Trabajo Práctico

TRANSFORMADA DE FOURIER

Ejercicio Nro. 1.

. Sea la función $f(t) = \frac{3}{4}t$ para $0 \leq t < 8$, y $f(t+8) = f(t)$ para todo *t.*

a) – Hallar la Serie de Fourier compleja de la función dada.
b) – Calcule los coeficientes c_n de la serie determinada en el inciso anterior, para $-3 \leq n \leq 3$.
c) – Represente gráficamente el espectro discreto de amplitud de la función dada.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{8}\int_0^8 \frac{3}{4}t\,dt = \frac{3}{32}\left|\frac{t^2}{2}\right|_0^8 = 3$$

$$C_0 = 3$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{3}{32}\int_{-4}^{4} te^{-in\frac{\pi}{4}t}dt$$

$$C_n = \frac{3}{32}\left|-\frac{4t}{in\pi}e^{-in\frac{\pi}{4}t}\right|_{-4}^{4} - \frac{3}{32}\int_{-4}^{4} -\frac{4}{in\pi}e^{-in\frac{\pi}{4}t}dt$$

$$C_n = -\frac{3}{8in\pi}\left[4e^{-in\pi} + 4e^{in\pi}\right] + \frac{3}{8in\pi}\left[-\frac{4}{in\pi}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right)\right]$$

$$C_n = -\frac{3i}{in\pi i}(-1)^n = \frac{3i}{n\pi}(-1)^n$$

Por lo tanto la serie compleja será:

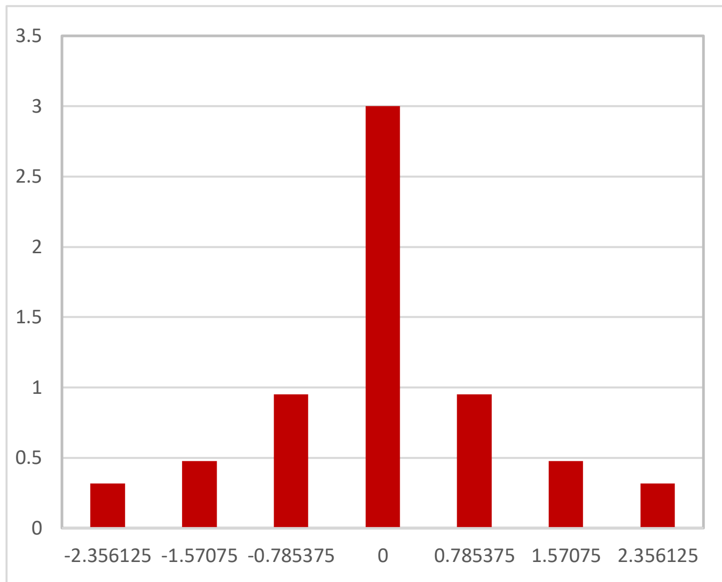
$$\boxed{f(t) = 3 + \frac{3i}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-in\frac{\pi}{4}t}\,(-1)^n}$$

En funciones periódicas el espectro de amplitud es discreto. Para trazar el espectro de amplitud buscado, tendremos:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4}; \quad n\omega_0 = n\frac{\pi}{4}$$

$$|C_0| = 3; \quad |C_n| = \frac{3}{n\pi}$$

n	$n\frac{\pi}{4}$	$\|C_0\| = 3; \quad \|C_n\| = \frac{3}{n\pi}$
-3	$-\frac{3}{4}\pi$	0.318
-2	$-\frac{1}{2}\pi$	0.477
-1	$-\frac{1}{4}\pi$	0.950
0	0	3.000
1	$\frac{1}{4}\pi$	0.950
2	$\frac{1}{2}\pi$	0.477
3	$\frac{3}{4}\pi$	0.318



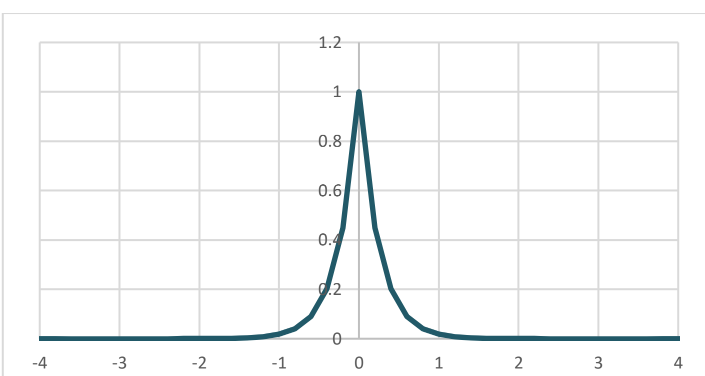
Ejercicio Nro. 2.

. Sea la función $f(t) = e^{-4|t|}$ para todo t.

a) – Hallar la representación integral compleja de Fourier de la función dada.

b) – Represente gráficamente la función $f(t)$.

c) – Represente gráficamente el espectro continuo de amplitud de la función dada.



La representación integral compleja es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_\omega e^{i\omega t} d\omega$$

$$C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{4t}\, e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-4t}\, e^{-i\omega t}dt$$

$$C_\omega = \int_{-\infty}^{0} e^{(4-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(4+i\omega)t}\, dt$$

$$C_\omega = \left|\frac{1}{(4-i\omega)}e^{(4-i\omega)t}\right|_{-\infty}^{0} + \left|\frac{-1}{(4+i\omega)}e^{-(4+i\omega)t}\right|_{0}^{\infty}$$

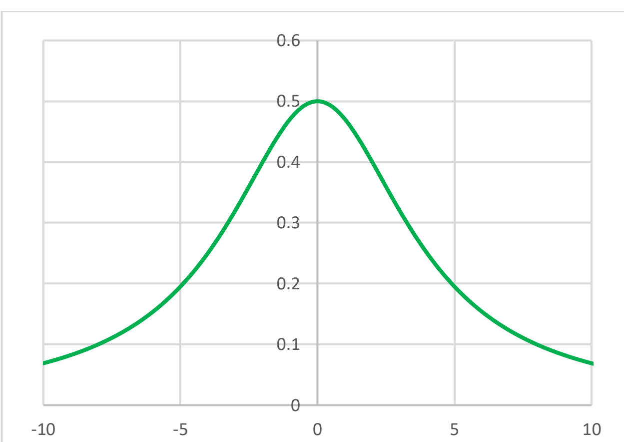
$$C_\omega = \frac{1}{(4-i\omega)} - \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{(4-i\omega)t}}{(4-i\omega)} + \lim_{t\to\infty}\frac{(-1)e^{-(4+i\omega)t}}{(4+i\omega)} - \frac{(-1)}{(4+i\omega)}$$

$$C_\omega = \frac{1}{(4-i\omega)} + \frac{1}{(4+i\omega)} = \frac{8}{16+\omega^2}$$

De esta manera:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{16+\omega^2} e^{i\omega t} d\omega}$$

La representación del espectro continuo de amplitud será:



Ejercicio Nro. 3.

. Para las funciones: $f_1(t) = e^{-4|t|}$ para todo t y $f_2(t) = \begin{cases} 0 & para -\infty < t < 0 \\ 1 & para \quad 0 \leq t < \infty \end{cases}$.

– Calcular la transformada de Fourier de las funciones dadas.

Función escalón unitario o de Heaviside. Es una función no periódica.

$$F[f_1(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|}\, e^{-i\omega t} dt = \frac{8}{16 + \omega^2}$$

En general se cumple que:

$$\boxed{F\left[e^{-a|t|}\right](\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

$$F[f_2(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} 1\, e^{-i\omega t} dt$$

$$F[f_2(t)](\omega) = 0 + \left|\frac{(-1)}{i\omega} e^{-i\omega t}\right|_0^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{(-1)}{i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{(-1)}{i\omega} e^{-i\omega 0} = 0 + \frac{1}{i\omega} 1$$

$$\boxed{F[f_2(t)](\omega) = \frac{1}{i\omega}}$$

Ejercicio Nro. 4.

- Determine la función de transferencia para las siguientes EDO

a) $\dot{y} + ky = x(t)$.

b) $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = x(t)$.

$$\dot{y} + ky(t) = x(t)$$

$$F[\dot{y} + ky(t)] = F[x(t)]$$

Como el operador Transformada de Fourier es un operador Lineal:

$$F[\dot{y}] + F[ky(t)] = F[x(t)]$$

$$i\omega\, F[y(t)] + k\, F[y(t)] = F[x(t)]$$

$$F[y(t)](i\omega + k) = F[x(t)]$$

$$H(\omega) = \frac{TF\ salida\ (respuesta)}{TF\ entrada}$$

$$H(\omega) = \frac{F[y(t)]}{F[x(t)]} = \frac{1}{i\omega + k}$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1}{i\omega + k}}$$

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = x(t)$$

$$F[m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t)] = F[x(t)]$$

A partir de la linealidad del operador Transformada de Fourier:

$$F[m\ddot{y}(t)] + F[b\dot{y}(t)] + F[ky(t)] = F[x(t)]$$

$$m(i\omega)^2 F[y(t)] + bi\omega F[y(t)] + kF[y(t)] = F[x(t)]$$

$$F[y(t)](\omega)[m(i\omega)^2 + bi\omega + k] = F[x(t)](\omega)$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + bi\omega + k}}$$