Integrales de línea de campos escalares.
Campos vectoriales.
Integrales de línea de campos vectoriales.

Recorrido

Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales
   - Interpretación: trabajo y flujo
   - Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales
   - Teoremas
     - Teorema fundamental de integrales de línea
     - Teorema: los campos conservativos son campos gradientes
     - Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos
     - Teorema: criterio de componentes para campos conservativos
   - Campos conservativos: conservación de la energía
   - Formas diferenciales exactas
   - Teorema de Green en el plano

Recorrido

1. Integrales de línea de campos escalares
   - Definición de integrales de línea de campos escalares
   - Propiedades
2. Campos vectoriales
3. Integrales de línea de campos vectoriales
   - Definición y cálculo de integrales de línea de campos vectoriales
   - Interpretación: trabajo y flujo
   - Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales
   - Teoremas
     - Teorema fundamental de integrales de línea
     - Teorema: los campos conservativos son campos gradientes
     - Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos
     - Teorema: criterio de componentes para campos conservativos
   - Campos conservativos: conservación de la energía
   - Formas diferenciales exactas
   - Teorema de Green en el plano

Definición

Definición

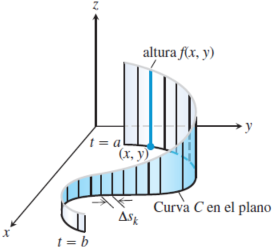
Dada una curva suave C y una representación paramétrica suave de la misma, $\mathrm{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, y dado un campo escalar f definido y continuo en una región abierta D, que contiene a C, se define la integral de línea de f a lo largo de C por

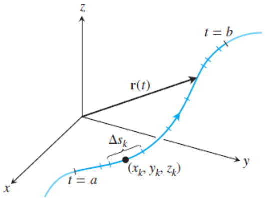
$$\int_C f\,ds := \int_a^b f(\mathrm{r}(t))|\mathrm{r}'(t)|dt.$$

Observación:

El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C.

Justificación

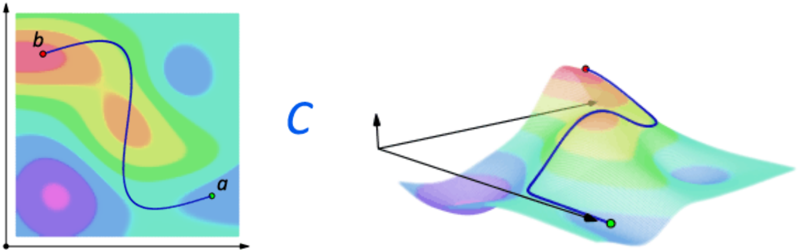




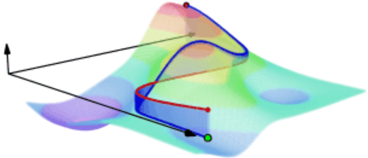
Una partición en $[a, b]$ induce una partición en C.

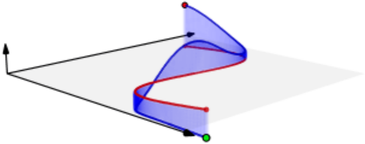
$$\sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{r}(t_k))\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{r}(t_k))|\mathrm{r}'(t_k)|\Delta t_k.$$

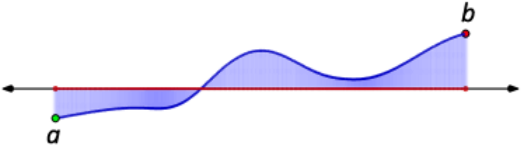
Interpretación



Interpretación







$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

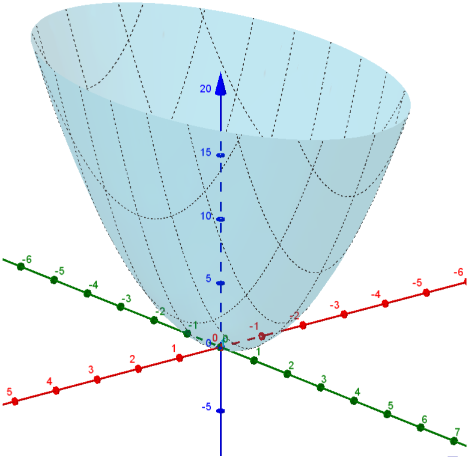
Imágenes tomadas del sitio web de Khan Academy.

Ejemplo: integral de línea-concepto

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

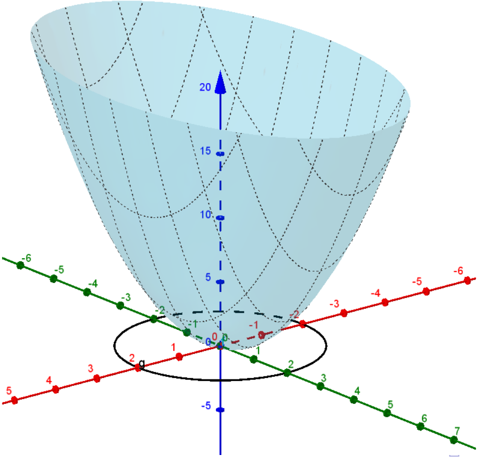


Ejemplo: concepto de integral de línea

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

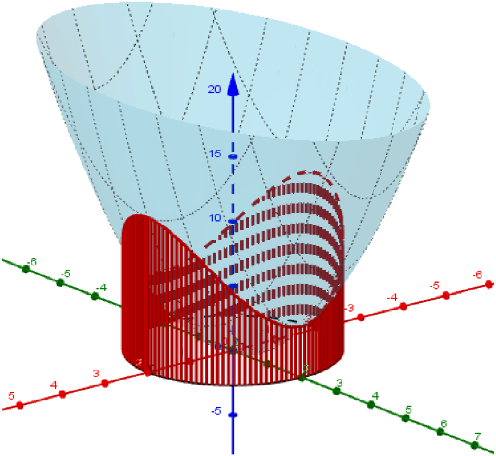


Ejemplo: concepto de integral de línea

Calcular la integral de línea del campo escalar dado por

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

a lo largo de la curva C que es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

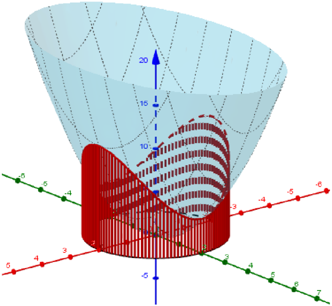


Ejemplo: concepto de integral de línea

$$C : \mathrm{r}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t)),\ 0 \le t \le 2\pi; \quad \mathrm{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$$

$$\int_C (3x^2 + y^2)\, ds = \int_a^b f(\mathrm{r}(t))|\mathrm{r}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} (3 \cdot 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t))\, 2dt$$

$$= 24 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt + 8 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(t) dt = 24\pi + 8\pi = 32\pi.$$



Recorrido

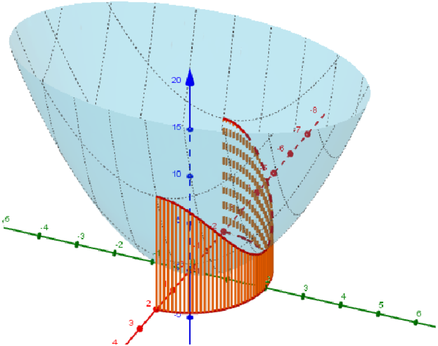
Propiedades

(Sin demostración)

1. Aditividad: si la curva C se forma uniendo dos curvas suaves, C_1 y C_2, de manera que el extremo final de C_1 es el extremo inicial de C_2, entonces $\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \int_{C_2} f\, ds$.
2. Independencia de la parametrización: $\int_{C_1} f\, ds = \int_{C_2} f\, ds$ si C_1 y C_2 están formadas por el mismo conjunto de puntos del plano.
3. Dependencia de la trayectoria: en general, $\int_{C_1} f\, ds \neq \int_{C_2} f\, ds$ si C_1 y C_2 son dos curvas suaves distintas, aún en el caso en que las curvas tengan los mismos punto inicial y punto final.

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.



Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$.
$\mathrm{r}_1(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t),\ 0 \leq t \leq \pi;\ \mathrm{r}_1'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t);\ |\mathrm{r}_1'(t)| = 2$

$$A = \int_{C_1} f\, ds = \int_0^{\pi} f(\mathrm{r}_1(t))|\mathrm{r}_1'(t)|dt = \int_0^{\pi} (12\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\, t)\, 2\, dt = 16\pi$$

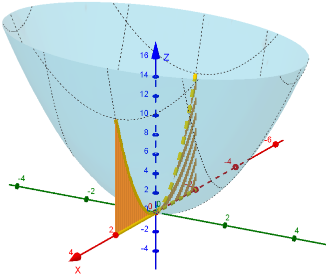
$\mathrm{r}_2(t) = (2\cos(2t), 2\,\mathrm{sen}(2t)),\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$
$\mathrm{r}_2'(t) = (-4\,\mathrm{sen}(2t), 4\cos(2t));\ |\mathrm{r}_2'(t)| = 4$

$$A = \int_{C_2} f\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mathrm{r}_2(t))|\mathrm{r}_2'(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\cos^2(2t) + 4\,\mathrm{sen}^2(2t))\, 4\, dt$$

Ejemplo: independencia de la parametrización, dependencia de la trayectoria

Calcule el área bajo el gráfico de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ y sobre el segmento desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.
$\mathrm{r}_3(t) = (2-t, 0)$, $0 \leq t \leq 4$; $\mathrm{r}_3'(t) = (-1, 0)$; $|\mathrm{r}_3'(t)| = 1$

$$A = \int_{C_3} f\, ds = \int_0^4 f(\mathrm{r}_3(t))|\mathrm{r}_3'(t)|dt = \int_0^4 3(2-t)^2\, dt = 16$$



Recorrido

Campo vectorial

Definición

Un campo vectorial es una función F que asigna un vector a cada punto de su dominio,

$$\mathrm{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Así, a cada vector $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, F le asigna un vector de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n));$$

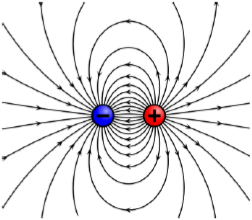
las funciones $f_1, \ldots, f_m$ se llaman funciones componentes de F.

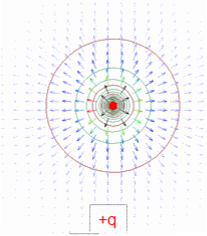
Un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ es de la forma

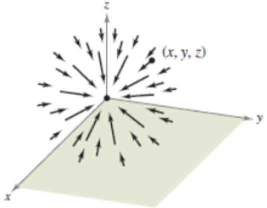
$$\mathrm{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

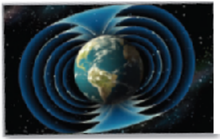
y se presenta, por ejemplo, en los campos de velocidades en un fluido; en los campos gradientes; en los campos de fuerzas en el espacio; en los campos eléctricos, magnéticos o gravitatorios en el espacio, etc.

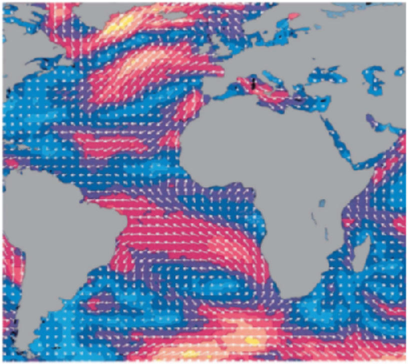
Campos vectoriales











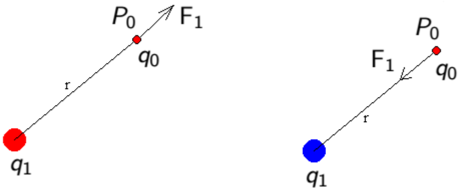
El gradiente de un campo escalar f, es un campo vectorial.

Campo eléctrico

Una carga puntual q_1 ubicada en (x_1, y_1, z_1) genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathrm{E}_1(x_0, y_0, z_0)$. Este vector $\mathrm{E}_1(x_0, y_0, z_0)$ es

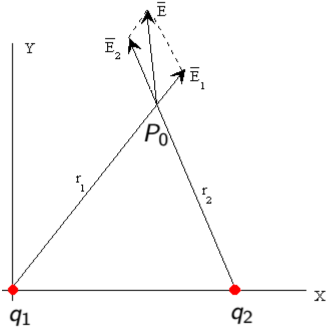
$$E_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1}{|\mathrm{r}|^3}\mathrm{r},$$

donde r es el vector posición del punto P_0 y ε es la permitividad del medio. Una partícula de carga q_0, ubicada en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, se ve afectada por una fuerza $\mathrm{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \mathrm{E}_1(x_0, y_0, z_0) \cdot q_0$.



Suma de campos vectoriales (aditividad)

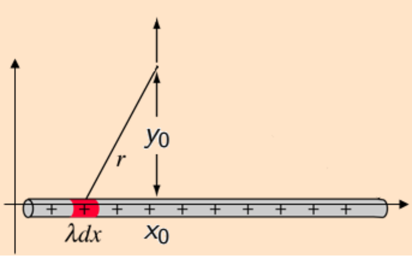
Si una carga puntual q_1 ubicada en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathrm{E}_1(x_0, y_0, z_0)$
y si otra carga puntual q_2 ubicada en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathrm{E}_2(x_0, y_0, z_0)$,
la presencia de ambas cargas (q_1 y q_2) genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ vale $\mathrm{E}_1(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{E}_2(x_0, y_0, z_0)$.



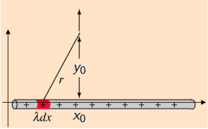
Suma de campos vectoriales (aditividad)

Si en una región plana se tiene un elemento lineal cargado (digamos que se trata del eje x), con una densidad lineal de carga $\lambda(x)$, este genera un campo eléctrico que, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ vale
la suma de los efectos producidos por cada elemento de carga en la ubicación $(x, 0)$, que planteamos a través de una integral en la que $\mathrm{r} = (x_0, y_0)$:

$$\mathrm{E}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\lambda(x)}{|(x_0 - x, y_0)|^3} (x_0 - x, y_0) dx$$



Suma de campos vectoriales (aditividad)



$$E(x_0,y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda(x)}{|(x_0-x,y_0)|^3}(x_0-x,y_0)dx$$

y, si λ es constante,

$$\begin{aligned}
E(x_0,y_0)&=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x_0-x,y_0)}{((x_0-x)^2+y_0^2)^{3/2}}dx\\
&=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_0-x}{((x_0-x)^2+y_0^2)^{3/2}}dx,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{((x_0-x)^2+y_0^2)^{3/2}}dx\right)\\
&=\frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon}\left(0,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{((x_0-x)^2+y_0^2)^{3/2}}dx\right)\\
&=\frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon}\left(0,\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{1}{((x_0-x)^2+y_0^2)^{3/2}}dx\right)\\
&=\frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon}\left(0,\lim_{c\to\infty}\left.\frac{x-x_0}{y_0^2\sqrt{(x_0-x)^2+y_0^2}}\right|_{-c}^{c}\right)=\left(0,\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon y_0}\right).
\end{aligned}$$

Recorrido

Recorrido

Definición

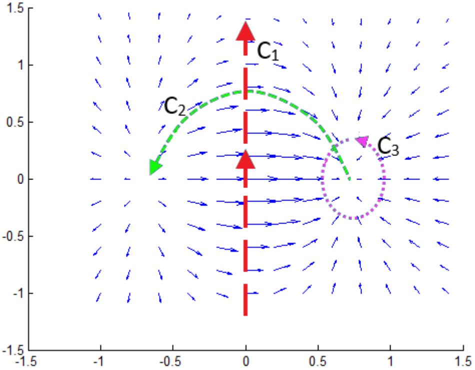
Sea F un campo vectorial acotado y con componentes continuas definidas sobre una curva suave C. Se define la integral de línea de F a lo largo de C como la integral de línea de la componente tangencial de F y se denota por:

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} := \int_C \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds.$$

Fórmula de cálculo: si C está parametrizada por $\mathrm{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{r}'(t)}{|\mathrm{r}'(t)|} |\mathrm{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t)\, dt.$$

Sean el campo vectorial F y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



El valor de $\int_{C_1} \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds$ es 0; el valor de $\int_{C_2} \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds$ es negativo; el valor de $\int_{C_3} \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds$ es cercano a 0.

Observaciones

Observación 1:
El valor de la integral de línea es independiente de la representación paramétrica suave de la curva C, en tanto se mantenga el sentido de recorrido de la curva.

Observación 2:
Se tiene que $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = -\int_{-C} \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$ si $-C$ es la curva formada por los mismos puntos pero recorrida en sentido contrario.

Observación 3:
Se puede calcular integrales de línea en curvas suaves por partes, sumando las integrales de las porciones suaves que la forman.

Integral de línea a través de una curva cerrada

Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, la integral de línea de F a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de F a lo largo de C:

$$\text{Integral de línea de F a través de } C = \int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t))\cdot\mathrm{n}\,|\mathrm{r}'(t)|\,dt.$$

Supongamos $\mathrm{F} = (M, N)$ y C es una curva suave y positivamente orientada dada por $\mathrm{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds &= \int_C \mathrm{n}\cdot\mathrm{F}\,ds = \int_C \mathrm{T}\times\mathrm{k}\cdot\mathrm{F}\,ds \\
&= \int_C \mathrm{k}\times\mathrm{F}\cdot\mathrm{T}\,ds \qquad \text{por propiedad del producto mixto} \\
&= \int_C (-N, M)\cdot\mathrm{T}\,ds, \quad \text{ya que } \mathrm{k}\times\mathrm{F} = (-N, M) \\
&= \int_a^b (-N(\mathrm{r}(t)), M(\mathrm{r}(t)))\cdot\mathrm{r}'(t)\,dt
\end{aligned}$$

Recorrido

Aplicaciones a la física

Si F representa un campo de fuerzas (una fuerza variable), el **trabajo** que realiza F sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una curva C es $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$.

Si F es un campo vectorial (por ejemplo de velocidades), la integral de línea de la componente tangencial de F se llama flujo de F a lo largo de C.

Si C es cerrada, el flujo de F a lo largo de C se llama circulación de F a lo largo de C.

Si C es una curva plana simple, cerrada y positivamente orientada, el flujo de F a través de C es la integral de línea de la componente normal hacia fuera de F a lo largo de C:

$$\text{Flujo de F a través de } C = \int_C \mathrm{F} \cdot \mathrm{n}\, ds.$$

Notación de integrales de línea

La integral de línea

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$$

de un campo vectorial F a lo largo de una curva C en el dominio de F, parametrizada por $\mathrm{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede anotar de distintas maneras:

1. Si la curva C es cerrada, se puede anotar

   $$\oint_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}, \quad \ointctrclockwise_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} \quad \text{o} \quad \ointclockwise_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r},$$

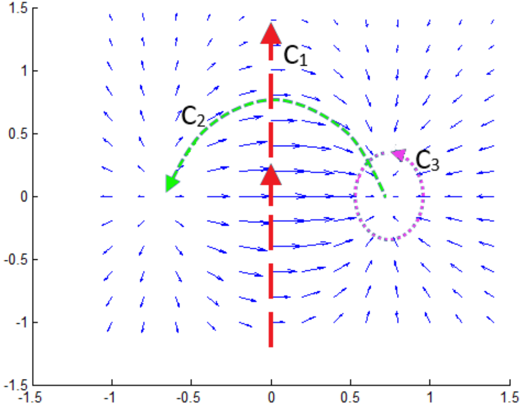
   donde las flechas indican el sentido antihorario u horario, respectivamente.
2. Si la curva C une los puntos $\mathrm{A} = r(a)$ y $B = \mathrm{r}(b)$, se puede escribir

   $$\int_A^B \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$$

   entendiendo que en general **importa** cuál es la trayectoria C que une A con B.

Ejemplo tomado en examen

Sean el campo vectorial F y las curvas C_1, C_2 y C_3 dados en el siguiente gráfico:



Indique el signo de $\int_{C_3} \mathrm{F} \cdot \mathrm{n} \, ds$.

Ejemplo

Ejemplo:
Dados $\mathrm{F}(x, y) = (x - y, x)$ y la circunferencia C dada por
$\mathrm{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$, determinar
a) la circulación de F a lo largo de C.
b) el flujo de F a través y hacia fuera de C.

---

a) Circulación de F a lo largo de C:

$$\int_C \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds = \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} t \cos t) dt = 2\pi$$

Ejemplo

Ejemplo: Dado $\mathrm{F}(x,y) = (x-y, x)$ determinar
a) la circulación de F a lo largo de la circunferencia dada por $\mathrm{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de F a través y hacia fuera de C.

---

b) Flujo de F a través y hacia fuera de C: $\displaystyle\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds$

Una manera: $\mathrm{n} = \mathrm{T}\times\mathrm{k} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\mathrm{r}(t))\cdot\mathrm{n}\,|\mathrm{r}'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)dt = \pi$$

Ejemplo

Ejemplo: Dado $\mathrm{F}(x,y) = (x-y, x)$ determinar
a) la circulación de F a lo largo de la circunferencia dada por
$\mathrm{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.
b) Calcule el flujo de F a través y hacia fuera de C.

---

b) Flujo de F a través y hacia fuera de C: $\displaystyle\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds$

Una manera: $\mathrm{n} = \mathrm{T}\times\mathrm{k} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\mathrm{r}(t))\cdot\mathrm{n}\,|\mathrm{r}'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)dt = \pi$$

Otra manera: integrar a lo largo de C el campo $\mathrm{G} = (-N, M)$.

$$\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)dt = \pi$$

Otra notación para $\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{T}\,ds$

Observación: sean $\mathrm{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathrm{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{T}\,ds &= \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t))\cdot\mathrm{r}'(t)\,dt \\
&= \int_a^b [M(x(t),y(t))\,x'(t) + N(x(t),y(t))\,y'(t)]dt \\
&= \int_a^b M(x(t),y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b N(x(t),y(t))y'(t)dt \\
&= \int_C M\,dx + \int_C N\,dy = \int_C M\,dx + N\,dy
\end{aligned}$$

Otra notación para $\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds$

Observación: sean $\mathrm{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathrm{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$:

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds &= \int_C \mathrm{n}\cdot\mathrm{F}\,ds\\ &= \int_C \mathrm{T}\times\mathrm{k}\cdot\mathrm{F}\,ds\\ &= \int_C \mathrm{k}\times\mathrm{F}\cdot\mathrm{T}\,ds \qquad \text{por propiedad del producto mixto}\end{aligned}$$

$$\mathrm{k}\times\mathrm{F} = (-N, M)$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,ds &= \int_C (-N, M)\cdot\mathrm{T}\,ds\\ &= \int_a^b [-N\,x'(t) + M\,y'(t)]\,dt = \int_C M\,dy - N\,dx\end{aligned}$$

Integral de línea con respecto a los ejes coordenados

Sean $\mathrm{F} = (M, N)$ y C, dada por $\mathrm{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. A partir de

$$\int_C \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds = \int_a^b M(x(t), y(t)) x'(t)\, dt + \int_a^b N(x(t), y(t)) y'(t) dt$$
$$= \int_C M\, dx + \int_C N\, dy,$$

si f es un campo escalar, definimos

$$\int_C f\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t)\, dt \quad \text{y} \quad \int_C f\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t)\, dt.$$

Calcular $\int_C (x + y^2) dy$ para $C : \mathrm{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

$$\int_C (x + y^2) dy = \int_0^\pi (\cos t + \operatorname{sen}^2 t) \cos t\, dt = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Recorrido

Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Definición

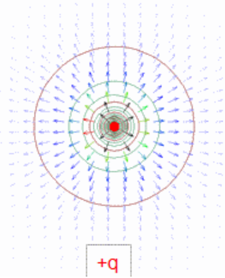
Sea F un campo vectorial definido en una región abierta D tal que para cualesquiera dos puntos A y B de D, la integral de línea $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$ a lo largo de una curva suave por partes C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias suaves por partes desde A hasta B. Entonces la integral $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$ es independiente de la trayectoria en D y el campo vectorial F se llama conservativo en D.

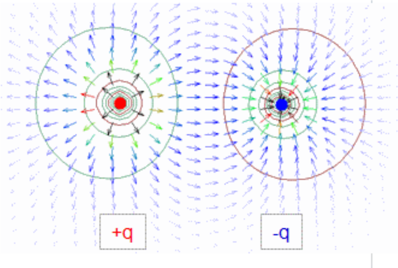
Definición

Si F es un campo vectorial definido en una región abierta D y $\mathrm{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D, entonces f se llama función potencial de F. Si F está definido en $\mathbb{R}^3$, las superficies de nivel de f se llaman superficies equipotenciales de F; si está definido en $\mathbb{R}^2$, hablamos de curvas equipotenciales.

Líneas de flujo de campos vectoriales

Las líneas de flujo de un campo vectorial F son aquellas curvas en el dominio de F, tales que el vector $F(x, y, z)$ es tangente a la curva en cada punto (x, y, z) del dominio de F. ¿Cuáles son las líneas de flujo en campos eléctricos generados por una carga puntual o por un dipolo?

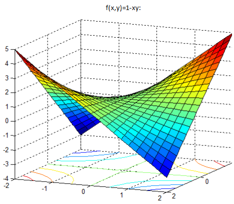


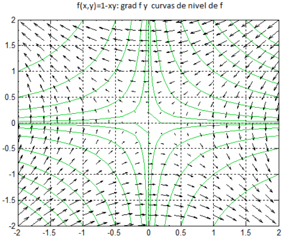


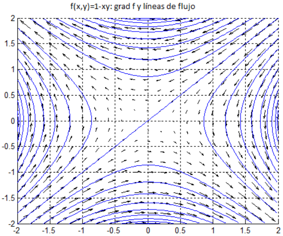
Líneas de flujo de campos vectoriales

Observación 1: En un campo de **velocidades** de un fluido que no varía con el tiempo (estacionario), en general las líneas de flujo coinciden con la trayectoria de una partícula. Pero en un campo de **fuerzas**, aún estacionario, las líneas de fuerza en general no coinciden con las trayectorias (pensar en un cuerpo que cae con velocidad inicial no vertical).

Observación 2: Si el campo vectorial F es el gradiente de alguna función potencial f, las líneas de flujo de F son ortogonales a los conjuntos de nivel de f (superficies o curvas equipotenciales) en cada punto.

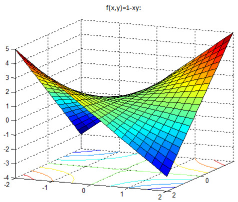


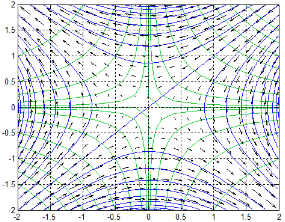




Observación 1: En un campo de velocidades de un fluido que no varía con el tiempo (estacionario), en general las líneas de flujo coinciden con la trayectoria de una partícula. Pero en un campo de fuerzas, aún estacionario, las líneas de fuerza no coinciden en general con las trayectorias (pensar en un cuerpo que cae con velocidad inicial no vertical).

Observación 2: Si el campo vectorial F es el gradiente de alguna función potencial f, las líneas de flujo de F son ortogonales a los conjuntos de nivel de f (superficies o curvas equipotenciales) en cada punto.





Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Definición

Un conjunto D abierto es **conexo** si todo par de puntos de D se pueden unir por una curva suave por partes incluida en D.

Definición

Un conjunto abierto conexo D es **simplemente conexo** si toda vez que dos puntos de la región se unen por curvas suaves por partes incluidas en D, existe una deformación continua de una curva a la otra también incluida en D.

Equivalentemente:

Un conjunto abierto conexo D es **simplemente conexo** si todo lazo incluido en D puede contraerse continuamente, siempre dentro de D, a un punto incluido en D.

Conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos

Ejemplo

1) Mapa de Mendoza (conexo, simplemente conexo);
2) Mapa de Argentina (no conexo);
3) $\mathbb{R}^2$ sin el origen (conexo, no simplemente conexo);
4) $\mathbb{R}^3$ sin el origen (conexo, simplemente conexo);
5) $\mathbb{R}^3$ sin un eje coordenado (conexo, no simplemente conexo);
6) Un toroide (rosquita) (conexo, no simplemente conexo).

Recorrido

Teorema (Teorema Fundamental de integrales de línea)

Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo en una región D que contiene a C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathrm{r} = f(B) - f(A).$$

Demostración:
Sea C parametrizada por $\mathrm{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, con $\mathrm{r}(a) = A$ y $\mathrm{r}(b) = B$.
Por la definición de integral de línea de un campo vectorial aplicada al campo vectorial ∇f,

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathrm{r} = \int_a^b \nabla f(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t)\, dt. \tag{1}$$

Teorema Fundamental de integrales de línea

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar la función compuesta $f \circ \mathrm{r}$, ya que en todos los puntos de C, f es diferenciable y r es derivable por hipótesis. Así:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathrm{r})(t) = f_x(\mathrm{r}(t))x'(t) + f_y(\mathrm{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t) \tag{2}$$

y, sustituyendo (2) en (1) queda

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla f \cdot d\mathrm{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \mathrm{r})(t)\, dt \\
&= (f \circ \mathrm{r})(t)\Big|_a^b = f(\mathrm{r}(b)) - f(\mathrm{r}(a)) \\
&= f(B) - f(A).
\end{aligned}$$

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

Teorema

Sea $\mathrm{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta* D *en el espacio. Entonces* F *es un campo conservativo si y sólo si* F *es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable* f*.*

Demostrar:

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathrm{F} = \nabla f$ para alguna función diferenciable f.
Según el T.F. de integrales de línea, $\int_A^B \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = f(B) - f(A)$: solo depende de los puntos A y B, no de la trayectoria, cualesquiera sean A y B en D. Luego $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$ es independiente de la trayectoria en D. En consecuencia, F es conservativo en D.

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

Teorema

Sea $\mathrm{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial cuyos componentes son continuos en una región conexa abierta* D *en el espacio. Entonces* F *es un campo conservativo si y sólo si* F *es el gradiente de alguna función (potencial) diferenciable* f*.*

Demostrar:

$\Rightarrow$) Supongamos que F es conservativo en D, es decir que la integral $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}$ es independiente de la trayectoria en D.

PASOS:

1) Definimos f en D;

2) Probamos que $\nabla f = \mathrm{F}$.

Teorema: los campos conservativos son campos gradientes

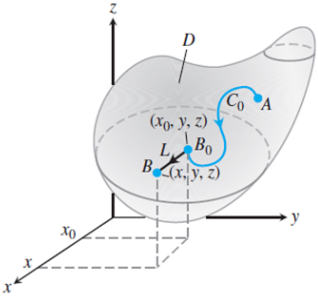
1) Elegimos $A \in D$, arbitrario fijo, y definimos f así:

$$f(A) = 0 \qquad f(B) = \int_A^B \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} \text{ para cualquier otro punto } B \in D.$$

Note la importancia de la hipótesis de ser conexo D.

2) Basta probar que
$f_x(x, y, z) = M(x, y, z);\ f_y(x, y, z) = N(x, y, z);\ f_z(x, y, z) = P(x, y, z).$

2) Probemos que $f_x(x, y, z) = M(x, y, z)$;



$$\mathbf{r}(t) = (t, y, z),\ x_0 \leq t \leq x$$

Análogamente se prueba que $f_y(x, y, z) = N(x, y, z)$ y que $f_z(x, y, z) = P(x, y, z)$.

Teorema: propiedad de lazos en campos conservativos

Teorema

El campo vectorial F *es conservativo en D si y sólo si para todo lazo C en D, se tiene* $\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = 0$.

Demostrar: TAREA.

Teorema: criterio de componentes para campos conservativos

Teorema

Sea $\mathrm{F} = (M, N, P)$ *un campo vectorial definido en un dominio abierto conexo* D*, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces:*

1. *Si* F *es conservativo en* D*, entonces* $\mathrm{rot}\mathrm{F} = 0$*.*
2. *Si* D *es simplemente conexo y* $\mathrm{rot}\mathrm{F} = 0$ *en* D*, entonces* F *es conservativo en* D*.*

Demostración:
Definiremos $\mathrm{rot}\,\mathrm{F}$ más adelante. Basta saber que si $\mathrm{F} = (M, N, P)$,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{F} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$$

1. Supongamos que F es conservativo y probemos que $\mathrm{rot}\,\mathrm{F} = 0$. TAREA.
2. Se probará después de haber probado el Teorema de Stokes.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

Sea $\mathrm{F}(x,y) = (x+y, x, 0)$.
a) Determine si F es o no conservativo (¿dónde?)
b) En caso afirmativo, halle una función potencial de F, f. Si no, explique por qué.

---

a) $\mathrm{rotF} = (0,0,0)$ y $D(\mathrm{F}) = \mathbb{R}^3$, luego F es conservativo en $\mathbb{R}^3$.

Hallar la función potencial de un campo conservativo

$F(x, y) = (x + y, x, 0)$; halle una función potencial de F, f.

Se busca f tal que $(x + y, x, 0) = (f_x, f_y, f_z)$.

$$f(x, y, z) = \int (x + y)\, dx = \frac{x^2}{2} + xy + g(y, z), \quad \text{donde } g(y,z) \text{ es la constante}$$

$$f_y(x, y, z) = x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + g(y, z)\right) = x \Rightarrow y + g_y(y, z) = x$$

$$\Rightarrow g_y(y, z) = x - y \Rightarrow g(y, z) = \int (x - y)\, dy = xy - \frac{y^2}{2} + h(z)$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xy + xy - \frac{y^2}{2} + h(z) = \frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2} + h(z)$$

$$f_z(x, y, z) = 0 \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = cte.$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2xy - \frac{y^2}{2} + C.$$

Recorrido

Principio del trabajo y la energía

Si F representa un **campo de fuerzas** y una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva suave C incluida en el dominio de F, ocupando la posición $\mathrm{r}(t)$, durante un intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$, entonces el **trabajo** realizado por F en ese intervalo es

$$W = \int_{\mathrm{r}(a)}^{\mathrm{r}(b)} \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t)\, dt. \tag{3}$$

Según la segunda Ley de Newton, $\mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) = m\mathrm{r}''(t)$ con lo cual

$$\mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t) = m\mathrm{r}''(t) \cdot \mathrm{r}'(t) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\mathrm{r}'(t) \cdot \mathrm{r}'(t)) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathrm{r}'(t)\|^2). \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3),

$$W = \int_a^b \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\|\mathrm{r}'(t)\|^2)\, dt = \frac{m}{2}\|\mathrm{r}'(t)\|^2 \Big|_a^b = \frac{m}{2}\left(\|\mathrm{r}'(b)\|^2 - \|\mathrm{r}'(a)\|^2\right).$$

Recordando que la energía cinética de la partícula está definida por $\frac{1}{2}m\, v^2(t)$, hemos probado que el trabajo realizado por F durante un intervalo de tiempo es la variación de la energía cinética en ese intervalo.

Principio de conservación de la energía mecánica

Sea F un campo de fuerzas continuo con un potencial f en un conjunto conexo abierto D. El T.F. de integrales de línea dice que el trabajo realizado para mover una partícula desde A hasta (x, y, z) a lo largo de una curva suave por partes en D es $f(x, y, z) - f(A)$; antes probamos que el trabajo es la variación de la energía cinética de la partícula, $k(x, y, z) - k(A)$. Luego

$$k(x, y, z) - k(A) = f(x, y, z) - f(A),$$

$$k(x, y, z) - f(x, y, z) = k(A) - f(A). \tag{5}$$

Llamamos energía potencial de la partícula a $-f(x, y, z)$.
Si A se mantiene fijo y (x, y, z) varía en D, (5) dice que $k(x, y, z) + (-f(x, y, z)) = cte$.

Principio de conservación de la energá mecánica

Si un campo de fuerzas es un gradiente, la suma de las energías cinética y potencial de una partícula que se desplaza en dicho campo es constante.

Recorrido

Formas diferenciales exactas

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

$$\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz = \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \qquad \nabla f \text{ es conservativo.}$$

$$= f(B) - f(A). \qquad \text{Teorema 1}$$

Formas diferenciales exactas

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

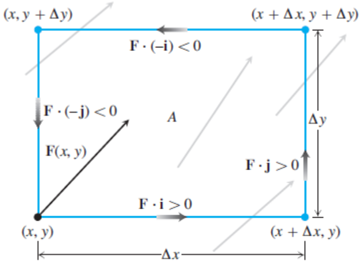
Criterio de los componentes para determinar si $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta
La forma diferencial $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta en un dominio conexo y simplemente conexo si y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

Recorrido

Componente k del rotacional



Arriba: $\mathbf{F}(x, y+\Delta y)\cdot(-\mathbf{i})\,\Delta x = -M(x, y+\Delta y)\Delta x$

Abajo: $\mathbf{F}(x, y)\cdot\mathbf{i}\,\Delta x = M(x, y)\Delta x$

Derecha: $\mathbf{F}(x+\Delta x, y)\cdot\mathbf{j}\,\Delta y = N(x+\Delta x, y)\Delta y$

Izquierda: $\mathbf{F}(x, y)\cdot(-\mathbf{j})\,\Delta y = -N(x, y)\Delta y.$

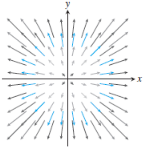
Arriba y abajo: $-(M(x, y+\Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$

Derecha e izquierda: $(N(x+\Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$

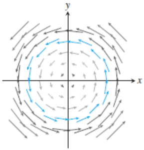
La densidad de circulación de un campo vectorial $\mathrm{F} = (M, N)$ en el punto (x, y) es el componente k del rot F: $(\mathrm{rot}\,\mathrm{F})\cdot k$:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Componente k del rotacional



(a)



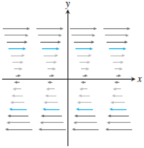
(b)

(a) *Expansión o compresión uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = cx\,\mathbf{i} + cy\,\mathbf{j}$

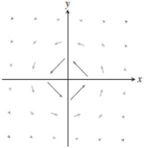
(a) *Expansión uniforme:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cy) - \dfrac{\partial}{\partial y}(cx) = 0.$

(b) *Rotación uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = -cy\,\mathbf{i} + cx\,\mathbf{j}$

(b) *Rotación:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cx) - \dfrac{\partial}{\partial y}(-cy) = 2c.$



(c)



(d)

(c) *Flujo cortante:* $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i}$

(c) *Corte:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = -\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = -1.$

(d) *Efecto remolino:* $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$

(d) *Remolino:*

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Teorema de Green

Teorema

Sea C una curva suave por partes, cerrada simple que encierra una región R en el plano. Sea $\mathrm{F} = (M, N)$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R. Entonces la circulación en sentido antihorario de F alrededor de C es:

$$\oint_C \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}\, ds = \int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Demostración: de Thomas (probamos un caso particular).