Unidad 1-Funciones vectoriales

Límites de la función-Límite de las componentes

Teorema

Supongamos que $\mathrm{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathrm{r} = (f_1, ..., f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ *y* $\mathrm{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
$\lim_{t \to t_0} \mathrm{r}(t) = \mathrm{L}$ *si y solo si* $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, ..., n$.

Continuidad de la función-Continuidad de las componentes

Teorema

Supongamos que $\mathrm{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathrm{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in [a, b]$.
r *es continua en* t_0 *si y solo si* f_i *es continua en* t_0, $i = 1, ..., n$.

Derivada de la función-Derivada de las componentes

Teorema

Supongamos que $\mathrm{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathrm{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathrm{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

Propiedades de la derivación

Teorema

Sean u *y* v *funciones vectoriales derivables de* t, C *un vector constante,* c *un escalar y* f *una función escalar de una variable real derivable.*

Función constante	$\frac{dC}{dt} = 0$
Múltiplos escalares	$\frac{d}{dt}[c\mathrm{u}(t)] = c\mathrm{u}'(t)$
	$\frac{d}{dt}[f(t)\mathrm{u}(t)] = f'(t)\mathrm{u}(t) + f(t)\mathrm{u}'(t)$
Suma y resta	$\frac{d}{dt}[\mathrm{u}(t) \pm \mathrm{v}(t)] = \mathrm{u}'(t) \pm \mathrm{v}'(t)$
Producto punto	$\frac{d}{dt}[\mathrm{u}(t) \cdot \mathrm{v}(t)] = \mathrm{u}'(t) \cdot \mathrm{v}(t) + \mathrm{u}(t) \cdot \mathrm{v}'(t)$
Producto vectorial	$\frac{d}{dt}[\mathrm{u}(t) \times \mathrm{v}(t)] = \mathrm{u}'(t) \times \mathrm{v}(t) + \mathrm{u}(t) \times \mathrm{v}'(t)$
Regla de la cadena	$\frac{d}{dt}[\mathrm{u}(f(t))] = f'(t)\mathrm{u}'(f(t))$

Derivada de una función de magnitud constante

Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:
Si $\mathrm{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función de magnitud constante (i.e.* $|\mathrm{r}(t)| = cte$ *en* $[a, b]$*), entonces* $\mathrm{r}(t)$ *es ortogonal a* $\mathrm{r}'(t)$ *en todo* $t \in [a, b]$.

NOTA: Esto puede ser una doble implicación

Curvatura de una función de dos variables

La curvatura de una curva suave $\mathrm{r}(t) = x(t)\mathrm{i} + y(t)\mathrm{j}$, $t \in [a, b]$, donde las funciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son dos veces derivables, está dada por la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

Aceleración

$$\mathrm{a}(t) = |\mathrm{r}'(t)|^2 \kappa \mathrm{N} + \frac{d}{dt}|\mathrm{r}'(t)|\mathrm{T}$$

UNIDAD 2: Diferenciabilidad

Teorema de Clairaut

Teorema

Si f y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a,b) y todas son continuas en (a,b), entonces

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Teorema

Si una función f es diferenciable en un punto P_0 de su dominio, entonces es continua en P_0.

DEMOSTRAR

Supongamos que f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$. Entonces, llamando $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f(x_0,y_0)$$

$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y) + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y))$
$=0$

Teorema del incremento

Teorema (Teorema del incremento)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Regla de la cadena para una función de dos variables

Teorema (Este es el enunciado, no el del libro)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathrm{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función de t tal que la imagen de r está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en t. Si $w = f \circ \mathrm{r}$, entonces w es una función derivable en t y

$$w'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t).$$

Regla de la cadena para una función de 3 variables

Teorema (Este es el enunciado, no el del libro)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathrm{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una función de t tal que la imagen de r está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son derivables en t. Si $w = f \circ \mathrm{r}$, entonces w es una función derivable en t y

$$w'(t) = f_x(x(t),y(t),z(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t),z(t))y'(t) + f_z(x(t),y(t),z(t))z'(t).$$

Regla de la cadena de tres variables con dos parámetros

Teorema (Este es el enunciado, no el del libro)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathrm{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ una función de s y t tal que la imagen de r está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(s,t)$, $y(s,t)$ y $z(s,t)$ son diferenciables en (s,t). Si $w = f \circ \mathrm{r}$, entonces w es una función derivable con respecto a t y con respecto a s en (s,t) y

$$w_s(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))x_s(s,t)$$
$$+f_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))y_s(s,t) + f_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))z_s(s,t);$$

$$w_t(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))x_t(s,t)$$
$$+f_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))y_t(s,t) + f_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))z_t(s,t).$$

Regla de la cadena para una función de dos variables con dos parámetros

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathrm{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$ una función de s y t tal que la imagen de r está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(s,t)$ y $y(s,t)$ son diferenciables en (s,t). Si $w = f \circ \mathrm{r}$, entonces w es una función derivable con respecto a s y con respecto a t en (s,t) y

$$w_s(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t))x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t))y_s(s,t);$$

$$w_t(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t))x_t(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t))y_t(s,t);$$

Regla de la cadena para una función de una variable con dos parámetros

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}$ y sea $\mathrm{r}(s,t) = x(s,t)$ una función de s y t tal que la imagen de r está incluida en D y tal que la función $x(s,t)$ es diferenciable en (s,t). Si $w = f \circ \mathrm{r}$, entonces w es una función derivable con respecto a s y con respecto a t en (s,t) y

$$w_s(s,t) = f'(x(s,t))x_s(s,t); \qquad w_t(s,t) = f'(x(s,t))x_t(s,t).$$

Derivación implícita dos variables

Teorema

Supongamos que F es una función de x y de y, y que las derivadas parciales F_x y F_y son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0), que $F(x_0, y_0) = c$, para alguna constante c y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces la ecuación $F(x,y) = c$ define a y implícitamente como una función derivable de x en un entorno de x_0 y la derivada de esta función y está dada por

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Derivación implícita tres variables

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x, F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c, y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}; \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

Derivada direccional producto escalar

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Sean f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en un punto P, y u un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$D_{\mathrm{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathrm{u}.$$

DEMOSTRAR

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{u}} f(P) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\mathrm{u}) - f(P)}{h} \qquad \mathrm{r}(t) = P + t\mathrm{u};\ 0 \leq t \leq h;\ \mathrm{r}'(t) = \mathrm{u} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{r}(h)) - f(\mathrm{r}(0))}{h} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \mathrm{r})\Big|_{t=0} \\ &= \nabla f(\mathrm{r}(0)) \cdot \mathrm{r}'(0) \\ &= \nabla f(P) \cdot \mathrm{u} \end{aligned}$$

Gradiente normal a la curva de nivel

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRAR:

Digamos que $\mathrm{r}(t) = (x(t), y(t))$ parametriza una curva de nivel de f que pasa por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $\mathrm{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo t, $f(\mathrm{r}(t)) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathrm{r})(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{r}(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t).$$

En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathrm{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathrm{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva de nivel; luego, $\nabla f(P_0)$ es normal a la curva de nivel en P_0.

Propiedades del gradiente

Propiedad (Propiedades algebraicas del vector gradiente)

Dadas dos funciones f y g cuyos vectores gradientes estén definidos en un punto $P \in D(f) \cap D(g)$, entonces en P se tiene

1. *Suma y resta* $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$
2. *Producto* $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
3. *Cociente* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$, *si* $g(P) \neq 0$.

Valores extremos absolutos para funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados

Teorema

Si f es una función continua en un conjunto D que es cerrado y acotado, entonces existen en D puntos en los cuales f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

Criterio de la derivada primera

Teorema

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = 0$.

DEMOSTRAR

Supongamos que $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo local de f. Entonces la función $f(x, y_0)$, como función de una variable independiente, también tiene un extremo en $x = x_0$. Por el criterio de la derivada primera para funciones de una variable, si la derivada existe en x_0 debe ser cero. Luego $f_x(x_0, y_0) = 0$.
Similarmente se prueba que $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Hessiano

Teorema (DEMOSTRAR)

Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a, b) y que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. Entonces,

1. *f tiene un* máximo local *en (a, b) si $H_f(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$;*
2. *f tiene un* mínimo local *en (a, b) si $H_f(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$;*
3. *f tiene un* punto de silla *en (a, b) si $H_f(a, b) < 0$;*
4. *el criterio* no es concluyente *si $H_f(a, b) = 0$.*

Primer caso de los multiplicadores de Lagrange

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Sea C parametrizada por $\mathrm{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, y sea $P_0 = \mathrm{r}(t_0)$, para cierto $t_0 \in [a, b]$. Si $w(t) = (f \circ \mathrm{r})(t)$ alcanza un valor extremo en t_0, por la diferenciabilidad de f y debido a que $w(t_0)$ es extremo, se tiene:

$$w'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathrm{r}'(t_0) \quad \text{y} \quad w'(t_0) = 0,$$

Luego $\nabla f(P_0) \cdot \mathrm{r}'(t_0) = 0$.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq 0$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

La curva C es la intersección de las superficies S_1 (superficie de nivel $g_1 = 0$) y S_2 (superficie de nivel $g_2 = 0$). Según el T. del Grad. Ortogonal, si f presenta un extremo relativo a C en $P_0 \in C$, debe ocurrir que $\nabla f(P_0)$ es ortogonal a C.
Como C es una curva en el espacio, en P_0 habrá un plano normal a C. Por estar C incluida en S_1, $\nabla g_1(P_0)$ es ortogonal a S_1 y así, es ortogonal a C.
Similarmente, $\nabla g_2(P_0)$ es ortogonal a C.
Así, si $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$ son linealmente independientes, se podrá expresar $\nabla f(P_0)$ como combinación lineal de $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$.

UNIDAD 3: Integrales dobles y triples

Teorema de Fubini 2 variables

Teorema

Si f es una función continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d]$), entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx\, dy.$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy\, dx.$$

- *R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx\, dy.$$

Teorema de Fubini 3 variables

Teorema

Si f es continua en la región R y

- *R es rectangular ($R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$), entonces*

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z)dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x, y, z)dz\, dy\, dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x, y, z)dz\, dx\, dy \ldots\end{aligned}$$

- *R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ y $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, y h_1 y h_2 continuas en $\{(x, y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, entonces*

$$\iiint_R f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz\, dy\, dx.$$

- *Hay otros casos...*

Teorema del cambio de variables

Teorema

Supóngase que T es una transformación biyectiva de S en R, tal que sus componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en S y cuyo Jacobiano es no nulo en S. Supóngase que f es continua en R. Entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv.$$

Observación: el teorema también vale si T no es inyectiva en puntos de la frontera de S.

Jacobino coordenadas polares

Transformación:

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = |r| = r.$$

Jacobino coordenadas esféricas

Jacobiano:

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

UNIDAD 4: Campos vectoriales

Independencia de la parametrización

Observación 1.2.2. *Debe destacarse el hecho (que no probaremos) de que el valor de la integral de línea es* **independiente** *de la representación paramétrica suave de la curva C.*

Propiedades de la integral de línea

Las siguientes propiedades se presentan sin demostración. Para ello, supongamos que C_1 y C_2 son curvas incluidas en el dominio de f.

1. Aditividad: si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2, de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2, entonces $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$.

2. Independencia de la parametrización: $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.

3. Dependencia de la trayectoria: en general, $\int_{C_1} f\,ds \neq \int_{C_2} f\,ds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aún en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y punto final.

Teorema fundamental de integrales de Línea

Teorema 1.2.17 (Teorema Fundamental de Integrales de Línea).
Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio.Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región abierta conexa D que contiene a C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Campos conservativos-Campos gradientes

Teorema 1.2.18 (Los campos conservativos son campos gradientes[a]).
Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta D en el espacio. Entonces $\mathbf{F}$ es un campo conservativo si y sólo si $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable f.

Propiedad de lazos de campos conservativos

Teorema 1.2.20 (Propiedad de lazos en campos conservativos[a]).
Sean D una región abierta y conexa y $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en D. Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo en D si y sólo si para todo lazo C en D, se tiene $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Criterio de componentes para campos conservativos

Teorema 1.3.4 (Criterio de componentes para campos conservativos[a]).
Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en una región conexa y abierta* D*, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces:*

1. *Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D*, entonces* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$.
2. *Si* D *también es simplemente conexo y* $\mathbf{rotF} = \mathbf{0}$ *en* D*, entonces* $\mathbf{F}$ *es conservativo en* D.

Formas diferenciales exactas

Teorema 1.3.19 (Condición necesaria y suficiente para formas diferenciales exactas). *Una forma diferencial* $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$*, donde* M*,* N *y* P *son funciones continuas definidas en una región abierta, conexa y simplemente conexa* D*, es una forma diferencial exacta si y sólo si*

$$P_y = N_z, \qquad M_z = P_x, \qquad N_x = M_y,$$

esto es, si y solo si el rotacional de $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *es el vector nulo en* D.

Con derivadas
parciales continuas

Teorema de Green

Teorema 1.4.1 (Forma tangencial del Teorema de Green[a]).
Sea C *una curva suave por partes, cerrada, simple y positivamente orientada, que encierra una región* D *en el plano. Sea* $\mathbf{F} = (M, N)$ *un campo vectorial donde* M *y* N *tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región abierta que contiene a* D*. Entonces la circulación en sentido antihorario de* $\mathbf{F}$ *alrededor de* C *es:*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{1.24}$$

Teorema de Green a regiones más generales

Se da a las curvas una orientación tal que la región R está siempre del lado izquierdo cuando las curvas son recorridas en las direcciones que se indican. Eso significa, en casos como este, que las curvas en la frontera están positivamente orientadas. Con esta convención, el teorema de Green es válido para regiones que no son simplemente conexas.

Finalmente hay que observar que, así como enunciamos el teorema de Green para el plano xy, también se aplica para cualquier región plana R contenida en algún plano en el espacio, limitada por una curva C.

Derivadas parciales de una función vectorial

Teorema 1.5.3. *Para una función* $\mathbf{r}$ *como en la Definición* 1.5.1, *se tiene que* $\mathbf{r}$ *es derivable parcialmente con respecto a* u *si y sólo si las funciones componentes* x, y *y* z *lo son y, en este caso,*

$$\mathbf{r}_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)); \tag{1.32}$$

similarmente, $\mathbf{r}$ *es derivable parcialmente con respecto a* v *si y sólo si las funciones componentes* x, y *y* z *lo son y, en este caso,*

$$\mathbf{r}_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)). \tag{1.33}$$

Teorema de Stokes

Teorema 1.7.1. *Sea* S *una superficie orientada, suave por partes, que tiene como frontera una curva suave por partes,* C. *Sea* $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a* S. *Entonces la circulación de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de* C *en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie,* $\mathbf{n}$, *es:*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Teorema de la divergencia de Gauss

Teorema 1.7.6 (Teorema de la divergencia de Gauss). *Sea* S *una superifice* **cerrada** *positivamente orientada, suave por partes y sea* D *la región sólida encerrada por* S. *Sea* $\mathbf{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas paciales continuas en una región abierta que contiene a* S. *Entonces el flujo de* $\mathbf{F}$ *a través hacia fuera de* S *es:*

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

UNIDAD 5: Ecuaciones diferenciales

Existencia y unicidad de soluciones para PVI de primer orden

Teorema 2.1.10. ***Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de primer orden***

Sea R una región rectangular en el plano xy, definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, y sea (x_0, y_0) un punto interior a R. Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son cotinuas en R, entonces existe un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$ y ***existe una única*** *función y definida en I que es solución del problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Notar que este teorema es más fuerte que el teorema de existencia y unicidad de soluciones para PVI de ecuaciones diferenciales lineales. En este caso la función de varias variables que relaciona a x e y con la derivada primera en el intervalo I puede ser cualquiera siempre que cumplan las hipótesis.

INTERVALO DE EXISTENCIA Y UNICIDAD Suponga que $y(x)$ representa una solución del problema con valores iniciales (2). Los siguientes tres conjuntos de números reales en el eje x pueden no ser iguales: el dominio de la función $y(x)$, el intervalo I en el cual la solución $y(x)$ está definida o existe, y el intervalo I_0 de existencia y unicidad. El ejemplo 2 de la sección 1.1 muestra la diferencia entre el dominio de una función y el intervalo I de definición. Ahora suponga que (x_0, y_0) es un punto en el interior de la región rectangular R en el teorema 1.2.1. Esto da como resultado que la continuidad de la función $f(x, y)$ en R por sí misma es suficiente para garantizar la existencia de al menos una solución de $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definida en algún intervalo I. El intervalo I de definición para este problema con valores iniciales normalmente se toma como el intervalo más grande que contiene x_0 en el cual la solución $y(x)$ está definida y es derivable. El intervalo I depende tanto de $f(x, y)$ como de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Vea los problemas 31 a 34 en los ejercicios 1.2. La condición extra de continuidad de la primera derivada parcial $\partial f/\partial y$ en R nos permite decir que no sólo existe una solución en algún intervalo I_0 que contiene x_0, sino que ésta es la *única* solución que satisface $y(x_0) = y_0$. Sin embargo, el teorema 1.2.1 no da ninguna indicación de los tamaños de los intervalos I e I_0; *el intervalo de definición I no necesita ser tan amplio como la región R y el intervalo de existencia y unicidad I_0 puede no ser tan amplio como I.* El número $h > 0$ que define el intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$ podría ser muy pequeño, por lo que es mejor considerar que la solución $y(x)$ es *única en un sentido local*, esto es, una solución definida cerca del punto (x_0, y_0). Vea el problema 50 en los ejercicios 1.2.

EDOS exactas

Teorema 2.2.10. *Sean las derivadas parciales $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en una región rectangular D. Entonces la ED $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ es exacta en D si y sólo si:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad \textit{para todo punto} \quad (x,y)\in D. \tag{2.17}$$

Existencia y unicidad de soluciones de PVI lineales de orden superior

Teorema 2.1.12. ***Teorema de existencia y unicidad de solución para PVI de orden superior***

Sea el PVI dado por la ecuación diferencial y condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=g(x) \\ y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_1,\, \cdots,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si las funciones a_n, a_{n-1},..., a_0 y g son continuas en un intervalo I, $a_n(x)\neq 0$ para toda $x\in I$ y x_0 es cualquier punto de I, entonces ***existe*** *una* ***única*** *solución al PVI (2.2).*

Principio de superposición para ecuaciones lineales homogéneas

Teorema 2.3.1. ***Principio de superposión para ecuaciones lineales homogéneas***

Sean $y_1, y_2, ..., y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{2.22}$$

en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ky_k,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_k$ son constantes arbitrarias, también es una solución de (2.23) en el intervalo I.

Las soluciones de una EDO lineal de orden n constituyen un espacio vectorial

Corolario 2.3.2. *Todas las soluciones de una ED lineal homogénea dada forman un espacio vectorial de funciones (subespacio del espacio vectorial de funciones derivables hasta el orden n).*

Independencia lineal de soluciones de una EDO lineal de orden superior

Teorema 2.3.12. ***Criterio para soluciones linealmente independientes***

Un conjunto de n soluciones de una ecuación diferencial en un intervalo I es linealmente independiente si y sólo si el Wronskiano, $W_{y_1,y_2,...,y_n}(x)$, es dintinto de cero para toda $x\in I$.

lineal homogenea

Existencia de conjunto fundamental

Teorema 2.3.15. ***Existencia de conjunto fundamental para una ED lineal homogénea***
Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{2.24}$$

cuyas funciones coeficientes a_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ *son continuas en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$, *existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación* (2.24) *en el intervalo* I.

Solución general de una EDO lineal homogénea

Teorema 2.3.16. ***Solución general para una ecuación homogénea***[a]
Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{2.25}$$

cuyas funciones coeficientes a_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ *son continuas en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.
Sea $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación* (2.24) *en el intervalo* I. *Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo se puede expresar como:*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ *son constantes arbitrarias.*

Solución general de una EDO lineal no homogénea

Teorema 2.3.19. ***Solución general para una ecuación no homogénea***
Dada la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{2.29}$$

donde a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ *y* g *son continuas en un intervalo* I *y* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.
Sea $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada en el intervalo* I *y sea* y_p *cualquier solución particular de la ecuación diferencial no homogénea* (2.29) *en* I. *Entonces la solución general de la ecuación* (2.29) *en el intervalo* I *se puede expresar como*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + y_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ *son constantes arbitrarias.*

Principio de superposición de EDO no homogénea.

Teorema 2.3.21. ***Principio de superposión para ED no homogéneas***
Sean las k ecuaciones diferenciales no homogéneas de n-ésimo orden

$$\begin{aligned} &a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_1(x),\\ &\qquad\vdots\\ &a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g_k(x), \end{aligned}$$

que sólo diferen en los términos independientes.
Sean $y_{p_1}, \ldots, y_{p_k}$ soluciones particulares de cada una de las ecuaciones anteriores, en un mismo intervalo I. Entonces,

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} \ldots + y_{p_k}$$

es una solución particular de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = g_1 + g_2 \ldots + g_k.$$

UNIDAD 6: Series de Fourier

Convergencia de las Series de Fourier

Teorema 3.2.4. *Sean f y f' continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto finito) en $[-p,p]$. Entonces para toda $x \in (-p,p)$ la serie de Fourier de f converge a*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.
En los extremos p y $-p$ la serie converge al valor $\frac{f(p-)+f(-p+)}{2}$.