Transformada de Laplace. EDO Orden 1

Contenido

Transformada de Laplace. Definición

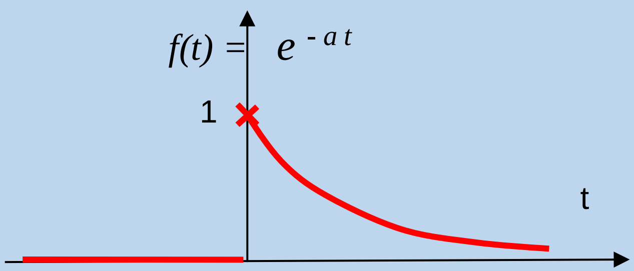
Dada una función *f(t)* de R en R, continua por tramos en el intervalo de números reales mayores o iguales a cero, se define Transformada de Laplace a la función *F(s)*, de variable compleja s, que resulta de la siguiente integral

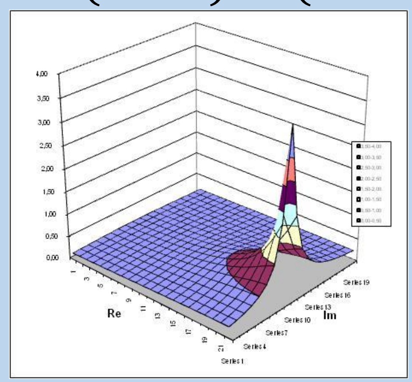
$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

De este modo, la función *f(t)* de R en R se transforma en una función *F(s)* de C en C (función de variable compleja, cuyo resultado es un número complejo). Las *F(s)* son en general FUNCIONNES RACIONALES en la variable compleja s, de Coeficientes Reales, y en la que el polinomio del numerador N(s) tiene menor grado que el polinomio del denominador D(s).

Un caso simple de resolver es la Transformada de la función exponencial.

$$\boldsymbol{L[e^{-at}]} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-at} \cdot dt = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} - \frac{e^{-(s+a)0}}{-(s+a)} = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{a})} \qquad \forall\ (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{a}) > \mathbf{0}$$





Módulo de F(s) para Re(s)>0

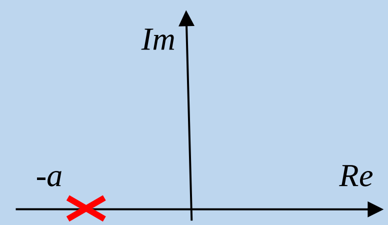


Diagrama en Plano Complejo

En A-INTEGRALES IMPROPIAS-2020, se presentan resultas los casos principales de Transformadas de Laplace de funciones en la variable t que se usan habitualmente. Se puede destacar que siempre se debe resolver una Integral Impropia; para lo cual en general se debe hace uso de conocimientos que se han aprendido en cursos de Análisis Matemático, tales como límite, Regla de L´Hôpital, integración por partes, y otros.

En A-FUNCIONES RACIONALES-2020, se repasan los principales resultados que se necesitarán.

Transformada de Laplace. Otros Ejemplos

En todos los casos $L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Ejemplos

f(t)	F(s)=L(f(t))	Para todo
$\delta(t)$	1	
$b=b.u_s(t)$	b/s	s> 0
$a.t^n$	$a\ n!/s^{n+1}$	s> 0
$e^{-a.t}$	1/(s+a)	(s+a)>-a
sen(bt)	$b/(s^2 + b^2)$	
cos(bt)	$s/(s^2 + b^2)$	
senh(bt)	$b/(s^2 - b^2)$	
cosh(bt)	$s/(s^2 - b^2)$	

Las F(s) son funciones racionales; es decir, cocientes de polinomios de coeficientes reales. De modo que pueden tener ceros o no, y siempre tienen polos (al menos uno).

La excepción es la función Impulso Unitario o Delta de Dirac, cuya transformada de Laplace es 1, función constante para todo el plano s.

Transformada de Laplace. Existencia

Es condición suficiente para que exista la Transformada de Laplace de la función *f(t)* garantizar que la integral que la define sea convergente (Zill y Cullen (2002), Edwards y Penny (2009), Nagle et al.(2001)).

Esto se asegura cuando se cumple que:

la función *f(t)* es continua por tramos

la función *f(t)* es orden exponencial r para t >T

Una función *f(t)* es orden exponencial r para t>T , cuando existen números reales positivos r y M tales que

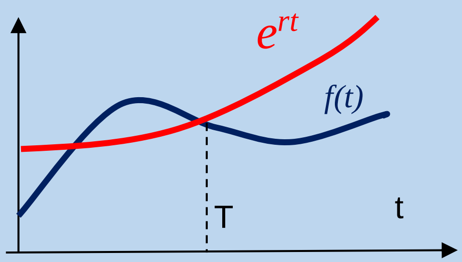
$$|f(t)| \leq M \cdot e^{rt}$$

o bien,

$$\frac{|f(t)|}{|e^{rt}|} \leq M$$

que es equivalente

$$|f(t) \cdot e^{-rt}| \leq M$$



Cumplen con esta condición las funciones polinómicas, las trigonométricas y las hiperbólicas.

Transformada de Laplace. Propiedades

Propiedad de Preservación de las Combinaciones Lineales

Dadas *f(t)* y *g(t)*, dos funciones de R en R, continuas por tramos en el intervalo de números reales mayores o iguales a cero, con Transformadas de Laplace *F(s)*, *G(s)* se pretende encontrar la Transformada de Laplace de *z(t)*, Combinación Lineal de ambas funciones, en la forma

$$\boxed{z(t) = \alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)}$$

Se busca

$$L[z(t)] = L[\alpha \cdot f(t)\beta \cdot g(t)]$$

Aplicando la definición de Transformada de Laplace,

$$L[z(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot z(t) \cdot dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \{\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)\} \cdot dt$$

Aplicando propiedad distributiva de la integración

$$L[z(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \alpha \cdot f(t) \cdot dt + \int_0^\infty e^{-st} \cdot \beta \cdot g(t) \cdot dt$$

Pero los coeficientes alfa y beta son contantes para el proceso de integración en la variable t, de modo que

$$L[z(t)] = \alpha \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt + \beta \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot g(t) \cdot dt$$

Y ambas integrales responden a la definición de F(s) y G(s), transformadas de Laplace de f(t) y g(t) respectivamente. Entonces,

$$L[z(t)] = \alpha \cdot L[f(t)] + \beta \cdot L[g(t)]$$

Así resulta que la transformada de Laplace de una combinación lineal de funciones en el tiempo, es la combinación lineal de las transformadas

$$\boxed{Z(s) = \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)}$$

Transformada de Laplace. Propiedades

Propiedad de la Derivada de una función

Dada *f(t)* una función de R en R, continua por tramos en el intervalo de números reales mayores o iguales a cero, con Transformadas de Laplace *F(s)*, se pretende encontrar la Transformada de Laplace de la Deriva primera de *f(t)*, respecto a t.
Se conoce que,

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s)$$

Se busca

$$\boxed{L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{df(t)}{dt} \cdot dt}$$

Es conveniente aplicar integración por partes, de modo que en el integrando no quede la derivada de la función f(t).la regla de integración por partes, establece que:

$$\int_a^b u(t) \cdot dv = +u(t) \cdot v(t)|_a^b - \int_0^b v(t) \cdot du$$

De modo que es conveniente elegir

$dv = \frac{df(t)}{dt} \cdot dt$ de modo que $v(t) = f(t)$

$u(t) = e^{-st}$ de modo que $du = -s \cdot e^{-st} \cdot dt$

Aplicando estas elecciones en la integral a resolver, se tiene que

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{df(t)}{dt} \cdot dt = +e^{-st} \cdot f(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Evaluando en infinito y en cero; y considerando que (-s) es constante para el proceso de integración en t, resulta

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{t\to\infty}[e^{-st} \cdot f(t)] - e^{-s0} \cdot f(0) - (-s)\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\cdot f(t)\right] - e^{-s0}\cdot f(0) - (-s)\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt$$

En donde se reconoce que

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt = F(s)$$

para lo cual se debe cumplir la condición de existencia de la Transformada de Laplace, es decir que:

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\cdot f(t)\right] = 0$$

Con estos resultados, queda

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -e^{-s0}\cdot f(0) + s\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -e^{-s0}\cdot f(0) + s\cdot F(s)$$

Se han de mostrado las propiedades de

La Transformada de una Combinación Lineal

la Transformada de la derivada primera de una función

pero has otras propiedades de utilidad

Propiedades	
$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=$	α F(s)+ β G(s)
L[d$f(t)/dt$]=	s F(s)- $f(0)$
$L[d^2 f(t)/dt^2]=$	s^2 F(s)- s $f(0)$ – d$f/dt(0)$

Transformada de Laplace. Propiedades

Propiedad de Traslación en el dominio s

Dadas *f(t)* de R en R, continua por tramo en el intervalo de números reales mayores o iguales a cero, con Transformadas de Laplace *F(s)* se pretende encontrar la Transformada de Laplace de la función

$$\boxed{z(t) = e^{at} \cdot f(t)}$$

Se busca

$$L[z(t)] = L[e^{at} \cdot f(t)]$$

Aplicando la definición de Transformada de Laplace,

$$L[z(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot z(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} \cdot f(t) \cdot dt$$

Aplicando propiedad asociativa de las potencias de igual base

$$L[z(t)] = L[e^{at} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} \cdot f(t) \cdot dt$$

Si se hace un cambio de variable en la forma x=(s-a), resulta que x es una variable compleja al igual que s, de modo que se puede expresar la integral como

$$L[e^{at} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-x \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt$$

La segunda integral es la Transformada de Laplace de *f(t)* pero en la variable compleja *x*,

$$L[e^{at} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-x \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt = F(x)$$

Pero x=(s-a), entonces

$$\boxed{L[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)}$$

Es decir que la Transformada de Laplace de una función f(t) multiplicada por una exponencial de coeficiente a por t, es igual a la F(s), Transformada de Laplace de una función f(t), pero trasladada a unidades en el plano complejo s.

Tabla de Transformada de Laplace.

Ejemplos

f(t)	F(s)=L(f(t))	Para todo
$\delta(t)$	1	
$b=b.u_s(t)$	b/s	s> 0
$a.t^n$	$a\ n!/s^{n+1}$	s> 0
$e^{-a.t}$	1/(s+a)	(s+a)>-a
sen(bt)	$b/(s^2 + b^2)$	
cos(bt)	$s/(s^2 + b^2)$	
senh(bt)	$b/(s^2 - b^2)$	
cosh(bt)	$s/(s^2 - b^2)$	

Propiedades

$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=$	α F(s)+ β G(s)
$L[df(t)/dt]=$	s F(s)- $f(0)$
$L[d^2f(t)/dt^2]=$	s^2 F(s)- s $f(0)$ – d$f/dt(0)$
$L\left[\int f(t)dt\right]=$	(1/s) F(s)
$L[e^{+a.t} f(t)]=$	F(s-a)
$L[f(t-\alpha)\ u_s(t-\alpha)]=$	$e^{-s.\alpha}$ F(s)
$\lim_{t\to\infty}(f(t)) =$	$\lim_{s\to 0}(s.F(s))$
$L[f(t)\ o\ g(t)] =$	F(s) G(s)

En A-NUMEROS COMPLEJOS-2020, se repasan los conceptos principales de operaciones con números complejos y de funciones de números complejos.

En A-INTEGRALES IMPROPIAS-2020, se presentan resueltos los casos principales de Transformadas de Laplace de funciones en la variable t que se usan habitualmente.

En LAPLACE-Notas-2020 se demuestran las propiedades resumidas en la Tabla anterior, donde básicamente se usan propiedades de las integrales.

Se puede destacar que siempre se debe resolver una Integral Impropia; para lo cual en general se debe hace uso de conocimientos que se han aprendido en cursos de Análisis Matemático, tales como límite, Regla de L´Hôpital, integración por partes, y otros.

Transformada de Laplace. Propiedades

Ejemplos de la Propiedad de Traslación en el dominio s

Si para $f(t)$ la $L[f(t)]$ es $F(s)$,

entonces para

$e^{at}f(t)$ la $L[e^{at}f(t)]$ es $F(s-a)$

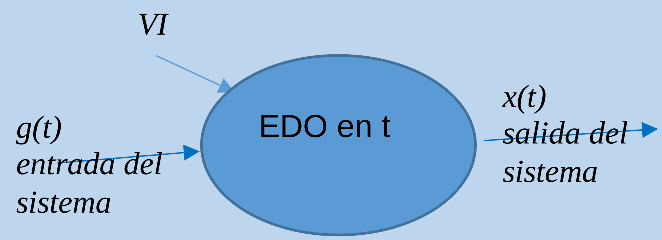
$f(t)$	$L[f(t)] = F(s)$		$e^{at}\cdot f(t)$	$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$)
$\delta(t)$	1		$e^{at}\cdot\delta(t)$	$e^{at}\cdot 1$
$b\cdot u_s(t)$	b/s		$e^{at}\cdot b\cdot u_s(t)$	b/(s-a)
$b\cdot t^n$	$b\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}$		$e^{at}\cdot b\cdot t^n$	$b\cdot\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$sen(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$		$e^{at}\cdot sen(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$		$e^{at}\cdot cos(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$
$senh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$		$e^{at}\cdot senh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$
$cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$		$e^{at}\cdot cosh(bt)$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2}$

Aplicación de la Transformada de Laplace a la solución de EDO con Valores Iniciales

Se busca la función *x(t)* de R en R, denominada *salida del sistema*, y solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = b \cdot u(t) \qquad con\ x(0) = x_0}$$

siendo conocidos los valores iniciales, los coeficientes *k* y *b*, y la *entrada al sistema*, que es el término independiente de la EDO, que en este caso es la función escalón unitario *u(t)*.



Se aplica Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de la EDO,

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t)\right] = L[b \cdot u(t)]$$

y en base a la propiedad de preservación de las combinaciones lineales, resulta

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] + k \cdot L[x(t)] = b \cdot L[u(t)]$$

Para tratar el lado izquierdo de la igualdad, se asume que existe la TL de la función *x(t)* solución de la EDO, entonces se tiene que

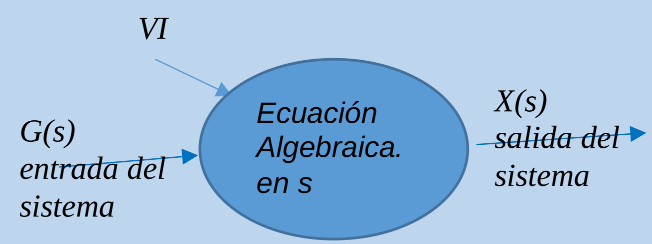
$$L[x(t)] = X(s)$$

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s \cdot X(s) - x_0$$

Para tratar el lado derecho de la igualdad, se la TL del término independiente de la EDO, que en este caso es la función escalón unitario *u(t)*,

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}$$

Con los resultados reemplazados en la TL de la EDO, resulta la siguiente ecuación algebraica



$$\boxed{s \cdot X(s) - x_0 + k \cdot X(s) = b \cdot \frac{1}{s}}$$

De la ecuación algebraica resultante es posible despejar la única incógnita *X(s)*

$$X(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)} + \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s}$$

El problema se ha resuelto en el dominio s !!! *X(s)* que es la TL de la función *x(t)* solución de la EDO.

Se distinguen dos contribuciones a la solución, que se denominan

solución natural, es la que considera la contribución de los VI de la EDO que deben ser cumplidos en t=0 por x(t)

$$X_n(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)}$$

solución forzada, es la contribución de la TL del término independiente de la EDO

$$X_f(s) = \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s}$$

En ambos casos participa la denominada **Función de Transferencia H(s)** que es una característica propia de la EDO original

$$H(s) = \frac{1}{(s+k)}$$

*"La **Función de Transferencia H(s) de un sistema se obtiene al considerar** valores iniciales nulos, y al evaluar el cociente entre la transformada de la salida de un sistema, y la transformada de la entrada del sistema."*

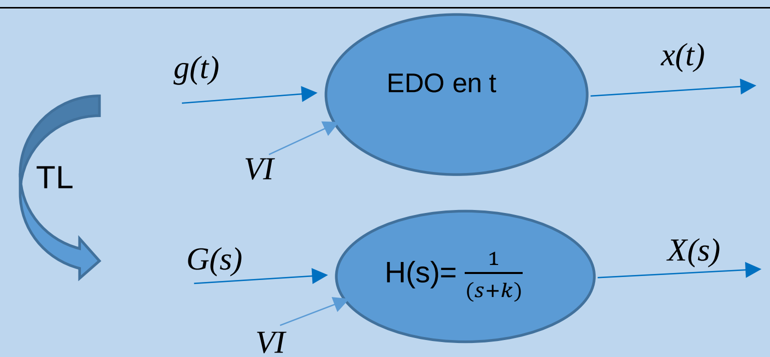
En síntesis, hasta aquí se tiene que

Dada la EDO en x(t) y sus VI, en el dominio t

se aplica TL y sus propiedades

se obtiene una Ecuación Algebraica en X(s)

Se despeja X(s), solución en el dominio s



Conocida *X(s)*

$$X(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)} + \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s}$$

se pretende encontrar la *x(t)*, y para ello es posible distinguir los dos sumandos de *X(s)*, que se los denomina

solución natural (que considera la condición inicial); y

solución forzada que depende del término independiente de la EDO original

Solución Natural *$X_n(s)$* depende

de los valores iniciales de la EDO

de la función H(s) que es una característica propia de la EDO

$$X_n(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)} = x_0 \cdot H(s)$$

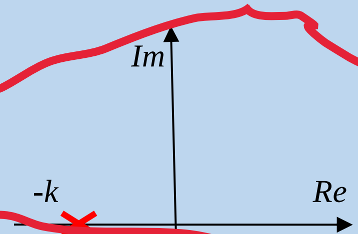
En este caso, por simple aplicación de la Tabla de transformadas, es posible expresar que la solución natural en el tiempo es

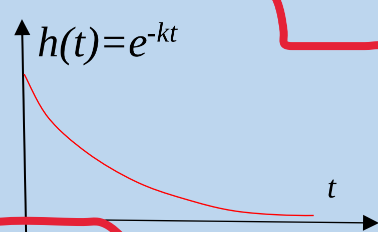
$$x_n(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

ya que se cumple quela TL de $x_n(t)$ es $L[x_0 \cdot e^{-k \cdot t}] = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)}$

Es posible distinguir la contribución de la denominada **Función de Transferencia H(s)** que es una característica propia de la EDO

H(s)=1/(s+k) que es la Transformada de Laplace de la función $h(t) = e^{-kt}$

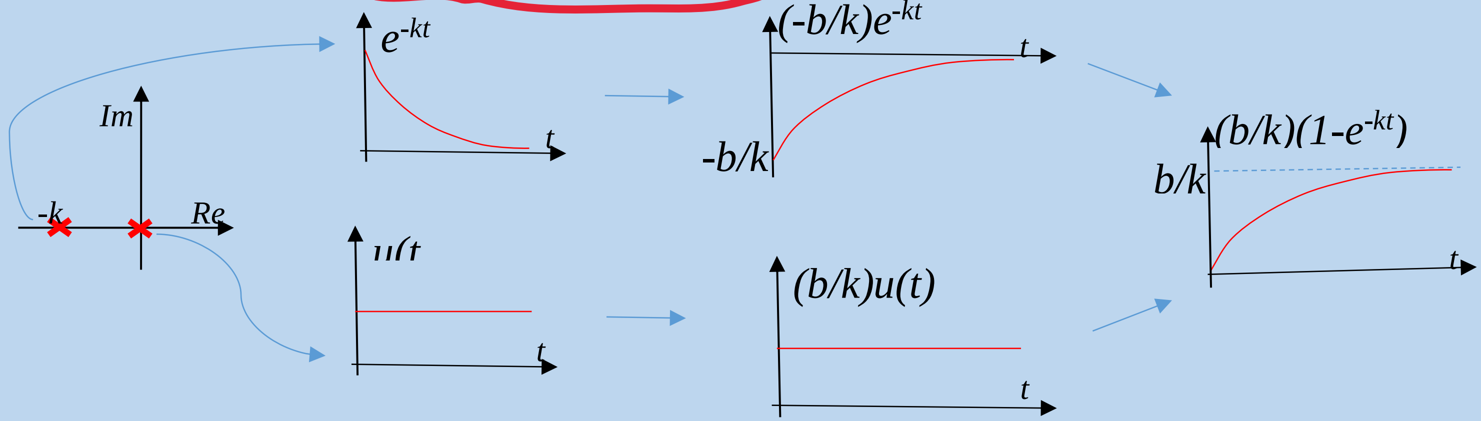




Solución Forzada $X_f(s)$ es la TL de la solución forzada **$x_f(t)$** en el dominio del tiempo, y tiene contribución de los polos de H(s) y de la TL del término independiente de la EDO o entrada al sistema.

La $X_f(s)$ es una Función Racional con un numerador N(s)=b y un denominador D(s)= s (s+k); es decir, que no tiene ceros y tiene dos polos en s=0; y s=-k. Es conveniente **expresar la Función Racional en forma de Fracciones Parciales**, escribiendo p**ara cada polo una fracción parcial**, con su **residuo asociado.** Los residuos se calculan mediante el planteo de un sistema de ecuaciones lineales o por medio de función implícita. En base a la propiedad de preservación de combinaciones lineales de la Transformada de Laplace es posible asegurar que **la solución forzada en el dominio del tiempo tiene una contribución de cada polo**, y haciendo uso de las Tablas de TL, se llega a

$$X_f(s) = H(s)\cdot\frac{b}{s} = \frac{1}{(s+k)}\cdot\frac{b}{s} = \frac{(-\frac{b}{k})}{(s+k)} + \frac{(\frac{b}{k})}{s} \qquad x_f(t) = -\frac{b}{k}\cdot e^{-k\cdot t} + \frac{b}{k}$$



Según la posición de cada polo en el plano s, resulta el tipo de respuesta en el tiempo; y su amplitud depende del valor del residuo asociado al polo.

Al considerar el Teorema de Convolución de la TL, por el cual: $L[f(t)\circ g(t)] = F(s)\cdot G(s)$, se puede observar que:

$$X_f(s) = \frac{1}{(s+k)}\cdot\frac{b}{s} = L[e^{-kt}\circ b\cdot u(t)] \quad \Longrightarrow \quad x_f(t) = e^{-kt}\circ b\cdot u(t) = \int_0^t b\cdot u(t-\xi)\cdot e^{-k\cdot\xi}\cdot d\xi$$

Esta solución coincide con la obtenida con el Método de Variación de Parámetros, que introduce a la Integral de Convolución entre dos funciones. El Método de Variación de Parámetros suele ser tratado en los cursos de Análisis Matemático; como alternativa a la obtención de la solución general de una EDO mediante la suma de la solución homogénea más una solución particular

Cálculo de los Residuos de la Solución Forzada $X_f(s)$

La Función Racional es

$$X_f(s) = \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

El numerador es N(s)=b y no tiene ceros. El denominador D(s)= s (s+k) tiene dos ceros en s=0; y s=-k; que son los polos de $X_f(s)$. Es conveniente expresar la Función Racional $X_f(s)$ en forma de Fracciones Parciales. Así **para cada polo se escribe una fracción parcial**, con su **residuo asociado**

$$X_f(s) = \frac{A}{(s+k)} + \frac{B}{s}$$

Los residuos A y B se pueden calcular mediante el planteo de un sistema de ecuaciones lineales, o mediante el uso de funciones implícitas. Para el **cálculo mediante sistema de ecuaciones lineales** se parte de la igualdad entre ambas expresiones de $X_f(s)$

$$\frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{(s+k)} + \frac{B}{s}$$

haciendo la suma de fracciones del segundo miembro

$$\frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s} = \frac{A \cdot s}{(s+k) \cdot s} + \frac{B \cdot (s+k)}{s \cdot (s+k)}$$

se obtiene

$$\frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s} = \frac{(A+B) \cdot s + B \cdot k}{(s+k) \cdot s}$$

Para que la igualdad sea válida los polinomios de los numeradores deben ser iguales, ya que los denominadores los son. Para que dos polinomios sean iguales sus coeficientes lo debe ser. Así resulta que se debe cumplir

$$\begin{cases} (A+B) = 0 \\ B \cdot k = b \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales en A y B, cuya solución es -A= B=b/k

Así la Función Racional $X_f(s)$ en forma de Fracciones Parciales resulta

$$X_f(s) = \frac{-b/k}{(s+k)} + \frac{b/k}{s}$$

Síntesis de Aplicación de Transformada de Laplace en la solución de EDO.

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = b \cdot u(t) \qquad con\ x(0) = x_0$$

siendo conocidos los valores iniciales como también la función escalón unitario *u(t)*, y los coeficientes *k* y *b*.

Al aplicar Transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial ordinaria, se obtiene la Ecuación algebraica:

$$s \cdot X(s) - x_0 + k \cdot X(s) = b \cdot \frac{1}{s}$$

de la cual se despeja X(s), Transformada de Laplace de la solución x(t) de la EDO

$$X(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)} + \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s} = X_n(s) + X_f(s)$$

En donde es posible distinguir,

Solución Natural *$X_n(s)$* o contribución de los valores iniciales en la solución de la EDO

$$X_n(s) = x_0 \cdot \frac{1}{(s+k)} = x_0 \cdot H(s) \qquad x_n(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Solución Forzada *$X_f(s)$* o contribución del término independiente de la EDO en su solución

$$X_f(s) = b \cdot H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{(s+k)} + \frac{B}{s} \qquad x_f(t) = -\frac{b}{k} \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{b}{k}$$

Se requiere expresar a la **Función Racional** en su forma de **Fracciones Parciales, y así se identifica la contribución de cada polo en la respuesta en el tiempo. Según la posición del polo en el plano s, resulta el tipo de respuesta en el tiempo; y se amplitud depende del valor del residuo.**

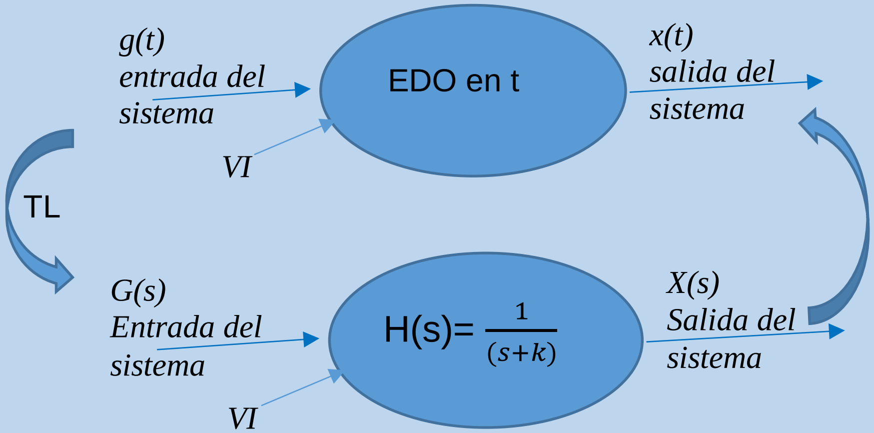
De donde resulta que la solución completa de la EDO es

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t} + (-\frac{b}{k}) \cdot e^{-k \cdot t} + \frac{b}{k}$$

Esta solución coincide con la obtenida con el Método de Variación de Parámetros, que introduce a la Integral de Convolución entre dos funciones. El Método de Variación de Parámetros suele ser tratado en los cursos de Análisis Matemático; como alternativa a la obtención de la solución general de una EDO mediante la suma de la solución homogénea más una solución particular.

Mapa Conceptual de Aplicación de Transformada de Laplace en la solución de EDO.

Dada la EDO con TL se pasa del espacio tiempo al espacio complejo y se vuelve



Funciones Racionales;
Fracciones Parciales y
Tablas de TL,
como alternativa a TL Inversa

Se puede destacar el rol importante que cumplen las funciones

Respuesta a un Impulso Unitario

$$h(t) = e^{-k\cdot t}$$

Función de Transferencia

$$H(s) = \frac{1}{(s+k)}$$

ya que permiten encontrar la $\boldsymbol{x_f(t)}$**, solución forzada de la EDO o del sistema**, mediante la **Convolución entre la h(t), y** $\boldsymbol{b\cdot g(t)}$; término independiente de la EDO o entrada del sistema;

en el dominio del tiempo (es una integral)

$$x_f(t) = h(t) \circ b \cdot g(t)$$

$$x_f(t) = \int_0^t b \cdot g(t-\xi) \cdot e^{-k\cdot\xi} \cdot d\xi$$

o en el dominio s (es un producto de funciones racionales)

$$X_f(s) = H(s) \cdot b \cdot G(s)$$

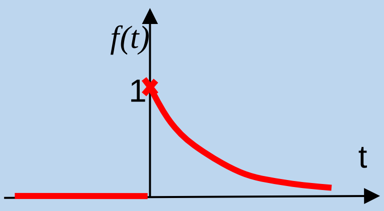
$$X_f(s) = \frac{1}{(s+k)} \cdot b \cdot G(s)$$

Resolver la convolución requiere pasar a fracciones parciales a la función racional $X_f(s)$, y luego pasar al dominio del tiempo, usando propiedades de TL.

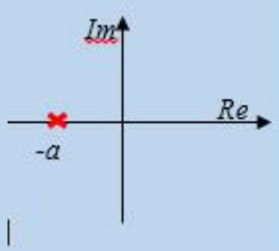
El sistema dinámico queda descripto por la EDO o alternativamente por su Función de Transferencia H(S)

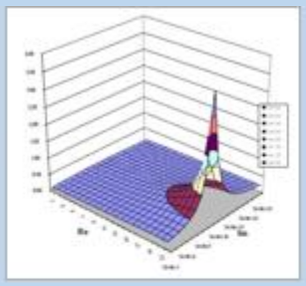
Resumen Transformada de Laplace

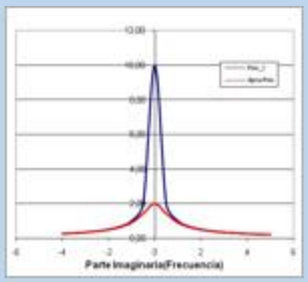
Definición, Ejemplos y Propiedades



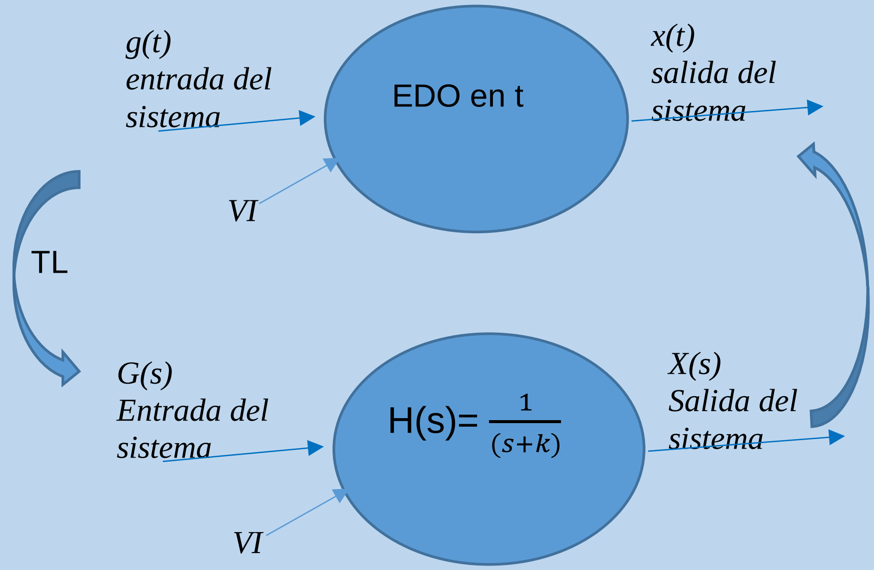
$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$







Aplicación en la solución de EDO



Función de Transferencia $H(s) = \frac{X_f(s)}{G(s)}$ *siempre se considera para VI nulos*

Teorema de Convolución *L[h(t) o g(t)]= H(s) G(s)*

Solución Forzada $X_f(s) = H(s) \cdot G(s)$ $x_f(t) = h(t) \circ g(t)$

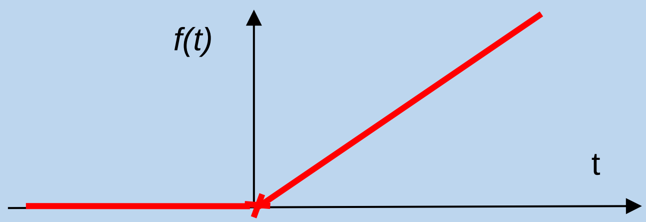
$$x_f(t) = \int_0^t g(t - \xi) \cdot e^{-k \cdot \xi} \cdot d\xi$$

Ejercicios

Ejercicio 1 de Definición de TL

Sea la **función "Rampa"** en el dominio del tiempo dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t < 0 \\ at & si \;\; t \geq 0 \end{cases}$$



Demostrar que la Transformada de Laplace resulta:

$$L[at] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at \cdot dt = \frac{a}{s^2} \;\; con \;\; s > 0$$

Se debe usar la definición de TL, integración por partes y la Regla de L'Hôpital para resolver el limite indeterminados.

Ejercicio 2 de Definición de TL

Demostrar haciendo uso del ejercicio anterior $L[at^2] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at^2 \cdot dt = \frac{a \cdot 2}{s^3} \;\; con \;\; s > 0$

Ejercicio 3 de Definición de TL

Demostrar haciendo uso del ejercicio anterior $L[at^3] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot at^3 \cdot dt = \frac{a \cdot 3!}{s^4} \;\; con \;\; s > 0$

Ejercicio 4 de Definición de TL

Resolver $L\left[sen(\omega t)\right] = L\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] =$

Ejercicio 5 de Propiedad de TL

Demostrar que si la función *f(t)* en el dominio de los números reales, tiene transformada de Laplace *F(s)* en el dominio complejo s, entonces se cumple que

$$L[df(t)/dt] = s\,F(s) - f(0)$$

Usar la definición de TL e integración por partes.

Ejercicio 6 de EDO con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{dx(t)}{dt} + 4 \cdot x(t) = 3 \cdot g(t) \qquad con\ x(0) = 6$$

a. **Encontrar** $X(s)=X_n(s) + X_f(s)$ distinguiendo la solución natural de la solución forzada
b. **Demostrar** que la solución natural en el tiempo es $x_n(t) = 6 \cdot e^{-4 \cdot t}$
c. Si se considera ***g(t)* igual a la función escalón unitaria**, **Demostrar** que la solución forzada en el tiempo es $x_f(t) = \frac{3}{4} \cdot (1 - e^{-4 \cdot t})$
d. **Encontrar** la Función de Transferencia H(s)
e. **Expresar la** $h(t)$ cuya TL es H(s)
f. **Encontrar** $c(t) = e^{-4 \cdot t} \circ 3 \cdot u_s(t)$ **convolución** entre $e^{-4 \cdot t}$ y 3 por la función escalón unitaria
g. Si en la EDO se considera VI nulo y termino independiente dado por la función impulso unitario

$$\frac{dx(t)}{dt} + 4 \cdot x(t) = \delta(t) \qquad con\ x(0) = 0$$

Encontrar $x(t)$, siendo $\delta(t)$ la función impulso unitario o Delta de Dirac

Comparar $x(t)$ con $h(t)$

h. Para la EDO anterior encontrar la solución forzada para una entrada g(t)=(1/3) sin(3 t)

Ejercicio 7 de EDO con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{dx(t)}{dt} - 6 \cdot x(t) = 3 \cdot e^{3 \cdot t} \qquad con\ x(0) = 0$$

a. **Encontrar** $X(s)=X_n(s) + X_f(s)$ distinguiendo la solución natural de la solución forzada
b. **Encontrar** la Función de Transferencia $H(s)$, y dibujar un esquema de la posición de sus polos
c. **Dibujar cualitativamente la respuesta** $X_f(s)$ para una entrada igual a $g(t) = 7 \cdot e^{-3 \cdot t}$
(Hacer diagrama de la posición de polos)

Ejercicio 8 de Sistema Dinámico con TL

Sea un sistema dinámico con Función de Transferencia $H(s)$ tal que tiene **un polo en s=6 y ningún cero**.

a. **Expresar** $H(s)$, y dibujar un esquema de la posición de sus polos
b. **Dibujar cualitativamente la respuesta** $X_f(s)$ para una entrada igual a $g(t) = 7 \cdot e^{-3 \cdot t}$
(Hacer diagrama de la posición de polos)
c. **Dibujar cualitativamente la respuesta** $X_f(s)$ para una entrada igual a $g(t) = 10 \cdot e^{-6 \cdot t}$
(Hacer diagrama de la posición de polos)

Ejercicio 9 de Sistema Dinámico con TL

Sean dos sistemas dinámicos con Funciones de Transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$ tales que:

$H_1(s)$ tiene **un polo en s=-2 y ningún cero**; mientras que $H_2(s)$ tiene **un polo en s=-8 y ningún cero**;

a. **Expresar ambas** $H(s)$, y dibujar un esquema de la posición de sus polos
b. **Dibujar cualitativamente las respuestas** $X_f(s)$ para cada sistema dinámico, ante la misma entrada a $g(t) = 7 \cdot e^{-1 \cdot t}$
(Hacer diagrama de la posición de polos)
c. **¿Cuál** $X_f(s)$ tiende a cero en el menor tiempo?.

Ejercicio 10 de EDO con TL

Dada la siguiente EDO

$$\frac{dx(t)}{dt} + 4 \cdot x(t) = 3 \cdot g(t) \qquad con\ x(0) = 6$$

a. **Encontrar** la solución forzada para una entrada g(t)=(1/3) sin(3 t)
b. **Encontrar** la Función de Transferencia H(s)
c. **Expresar la** $h(t)$ cuya TL es H(s)
d. **Encontrar** $c(t) = h(t) \circ sen(3t)$ **convolución** entre $h(t)$ y 3 g(t)= sin(3 t)

Conocimientos previos requeridos

Es NECESARIO revisar conocimientos anteriores asociados a:

INTEGRALES IMPROPIAS	Limite y Regla de L'Hôpital Integración por partes
NÚMEROS COMPLEJOS	Forma cartesiana y forma polar Identidad de Euler Operaciones de suma/resta; multiplicación/división Potencias de complejos
FUNCIONES RACIONALES	Como cociente de polinomios de coeficientes reales Como forma factorizada de polinomios Como Fracciones Parciales Cálculo de residuos Factorización de polinomios

que en parte se presentan en los siguientes documentos adjuntos:

A-COMPLEJOS-2020.pdf; A-INTEGRALES IMPROPIAS-2020.pdf y A-FUNCIONES RACIONALES-2020.pdf.

Bibliografía

(Edwards y Penny, 2009) *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, C. H. Edwards, D. E. Penny, Pearson Educación, Prentice Hall, 2009. ISBN 978-970-26-1285-8.

(Lindner, 2001) *Introducción a las Señales y los Sistemas*, D. K. Lindner, Mc Graw Hill, 2002. ISBN 980-373-049-5.

(Nagle et al., 2001) *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, R. K. Nagle, E. B. Snaff, A. D. Snaider, Pearson Educación, 2001. ISBN 968-444-483-4.

(Zill y Cullen, 2001) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*, D. G. Zill, M. R. Cullen, Thomsom Learning, 2001. ISBN 970-686-133-5.

(Zill y Cullen, 2002) *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores de Frontera*, D.G.Zill, M.R. Cullen, Thomson Learning, 2002.