Funciones de varias variables o campos escalares: Linealización y extremos

Ingeniería

Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables

2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange

3. Anexo: Ejemplos varios

Recorrido

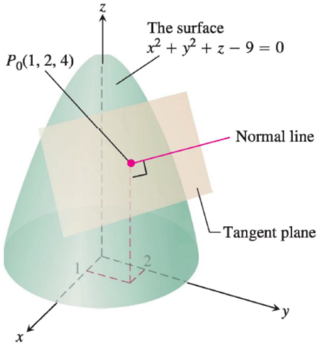
1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables
2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange
3. Anexo: Ejemplos varios

Recorrido

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Definición (Plano tangente y recta normal a una **superficie de nivel**)

Si f es una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, el **plano tangente** y la **recta normal** a la superficie de nivel de f que contiene al punto (x_0, y_0, z_0), en dicho punto, son el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es normal al vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector director $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, respectivamente.



Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Halle las ecuaciones de los planos tangentes y rectas normales a las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasan por lo puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$, en dichos puntos.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Halle las ecuaciones de los planos tangentes y rectas normales a las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasan por lo puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$, en dichos puntos.
Sol.: la superficie de nivel de f que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ es $f(x, y, z) = f(1, 0, 0)$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
Ecuación plano tangente (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$): $x = 1$.
Ecuación recta normal (a sup. nivel en $(1, 0, 0)$):
$\mathrm{r}(t) = (1 + 2t, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}$.

Planos tangentes y rectas normales a superficies de nivel

Plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en un punto de la misma, P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$,:

$$(x, y, z) = P_0 + t\nabla f(P_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Halle las ecuaciones de los planos tangentes y rectas normales a las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasan por lo puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$, en dichos puntos.
Sol.: la superficie de nivel de f que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ es $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; es un punto y $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
Ecuación plano tangente: no existe el plano tangente (a sup. nivel en $(0, 0, 0)$).
Ecuación recta normal: no existe recta normal (a sup. nivel en $(0, 0, 0)$).

Planos tangentes y rectas normales

Caso especial: ¿cómo se aplica al caso de una función f de dos variables?

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

El gráfico de f es la superficie de nivel $g(x, y, z) = 0$.

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ **en el punto** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$**:**

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ **en el punto** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$**:**

$$\begin{cases} x = x_0 + 2x_0 t \\ y = y_0 + 2y_0 t \\ z = z_0 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

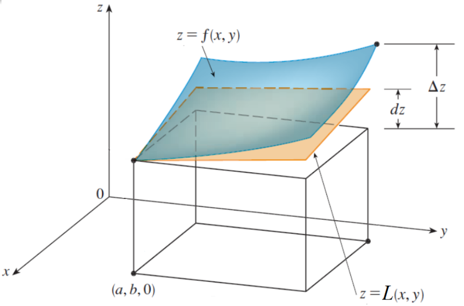
Recorrido

Linealización o Aproximación Lineal Estándar de una función f en un punto

Definición

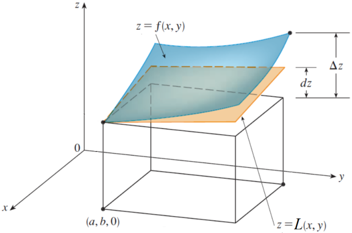
Si f es una función de dos variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



Linealización de una función de dos variables en un punto

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$



$$\begin{aligned}
\Delta L(x_0,y_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - L(x_0,y_0) \\
&= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y - f(x_0,y_0) - 0 - 0 \\
&= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y
\end{aligned}$$

$$\Delta f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}_{f(x,y)} = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\underbrace{L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}_{L(x,y)} = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

Definición

Si f es una función de tres variables y existen las derivadas parciales de f en un punto P_0 del interior del dominio de f, se define la linealización de f en P_0 por

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

No contamos con una representación gráfica conveniente de este caso.

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)+$$
$$+f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta L(P_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - L(x_0,y_0,z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \end{aligned}$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \\ + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta L(P_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - L(x_0,y_0,z_0) \\ &= f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0 \\ &= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(P_0) = \quad & f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z \\ & + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z. \end{aligned}$$

Linealización de una función de tres variables en un punto

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)+$$
$$+f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

$$L(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)$$

$$\begin{aligned}
\Delta L(P_0) &= L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - L(x_0,y_0,z_0)\\
&= f(P_0)+f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z - f(P_0) - 0\\
&= f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(P_0) = \quad & f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z\\
& +\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z.
\end{aligned}$$

Observación: si f es diferenciable en P_0, L provee una buena aproximación de f en un entorno de P_0.

Recorrido

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

Diferencial de una función de dos variables

Definición

Si f es diferncíable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy,$$

si f es de dos variables.

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

$$df_{(x_0,y_0)}(dx, dy) = \qquad f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Diferencial de una función de tres variables

Definición

Si f es diferenciable en un punto P_0 interior a su dominio, la **diferencial** o **diferencial total** de f en P_0 es la transformación lineal dada por

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz,$$

si f es de tres variables.

Si f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) =$$
$$f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y + f_z(P_0)\Delta z + {\scriptstyle \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z}.$$

$$L_{f,P_0}(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0).$$

$$df_{(P_0)}(dx, dy, dz) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz.$$

Ejemplo

$f(x,y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy \qquad f(1,2) = 30$

$\nabla f(x,y) = (12x + 6y, 6y + 6x) \qquad \nabla f(1,2) = (24,18)$

Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$,

$$\underbrace{f(1+\Delta x, 2+\Delta y) - f(1,2)}_{\Delta f(1,2)} = 24\Delta x + 18\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

$L_{f,(1,2)}(x,y) = 30 + 24(x-1) + 18(y-2)$

$df_{(1,2)}(dx,dy) = 24dx + 18dy$

$f(1,2) = 30; \qquad L_{f,(1;2)}(1,2) = 30; \qquad df_{(1,2)}(0,0) = 0$

$f(1{,}1; 1{,}9) = 30{,}63; \qquad L_{f,(1;2)}(1{,}1; 1{,}9) = 30{,}6; \qquad df_{(1;2)}(0{,}1; -0{,}1) = 0{,}6$

Recorrido

1. Linealización de una función y diferencial total de una función
   - Planos tangentes y rectas normales
   - Linealización de una función en un punto
   - Diferencial de una función en un punto
   - Aplicaciones
   - Fórmula de Taylor para dos variables
2. Valores extremos y puntos de silla
   - Conceptos y definiciones
   - Extremos de funciones en regiones acotadas y no acotadas
   - Extremos condicionados: método de multiplicadores de Lagrange
3. Anexo: Ejemplos varios

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h. Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera, según los valores de r y h.

Ejemplo: estimación del error en el volumen de una lata cilíndrica

El volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto va a calcularse a partir de los valores de r y h. Suponga que las mediciones que se tiene de r y h están sujetas a error.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + \varepsilon_r \Delta r + \varepsilon_h \Delta h \approx V_r \Delta r + V_h \Delta h = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Si los valores nominales r y h están fijos, pequeños errores Δr y Δh influyen de distinta manera, según los valores de r y h.Como

$$|error| = \left| \frac{Aprox - Real}{Real} \right| = \left| \frac{\Delta magnitud}{magnitud\ real} \right|,$$

si se mide r con un error no mayor de ε_r y h con un error que no supera ε_h, el máximo error posible en el cálculo de V es

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h}{\pi r^2 h} \right| \leq 2\left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| \leq 2\varepsilon_r + \varepsilon_h$$

Recorrido

Fórmula de Taylor para dos variables

Dados $(a,b) \in \operatorname{int} D$ y h, k tales que $(a+h, b+k) \in D$,

definimos $\mathrm{r}(t) = (a + \frac{t}{\beta}h, b + \frac{t}{\beta}k)$, $0 \leq t \leq \beta$

que une (a,b) y $(a+h, b+k)$. Entonces:

$$f(a+h, b+k) = f(\mathrm{r}(\beta)); \qquad f(a,b) = f(\mathrm{r}(0)).$$

Definimos la función compuesta w por

$$w(t) := f(\mathrm{r}(t)); \qquad \text{así:} \quad f(a+h, b+k) = w(\beta); \qquad f(a,b) = w(0).$$

Recordando la **fórmula de Taylor para** w **alrededor de 0**:

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

para algún c entre 0 y t.

Fórmula de Taylor para dos variables

$$w(t) = w(0) + w'(0)t + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } t$$

$$w(\beta) = w(0) + w'(0)\beta + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!}\beta^n + \frac{w^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\beta^{n+1}, \text{ } c \text{ entre } 0 \text{ y } \beta$$

Si f y sus derivadas parciales hasta orden $n+1$ son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a,b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a,b)} + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+\frac{c}{\beta}h, b+\frac{c}{\beta}k)}$$

para cierto c entre 0 y β.

Fórmula de Taylor para dos variables

Si f y sus derivadas parciales hasta orden 2 son continuas en una región rectangular abierta R con centro en (a, b), entonces en R:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y)\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\,\Big|_{(a+\frac{c}{\beta}h,\, b+\frac{c}{\beta}k)}$$

para cierto c entre 0 y β.

Observación: la linealización de f en (a, b) coincide con la fórmula de Taylor de primer orden sin el término de error.

Recorrido

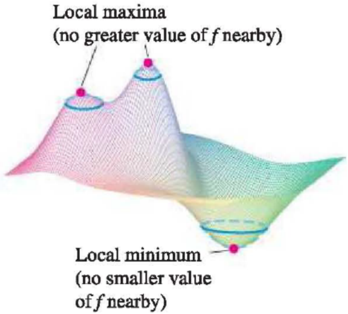
Recorrido

Definiciones de máximo local y mínimo local

Definición

Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los $(x, y) \in D(f)$ de algún entorno de (a, b), entonces f(a, b) es un (valor) máximo local de f. Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b).

Definiciones de máximo local y mínimo local

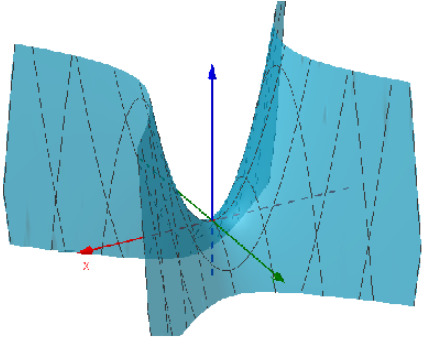


Definición

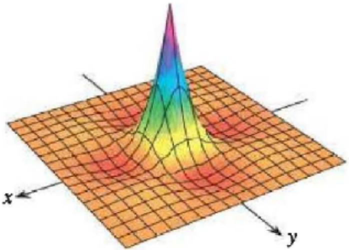
Si f está definida en una región que contiene al punto (a, b) y $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los $(x, y) \in D(f)$ de algún entorno de (a, b), entonces f(a, b) es un (valor) máximo local de f. Además se dice que f **alcanza** un máximo local en (a, b).
Similarmente se define mínimo local.

Punto crítico y punto de silla

Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P) = 0$ es un punto crítico de f.
Un punto P interior al dominio de f donde $\nabla f(P)$ no existe, es un punto (singular o) crítico de f.
Si f es diferenciable en P , tiene un punto de silla en P si P es un punto crítico de f y f no presenta en P un máximo local ni un mínimo local.



$f(x,y) = x^2 - y^2$

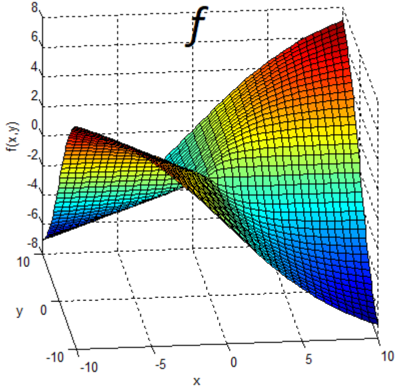


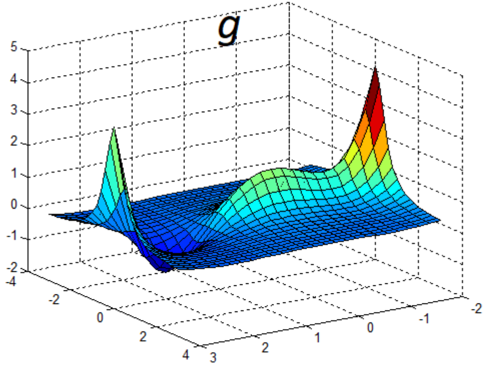
$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

Ejemplos

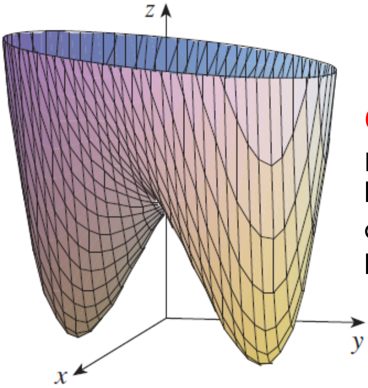
Analice los extremos de las funciones f y g (g dada por su gráfico):

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$





Ejemplo



$$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Observación: una función continua puede tener dos mínimos (o máximos) locales en una región y eso no implica que deba haber un máximo (o mínimo) local en esta región. Ver imagen.

Recorrido

Valores extremos de funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados

Teorema

Si f es una función continua en un conjunto D que es cerrado y acotado, entonces existen en D puntos en los cuales f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

SIN DEMOSTRAR

Criterio de la derivada primera para valores extremos locales

Teorema

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto P_0 interior al dominio de f y, si las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en P_0, entonces $\nabla f(P_0) = 0$.

DEMOSTRAR

Supongamos que $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo local de f. Entonces la función $f(x, y_0)$, como función de una variable independiente, también tiene un extremo en $x = x_0$. Por el criterio de la derivada primera para funciones de una variable, si la derivada existe en x_0 debe ser cero. Luego $f_x(x_0, y_0) = 0$.
Similarmente se prueba que $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Ejemplos

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$

$$\nabla f(x,y) = (-2x, 2y - 4y^3)$$

Para hallar los puntos críticos se plantea $\nabla f(x,y) = (0,0)$ que es un **SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES**. Se resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} -2x & = 0 \\ 2y - 4y^3 & = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ejemplos

$$f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$$
$$\nabla f(x,y) = (-2x, 2y - 4y^3)$$

Para hallar los puntos críticos se plantea $\nabla f(x,y) = (0,0)$ que es un **SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES**. Se resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} -2x & = 0 \\ 2y - 4y^3 & = 0 \end{cases}$$ Puntos críticos: $(0,0)$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

$$\begin{cases} 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ 6y + 6x = 0 \end{cases}$$ Puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,-1)$.

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

Criterio de la derivada segunda para valores extremos locales

Matriz hessiana asociada a una función f (cuando está definida) y hessiano:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}; \qquad H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2.$$

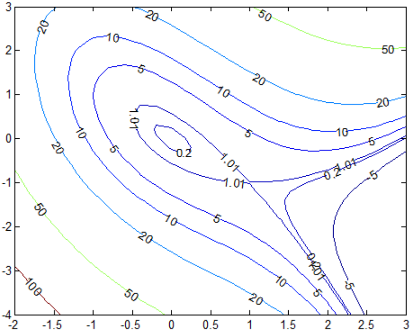
Teorema (DEMOSTRAR)

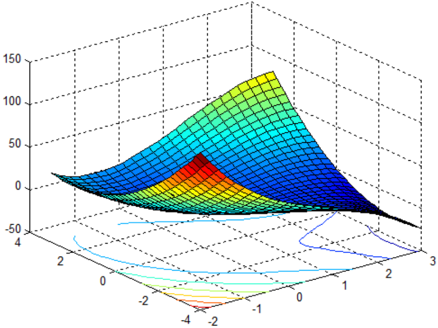
Suponga que f y sus derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Entonces,

1. *f tiene un* máximo local *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$;*
2. *f tiene un* mínimo local *en (a,b) si $H_f(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$;*
3. *f tiene un* punto de silla *en (a,b) si $H_f(a,b) < 0$;*
4. *el criterio* no es concluyente *si $H_f(a,b) = 0$.*

Ejemplo

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$





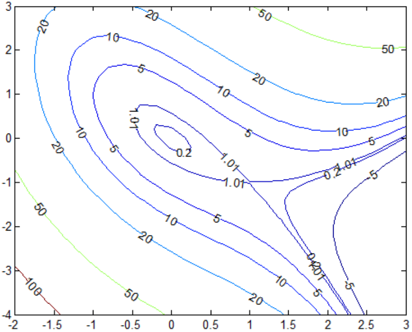
$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

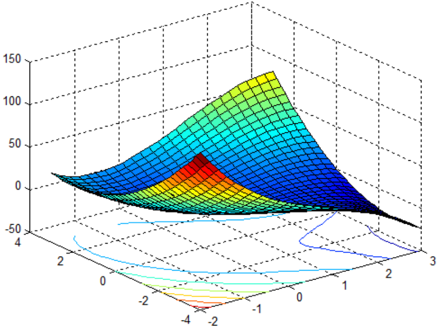
$$\begin{cases} 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ 6y + 6x = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,-1)$.

Ejemplo

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$





$$\nabla f(x,y) = (12x - 6x^2 + 6y, 6y + 6x)$$

$$\begin{cases} 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ 6y + 6x = 0 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,0)$ y $(1,-1)$.

$f_{xx} = 12(1-x)$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 6$, $H(0,0) > 0$ y $f(0,0) = 0$ es mínimo;

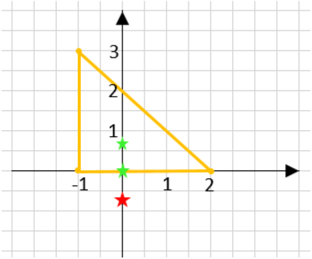
$H(1,-1) < 0$ y f presenta un punto de ensilladura en $(1,-1)$.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. Ejemplo.

Buscar los extremos de $f(x, y) = y^2 - y^4 - x^2$ en los puntos de D que es el triángulo con vértices $(2, 0)$, $(-1, 0)$ y $(-1, 3)$.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. Ejemplo.

Buscar los extremos de $f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$ en los puntos de D que es el triángulo con vértices $(2,0)$, $(-1,0)$ y $(-1,3)$.



Los puntos críticos de f son $(0,0)$, $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$, pero el último de éstos no pertenece a D y lo descartamos.

Extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas

Evaluamos f en los puntos críticos:

$$f(0,0) = 0; \qquad f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Evaluamos f en la frontera de D:

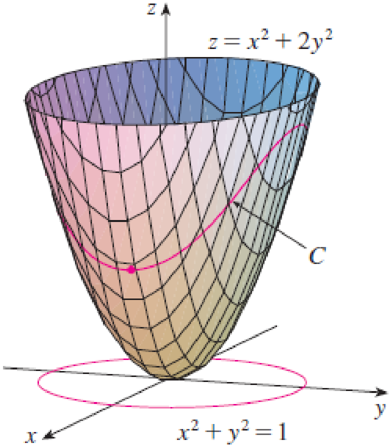
1. $f(-1,0) = -1; \quad f(2,0) = -4; \quad f(-1,3) = -8,75;$
2. $f(x,0) = -x^2;$
3. $f(-1,y) = y^2 - y^4 - 1; \quad f(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -0,75;$
4. $f(2-y,y) = -y^4 + 4y - 4; \quad f(1,1) = -1.$

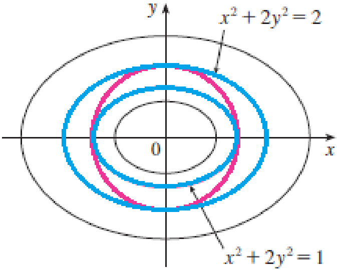
El valor máximo es $\frac{1}{4}$ y se alcanza en $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$; el valor mínimo es $-8,75$ y se alcanza en $(-1,3)$.

Recorrido

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$.





Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Teorema del gradiente ortogonal

Teorema

Suponga que f es diferenciable en una región abierta de $\mathbb{R}^3$ y que C es una curva suave dentro de la misma región. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

DEMOSTRAR

Sea C parametrizada por $\mathrm{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, y sea $P_0 = \mathrm{r}(t_0)$, para cierto $t_0 \in [a, b]$. Si $w(t) = (f \circ \mathrm{r})(t)$ alcanza un valor extremo en t_0, por la diferenciabilidad de f y debido a que $w(t_0)$ es extremo, se tiene:

$$w'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathrm{r}'(t_0) \quad \text{y} \quad w'(t_0) = 0,$$

Luego $\nabla f(P_0) \cdot \mathrm{r}'(t_0) = 0$.

Corolario

En $\mathbb{R}^2$ también vale.

Método de multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq 0$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

Método de multiplicadores de Lagrange

Teorema

Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables, que P_0 es un punto del dominio de ambas funciones; supongamos que $g(P_0) = c$ y llamemos S al conjunto de nivel de g con valor c (así $P_0 \in S$).
Supongamos también que $\nabla g(P_0) \neq 0$.
Entonces, si f restringida a S tiene un extremo local en P_0, entonces existe un número real λ (posiblemente 0) tal que

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

SIN DEMOSTRACIÓN

El punto P_0 es un **punto crítico** de f restringida a S (puede haber más de uno).

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

Método de multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si este conjunto S no es vacío), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma **simultánea** las ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = & 0. \end{cases}$$

Para funciones de dos variables, es similar.

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
$f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

Ejemplo (multiplicadores de Lagrange)

Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a

1. $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 4y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

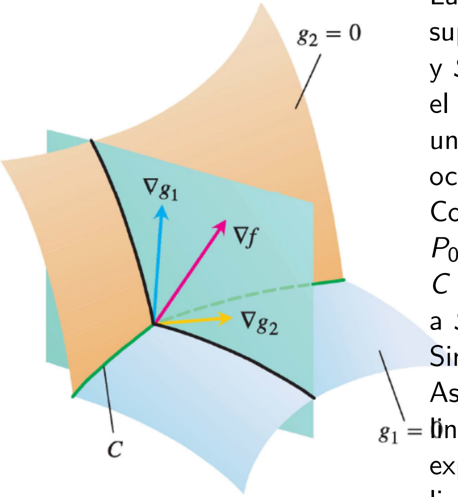
   Rta: 4 puntos críticos: $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$
   $f(\pm 1, 0) = 1$ es mínimo y $f(0, \pm 1) = 2$ es máximo.

2. $x + y = 1$

$$\begin{cases} 2x &= \lambda \\ 4y &= \lambda \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

   Rta: 1 punto crítico: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
   $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ¿es máximo o mínimo?
   Es mínimo.

Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones



La curva C es la intersección de las superficies S_1 (superficie de nivel $g_1 = 0$) y S_2 (superficie de nivel $g_2 = 0$). Según el T. del Grad. Ortogonal, si f presenta un extremo relativo a C en $P_0 \in C$, debe ocurrir que $\nabla f(P_0)$ es ortogonal a C. Como C es una curva en el espacio, en P_0 habrá un plano normal a C. Por estar C includia en S_1, $\nabla g_1(P_0)$ es ortogonal a S_1 y así, es ortogonal a C. Similarmente, $\nabla g_2(P_0)$ es ortogonal a C. Así, si $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$ son linealmente independientes, se podrá expresar $\nabla f(P_0)$ como combinación lineal de $\nabla g_1(P_0)$ y $\nabla g_2(P_0)$.

Multiplicadores de Lagrange: 2 restricciones

El planteo es:

$$\begin{cases} \nabla f = & \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) = & 0 \\ g_2(x,y,z) = & 0. \end{cases}$$

Notar que es un **sistema de 5 ecuaciones no lineales con 5 incógnitas**.

Recorrido

Casos especiales

Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

1. $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2 - \frac{1}{2}$.
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y $g(x, y) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}) - 1$.
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = y - x$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Casos especiales

Hallar los extremos de f sujeta a $g = 0$ para

1. $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2 - \frac{1}{2}$.
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y $g(x, y) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}) - 1$.
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = y - x$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

En los dos primeros se verifica que $\nabla g(P_0) = 0$, siendo P_0 punto crítico de este problema. En el tercero se puede notar que no hay ningún problema cuando $\lambda = 0$. En el cuarto, se observa que $g = 0$ es una curva de nivel de f y todos los puntos que cumplen $g = 0$ son puntos críticos para este problema.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1, definida por $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ejercicio integrador

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_1, definida por $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos **no** pertenecen a D_1.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_1 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm 1) = 3/4$; $f(\pm 1, 0) = -1$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_1 de 0.75, en los puntos $(0,\pm 1)$, y un mínimo absoluto de -1 en los puntos $(\pm 1, 0)$.

Ejercicio integrador 2

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_2, definida por $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos sí pertenecen a D_2.

Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_2 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$.

Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm\sqrt{2},0) = -2$.

Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_2 de 1, en los puntos $(0,\pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -2 en los puntos $(\pm\sqrt{2},0)$.

Ejercicio integrador 3

Hallar los extremos de $f(x,y) = y^2 - \frac{y^4}{2} - x^2$ en la región (cerrada y acotada) D_3, definida por $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Planteo:

$$\nabla f(x,y) = (0,0); \qquad (-2x, 2y - y^3) = (0,0).$$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ y $(0,\sqrt{2})$. Los dos últimos sí pertenecen a D_2.
Para estudiar la frontera, hallamos los extremos de f en la frontera de D_3 aplicando multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -2x &= \lambda 2x \\ 2y - y^3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-2)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Evalúo f: $f(0,0) = 0$; $f(0,\pm\sqrt{2}) = 1$; $f(\pm 2, 0) = -4$; $f(0,\pm 2) = 0$.
Concluyo: f presenta un máximo absoluto en D_3 de 1, en los puntos $(0,\pm\sqrt{2})$, y un mínimo absoluto de -4 en los puntos $(\pm 2, 0)$.

Ejemplo: Planos tangentes y rectas normales a superficie de nivel

Ejemplo: dada $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, buscar la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de nivel de f que pasa por el punto indicado, en dicho punto, para los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$. Sol: la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ que contiene al punto $(1, 0, 0)$ es $f(x, y, z) = f(1, 0, 0)$, es decir $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 0$; el plano tangente a esta superficie de nivel en $(1, 0, 0)$ es $z = 0$ y la recta normal a la superfice en ese punto es $\mathrm{r}(t) = (1, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}$. El punto $(0, 0, 0)$ pertenece a la misma superficie de nivel que $(1, 0, 0)$; en $(0, 0, 0)$, se tiene que $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ de manera que no existe plano tangente ni recta normal.