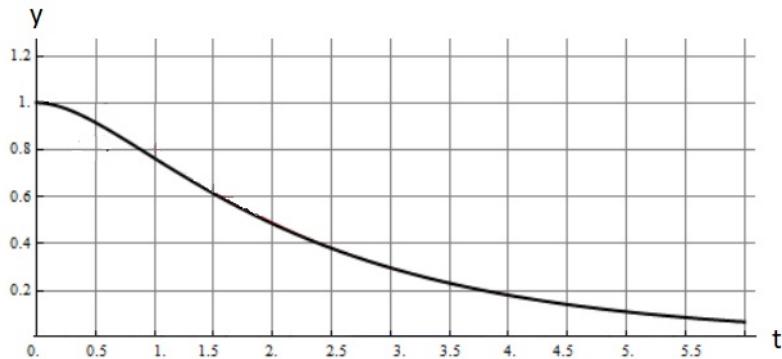
La ecuación (2.41) puede escribirse como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

donde $2\lambda = b/m$ y $\omega^2 = k/m$. La ecuación auxiliar de esta ED es $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$ y las raíces son $r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ y $r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$. Esto genera tres casos posibles, dependiendo del signo del discriminante $\lambda^2 - \omega^2$:

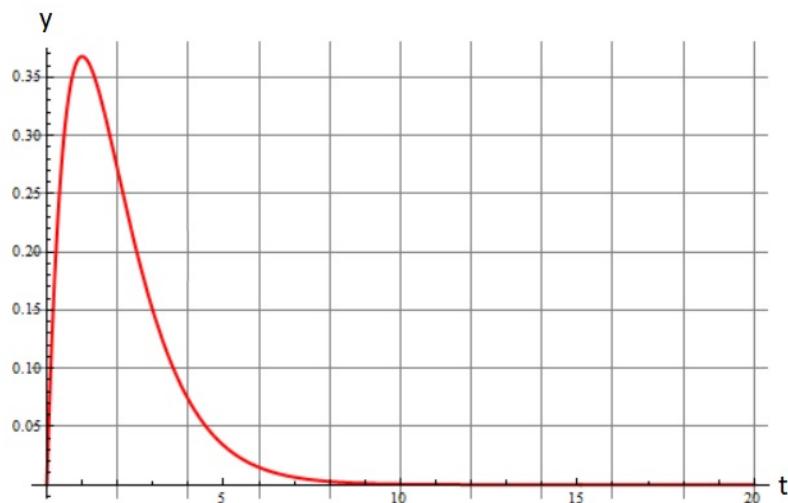
- **Sistema sobreamortiguado,** $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. Es aquel donde el amortiguamiento b es mayor que la constante del resorte k . No ocurre movimiento oscilatorio ya que la amortiguación es muy fuerte. Las raíces son reales distintas y por lo tanto la solución de la ED está dada por:

$$y(t) = c_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t} + c_2 e^{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t}$$



- **Sistema críticamente amortiguado,** $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. El sistema queda en un estado crítico donde cualquier variación en la fuerza puede hacer que pase a ser sobreamortiguado o subamortiguado. Al liberar la masa, ésta retornará rápidamente a su posición de equilibrio y sin ningún tipo de oscilación. Las raíces son reales iguales y por lo tanto la solución de la ED está dada por:

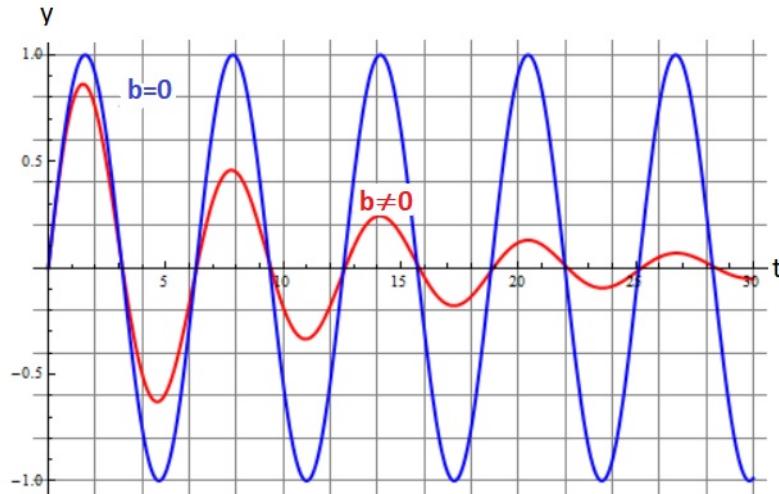
$$y(t) = e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t)$$



- **Sistema subamortiguado,** $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. El coeficiente de amortiguamiento es menor que la constante del resorte, lo que permite un movimiento oscilatorio hasta que la masa regrese a su posición de equilibrio. Sin embargo, a diferencia de un movimiento armónico simple (en azul en la figura), la amplitud no es constante, sino que está amortiguada y las vibraciones tienden a extinguirse a medida que el tiempo transciere. Cuanto mayor sea el amortiguamiento, más

rápido dejarán de notarse las vibraciones. Las raíces son complejas conjugadas y la solución de la ED es:

$$y(t) = c_1 e^{-\lambda t} \left(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t) \right)$$



EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden superior

El método desarrollado para el caso de $n = 2$ puede generalizarse para una ecuación diferencial de n -ésimo orden dada por la ecuación (2.33). Si todas las raíces son reales y distintas, la solución general será:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (2.42)$$

Si, por el contrario, hay una raíz r_i con multiplicidad k (es decir, k raíces son iguales a r_i), la solución general debe contener la combinación lineal:

$$c_1 e^{r_i x} + c_2 x e^{r_i x} + c_3 x^2 e^{r_i x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{r_i x} \quad (2.43)$$

2.3.6. EDO lineales no homogéneas

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \quad (2.44)$$

se deben hacer dos cosas:

1. Encontrar la función complementaria y_c que es la solución general de la ED homogénea asociada a (2.44). Cómo resolver la ED homogénea ya se desarrolló en la sección anterior.
2. Encontrar alguna solución particular y_p de la ecuación no homogénea (2.44). Para esto, se desarrollarán dos métodos: el de los coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros.

Luego, por el teorema de solución general de ecuaciones no homogéneas, la solución de la ecuación (2.44) será:

$$y = y_c + y_p.$$

Método de los coeficientes indeterminados

La idea detrás de este método es conjeturar la forma de y_p según la función $g(x)$ y luego establecer los coeficientes de y_p de modo que efectivamente sea solución de la ecuación diferencial. El método se limita a ED lineales para las cuales:

- los coeficientes a_n, \dots, a_0 de (2.44) son constantes.
- $g(x)$ es una constante, una función polinomial, una función seno o coseno, una exponencial o sumas o productos de estas funciones.

Esto se debe a que las derivadas que involucran sumas o productos de constantes, polinomios, exponenciales, senos y cosenos, vuelven a dar constantes, polinomios, exponenciales, senos y cosenos. Puesto que la combinación lineal de $a_n y_p^n + a_{n-1} y_p^{n-1} + \dots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser $g(x)$, parece razonable suponer que y_p tiene la misma forma que $g(x)$.

En las tablas 2.1 y 2.2 se muestran algunos casos para $g(x)$ junto con la forma correspondiente de la solución particular. Se da por sentado que las funciones de y_p no se duplican con las de y_c . Siempre hay que tener en cuenta que ninguna función de la solución particular sea una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

Ejemplo	y_p
7	A
$3x^2 + 5$	$Ax^2 + Bx + C$
$\sin(7x)$	$A \sin(7x) + B \cos(7x)$
$\cos(3x)$	$A \sin(3x) + B \cos(3x)$
e^{-x}	Ae^{-x}
$x^2 e^{-x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$
$e^{2x} \sin(7x)$	$e^{2x}(A \sin(7x) + B \cos(7x))$
$(x+3)e^{2x} \sin(7x)$	$e^{2x}((Ax+B)\sin(7x) + (Cx+D)\cos(7x))$

Tabla 2.1: Tabla con ejemplos.

$g(x)$	y_p : función de prueba
a	A
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$
$\sin(ax)$	$A \sin(ax) + B \cos(ax)$
$\cos(ax)$	$A \sin(ax) + B \cos(ax)$
e^{ax}	Ae^{ax}
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{ax}$	$(A_n x^n + \dots + A_0) e^{ax}$
$e^{bx} \sin(ax)$	$e^{bx}(A \sin(ax) + B \cos(ax))$
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{bx} \sin(ax)$	$e^{bx}((A_n x^n + \dots + A_0) \sin(ax) + (B_n x^n + \dots + B_0) \cos(ax))$

Tabla 2.2: Tabla con casos genéricos.

Ejemplo 2.3.26. Resuelva $y'' + y' + y = 2\sin(3x)$.

Primero debe encontrarse la función complementaria que es solución de la ED homogénea asociada, es decir de $y'' + y' + y = 0$. La ecuación característica de esta ED tiene raíces complejas conjugadas $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ y su solución es:

$$y_c = c_1 e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

Ahora, debido a que $g(x)$ es una constante multiplicada por una función seno, se puede suponer que la solución particular tiene la forma:

$$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x)$$

Se propone esto en lugar de $y_p = A\sin(3x)$ porque las derivadas sucesivas de $\sin(3x)$ producen también $\cos(3x)$.

Derivando la y_p propuesta y sustituyendo los valores en la ED se obtiene, después de reagrupar,

$$y_p'' + y_p' + y_p = (-8A - 3B)\sin(3x) + (3A - 8B)\cos(3x) = 2\sin(3x)$$

Igualando los coeficientes que acompañan al seno y al coseno se tiene:

$$-8A - 3B = 2, \quad 3A - 8B = 0$$

De lo que se deduce que $A = -16/73$ y $B = -6/73$. Una solución particular de la ecuación entonces es:

$$y_p = -\frac{16}{73}\sin(3x) - \frac{6}{73}\cos(3x)$$

y la solución general de la ED dada, según el teorema de solución general para ecuaciones no homogéneas, es:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{16}{73}\sin(3x) - \frac{6}{73}\cos(3x).$$

Método de variación de parámetros

El método se limita a ED lineales donde:

- los coeficientes a_n, \dots, a_0 de (2.44) son funciones de variable x (pueden ser funciones constantes), es decir $a_i = a_i(x)$. Por lo tanto no tiene restricciones en el tipo de funciones coeficientes más que su continuidad y que $a_n(x) \neq 0$ en algún intervalo.
- la ED pueda escribirse de forma estándar, por ejemplo, para $n = 2$:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (2.45)$$

donde $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ y $f(x) = g(x)/a_2(x)$ son continuas en algún intervalo común.

El método se basa en suponer una solución de la forma:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (2.46)$$

donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea asociada de (2.45).

Derivando la solución particular propuesta en (2.46) se tiene:

$$y'_p = u'_1(x)y_1(x) + u_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y_2(x) + u_2(x)y'_2(x)$$

$$y''_p = u''_1(x)y_1(x) + 2u'_1(x)y'_1(x) + u_1(x)y''_1(x) + u''_2(x)y_2(x) + 2u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x);$$

reemplazando y_p y sus derivadas en la ecuación diferencial (2.45) se tiene:

$$\begin{aligned} y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p &= \\ &= (u''_1(x)y_1(x) + 2u'_1(x)y'_1(x) + u_1(x)y''_1(x) + u''_2(x)y_2(x) + 2u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x)) + \\ &\quad P(x)(u'_1(x)y_1(x) + u_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y_2(x) + u_2(x)y'_2(x)) + Q(x)(u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)) \\ &= u_1(y''_1 + Py'_1 + Qy_1) + u_2(y''_2 + Py'_2 + Qy_2) + y'_1u''_1 + u'_1y'_1 + y_2u''_2 + u'_2y'_2 \\ &\quad + P(y_1u'_1 + y_2u'_2) + y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x), \end{aligned}$$

donde el primer y segundo término de la penúltima fila son ceros porque y_1 e y_2 son soluciones de la ED homogénea asociada. Luego,

$$y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p = \frac{d}{dx}(y_1u'_1 + y_2u'_2) + P(y_1u'_1 + y_2u'_2) + y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x) \quad (2.47)$$

Para evitar la aparición de segundas derivadas de incógnitas se impone la condición $y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$. Esto lleva a que (2.47) se reduzca a $y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$. Por lo tanto, para encontrar u_1 y u_2 hay que resolver el sistema:

$$y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$$

$$y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$$

y luego integrar u'_1 y u'_2 . Si el sistema se resuelve, por ejemplo, usando la regla de Cramer, se tiene que:

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2f(x)}{W}, \quad u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1f(x)}{W} \quad (2.48)$$

donde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}.$$

Notar que el determinante W es justamente el Wronskiano de $\{y_1, y_2\}$ y, por la independencia lineal de esta familia de soluciones, puede asegurarse que es distinto de cero para toda x en el intervalo.

Así se determinan u'_1 y u'_2 y luego, integrando, se hallan u_1 y u_2 . Finalmente, sustituyendo estas funciones en (2.46), se forma la solución $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$. Nótese la importancia de respetar los subíndices para que cada función u_i quede multiplicada por la correspondiente y_i en esta expresión.

Ejemplo 2.3.27. Resuelva $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$

Primero hay que encontrar la solución y_c de la ecuación homogénea asociada $y'' - 4y' + 4y = 0$. Las raíces de la ecuación característica son reales repetidas $r = 2$, por lo que $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Con las identificaciones $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = xe^{2x}$ se puede calcular el Wronskiano:

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

Puesto que la ED dada ya está en la forma canónica o estándar, se identifica $f(x) = (x+1)e^{2x}$ y por las relaciones (2.48) se tiene:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}$$

y

$$u'_1 = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \quad u'_2 = -\frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1$$

Luego, integrando las formas encontradas para u'_1 y u'_2 se tiene que $u_1 = -1/3x^3 - 1/2x^2$ y $u_2 = 1/2x^2 + x$. Por lo tanto, la ecuación (2.46) para este caso queda:

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) xe^{2x} = \frac{1}{6}x^3 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

y la solución de la ED dada, según el teorema de solución general para ecuaciones no homogéneas, es:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}.$$

2.3.7. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler son un tipo de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables.

Se desarrollará un método para resolver ecuaciones de Euler de segundo orden, pero hay que tener en cuenta que no es el único y que pueden ser extendidos para resolver ED de Euler de orden superior al segundo.

Definición 2.3.28. Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables se dice que es de Euler si se expresa como

$$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = r(x),$$

donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$.

Es decir que cada término del lado izquierdo de la ED es de la forma $kx^n y^{(n)}$, donde k es una constante. Sólo resolveremos en este curso ED de Euler para las que $r \equiv 0$. El método consiste en convertir la ecuación de Euler en una con coeficientes constantes, resolverla como tal y luego recuperar la solución buscada. Esta conversión se hace mediante una sustitución:

$$z(x) = \ln(x);$$

claramente para aplicarla consideraremos $x > 0$ o cualquier subintervalo de éste.

Con esta sustitución propuesta y resulta ser la función compuesta:

$$Y(z(x)) = Y(\ln(x)) = y(x).$$

Así

$$y'(x) = \frac{1}{x} Y'(z)$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2} Y''(z) - \frac{1}{x^2} Y'(z),$$

con lo que al reemplazar en la ED se tiene:

$$\begin{aligned} ax^2 \left(\frac{1}{x^2} Y'' - \frac{1}{x^2} Y' \right) + bx \frac{1}{x} Y' + cY &= 0 \\ aY'' + (b-a)Y' + cY &= 0, \end{aligned}$$

o sea, una ED lineal homogénea de segundo orden en $Y(z)$ que se resuelve por algún método de los ya estudiados para obtener una solución general $Y(z) = C_1y_1(z) + C_2y_2(z)$; de la que puede obtenerse la solución general de la ED dada como:

$$y(x) = C_1y_1(\ln(x)) + C_2y_2(\ln(x)).$$

Ejemplo 2.3.29. Hallar la solución de $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$.

Con la sustitución propuesta, $Y(z(x)) = Y(\ln(x)) = y(x)$, y sus derivadas hasta segundo orden:

$$y''(x) = \frac{1}{x^2}Y''(z) - \frac{1}{x^2}Y'(z),$$

tenemos:

$$\begin{aligned} x^2\left(\frac{1}{x^2}Y'' - \frac{1}{x^2}Y'\right) - 2x\frac{1}{x}Y' - 4Y &= 0 \\ Y'' - 3Y' - 4Y &= 0, \end{aligned}$$

que tiene como solución general: $Y(z) = C_1e^{4z} + C_2e^{-z}$. Por lo que la solución general de la ED dada es:

$$y(x) = C_1x^4 + C_2x^{-1}.$$

2.3.8. Soluciones en series de potencias

En esta sección se verá otro método para resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes variables que consiste en proponer como solución una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2.49)$$

y luego, reemplazando $y(x)$ y sus derivadas en la ED, determinar los coeficientes de la serie que satisfacen la ecuación diferencial. En este sentido, la metodología es la misma que la usada en el método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo 2.3.30. Determine una solución en series de potencia para $y' + 2xy = 0$.

Se propone $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y la tarea consiste en determinar los coeficientes c_n . Para esto se necesita derivar la solución propuesta,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

y reescribir la ED:

$$y' + 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Lo que se simplifica como:

$$y' + 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0.$$

Para sumar las dos series se deben sumar los coeficientes de potencias semejantes de x . Si se escriben

los primeros términos de esta suma se obtiene:

$$(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots) + (2c_0x + 2c_1x^2 + 2c_2x^3 + \dots) = 0,$$

$$c_1 + (2c_2 + 2c_0)x + (3c_3 + 2c_1)x^2 + (4c_4 + 2c_2)x^3 + \dots = 0$$

Para que la serie de potencias del lado izquierdo se anule, todos los coeficientes deben ser cero. Así, $c_1 = 0$, $2c_2 + 2c_0 = 0$, $3c_3 + 2c_1 = 0$, $4c_4 + 2c_2 = 0$, etc. Al resolver este sistema se tiene que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -c_0, \quad c_3 = -\frac{2}{3}c_1 = 0, \quad c_4 = -\frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

Por lo tanto, la serie de potencias para la solución asume la forma:

$$y(x) = c_0 - c_0x^2 + \frac{1}{2}c_0x^4 + \dots = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Capítulo 3

Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica en términos de una suma infinita de senos y cosenos, que se logra gracias a la ortogonalidad de las funciones senos y cosenos. La parte de la matemática que estudia las series de Fourier es el análisis armónico y se usa para expresar una función periódica a través de un conjunto de términos simples, con los que se trabaja por separado y luego se recombinan para obtener las soluciones a los problemas originales o, al menos, aproximaciones a las mismas. En particular, este procedimiento puede ser muy útil para resolver ecuaciones diferenciales, expresando una función por medio de su serie de Fourier.

Si bien es cierto que cualquier conjunto de funciones que formen un sistema ortogonal completo puede dar lugar a series generalizadas de Fourier, en este texto sólo analizaremos las series trigonométricas de Fourier.

3.1. Conceptos preliminares

3.1.1. Producto interno

Conocemos el concepto de producto interno de vectores en \mathbb{R}^n , usualmente definido para dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ por la suma de los productos de las componentes de los vectores:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k.$$

Este concepto se puede generalizar y extender de una manera “natural” a espacios de funciones.

En primer lugar consideremos el conjunto $\mathcal{R}[a, b]$ formado por todas las funciones integrables (y acotadas) en el intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{R}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R} \right\}.$$

Este conjunto $\mathcal{R}[a, b]$ forma un espacio vectorial con la adición usual de funciones y la multiplicación por un escalar real: si f y g pertenecen a $\mathcal{R}[a, b]$,

$$f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dada por } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dada por } (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

también son funciones de $\mathcal{R}[a, b]$ y se satisfacen los axiomas necesarios de espacio vectorial o lineal.

Más aún, el producto usual de funciones de $\mathcal{R}[a, b]$,

$$fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dada por } (fg)(x) = f(x)g(x),$$

da por resultado una nueva función de este conjunto, con lo cual podemos definir un producto interno o escalar en este espacio vectorial, de la siguiente manera.

Definición 3.1.1 (Producto interno o escalar de funciones). ^a

El producto interno de dos funciones f_1 y f_2 de $\mathcal{R}[a, b]$ es el número

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx. \quad (3.1)$$

^aPara que sea un producto interno necesitamos que las funciones sean continuas en el intervalo $[a, b]$. Cuando las funciones no son continuas tenemos en realidad un **pseudo producto interno**, con el que se trabaja sin inconvenientes.

Observación 3.1.2. El producto escalar de dos funciones de $\mathcal{R}[a, b]$ es un número real.

Ejemplo 3.1.3. Sean $f_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \sin(x)$ y $f_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_2(x) = 1$, dos funciones de $\mathcal{R}[0, \pi]$. El producto escalar $\langle f_1, f_2 \rangle$ es

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^\pi \sin(x) dx = (-\cos(x))|_0^\pi = 2.$$

Así como en \mathbb{R}^n consideramos ortogonales a aquellos vectores que cumplen que el producto escalar entre ellos es nulo, contamos con una definición análoga para funciones. Cabe destacar que este concepto de ortogonalidad de funciones no guarda relación con los gráficos de las funciones.

Funciones ortogonales

Definición 3.1.4 (Funciones ortogonales).

Dos funciones f_1 y f_2 de $\mathcal{R}[a, b]$ son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x) dx = 0. \quad (3.2)$$

Ejemplo 3.1.5. Sean $f_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \sin(x)$ y $f_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_2(x) = 1$, ambas funciones de $\mathcal{R}[0, \pi]$. Como se vio en el Ejemplo 3.1.3, $\langle f_1, f_2 \rangle = 2$, mostrando que estas funciones no son ortogonales en $[0, \pi]$.

Sin embargo, si consideramos las funciones $f_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_3(x) = \sin(x)$ y $f_4 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_4(x) = 1$, ambas de $\mathcal{R}[0, 2\pi]$, que sólo se diferencian de las anteriores en el dominio, tenemos:

$$\langle f_3, f_4 \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = (-\cos(x))|_0^{2\pi} = 0.$$

Las funciones f_3 y f_4 sí son ortogonales en $[0, 2\pi]$. Esto pone de manifiesto que es muy importante tener en cuenta en qué conjunto se está definiendo las funciones.

Familia ortogonal de funciones

Definición 3.1.6 (Conjunto ortogonal).

Una familia o conjunto finito o infinito de funciones de $\mathcal{R}[a, b]$, $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$, se dice que es ortogonal en el intervalo $[a, b]$ si

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_a^b \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots$, tales que $i \neq j$.

Ejemplo 3.1.7. Analizar la ortogonalidad de la familia $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, \dots\}$ en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.

Primero trabajemos en el intervalo $[-p, p]$.

Probemos que la función constante 1 es ortogonal a todas las funciones $\cos \frac{n\pi x}{p}$ y $\sin \frac{n\pi x}{p}$, con $n = 1, 2, \dots$. Para ello resolvamos cada uno de los productos internos correspondiente: sea n un número natural:

$$\begin{aligned} \langle 1, \cos \frac{n\pi x}{p} \rangle &= \int_{-p}^p 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{p}{n\pi} \left. \frac{\sin n\pi x}{p} \right|_{-p}^p = 0; \\ \langle 1, \sin \frac{n\pi x}{p} \rangle &= \int_{-p}^p 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{p} dx = -\frac{p}{n\pi} \left. \frac{\cos n\pi x}{p} \right|_{-p}^p = (-1)^n - (-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Así hemos probado que la función 1 es ortogonal en $[-p, p]$ a cada una de las funciones $\cos \frac{n\pi x}{p}$ y $\sin \frac{n\pi x}{p}$, con $n = 1, 2, \dots$.

Ahora probemos que cada una de las funciones $\cos \frac{n\pi x}{p}$, $n = 1, 2, \dots$, es ortogonal a cada una de las funciones $\sin \frac{m\pi x}{p}$ en $[-p, p]$. Nótese que usamos los subíndices n y m para abarcar todas las combinaciones posibles. En este caso tenemos

$$\langle \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{m\pi x}{p} \rangle = \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi x}{p} dx.$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{m\pi x}{p} \rangle &= \int_{-p}^p \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{m\pi x}{p} + \frac{n\pi x}{p} \right) + \sin \left(\frac{m\pi x}{p} - \frac{n\pi x}{p} \right) \right) dx \\ &= \int_{-p}^p \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{(m+n)\pi x}{p} \right) + \sin \left(\frac{(m-n)\pi x}{p} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si $m \neq n$, (3.3) se convierte en

$$\begin{aligned} \langle \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{m\pi x}{p} \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{p}{(m+n)\pi} \cos \frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi} \cos \frac{(m-n)\pi x}{p} \right) \Big|_{-p}^p = 0. \end{aligned}$$

Si, en cambio, $m = n$, (3.3) se convierte en

$$\begin{aligned}\left\langle \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{n\pi x}{p} \right\rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin \frac{2n\pi x}{p} dx = \frac{1}{2} \frac{p}{2n\pi} \left(-\cos \frac{2n\pi x}{p} \right) \Big|_{-p}^p = 0.\end{aligned}$$

Para completar la tarea, debemos probar que cada una de las funciones $\sin \frac{n\pi x}{p}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ es ortogonal a los otros miembros senoidales de la familia, digamos a cada una de las funciones $\sin \frac{m\pi x}{p}$ con $m \neq n$. Y lo mismo con las funciones cosenos. Comencemos verificando que las funciones senoidales de esta familia son ortogonales entre sí. Asumiendo que $n \neq m$:

$$\left\langle \sin \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{m\pi x}{p} \right\rangle = \int_{-p}^p \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi x}{p} dx.$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle \sin \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{m\pi x}{p} \right\rangle &= \\ &= \int_{-p}^p \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{n\pi x}{p} - \frac{m\pi x}{p} \right) - \cos \left(\frac{n\pi x}{p} + \frac{m\pi x}{p} \right) \right) dx \\ &= \int_{-p}^p \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(n-m)\pi x}{p} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{p} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{p} - \frac{p}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{p} \right) \Big|_{-p}^p = 0.\end{aligned}$$

Similarmente, suponiendo que $n \neq m$:

$$\left\langle \cos \frac{n\pi x}{p}, \cos \frac{m\pi x}{p} \right\rangle = \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi x}{p} dx.$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle \cos \frac{n\pi x}{p}, \cos \frac{m\pi x}{p} \right\rangle &= \\ &= \int_{-p}^p \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{n\pi x}{p} - \frac{m\pi x}{p} \right) + \cos \left(\frac{n\pi x}{p} + \frac{m\pi x}{p} \right) \right) dx = \\ &= \int_{-p}^p \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(n-m)\pi x}{p} + \cos \frac{(n+m)\pi x}{p} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{p} + \frac{p}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{p} \right) \Big|_{-p}^p = 0.\end{aligned}$$

Con lo cual hemos probado que la familia $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, \dots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$. Para probar que la misma familia de funciones es ortogonal en $[0, 2p]$ se procede análogamente, planteando las integrales entre 0 y $2p$. Se deja como ejercicio.

Familia ortogonal completa de funciones

Definición 3.1.8 (Conjunto ortogonal completo).

Una familia o conjunto ortogonal de funciones de $\mathcal{R}[a, b]$ $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$, se dice que es completo en el intervalo $[a, b]$ si la única función de $\mathcal{R}[a, b]$ ortogonal a todas las funciones del conjunto es la función nula.

Ejemplo 3.1.9. La familia $\{\cos \frac{n\pi x}{p}, n = 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, 3, \dots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ pero no es completa.

En efecto, existe una función (de hecho existen infinitas) de $\mathcal{R}[-p, p]$ que no es nula y es ortogonal a todos los miembros de la familia en $[-p, p]$: la función $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{p}$ (podríamos haber tomado cualquier otra, como por ejemplo $y = \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p}$, $y = \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{p}$, etc.). Sólo faltaría probar que $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{p}$ es ortogonal a todos los miembros de la familia. Se deja como ejercicio.

Ejemplo 3.1.10. La familia de funciones $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, \dots\}$ forma un conjunto ortogonal completo en $[-p, p]$ (y en $[0, 2p]$). Ya hemos probado la ortogonalidad de esta familia de funciones en el Ejemplo 3.1.7. No demostramos que es completa.

Funciones periódicas

Se dice que una función f definida en \mathbb{R} y de valores reales es **periódica** con periodo T , si $f(x + T) = f(x)$, para toda $x \in \mathbb{R}$; T es una constante positiva. Cualquier número positivo T con esta propiedad se llama **periodo o período** de f . El menor de los periodos de una función se llama **periodo fundamental**. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene periodo 4π ya que $\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen}(x)$; más aún, esta función tiene periodos $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ y su periodo fundamental es $T = 2\pi$.

A continuación incluimos algunos ejemplos más de periodos fundamentales para funciones periódicas.

Ejemplo 3.1.11.

1. Las funciones constantes se consideran periódicas, con todos los números reales como periodos.
2. La función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ tiene periodos $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ y su periodo fundamental es π .
3. La función dada por $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$, donde n es una constante natural, tiene periodos $T = \frac{2pk}{n}$ para cada valor de $k \in \mathbb{N}$:

$$\cos\left(\frac{n\pi(x + \frac{2pk}{n})}{p}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{p} + 2\pi k\right);$$

su periodo fundamental es $T = \frac{2p}{n}$.

4. La función dada por $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x)$ es periódica. Como vimos antes, la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ tiene períodos $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$; por otra parte, la función $h(x) = \operatorname{sen}(3x)$ tiene períodos $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \dots, n\frac{2\pi}{3}, \dots$. La función $f(x) = g(x) + h(x)$ tendrá como períodos todos los valores T que sean períodos comunes a las funciones g y h ; así, f tiene períodos $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$; su periodo fundamental es $T = 2\pi$.
5. La función definida por la serie $f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right)$, donde c , a_n y b_n son constantes para cada $n \in \mathbb{N}$, está formada a partir de la función constante c y funciones senos y cosenos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $\cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right)$ y $\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{p} \right)$ tienen períodos $T = \frac{2kp}{n}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. En particular, se puede apreciar que todos los períodos $T = 2mp$, $m \in \mathbb{N}$, son comunes a todas ellas; luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, $2mp$ es un periodo de la función f . Finalmente, el periodo fundamental de f es $T = 2p$ (el menor de todos sus períodos).

3.2. Series de Fourier

En esta sección, dada una función f definida en un intervalo $[-p, p]$ (o $[0, 2p]$) y a partir de la familia ortogonal de funciones en $[-p, p]$ (o en $[0, 2p]$),

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}; n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (3.4)$$

se busca coeficientes c_0 , a_n y b_n , $n = 1, 2, \dots$ que permitan expresar la función f como

$$f(x) = c_0 1 + a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} + b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} + \dots.$$

El segundo miembro de esta igualdad es una serie que se llama **serie trigonométrica de Fourier generada por la función f** . Para obtener un desarrollo en serie de Fourier para una función f haremos algunos supuestos.

Supuestos:

- f es acotada y continua por partes (por lo tanto también es integrable) en el intervalo $[-p, p]$.
- f se puede desarrollar en una serie formada por las funciones trigonométricas del conjunto ortogonal completo

$$\left\{ 1, \cos \left(\frac{\pi}{p} x \right), \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{p} x \right), \cos \left(\frac{2\pi}{p} x \right), \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{p} x \right), \dots \right\},$$

es decir, existen coeficientes a_0 , a_n , b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right). \quad (3.5)$$

- En las expresiones que irán apareciendo, asumimos que se puede integrar término a término.

Observemos que en (3.5) escribimos $\frac{a_0}{2}$ en lugar de c_0 , esto es sólo por conveniencia.

Ahora vamos a determinar los coeficientes $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$. Para esto nos serviremos del supuesto (3.5) varias veces.

Primero multiplicamos la igualdad (3.5) por la función constante 1 y luego integramos (término a término) sobre el intervalo $[-p, p]$:

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \right). \quad (3.6)$$

Como para cada $n \geq 1$ las funciones $\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$ y $\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$ son ortogonales a la función constante 1, todas las integrales $\int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx$ y $\int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx$ se anulan; entonces de (3.6) obtenemos

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p = p a_0,$$

de donde se desprende que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx. \quad (3.7)$$

Ahora nos dedicaremos a determinar cada uno de los coeficientes a_n , para $n = 1, 2, \dots$. Para evitar confusiones llamamos a_m al coeficiente que buscamos determinar, multiplicamos la ecuación (3.5) por la función $\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)$ e integramos sobre el intervalo $[-p, p]$:

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por la ortogonalidad de la familia (3.4), tenemos que

$$\frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = 0, \quad \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.9)$$

$$\int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = 0 \text{ si } m \neq n, \quad (3.10)$$

y, si $m = n$,

$$\int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = p. \quad (3.11)$$

Por lo tanto de (3.9), (3.10) y (3.11) en (3.8) obtenemos que

$$\int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = a_m p,$$

de donde se desprende que

$$a_m = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx, \text{ para cada } m \geq 1. \quad (3.12)$$

Por último, de manera análoga, multipliquemos la ecuación (3.5) por $\sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right)$, con $m \geq 1$, e integremos sobre el intervalo $[-p, p]$:

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por ortogonalidad tenemos que

$$\frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = 0, \quad \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = 0, \quad (3.14)$$

y

$$\int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ p & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (3.15)$$

Por lo tanto de (3.14) y (3.15) en (3.13) obtenemos que

$$\int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx = b_m p,$$

de donde se desprende que

$$b_m = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx, \text{ para } m \geq 1. \quad (3.16)$$

Definición 3.2.1 (Serie de Fourier generada por una función f).

La serie de Fourier generada por una función integrable f en el intervalo $[-p, p]$ está dada por la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right)$$

con coeficientes a_0 , a_n y b_n definidos por las ecuaciones

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad (3.17)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) dx, \text{ para cada } n \geq 1 \quad (3.18)$$

y

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) dx, \text{ para cada } n \geq 1; \quad (3.19)$$

para indicar que f genera esta serie, escribimos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right). \quad (3.20)$$

Observación 3.2.2. La serie de Fourier generada por una función integrable f en el intervalo $[0, 2p]$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right),$$

donde los coeficientes a_0 , a_n , b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ vienen dados por

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) dx, \text{ para cada } n \geq 1$$

y

$$b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) dx, \text{ para } n \geq 1.$$

Aunque el físico matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) no inventó la serie (3.20) que lleva su nombre, al menos fue el responsable de despertar en los matemáticos el interés por las series trigonométricas que él aplicó con poco rigor en sus investigaciones sobre la conducción del calor. Las fórmulas (3.17), (3.18) y (3.19) que dan los coeficientes en una serie de Fourier, se conocen como las **fórmulas de Euler**.

Ejemplo 3.2.3. Buscamos las series de Fourier generadas por dos funciones definidas respectivamente en $[-\pi, \pi]$ y en $[0, 2)$. En el desarrollo de estos ejemplos, indicamos las integrales que se debe calcular y mostramos el resultado, dejando que cada estudiante complete los detalles del cálculo.

1.

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

En este caso, tenemos que $p = \pi$ y los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x + \pi) dx = \frac{\pi}{2}; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x + \pi) \cos(nx) dx = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n^2\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x + \pi) \sin(nx) dx = \frac{n\pi - \sin(n\pi)}{n^2\pi} = \frac{1}{n}; \quad (3.22)$$

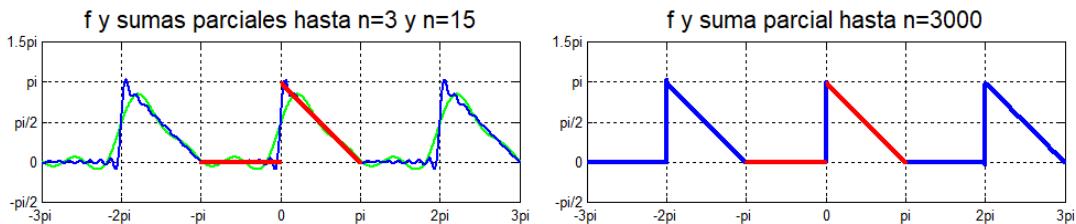
en (3.21) hemos identificado $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$: esta identidad se usa con bastante frecuencia; a su vez, en (3.22), tenemos $\sin(n\pi) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Así, la serie de Fourier generada por f es

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) \right).$$

Escribimos

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) \right)$$

para indicar que esta serie está **generada** por f . La serie generada por f es una nueva función, para los valores de x donde la serie sea convergente. A continuación incluimos algunos gráficos de sumas parciales de la serie. Para poder conocer el gráfico de la serie de Fourier generada por f , debemos conocer a qué valores converge la serie, si lo hace. Estudiaremos la convergencia en la sección siguiente.



2.

$$f : [0, 2) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ x + 1, & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

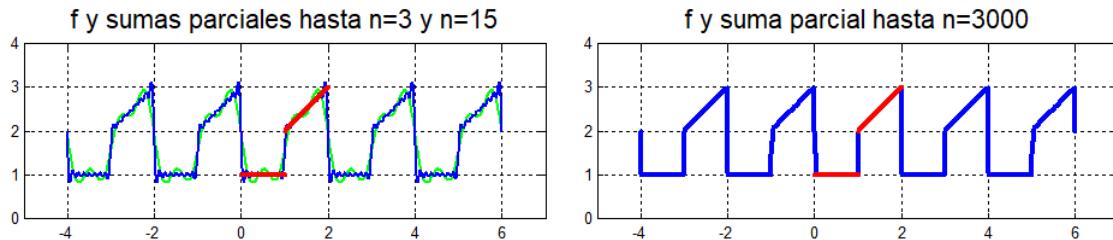
En este caso, dado que el intervalo de definición de f no es simétrico sino que se trata de un “semiintervalo” de la forma $[0, 2p]$, identificamos $2p = 2$, es decir, $p = 1$. Los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 (x + 1) dx = \frac{7}{2}; \\ a_n &= \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx + \int_1^2 (x + 1) \cos(n\pi x) dx = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi^2}; \\ b_n &= \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx + \int_1^2 (x + 1) \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^n - 2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Tenemos

$$f(x) \sim \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^n - 2}{n\pi} \sin(n\pi x) \right).$$

Incluimos los gráficos de algunas sumas parciales de la serie:



3.2.1. Convergencia

Dada una función $f \in \mathcal{R}[-p, p]$ o $f \in \mathcal{R}[0, 2p]$, la convergencia de la serie de Fourier generada por f a la función f , con la que se ha generado la serie, es un tema delicado al que prestaremos atención. En primer lugar, enunciamos un teorema que da condiciones que aseguran la convergencia de la serie a la función f que le dio origen.

Teorema 3.2.4. Sean f y f' continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto finito) en $[-p, p]$. Entonces para toda $x \in (-p, p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.

En los extremos p y $-p$ la serie converge al valor $\frac{f(p-) + f(-p+)}{2}$.

Observación 3.2.5. El Teorema anterior indica que si x es un punto de continuidad de f , la serie de Fourier converge a $f(x)$ en ese punto.

Convergencia de la serie de Fourier de f y extensiones periódicas

Con frecuencia la función f con la que se genera la serie está definida en un intervalo $[-p, p]$ o $[0, 2p]$. Sin embargo, la serie generada por f es una función que se puede considerar definida en \mathbb{R} .

Por otra parte cabe destacar que, como mencionamos en el Ejemplo 3.1.11.5 de la página 95, el miembro derecho de la ecuación (3.20) tiene periodo fundamental $2p$. Así, podemos concluir que la serie de Fourier generada por una función continua en un intervalo $(-p, p)$ no sólo representa la función en el intervalo, sino que también representa la extensión¹ periódica de f fuera de este intervalo, en \mathbb{R} .

Ejemplo 3.2.6. Revisamos los casos presentados en el Ejemplo 3.2.3 de la página 98.

1. Como ya vimos, la función f definida por

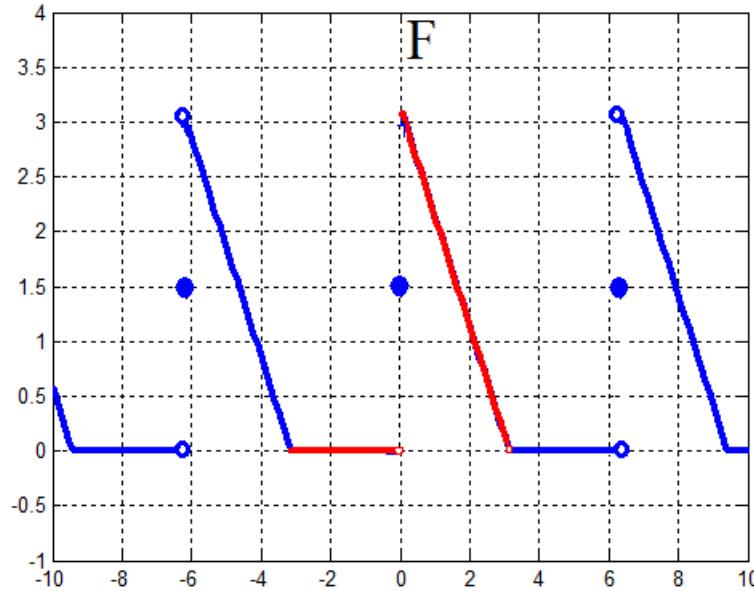
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases},$$

¹Una extensión de una función a un dominio mayor, coincide con la función original en su dominio.

genera la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) \right).$$

En virtud del Teorema 3.2.4 podemos concluir que el gráfico de la serie de Fourier, F , generada por f , es el incluido a continuación:



F está definida en \mathbb{R} ; $F(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi, 0)$ y todo $x \in (0, \pi)$, ya que f es continua en esos puntos.

Además, $F(0) = \pi/2 = \frac{f(0+) + f(0-)}{2}$; $F(\pi) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0 = F(-\pi)$; F es periódica, de manera que $F(-2\pi) = F(2\pi) = \pi/2$.

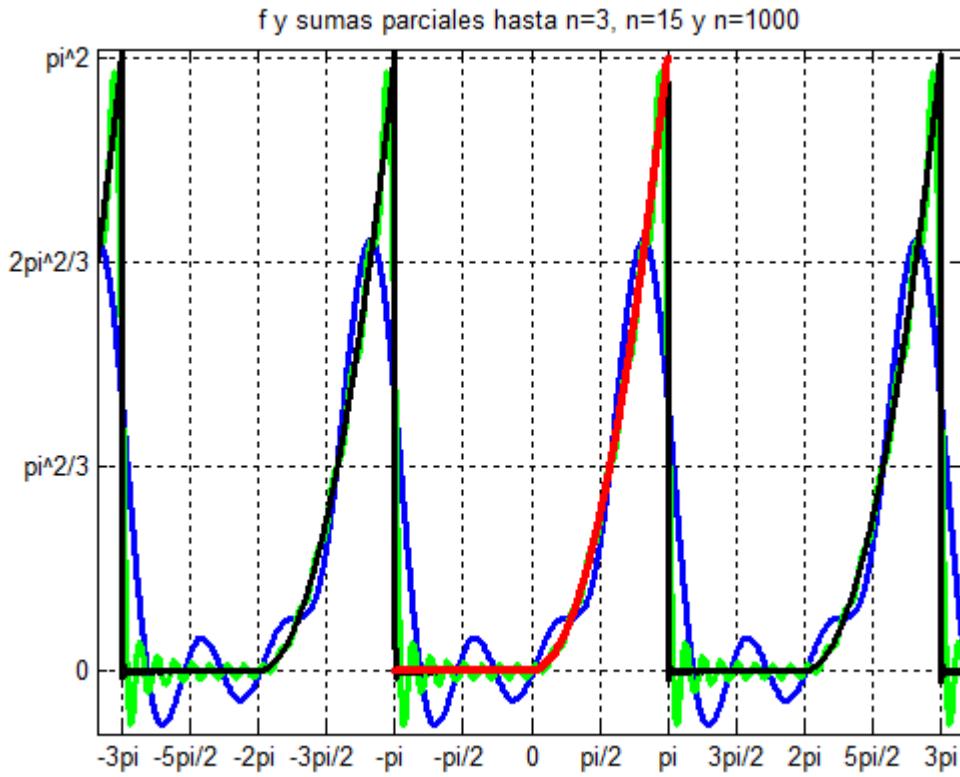
2. La función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

genera la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \sin(nx) \right).$$

El gráfico siguiente ilustra f (en rojo) junto con las sumas parciales de la serie de Fourier hasta $n = 3$ (azul), hasta $n = 15$ (verde) y hasta $n = 100$ (negro).



La serie de Fourier generada por f no está mostrada en este gráfico. Es una función F que presenta discontinuidades en los puntos $-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi$, y en todos los múltiplos impares de π , y en cada uno de ellos vale $\frac{\pi^2}{2}$.

3. Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$. Planteamos el desarrollo de f en una serie de Fourier considerando la familia ortogonal completa

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right), n = 1, 2, \dots \right\}$$

en el intervalo $[0, 2p]$, en este caso tomando $2p = 1$, es decir $p = \frac{1}{2}$.

Los coeficientes de Fourier de f ,

$$a_0 = \frac{1}{1/2} \int_0^1 (x+1) dx; \quad a_n = \frac{1}{1/2} \int_0^1 (x+1) \cos\left(\frac{n\pi x}{1/2}\right) dx, n = 1, 2, \dots,$$

$$y b_n = \frac{1}{1/2} \int_0^1 (x+1) \sin\left(\frac{n\pi x}{1/2}\right) dx, n = 1, 2, \dots,$$

son $a_0 = 3$, $a_n = 0$ y $b_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, \dots$

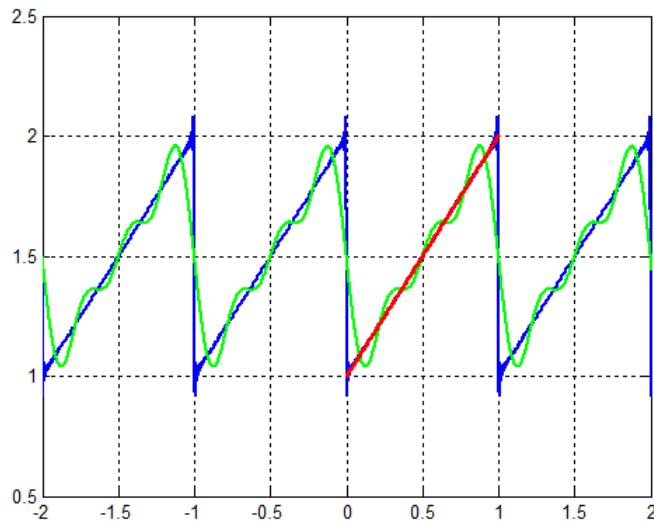
La serie de Fourier generada por f , F , es

$$F(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi x).$$

En virtud del Teorema 3.2.4 podemos conocer valores de la serie, como por ejemplo

$$F(0) = 1,5 \text{ y } F(-1) = 1,5.$$

El gráfico siguiente ilustra f (en rojo) junto con las sumas parciales de la serie de Fourier hasta $n = 3$ (verde) y hasta $n = 100$ (azul).



3.2.2. Series de senos y cosenos de Fourier

Hasta acá hemos desarrollado series de Fourier generadas por funciones dadas en un intervalo simétrico (como $[-p, p]$) o en un intervalo de la forma $[0, 2p]$. La función F obtenida en estos casos ha coincidido con la extensión periódica de f . Pero, a partir de una función f definida en un *semiintervalo*, es decir en un intervalo de la forma $[0, 2p]$, se puede obtener otras extensiones² de la misma al intervalo simétrico $[-2p, 2p]$.

Funciones pares e impares

Sean $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f es par, $\int_{-p}^p f(x)dx = 2 \int_0^p f(x)dx$.

Si f es impar, $\int_{-p}^p f(x)dx = 0$.

Si f y g son ambas pares o ambas impares, $f \cdot g$ es par.

Si f es par y g es impar, $f \cdot g$ es impar.

Sea $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$. Buscamos los coeficientes de Fourier de f :

1) Si f es **par**,

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = 0, n = 1, 2, \dots$$

²Recordemos que una extensión F de una función f a un dominio mayor, debe coincidir con f en el dominio de f .

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

2) Si f es **ímpar**,

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = 0, n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Dada $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, se puede definir una nueva función, extensión de f al intervalo $[-L, L]$, que sea par o impar (esta última, si $f(0) = 0$):

Extensión par:

$$g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Extensión impar (asumimos $f(0) = 0$):

$$h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ f(x) & \text{si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

La **serie de cosenos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión par de f** . Para $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, la extensión par es:

$$g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de cosenos de Fourier de f :

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p g(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p g(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p g(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = 0, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

La **serie de senos de Fourier** de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la **extensión impar de f** . Para $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, la extensión impar es:

$$h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ f(x) & \text{si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Coeficientes para la serie de senos de Fourier de f :

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p h(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p h(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = 0, n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p h(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

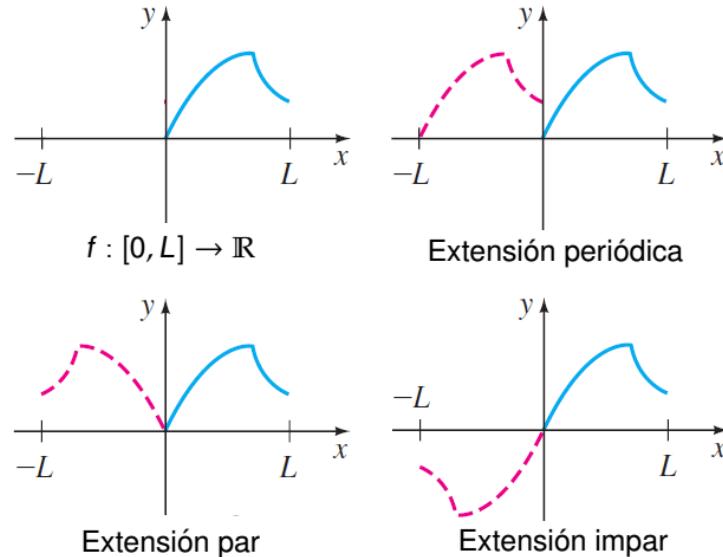
Si se desarrolla la función $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ en serie de Fourier, igualando $[0, L] = [0, 2p]$ y $L = 2p$, se obtienen los coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots;$$

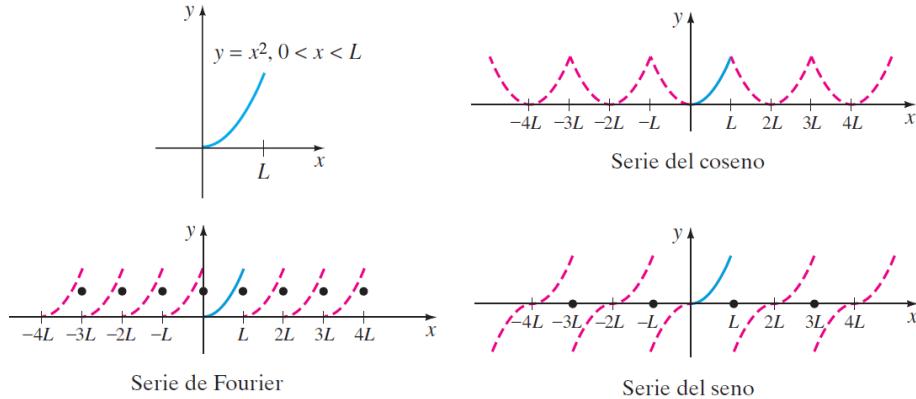
$$b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right).$$



Las siguientes imágenes, tomadas del libro de Zill, muestran las series de Fourier generadas por la

función definida en $(0, L)$ por $f(x) = x^2$:



Ejemplo 3.2.7. Sea $f(x) = x + 1$ con $0 \leq x < 1$. Halle las series de Fourier, de cosenos y de senos de Fourier generadas por f . Evalúe cada una de las series halladas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = -0,75$.

1. Para hallar la serie de Fourier de f , trabajamos en el intervalo $[0, 2p] = [0, 1]$, de donde $p = \frac{1}{2}$.

Los coeficientes de Fourier de f son:

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x + 1) dx = 3,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (x + 1) \cos(2n\pi x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

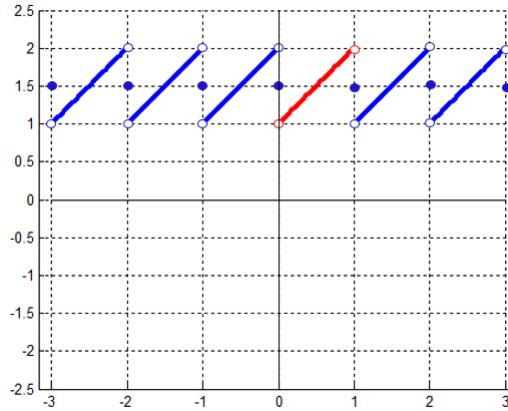
y

$$b_n = 2 \int_0^1 (x + 1) \sin(2n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots$$

La serie de Fourier de f es

$$F_0(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi x).$$

Podemos graficar la función F_0 aplicando el Teorema 3.2.4:



Evaluamos la función F_0 en los valores de x pedidos, apoyándonos en el gráfico anterior.

$$F_0(0) = 1,5; \quad F_0(1) = 1,5; \quad F_0(-0,75) = 1,25.$$

2. Para hallar la serie de cosenos de Fourier de f , trabajamos en el intervalo $[0, p] = [0, 1]$, de donde $p = 1$. Los coeficientes de la serie de cosenos de f son:

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x + 1) dx = 3,$$

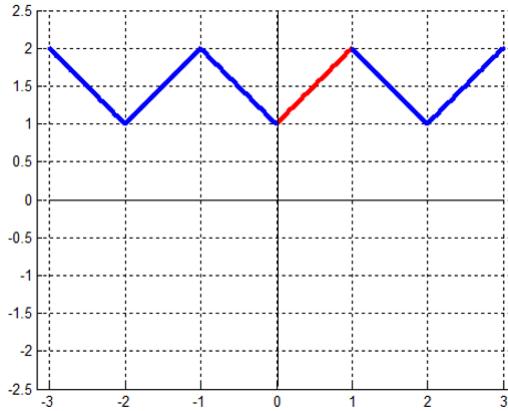
y

$$a_n = 2 \int_0^1 (x + 1) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, \dots.$$

La serie de cosenos de f es

$$F_1(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \cos(n\pi x).$$

Podemos graficar la función F_0 aplicando el Teorema 3.2.4:



Evaluamos la función F_1 en los valores de x pedidos, apoyándonos en el gráfico anterior.

$$F_1(0) = 1; \quad F_1(1) = 2; \quad F_1(-0, 75) = 1, 75.$$

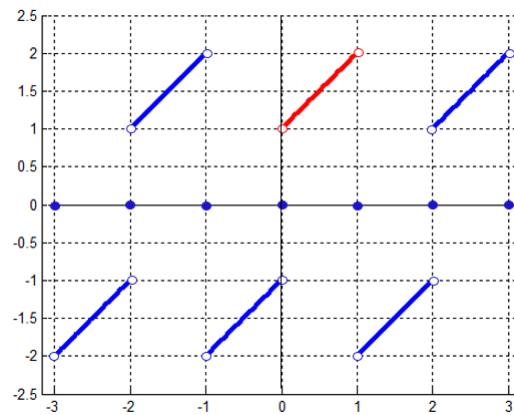
3. Para hallar la serie de senos de Fourier de f , trabajamos en el intervalo $[0, p] = [0, 1]$, de donde $p = 1$. Los coeficientes de la serie de senos de f son:

$$b_n = 2 \int_0^1 (x + 1) \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n), \quad n = 1, 2, \dots.$$

La serie de senos de f es

$$F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n) \sin(n\pi x).$$

Podemos graficar la función F_0 aplicando el Teorema 3.2.4:



Evaluamos la función F_2 en los valores de x pedidos, apoyándonos en el gráfico anterior.

$$F_2(0) = 0; \quad F_2(1) = 0; \quad F_2(-0,75) = -1,75.$$

Bibliografía

- [1] Apostol, T.M., (1967), *Calculus Volume I, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, Second edition, USA, John Wiley & Sons.
- [2] Apostol, T.M., (1969), *Calculus Volume II, Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, Second edition, USA, John Wiley & Sons.
- [3] Çengel, (2014), *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias*, México, McGraw-Hill/Interamericana Editores.
- [4] Larson, R., Edwards, B., (2014), *Calculus*, 10th edition, USA, Brooks/Cole.
- [5] Marsden, J.E., Tromba, A., (2012), *Vector Calculus*, Sixth edition, New York, W.H.Freeman and Company Publishers.
- [6] Nagle, R.K., Saff, E.B., Snider, A.D., (2012), *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*, Sixth edition, USA, Addison-Wesley.
- [7] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A., (1968), *Análisis Matemático Vol. II, Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones*, Bs.As., Ed. Kapelusz.
- [8] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A., (1959), *Análisis Matemático Vol. III, Análisis Funcional y Aplicaciones*, Bs.As., Ed. Kapelusz.
- [9] Stewart, J., (2012), *Multivariable Calculus*, Seventh edition, USA, Brooks/Cole.
- [10] Thomas, G.B., (2010), *Cálculo una variable*, Decimosegunda edición, México, Pearson Ed.
- [11] Thomas, G.B., (2010), *Cálculo, varias variables*, Decimosegunda edición, México, Pearson Ed.
- [12] Zill, D.G., Wright, W.S., Cullen, M.R., (2015), *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*, Octava edición, México, Cengage Learning Editores.

Índice Alfabético

- Campo de direcciones de una ED, 62
Campo eléctrico, 2
Campo vectorial, 1
 Campo eléctrico, 2
 conservativo, 12
 divergencia, 17
 Funciones componentes, 1
 Gráficos, 1
 líneas de flujo, 12, 21
 rotacional, 17
 solenoidal, 54
Campo vectorial solenoidal, 23
Coeficientes de Fourier, 97
Condiciones de borde, véase Condiciones de frontera
Condiciones de frontera, 61
Condiciones iniciales, 59
Conjunto
 conexo, 13
 simplemente conexo, 13
Divergencia, 17
 interpretación, 23, 54
Ecuaciones diferenciales, 57
 campo de direcciones, 62
 coeficientes indeterminados, 83
 conjunto fundamental de soluciones, 74
 de Bernoulli, 71
 ecuación auxiliar, 78
 exactas, 69
 función complementaria, 76, 82
homogéneas con coeficientes constantes, 78
independencia lineal de funciones, 74
lineales, 57, 72
lineales de primer orden, 65
lineales homogéneas, 72
ordinarias, 57
parciales, 57
PVF, 61
PVI, 59
separables, 63
sistema masa-resorte, 79
solución, 58
solución general, 58, 73
solución particular, 58
solución singular, 58
variación de parámetros, 84
Wronskiano, 74
- Extensión
 de una función, 102
 impar, 103
 par, 103
 periódica, 102
- Familia
 ortogonal completa de funciones, 93
 ortogonal de funciones, 91
- Fluido incompresible, 54
- Flujo de un campo vectorial
 a lo largo de una curva, 8
 a través de una superficie, 44
 a través hacia fuera de una curva plana cerrada

- da, 8
- Fuente, 25, 54
- Función
periódica, 93
- Función complementaria, 76, 82
- Función potencial, 12
- Independencia lineal de funciones, 74
- Integral de línea
de un campo escalar, 4
con respecto a los ejes coordenados, 10
propiedades, 6
área de la cortina, 4
de un campo vectorial
a través hacia fuera de una curva plana cerrada, 11
circulación, 8
de la componente tangencial, 8
independiente de la trayectoria, 12
- Integral de superficie
de un campo escalar, 43
de un campo vectorial, *véase* flujo
- Laplaciano
de un campo escalar, 28
de un campo vectorial, 28
- Líneas de flujo, 12
- Masa
lineal, 4
- Movimiento críticamente amortiguado, 81
- Movimiento sobreamortiguado, 81
- Movimiento subamortiguado, 81
- Operador nabla, 17
- Ortogonalidad
de funciones, 90
- Problema con valores en la frontera, 61
- Problema con valores iniciales, 59
- Producto escalar de funciones, 90
- Producto interno de funciones, *véase* Producto escalar de funciones
- Región
conexa, 13
simple, 31
simplemente conexa, 13
- Rotacional, 17
interpretación, 19, 52
- Rotor, *véase* Rotacional
- Semiintervalo, 102
- Serie de cosenos, 103
- Serie de Fourier, 94, 97
coeficientes, 95, 97
- Serie de senos, 103
- Serie trigonométrica de Fourier, 94
- Sistema masa-resorte, 79
- Solenoidal, 23, 54
- Solución complementaria, *véase* Función complementaria, *véase* Función complementaria
- Sumidero, 25, 54
- Superficie
cerrada, 43
curvas reticulares, 38
orientación, 42
paramétrica, 37
suave, 40
área, 40
- Superficie
orientación
positiva, 43
- Teorema
Condición necesaria y suficiente para formas diferenciales exactas, 29

- Criterio de componentes para campos conservativos, 18
- Criterio de componentes para campos conservativos, recíproco, 50
- Criterio para EDO's exactas, 69
- Criterio para soluciones LI, 74
- de convergencia de series de Fourier, 99
- de existencia de conjunto fundamental de soluciones para EDO, 75
- de existencia y unicidad de solución para PVI de orden superior, 60
- de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden, 59
- de Green
- cálculo de áreas, 36
- forma normal, 35
- forma tangencial, 32
- de la divergencia de Gauss, 54
- de solución general para EDO lineal homogénea, 75
- de solución general para EDO lineal no homogénea, 76
- de Stokes, 48
- Fundamental de integrales de línea, 14
- Los campos conservativos son campos gradientes, 14
- Principio de superposición para EDO's lineales homogéneas, 72
- Principio de superposición para soluciones de EDO lineales no homogéneas, 77
- Propiedad de lazos en campos conservativos, 16
- Trabajo, 8
- Wronskiano, 74