Funciones Racionales Impropias.

Contenido

Bibliografía recomendada:

Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, C. H. Edwards, D. E. Penny, Pearson Educación, Prentice Hall, 2009. ISBN 978-970-26-1285-8

Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, R. K. Nagle, E. B. Snaff, A. D. Snaider, Pearson Educación, 2001. ISBN 968-444-483-4

Introducción a las Señales y los Sistemas, D. K. Lindner, Mc Graw Hill, 2002. ISBN 980-373-049-5.

Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores de Frontera, D.G.Zill, M.R. Cullen, Thomson Learning, 2002.

Introducción.

Las funciones racionales impropias cumplen un rol muy importante en el análisis mediante Transformada de Laplace.

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H(s) \cdot G(s)$$

Las funciones racionales impropias se pueden expresar como la anterior forma de cociente de polinomios, o bien en las siguientes formas alternativas:

Forma factorizada de dichos polinomios, también llamada **Ceros Polos Ganancia**, que es

$$X(s) = K \frac{\prod_{j=1}^{Nz}(s - zj)}{\prod_{i=1}^{Np}(s - pi)}$$

siendo K la "Ganancia"; Nz el número de ceros de X(s); Np el número de Polos de X(s), y con Np>Nz. Los ceros son los valores *zj*; mientras que los polos son los valores *pi*.

Forma de Fracciones Parciales

$$X(s) = \sum_{i=1}^{Np} \frac{Ri}{(s - pi)}$$

siendo *Ri* una constante denominada residuo asociada al polo *pi*. La expresión de fracciones parciales se ajusta cuando hay polos repetidos.

El propósito de estas notas es mostrar sistemáticamente como encontrar la forma en fracciones parciales de funciones racionales impropias con ceros y polos conocidos, calculando los residuos mediante el uso de funciones implícitas; para cuando los polos son todos distintos.

Se comprobará que mientras los polos sean distintos, el residuo A_k asociado a un polo p_k se puede calcular mediante:

$$\boxed{A_k = \lim_{s \to (p_k)} \left(X_f(s) \cdot (s - p_k) \right) = \frac{\Pi\left(p_k - z_j\right)}{\Pi\left(p_k - p_i\right)} \quad con\ j = 1 : Nceros \ \ i = 1 : Npolos \ \ i \neq k}$$

El residuo es

- directamente proporcional a la constante de ganancia
- directamente proporcional al producto de las distancias del polo asociado al residuo con cada uno de los ceros
- inversamente proporcional al producto de las distancias del polo asociado al residuo con cada uno de los demás polos

La forma en fracciones parciales resulta

$$\boxed{X_f(s) = \sum_{k=1, N^\circ de\ polos} \left(\frac{A_k}{s - p_k} \right)}$$

Funciones Racionales Impropias

En el uso de Transformada de Laplace para obtener la respuesta en el tiempo *x(t)* de sistemas dinámicos, es frecuente la necesidad de trabajar con *funciones racionales impropias* que se pueden expresar como *X(s)*. En general, pueden presentarse en tres formas equivalentes*: como cociente de polinomios, en forma de cero polos ganancias y como fracciones parciales.*

La función racional impropia *X(s)* en la forma de **cociente de dos funciones polinómicas en s con coeficientes reales**, se expresa

$$X(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots\dots\dots+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots\dots\dots+a_2 s^2+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}\qquad con \quad m\le n$$

Se denominan **ceros de la Función *X(s)* a los valores de $s=r_k$** que anulan al polinomio *N(s)*. Se denominan **polos de *X(s)* a los valores de $s=p_k$** que anulan al polinomio *D(s)*, y hacen que *X(s)* sea singular. Cuando se aplica Transformada de Laplace a una Ecuación Diferencial Ordinaria típicamente se llega a expresiones en forma de cociente de polinomios.

Es posible expresar *X(s)* en la forma de **Ceros Polos Ganancia** cuando se conocen los ceros y los polos de *X(s)*. Para ello se escriben los polinomios *N(s)* y *D(s)* en **forma factorizada**.

$$X(s)=K\,\frac{(s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)\dots\dots\dots.(s-r_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots\dots\dots.(s-p_n)}$$

Es posible expresar *X(s)* en la forma de **Fracciones Parciales** cuando se conocen los polos de *D(s)* y se hace uso de los denominados residuos A_k. Así resulta simple encontrar las funciones en el tiempo cuyas transformadas de Laplace son cada una de las fracciones parciales. De esta manera se evita el cálculo de la Transformada inversa de Laplace.

Cuando se tienen n polos distintos, *X(s)* en forma de fracciones parciales resulta:

$$X(s)=\frac{A_1}{(s-p_1)}+\frac{A_2}{(s-p_2)}+\frac{A_3}{(s-p_3)}+\dots\dots\frac{A_n}{(s-p_n)}$$

Cuando se tiene un polo p_r repetido m veces, *X(s)* en forma de fracciones parciales resulta:

$$X(s)=\frac{B_1}{(s-p_r)}+\frac{B_2}{(s-p_r)^2}+\frac{B_3}{(s-p_r)^3}+\dots\dots\frac{B_m}{(s-p_r)^m}$$

Cuando hay *n* polos distintos y un polo repetido *m* veces, *X(s)* en forma de fracciones parciales resulta

$$X(s)=\frac{A_1}{(s-p_1)}+\frac{A_2}{(s-p_2)}+\frac{A_3}{(s-p_3)}+\dots\dots\frac{A_n}{(s-p_n)}+$$
$$+\frac{B_1}{(s-p_r)}+\frac{B_2}{(s-p_r)^2}+\frac{B_3}{(s-p_r)^3}+\dots\dots\frac{B_m}{(s-p_r)^m}$$

Para obtener los valores de los residuos A_k y B_k siempre es posible plantear dos posibilidades:

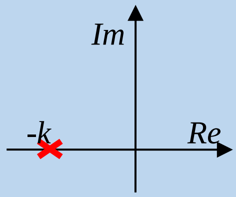
- Mediante la solución del **sistema de ecuaciones lineales** que surge de realizar la operación de suma de las fracciones parciales e igualar los coeficientes de los numeradores de ambos miembros de *X(s)*;
- Mediante el empleo de **funciones implícitas**.

Cuando hay polos o ceros complejos siempre son complejos conjugados, ya que se consideran polinomios de coeficientes reales. Cuando hay polos complejos, para obtener los valores de los residuos A_k y B_k resulta conveniente la forma polar para los complejos.

Para el cálculo de los residuos es conveniente tener la expresión de la función racional en la forma de Cero Polos Ganancia, ya que facilita los cálculos y permite interpretarlos gráficamente.

Ejemplo de un Polo Real

Sea la función racional con coeficientes reales



$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b}{s+k}$$

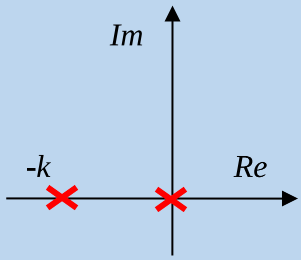
Por tratarse de un único polo ocurre que las tres formas coinciden.

Si hay un solo polo, el mismo es necesariamente real, ya que si hay polos complejos son complejos conjugados, y de modo que se trataría de un polinomio de grado dos al menos.

Si hay un solo polo, el denominador es un polinomio de grado uno; por lo tanto, el numerador es un polinomio de grado cero, ya que se consideran funciones racional impropias.

Ejemplo de Dos Polos Reales y Distintos, con Numerador de grado cero, mediante SEL

Sea la función racional con coeficientes reales



$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b}{s(s+k)} = \frac{1}{(s+k)} \cdot \frac{b}{s}$$

con polos en s=-k y s=0. La forma en fracciones parciales resulta

$$X_f(s) = \frac{A}{s+k} + \frac{B}{s}$$

A partir de las fracciones parciales es posible expresar

$$X_f(s) = \frac{A}{(s+k)} \cdot \frac{s}{s} + \frac{B}{s} \cdot \frac{(s+k)}{(s+k)} = \frac{s(A+B) + B \cdot k}{s(s+k)}$$

De comparar ésta última expresión de $X_f(s)$ con la expresión original de $X_f(s)$ se tiene

$$\begin{cases} B \cdot k = b \\ (A+B) = 0 \end{cases}$$

Y resulta que A=-B=-(b/k). Los residuos tienen valores **directamente proporcionales a la constante b**, e **inversamente proporcional a la distancia entre los polos p=0 y p= -k**. Así la expresión de fracciones parciales es

$$X_f(s) = \frac{-b/k}{s+k} + \frac{b/k}{s}$$

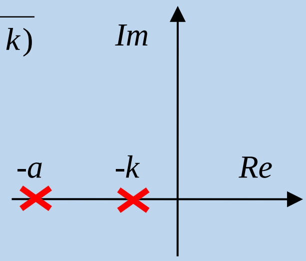
La función en el tiempo $x_f(t)$ cuya Transformada de Laplace es $X_f(s)$ resulta:

$$x_f(t) = \frac{b}{k} \cdot [1 - e^{-k \cdot t}].$$

Ejemplo de Dos Polos Reales y Distintos, con Numerador de grado cero, mediante Función Implícita

Sea la función racional

$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b}{(s+a)(s+k)} = \frac{b}{(s^2 + s(k+a) + a\cdot k)}$$



cuyos polos son s= -k y s= -a.

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s) = X_f(s) - \frac{A}{(s+k)} - \frac{B}{(s+a)} = 0 \quad \forall s$$

Si se multiplica la función implícita $\varphi(s)$ por $(s+k)$, resulta

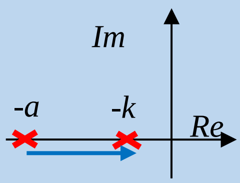
$$\varphi(s)\cdot(s+k) = X_f(s)\cdot(s+k) - \frac{A}{(s+k)}\cdot(s+k) - \frac{B}{(s+a)}\cdot(s+k) = 0 \quad \forall s$$

En particular si se toma limite cuando s tiende a (-k) resulta

$$\lim_{s\to -k}[\varphi(s)\cdot(s+k)] = \lim_{s\to -k}\left(X_f(s)\cdot(s+k) - A - \frac{B}{(s+a)}\cdot(s+k)\right) = 0$$

De donde

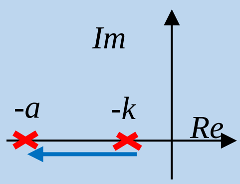
$$A = \lim_{s\to(-k)}\left(X_f(s)\cdot(s+k)\right) = \lim_{s\to(-k)}\left(\frac{b}{(s+a)(s+k)}\cdot(s+k)\right) = \frac{b}{(-k+a)}$$



El denominador del residuo “A” está representado por el vector con extremo en le polo “-k” asociado al residuo, y origen en el otro polo.

Análogamente, mediante un razonamiento similar resulta

$$B = \lim_{s\to(-a)}\left(X_f(s)\cdot(s+a)\right) = \lim_{s\to(-a)}\left(\frac{b}{(s+a)(s+k)}\cdot(s+a)\right) = \frac{b}{(-a+k)}$$



El denominador del residuo “B” está representado por el vector con extremo en el polo “-a” asociado al residuo, y origen en el otro polo.

Los valores de los residuos resultan **inversamente proporcionales a la distancia entre los polos p= -a y p= -k; y directamente proporcionales a la constante b de la función racional**. Es oportuno destacar que los cálculos se facilitan cuando se conoce la forma cero polo ganancia de la función racional.

Así la expresión de fracciones parciales es

$$X_f(s) = \frac{(b/(-k+a))}{s+k} + \frac{(b/(-a+k))}{s+a}$$

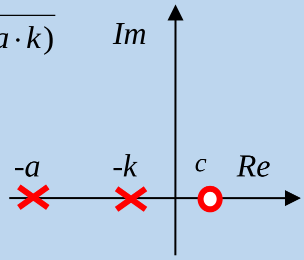
La función en el tiempo $x_f(t)$ cuya Transformada de Laplace es $X_f(s)$ resulta:

$$x_f(t) = \frac{b}{-k+a}\cdot[e^{-k\cdot t} - e^{-a\cdot t}].$$

Ejemplo con Polos Reales Distintos, y con un Cero mediante Función Implícita

Sea la función racional

$$X_f(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{s-c}{(s+a)(s+k)}=K\frac{s-c}{(s^2+s(k+a)+a\cdot k)}$$



cuyos polos son s=-k y s=-a.

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s)=X_f(s)-\frac{R_1}{(s+k)}-\frac{R_2}{(s+a)}=0 \quad \forall s$$

Si se multiplica la función implícita $\varphi(s)$ por $(s+k)$, resulta

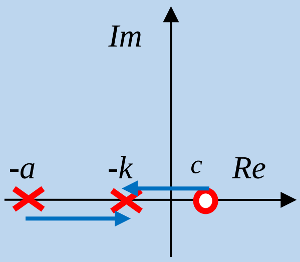
$$\varphi(s)\cdot(s+k)=X_f(s)\cdot(s+k)-\frac{R_1}{(s+k)}\cdot(s+k)-\frac{R_2}{(s+a)}\cdot(s+k)=0 \quad \forall s$$

En particular si se toma limite cuando s tiende a (-k) resulta

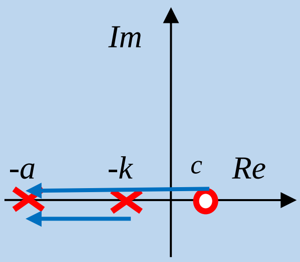
$$\lim_{s\to -k}\left[\varphi(s)\cdot(s+k)\right]=\lim_{s\to -k}\left(X_f(s)\cdot(s+k)-R_1-\frac{R_2}{(s+a)}\cdot(s+k)\right)=0$$

De donde

$$R1= A=\lim_{s\to(-k)}\left(X_f(s)\cdot(s+k)\right)=\lim_{s\to(-k)}\left(K\frac{s-c}{(s+a)(s+k)}\cdot(s+k)\right)=K\frac{-k-c}{(-k+a)}$$



El numerador (-k-c) está representado por el vector con extremo en –k y origen en c, con modulo (c+k) y argumento igual a pi (ángulo entre el vector y el eje Real apositivo). El denominador, está representado por el vector con extremo en –k y origen en -a, con modulo igual al valor absoluto de (-k+a), y argumento igual a pi (ángulo entre el vector y el eje Real positivo).



Análogamente, mediante un razonamiento similar resulta

$$R2= B=\lim_{s\to(-a)}\left(X_f(s)\cdot(s+a)\right)=\lim_{s\to(-a)}\left(K\frac{s-c}{(s+a)(s+k)}\cdot(s+a)\right)=K\frac{-a-c}{(-a+k)}$$

El numerador (-a-c) está representado por el vector con extremo en –a y origen en c, con modulo (c+a) y argumento igual a pi (ángulo entre el vector y el eje Real apositivo). El denominador, está representado por el vector con extremo en –a y origen en -k, con modulo igual al valor absoluto de (-a+k), y argumento igual a 0 (ángulo entre el vector y el eje Real positivo).

Notar que el residuo asociado a un polo, es inversamente proporcional a la distancia entre polos, y directamente proporcional a la distancia entre dicho polo y el cero. Los residuos son directamente proporcionales a la K de la forma Cero Polo Ganancia.

Así la expresión de fracciones parciales es

$$X_f(s)=K\left[\frac{(-k-c)}{(-k+a)}\;(\frac{1}{s+k})+(\frac{1}{s+a})\;\frac{(-a-c)}{(-a+k)}\right]$$

Cuando el cero "se acerque" a un polo, el residuo asociado a ese polo tiende a cero.

La función en el tiempo $x_f(t)$ cuya Transformada de Laplace es $X_f(s)$ resulta:

$$x_f(t) = K\left[\frac{(-k-c)}{(-k+a)} \cdot e^{-k\cdot t} - \frac{(-a-c)}{(-a+k)} \cdot e^{-a\cdot t}\right]$$

Ejercicios con Polos Reales y Distintos

Encontrar la forma en Fracciones parciales de las siguientes funciones racionales.

1. $X(s) = \frac{1}{(s^2+s\cdot 5+6)}$

   Comprobar que los polos son s=-2; s=- 3; de modo que la forma factorizada de X(s) es

   $$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

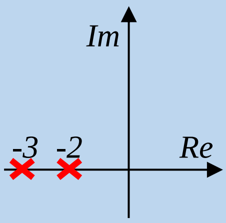
   La forma de X(s) en fracciones parciales es

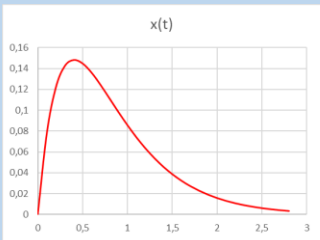
   $$X(s) = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)}$$

   Comprobar que A=1/(-2+3); y B=1/(-3+2), y que la forma de X(s) en fracciones parciales es

   $$X(s) = \frac{1}{(s+2)} + \frac{(-1)}{(s+3)}$$

   con función en el tiempo asociada $x_f(t) = \left[\frac{1}{(-2+3)} \cdot e^{-2\cdot t} + \frac{1}{(-3+2)} \cdot e^{-3\cdot t}\right]$





2. $X(s) = \frac{1}{(s+5)}\frac{1}{(s^2+s\cdot 5+6)}$

   Comprobar que los polos son s=-2; s=- 3; de modo que la forma factorizada de X(s) es

   $$X(s) = \frac{1}{(s+5)}\frac{1}{(s+3)}\frac{1}{(s+2)}$$

   La forma de X(s) en fracciones parciales es

   $$X(s) = \frac{A}{(s+5)} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+2)}$$

   Comprobar que A=(1/(-5+3)(-5+2)); y B=(1/(-3+5)(-3+2)); C=(1/(-2+5)(-2+3)), y que la forma de X(s) en fracciones parciales es

   $$X(s) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{(s+5)} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(s+3)} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{(s+2)}$$

3. $X(s) = \frac{s+4}{(s^2+s\cdot 5+6)}$

   Comprobar que los polos son s=-2; s=- 3; y un cero en s= xxx. La forma factorizada de X(s) es

   $$X(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$$

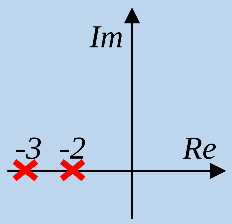
   La forma de X(s) en fracciones parciales es

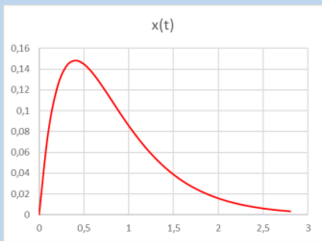
   $$X(s) = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)}$$

   Comprobar que A=1/(-2+3); y B=1/(-3+2), y que la forma de X(s) en fracciones parciales es

   $$X(s) = \frac{1}{(s+2)} + \frac{(-1)}{(s+3)}$$

   con función en el tiempo asociada $x_f(t) = \left[\frac{1}{(-2+3)} \cdot e^{-2\cdot t} + \frac{1}{(-3+2)} \cdot e^{-3\cdot t}\right]$

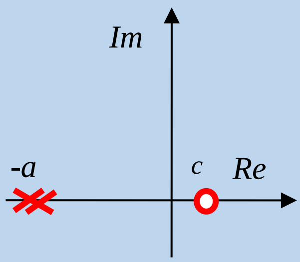




Ejemplo con Polos Reales Repetidos, y con un Cero mediante Función Implícita

Sea la función racional

$$X(s) = K\frac{s-c}{(s+a)^2} = K\frac{s-c}{(s+a)(s+a)}$$



cuyos polos son s=-a y s=-a.

Se busca la forma de fracciones parciales de X(s)

$$X(s) = \frac{A}{(s+a)} - \frac{B}{(s+a)^2}$$

Es posible **definir la siguiente función implícita**

$$\varphi(s) = X(s) - \frac{A}{(s+a)} - \frac{B}{(s+a)^2} = 0 \quad \forall\, s$$

Si se multiplica la función implícita *φ(s)* por $(s+a)^2$, resulta

$$\varphi(s)(s+a)^2 = (s+a)^2\left[X(s) - \frac{A}{(s+a)} - \frac{B}{(s+a)^2}\right] = 0 \qquad \forall\, s \neq (-a)$$

En particular si se toma limite cuando s tiende a (-a) resulta

$$\lim_{s\to(-a)}[\varphi(s)(s+a)^2] = 0$$

$$\lim_{s\to(-a)}[\varphi(s)(s+a)^2] = \lim_{a\to(-a)}\left\{(s+a)^2\left[X(s)-\frac{A}{(s+a)}-\frac{B}{(s+a)^2}\right]\right\} = 0$$

de donde es posible escribir

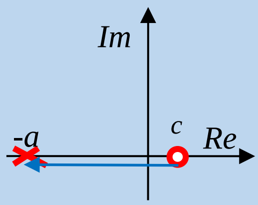
$$\lim_{s\to(-a)}\left\{\left[(s+a)^2X(s)-(s+a)^2\frac{A}{(s+a)}-(s+a)^2\frac{B}{(s+a)^2}\right]\right\} = 0$$

que resulta

$$\lim_{a\to(-a)}\{[(s+a)^2X(s)-(s+a)A-B]\} = 0$$

Que resulta

$$B = \lim_{s\to(-a)}\{(s+a)^2X(s)\} = \lim_{s\to(-a)}\left\{(s+a)^2\cdot K\frac{(s-c)}{(s+a)^2}\right\}$$
$$= K(-a-c)$$



$$B = K(-a-c)$$

El número (-a-c) está representado por el vector con extremo en –a y origen en c; tiene modulo (a+c) y argumento pi (ángulo entre el vector y el eje Real positivo).

Si se multiplica la función implícita $\varphi(s)$ por $(s+a)$, resulta

$$\varphi(s)(s+a) = \left[(s+a)X(s)-(s+a)\frac{A}{(s+a)}-(s+a)\frac{B}{(s+a)^2}\right] = 0 \qquad \forall\, s \neq (-a)$$

Al tomar limite cuando s tiende a (-a) resultará un límite que tiende a infinito; de modo que no se puede calcular el residuo A de esta forma. Es conveniente recurrir a plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales. Así de la igualdad

$$X(s) = K\frac{s-c}{(s+a)^2} = \frac{A}{(s+a)}+\frac{B}{(s+a)^2}$$

es conveniente realizar la suma de fracciones parciales y obtener

$$K\frac{s-c}{(s+a)^2} = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2}+\frac{B}{(s+a)^2}$$

que se puede expresar como

$$K\frac{s-c}{(s+a)^2} = \frac{A(s+a)+B}{(s+a)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también lo deben ser. Entonces los coeficientes de los polinomios de ambos numeradores deben tener coeficientes iguales. Así resulta

$$\begin{cases} K = A \\ K(-c) = Aa + B \end{cases}$$

De donde se verifica que valor de B obtenido con la metodología de función implícita y se obtiene que $K = A$. Así la expresión de fracciones parciales es

$$X(s) = \frac{K}{(s+a)} + K\frac{(-a-c)}{(s+a)^2}$$

Cuando el cero "se acerque" al polo, el residuo asociado a ese polo doble tiende a cero.

En el límite se simplifica el cero con el polo, quedando la función racional con orden de multiplicidad menor para el polo repetido. En este caso, la función racional con polo doble en s=-a, queda con un polo simple en s=-a, y con numerador de orden cero.

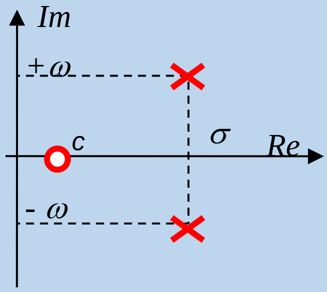
La función en el tiempo $x_f(t)$ cuya Transformada de Laplace es $X_f(s)$ resulta:

$$x_f(t) = K[e^{-a\cdot t} + (-a-c)\cdot t \cdot e^{-a\cdot t}]$$

Nota que si c tiende a (-a) el coeficiente de la función $t\cdot e^{-a\cdot t}$ tiende a cero, y sólo queda como función en el tiempo $x_f(t) = Ke^{-a\cdot t}$ asociado a X(s)=K/(s+a), que es la función racional simplificada.

Ejemplo de Polos Complejos Conjugados con un Cero, mediante función implícita

Sea la función racional



$$X_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K\frac{s-c}{(s-p)(s-pc)}$$

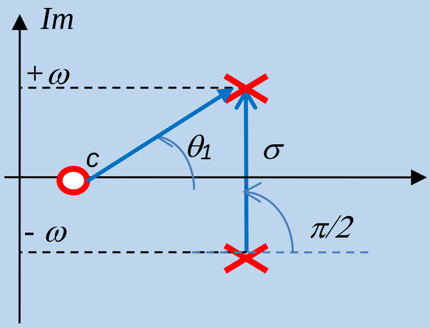
cuyos polos son complejos conjugados: $p = (\sigma + j\omega)$, $pc = (\sigma - j\omega)$

Se define la siguiente función implícita

$$\varphi(s) = X_f(s) - \frac{R_1}{(s-p)} - \frac{R_2}{(s-pc)} = 0 \quad \forall s$$

Haciendo uso de las propiedades de funciones implícitas, los residuos se pueden calcular haciendo uso de la forma polar o cartesiana.

Alternativa con uso de la forma polar para los residuos.



$$R_1 = \lim_{s\to(p)}\left(X_f(s)\cdot(s-p)\right) = \lim_{s\to(p)}\left(K\frac{(s-p)(s-c)}{(s-p)(s-pc)}\right)$$

$$R_1 = K\frac{p-c}{p-pc} = K\frac{\rho_1\cdot e^{j\theta_1}}{2\omega\cdot e^{j\pi/2}} = K\rho_R\cdot e^{j\theta_R}$$

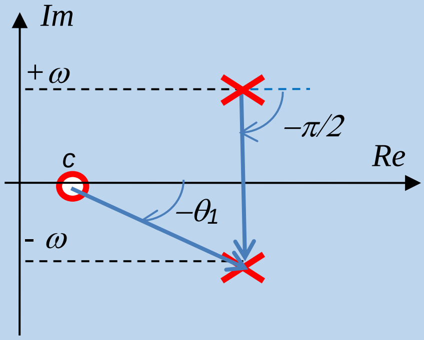
Siendo el numerador *(p-c)* representado por el vector que une el cero con el polo p, cuyo modulo ρ_1 y su argumento θ_1 son:

$$\rho_1 = \sqrt{\left(\omega^2 + (\sigma-c)^2\right)} \qquad \theta_1 = arctg\left(\frac{\omega}{\sigma - c}\right)$$

El denominador *(p-pc)* está representado por el vector que une el polo pc con el polo p, cuyo modulo 2ω y su argumento $\pi/2$. Así el residuo R_1 asociado al polo p tiene módulo ρ_R dado por el cociente entre los módulos del numerador y el denominador, y como argumento θ_R la resta de los argumentos del numerado y el denominador:

$$\rho_R = \rho_1/(2\omega) \qquad \theta_R = \theta_1 - \pi/2$$

Similarmente para el residuo R_2, se tiene:



$$R_2 = \lim_{s \to (p)} \left(X_f(s) \cdot (s - pc) \right) = \lim_{s \to (pc)} \left(\left(K \frac{(s-pc)(s-c)}{(s-p)(s-pc)} \right) \right)$$

$$R_2 = K \frac{pc - c}{pc - p} = K \frac{\rho_1 \cdot e^{-j\theta_1}}{2\omega \cdot e^{-j\pi/2}} = K\rho_R \cdot e^{-j\theta_R}$$

Resultan que los residuos de polos complejos conjugados son valores también complejos conjugados.

Notar que los residuos asociados a polos complejos conjugados, son inversamente proporcionales a la distancia (2ω) **entre los polos complejos conjugados, y directamente proporcional a la distancia** ρ_1 **entre dichos polos y el cero.**

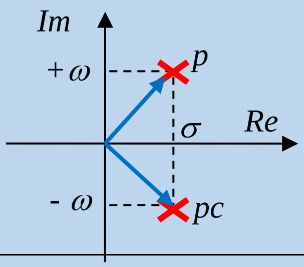
La expresión en fracciones parciales es

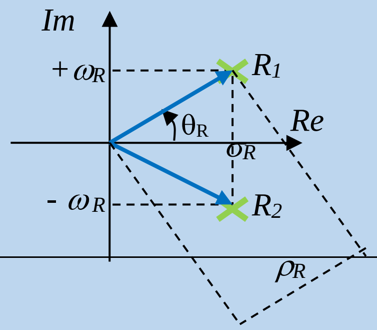
$$\boxed{X_f(s) = \frac{R_1}{(s-p)} + \frac{R_2}{(s-pc)}}$$

Siendo los polos p y pc complejos conjugados, como así también los residuos R_1 y R_2.

$$p = \sigma + j \cdot \omega \qquad R_1 = K(\sigma_R + j \cdot \omega_R) = K\rho_R \cdot e^{+j\theta_R}$$

$$pc = \sigma - j \cdot \omega \qquad R_2 = K(\sigma_R - j \cdot \omega_R) = K\,\rho_R \cdot e^{-j\theta_R}$$





Ejercicio.

Considerar que ocurre si *c tiende a 0.*

¿A qué valor tienden R_1 y R_2?

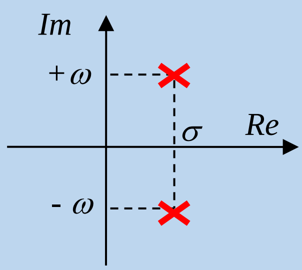
¿Cómo resulta la solución?

Considerar que ocurre si *c tiende a* σ, y responder las mismas preguntas anteriores

Ejercicio.

Sea la función racional

$$X_f(s) = \frac{K}{(s-p)(s-pc)}$$



cuyos polos son complejos conjugados: $p = (\sigma + j\omega)$, $pc = (\sigma - j\omega)$

Haciendo uso de función implícita comprobar que

$$X_f(s) = \frac{R_1}{(s-p)} + \frac{R_2}{(s-pc)} = \frac{K}{2\omega}\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{(s-p)} + \frac{e^{+j\frac{\pi}{2}}}{(s-pc)}\right)$$

Notar que los residuos asociados a polos complejos conjugados, son inversamente proporcionales a la distancia (2ω) entre los polos complejos conjugados, y directamente proporcional a la constante K.

Ejercicio.

Considerar las X(s) dadas y encontrar la forma de fracciones parciales

$$X_f(s) = \frac{5 \cdot s - 4}{s^2 + 0{,}4 \cdot s + 9{,}04}$$

$$X(s) = \frac{s + 4}{s^2 + s + 3}$$

$$X_f(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 2s + 5}$$

En resumen:

Cuando se tienen polos distintos es posible calcular el residuo asociado a cada polo usando funciones implícitas y la forma cero polo ganancia de la función racional, mediante:

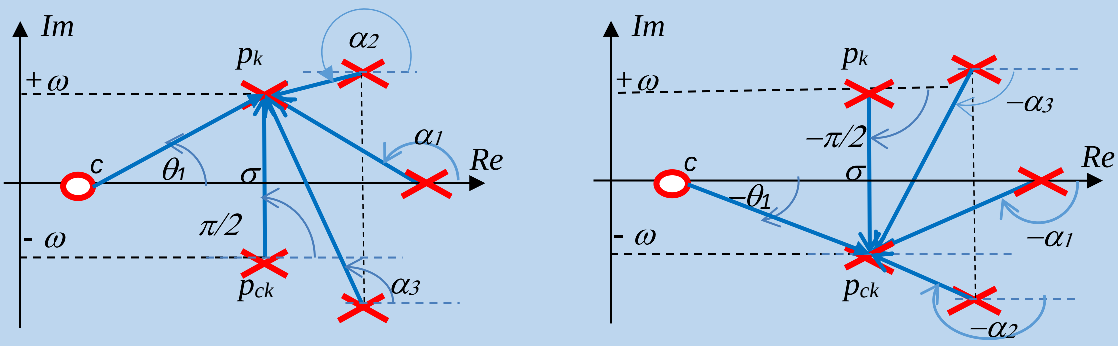
$$\boxed{A_k = \lim_{s \to (p_k)} \left(X_f(s) \cdot (s - p_k) \right) = \frac{\Pi\left(p_k - z_j\right)}{\Pi\left(p_k - p_i\right)} \quad con\ j = 1 : Nceros\ \ i = 1 : Npolos\ \ i \neq k}$$

Para expresar $\boxed{X_f(s) = \sum_{k=1, N^\circ de\ polos} \left(\frac{A_k}{s - p_k} \right)}$

El denominador del residuo A_k asociado al polo p_k, es igual producto de todos los números complejos $(p_k - p_i)$, cuyos vectores en el plano complejo se generan desde cada polo p_i de la función racional, hasta el polo p_k cuyo residuo se está calculando. El número complejos $(p_k - p_i)$ en notación polar tendrá argumento α_{ki} y modulo ρ_{ki}.

El numerador del residuo A_k asociado al polo p_k, es igual producto de todos los números complejos $\left(p_k - z_j\right)$, cuyos vectores en el plano complejo se generan desde cada cero z_j de la función racional, hasta el polo p_k cuyo residuo se está calculando. El número complejos $\left(p_k - z_j\right)$ en notación polar tendrá argumento θ_{kj} y modulo ρ_{kj}.

Es oportuno destacar que cunado los polinomios de las funciones complejas tienen coeficientes reales, entonces si un número complejo es polo o cero, también los será su complejo conjugado. En la siguiente figura se pueden observar los vectores que representa los números complejos que participan en el cálculo del residuo asociado a un polo complejo $p_k = (\sigma + j\ \omega)$; y lo propio, con el complejo conjugado $p_{ck} = (\sigma - j\ \omega)$.



Se debe destacar que un número complejo y su complejo conjugado siempre están ubicados en forma simetría respecto del eje real del plano complejo. En base a ello se puede observar que si en el cálculo del residuo A_k asociado al polo $p_k = (\sigma + j\,\omega)$, aparece un número complejo $(p_k - p_i)$, con argumento α_{ki} y modulo ρ_{ki}; en el cálculo del residuo A_{ck} asociado al polo complejo conjugado $p_{ck} = (\sigma - j\,\omega)$, aparece el número complejo $(p_{ck} - p_i)$, con argumento $(-\alpha_{ki})$ e igual modulo ρ_{ki}. Análogamente al considerar los ceros para el cálculo del residuo A_k, si aparece un número complejo $\left(p_k - z_j\right)$ con argumento θ_{kj} y modulo ρ_{kj}; en el cálculo del residuo A_{ck}, aparece un número complejo $\left(p_{ck} - z_j\right)$ con argumento $-\theta_{kj}$ y modulo ρ_{kj}. De este modo, es posible asegurar que los residuos de polos complejos conjugados son números complejos conjugados.

Es posible asegurar que:

si un polo complejo $\boldsymbol{p_k = (\sigma + j\,\omega)}$ tiene residuo $\boldsymbol{A_k = (\sigma_{Ak} + j\,\omega_{Ak})=\rho_{Ak} \cdot e^{j\beta k}}$, el polo conjugado $\boldsymbol{p_{ck} = (\sigma - j\,\omega)}$ tendrá residuo $\boldsymbol{A_{ck} = (\sigma_{Ak} - j\,\omega_{Ak}) = \rho_{Ak} \cdot e^{-j\beta k}}$.

Ejercicios de Funciones Racionales

Dadas las siguientes funciones racionales, encontrar la forma de Ceros Polos Ganancia; la forma de Fracciones Parciales. Graficar la posición de los ceros y polos en el Plano s para

Polos Reales y Distintos

- $X(s) = \dfrac{4}{s^2 + 4 \cdot s}$
- $X(s) = \dfrac{3 \cdot s + 4}{s^2 + 3 \cdot s + 2}$
- $X(s) = \dfrac{2 \cdot s + 3}{s^3 + 4 \cdot s^2 + 3 \cdot s}$

Polos Reales e Iguales

- $X(s) = \dfrac{s - 1}{s^2 - 4s + 4}$
- $X(s) = \dfrac{2}{s^2 \cdot (s + 4)}$

Polos Complejos

- $X(s) = \dfrac{4 \cdot s + 3}{s^2 + \omega^2}$
- $X(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 10}$
- $X(s) = \dfrac{s + 4}{s^2 + s + 3}$

- $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2 - 2s + 5}$

Polos Reales y Complejos

- $X(s) = \dfrac{1}{s+k} \cdot \dfrac{9}{s^2 + 25}$
- $X(s) = \dfrac{1}{s+3} \cdot \dfrac{6 \cdot s^2 + 50}{s^2 + 4}$