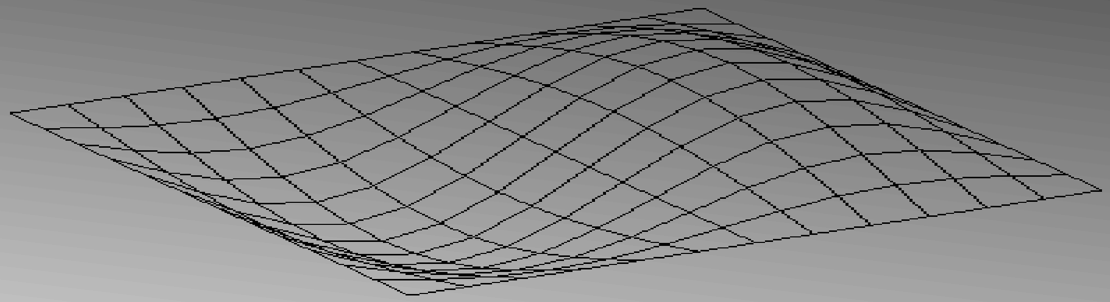
MATEMÁTICA AVANZADA

Guía de Desarrollo y Resolución de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico Nro. 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. APLICACIONES



GDRTP 1

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE
INGENIERÍA

Ejercicio Nro. 1.
Sea $L[y] = 5\ddot{y} + p(t)\dot{y} + 3q(t)y$, donde $p(t)$ y $q(t)$ son funciones continuas de t en un intervalo I. Demuestre la linealidad de dicho operador diferencial.

$$L[y] = \ddot{u} + p(t)\dot{u} + 3q(t)u$$

Sean $y(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, funciones cualesquiera 2 veces diferenciables en el intervalo I, con k=cte.

Entonces, entendiendo la igualdad como igualdad de funciones, podemos escribir:

- **A-** $L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ [1]
- **B-** $L[k\,y_1] = k\,L[y_1]$ [2] ($k = constante$)

A- En el intervalo I tendremos:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 \ddot{+} y_2) + p(t)(y_1 \dot{+} y_2) + 3q(t)(y_1 + y_2)$$

$$L[y_1 + y_2] = \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + p(t)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 3q(t)(y_1 + y_2)$$

Reagrupando obtenemos:

$$L[y_1 + y_2] = \ddot{y}_1 + p(t)\dot{y}_1 + 3q(t)y_1 + \ddot{y}_2 + p(t)\dot{y}_2 + 3q(t)y_2$$

$$\boxed{L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]} \quad [1]$$

B – De la misma manera

$$L[k\,y] = 5\left(k\ddot{y}\right) + p(t)(k\dot{y}) + 3q(t)ky = 5k\ddot{y} + kp(t)\dot{y} + 3kq(t)y$$

$$L[ky] = k[5\ddot{y} + p(t)\dot{y} + 3q(t)y] = k\,L[y]$$

$$\boxed{L[ky] = kL[y]} \quad [2]$$

Un operador que satisface (1) y (2) para cualquier constante k y funciones en su dominio, es un ***operador lineal***.

Las ec. (1) y (2) se pueden abreviar diciendo que *"L preserva combinaciones lineales (C.L.)"*

Ejercicio Nro. 2.
Demuestre que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{3x}$, es un conjunto fundamental de soluciones para la EDO $y'' - 4y' + 3y = 0$. Determine una solución general para dicha EDO y luego halle una solución que satisfaga las condiciones iniciales:
$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.5$
-Represente gráficamente las funciones $y_1(x), y_2(x), y(x)$ y un conjunto de soluciones que satisfagan $y(0) = 2$.
-Verifique sus soluciones, en forma gráfica y analítica con un software apropiado.

Verificamos en primer lugar que las funciones propuestas, satisfagan la EDO correspondiente.

$$y_1(x) = e^x, \quad y'_1(x) = e^x, \quad y''_1(x) = e^x$$

$e^x - 4e^x + 3e^x = 0$ Verifica ok..

$$y_2(x) = e^{3x}, \quad y'_2(x) = 3.e^{3x}, \quad y''_2(x) = 3.3.e^{3x} = 9e^{3x}$$

$9e^{3x} - 4.3e^{3x} + 3e^{3x} = 9e^{3x} - 12e^{3x} + 3e^{3x} = 0$ Verifica ok...

Siendo estas funciones soluciones de la EDO dada, verificamos que constituyan un conjunto fundamental de soluciones.

$W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para algún $t \in (-\infty, \infty)$

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{4x} \neq 0$$

Por lo tanto las funciones constituyen un conjunto fundamental de soluciones.
Una solución general a la EDO dada es:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x} \quad [3]$$

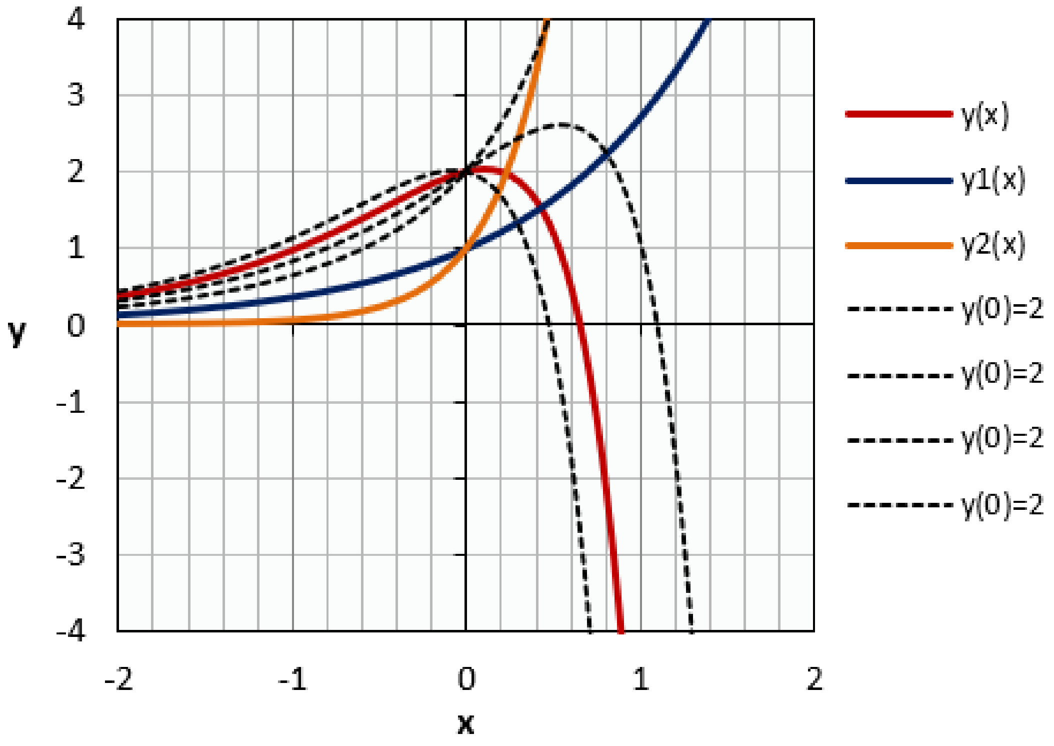
Imponiendo al problema las condiciones iniciales:

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0) = c_1 . 3 . e^0 + c_2 e^0 = 3c_1 + c_2 = 0.50$$

Es decir:

$$\boxed{y(x) = -\frac{3}{4} e^{3x} + \frac{11}{4} e^x} \quad [4]$$



Verificación con wxMaxima del resultado obtenido:

```
(%i4) ic2(ode2('diff(y,x,2)-4*'diff(y,x)+3*y=0,y,x), x=0, y=2, 'diff(y,x)=1/2);
```

(%o4) $y = \frac{11\,\%e^{x}}{4} - \frac{3\,\%e^{3\,x}}{4}$

Solución del problema con wx-Maxima. https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

Ejercicio Nro. 3.
Determine soluciones generales para las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.
a) $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0.$ b) $\ddot{y} + 4y = 0.$ c) $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0.$

Proponemos una solución de la forma: $y = e^{rt}$. Entonces:

$$r^2e^{rt} - re^{rt} - 2e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r^2 - r - 2) = 0$$

Las raíces $r_1 = 2,\ \ r_2 = -1$ definen las siguientes soluciones de la EDO:

$$y_1 = e^{2t}, \quad y_2 = e^{-t}$$

Por lo que una solución general de la EDO dada es: $\boxed{y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}}$ [5]

b) $\ddot{y} + 4y = 0.$

Proponemos una solución de la forma: $y = e^{rt}$. Entonces:

$$r^2e^{rt} + 4e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r^2 + 4) = 0$$

Las raíces $r_1 = 2i, \;\; r_2 = -2i$ definen las siguientes soluciones de la EDO:

$$y_1 = e^{2it}, \quad y_2 = e^{-2it}$$

Por lo que una solución general de la EDO dada es: $\boxed{y(t) = c_1e^{2it} + c_2e^{-2it}}$ [6]

Sabemos que:

$$e^{2it} = \cos 2t + i\, sen\, 2t$$

$$e^{-2it} = \cos(-2t) + i\, sen\,(-2t) = \cos 2t - i\, sen\, 2t$$

Con esto, la solución general se puede escribir en la forma:

$$\boxed{y(t) = A\cos(2t) + B\, sen\,(2t)}$$ [7]

c) $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0.$

Proponemos una solución de la forma: $y = e^{rt}$. Entonces:

$$r^2e^{rt} - 6re^{rt} + 9e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r^2 - 6r + 9) = 0$$

Las raíces $r_1 = 3$, $r_2 = 3$ reales y coincidentes, definen la siguiente solución de la EDO:
$y_1 = e^{3t}$

Entonces, se plantea además, la siguiente solución:

$$y_2 = te^{3t}$$

Estas funciones constituyen un conjunto fundamental de soluciones para la EDO dada, ya que son solución de la EDO y además son LI., por lo que una solución general de la EDO dada es:

$$\boxed{y(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}} \quad [8]$$

$$\ddot{y}-\dot{y}-2y=0$$

$$y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}$$

(%i1) ode2('diff(y,t,2)-'diff(y,t)-2*y=0, y, t);

(%o1) $y = \%k1\ \%e^{2t} + \%k2\ \%e^{-t}$

$$\ddot{y}+4y=0$$

$$y(t)=c_1e^{2it}+c_2e^{-2it}$$

(%i2) ode2('diff(y,t,2)+4*y=0, y, t);

(%o2) $y = \%k1 \sin(2t) + \%k2 \cos(2t)$

$$\ddot{y}-6\dot{y}+9y=0$$

$$y(t)=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$$

(%i3) ode2('diff(y,t,2)-6*'diff(y,t)+9*y=0, y, t);

(%o3) $y = (\%k2\ t + \%k1)\ \%e^{3t}$

Soluciones del problema halladas con wx-Maxima.
https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

Ejercicio Nro. 4.

Un sistema mecánico vibratorio traslacional sin amortiguamiento, formado por una masa m, un resorte de rigidez k, es desplazado hacia un punto distante 0.50m de la posición de equilibrio y en ese punto se le imprime una velocidad inicial de 4 m/s.

-Determine la ecuación de movimiento del sistema, junto con su amplitud, período y frecuencia natural.

-Determine el tiempo para el cual el sistema vuelve a pasar por la posición de equilibrio.

-Estudie analítica y gráficamente el efecto de variaciones de las condiciones iniciales en la respuesta del sistema y presente sus conclusiones.

-Estudie analítica y gráficamente el efecto de variaciones de la constante de rigidez en la respuesta del sistema y presente sus conclusiones.

-Verifique sus soluciones, en forma gráfica y analítica con un software apropiado.

<u>Datos</u>: m=20kg; k= 35 N/m; $F(t)$=0

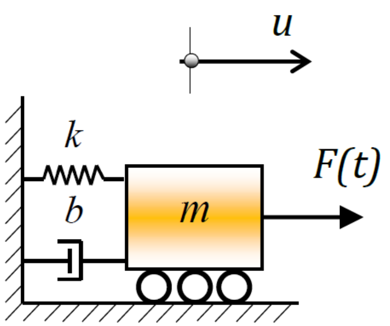
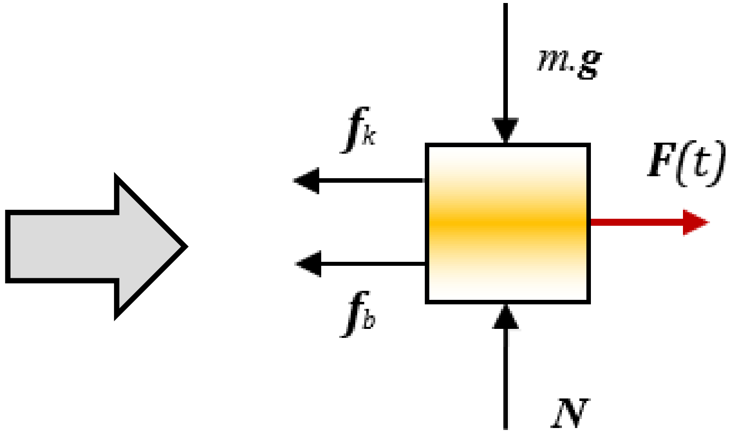


Figura 1



DCL. Diagrama de Cuerpo Libre

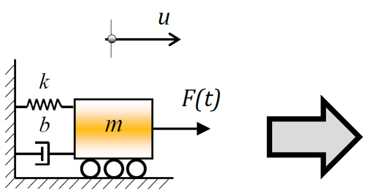
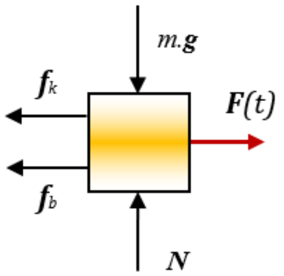


Figura 1



DCL. Diagrama de Cuerpo Libre

Aplicando la segunda ley de Newton, $\sum F_i = ma$, obtenemos:

$$F(t) - f_b - f_k = m\ddot{u}$$

$$f_k = ku$$

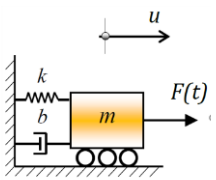
$$f_b = b\dot{u}$$

Reordenando y reemplazando se obtiene:

$$\boxed{m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = F(t)} \quad [9]$$

Los sistemas vibratorios lineales de un grado de libertad se rigen por una EDO lineal de segundo orden con un término de inercia, un término de rigidez, un término de amortiguamiento y un término relacionado a las fuerzas externas actuantes sobre el mismo.

De acuerdo a lo indicado, la ecuación de movimiento del sistema descripto (sistema en movimiento libre no amortiguado), está dada por:



$$m\ddot{u} + +b\dot{u} + k\,u = 0$$

Dividiendo por m obtenemos: $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ con $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Proponemos la función $u = e^{rt}$ y reemplazamos en la EDO, con lo cual obtenemos:

$$r^2 e^{rt} m + r e^{rt} b + e^{rt} k = e^{rt}(mr^2 + br + k) = 0$$

$$mr^2 + br + k = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$b^2 - 4mk = 0$$

$$b^2 - 4mk > 0$$

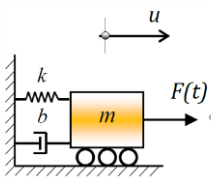
$$b^2 - 4mk < 0$$

$$b = 0$$

Las raíces son complejas conjugadas de la forma $r = \alpha \pm i\beta$.

Por lo tanto dos soluciónes de la EDO son $u_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t$; $u_2 = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$ y una solución general es:

$$\boxed{u(t) = c_1 \cos\omega t + c_2\, sen\, \omega t} \quad [10]$$



El movimiento es periódico con período $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ y frecuencia natural $\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{35}{20}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1.3228$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.2105\,\frac{1}{s} = 1.80\ \mathrm{Hz}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 4.75s$$

La solución general resulta entonces:

$$y(t) = c_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + c_2\, sen\ \frac{\sqrt{7}}{2}t \qquad [11]$$

Para las condiciones iniciales dadas tendremos:

$$u(0) = c_1 = 0.50$$

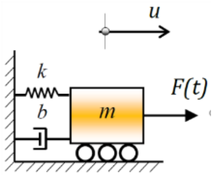
$$\dot{u}(0) = c_2\frac{\sqrt{7}}{2} = 4\,; \qquad c_2 = \frac{8}{7}\sqrt{7}$$

Con lo cual:

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{8}{7}\sqrt{7}\ sen\ \left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \qquad [12]$$

La solución se puede expresar como:

$$\boxed{u(t) = A\cos\omega t\, sen\varphi + A\, sen\,\omega t\cos\varphi = A\, sen\,(\omega t + \varphi)} \qquad [13]$$



Siendo : $c_1 = A\, sen\varphi$; $c_2 = A\cos\varphi$; $\frac{c_1}{c_2} = \tan\varphi$

La constante A es la amplitud del movimiento y φ es el ángulo de fase.

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 3.064m$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \tan\varphi = 0.1653 \qquad \varphi = 9.38° = 0.1639rad$$

Igualando a 0 la ecuación anterior obtenemos:

$$sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t + 0.1639\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2}t + 0.1639 = n\pi = \pi$$

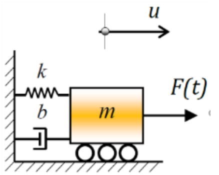
Es decir para t=2.251 seg, la masa pasa nuevamente por el punto de equilibrio.

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

$$u(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 sen(\beta t)$$

(%i1) ode2('diff(y,t,2)+(35/20)*y=0, y, t);

(%o1) $y = \%k1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}\, t}{2}\right) + \%k2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}\, t}{2}\right)$



(%i4) ic2(ode2('diff(y,x,2)+(35/20)*y=0,y,x), x=0, y=0.50, 'diff(y,x)=4);

rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5

(%o4) $y = \frac{8 \sin\left(\frac{\sqrt{7}\, x}{2}\right)}{\sqrt{7}} + \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{7}\, x}{2}\right)}{2}$

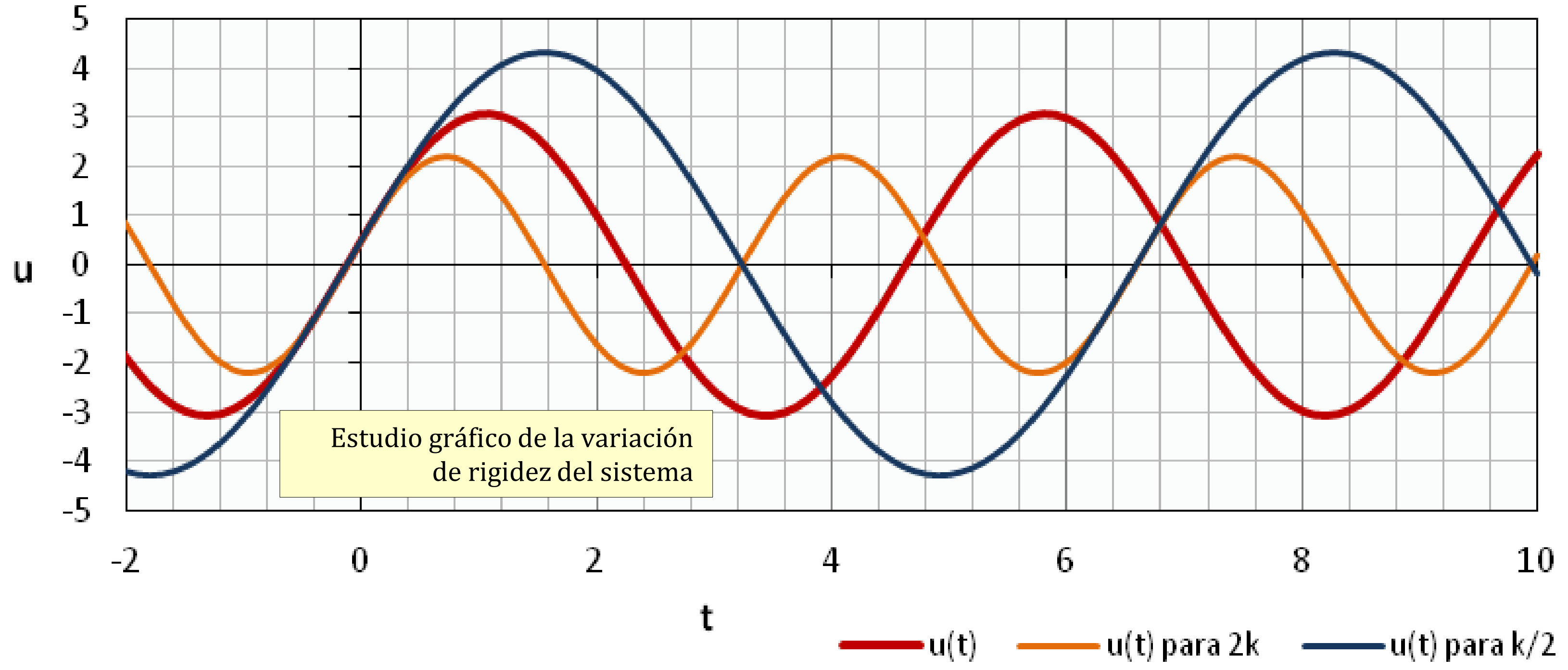
$$u(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{8}{\sqrt{7}} sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

(%i5) ic2(ode2('diff(y,x,2)+(70/20)*y=0,y,x), x=0, y=1/2, 'diff(y,x)=4);

(%o5) $y = \frac{4\sqrt{14} \sin\left(\frac{\sqrt{14}\, x}{2}\right)}{7} + \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{14}\, x}{2}\right)}{2}$

(%i6) ic2(ode2('diff(y,x,2)+(35/40)*y=0,y,x), x=0, y=1/2, 'diff(y,x)=4);

(%o6) $y = \frac{2^{7/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}\, x}{2^{3/2}}\right)}{\sqrt{7}} + \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{7}\, x}{2^{3/2}}\right)}{2}$



Estudio gráfico de la variación de rigidez del sistema

Ejercicio Nro. 5.

Un sistema vibratorio traslacional con amortiguamiento está descripto por:

$$\ddot{u} + b\dot{u} + 20u = 0 \ ; \qquad u(0) = 2 \ ; \ \ \dot{u}(0) = 0$$

-Determine la ecuación de movimiento del sistema.

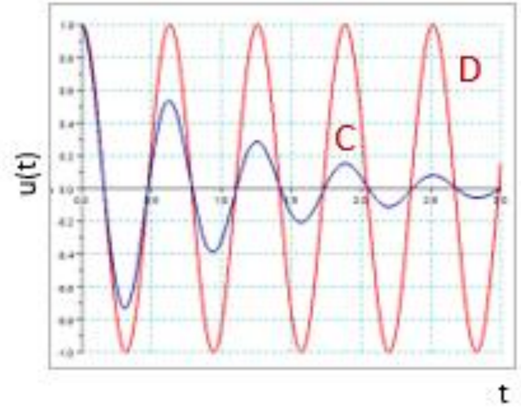
-Estudie analítica y gráficamente el efecto de variaciones de la constante de amortiguamiento en la respuesta del sistema y presente sus conclusiones.

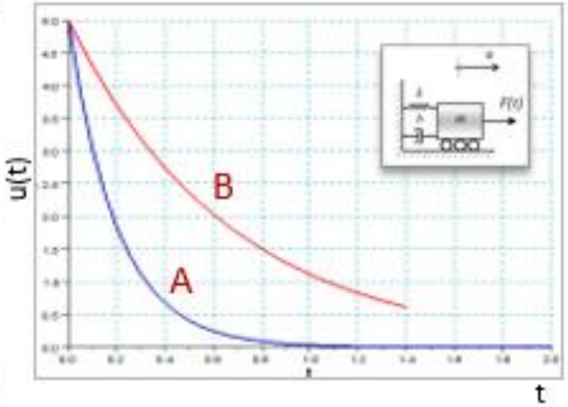
-Verifique sus soluciones, en forma gráfica y analítica con un software apropiado.

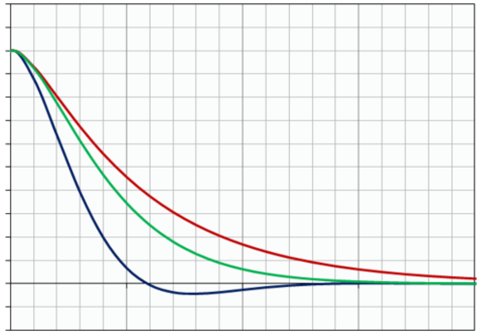
De acuerdo a lo indicado, la ecuación de movimiento del sistema descripto (sistema en movimiento libre no amortiguado), está dada por:

$$m\ddot{u} + +b\dot{u} + k\,u = 0$$

$b^2 - 4mk = 0$	A - Movimiento críticamente amortiguado
$b^2 - 4mk > 0$	B - Movimiento sobreamortiguado
$b^2 - 4mk < 0$	C - Movimiento subamortiguado
$b = 0$	D - Movimiento NO amortiguado







Ejercicio Nro. 6

Un sistema vibratorio traslacional con amortiguamiento posee una constante de rigidez k=49 N/m, una masa m=10 kg y una constante de amortiguamiento b=3 N s/m. En el instante t=0 se aplica una fuerza externa F(t)=20 cos(4t) N al sistema.

Determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento.

Determine una solución general de la ecuación homogénea correspondiente, es decir la respuesta transitoria de la solución.

Determine una solución particular, es decir la respuesta en estado estacionario.

Estudie analítica y gráficamente el efecto de variaciones de las condiciones iniciales en la respuesta del sistema y presente sus conclusiones.

Verifique sus soluciones, en forma gráfica y analítica con un software apropiado.

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = F(t)$$

$$\boxed{10\ddot{u} + 3\dot{u} + 49u = 20\cos(4t)} \quad [14]$$

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = 0$$

$$\boxed{10\ddot{u} + 3\dot{u} + 49u = 0} \quad [15]$$

Ecuación característica resulta:

$$10r^2 + 3r + 49 = 0$$

Las raíces de esta ecuación resultan:

$$r_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 1960}}{20} = -\frac{3}{20} \pm 2.21i$$

Raíces complejas conjugadas. Corresponde al caso de movimiento oscilatorio subamortiguado con $\alpha = -\frac{3}{20}$ y $\beta = 2.21$

Escribimos la solución de la forma:

$$\boxed{u_h(t) = e^{-\frac{3}{20}t}(c_1 \cos 2.21t + c_2\, sen\, 2.21t)} \quad [16]$$

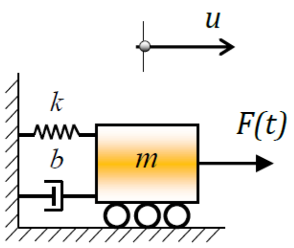


Figura 1

$$u_p(t) = A\cos(4t) + Bsen(4t)$$

$$\dot{u}_p(t) = 4A[-\text{sen}(4t)] + 4Bcos(4t)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -16Acos(4t) - 16Bsen(4t)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$10[-16Acos(4t) - 16Bsen(4t)] + 3[-4A\,\text{sen}(4t) + 4Bcos(4t)] \\ + 49[A\cos(4t) + Bsen(4t)] = 20\cos(4t)$$

$$\begin{cases} -111A + 12B = 20 \\ -12A - 111B = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -111 & 12 \\ -12 & -111 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A=-0.1781; B=0.019

$$\boxed{u_p(t) = -0.1781\cos(4t) + 0.019sen(4t)} \quad [17]$$

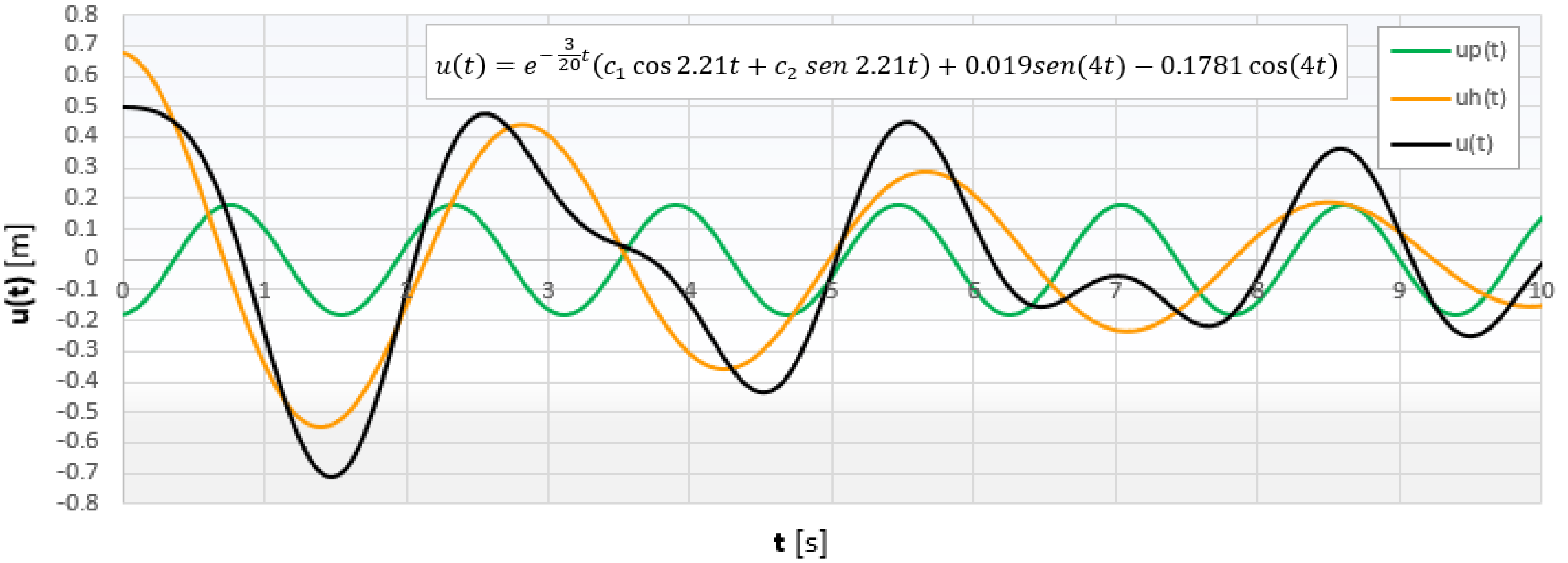
$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

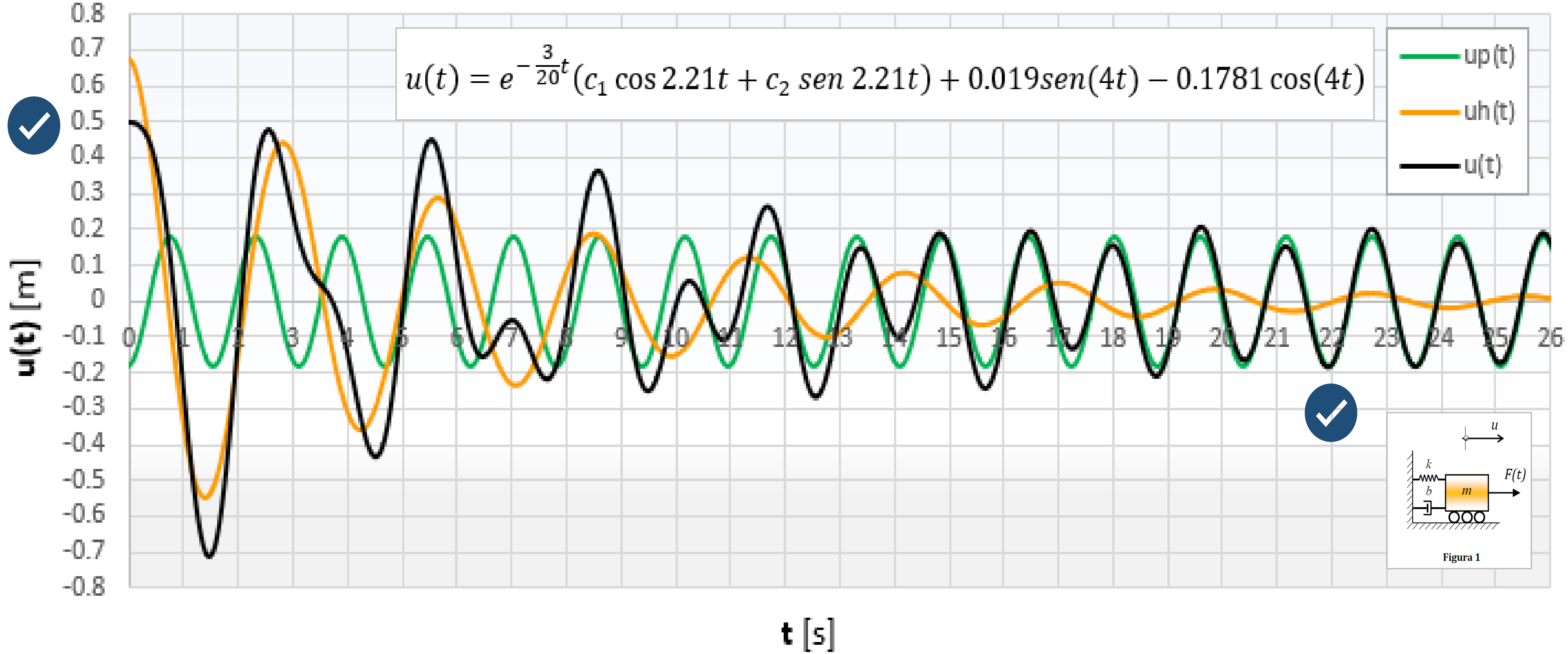
Ejemplo: Condiciones iniciales

$$u(0) = 0.50m$$
$$\dot{u}(0) = 0m/s$$

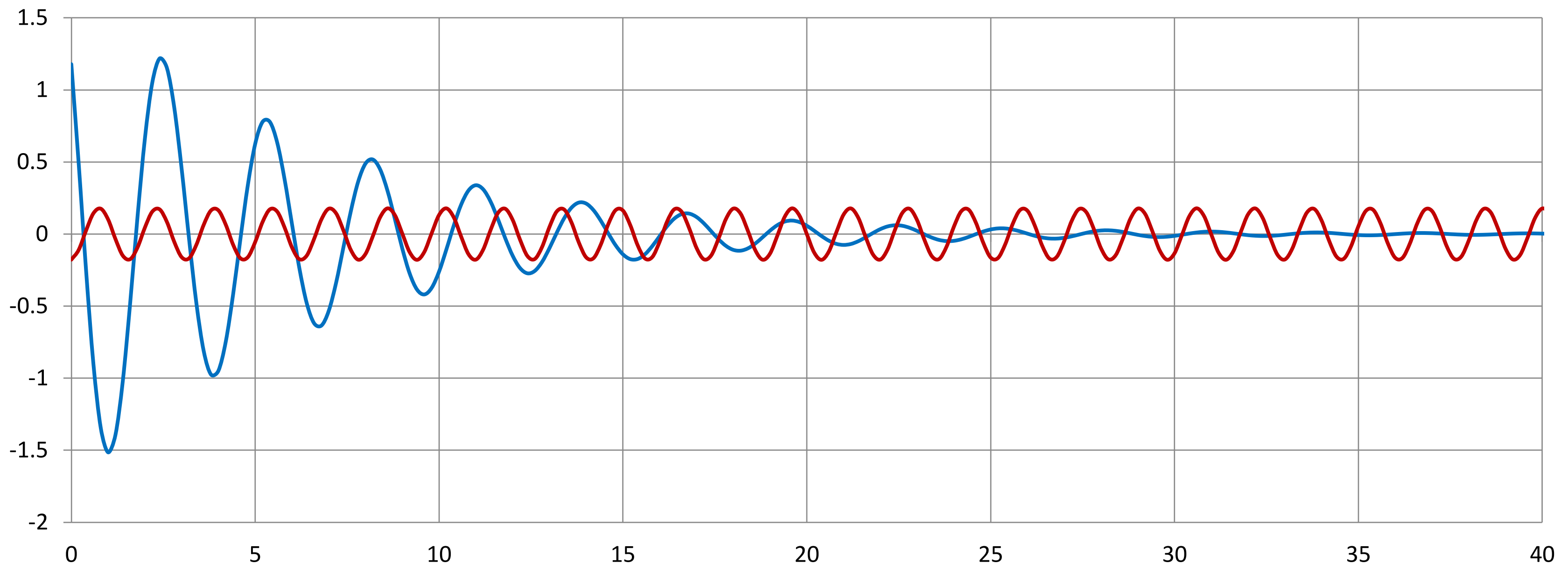
$$c_1 = 0.6781$$
$$c_2 = 0.0112$$

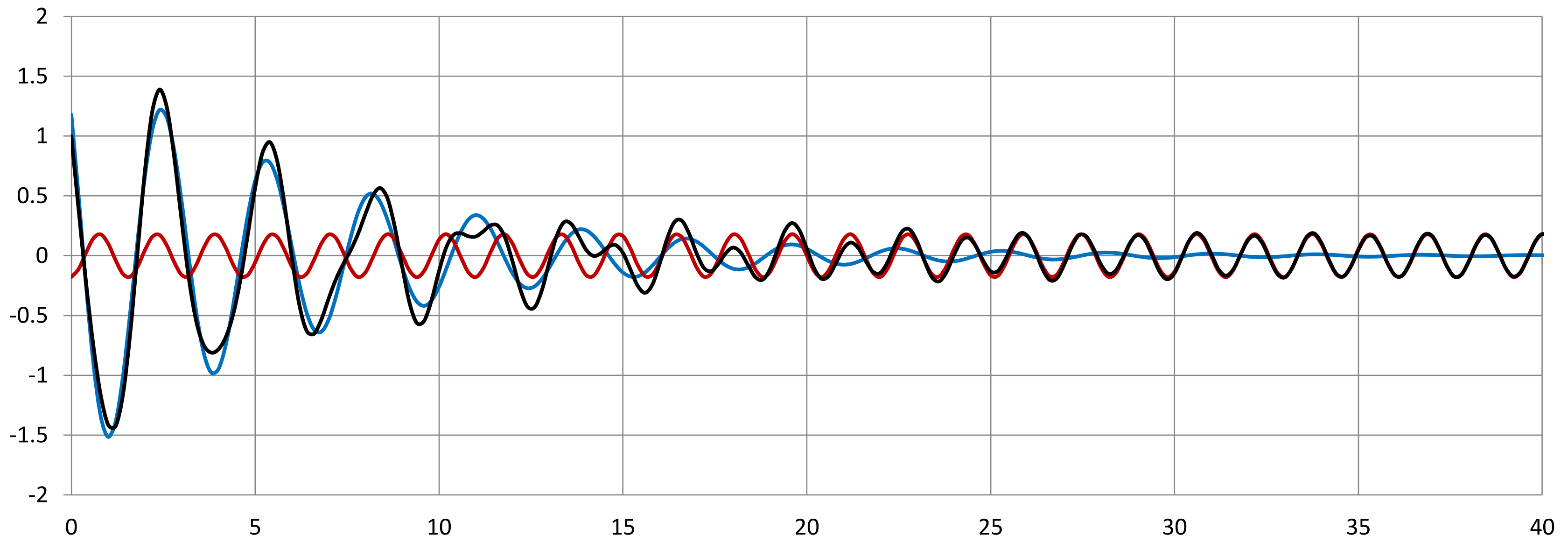
$$\boxed{u(t) = e^{-\frac{3}{20}t}[c_1 cos2.21t + c_2 sen2.21t] + 0.01925sen4t - 0.1781cos4t}$$ [18]




$u(t) = e^{-\frac{3}{20}t}(c_1 \cos 2.21t + c_2\, sen\, 2.21t) + 0.019 sen(4t) - 0.1781 \cos(4t)$
up(t)
uh(t)
u(t)
u(t) [m]
t [s]
u
k
b
m
F(t)
Figura 1

Respuesta del sistema con diferentes condiciones iniciales





FIN.
Gracias.!