Matemática Avanzada Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Cuyo	EVALUACIÓN PARCIAL Nro. 1 - 2018 Nombre y Apellido: Guatelli, María Sol Legajo: 12164	87

47
50

Ejercicio 1.
Un sistema dinámico en tiempo discreto está representado por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+2\frac{du(t)}{dt}+10\cdot u(t)=g(t)$$

En t=0 se conoce que $\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=0}=v_0\cdot=1 \qquad u(0)=u_0=1$

a) Encuentre U(s) usando *Transformada de Laplace*, distinguiendo la solución natural y la solución forzada.

b) Determine la respuesta natural $u_n(t)$, usando propiedades de *Transformada de Laplace*, o bien utilizando los residuos expresados en forma polar (sin calcularlos).

c) Determine la respuesta forzada $u_f(t)$ para $g(t)=2\cdot e^{-3\cdot t}$.

d) Exprese la *función de transferencia* de H(s)

e) Indique la posición de los *polos* de H(s) en el plano complejo, y dibuje cualitativamente la respuesta $h(t)$.

f) Indique las dos funciones cuya convolución entre ambas genera la solución forzada del inciso c).

f(t)	F(s)	**f(t)**	F(s)	**f(t)**	F(s)
b=b.u(t)	b/s	**sen(bt)**	$b/(s^2+b^2)$	**cos(bt)**	$s/(s^2+b^2)$
b.t	b/s^2	**senh(bt)**	$b/(s^2-b^2)$	**cosh(bt)**	$s/(s^2-b^2)$
$e^{-a.t}$ δ (t-a)	1/(s+a) $e^{-a.s}$	$e^{-a.t}$ **f(t)**	F(s-a)	*df(t)/dt*	s F(s)- *f(0)*
$\int_0^t h(t-\tau)\cdot g(\tau)\cdot d\tau$	H(s).G(s)	**F(t-a)**	$e^{-a.s}$ F(s)	$d^2f(t)/dt^2$	s^2 F(s)- s*f(0)*- d*f(0)/dt*

us(t) es la función escalón unitario. δ(t-a), es la función Delta de Dirac en t=a

---

40
50

Ejercicio 2.

a) Diseñe el modelo matemático que gobierna el movimiento de un sistema acoplado masa resorte no amortiguado, como indica la *Figura*, para valores genéricos de los parámetros físicos del problema.

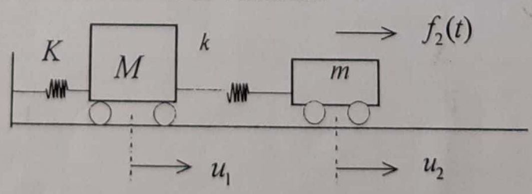
b) Determine las frecuencias y los modos naturales de vibración del sistema, expresando en términos de la relación *k/m*, para el caso en el que $M=8m$; $K=8k$ $(\omega_1, \vec{v}_1)$ $(\omega_2, \vec{v}_2)$

c) Compare las frecuencias naturales obtenidas en el inciso b), con las frecuencias correspondientes a los sistemas desacoplados de un grado de libertad (M, K, w_0) y (m, k, w_a) respectivamente. Elabore conclusiones.

d) A partir de las expresiones obtenidas en el inciso b), determine una solución particular para la relación *k/m*=4 N/(m kg) y las siguientes condiciones iniciales:

$$\underline{U}(0)=\begin{bmatrix}0.15\\0.30\end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\underline{U}}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

e) Grafique las formas asociadas a ambos modos de vibración.



M. Sol Guatelli
12164

HOJA: 1

1) $\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt} + 10\,u(t) = g(t)$ • $v_0 = 1$

a) $u_0 = 1$

$$-v_0 + s[sU(s) - u_0] + 2(sU(s) - u_0) + 10U(s) = G(s)$$

$$-v_0 + s^2U(s) - su_0 + 2sU(s) - 2u_0 + 10U(s) = G(s)$$

$$U(s)(s^2 + 2s + 10) - v_0 - u_0(s+2) = G(s)$$

$$U(s)(s^2 + 2s + 10) = G(s) + v_0 + u_0(s+2)$$

$$U(s) = \frac{G(s)}{s^2 + 2s + 10} + \frac{v_0 + u_0(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

$$U(s) = \underbrace{\frac{G(s)}{s^2 + 2s + 10}}_{\text{solución forzada}} + \underbrace{\frac{s+3}{s^2 + 2s + 10}}_{\text{solución natural}}$$

b)

$$U_n(s) = \frac{s+3}{s^2 + 2s + 10}$$

$$= \frac{s+3}{(s+1)^2 + 9}$$

$$= \frac{s}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

$$= \frac{s+1-1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + 3^2} \cdot \frac{3}{3}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} - \frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

$$u_n(t) = e^{-t}\cdot\cos(3t) + e^{-t}\cdot\sin(3t) - \frac{1}{3}e^{-t}\cdot\sin(3t)$$

$$u_n(t) = e^{-t}\cos(3t) + e^{-t}\sin(3t)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

NOTA:

$$u_n(t) = e^{-t}\cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-t}\sin(3t)$$

c) $g(t) = 2 \cdot e^{-3t}$ $\quad G(s) = 2 \cdot \mathcal{L}[e^{-3t}] = 2 \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{2}{s+3}$

$$U_F(s) = \frac{G(s)}{s^2+2s+10} = \frac{2}{(s+3)(s^2+2s+10)} = \frac{2}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2+2s+10}$$

$$U_F(s) = \frac{2}{(s+3)(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{s-p_1} + \frac{R_3}{s-p_2}$$

$p_1 = -1+3j$
$p_2 = -1-3j$

$$\lim_{p \to -3} \left\{ \cancel{(s+3)} \cdot \frac{2}{\cancel{(s+3)}(s-p_1)(s-p_2)} - \cancel{(s+3)}\frac{R_1}{\cancel{s+3}} - \cancel{(s+3)}\frac{R_2}{s-p_1} - \cancel{(s+3)}\frac{R_3}{s-p_2} \right\} = 0$$

$$R_1 = \frac{2}{(-3-p_1)(-3-p_2)} = \frac{2}{13}$$

$$R_2 = \lim_{s \to p_1} \frac{2}{(s+3)(s-p_2)} - (s-p_1)\frac{R_1}{(s+3)} - \frac{R_3(s-p_1)}{(s-p_2)} \}$$

$$R_2 = \frac{2}{(p_1+3)(p_1-p_2)} = -\frac{1}{13} - \frac{2}{39}j = \frac{\sqrt{13}}{39}e^{-j2{,}55\,rad}$$

$$R_3 = \lim_{s \to p_2} \frac{2}{(s+3)(s-p_1)} - (s-p_2)\frac{R_1}{s+3} - \cancel{(s-p_2)}\frac{R_2}{s-p_1} \Big\} = \frac{2}{(p_2+3)(p_2-p_1)}$$

NOTA:

M. Sol Guatelli.
12164

HOJA: 2

$$B_3 = -\frac{1}{13} + \frac{2}{39}j = \frac{\sqrt{13}}{39} e^{j\,2{,}55\,rad}$$

$$\rho e^{j\theta} = \rho \cos\theta + \rho\, i \,sen\,\theta$$

$$U_F(s) = R_1 \cdot \frac{1}{s+3} + B_2 \cdot \frac{1}{s-p_1} + B_3 \cdot \frac{1}{s-p_2}$$

$$= \frac{2}{13} e^{-3t} + \frac{\sqrt{13}}{39}\left(e^{-j\,2{,}55\,rad} \cdot e^{(-1+3j)t} + e^{+j\,2{,}55\,rad}\, e^{(-1-3j)t}\right)$$

$$= \frac{2}{13} e^{-3t} + \frac{\sqrt{13}}{39} e^{-t}\left(e^{-j\,2{,}55} \cdot e^{3jt} + e^{j\,2{,}55} \cdot e^{-3jt}\right)$$

$$= \frac{2}{13} e^{-3t} + \frac{\sqrt{13}}{39} e^{-t}\left(e^{j\underbrace{(3t-2{,}55)}_{\theta}} + e^{-j\underbrace{(2{,}55+3t)}_{\theta}}\right)$$

$$= \frac{2}{13} e^{-3t} + \frac{\sqrt{13}}{39} e^{-t}\; 2\cos(3t-2{,}55)$$

d) $H(s) = \frac{L[salida]}{L[entrada]}$ para CI nulas

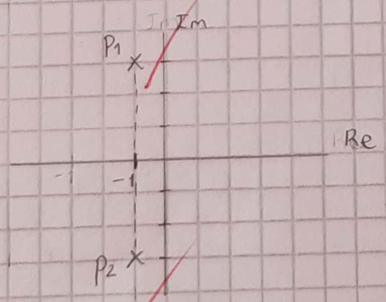
$$H(s) = \frac{U(s)}{G(s)}$$

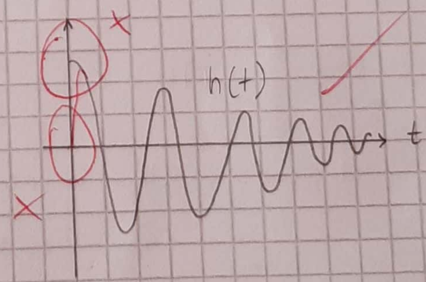
$$H(s) = \frac{\frac{G(s)}{s^2+2s+10}}{G(s)} = \frac{1}{s^2+2s+10}$$ → para cualquier entrada G(s)

Si utilizo la entrada dada en el inciso c)

$$H(s) = \frac{\frac{2}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2+2s+10}}{\frac{2}{s+3}} = \frac{1}{s^2+2s+10}$$

e) $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+10} = \frac{1}{(s-(-1+3j))(s-(-1-3j))}$





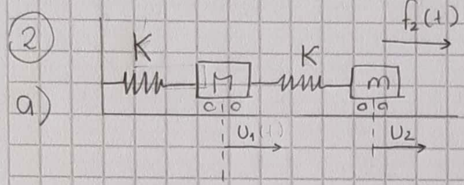
NOTA:

f) $U_f(s) = \dfrac{2}{(s+3)(s^2+2s+10)} = \underbrace{\dfrac{2}{s+3}}_{G(s)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{s^2+2s+10}}_{H(s)}$

$U_f(s) = G(s) \cdot H(s) = g(t) \circ h(t)$ $h(t) = \frac{1}{3} e^{-t} \operatorname{sen}(3t)$

2)

a)

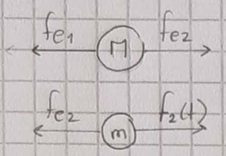


$f_{e1} = K U_1$

$f_{e2} = K(U_2 - U_1)$

$M = 8m$

$K = 8k$



2da ley de Newton

$M \ddot{U}_1(t) = -K U_1(t) + K(U_2(t) - U_1(t))$

$= -K U_1 + K U_2 - K U_1$

$\rightarrow M \ddot{U}_1 + K U_1 + K U_1 - K U_2 = 0$

$m \ddot{U}_2(t) = -K(U_2(t) - U_1(t)) + f_2(t)$

$= -K U_2 + K U_1 + f_2(t)$

$\rightarrow m \ddot{U}_2 + K U_2 - K U_1 = f_2(t)$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1(t) \\ \ddot{U}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K+K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$M \ddot{U} + K U = F$$

b) $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $M \ddot{U} + K U = 0$ (1)

Propongo soluciones $U_1 = \bar{V} \cos wt$ $U_2 = \bar{V} \operatorname{sen} wt$

$\dot{U}_1 = -\bar{V} w \operatorname{sen} wt$ $\dot{U}_2 = w \bar{V} \cos wt$

$\ddot{U}_1 = -\bar{V} w^2 \cos wt$ $\ddot{U}_2 = -w^2 \bar{V} \operatorname{sen} wt$

NOTA:

M Sol Gualelli
12164

HOJA: 3

En (1): $(K - \omega^2 M)\cos\omega t \cdot \bar{v} = 0 \qquad (K - \omega^2 M)\,\text{sen}\,\omega t\; \bar{v} = 0$

$$(K - \omega^2 M)\,\bar{v} = 0$$

$$(M^{-1}K - \omega^2 M^{-1} M)\,\bar{v} = 0$$

$$A = M^{-1}K$$
$$I = M^{-1}M$$
$$\lambda = \omega^2$$

$\rightarrow (A - \lambda I)\,\bar{v} = 0$

$$A = M^{-1}K = \begin{bmatrix} \frac{1}{8m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9k}{8m} & -\frac{k}{8m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 9/8 & -1/8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{k}{m}\begin{bmatrix} 9/8 & -1/8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\bar{v} = 0$$

$$\frac{k}{m}\cdot \det\begin{vmatrix} 9/8 - \lambda & -1/8 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Para más facilidad, obtengo los autovalores sin la cte k/m y luego de obtenerlos, se la multiplico por

$$\left(\frac{9}{8} - \lambda\right)(1-\lambda) - \frac{1}{8} = 0$$

$$\frac{9}{8} - \frac{9}{8}\lambda - \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{8} = 0$$

$\rightarrow \lambda^2 - \frac{17}{8}\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \frac{17 + \sqrt{33}}{16}\frac{k}{m} \cong 1{,}422\,\frac{k}{m}$ 2

ojo! $\boxed{\omega_1 < \omega_2}$ OK!! $\rightarrow \lambda_2 = \frac{17 - \sqrt{33}}{16}\frac{k}{m} \cong 0{,}703\,\frac{k}{m}$ 1

$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda_2} = 0{,}838\sqrt{\frac{k}{m}}\ \frac{rad}{s} \rightarrow$ primer modo o frecuencia fundamental

$\omega_2 = \sqrt{\lambda_1} \cong 1{,}192\sqrt{k/m}$ rad/s $\rightarrow$ segundo modo

NOTA:

Para λ_1

$$\frac{k}{m}\begin{bmatrix} 9/8-\lambda_1 & -1/8 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{k}{m}\begin{bmatrix} -0,3 & -1/8 \\ -1 & -0,42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-0,3\,x_1 - \frac{1}{8}y_1 = 0$$

$$y_1 = -2,4\,x_1$$

$$\bar{V}_1 = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} x_1 \\ -2,4\,x_1 \end{bmatrix}_{v\neq 0} = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 \\ -2,4 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ asociado a $\lambda_2 = 1.42\ k/m$

$\bar{V}_2$

$$\frac{9}{8} - \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{16} \cong -0,3$$

$$1 - \lambda_1 = -\frac{1+\sqrt{33}}{16} \cong -0,42$$

$$\frac{9}{8} - \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{16} \cong 0,42$$

$$1 - \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{16} \cong 0,3$$

Para λ_2

$$\frac{k}{m}\begin{bmatrix} 0,42 & -1/8 \\ -1 & 0,3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0,42\,x_2 - \frac{1}{8}y_2 = 0$$

$$y_2 = 3,36\,x_2$$

$$\bar{V}_2 = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} x_2 \\ 3,36\,x_2 \end{bmatrix}_{v\neq 0} = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 \\ 3,36 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ asociado a $\lambda_1 = 0.703\ k/m$, $\lambda_1 < \lambda_2$

$\bar{V}_1$

c) Sist 1 $\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{8K}{8m}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Sist 2 $\rightarrow \omega_A = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\Rightarrow \omega_0 = \omega_A$

Los sistemas presentan la misma frecuencia nat de vibración cuando están desacoplados, pero al unirlos observamos que el primer modo disminuye $(0,838\sqrt{k/m} < \sqrt{k/m})$. Unir los sistemas significa que la nueva frecuencia de vibración es menos destructiva y más alejada de la frecuencia con la que se entraría en resonancia

NOTA:

M. Sol Gualelli
12164

d) $\rightarrow \frac{k}{m} = 4 \frac{N}{mkg}$ $\quad U(0) = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,3 \end{bmatrix}$ $\quad \dot{U}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$U = C_1 \cos(1,676\, t) \begin{bmatrix} 4 \\ -9,6 \end{bmatrix} + C_2 \operatorname{sen}(1,676 t) \begin{bmatrix} 4 \\ -9,6 \end{bmatrix} + C_3 \cos(2,384 t) \begin{bmatrix} 4 \\ 13,44 \end{bmatrix} +$$

$$+ C_4 \operatorname{sen}(2,384\, t) \begin{bmatrix} 4 \\ 13,44 \end{bmatrix}$$

$$U(0) = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,30 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -9,6 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 13,44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,15 = 4 C_1 + 4 C_3 \\ 0,30 = -9,6 C_1 + 13,44 C_3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow C_1 = 17/1920 \\ &\rightarrow C_3 = 11/384 \end{aligned}$$

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -9,6 \end{bmatrix} + C_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 13,44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 4 C_2 + 4 C_4 \\ 0 = -9,6 C_2 + 13,44 C_4 \end{cases} \longrightarrow C_2 = C_4 = 0$$

$$U = \frac{17}{1920} \cos(1,676\, t) \begin{bmatrix} 4 \\ -9,6 \end{bmatrix} + \frac{11}{384} \cos(2,384 t) \begin{bmatrix} 4 \\ 13,44 \end{bmatrix}$$

e) ——

NOTA: