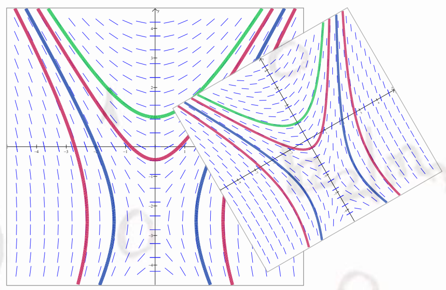
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

MATEMÁTICAS AVANZADAS



Transformada de Fourier

Anexo

FACULTAD DE INGENIERÍA

Universidad Nacional de Cuyo

2020

MATEMÁTICAS AVANZADAS 2020

Transformada de Fourier – Anexo

PARA una función $f(t)$ CONTINUA

FUNCION $f(t)$ PERIODICA de PERIODO T

REPRESENTACIONES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Serie Trigonométrica de FOURIER

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\omega_n t)+b_n\operatorname{sen}(\omega_n t)$$

Frecuencia Fundamental: $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

Funciones Base: { ; }

Coeficientes :

Serie Compleja de FOURIER

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

$\omega_n=n\omega_0=\frac{2\pi}{T}n$

Funciones Base: { }

Coeficientes :

REPRESENTACIONES EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS

Espectros discretos de frecuencia: Gráficas de Amplitud y fase en función de $\omega_n=n\omega_0$:

✓ De la serie Trigonométrica: $[A_n \text{ fc } \omega_n]$ y $[\phi_n \text{ fc } \omega_n]$

✓ De la serie Compleja : $\underbrace{[|c_n| \text{ fc } \omega_n] \text{ y } [\phi_n \text{ fc } \omega_n]}_{\text{Espectros discretos de frecuencia compleja}}$

La Serie de Fourier (trigonométrica o compleja) convierte una función continua y periódica en el dominio del tiempo, a magnitudes de frecuencias discretas en el dominio de las frecuencias.

FUNCION $f(t)$ NO PERIODICA

$T\to\infty \quad \Sigma\to\int$

Integral Compleja de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c_\omega e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$c_\omega=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS

Espectros continuos de frecuencia: $[|c_\omega| \text{ fc } \omega]$

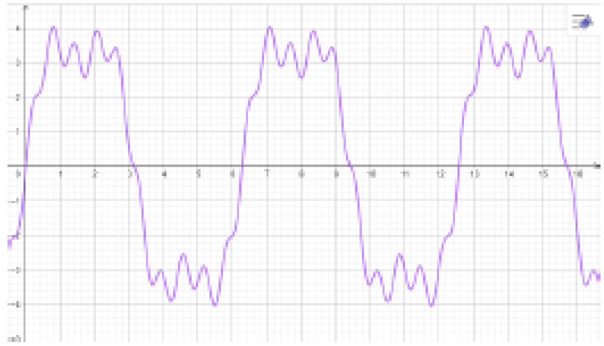
c_ω: es función continua de la variable de frecuencia ω

TRANSFORMADA de FOURIER de $f(t)$:

$$\mathcal{F}[f](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt$$

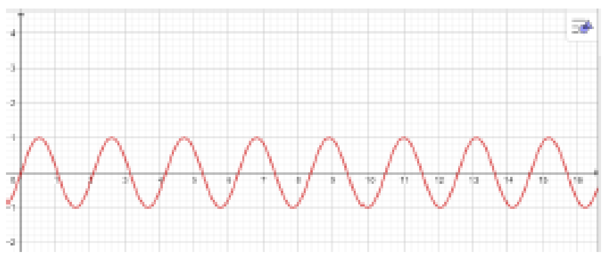
La Transformada de Fourier convierte una función continua y No periódica en el dominio del tiempo, en una función continua en el dominio de la frecuencia

Señal:

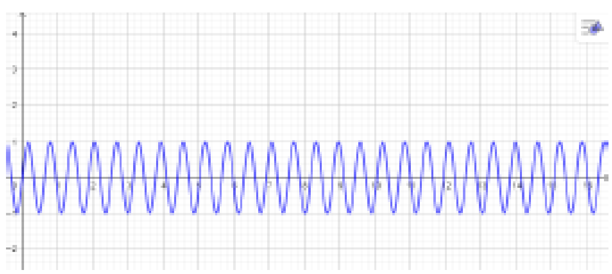


f(t) = sen(t)

g(t) = sen(3t)

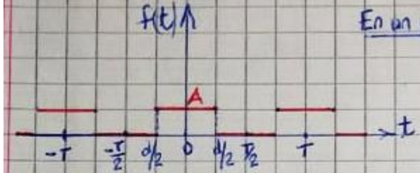


h(t) = sen(10t)



p(t) = 4 sen(t) + 1 sen(3t) + 0,5 sen(10t)

EJEMPLO: Tren de pulsos rectangulares



En un período:

$$f(t)=\begin{cases} A & \text{para } -\frac{d}{2}<t<\frac{d}{2} \\ 0 & \text{para } -\frac{T}{2}<t<-\frac{d}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{d}{2}<t<\frac{T}{2} \end{cases} \qquad f(t+T)=f(t)$$

I) SERIE COMPLEJA DE FOURIER:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad ; \quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \, , \; n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \quad ; \; \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

1°) Evaluamos c_n:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt=\frac{A}{T}\int_{-d/2}^{d/2} e^{-in\omega_0 t}dt=\frac{A}{T}\frac{1}{(-in\omega_0)}e^{-in\omega_0 t}\Big|_{-d/2}^{d/2}=$$

$$=\underline{\frac{A}{T}\frac{1}{in\omega_0}\left[e^{in\omega_0\frac{d}{2}}-e^{-in\omega_0\frac{d}{2}}\right]}$$

Considerando que $\underline{e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta}$, verificar que la expresión anterior puede escribirse como:

$$c_n=\frac{A}{T}\frac{1}{in\omega_0}\left[e^{in\omega_0\frac{d}{2}}-e^{-in\omega_0\frac{d}{2}}\right]=\frac{A}{T}\frac{1}{n\omega_0}2\,\text{sen}\left(n\omega_0\frac{d}{2}\right)$$

Luego, multiplicamos y dividimos por 'd' para que aparezca el argumento de la función $\text{sen}\left(n\omega_0\frac{d}{2}\right)$. Es decir,

$$c_n=\frac{A}{T}\frac{d}{\left(n\omega_0\frac{d}{2}\right)}\text{sen}\left(n\omega_0\frac{d}{2}\right)$$

Siendo $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$, podemos sustituir y queda: $n\omega_0\frac{d}{2}=\frac{n\pi d}{T}$

Por lo tanto:

$$\boxed{c_n=\frac{Ad}{T}\cdot\frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)} \, , \text{ para } n\neq 0}$$

Para $n=0$, la expresión para c_n resulta:

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt=\frac{A}{T}\int_{-d/2}^{d/2}dt=\frac{Ad}{T}$$

2º) Escribimos la serie compleja de Fourier:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \Longrightarrow \boxed{f(t)=\frac{Ad}{T}+\frac{Ad}{T}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)} e^{in\omega_0 t}}$$

(II) ESPECTRO DE FRECUENCIA COMPLEJA:

Observamos que, siendo c_n un número real, el espectro de fase es nulo.
Esto también podría haberse anticipado, ya que $f(t)$ es función periódica par y por lo tanto su Desarrollo en Serie de Fourier tiene sólo términos en cosenos $\left[b_n=0;\ \operatorname{tg}\phi_n=\frac{b_n}{a_n}=0\right]$.

¿Cómo obtenemos el espectro de amplitud?

El espectro de amplitud lo obtendremos representando c_n en función de la variable discreta $\boxed{\omega_n=n\omega_0}$.

$\boxed{\omega_0=\frac{2\pi}{T}}$ Entonces: $\omega_{n=0}=0$; $\omega_{n=1}=\frac{2\pi}{T}$; $\omega_{n=2}=\frac{4\pi}{T}$; $\omega_{n=-1}=-\frac{2\pi}{T}$; $\omega_{n=-2}=-\frac{4\pi}{T}$; ....

Representaremos el espectro de frecuencia complejo de un tren de pulsos rectangulares para dos casos:

CASO (a): $d=1/20$; $T=1/4$ seg

CASO (b): $d=1/20$; $T=1/2$ seg

$\boxed{\text{CASO (a)}}$ representaremos c_n en función de la variable discreta $\omega_n=n\omega_0$

Siendo $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=8\pi$, tenemos los siguientes valores posibles para ω_n:

$0;\ \pm 8\pi;\ \pm 16\pi;\ \pm 24\pi;\ \pm 32\pi;\ \pm 40\pi;\ \pm 48\pi;\ \ldots\ldots$

Siendo $c_0=\frac{Ad}{T}$, para el caso (a) resulta: $\boxed{c_0=\frac{A}{5}}$

Y $c_n=\frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}$ queda: $\boxed{c_n=\frac{A}{5}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{\left(\frac{n\pi}{5}\right)}}$

Veamos para qué valores de ω_n se anula c_n:

c_n se anula para: $\frac{n\pi}{5}=m\pi$ con $m=\pm1, \pm2, \ldots$ $(n\neq 0,\ m\neq 0)$

Pero lo queremos expresar en función de $\omega_n = n\omega_0 = n8\pi$

Entonces en la expresión anterior multiplicamos y dividimos por 8 en el primer miembro:

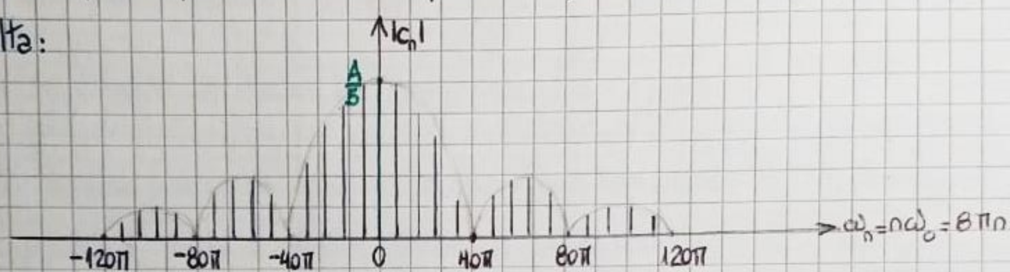
$$\frac{n\pi.8}{5.8} = \frac{n\omega_0}{40} \qquad \text{Luego:} \quad \boxed{\frac{n\omega_0}{40} = m\pi}$$

Si $m = \pm 1$: $n\omega_0 = \pm 40\pi$

si $m = \pm 2$: $n\omega_0 = \pm 80\pi$

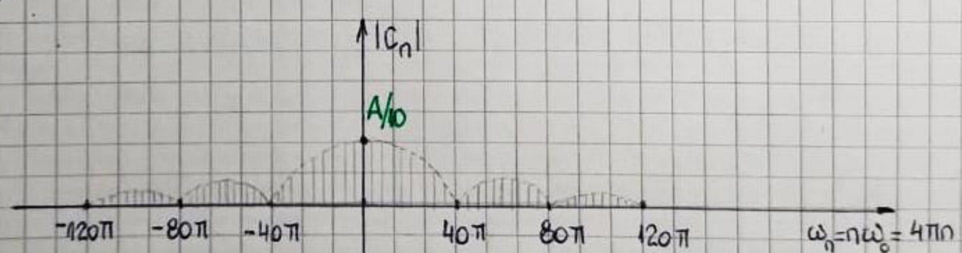
si $m = \pm 3$: $n\omega_0 = \pm 120\pi$

Por lo tanto, la representación del espectro de frecuencia compleja para el caso (a) resulta:



$\boxed{\text{CASO (b)}}$ $d = 1/20$; $T = 1/2$ seg ; $\omega_0 = 4\pi$; $C_0 = \frac{A}{10}$; $C_n = \frac{A}{10} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}\right)}{\left(\frac{n\pi}{10}\right)}$

Gráfico:



En el ejemplo hemos dejado fijo el valor de 'd'. Al aumentar el período Caso (b) ¿qué cambios hubo en el espectro de frecuencia?

- ✓ Los valores de amplitud disminuyen.
- ✓ La cantidad de datos discretos aumenta.

Observaciones:

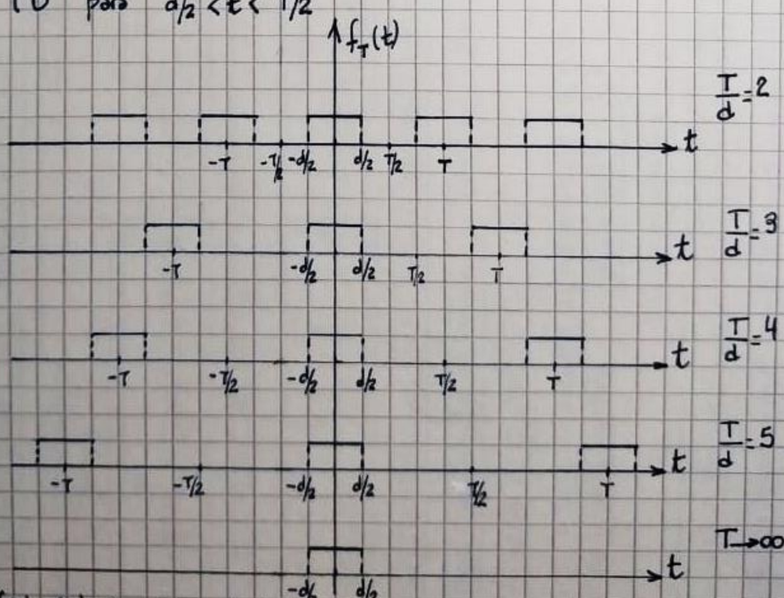
✓ Cuando el espectro discreto de una función periódica con período T se dibuja en función de la frecuencia discreta $\omega_n = n\omega_0$, la distancia entre armónicos adyacentes es la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Por lo tanto, a medida que el período T aumenta, ω_0 disminuye y las líneas en el espectro de frecuencia se acercan. Es decir, si el período T aumenta, el número de líneas en una banda de frecuencias aumenta.

✓ Por otra parte, siendo $\boxed{c_n = \frac{A d}{T} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}}$, si el período T aumenta, las amplitudes de todos los armónicos disminuyen.

A partir de una función periódica de período T que llamaremos $f_T(t)$. Si hacemos que el período T tienda a infinito, entonces, la función resultante $\boxed{f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)}$ deja de ser periódica.

Podemos ilustrar este concepto a partir de un tren de pulsos rectangulares:

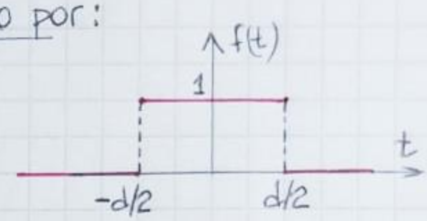
$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -T/2 < t < -d/2 \\ 1 & \text{para } -d/2 < t < d/2 \\ 0 & \text{para } d/2 < t < T/2 \end{cases} \qquad f_T(t+T) = f_T(t)\ ,\ T > d$$



$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t)$ (función no periódica)

EJEMPLO de TRANSFORMADA de FOURIER:

Transformada de Fourier del pulso rectangular definido por:



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < d/2 \\ 0 & \text{para } |t| > d/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \quad (1)$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{(-i\omega)}\, e^{-i\omega t}\Big|_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{i\omega}\left[e^{\frac{i\omega d}{2}} - e^{-\left(\frac{i\omega d}{2}\right)}\right] =$$

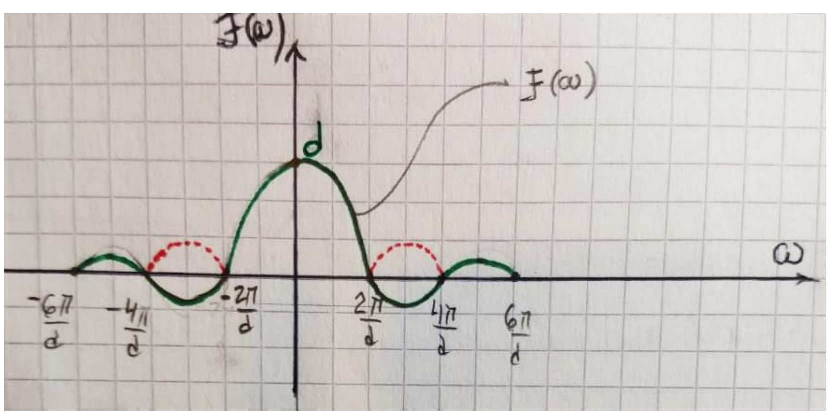
$$= \frac{1}{(i\omega)}\left[\cos\left(\frac{\omega d}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega d}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right)\right] = \frac{2\cancel{i}}{\cancel{i}\omega}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right) =$$

$$= \frac{2d}{\omega d}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega d}{2}\right) = d\,\frac{\mathrm{sen}(\omega d/2)}{(\omega d/2)} \quad , \ \omega \neq 0$$

Para $\omega = 0$ en (1): $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-d/2}^{d/2} 1\, dt = d$

Graficamos $\mathcal{F}[f](\omega)$: La T.F. de $f(t)$ se anula para $\frac{\omega d}{2} = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es decir, se anula para ω: $\pm\frac{2\pi}{d}, \pm\frac{4\pi}{d}, \pm\frac{6\pi}{d}, \ldots$



PARA una función $f(t)$ CONTINUA

FUNCION $f(t)$ PERIODICA de PERIODO T

REPRESENTACIONES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Serie Trigonométrica de FOURIER

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\omega_n t)+b_n\operatorname{sen}(\omega_n t)$$

Frecuencia Fundamental: $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

Funciones Base: { ; }

Coeficientes :

Serie Compleja de FOURIER

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

$\omega_n=n\omega_0=\frac{2\pi}{T}n$

Funciones Base: { }

Coeficientes :

REPRESENTACIONES EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS

Espectros discretos de frecuencia: Gráficas de Amplitud y fase en función de $\omega_n=n\omega_0$:

- ✓ De la serie Trigonométrica: $[A_n \text{ fc } \omega_n]$ y $[\phi_n \text{ fc } \omega_n]$
- ✓ De la serie Compleja : $\underbrace{[|c_n| \text{ fc } \omega_n] \text{ y } [\phi_n \text{ fc } \omega_n]}_{\text{Espectros discretos de frecuencia compleja}}$

La Serie de Fourier (trigonométrica o compleja) convierte una función continua y periódica en el dominio del tiempo, a magnitudes de frecuencias discretas en el dominio de las frecuencias.

FUNCION $f(t)$ NO PERIODICA

$T \to \infty \quad \Sigma \to \int$

Integral Compleja de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c_\omega e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$c_\omega=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

EN EL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS

Espectros continuos de frecuencia: $[|c_\omega| \text{ f}_c\ \omega]$

c_ω: es función continua de la variable de frecuencia ω

TRANSFORMADA de FOURIER de $f(t)$:

$$\mathcal{F}[f](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\,dt$$

La Transformada de Fourier convierte una función continua y No periódica en el dominio del tiempo, en una función continua en el dominio de la frecuencia