Trabajo Práctico Nro 4
Aplicación de Series de Fourier a la resolución de EDOs y EDPs.

Ejercicio Nro. 1.

Encuentre la solución periódica estacionaria para un sistema vibratorio traslacional sin amortiguamiento, de masa unitaria, con coeficiente de rigidez igual a 16 N/m, con una fuerza externa periódica $F(t)$=8t, para -2<t<2, utilizando Series de Fourier.

Estudie los primeros términos de la serie dada como solución, analizando si alguno de ellos se magnifica por acercamiento a la resonancia.

En caso de respuesta negativa al inciso anterior, modifique adecuadamente la rigidez del sistema a los efectos de obtener una magnificación por acercamiento a la resonancia en el tercer término de la serie de Fourier de la solución periódica estacionaria.

Represente gráficamente todas las series obtenidas en los incisos anteriores.

Resolución Ejercicio Nro. 1.

Si $f(t)$ es una función impar con período $2L$, su serie de Fourier tiene la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\, sen\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt = \frac{2}{L}\int_0^L 8t\, sen\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt$$

Haciendo:

$$u = \frac{n\pi}{L}t; \quad t = \frac{uL}{n\pi} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{L}{n\pi}du$$

Reemplazando tendremos:

$$B_n = \frac{2}{L}8\frac{L}{n\pi}\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi} u\, sen(u)du$$

$$B_n = 16\frac{L}{n^2\pi^2}\|sen\, u - u\cos u\|_0^{n\pi}$$

$$B_n = 16 \frac{L}{n^2\pi^2} [-n\pi \cos(n\pi)]$$

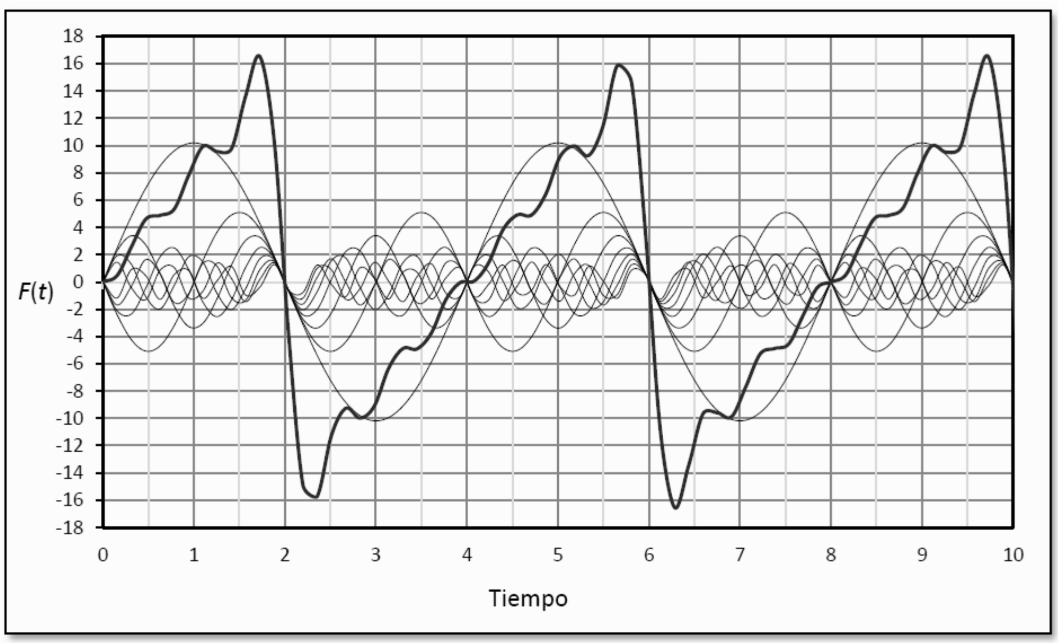
$$B_n = 16 \frac{L}{n^2\pi^2} [(-n\pi\,)(-1)^n] = \frac{16\,.\,2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$\boxed{B_n = \frac{32}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

De esta manera, la función $f(t)$ será entonces:

$$\boxed{f(t) = \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\left(\frac{n\pi}{L} t\right)}$$

La representación gráfica de los 8 primeros términos de la serie y de la suma de los mismos puede observarse en la siguiente figura:



Una solución periódica en estado permanente es una expresión de la forma:

$$u_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen\left(\frac{n\pi}{2} t\right)$$

$$\dot{u}_{sp}(t) = \frac{n\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

$$\ddot{u}_{sp}(t) = \left(-\frac{n^2\pi^2}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

Por otra parte, en este caso la ecuación diferencial de movimiento es:

$$m\ddot{u} + ku = f(t)$$

$$\boxed{\ddot{u} + 16u = 8t}$$

Reemplazando las expresiones correspondientes se obtiene:

$$\left(-\frac{n^2\pi^2}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right) + 16\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right) = \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(16 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right) sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right) = \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

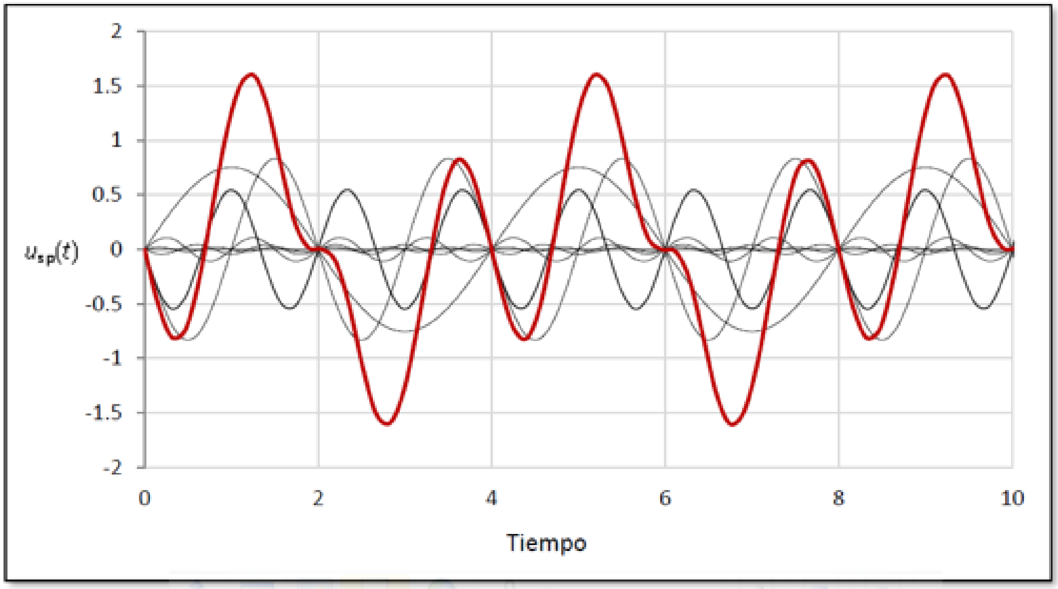
$$b_n\left(\frac{64 - n^2\pi^2}{4}\right) = \frac{32}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\boxed{b_n = \frac{128}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}}$$

$$u_{sp}(t) = \frac{128}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)} \, sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

$$\begin{aligned} u_{sp}(t) = {} & 0.752709 \, sen\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 0.830717 \, sen\left(\frac{2\pi}{2}t\right) - 0.547178 \, sen\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \\ & + 0.108474 \, sen\left(\frac{4\pi}{2}t\right) - 0.044597 sen\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + 0.023313 sen\left(\frac{6\pi}{2}t\right) \\ & - \cdots \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la solución hallada junto con las seis componentes de la misma calculadas previamente:



A partir del análisis de las expresiones y la gráfica presentadas, es posible observar que ningún término posee una magnitud tal que se acerque al fenómeno de resonancia. Para lograr ello se modificará a continuación el resorte del sistema, es decir la rigidez del mismo a los efectos de obtener una magnificación del ***tercer término*** por acercamiento a la resonancia.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 16; \;\; \omega_0 = 4$$

$$b_n = \frac{128}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)} = \frac{128}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n\left(16 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right)}$$

Si n=3

$$\omega_n^2 = \frac{3^2\pi^2}{4} = 22.2053$$

Si hacemos:

$$\omega_0^2 = 21 = \frac{k}{m}$$

La nueva ecuación de movimiento será:

$$\ddot{u} + 21u = 8t$$

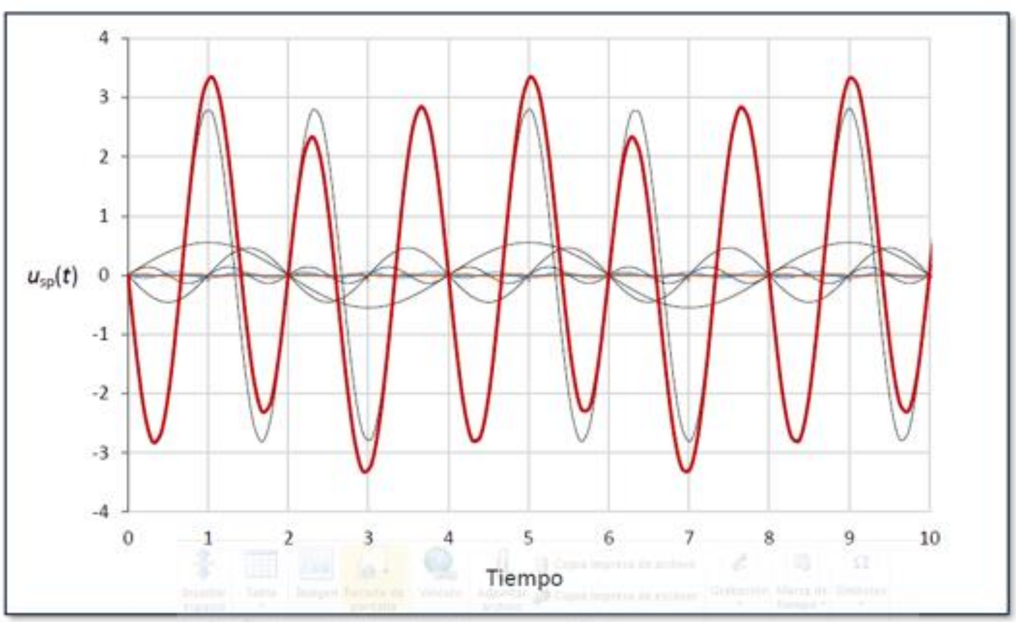
$$b_n\left(21 - \frac{n^2\pi^2}{4}\right) = \frac{32}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\boxed{b_n = \frac{128}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n(84 - n^2\pi^2)}}$$

$$u_{sp}(t) = \frac{128}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(84 - n^2\pi^2)}\ sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

$$u_{sp}(t) = 0.549633\ sen\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 0.457562\ sen\left(\frac{2\pi}{2}t\right) - 2.817062\ sen\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + 0.137830\ sen\left(\frac{4\pi}{2}t\right) - 0.050078\ sen\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + 0.025032\ sen\left(\frac{6\pi}{2}t\right) + \cdots$$

La siguiente figura permite observar la respuesta obtenida y la amplificación lograda en el tercer término de la Serie de Fourier.



Ejercicio Nro. 2.

Resuelva analíticamente en cada uno de los incisos indicados, la ***ecuación de onda*** sujeta a las siguientes condiciones establecidas:

C.F.: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

C.I.: $u(x,0) = u_0(x)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_0 = 0$$

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{24} & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{(1-x)}{24} & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Represente gráficamente la función $u_0(x)$ y la posición de la cuerda en 3 instantes diferentes.

Resolución Ejercicio Nro. 2.

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^2 u_0(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\boxed{B_n = \int_0^2 u_0(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$

$$B_n = B_{n1} + B_{n2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{24} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-x)}{24} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_{n1} = \frac{1}{24}\int_0^{\frac{1}{2}} x\ sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{6\ n^2\pi^2}\left| sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \left(\frac{n\pi x}{2}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{B_{n1} = \frac{1}{6\ n^2\pi^2}\left[sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \left(\frac{n\pi}{4}\right) cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]}$$

$$B_{n2} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-x)}{24} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{24}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$B_{n2} = \frac{1}{24}\int_{\frac{1}{2}}^{1} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \frac{1}{24}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$B_{n2} = \frac{1}{24}\left\{\frac{2}{n\pi}\left|-cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left|sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \left(\frac{n\pi x}{2}\right)cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{1}\right\}$$

$$B_{n2} = \frac{1}{24}\left\{\frac{2}{n\pi}\left[-cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right] - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{n\pi}{2}\right)cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \left(\frac{n\pi}{4}\right)cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$B_{n2} = \frac{1}{24n^2\pi^2}\left[2n\pi\ cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 4sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 4sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - n\pi\ cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$\boxed{B_{n2} = \frac{1}{24n^2\pi^2}\left[n\pi\ cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 4\ sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 4sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}$$

$$B_n = \frac{1}{6\ n^2\pi^2}\left[sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \left(\frac{n\pi}{4}\right)cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right] + \frac{1}{24n^2\pi^2}\left[n\pi\ cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 4\ sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 4sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

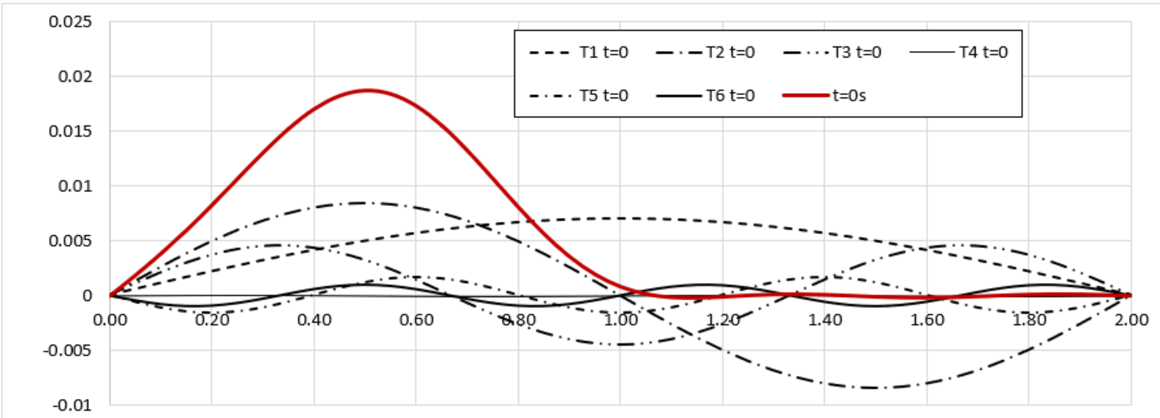
$$B_n = \frac{1}{6\ n^2\pi^2}\left[sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{B_n = \frac{1}{6\ n^2\pi^2}\left[2sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}$$

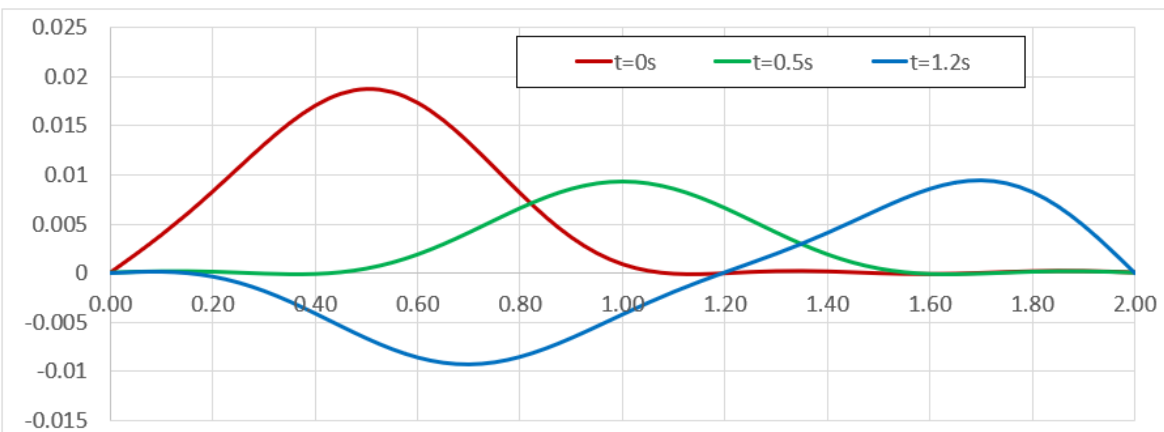
Entonces:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{6\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[2sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]cos\left(\frac{\varsigma n\pi}{2}t\right)sen\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}$$

En la siguiente figura se observa la posición de la cuerda en el instante inicial t=0, junto con los 6 términos iniciales de la serie de Fourier (T1 a T6) que la componen.



De la misma manera, en la figura que sigue se representan 3 instantes diferentes de la evolución de la cuerda, para los tiempos t=0s, t=0.5s y t=1.2s.



Ejercicio Nro. 3.

Resuelva analíticamente en cada uno de los incisos indicados, la ***ecuación del calor*** sujeta a las siguientes condiciones establecidas:

a). C.F.: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

C.I.: $u(x,0) = u_0(x)$

$$\boxed{u_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ (L-x) & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}}$$

Resolución Ejercicio Nro. 3.

La solución al problema planteado es de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{\varsigma n\pi}{L} \qquad \varsigma^2 = \frac{k}{\gamma\varrho}$$

Siendo ς^2 la difusividad térmica y γ la capacidad calórica específica.

Para el presente caso tendremos:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} x \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} (L - x) \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

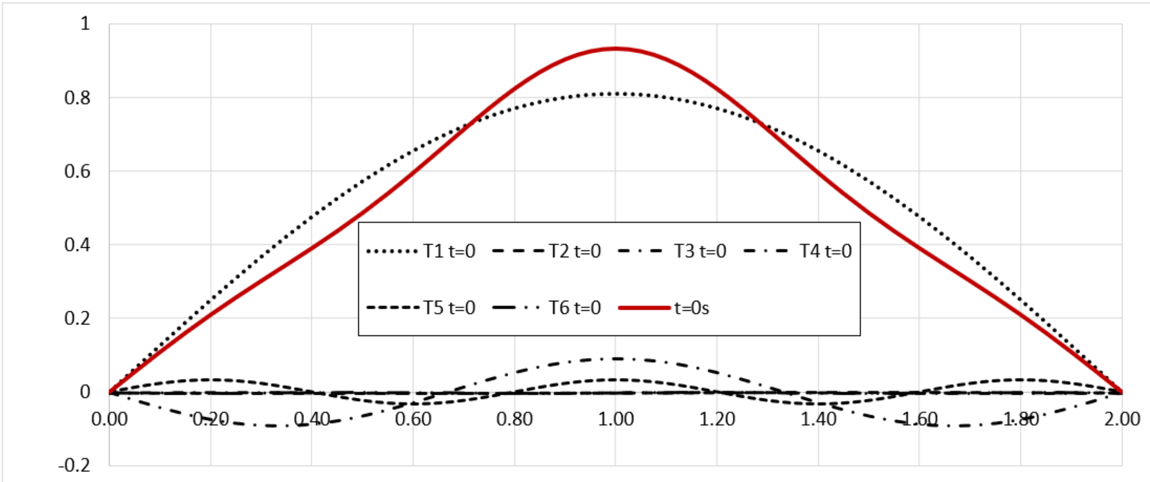
Operando las integrales indicadas se obtiene:

$$B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Con lo cual:

$$u(x,t) = \frac{4L}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

En la siguiente figura se observa la distribución de temperaturas iniciales en la barra dada, en el instante inicial *t*=0, junto con los 6 primeros términos de la serie de Fourier (T1 a T6) que la componen.



De la misma manera, en la figura que sigue se representan 3 instantes diferentes de la evolución del enfriamiento de la barra, para los tiempos *t*=0s, *t*=0.5s y *t*=1.2s.