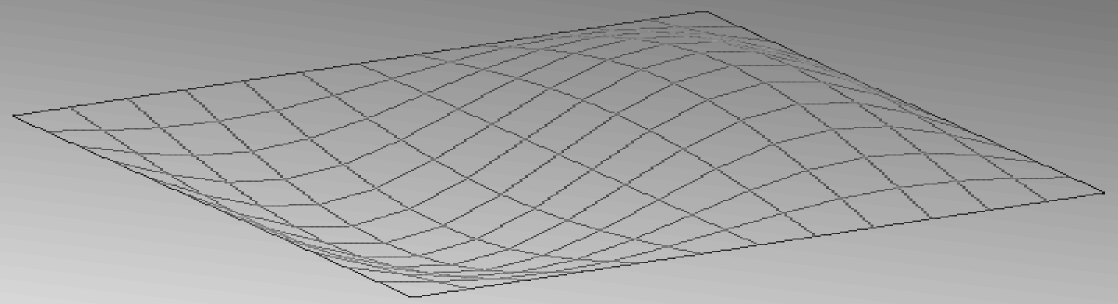
GDRTP2

MATEMÁTICA AVANZADA

Guía de Desarrollo y Resolución de Trabajos Prácticos

Trabajo Práctico Nro. 2

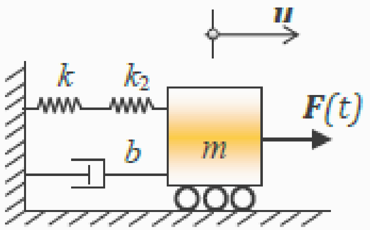
MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS FÍSICOS. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. APLICACIONES

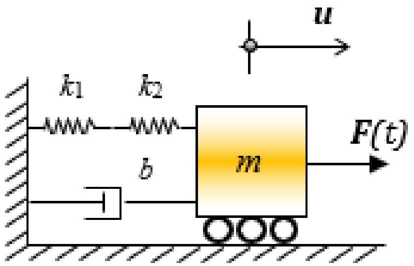


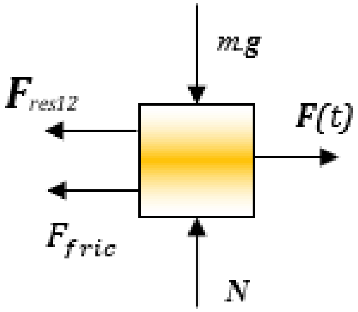
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Ejercicio Nro. 1. Escriba un modelo matemático para el siguiente sistema mecánico vibratorio traslacional amortiguado, con resortes lineales combinados en serie.







Aplicando la segunda ley de Newton, $\sum F_i = ma$, obtenemos:

$$F(t) - F_{fric} - F_{res12} = m\ddot{u}$$

$$F_{res12} = k_{es}u$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$\frac{F_{res12}}{k_{es}} = u = u_1 + u_2 = \frac{F_{res12}}{k_1} + \frac{F_{res12}}{k_2} = F_{res12}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

Es decir:

$$\frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

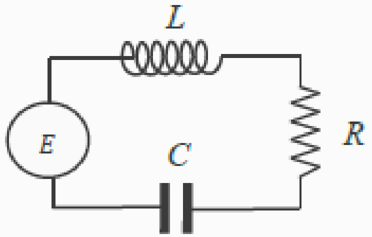
Luego:

$$k_{es} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$$

Entonces, el modelo matemático buscado resulta:

$$\boxed{m\ddot{u} + b\dot{u} + k_{es}u = F(t)} \qquad [1]$$

Ejercicio Nro. 2. Hallar un modelo matemático para el siguiente circuito eléctrico RLC.

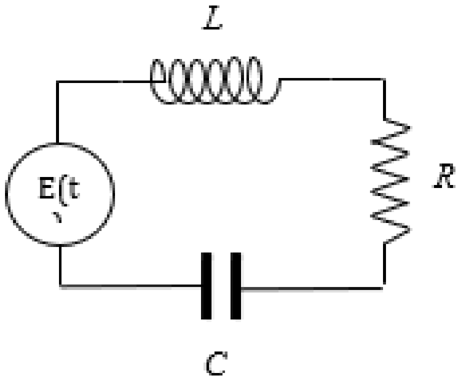


El circuito cerrado de la figura está compuesto por una fuente, un inductor, un resistor y un capacitor conectados en serie.

La segunda ley de Kirchhoff expresa que el voltaje impreso $E(t)$ en un circuito cerrado, debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en los diversos elementos del mismo.

Aplicando la ley mencionada obtenemos:

$$L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}q = E(t)$$



$$L\,\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\,q = E(t)$$

$$\boxed{L\,\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = E(t)} \qquad [2]$$

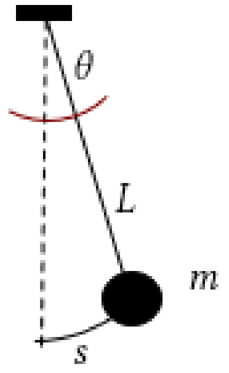
R	Resistencia	[ohms]
L	Inductancia	[Henries]
E	Voltaje	[volts]
C	Capacitancia	[faradios]

Ejercicio Nro. 3. Encuentre el modelo matemático de un péndulo simple, de masa m, a partir de la utilización de consideraciones energéticas. Represente gráficamente el problema planteado.

- Masa m
- Varilla sin masa de longitud L

Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica al movimiento del péndulo:

$$E_c + E_p = cte$$



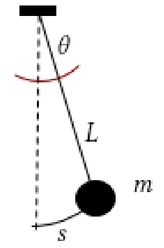
$$s = L\theta$$

$$V = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt}$$ Velocidad de desplazamiento de la masa m sobre la trayectoria s

$$E_c = T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$ Energía cinética de la masa m

$$E_P = V = m\,g\,h$$

Energía Potencial de la masa m



$$h = L - L\,cos\theta = L(1 - cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m\,g\,L\,(1 - cos\theta) = C$$

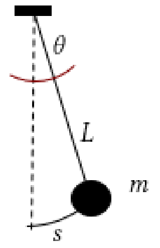
Derivando respecto a t:

$$L\frac{d^2\theta}{dt} + g\,sen\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{g}{L}\,sen\theta = 0}$$

[3] EDO de segundo orden homogénea

Nota: Los sistemas vibratorios lineales de un grado de libertad, se rigen por una EDO lineal de segundo orden con un término de inercia, un término de rigidez, un término de amortiguamiento y un término relacionado a las fuerzas o momentos exteriores actuantes.



Con frecuencia es posible encontrar problemas para los cuales la aplicación directa de la segunda Ley de Newton es más dificultosa. En estos casos la formulación de las ecuaciones diferenciales del sistema a partir del planteo de principios de conservación de la energía es más adecuado.

Teniendo en cuenta que para pequeños ángulos $sen\theta \cong \theta$ y presentando además la resistencia del medio circundante por medio de $c\dot{\theta}$, podemos escribir:

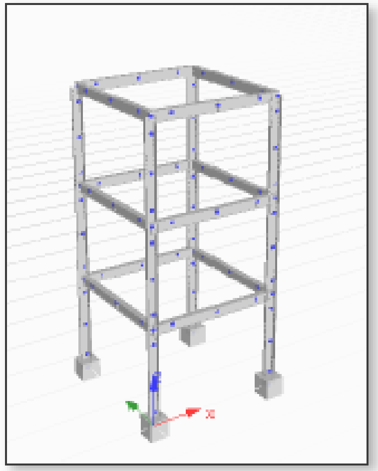
$$\boxed{\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = 0} \quad [4]$$

EDO de segundo orden homogénea

Ejercicio Nro. 4. Dado el pórtico espacial de acero indicado en la figura, simplifique el problema real adoptando un modelo equivalente con 3 grados de libertad.
-Formule un modelo matemático apropiado que describa el problema planteado.

A partir de los siguientes datos:

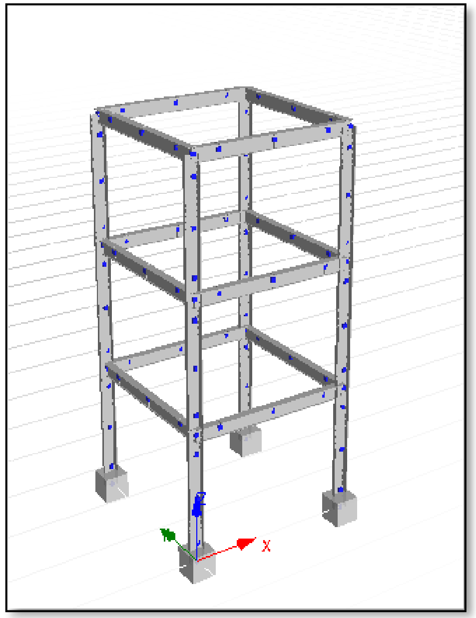
h_1=4m	l_x=3.50m	Columnas IPB 300
m_1=10000 kg	F_1=50 kN	
h_2=3.50m	l_y=4.00m	Vigas IPN260
m_2=10000 kg	F_2=40 kN	
h_3=3.50m		
m_3=10000 kg	F_3=30 kN	

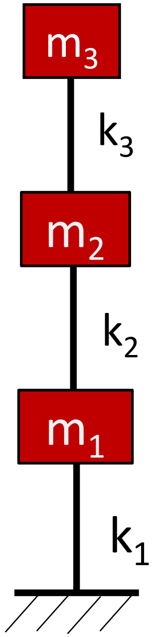


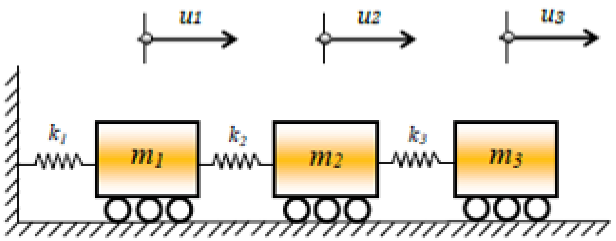
-Determine los desplazamientos de cada nivel para las acciones estáticas indicadas en la tabla de datos.
-Determine los parámetros dinámicos de la estructura utilizando el modelo simplificado equivalente.

-Determine analítica y gráficamente la respuesta de la estructura en términos de los desplazamientos horizontales de los niveles de la misma.

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

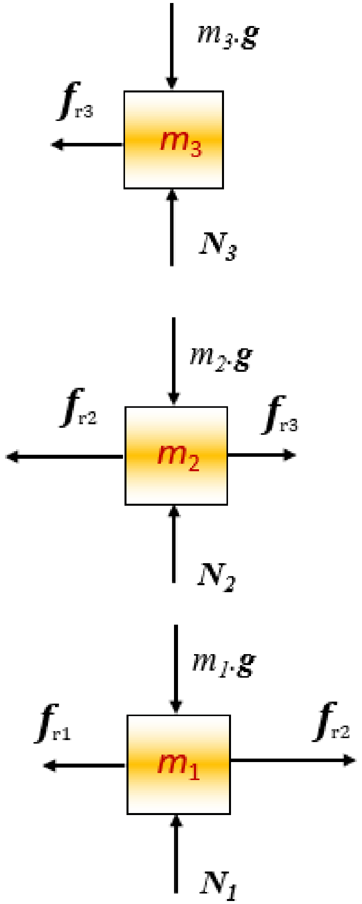






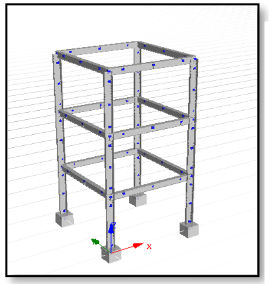
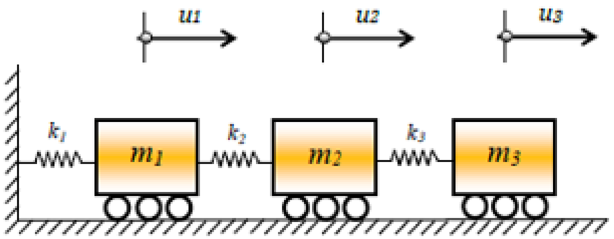
Modelos equivalentes. 3GDL traslacionales.
1GDL traslacional por nivel

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE POR NIVEL
2da LEY DE NEWTON en cada nivel



$$\boxed{\boldsymbol{M\ddot{U} + KU = 0}}$$ [4]

Modelo MATEMÁTICO
Sistema EDO 2do orden homogéneo

$$\boldsymbol{M\ddot{U}} + \boldsymbol{KU} = \boldsymbol{0}$$ [4]

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modelo MATEMÁTICO
Sistema EDO 2do orden homogéneo.
Matriz de Masas **M**
Matriz de rigidez **K**

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0 \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} \qquad \lambda = \omega^2$$

Rigidez de una columna biempotrada:

$$k_{ic} = \frac{12EI}{h_i^3}$$

Para las 4 columnas de un nivel i tendremos:

$$k_i = \frac{48EI}{h_i^3}$$

E_{acero}=200000MPa (Módulo de elasticidad longitudinal del acero)

I_{ipb300}=25170cm^4 (Momento de inercia perfil de acero IPB300)

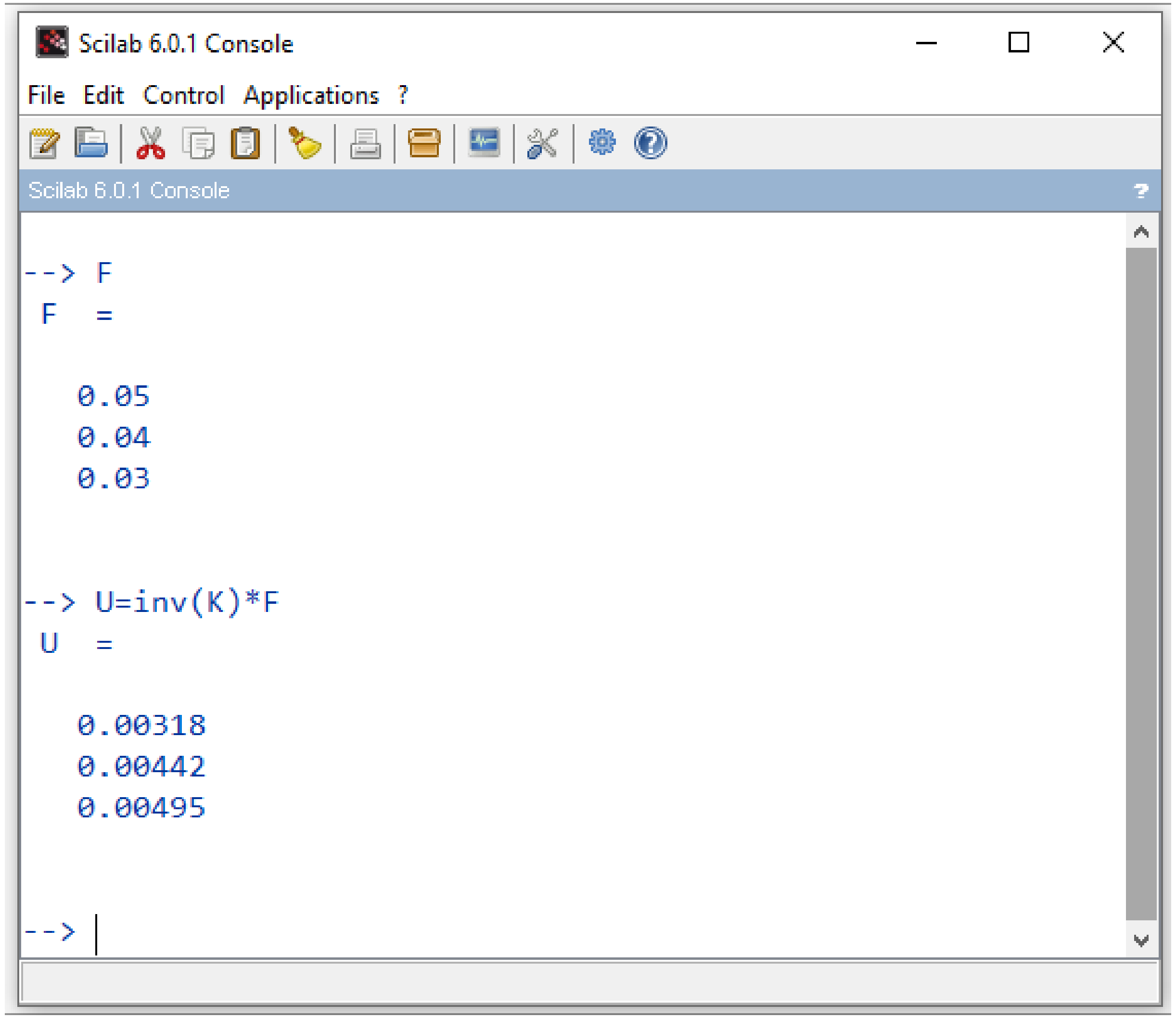
Nivel	hi[m]	E[MPa]	I[m4]	ki[MN/m]	mi[kg]
1	4.00	200000	0.0002517	37.76	10000.0
2	3.50	200000	0.0002517	56.36	10000.0
3	3.50	200000	0.0002517	56.36	10000.0

Las matrices de masa y rigidez, serán entonces:

```
Scilab 6.0.1 Console

--> M
 M  =

   10000.   0.       0.
   0.       10000.   0.
   0.       0.       10000.


--> K
 K  =

   94.12  -56.36    0.
  -56.36   112.72  -56.36
   0.     -56.36    56.36


-->
```

A los efectos de encontrar los desplazamientos de cada nivel es necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$$



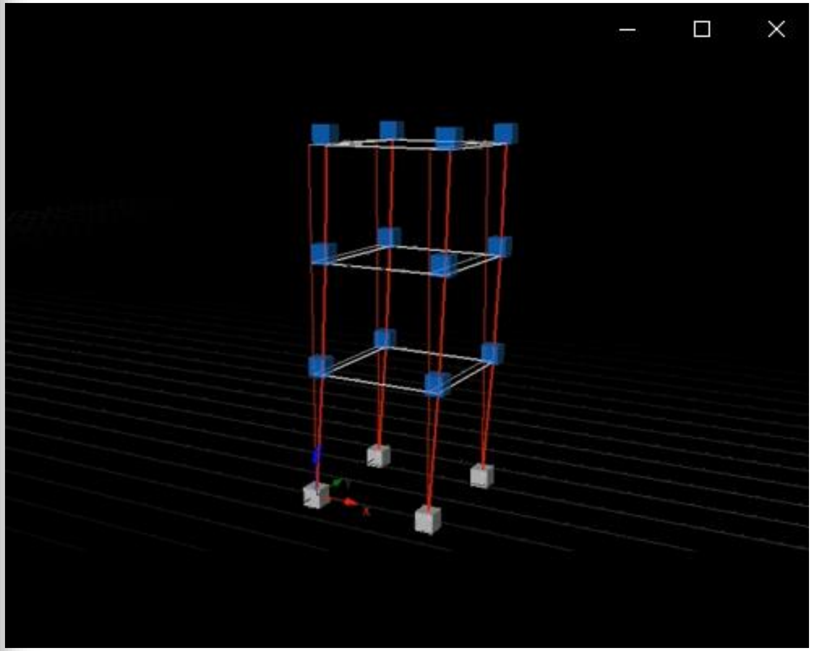
A partir de la evaluación de la Matriz $\mathbf{B}=\mathbf{M}^{-1}*\mathbf{K}$ es posible encontrar los valores propios y vectores propios del problema dinámico.

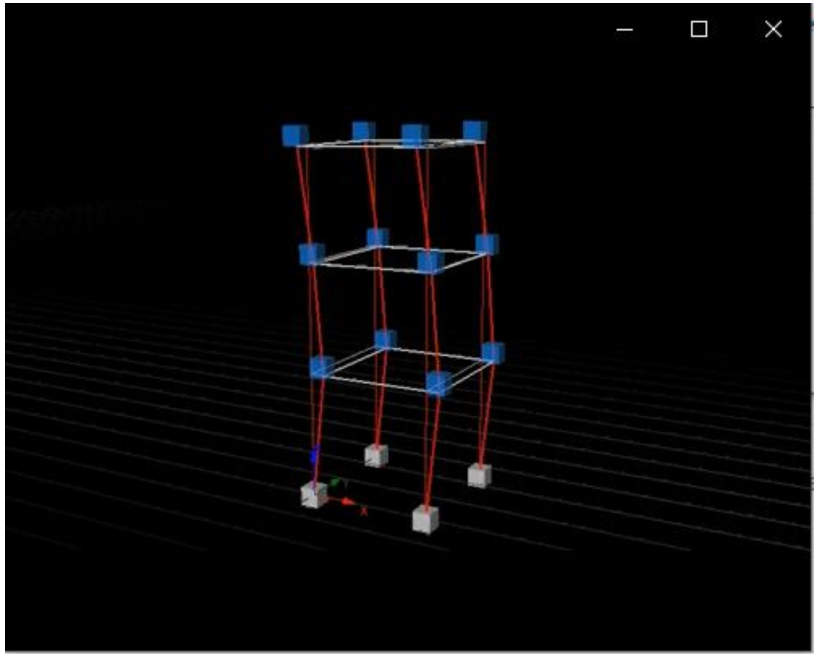
```
Scilab 6.0.1 Console
File  Edit  Control  Applications  ?
Scilab 6.0.1 Console

Frecuencias angulares :

   0.02961   0.08787   0.13313

Vectores Propios:

  -0.39194   0.75643  -0.52364
  -0.59357   0.22695   0.77212
  -0.70289  -0.61344  -0.36005

Constantes impares Solución General:

  -0.12182
   0.06313
  -0.0086

-->
```

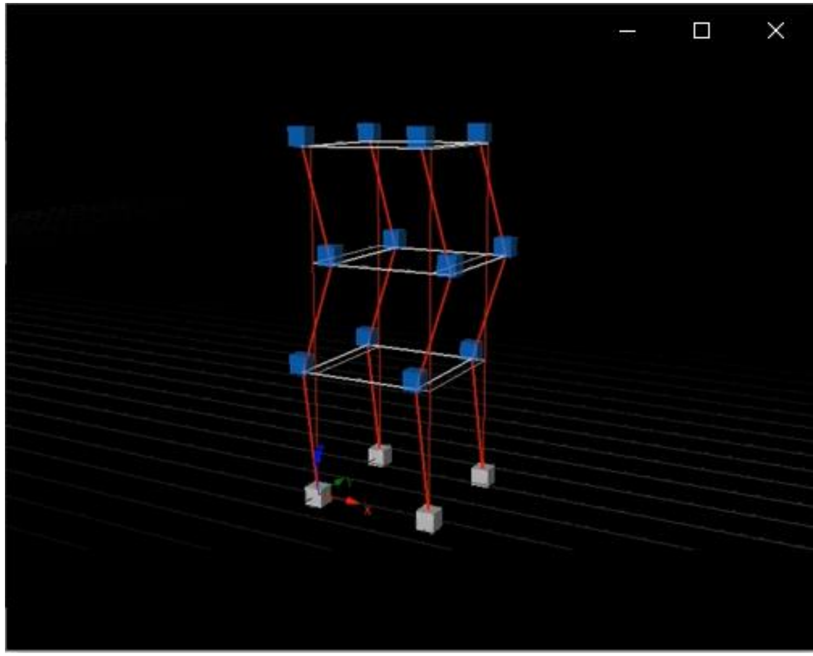
En este caso las constantes C1, C3 y C5 fueron determinadas para un vector de desplazamientos y velocidades iniciales:

```
Scilab 6.0.1 Console
File  Edit  Control  Applications  ?
Scilab 6.0.1 Console

--> U0
 U0  =

   0.1
   0.08
   0.05


--> V0
 V0  =

   0.
   0.
   0.


-->
```

El sistema dinámico oscilando en sus tres modos de vibración fundamentales pueden ser observados en las siguientes figuras, las cuales son capturas de los videos que pueden observarse en Aula Abierta Matemática Avanzada.







FIN.
Gracias.!