CIRCUITOS MONOFÁSICOS DE CORRIENTE ALTERNA

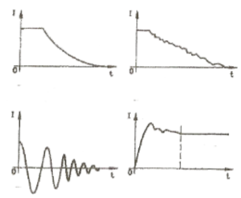
Existen diversos tipos y regímenes de corriente. A continuación describiremos algunos de ellos:

Régimen estático: cargas eléctricas en reposo cuyo estudio corresponde a electrostática.

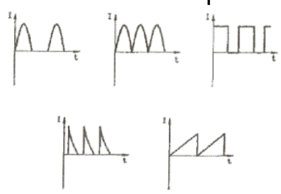
Régimen permanente: flujo de cargas constante a lo largo del tiempo.

Régimen periódico: flujo de cargas variables en el tiempo.

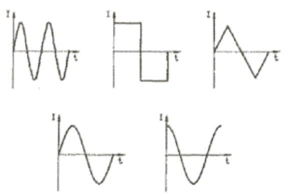
Régimen transitorio: flujo de cargas variable que tiende a extinguirse por cesar la causa que lo produce.



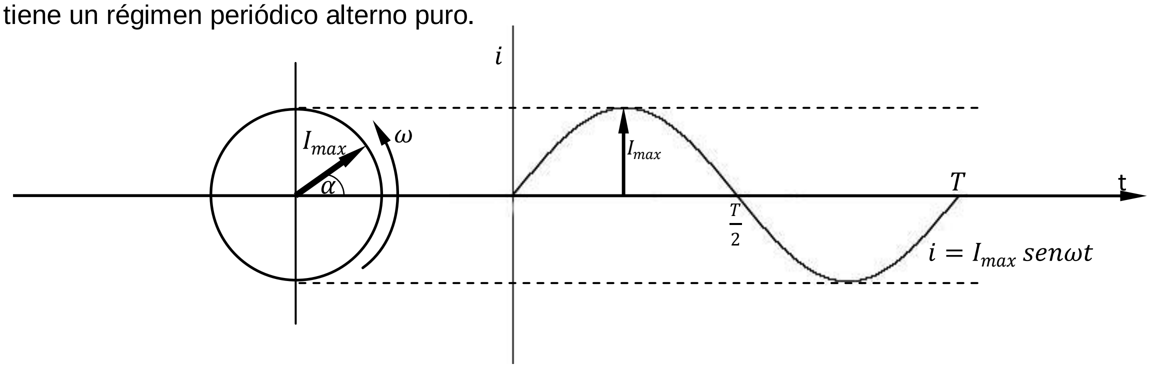
Régimen periódico pulsatorio: flujo variable en el cual la dirección es siempre la misma pero su magnitud varía periódicamente.



Régimen periódico alterno: la dirección del flujo de cargas es contraria en diversas partes del circuito. Se considera régimen periódico alterno puro si dos semiperiodos tienen la misma área.



Definimos entonces como *corriente alterna* a aquella cuya expresión es la función seno y tiene un régimen periódico alterno puro.



En la figura vemos un vector rotatorio o *fasor* que gira con una *pulsación* o *velocidad angular* ω*.* La onda surge de la proyección de la "sombra" de ese *fasor.*

I_{max} = *amplitud de onda*

ω = *pulsación o velocidad angular* $= 2 \cdot \pi \cdot f$

$i = I_{max}\, sen\, \omega t \quad [A]$

f = *frecuencia* $= \frac{\omega}{2\pi} \qquad [Hz]$

T = *período* $= \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad [s]$

$\alpha = \omega \cdot t$

La razón de trabajar con la función sinusoidal es la facilidad para trabajarla matemáticamente.

Valor instantáneo: es el valor que toma la ordenada en un instante determinado. Se escribe con la letra minúscula del símbolo que de la magnitud eléctrica que represente. Por ejemplo: $i = I_{max}\, sen\omega t$ $\quad e = \varepsilon_{max}\, sen\omega t$

Valor máximo: es el valor de la ordenada máxima. I_{max} $\quad \varepsilon_{max}$

Valor pico a pico: dos veces el valor máximo. I_{pp} $\quad \varepsilon_{pp}$

Valor medio: es la media algebraica de los valores instantáneos durante un semi período.

$\boxed{\varepsilon_{med} = \frac{2}{\pi}\varepsilon_{max}}$ $\quad \boxed{I_{med} = \frac{2}{\pi} I_{max}}$

Demostremos: el valor medio resulta de dividir el área de semiperiodo por la base: $\varepsilon_{med} = \frac{A}{\frac{T}{2}}$ Pero $A = \int_0^{\frac{T}{2}} \varepsilon_{max} \sin \omega t\, dt$

$$\varepsilon_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \varepsilon_{max} \sin \omega t\, dt = \frac{2}{T}\varepsilon_{max} \cdot \left[\frac{-\cos \omega t}{\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\frac{\varepsilon_{max}}{\omega} \cdot \left[-\left((-1)-(+1)\right)\right] =$$

$$\varepsilon_{med} = \frac{2}{T}\frac{\varepsilon_{max}}{\omega} \cdot 2 = \frac{2}{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{\varepsilon_{max}}{\omega} \cdot 2 => \boxed{\varepsilon_{med} = \frac{2}{\pi}\varepsilon_{max}}$$

Valor eficaz: es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores instantáneos (promedio de los valores cuadráticos instantáneos).

$\boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2\, dt}}$ $\quad \boxed{\varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}}{\sqrt{2}}}$

Demostremos:

$$\int_0^T (\varepsilon_{max} \sin \omega t)^2\, dt = \int_0^T \varepsilon_{max}{}^2 \sin^2 \omega t\, dt = \int_0^{2\pi} \varepsilon_{max}{}^2 \sin^2 \alpha\, d\alpha$$

Pero: $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon_{max}{}^2}{2} \cdot (1-\cos 2\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon_{max}{}^2}{2} d\alpha - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon_{max}{}^2}{2} \cdot (\cos 2\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{\varepsilon_{max}{}^2}{2} \cdot [2\pi - 0] - \frac{\varepsilon_{max}{}^2}{2} \cdot \left(\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)_0^{2\pi} = \frac{\varepsilon_{max}{}^2}{2} \cdot 2\pi - 0 = \pi \cdot \varepsilon_{max}{}^2$$

$$=> \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \pi \varepsilon_{max}{}^2} => \boxed{\varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Factor de amplitud: es el cociente entre el valor máximo de una onda senoidal y su valor eficaz.

$\boxed{k_a = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon}}$ Para la onda senoidal de corriente alterna es $k_a = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon} = \sqrt{2}$

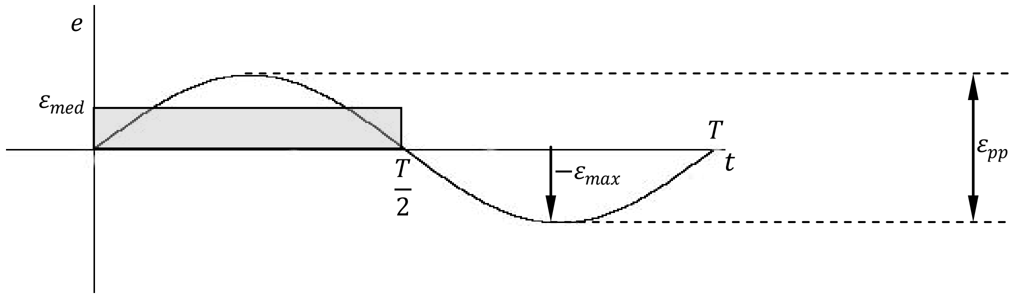
Valores de factor de amplitud están tabulados en tablas para cada tipo de onda y sirve para prever la aislación de los circuitos.

Factor de forma: es el cociente entre el valor eficaz de una onda senoidal y su valor medio durante un semiperiodo.

$\boxed{k_f = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{med}}}$ Para la onda senoidal de corriente alterna: $k_f = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{med}} = 1{,}11$

Valores de factor de forma están tabulados en tablas para cada tipo de onda y sirve solamente para calificar la onda.

A continuación ilustramos una onda senoidal para ver los valores definidos:



Fase: es la posición, instante o estado en el que se está analizando el fenómeno. En un circuito consideramos como $t = 0$ al instante en el que se cierra el interruptor y para este instante definimos al ángulo de fase inicial ψ.

Definimos también como ángulo de fase φ al existente entre dos magnitudes periódicas simples.

<u>*Resistencia en corriente alterna*</u>

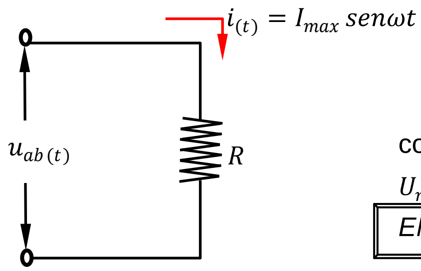
La resistencia en corriente alterna o efectiva es mayor que la óhmica debido al *efecto pelicular o skin*, que concentra la densidad de carga sobre la periferia del conductor. Esto se produce porque la variación del campo magnético respecto del tiempo es mayor en el centro, lo que da lugar a una reactancia inductiva mayor, y, por lo tanto, una menor intensidad.

Además de este efecto, en las líneas aéreas la intensidad de campo eléctrico del conductor comienza la ionización del aire circundante y se producen efluvios que rodean al conductor con la correspondiente descarga y pérdida de energía. Este efecto se conoce como efecto *corona.*

Sin embargo para las consideraciones que se harán a continuación estos efectos se desprecian.

<u>*Circuito resistivo puro*</u>

Llamamos circuito resistivo puro a aquel cuyos elementos pasivos tienen solo resistencias.



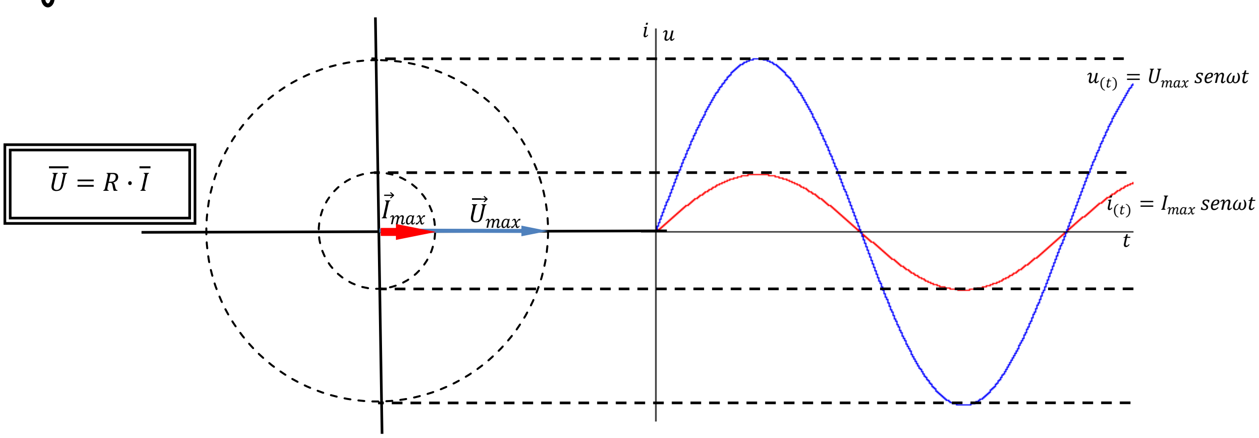
$u_{r\,(t)} = R \cdot i_{(t)} = R \cdot I_{max}\, sen\omega t$ Pero: $\boxed{U_{max} = R \cdot I_{max}}$

$=> \boxed{u_{r(t)} = U_{max} sen\omega t}$

Aplicada la tensión a los bornes de R se produce una corriente *i* en fase con la tensión. Su valor máximo será:

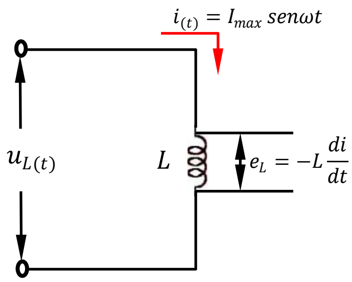
$U_{max} = R \cdot I_{max}$

EN CIRCUITO R-PURO i ESTA EN FASE CON u



Circuito inductivo puro

La inductancia es una propiedad que retarda el cambio de la corriente, retarda su variación. Un circuito inductivo puro corresponde a una bobina cuya resistencia es nula (idealmente). En la bobina se induce una fem: $e_L = -N\frac{d\emptyset}{dt} = -L\frac{di}{dt}$



$\sum V = 0 = \overline{U_l} + \overline{\varepsilon_l}$

$=> \overline{U_l} = -\overline{\varepsilon_l} = +L\,\frac{d(I_{max}\, sen\omega t\,)}{dt}$

$=> u_{L(t)} = \omega \cdot L \cdot I_{max} cos\omega t$ Pero: $\boxed{X_L = \omega \cdot L}$

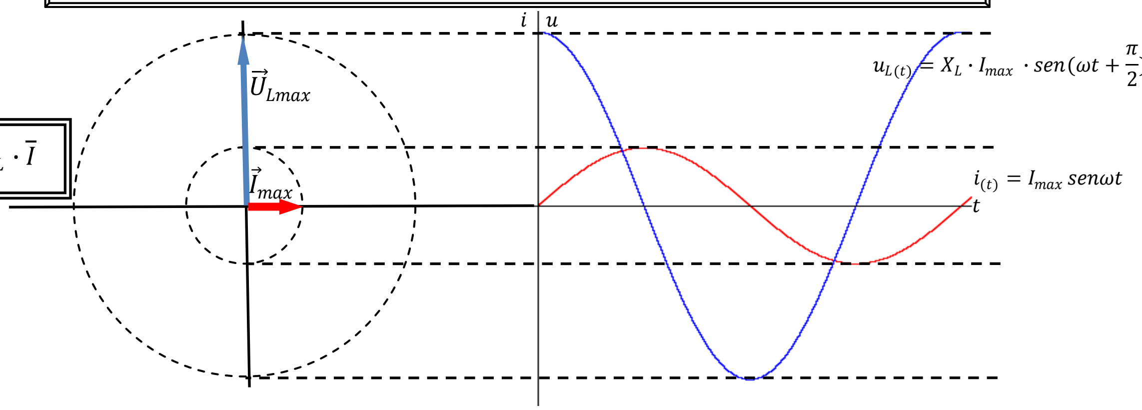
$=> u_{L(t)} = X_L \cdot I_{max} cos\omega t$ Pero: $cos\omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$=> \boxed{u_{L(t)} = X_L \cdot I_{max} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

Llamamos *reactancia inductiva* a X_L y su unidad es el ohm: $[X_L] = \Omega = [\omega]\cdot[L] = \frac{1}{s}\cdot H = \frac{1}{s}\cdot\frac{V\cdot s}{A} = \frac{V}{A}$

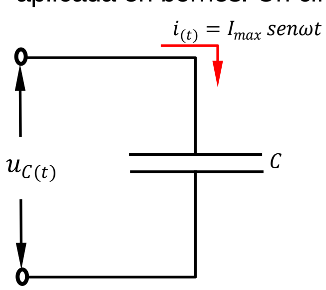
EN CIRCUITO L-PURO *i* ESTA ATRASADO $\frac{\pi}{2}$ RESPECTO DE *u*

$$\boxed{\overline{U} = jX_L \cdot \overline{I}}$$



Circuito capacitivo puro

La capacitancia de un circuito eléctrico sirve para retardar una variación en la tensión aplicada en bornes. Un circuito capacitivo puro es aquel cuya resistencia es cero (ideal).



$C = \frac{Q}{U} = \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{dq}{du}$ $=> du = \frac{1}{C}\cdot dq$

Pero: $i = \frac{Q}{t} = \frac{dq}{dt}$ $=> dq = i \cdot dt$

$=> du_{C(t)} = \frac{1}{C}\cdot i_{(t)}dt = \frac{1}{C}\cdot I_{max}\sin\omega t$ Integrando m.a.m.

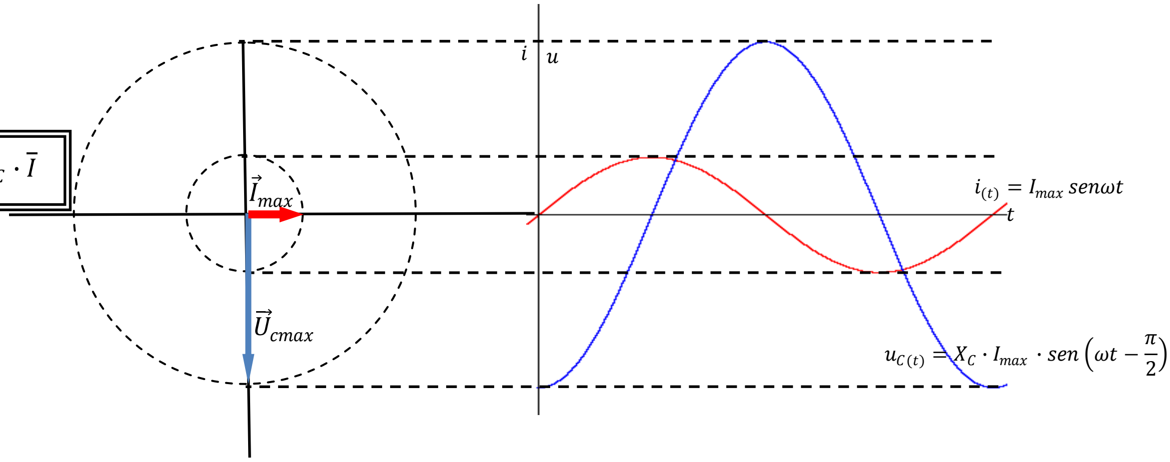
$u_{C(t)} = -\frac{1}{\omega\cdot C}\cdot I_{max}\cdot\cos\omega t$ Pero: $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega\cdot C}}$

$\boxed{u_{C(t)} = X_C \cdot I_{max}\cdot\cos\omega t = X_C \cdot I_{max}\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

Llamamos *reactancia capacitiva* a X_C y su unidad es el ohm: $[X_C] = \Omega = \frac{1}{[\omega]\cdot[C]} = \frac{1}{\frac{1}{s}\cdot F} = \frac{1}{\frac{1}{s}\frac{C}{V}} = \frac{V}{\frac{C}{s}} = \frac{V}{A}$

EN CIRCUITO C-PURO *i* ESTA ADELANTADO $\frac{\pi}{2}$ RESPECTO DE *u*

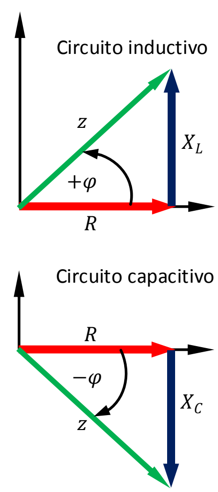
$$\boxed{\overline{U} = -jX_C \cdot \overline{I}}$$



Ley de Ohm en corriente alterna

Definimos *impedancia*: $\boxed{\overline{z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} \quad [\Omega]}$

Triángulos de impedancia



$$\overline{z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{U \llcorner^{\omega t}}{I \llcorner^{\omega t - \varphi}} = \frac{U}{I} \llcorner^{\varphi} = z \llcorner^{\varphi}$$

$$|z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\overline{z} = z \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = R + j \cdot X$$

$$R = z \cdot cos\varphi \qquad X = z \cdot \sin\varphi$$

La magnitud inversa a la impedancia se define como *admitancia:*

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{z}}} = \frac{1}{z}(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \qquad [S] \text{ Siemens}$$

$$\overline{Y} = \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = \frac{I \llcorner^{\omega t - \varphi}}{U \llcorner^{\omega t}} = \frac{1}{z} \llcorner^{-\varphi}$$

Hacemos: $\overline{Y} \cdot \frac{z}{z} = \frac{1}{z^2}(z \cdot \cos\varphi + j \cdot z \cdot \sin\varphi)$

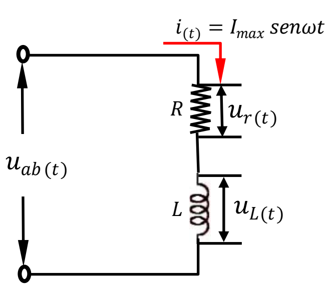
$$\overline{Y} \cdot \frac{z}{z} = \frac{1}{z^2}(R + j \cdot X) = \frac{R}{z^2} + j \cdot \frac{X}{z^2} = G - j \cdot B$$

$$\boxed{\overline{Y} = G - j \cdot B}$$

Donde *G* es la *conductancia* y *B* es la *suceptancia.*

Circuito resistivo-inductivo R-L

Un circuito resistivo inductivo tiene conectadas en serie una resistencia y una bobina.



$$u_{ab(t)} = u_{r(t)} + u_{L(t)} = R \cdot I_{max} \cdot \sin\omega t + X_L \cdot I_{max} \cdot \cos\omega t$$

De la suma de ondas del grafico temporal vemos que:

$$u_{ab(t)} = U_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = U_{max} \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi + U_{max} \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi$$

$$U_{max} \cdot \sin\varphi = X_L \cdot I_{max}$$

$$U_{max} \cdot \cos\varphi = R \cdot I_{max}$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$U_{max}{}^2 \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \left(R^2 + X_L^2\right) \cdot I_{max}^2$$

Pero $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 1$

$$\boxed{=> U_{max} = \sqrt{(R^2 + X_L^2)} \cdot I_{max}}$$

Vectorialmente $\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} = R \cdot \overline{I} + j \cdot X_L \cdot \overline{I}$

$=> \overline{U} = (R + j \cdot X_L) \cdot \overline{I}$

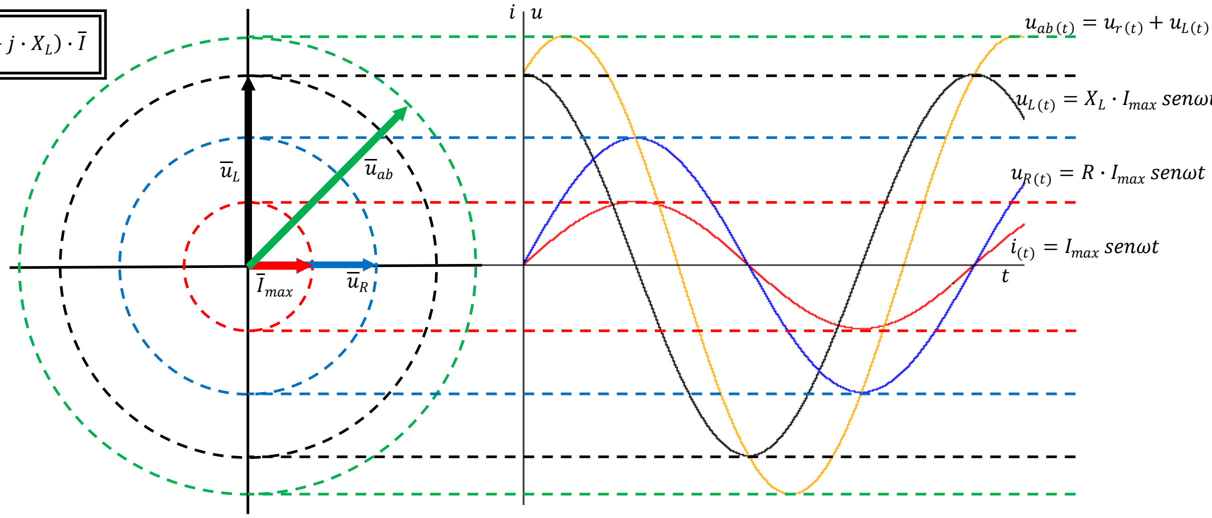
$=> \overline{U} = z \cdot \overline{I}$ Haciendo la división entre: $U_{max} \cdot \sin\varphi = X_L \cdot I_{max}$

$U_{max} \cdot \cos\varphi = R \cdot I_{max}$

Llegamos al valor del ángulo: $\tan\varphi = \frac{X_L}{R}$

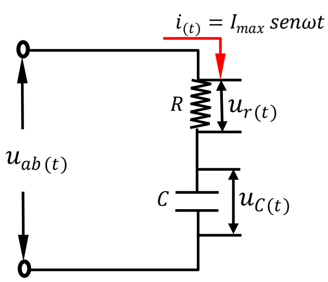
Así llegamos a: $\boxed{u_{ab\,(t)} = \sqrt{(R^2 + X_L^2)} \cdot I_{max} \cdot \sin\left(\omega t + arctg\,\frac{X_L}{R}\right)}$

$$\boxed{\overline{U} = (R + j \cdot X_L) \cdot \overline{I}}$$



Circuito resistivo-capacitivo R-L

Un circuito resistivo capacitivo tiene conectadas en serie una resistencia y un capacitor.



$u_{r\,(t)} = R \cdot i_{(t)}$ $\quad u_{C\,(t)} = \frac{1}{C} \cdot \int i_{(t)} dt$

$u_{ab\,(t)} = u_{r\,(t)} + u_{C(t)}$

$u_{ab\,(t)} = R \cdot I_{max} \cdot \sin\omega t - \frac{1}{C} \cdot \int I_{max} \cdot \sin\omega t\, dt$

$u_{ab\,(t)} = R \cdot I_{max} \cdot \sin\omega t - \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_{max} \cdot \cos\omega t$

De la suma de ondas del grafico temporal vemos que:

$u_{ab\,(t)} = U_{max} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

$u_{ab\,(t)} = U_{max} \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi - U_{max} \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi$

$U_{max} \cdot \sin\varphi = X_C \cdot I_{max}$

$U_{max} \cdot \cos\varphi = R \cdot I_{max}$ Elevando al cuadrado y sumando:

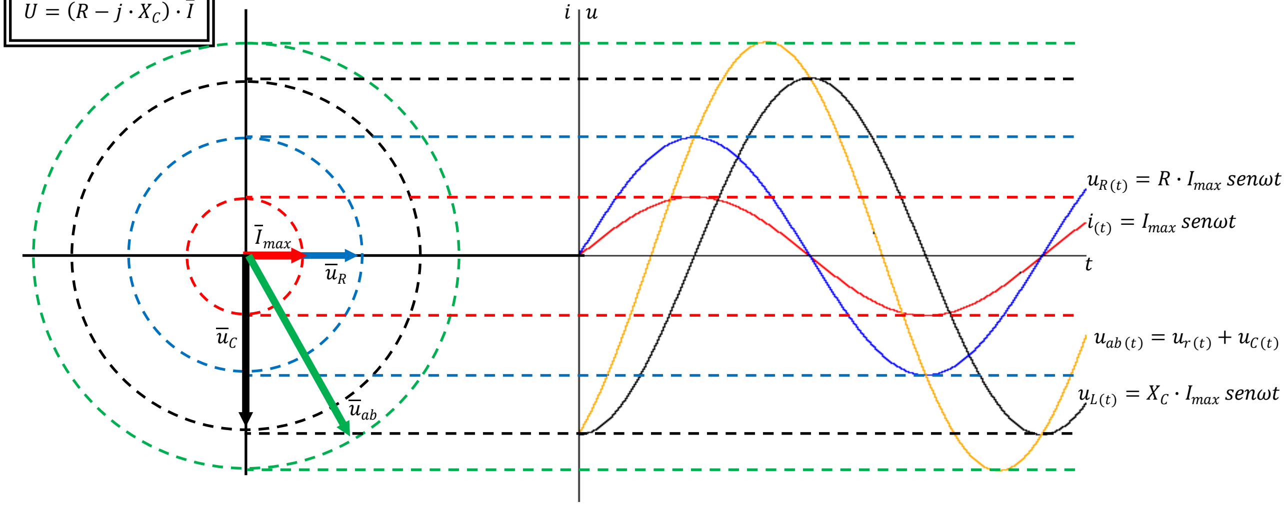
$U_{max}{}^2 \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \left(R^2 + X_C^2\right) \cdot I_{max}^2$ Pero $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 1$

$\boxed{=> U_{max} = \sqrt{(R^2 + X_C^2)} \cdot I_{max}}$ $\quad \tan\varphi = \frac{X_C}{R}$

$\boxed{=> U_{max} = |z| \cdot I_{max}}$

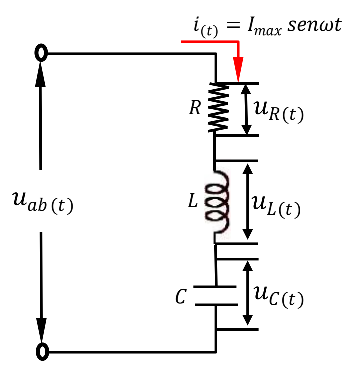
$\overline{U}_{ab} = \overline{U}_r + \overline{U}_C = R \cdot \overline{I} - j \cdot X_C \cdot \overline{I} = (R - j \cdot X_C) \cdot \overline{I} = z \cdot \overline{I}$

$$\boxed{\overline{U} = (R - j \cdot X_C) \cdot \overline{I}}$$



Circuito R-L-C serie

Un circuito R-L-C tiene conectadas en serie una resistencia, una bobina y un capacitor.



$$u_{R(t)} = R \cdot I_{max} \cdot \sin \omega t$$
$$u_{C(t)} = X_C \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t$$
$$u_{L(t)} = X_L \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t$$
$$u_{ab\,(t)} = u_{R(t)} + u_{L(t)} + u_{C(t)}$$
$$u_{ab\,(t)} = R \cdot I_{max} \cdot \sin \omega t + X_L \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t - X_C \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t$$
$$u_{ab\,(t)} = R \cdot I_{max} \cdot \sin \omega t + (X_L - X_C) \cdot I_{max} \cdot \cos \omega t$$

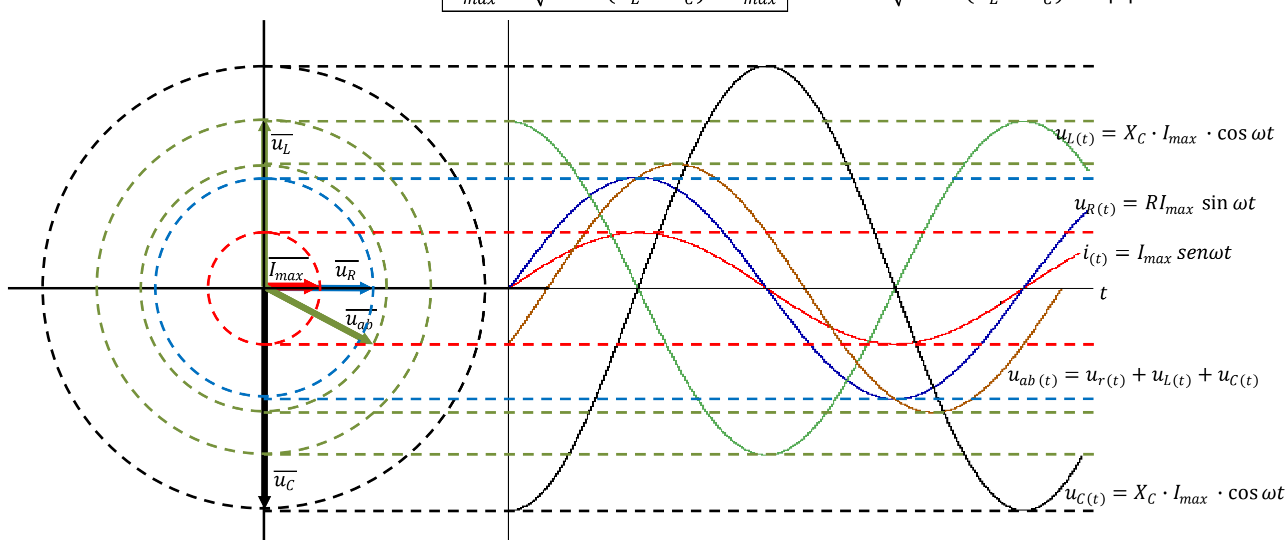
De la suma de ondas del grafico temporal vemos que:

$$u_{ab\,(t)} = U_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$u_{ab\,(t)} = U_{max} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi + U_{max} \cdot \cos \omega t \cdot \sin \varphi$$
$$U_{max} \cdot \sin \varphi = R \cdot I_{max}$$
$$U_{max} \cdot \cos \varphi = (X_L - X_C) \cdot I_{max}$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$\boxed{U_{max} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \cdot I_{max}}$$

Pero $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = |z|$



$$\overline{U}_{ab} = \overline{U}_R + \overline{U}_C + \overline{U}_L = R \cdot \overline{I} + j \cdot X_L \cdot \overline{I} - j \cdot X_C \cdot \overline{I} = R \cdot \overline{I} + j \cdot (X_L - X_C) \cdot \overline{I} =$$

$$\boxed{\overline{U}_{ab} = [R + j \cdot (X_L - X_C)] \cdot \overline{I} = z \cdot \overline{I}}$$

Potencia en corriente alterna monofásica

Potencia en circuitos resistivos puros

Si $\begin{cases} i_{(t)} = I_{max} \cdot \sin \omega t \\ u_{(t)} = U_{max} \cdot \sin \omega t \end{cases}$

Entonces: $p_{(t)} = u_{(t)} \cdot i_{(t)} = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin^2 \omega t$ Pero $\sin^2 \omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$

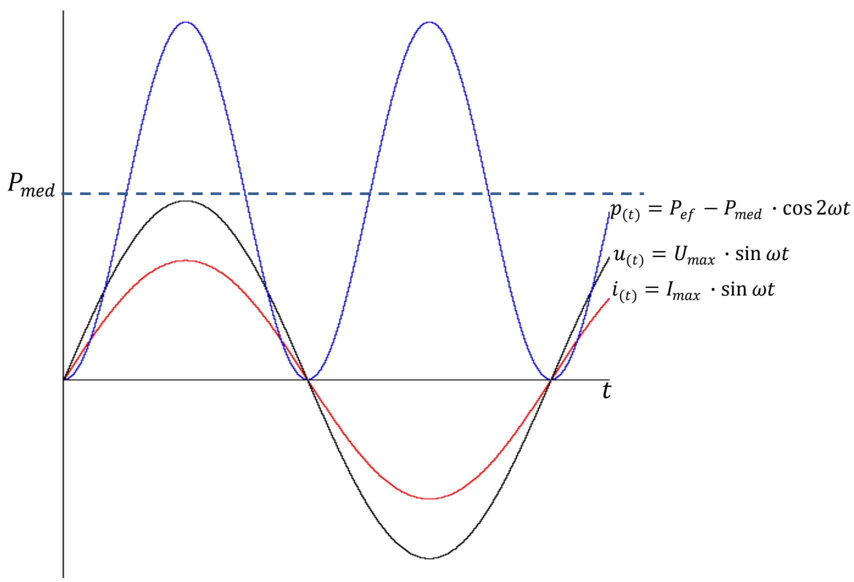
$$p_{(t)} = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right) = \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} - \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} \cdot \cos 2\omega t$$

Haciendo $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ tenemos que $p_{(t)} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} - \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} \cdot \cos 2\omega t$

$$\boxed{p_{(t)} = U_{ef} \cdot I_{ef} - \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} \cdot \cos 2\omega t}$$

$$\boxed{p_{(t)} = P_{ef} - P_{med} \cdot \cos 2\omega t}$$

$$P_{med} = \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} = U_{ef} \cdot I_{ef}$$



Vemos que la potencia es siempre positiva, por lo que su valor medio $P_{med} = U_{ef} \cdot I_{ef}$ hace de eje para la onda de potencia, que es de doble frecuencia respecto de la intensidad y la tensión. Su valor máximo o de pico es:

$$2 \cdot U_{ef} \cdot I_{ef} = U_{max} \cdot I_{max}$$

En este caso tenemos una potencia activa y su unidad es el vatio, simbolizado como vemos:

$[P] = [W]$ watt

$$P_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T p_{(t)} dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{T}\int_0^T \frac{1-\cos \omega t}{2} dt =$$

$$P_{med} = \frac{U_{max} \cdot I_{max} \cdot t}{2T}\bigg|_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos 2\omega t \cdot dt = \frac{U_{max} \cdot I_{max} \cdot T}{2T} - \underbrace{\frac{1}{T} \cdot \frac{U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin 2\omega t}{2 \cdot 2t}\bigg|_0^T}_{0} =$$

$P_{med} = U_{ef} \cdot I_{ef} = R \cdot I_{ef} \cdot I_{ef} = R \cdot {I_{ef}}^2$ Concepto que nos expresa que existe una energía cedida por unidad de tiempo desde la fuente al circuito que se disipa en la resistencia en forma de calor.

Potencia en circuitos inductivos puros

Si $\begin{cases} i_{(t)} = I_{max} \cdot \sin \omega t \\ u_{(t)} = U_{max} \cdot \cos \omega t \end{cases}$ Llamaremos en este a caso a la potencia como Q_L:

Entonces: $q_{L(t)} = u_{(t)} \cdot i_{(t)} = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t$ Pero $\sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2}$

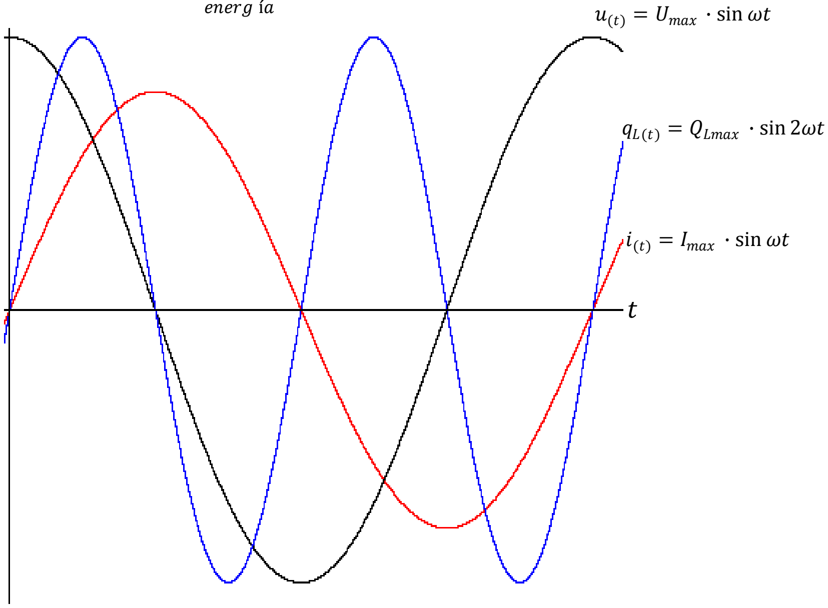
$$q_{L(t)} = U_{max} \cdot I_{max} \cdot \left(\frac{\sin 2\omega t}{2}\right) = \frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

Haciendo $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ tenemos que $q_{L(t)} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \sin 2\omega t$

$$\boxed{q_{L(t)} = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin 2\omega t}$$

$$\boxed{q_{L(t)} = Q_{Lmax} \cdot \sin 2\omega t}$$

$$Q_{Lmed} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T Q_{Lmax} \cdot \sin 2\omega t \cdot dt}_{energ\ ía} = 0$$



El valor medio de esta onda seno a lo largo de un período es cero, es decir que la energía neta disipada es cero. Analizando el primer cuarto de período de la onda de potencia *Q*, vemos que se está cediendo energía de la fuente al circuito (energía positiva). Esta energía es absorbida por la bobina del inductor y utilizada para crear el campo magnético, es decir, que en el segundo cuarto de período, la energía es negativa. Durante el tercer período el campo se disminuye y devuelve energía a la fuente debido a que el campo genera una corriente.

Así se continuará sucesiva e infinitamente ya que estamos en un circuito L ideal.

La potencia inductiva es una potencia reactiva que se manifiesta en un intercambio de energía entre la red y el inductor; y no en un gasto neto, es por esto que no tiene un valor comercial.

$Q_L = U_L \cdot I_L = X_L \cdot {I_L}^2$

Potencia en circuitos capacitivos puros

Si $\begin{cases} i_{(t)} = I_{max} \cdot \sin \omega t \\ u_{(t)} = -U_{max} \cdot \cos \omega t \end{cases}$ Llamaremos en este a caso a la potencia como Q_C:

Entonces: $q_{C(t)} = u_{(t)} \cdot i_{(t)} = -U_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t$ Pero $\sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2}$

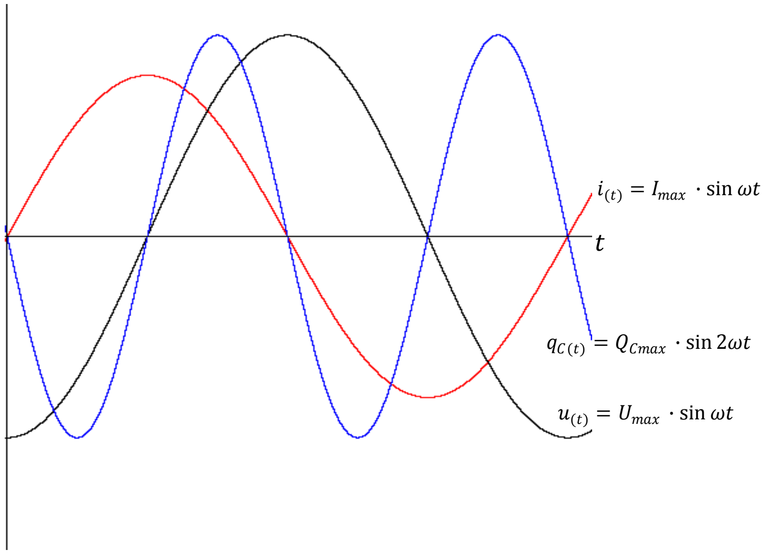
$$q_{C(t)} = -U_{max} \cdot I_{max} \cdot \left(\frac{\sin 2\omega t}{2}\right) = -\frac{U_{max} \cdot I_{max}}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

Haciendo $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ tenemos que $q_{C(t)} = -\frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \sin 2\omega t$

$$\boxed{q_{C(t)} = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin 2\omega t}$$

$$\boxed{q_{C(t)} = Q_{Cmax} \cdot \sin 2\omega t}$$

$$Q_{Cmed} = \underbrace{-\frac{1}{T}\int_0^T Q_{Cmax} \cdot \sin 2\omega t \cdot dt}_{energ\,ía} = 0$$

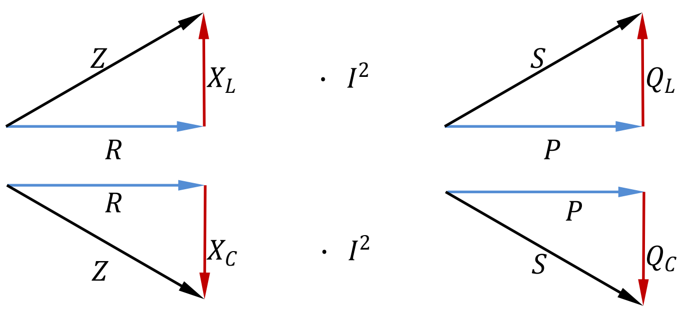


El valor medio de esta onda seno a lo largo de un período es cero, es decir que la energía neta disipada es cero. Analizando el segundo cuarto de período de la onda de potencia Q (comenzamos desde el segundo período para ser físicamente coherentes, ya que si no se ha tomado energía no es posible devolverla), vemos que se está cediendo energía de la fuente al circuito (energía positiva). Esta energía es absorbida por las placas del capacitor y utilizada para crear el campo eléctrico entre ellas. Durante el tercer período el campo se disminuye, se descarga el capacitor y devuelve energía a la fuente.

$$Q_C = U_C \cdot I_C = X_C \cdot {I_C}^2 = \frac{U_C^2}{X_C}$$

Triángulo de potencias

Si a nuestro triángulo de impedancias se lo multiplica por la intensidad al cuadrado, obtenemos el llamado triángulo de potencias, que evidencia $P, Q_C, Q_L \; y \; S$



Potencia activa:

$P = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad [W]$

Potencia reactiva:

$Q = X \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad [VAr]$

Potencia aparente:

$S = Z \cdot I^2 = U \cdot I \quad [VA]$

Potencia en circuitos resistivos inductivos

Expresiones:

Intensidad absorbida por el circuito: $I = \frac{U}{Z}$ impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

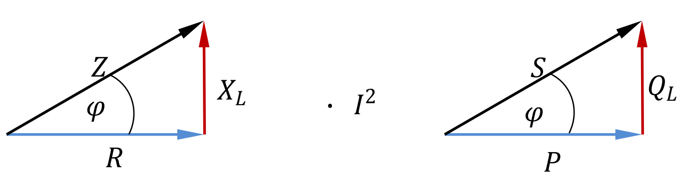
Componente activa de la intensidad: $I_R = \frac{U_R}{R}$ resistencia: $R = \frac{\rho \cdot l}{S}$ $R = Z \cdot cos\varphi$

Componente reactiva de la intensidad: $I_L = \frac{U_L}{X_L}$ f.d.p.: $cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$

Reactancia inductiva: $X_L = Z \cdot sin\varphi$ $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$

Potencia aparente: $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ potencia activa: $P = U \cdot I \cdot cos\varphi = R \cdot I^2$

Potencia reactiva: $Q_L = U \cdot I \cdot sin\varphi = X_L \cdot I^2$



Potencia en circuitos resistivos capacitivos

Expresiones:

Intensidad absorbida por el circuito: $I = \frac{U}{Z}$ impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

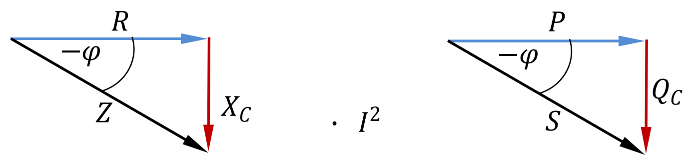
Componente activa de la intensidad: $I_R = \frac{U_R}{R}$ resistencia: $R = \frac{\rho \cdot l}{S}$ $R = Z \cdot cos\varphi$

Componente reactiva de la intensidad: $I_C = \frac{U_C}{X_C}$

f.d.p.: $cos(-\varphi)$ $\varphi = arctan\left(\frac{-1}{\omega \cdot C \cdot R}\right)$ potencia aparente: $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Reactancia inductiva: $X_C = Z \cdot sin(-\varphi)$ $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$

Potencia activa: $P = U \cdot I \cdot cos\varphi = R \cdot I^2$ potencia reactiva: $Q_L = U \cdot I \cdot sin\varphi = X_L \cdot I^2$



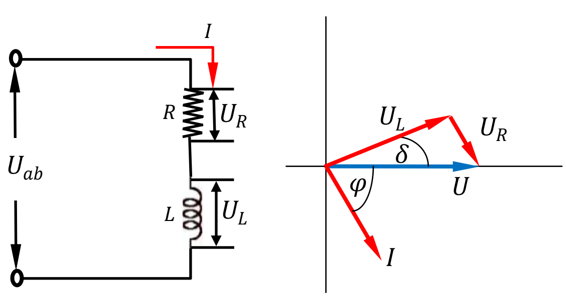
Factor de pérdidas y factor de calidad de una bobina

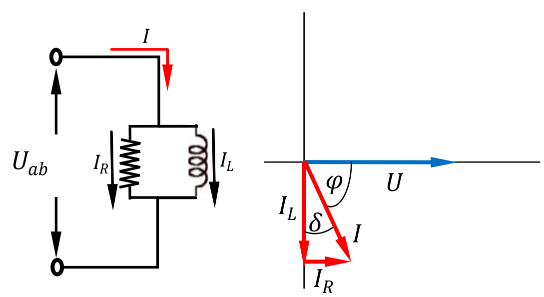
En una bobina real se producen pérdidas debidas a la resistencia de los conductores que forman la bobina y, también, en el caso de las bobinas con núcleo magnético, a las pérdidas por histéresis magnética y corrientes de Foucault. Estas pérdidas hacen que el ángulo de desfase entre U e I sea inferior a 90°.

$\boxed{\delta = 90 - \varphi}$ Ángulo de pérdidas

$\boxed{tan\delta = tan(90 - \varphi)}$ Factor de pérdidas

La representación de una bobina real la podemos hacer, entonces, por una conexión en serie o paralelo:





$\tan\delta = \frac{U_R}{U_L} = \frac{I \cdot R_s}{I \cdot \omega \cdot L_s} = \frac{R_s}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_s}$

$\tan\delta = \frac{I_R}{I_L} = \frac{\frac{U}{R_P}}{\frac{I}{\omega \cdot L_P}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_P}{R_p}$

En una bobina real, el factor de pérdidas disminuye cuando aumenta la frecuencia, ésta se representa en serie. Cuando se utiliza una bobina con núcleo magnético se debe usar en paralelo porque las pérdidas por histéresis y corrientes de Foucault aumentan con la frecuencia.

Definimos como factor de calidad de una bobina a la relación entre el valor máximo de la energía almacenada por la bobina y el valor de energía disipada en un período.

$$\boxed{Q = \frac{1}{\tan\delta}}$$

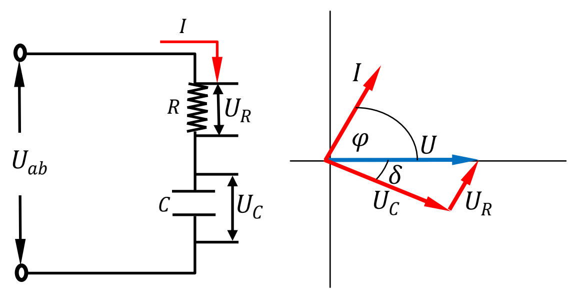
Factor de pérdidas y factor de calidad de un condensador

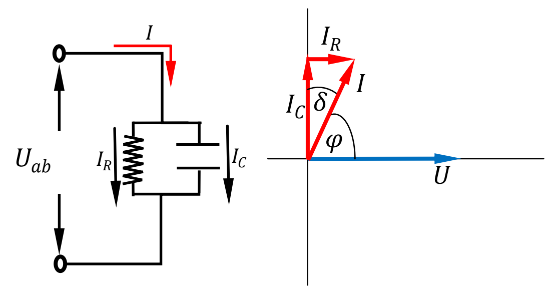
En un condensador real real se producen pérdidas debidas a las corrientes de fuga a través del dieléctrico del condensador. Estas pérdidas hacen que el ángulo de desfase entre U e I sea inferior a 90°.

$\boxed{\delta = 90 - \varphi}$ Ángulo de pérdidas

$\boxed{tan\delta = tan(90 - \varphi)}$ Factor de pérdidas

La representación de una bobina real la podemos hacer, entonces, por una conexión en serie o paralelo:





$$\tan\delta = \frac{U_R}{U_C} = \frac{I\cdot R_s}{I\cdot\frac{1}{\omega\cdot C_s}} = R_s\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C_s$$

$$\tan\delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{U}{R_P}}{\frac{I}{\omega\cdot C_P}} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C_P\cdot R_p}$$

Se utiliza la conexión en serie para condensadores en alta frecuencia, y la conexión en paralelo para condensadores en baja frecuencia. Definimos factor de calidad de un condensador como:

$$\boxed{Q = \frac{1}{\tan\delta}}$$

Resonancia en serie

Si variamos la frecuencia de alimentación del circuito serie R-L-C hasta hacer coincidir el valor de las reactancias inductivas y capacitivas, el factor de potencia será la unidad, el circuito absorberá la máxima intensidad y entrará en estado resonante.

$$X_L = X_C$$

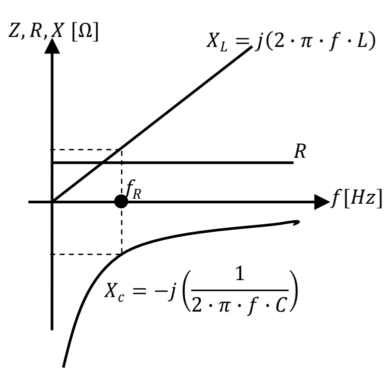
$$\omega\cdot L = \frac{1}{\omega\cdot C}$$

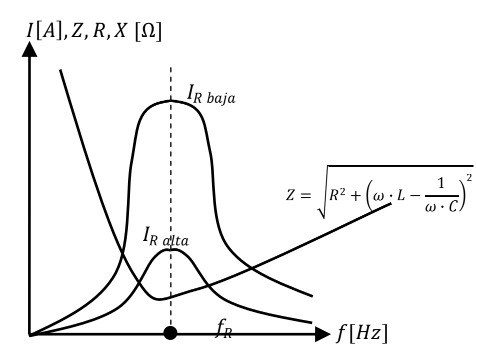
$$2\cdot\pi\cdot f\cdot L = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C}$$

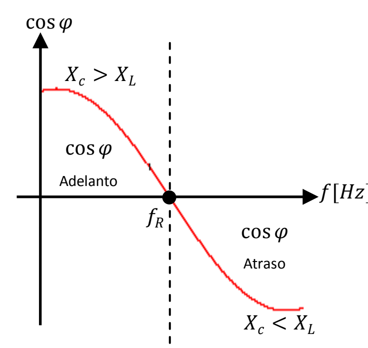
$$f^2 = \frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L}$$

Frecuencia de resonancia: $\boxed{f = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{C\cdot L}}}$

Graficas de variación de la frecuencia:





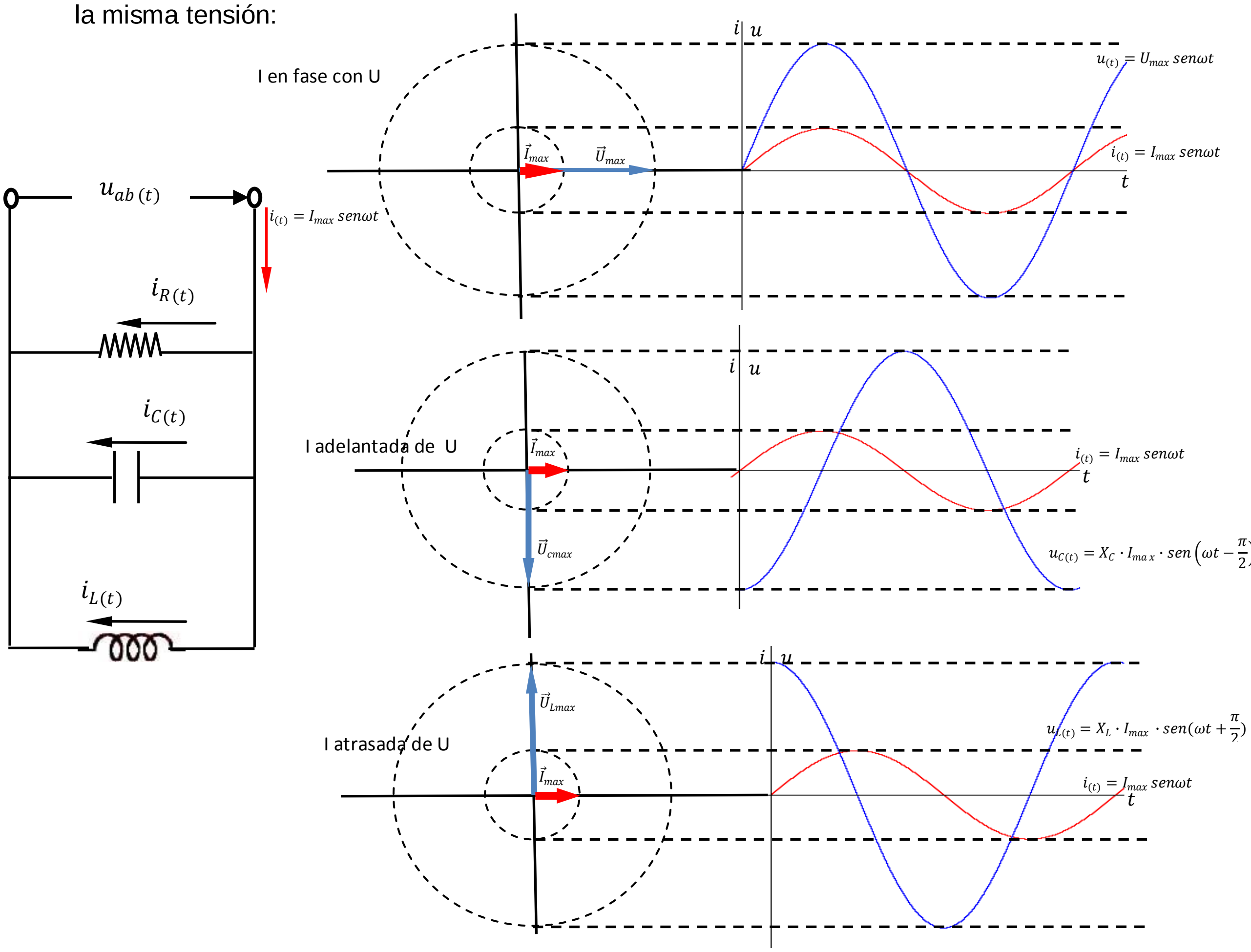


Se utiliza la conexión en serie para condensadores en alta frecuencia, y la conexión en paralelo para condensadores en baja frecuencia. Definimos factor de calidad de un condensador como:

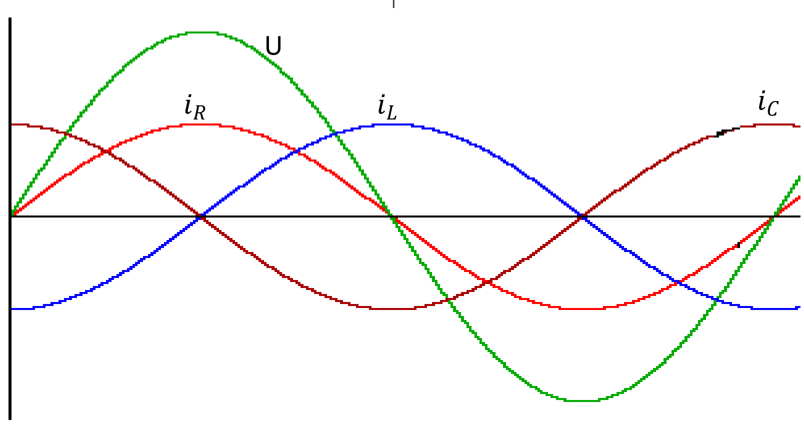
$$\boxed{Q = \frac{1}{\tan\delta}}$$

Circuito R-L-C paralelo

Un circuito R-L-C tiene conectadas en paralelo una resistencia, una bobina y un capacitor a la misma tensión:



Presentando todas las intensidades en el mismo gráfico, obtenemos:



Desde que las tensiones son iguales, tenemos las siguientes intensidades:

$$U = R \cdot i_R \qquad \frac{U}{R} = i_R$$

$$U = L \cdot \frac{di_L}{dt} \qquad \frac{1}{L} \cdot \int U\, dt = i_L$$

$$U = \frac{1}{C} \cdot \int i_C \cdot dt \qquad C \cdot \frac{du}{dt} = i_R$$

La intensidad total será: $i_T = i_R + i_L + i_C = \frac{U_{max}}{R} \cdot \sin \omega t - \frac{U_{max}}{\omega \cdot L} \cdot \cos \omega t + \omega \cdot C \cdot U_{max} \cdot \cos \omega t$

$$i_T = \frac{U_{max}}{R} \cdot \sin \omega t + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot U_{max} \cdot \cos \omega\, t$$

Hacemos: $A \cdot \cos \varphi = \frac{U_{max}}{R}$

$$A \cdot \sin \varphi = \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot U_{max}$$

Entonces: $i_T = A \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi + A \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega\, t$

Pero elevando al cuadrado y sumando m.a.m. tenemos:

$$A \cdot \cos \varphi = \frac{U_{max}}{R}$$

$$\underline{A \cdot \sin \varphi = \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot U_{max}}$$

$$A^2 \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \left(\frac{U_{max}}{R}\right)^2 + \left[\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot U_{max}\right]^2$$

$$A^2 = \left(\frac{U_{max}}{R}\right)^2 + \left[\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) \cdot U_{max}\right]^2$$

$$A = U_{max} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left[\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)\right]^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)}{\frac{1}{R}}$$

Entonces: $\boxed{i_T = U_{max} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left[\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)\right]^2} \cdot \sin\left(\omega t + arctan \frac{\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)}{\frac{1}{R}}\right)}$

El ángulo φ será: $\boxed{\varphi = arctan \frac{\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)}{\frac{1}{R}}}$

Para calcular las impedancias y admitancias del circuito, aplicamos la ley de Ohm a cada una de sus ramas, obteniendo:

$$\left.\begin{array}{r} \bar{I_R} = \dfrac{\bar{U}}{R} \\ \bar{I_L} = \dfrac{\bar{U}}{jX_L} \\ \bar{I_C} = \dfrac{\bar{U}}{-jX_C} \end{array}\right\} \bar{I_T} = \frac{\bar{U}}{R} + \frac{\bar{U}}{jX_L} + \frac{\bar{U}}{-jX_C} = \bar{U} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C}\right)$$

La admitancia será entonces: $\boxed{\bar{Y_e} = \frac{1}{\bar{Z_e}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\,X_L} + \frac{1}{-j\,X_C}}$

Y la impedancia: $\boxed{\overline{Z_e} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\,X_L} + \frac{1}{-j\,X_C}}}$

Calculamos ahora sus módulos: $\overline{Z_e} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{j}{j \cdot j \cdot \omega \cdot L}+\frac{j}{-j \cdot j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}}} = \frac{1}{\frac{1}{R}-\frac{j}{\omega \cdot L}+j \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(\omega \cdot C-\frac{1}{\omega \cdot L}\right)}$

$$\boxed{Z_e = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left[\left(\omega \cdot C-\frac{1}{\omega \cdot L}\right)\right]^2}}}$$

$$\boxed{Y_e = \left(\frac{1}{R}\right)+\left(\omega \cdot C-\frac{1}{\omega \cdot L}\right)}$$

Resonancia en paralelo o anti resonancia

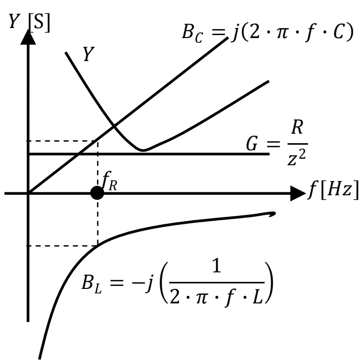
Un circuito paralelo R-L-C estará en resonancia, si, la frecuencia, es tal que hace la admitancia de entrada equivalente a la conductancia del circuito. La suceptancia inductiva y capacitiva se anulan.

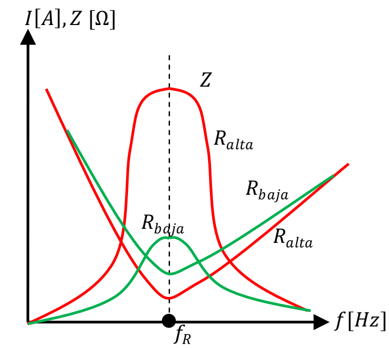
$$Y_e = G - j\left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right) = G - jB$$

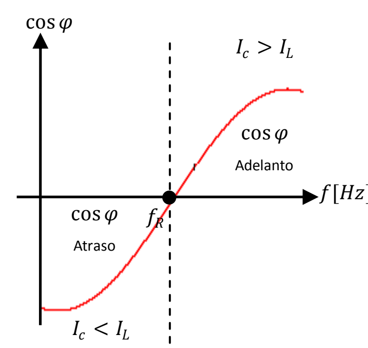
$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C \cdot L}}$$

Graficas de variación de la frecuencia:



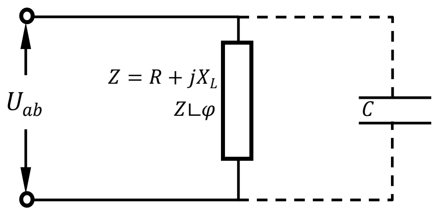


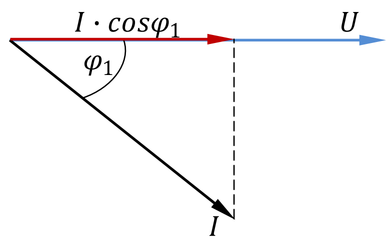


Corrección del factor de potencia

Desde el punto de vista de la economía en el transporte, para una misma potencia útil o activa nos interesa que el factor de potencia $(cos\varphi)$ sea lo más próximo a la unidad. Esto se consigue anulando total o parcialmente los efectos sobre la red de la potencia inductiva, mediante la instalación de condensadores en paralelo con la carga.

Supongamos un circuito monofásico donde tenemos una impedancia z con cierto ángulo. Por la línea, que tiene una resistencia óhmica, circula una corriente que resulta ser muy desfasada. Entonces:





Llamaremos entonces al ángulo inicial de desfase de la corriente φ_1. Como usuarios, estamos consumiendo *I* pero estamos pagando:

$P = U \cdot I \cdot cos\varphi_1 \quad [kW]$ que expresado en energía será:

$$W = P \cdot t = U \cdot I \cdot cos\varphi_1 \cdot t \quad [kWh]$$

Y este valor es el que pagamos.

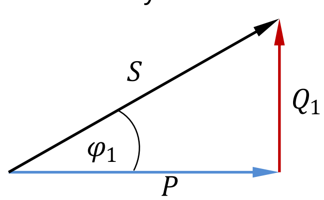
La corriente *I* tan desfasada, de gran valor, que consumimos, ocupa gran sección de los conductores y provoca caídas de tensión en la línea:

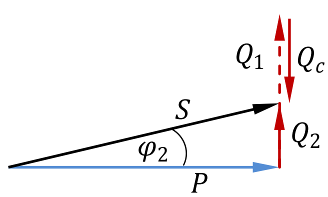
$\Delta U = R_L \cdot I$ Que son de gran valor y que perjudica a los otros usuarios. Por otro lado hay pérdidas de potencia, de valor:

$$\Delta P_L = R_L \cdot I^2$$

Así, la empresa distribuidora restringe a ciertos parámetros de potencia reactiva, para lo cual obliga a corregir el factor de potencia $cos\varphi$ con una *batería de capacitores*.

Vemos y analizamos el triángulo de potencias con y sin la batería de capacitores:





La potencia capacitiva necesaria para mejorar el factor de potencia será entonces:

$$Q_1 = P \cdot \tan\varphi_1$$

$$\underline{Q_2 = P \cdot \tan\varphi_2}$$

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P \cdot \left(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right)$$

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = \frac{U^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot U^2$$

Pero $Q_C = P \cdot \left(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right)$

$$P \cdot \left(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot U^2$$

Entonces la capacitancia necesaria para mejorar el factor de potencia se calcula como:

$$\boxed{C = \frac{P \cdot \left(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2\right)}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U^2}}$$