

Unidad 1-Funciones vectoriales	5
Definición funciones vectoriales	5
Límite	5
Continuidad.....	5
Derivada	5
Curva suave.....	5
Anti-derivada e Integral definida.....	6
Longitud de arco.....	6
Función longitud de arco	6
Vector tangente unitario	6
Curvatura.....	7
Vector normal unitario principal	7
Vector Bi-normal y marco BTN.....	7
Unidad 2-Campos escalares.....	8
Definición	8
Bola abierta y entorno de un punto en R^n	8
Puntos interiores y frontera	8
Tipos de regiones	8
Conceptos gráficos	9
Límite	9
Propiedades de los límites	9
Continuidad.....	10
Derivada parcial	10
Laplaciano de un campo escalar	10
Diferenciabilidad	10
Derivada direccional.....	11
Gradiente.....	11
Plano tangente y recta normal	11
Linealización	11
Diferenciales	11
Fórmula de Taylor.....	12

Extremos locales	12
Puntos Característicos	12
<i>Unidad 3-Integrales dobles y triples.....</i>	<i>13</i>
Integral dobe	13
Propiedades	13
Área de una región plana.....	13
Valor medio de una función de dos variables	13
Integral triple	14
Propiedades integrales triples	14
Volumen de un sólido.....	14
Valor medio de una función de 3 variables	15
Masa, momentos de masa	15
Jacobino	15
<i>Unidad 4-Campos vectoriales e integrales de Línea.....</i>	<i>16</i>
Definición	16
Integral de línea de un campo escalar	16
Integral de línea de un campo vectorial	16
Tipos de integrales de Línea de campos vectoriales.....	17
Fórmula para la integral de línea a través hacia afuera	17
Integrales respecto de los ejes coordenados.....	17
Campos conservativos.....	17
Principio de conservación de energía mecánica	17
Funciones potenciales	17
Líneas de flujo de campos vectoriales	18
Líneas de flujo y superficies equipotenciales (en general)	18
Regiones conexas y simplemente conexas.....	18
Divergencia.....	18
Rotacional (Para R^2 o R^3)	18
Expresiones.....	18
Laplaciano de campos escalares y vectoriales	18
Región tipo 1.....	18

Región tipo 2.....	19
Región simple	19
Superficies	19
Curvas reticulares	19
Derivadas parciales de funciones vectoriales.....	19
Superficies suaves	19
Área de una superficie suave	20
Superficies orientables	20
Integral de superficie campo escalar	20
Flujo de un campo vectorial.....	20
Fórmula de cálculo flujo de un campo vectorial.....	21
Teorema de Stokes en superficies con agujeros.....	21
Teorema de Gauss en sólidos con agujeros	21
Aplicación del teorema de Gauss y de Stokes a las ecuaciones de Maxwell	22
<i>Unidad 5 - Ecuaciones diferenciales</i>	<i>23</i>
Definición	23
Clasificación	23
Solución explícita y solución implícita.....	23
Familia paramétrica, solución particular y solución general.....	24
Campo direccional.....	24
Problemas con valores iniciales.....	24
Problema con valores de contorno	25
Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	25
EDOS separables	25
EDOS lineales	25
EDOS exactas	27
EDOS de Bernoulli	27
Ecuación diferencial lineal homogénea	27
Solución general de una EDO de orden n.....	28
Dependencia e independencia lineal de funciones	28
Wronskiano	28
Conjunto fundamental.....	28

Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes	29
Extensión del método a ecuaciones de orden superior.....	30
Método de coeficientes indeterminados.....	30
Método de variación de parámetros.....	31
Ecuaciones de Euler.....	32
Solución en Serie de Potencias	33
Unidad 6-Series de Fourier	34
Disclaimer.....	34
Conjunto de las funciones Integrales de Riemann en un intervalo cerrado	34
Producto interno.....	35
Ortogonalidad	35
Conjunto o familia ortogonal de funciones.....	35
Conjunto ortogonal completo	35
Series de Fourier.....	36
Serie de Fourier para una función par	37
Serie de Fourier para una función impar.....	37
Extensión par o impar	37

Unidad 1-Funciones vectoriales

Definición funciones vectoriales

Definición

Una función con valores vectoriales es una función del tipo

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad t \rightarrow r(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son las **funciones componentes** de la función r y cada una es una función escalar.

Límite

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$, si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|r(t) - L\| < \varepsilon$.

Continuidad

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$.
Entonces r es continua en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Derivada

Definición

Supongamos que $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.
Se define la derivada de r con respecto a t en t_0 por

$$r'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

Curva suave

Definición

Una función vectorial r definida en $[a, b]$ es una curva **suave** si r' es continua y $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Por otra parte, se dice que r define una **curva suave por partes** si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Anti-derivada e Integral definida**Definición**

Una función vectorial derivable R es una **antiderivada** de una función vectorial r en un intervalo I si $R'(t) = r(t)$ para todo $t \in I$.

La **integral indefinida** de r con respecto a t en I es el conjunto de todas las antiderivadas de r en I y se denota por $\int r(t)dt$. Si R es cualquier antiderivada de r , entonces

$$\int r(t)dt = R(t) + C,$$

donde C es un vector constante arbitrario.

Si las funciones componentes de $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ son integrables en $[a, b]$, entonces r es **integrable** en $[a, b]$ y la **integral definida** de r en $[a, b]$ es

$$\int_a^b r(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt \right).$$

Longitud de arco**Longitud de arco de una curva suave**

La longitud de arco de una curva suave (plana o en el espacio) dada por $r(t)$, $a \leq t \leq b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b , es

$$L = \int_a^b |r'(t)|dt.$$

Función longitud de arco**Definición**

Dada una curva suave por r , $a \leq t \leq b$, se define la función longitud de arco (con punto base $r(a)$) para cada $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t |r'(\tau)|d\tau.$$

Vector tangente unitario**Definición**

Dada r definida en $[a, b]$, se define

$$T(t) := \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

si $r'(t) \neq 0$.

Curvatura

Se define la curvatura en un punto de una curva suave como $\kappa := \left| \frac{dT}{ds} \right|$.

Fórmula de cálculo:

$$\kappa = \left| \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}.$$

Vector normal unitario principal

Definición

En un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$, se define $N := \frac{\frac{dT}{ds}}{\kappa}$.

El plano determinado por los vectores T y N se llama plano osculador; contiene al vector aceleración.

Vector Bi-normal y marco BTN

El vector binormal en un punto de una curva suave donde $\kappa \neq 0$ se define por $B = T \times N$.

Unidad 2-Campos escalares

Definición

Definición

Una **función de varias variables** tiene su dominio D contenido en \mathbb{R}^n y sus imágenes son números reales:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el **rango** de la función. Cada x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ es una **variable independiente**, mientras que w es **variable dependiente**.

Bola abierta y entorno de un punto en \mathbb{R}^n

Llamamos **bola (abierta)** de centro $P(x, y)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.

Llamamos **bola (abierta)** de centro $P(x, y, z)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$.

Un **entorno** abierto de P es una bola abierta de \mathbb{R}^n que contiene a P .

Puntos interiores y frontera

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de \mathbb{R}^n ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

P_0 es un **punto interior** de D si **existe** un entorno abierto (bola) de P_0 incluido en D .

P_0 es un **punto frontera** de D si **para todo** entorno abierto (bola) de P_0 hay puntos del entorno que pertenecen a D y hay puntos del entorno que no pertenecen a D . (No la definición del libro.)

Tipos de regiones

D es una región **abierta** si todo punto de D es un punto interior de D .

D es una región **cerrada** si todos los puntos frontera de D pertenecen a D .

D es una región **acotada** si existe una bola B tal que $D \subset B$.

D es una región **no acotada** si **ninguna bola la incluye**. (No la definición del libro.)

Conceptos gráficos

Definición

Dada una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subset \mathbb{R}^n$), se llama

- **Gráfico de f al conjunto**
 $G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D\}$.
- **Curva o superficie de nivel (k) de f al conjunto**
 $\{(x_1, \dots, x_n) \in D : f(x_1, \dots, x_n) = k\}$, para $k \in \text{Im}(f)$.
- **Curva de contorno de f al conjunto**
 $\{(x_1, x_2, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2) = k\}$, para $k \in \text{Im}(f)$.

Límite

Definición

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $P_0(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando P tiende a P_0 , y escribimos

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $P \in D$, si $0 < \|P - P_0\| < \delta$, entonces $|f(P) - L| < \varepsilon$.

Propiedades de los límites

Propiedad

Si L y M son números reales y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

entonces:

1. **Suma y resta** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \pm g)(x,y) = L \pm M$
2. **Producto** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (fg)(x,y) = LM$
3. **Cociente** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g} \right)(x,y) = \frac{L}{M}$, si $M \neq 0$
4. **Potencia** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x,y))^n = L^n$, si $n \in \mathbb{N}$
5. **Raíz** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$, si $n \in \mathbb{N}$; si n es par, $L > 0$.

Continuidad**Definición**

Una función f es **continua** en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0 ;
- existe $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ y
- $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D .

Observación

Los polinomios y las funciones racionales son continuos en los puntos de sus respectivos dominios.

Derivada parcial**Definición**

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Laplaciano de un campo escalar**Definición**

El **Laplaciano** de un campo escalar f es el campo escalar definido por

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad \text{o} \quad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Diferenciabilidad**Definición**

Una función f es **diferenciable** en un punto $P_0(x_0, y_0)$ (de su dominio) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple que el incremento $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ verifica:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Derivada direccional

Definición

La **derivada direccional** de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, en la dirección de un vector unitario $u = (u_1, u_2, u_3)$, en un punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \text{int } D$, viene dada por

$$D_u f(P) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2, x_3 + hu_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h},$$

si el límite existe.

Gradiente

Definición

El **gradiente** de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0 , si existen. Se denota por ∇f .

Plano tangente y recta normal

Definición (Plano tangente y recta normal a una superficie de nivel)

Si f es una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, el **plano tangente** y la **recta normal** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) , en dicho punto, son el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es normal al vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, respectivamente.

Linealización

Definición

Si f es una función de tres variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f , se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0).$$

Diferenciales

Definición

Si f es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz,$$

si f es de tres variables.

Unidad 3-Integrales dobles y triples

Integral doble

- 2 Sea f una función definida y **acotada** en una región acotada, R . Definimos una partición de R , formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en R y formamos la suma de Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$. Si el límite $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n$ existe, para cualquier elección de (x_i, y_j) , se dice que f es **integrable** sobre R y que la integral doble de f sobre R es el límite de las sumas S_n . La integral se denota por

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Propiedades

- 1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R , entonces f es integrable en R .

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R , entonces:

$$2 \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

$$3 \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

- 4 Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$,

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

- 5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$

Área de una región plana

Definición

El área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

Valor medio de una función de dos variables

Definición

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f dA.$$

Integral triple

Sea f una función definida y **acotada** en una región acotada, R . Definimos una partición de R , formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en R ; formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V_{ijk}.$$

Si el límite $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n$ existe, para cualquier elección de (x_i, y_j, z_k) , se dice que f es **integrable** sobre R y que la integral triple de f sobre R es el límite de las sumas S_n . La integral se denota por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Propiedades integrales triples

1 Si f es continua en una región cerrada y acotada R , entonces f es integrable en R .

Si f y g son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada R , entonces:

$$2 \quad \iiint_R [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_R f(x, y, z) dV + \iiint_R g(x, y, z) dV.$$

$$3 \quad \iiint_R cf(x, y, z) dV = c \iiint_R f(x, y, z) dV.$$

4 Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in R$,

$$\iiint_R f(x, y, z) dV \leq \iiint_R g(x, y, z) dV.$$

5 Si R_1 y R_2 son dos regiones tales que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ y f es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces f es integrable en $R_1 \cup R_2$ y

$$\iiint_{R_1 \cup R_2} f(x, y, z) dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z) dV.$$

Volumen de un sólido**Definición**

Si D es un sólido (cuerpo que ocupa una región en \mathbb{R}^3 que es **cerrada y acotada**), su volumen es

$$V = \iiint_D dV.$$

Valor medio de una función de 3 variables**Definición**

Sea f una función integrable sobre una región acotada R . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{volumen de } R} \iiint_R f \, dV.$$

Masa, momentos de masa

Si un sólido D tiene densidad en cada punto dada por una función integrable $\delta(x, y, z)$, su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta \, dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x \delta \, dV}{\iiint_D \delta \, dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y \delta \, dV}{\iiint_D \delta \, dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z \delta \, dV}{\iiint_D \delta \, dV}$$

Jacobino**Definición**

El Jacobiano de la transformación $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Unidad 4-Campos vectoriales e integrales de Línea

Definición

Definición 1.1.1. Un campo vectorial es una función \mathbf{F} que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, \dots, x_n) \in A$, \mathbf{F} le asigna un vector de \mathbb{R}^m dado por

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n));$$

las funciones f_1, \dots, f_m se llaman funciones componentes de \mathbf{F} .

Integral de línea de un campo escalar

Definición 1.2.1. Dada una curva C y una representación paramétrica suave de la misma, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido en una región abierta D , que contiene a C , se define la integral de línea de f a lo largo de C por

$$\int_C f \, ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Integral de línea de un campo vectorial

Definición 1.2.4. Sea \mathbf{F} un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre la curva suave C . Definimos la integral de \mathbf{F} a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de \mathbf{F} a lo largo de C :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{T} es el vector tangente unitario a la curva C en cada punto.

Fórmula de cálculo: si C está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Observaciones

Observación 1:

El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C , en tanto se mantenga el sentido de recorrido de la curva.

Observación 3:

Se puede calcular integrales de línea en curvas suaves por partes, sumando las integrales de las porciones suaves que la forman.

Observación 1.2.6. Se tiene que $\int_C \mathbf{F} \, ds = -\int_{-C} \mathbf{F} \, ds$ si $-C$ es la curva formada por los mismos puntos que C pero recorrida en sentido contrario.

Tipos de integrales de Línea de campos vectoriales

Si \mathbf{F} es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de \mathbf{F} se llama **flujo de \mathbf{F} a lo largo de C** .

Si C es **cerrada**, el flujo de \mathbf{F} a lo largo de C se llama **circulación de \mathbf{F} a lo largo de C** .

Para integrales a lo largo de curvas **cerradas** se suele usar el símbolo \oint_C . Puede añadirse una flecha que indica el sentido cuando se trata de una curva cerrada plana: \oint_C^{\rightarrow} o \oint_C^{\leftarrow} .

Si C es una curva **plana** simple y cerrada, positivamente orientada, el flujo de \mathbf{F} a través hacia fuera de C es la integral de línea de la componente **normal** hacia fuera de \mathbf{F} a lo largo de C :

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Fórmula para la integral de línea a través hacia afuera

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C (-N, M) \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Integrales respecto de los ejes coordenados

Definición 1.2.10. Dado un campo escalar f y una curva suave C incluida en el dominio de f , parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, ($a \leq t \leq b$), se llama **integral de línea del campo escalar f con respecto a x** a

$$\int_C f \, dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) \, dt \quad (1.5)$$

Similarmente,

$$\int_C f \, dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) \, dt \quad (1.6)$$

es la **integral de línea del campo escalar f con respecto a y** .

Campos conservativos

Definición 1.2.12. Sea \mathbf{F} un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D , la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias desde A hasta B . Entonces la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial \mathbf{F} es **conservativo** en D .

Principio de conservación de energía mecánica

Principio de conservación de la energía mecánica Si un campo de fuerzas es un gradiente, la suma de las energías cinética y potencial de una partícula que se desplaza en dicho campo es constante.

Funciones potenciales

Definición 1.2.13. Si \mathbf{F} es un campo vectorial definido en una región abierta D y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D , entonces f se llama **función potencial** de \mathbf{F} .

Líneas de flujo de campos vectoriales

Definición 1.2.14. Las líneas de flujo de un campo vectorial \mathbf{F} son aquellas curvas en el dominio de \mathbf{F} , tales que el vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de \mathbf{F} .

Líneas de flujo y superficies equipotenciales (en general)

Observación 2: Si el campo vectorial \mathbf{F} es el gradiente de alguna función potencial f , las líneas de flujo de \mathbf{F} son ortogonales a los conjuntos de nivel de f (superficies o curvas equipotenciales) en cada punto.

Regiones conexas y simplemente conexas

Aparecen también los conceptos de región conexas y simplemente conexas.

4) Una región abierta D , incluida en \mathbb{R}^n , es conexas si para todo par de puntos A y B de D existe una curva suave en D que une A y B . Por partes

5) Una región abierta y conexas D de \mathbb{R}^n es simplemente conexas si para todo par de puntos A y B en D y todo par de curvas C_1 y C_2 de D que unen A con B , existe una familia de curvas en D que unen A con B tales que varían con continuidad dentro de D .

Divergencia

Definición 1.3.1. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M_1, \dots, M_k)$, cada una de cuyas k funciones componentes es un campo escalar $M_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, se define la divergencia de \mathbf{F} , por $\text{div } \mathbf{F} = M_{1x_1} + M_{2x_2} + \dots + M_{kx_k}$.

Rotacional (Para \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3)

Definición 1.3.3. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$, se define el rotacional de \mathbf{F} por $\text{rot } \mathbf{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$.

Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N)$, la componente k del rotacional de \mathbf{F} es $N_x - M_y$.

Expresiones

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Laplaciano de campos escalares y vectoriales

Definición 1.3.17. El Laplaciano de un campo escalar f se anota Δf y se define por la divergencia del gradiente de f :

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

También se usa la notación $\Delta f = \nabla^2 f$.

El Laplaciano de un campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$ se anota $\Delta \mathbf{F}$ o $\nabla^2 \mathbf{F}$ y es el vector de los Laplacianos de las funciones componentes de \mathbf{F} :

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 M, \nabla^2 N, \nabla^2 P).$$

Región tipo 1

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

para funciones continuas g_1 y g_2 definidas en $[a, b]$.

Región tipo 2

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

para funciones continuas h_1 y h_2 definidas en $[c, d]$

Región simple

Una región que es de tipo 1 y de tipo 2

Superficies

Definición 1.5.1. Sea

$$\mathbf{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

una función vectorial definida en una región R del plano uv , inyectiva en el interior de R . La superficie S es el rango de \mathbf{r} y decimos que está parametrizada por \mathbf{r} ; u y v son los parámetros y R es el dominio de los parámetros.

Curvas reticulares

En la Definición 1.5.1 podemos apreciar que, dejando fijo un valor de uno de los parámetros, digamos $u = u_0$, y permitiendo que varíe el otro parámetro, v , obtenemos una función de un solo parámetro: $\mathbf{r}(u_0, v)$. Esta, como vimos antes, describe una curva paramétricamente. Tal curva se llama curva reticular de la superficie S .

Derivadas parciales de funciones vectoriales

Definición 1.5.2. Dada una función $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u(u, v) := \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} \quad (1.30)$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) := \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v}, \quad (1.31)$$

siempre que los límites existan.

Superficies suaves

Definición 1.5.4. Una superficie S parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in R$, es suave si \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ en R .^[a]

^aUna función vectorial, como \mathbf{r} , es diferenciable en su dominio R , si es diferenciable en un conjunto abierto $A \supset R$.

Área de una superficie suave

Definición 1.5.5 (Área de una superficie suave parametrizada). Dada la superficie suave S parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde R es una región simple, se define el área de S por

$$A = \iint_R \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

NOTA: Es independiente de la parametrización.

Superficies orientables

Definición 1.5.8 (Superficies orientables y orientadas). Una superficie suave S es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial \mathbf{n} que a cada punto de S le asigna un vector normal unitario de manera continua, es decir, que varíe en forma continua con la superficie.

Una superficie suave S está **orientada** cuando ya se ha definido un tal campo vectorial \mathbf{n} sobre S .

Definición 1.5.10. Una superficie suave por partes se llama **cerrada** cuando es la frontera de un sólido y separa el espacio en dos regiones: la “interior”, que es acotada, y la “exterior”, que es no acotada.

Definición 1.5.11. Una superficie suave **cerrada** está **orientada positivamente** si el vector normal en cada punto de S apunta hacia fuera de S .

NOTA: La idea se extiende también a superficies suaves por partes

Integral de superficie campo escalar

Definición 1.6.1. Dada la superficie suave $S \subset \mathbb{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde R es una región simple, y dado el campo escalar f continuo definido en S , se define la integral de superficie de f sobre S por

$$\iint_S f d\sigma = \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

Flujo de un campo vectorial

Definición 1.6.4. Sean \mathbf{F} , un campo vectorial acotado con componentes continuas y S , una superficie orientada y suave por partes incluida en el dominio de \mathbf{F} .

El **flujo** de \mathbf{F} a través de S en la dirección de \mathbf{n} es la integral de superficie de la componente normal de \mathbf{F} en la dirección de \mathbf{n} :

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Notación: si la superficie S es cerrada, en ocasiones se usa la notación

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Fórmula de cálculo flujo de un campo vectorial

Si S está parametrizada por $\mathbf{r} : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces el flujo de \mathbf{F} a través de S se puede calcular como

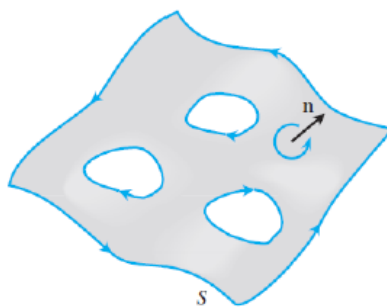
$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, du \, dv = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du \, dv \quad (1.34)$$

o

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u) \, du \, dv, \quad (1.35)$$

Teorema de Stokes en superficies con agujeros

Igual que con el Teorema de Green, podemos aplicar el Teorema de Stokes a superficies más generales, incluyendo superficies con agujeros, en tanto la orientación de cada curva sea la correspondiente.



Teorema de Gauss en sólidos con agujeros

Por ello la orientación de superficies de sólidos con agujeros, similarmente a lo que ocurre en los casos de los Teoremas de Green y de Stokes, debe hacerse de manera que se oriente hacia fuera la superficie “exterior” y hacia dentro la superficie “interior”.

Aplicación del teorema de Gauss y de Stokes a las ecuaciones de Maxwell

$$\text{Ley de Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.39)$$

$$\text{Ley de Gauss: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.40)$$

Una aplicación del Teorema de Stokes a (1.39) permite obtener la expresión integral de esta Ley:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

(*Esta última igualdad se cumple si se puede mover $\frac{\partial}{\partial t}$ del signo de integral.)

Observación 1.7.8. La expresión integral de la Ley de Faraday es comprobable en laboratorio: esa es una gran ventaja. A partir de la expresión integral de la Ley de Faraday se puede obtener la expresión diferencial de la misma, aplicando el Teorema de Stokes.

En efecto, supongamos que vale $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

Entonces

$$\iint_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

para cualquier superficie S que tenga a C por frontera. Si el integrando fuese un vector no nulo en algún punto, entonces la integral sobre un pequeño disco centrado en dicho punto y normal a ese vector, sería no nula (por un argumento de continuidad).

Así podemos comprobar que, gracias al Teorema de Stokes, se puede pasar de una expresión a la otra.

Similarmente, una aplicación del Teorema de la divergencia a (1.40) nos lleva a la expresión integral de la Ley:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_D \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Unidad 5 - Ecuaciones diferenciales

Definición

Definición 2.1.1. Se llama *ecuación diferencial (ED)* a la ecuación que contiene derivadas de una o más funciones (o variables dependientes) con respecto a una o más variables independientes.

Clasificación

- **Como ordinaria o parcial.** Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) es aquella que sólo contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente. Por el contrario, una ecuación diferencial Parcial (EDP) es aquella que involucra derivadas parciales de una o más funciones con respecto a más de una variable independiente.
- **Por orden** El orden de una ED es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Si la ecuación diferencial es de orden n y tiene sólo una variable independiente puede expresarse como: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.
- **Por grado** El grado de una ED es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.
- **Como lineales o no lineales** Se dice que una ED de n -ésimo orden, con una variable independiente, es lineal si puede escribirse como:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.1)$$

donde y es una variable dependiente de x . La ecuación (2.1) también admite la expresión:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

si del contexto se desprende que y sólo depende de la variable x .

Solución explícita y solución implícita

Definición 2.1.3. Se llama *solución explícita* de una ecuación diferencial en un intervalo I a una función y (suficientemente derivable) que, al ser sustituida en la ecuación, satisface la ecuación para todo $x \in I$. Una relación $G(x, y) = 0$ es una *solución implícita* de una ecuación diferencial en un intervalo I si ésta define una o más soluciones explícitas de la ecuación en I .

Familia paramétrica, solución particular y solución general

Definición 2.1.5. Dada una ED, una familia paramétrica de soluciones es una colección de soluciones de la ecuación cuya expresión contiene uno o varios parámetros. Una solución particular de la ecuación es un miembro de la familia que se obtiene dando valores concretos a dichos parámetros. Por otro lado, una solución singular de la ecuación es una solución que no es un miembro de la familia paramétrica de soluciones.

Una expresión de la solución general de la ecuación es una expresión paramétrica tal que toda solución de la ecuación se pueda obtener a partir de esta expresión dando valores apropiados a los parámetros.

Campo direccional

Definición 2.1.15. Dada una ED $y'(x) = f(x, y)$, el conjunto de los elementos lineales que se obtiene al evaluar sistemáticamente a f en una cuadrícula de puntos en el plano xy se llama campo direccional o campo de pendientes.

Problemas con valores iniciales

Definición 2.1.7. Un problema con valores iniciales (PVI) consiste en una ecuación diferencial de n -ésimo orden en algún intervalo I que contiene a x_0 , sujeto a las n condiciones que la acompañan especificadas en x_0 . En un PVI hay que resolver:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

sujeto a:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Estas condiciones a las que está sujeta la solución de la ecuación diferencial se llaman condiciones iniciales.

Problema con valores de contorno

Definición 2.1.13. *Un problema con valores de frontera (PVF) consiste en una ecuación diferencial de orden dos o superior, en algún intervalo I , donde las variables dependientes y /o sus derivadas se especifican en diferentes puntos del intervalo. Un posible PVF de segundo orden sería uno en el que hay que resolver:*

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeto a:

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1$$

*Estas condiciones a las que está sujeta la solución de la ecuación diferencial se llaman **condiciones de frontera o de borde**.*

Otras posibles condiciones de frontera serían:

$$y(a) = y_0, y'(b) = y_1$$

$$y'(a) = y_0, y(b) = y_1$$

$$y'(a) = y_0, y'(b) = y_1$$

NOTA: Notar que debe ser una ecuación diferencial de orden al menos 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

NOTA: La clasificación de EDOS de primer orden que utilizamos **no es exhaustiva y no es mutuamente excluyente**.

EDOS separables

Definición 2.2.1. *Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es separable si es de la forma:*

$$\frac{dy(x)}{dx} = g(x)p(y(x)). \quad (2.3)$$

EDOS lineales

Definición 2.2.5. *Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal en la variable dependiente y , si es de la forma:*

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \quad (2.5)$$

donde $y = y(x)$ y a_1, a_0 y g son funciones de x continuas en un intervalo I . Además $a_1(x) \neq 0$ para todo x de I .

En estos casos, se determina una función $\mu(x)$ tal que al multiplicar la ED lineal por $\mu(x)$, ésta resulte separable. Este método se conoce como “método del factor integrante”.

Para aplicarlo, primero se debe expresar la Ec. (2.5) en forma estándar, es decir:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \quad (2.6)$$

donde $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$ y $Q(x) = g(x)/a_1(x)$. Esto es posible porque $a_1(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo de interés. Luego, se multiplican ambos lados de la Ec. (2.6) por el factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x) \quad (2.7)$$

y se busca $\mu(x)$ de manera que el primer miembro de la ecuación (2.7) sea la derivada del producto $(\mu(x).y(x))$, es decir,

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)] = \mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x).$$

Para eso es necesario que $\mu'(x) = P(x)\mu(x)$.

Esta última es una ED separable de la que se obtiene:

$$\begin{aligned} |\mu(x)| &= e^{\int P(x)dx+k}, \\ \mu(x) &= k_1 e^{\int P(x)dx}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde k es la constante de integración y k_1 es cualquier constante real; se verá en (2.9) que se puede omitir la constante de integración k en este paso. Con esta elección de $\mu(x)$, la Ec. (2.7) puede escribirse como: $\frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)] = \mu(x)Q(x)$, que con lo obtenido en (2.8), da la ED:

$$\frac{d}{dx} [k_1 e^{\int P(x)dx} y(x)] = k_1 e^{\int P(x)dx} Q(x), \quad (2.9)$$

en la que se puede cancelar k_1 . Por esto no se incluye la constante de integración en el factor integrante y se trabaja con la expresión

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \quad (2.10)$$

Lo que se obtiene finalmente es la ED:

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx} y(x)] = e^{\int P(x)dx} Q(x), \quad (2.11)$$

que nuevamente es separable y su solución:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x)dx + C \right]$$

SOLUCIÓN GENERAL Suponga que las funciones P y f en la ecuación (2) son continuas en un intervalo I . En los pasos que conducen a la ecuación (4) mostramos que si la ecuación (2) tiene una solución en I , entonces debe estar en la forma dada en la ecuación (4). Recíprocamente, es un ejercicio directo de derivación comprobar que cualquier función de la forma dada en (4) es una solución de la ecuación diferencial (2) en I . En otras palabras (4) es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2) y *toda solución de la ecuación (2) definida en I es un miembro de esta familia*. Por tanto llamamos a la ecuación (4) la **solución general** de la ecuación diferencial en el intervalo I . (Vea los *Comentarios* al final de la sección 1.1.) Al escribir la ecuación

EDOS exactas

Definición 2.2.9. La forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es *exacta* en una región D si existe una función $S(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

para toda (x, y) en D . Es decir, la diferencial total de $S(x, y)$ satisface

$$dS(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una forma diferencial exacta, entonces la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{es llamada ecuación exacta}$$

EDOS de Bernoulli

Definición 2.2.13. Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de Bernoulli, si es de la forma

$$y' + P(x)y = R(x)y^n.$$

Cuando $n = 0$ ó $n = 1$, la ecuación es lineal y ya se vió cómo resolverla. Pero si $n \neq 0$ y $n \neq 1$ estas ecauciones requieren otro modo de resolución que consiste en hacer la siguiente transformación:

$$v = y^{(1-n)} \tag{2.19}$$

Esto reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal en v .

NOTA: Estudiaremos solo algunos tipos de ecuaciones diferenciales de orden superior.

Ecuación diferencial lineal homogénea

Es una ecuación lineal en la que la función de término independiente es la función constante nula.

Solución general de una EDO de orden n

Definición 2.3.4. Si toda solución de una ecuación diferencial de orden n , $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I se puede obtener a partir de una familia n -paramétrica de soluciones, $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, excepto posiblemente soluciones singulares, eligiendo apropiadamente las constantes c_1, c_2, \dots, c_n , entonces diremos que la familia es la **solución general** de dicha ecuación diferencial.

Dependencia e independencia lineal de funciones

Definición 2.3.7. La familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente dependiente (LD)** en I si y sólo si existen c_1, \dots, c_n , no todos nulos tales que

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0,$$

para toda t en el intervalo. En otro caso se dice que la familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es **linealmente independiente (LI)** en I .

Wronskiano

Definición 2.3.9. El **Wronskiano** de una familia $\{f_1, \dots, f_n\}$ de n funciones derivables hasta el orden $n - 1$ al menos, es la función dada por el determinante

$$W_{(f_1, \dots, f_n)}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Observación 2.3.11. Si la familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente dependiente en el intervalo I , entonces $W_{f_1, \dots, f_n}(x) = 0$ para toda $x \in I$. La implicación contrarrecíproca dice que si $W_{f_1, \dots, f_n}(x) \neq 0$ para al menos una $x \in I$, entonces la familia de funciones $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente independiente en el intervalo I .

Conjunto fundamental

Definición 2.3.13. Dada una ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden, se llama **conjunto fundamental de soluciones** a cualquier conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de n soluciones de la ecuación linealmente independientes en un intervalo I .

Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2.34)$$

donde a_2, a_1, a_0 son constantes y $a_2 \neq 0$. Para resolver (2.34) se propone como solución

$$y = e^{rx}, \quad (2.35)$$

Si se sustituye $y = e^{rx}$ en (2.34) se tiene:

$$a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0,$$

$$e^{rx} (a_2 r^2 + a_1 r + a_0) = 0.$$

Como $y = e^{rx}$ nunca es cero, se puede dividir por esta cantidad para obtener:

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) es la ecuación auxiliar o característica asociada a la ecuación homogénea (2.34).

- Raíces reales y distintas

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

- Raíces dobles

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

- Raíces complejas conjugadas

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} ((c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x)$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$c_1 = -\frac{i}{2} \text{ y } c_2 = \frac{i}{2}$$

$$, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\sin \beta x)$$

Extensión del método a ecuaciones de orden superior

El método desarrollado para el caso de $n = 2$ puede generalizarse para una ecuación diferencial de n -ésimo orden dada por la ecuación (2.33). Si todas las raíces son reales y distintas, la solución general será:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \quad (2.42)$$

Si, por el contrario, hay una raíz r_i con multiplicidad k (es decir, k raíces son iguales a r_i), la solución general debe contener la combinación lineal:

$$c_1 e^{r_i x} + c_2 x e^{r_i x} + c_3 x^2 e^{r_i x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{r_i x} \quad (2.43)$$

Método de coeficientes indeterminados

La idea detrás de este método es conjeturar la forma de y_p según la función $g(x)$ y luego establecer los coeficientes de y_p de modo que efectivamente sea solución de la ecuación diferencial. El método se limita a ED lineales para las cuales:

- los coeficientes a_n, \dots, a_0 de (2.44) son constantes.
- $g(x)$ es una constante, una función polinomial, una función seno o coseno, una exponencial o sumas o productos de estas funciones.

$g(x)$	y_p : función de prueba
a	A
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$
$\text{sen}(ax)$	$A \text{sen}(ax) + B \cos(ax)$
$\cos(ax)$	$A \text{sen}(ax) + B \cos(ax)$
e^{ax}	$A e^{ax}$
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{ax}$	$(A_n x^n + \dots + A_0) e^{ax}$
$e^{bx} \text{sen}(ax)$	$e^{bx} (A \text{sen}(ax) + B \cos(ax))$
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{bx} \text{sen}(ax)$	$e^{bx} ((A_n x^n + \dots + A_0) \text{sen}(ax) + (B_n x^n + \dots + B_0) \cos(ax))$

Tabla 2.2: Tabla con casos genéricos.

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma $ay'' + by' + cy = G(x)$.

Si $G(x)$ tiene un término que es un múltiplo constante de . . .	Y si	Entonces incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
$\sin kx, \cos kx$	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B \cos kx + C \sin kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Método de variación de parámetros

El método se limita a ED lineales donde:

- los coeficientes a_n, \dots, a_0 de (2.44) son funciones de variable x (pueden ser funciones constantes), es decir $a_i = a_i(x)$. Por lo tanto no tiene restricciones en el tipo de funciones coeficientes más que su continuidad y que $a_n(x) \neq 0$ en algún intervalo.
- la ED pueda escribirse de forma estándar, por ejemplo, para $n = 2$:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (2.45)$$

donde $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ y $f(x) = g(x)/a_2(x)$ son continuas en algún intervalo común.

El método se basa en suponer una solución de la forma:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (2.46)$$

donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea asociada de (2.45).

Se obtiene por reemplazando en la ecuación diferencial

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$$

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x)$$

Luego

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Dado que se trata de funciones del conjunto fundamental, el wronskiano es no nulo.

Ecuaciones de Euler

Definición 2.3.28. Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables se dice que es de Euler si se expresa como

$$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = r(x),$$

donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$.

$$z(x) = \ln(x);$$

claramente para aplicarla consideraremos $x > 0$ o cualquier subintervalo de éste.

Con esta sustitución propuesta y resulta ser la función compuesta:

$$Y(z(x)) = Y(\ln(x)) = y(x).$$

Así

$$y'(x) = \frac{1}{x} Y'(z)$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2} Y''(z) - \frac{1}{x^2} Y'(z),$$

con lo que al reemplazar en la ED se tiene:

$$ax^2 \left(\frac{1}{x^2} Y'' - \frac{1}{x^2} Y' \right) + bx \frac{1}{x} Y' + cY = 0$$

$$aY'' + (b-a)Y' + cY = 0,$$

Solución en Serie de Potencias

En esta sección se verá otro método para resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes variables que consiste en proponer como solución una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2.49)$$

y luego, reemplazando $y(x)$ y sus derivadas en la ED, determinar los coeficientes de la serie que satisfacen la ecuación diferencial. En este sentido, la metodología es la misma que la usada en el método de los coeficientes indeterminados.

Unidad 6-Series de Fourier

Disclaimer

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica en términos de una suma infinita de senos y cosenos, que se logra gracias a la ortogonalidad de las funciones senos y cosenos. La parte de la matemática que estudia las series de Fourier es el análisis armónico y se usa para expresar una función periódica a través de un conjunto de términos simples, con los que se trabaja por separado y luego se recombinan para obtener las soluciones a los problemas originales o, al menos, aproximaciones a las mismas. En particular, este procedimiento puede ser muy útil para resolver ecuaciones diferenciales, expresando una función por medio de su serie de Fourier.

Si bien es cierto que cualquier conjunto de funciones que formen un sistema ortogonal completo puede dar lugar a series generalizadas de Fourier, en este texto sólo analizaremos las series trigonométricas de Fourier.

Conjunto de las funciones Integrales de Riemann en un intervalo cerrado

En primer lugar consideremos el conjunto $\mathcal{R}[a, b]$ formado por todas las funciones integrables (y acotadas) en el intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{R}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R} \right\}.$$

NOTA: Observar que en el conjunto de las funciones integrables definidas en el intervalo cerrado no necesariamente todas son continuas, pueden haber funciones que tengan un conjunto finito de discontinuidades de salto finito en el intervalo y aún son integrables, o incluso pueden ser funciones con discontinuidades esenciales para las cuales existen las integrales impropias en el intervalo. Como ejemplo de esto puede ser la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad x \in [0, a], \quad a \in \mathbb{R}$$

Esta función presenta una discontinuidad esencial en el cero ya que el límite lateral no está definido en ese punto. La función está definida en todo el intervalo, y de hecho la función es integrable en todo el intervalo ya que la integral impropia existe.

$$\int_0^a f dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{a} - \sqrt{c}) = 2\sqrt{a}$$

Este tipo de funciones pueden llegar a causar algunos problemas así que las excluimos diciendo que al espacio solo pertenecen las funciones que además de ser integrables sean acotadas en el intervalo.

Producto interno

Definición 3.1.1 (Producto interno o escalar de funciones). ^a

El producto interno de dos funciones f_1 y f_2 de $\mathcal{R}[a, b]$ es el número

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx. \quad (3.1)$$

^aPara que sea un producto interno necesitamos que las funciones sean continuas en el intervalo $[a, b]$. Cuando las funciones no son continuas tenemos en realidad un **pseudo producto interno**, con el que se trabaja sin inconvenientes.

NOTA: Recordar que los axiomas del producto interior son 4. Axioma de simetría, de aditividad, de homogeneidad, y positividad. Bueno, el problema se presenta para las algunas funciones no continuas que tienen una cantidad finita de discontinuidades de salto en el intervalo para las cuales el producto interno por si mismas da el vector nulo, aunque las funciones no sean el vector nulo.

Ortogonalidad

Definición 3.1.4 (Funciones ortogonales).

Dos funciones f_1 y f_2 de $\mathcal{R}[a, b]$ son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0. \quad (3.2)$$

Conjunto o familia ortogonal de funciones

Definición 3.1.6 (Conjunto ortogonal).

Una familia o conjunto finito o infinito de funciones de $\mathcal{R}[a, b]$, $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$, se dice que es ortogonal en el intervalo $[a, b]$ si

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_a^b \phi_i(x) \phi_j(x) dx = 0,$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots$, tales que $i \neq j$.

Con lo cual hemos probado que la familia $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{n\pi x}{p}, n = 1, 2, \dots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$. Para probar que la misma familia de funciones es ortogonal en $[0, 2p]$ se procede análogamente, planteando las integrales entre 0 y $2p$. Se deja como ejercicio.

Conjunto ortogonal completo

Definición 3.1.8 (Conjunto ortogonal completo).

Una familia o conjunto ortogonal de funciones de $\mathcal{R}[a, b]$ $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$, se dice que es completo en el intervalo $[a, b]$ si la única función de $\mathcal{R}[a, b]$ ortogonal a todas las funciones del conjunto es la función nula.

Series de Fourier

En esta sección, dada una función f definida en un intervalo $[-p, p]$ (o $[0, 2p]$) y a partir de la familia ortogonal de funciones en $[-p, p]$ (o en $[0, 2p]$),

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \sin \frac{n\pi x}{p}; n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad (3.4)$$

se busca coeficientes c_0 , a_n y b_n , $n = 1, 2, \dots$ que permitan expresar la función f como

$$f(x) = c_0 + a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} + b_1 \sin \frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{p} + \dots$$

El segundo miembro de esta igualdad es una serie que se llama **serie trigonométrica de Fourier generada por la función f** . Para obtener un desarrollo en serie de Fourier para una función f haremos algunos supuestos.

NOTA: El período fundamental de esta familia ortogonal es $2p$

Supuestos:

- f es acotada y continua por partes (por lo tanto también es integrable) en el intervalo $[-p, p]$.
- f se puede desarrollar en una serie formada por las funciones trigonométricas del conjunto ortogonal completo

$$\left\{ 1, \cos \left(\frac{\pi}{p} x \right), \sin \left(\frac{\pi}{p} x \right), \cos \left(\frac{2\pi}{p} x \right), \sin \left(\frac{2\pi}{p} x \right), \dots \right\},$$

es decir, existen coeficientes a_0 , a_n , b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right). \quad (3.5)$$

- En las expresiones que irán apareciendo, asumimos que se puede integrar término a término.

Definición 3.2.1 (Serie de Fourier generada por una función f).

La serie de Fourier generada por una función integrable f en el intervalo $[-p, p]$ está dada por la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right)$$

con coeficientes a_0 , a_n y b_n definidos por las ecuaciones

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad (3.17)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) dx, \text{ para cada } n \geq 1 \quad (3.18)$$

y

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) dx, \text{ para cada } n \geq 1; \quad (3.19)$$

para indicar que f genera esta serie, escribimos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right). \quad (3.20)$$

Serie de Fourier para una función par

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \right) \leftarrow \text{Serie de cosenos de Fourier de } f.$$

Serie de Fourier para una función impar

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \leftarrow \text{Serie de senos de Fourier de } f.$$

Extensión par o impar

Dada $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, se puede definir una nueva función, extensión de f al intervalo $[-L, L]$, que sea par o impar (esta última, si $f(0) = 0$):

Extensión par:

$$g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

La serie de cosenos de Fourier de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la extensión par de f .

Extensión impar (asumimos $f(0) = 0$):

$$h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -L \leq x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ f(x) & \text{si } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

La serie de senos de Fourier de una función definida en un semiintervalo $[0, L]$ es la serie de Fourier generada por la extensión impar de f .

EJEMPLO

