CAPÍTULO

Solución de Ecuaciones Diferenciales por Series de Fourier

1.1. SERIES DE FOURIER. MOTIVACIÓN

Recordamos el modelo matemático del sistema masa-resorte-amortiguador:

$$\boxed{m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = f(t)} \tag{2.1}$$

Si b=0 y dividimos ambos miembros por m:

$$\ddot{u} + {\omega_0}^2 u = \frac{f(t)}{m} \tag{2.2}$$

donde ω_0 es la frecuencia natural angular.
Si:

$$\frac{f(t)}{m} = A\cos\omega\, t \tag{2.3}$$

con $\omega^2 \neq {\omega_0}^2$, obtenemos una solución particular $u_p(t)$, mediante el método de los coeficientes indeterminados, proponiendo:

$$u_p(t) = a\cos\omega\, t \tag{2.4}$$

$$\dot{u}_p(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega\, t$$

$$\ddot{u}_p(t) = -a\omega^2\cos\omega\, t \tag{2.5}$$

Sustituyendo (2.3), (2.4) y (2.5) en (2.2), obtenemos:

$$-a\omega^2\cos\omega\, t + {\omega_0}^2 a\ \cos\omega\, t = A\cos\omega\, t$$

$$a[{\omega_0}^2 - \omega^2] = A$$

$$\boxed{a = \frac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2}} \tag{2.6}$$

Sustituyendo (2.6) en (2.4) resulta:

$$\boxed{u_p(t) = \frac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t} \tag{2.7}$$

Supongamos ahora que la función $\frac{f(t)}{m}$ es una combinación lineal de funciones armónicas simples. Por ejemplo:

$$\ddot{u} + {\omega_0}^2 u = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos \omega_n t \tag{2.8}$$

con $\omega_n \neq {\omega_0}^2 \quad \forall n.$

Por el principio de superposición (o linealidad), la Ecuación (2.8) tiene la solución particular:

$$\boxed{u_p(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{A}{{\omega_0}^2 - {\omega_n}^2} \cos \omega_n t} \tag{2.9}$$

obtenida con la suma de las soluciones dadas en (2.7), la que corresponde con los N términos del lado derecho de la Ecuación (2.8).

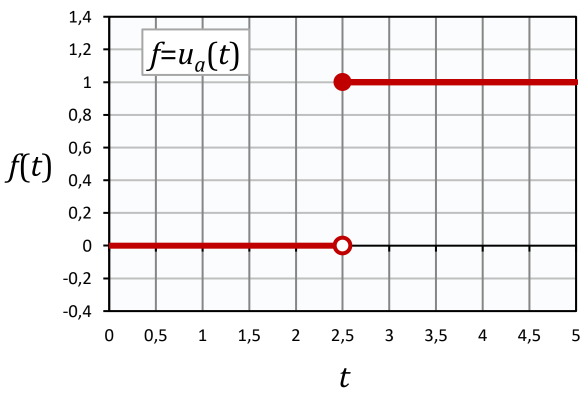
Los sistemas mecánicos y eléctricos involucran con frecuencia funciones de fuerza periódicas que no son únicamente C.L. finitas de senos y cosenos. Sin embargo, cualquier función periódica razonablemente adecuada, $f(t)$, tiene una representación en series infinitas de términos trigonométricos.

Este hecho abre el camino hacia la resolución de la Ecuación (2.2) con la superposición de ***bloques*** trigonométricos que reemplazan la suma finita de la Ecuación (2.9) por una serie infinita.

1.2. FUERZAS DE ENTRADA PERIÓDICAS y CONTINUAS POR TRAMOS

Los modelos matemáticos de sistemas eléctricos y mecánicos con frecuencia involucran funciones con discontinuidades que corresponden a fuerzas externas que se conectan o desconectan abruptamente del sistema.

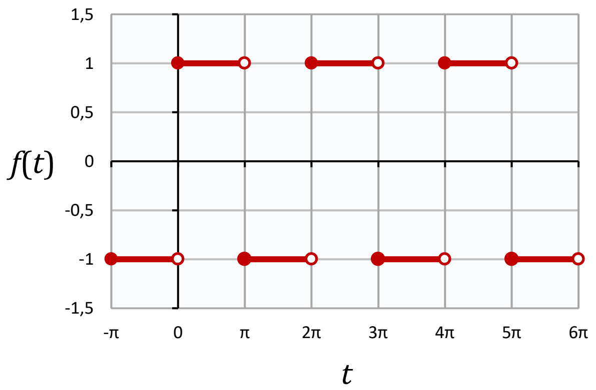
Por ejemplo la función **escalón unitario**: en t=a=2.50



$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 \; para \; t < a \\ 1 \; para \; t \geq a \end{cases}$$

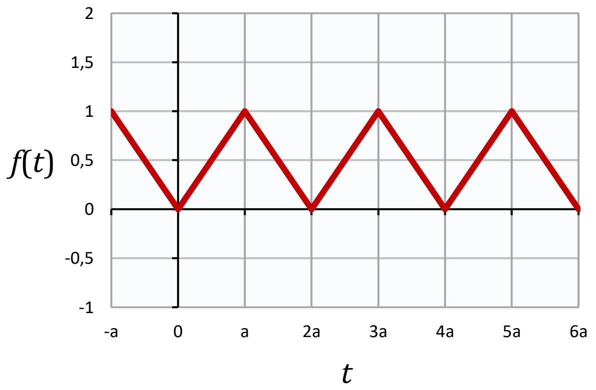
$u_a(t)$: indica donde toma lugar la función escalón unitario
$u(t-a)$: significa la idea de un ***retardo finito*** 'a', antes de que se presente el escalón.

En el caso de la función de **onda cuadrada**



$$f(t) = \begin{cases} -1 \; si \; -\pi \leq \; t < 0 \\ +1 \; si \; 0 \leq t < \pi \\ . \end{cases}$$

y la función de **onda triangular**



1.3. FUNCIÓN CONTINUA POR TRAMOS

Se dice que la función $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[a, b]$, siempre que haya una partición finita de $[a, b]$ con puntos extremos:

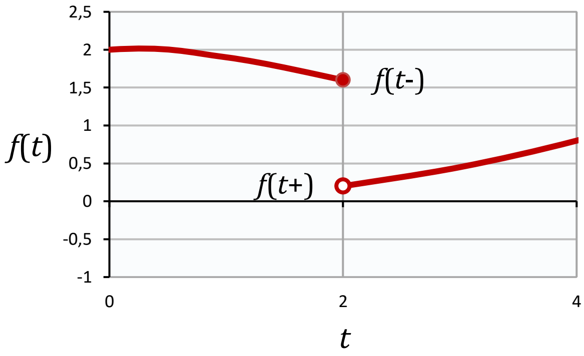
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ tales que:

- $f(t)$ es continua en cada intervalo abierto $t_{i-1} < t < t_i$
-
- En el extremo t_i de cada intervalo, el límite de $f(t)$, conforme t tiende a t_i, desde dentro del intervalo, ***existe y es finito***.

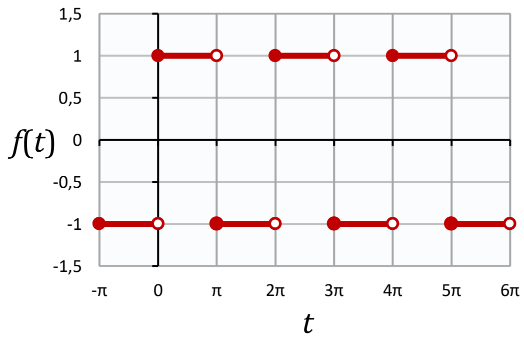
La función $f(t)$ se llama ***continua por tramos para toda t***, si es continua por tramos en cada intervalo acotado.

Es decir, una función continua por tramos es continua excepto por la posibilidad de puntos aislados y de que en cada uno de estos puntos de discontinuidad los límites por cada lado: $f(t+) = \lim_{u \to t^+} f(u)$ y $f(t-) = \lim_{u \to t^-} f(u)$ existen y son finitos.

De esta manera, una función continua por tramos tiene sólo saltos finitos aislados como discontinuidades, como puede observarse en la siguiente figura.



- Ejemplos típicos de funciones continuas por tramos, son las funciones de onda cuadrada y de diente de sierra vistas anteriormente.
- La función $f(t)=tg(t)$ es una función periódica de período π que NO es continua por tramos, ya que tiene una infinidad de discontinuidades.
- La función $g(t) = sen\left(\frac{1}{t}\right)$, NO es continua por tramos en el intervalo [-1, 1], ya que sus límites por cada lado en t=0 NO existen.
- Una función continua por tramos puede tener únicamente un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo acotado.
- Una función continua por tramos no necesita estar definida en sus puntos de discontinuidad. Por ejemplo la función de onda cuadrada es continua por tramos sin importar que valor tenga en los puntos ....$-\pi$, 0, π, 2π,..... donde es discontinua. Su derivada $f'(t)$ es también continua por tramos: $f'(t) = 0$ a menos que t sea múltiplo de π, en cuyo caso $f'(t)$ es indefinida.



1.4. FUNCIÓN SUAVE POR TRAMOS

Se dice que la función continua por tramos f es suave por tramos, siempre que su derivada f' sea continua por tramos.

1.5. FUNCIÓN PERIÓDICA

Se dice que la función $f(t)$ definida para toda t es ***periódica***, siempre que exista un número positivo p tal que :

$$\boxed{f(t+p) = f(t)} \qquad (2.10)$$

para todo valor de t.

El número p se llama período de la función f.
Observación: el período de una función periódica, no es único. Por ejemplo, si p es un período de $f(t)$, entonces de igual modo lo son los números $2p$, $3p$, etc.
Para cualquier función constante, todo número positivo es un período de dicha función constante.

Ahora bien, si P es el número positivo más pequeño, tal que $f(t)$ es periódica con período P, entonces se dice que P es el período de $f(t)$.

Ejemplo de aplicación:

Para las funciones

$$\boxed{\begin{array}{l} g(t) = \cos nt \\ h(t) = sen\, nt \end{array}}$$

donde n es un entero positivo, $\frac{2\pi}{n}$ es el ***período***, porque:

$$\cos n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = \cos(nt + 2\pi) = \cos nt$$

$$\operatorname{sen} n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = \operatorname{sen}(nt + 2\pi) = \operatorname{sen} nt \qquad (2.11)$$

Además, 2π es en sí mismo un período de las funciones $g(t)$ y $h(t)$. Y debido a que cada una de las funciones $g(t) = \cos nt$ y $h(t) = sen\, nt$, tiene período 2π, cualquier C.L. de senos y cosenos de múltiplos enteros de t, tiene período 2π. El científico francés Joseph Fourier (1768-1830), en su tratado "La teoría analítica del calor" (1822), afirmó que toda función $f(t)$ con período 2π se puede representar con una serie trigonométrica infinita de la forma:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n sen\, nt)} \qquad (2.12)$$

llamada ***Serie de Fourier***.

La representación de funciones por medio de series de Fourier es una de las técnicas más ampliamente utilizadas en matemáticas aplicadas y en particular para la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

1.6. SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES DE PERÍODO 2π

Nos preguntamos: ¿Cuáles deben ser los coeficientes en la serie de Fourier dada en (12) para que ésta converja a una función dada $f(t)$ de período 2π ?

Para ello necesitamos los siguientes resultados:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \begin{cases} 0 \ si \ m \neq n \\ \pi \ si \ m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} nt \, dt = \begin{cases} 0 \; si \; m \neq n \\ \pi \; si \; m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt \cos mt \, dt = 0 \quad \forall \, m, n$$

Recordamos que 2 funciones u(t) y v(t) con valores reales, son ortogonales en el intervalo [a, b] siempre que:

$$\int_a^b u(t)v(t)dt = 0$$

(2.13)

Podemos pensar a las funciones como vectores con infinitas "componentes", donde la integral del producto de dos funciones, juega el mismo rol que el producto punto entre dos vectores de R^n. Y si ***u.v***=0, se dice que los vectores son ortogonales.

Supongamos ahora que la ***función continua por tramos de período 2π*** tiene una representación por medio de las series de Fourier:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m sen\, mt)} \tag{2.14}$$

en el sentido que la serie infinita de la derecha converge al valor $f(t)$ para toda t. Ahora vamos a integrar entre $-\pi$ y π en ambos miembros de la Ecuación (2.14):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, dt \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \, dt \right) = \pi a_0$$

Ya que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \, dt = 0$. Por lo tanto:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt} \tag{2.15}$$

Ahora vamos a multiplicar cada miembro de la Ecuación (2.14) por $\cos nt$ y luego integramos término a término, entre $-\pi$ y π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \; dt \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \cos nt \, dt \right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\int_{-\pi}^{\pi} cos\, mt \cos nt\, dt \right)$$

Entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2\, nt\, dt = \pi a_n$$

De donde:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt} \qquad (2.16)$$

Observamos que en (2.16) haciendo n=0 queda (2.15). Es por ello que el término constante en la serie original de Fourier se representa como $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0.

De la misma manera, si se multiplica cada miembro de la Ecuación (2.14) por *sen nt* y se integra luego, término a término, entre $-\pi$ y π , se obtiene:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\, nt\, dt} \qquad (2.17)$$

En síntesis, se ha encontrado que si la serie dada en (2.14) converge a $f(t)$ y si las integraciones término a término desarrolladas son válidas, entonces los coeficientes de la serie deben ser (2.15), (2.16) y (2.17).

1.7. DEFINICIÓN: SERIES DE FOURIER y COEFICIENTES DE FOURIER

Sea $f(t)$ una función continua por tramos de período 2π definida para toda t. Entonces la serie de Fourier $f(t)$ es:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n sen\, nt)} \qquad (2.18)$$

Donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n se definen por medio de las fórmulas:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \quad n = 0,1,2,3,\ldots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\, nt\, dt \quad n = 1,2,3,\ldots}$$

Como la serie de Fourier puede no converger a la función en ciertos puntos del dominio, se escribe sin utilizar el signo igual entre la función y su serie de Fourier:

$$\boxed{f(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n sen\, nt)} \tag{2.19}$$

Muchas funciones usadas en las aplicaciones son continuas por tramos. Las integrales dadas en (2.16) y (2.17) existen si $f(t)$ es continua por tramos. De tal manera que toda función de este tipo tiene una serie de Fourier.

1.8. SERIES DE FOURIER GENERAL

Se ha definido la serie de Fourier de una función periódica de período 2π.

Ahora se considera una función $f(t)$ continua por tramos para todo valor de t, con período arbitrario P>0. Escribimos:

$$\boxed{P = 2L} \tag{2.20}$$

siendo L el semiperíodo de la función f.
Si se define la función g de la siguiente manera:

$$\boxed{g(u) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) \quad \forall\, u} \tag{2.21}$$

Entonces, $g(u + 2\pi) = f\left(\frac{Lu}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) = g(u)$

Por lo tanto, $g(u)$ es también periódica de período 2π. Es así que la función g tiene la serie de Fourier:

$$g(u) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nu + b_n sen\, nu) \tag{2.22}$$

Con coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos nu\, du \tag{2.23}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\,\mathrm{sen}\, nu\, du \tag{2.24}$$

Si ahora se escribe:

$$t = \frac{Lu}{\pi},\ \ u = \frac{\pi t}{L},\ \ f(t) = g(u) \tag{2.25}$$

$$f(t) = g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n sen\, n\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad (2.26)$$

Sustituyendo (2.25) en (2.24) y (2.23):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos nu\, du \qquad \left[u = \frac{\pi t}{L}, du = \frac{\pi}{L}dt\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\left(\frac{\pi t}{L}\right)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$$

Análogamente obtenemos:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}dt$$

1.9. DEFINICIÓN: SERIES DE FOURIER y COEFICIENTES DE FOURIER

Sea $f(t)$ una función continua por tramos de período $2L$ definida para todo t. Entonces la serie de Fourier $f(t)$ es la serie:

$$f(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n sen\,\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad (2.27)$$

Donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n se definen por medio de las fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.28)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}dt \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.29)$$

La Ecuación (2.28), para n=0 resulta:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \qquad (2.30)$$

Esto muestra que el término constante de la serie de Fourier de la función f ($\frac{1}{2}a_0$) es el valor promedio de f en el intervalo [-L, L].

Observación: Si $f(t)$ está dada por una sola fórmula en el intervalo $0 < t < 2L$, puede ser más conveniente calcular:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

1.10. TEOREMA DE CONVERGENCIA

A continuación se enuncia el teorema que dice que la serie de Fourier de una función continua y suave por tramos siempre converge en todo punto. Este requisito para la función f es fácil de verificar y se satisface para la mayoría de las funciones que se encuentran en las aplicaciones prácticas.

Teorema: Convergencia de la serie de Fourier

Sea $f(t)$ una función periódica de período $2L$, suave por tramos. Entonces su serie de Fourier:

$$f(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n sen\,\frac{n\pi t}{L}\right) \tag{2.27}$$

donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n están definidos por las expresiones (2.28) y (2.29) converge a los siguientes valores:

- al valor $f(t)$ en cada punto donde f es continua.
- al valor $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ en cada punto donde f es discontinua.

Observamos que $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ es un promedio de los límites por derecha e izquierda, de f en el punto t. Si f es continua en t, entonces $f(t+)=f(t-)=f(t)$, por lo que:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = f(t) \tag{2.31}$$

Entonces el teorema puede enunciarse como sigue:

La serie de Fourier de una función f suave por tramos converge para todo valor de t en el promedio dado en (2.31).

Es por ello que suele escribirse:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n sen\, \frac{n\pi t}{L} \right) \tag{2.32}$$

entendiendo que la función f suave por tramos se ha redefinido en caso necesario, en cada uno de sus puntos de discontinuidad para cumplir con las condición de valor promedio dada en (2.31).

1.11. SERIES SENO y COSENO DE FOURIER

Se dice que la función f definida para todo valor de t es ***par***, si:

$$f(-t) = f(t) \qquad \forall t \tag{2.33}$$

Se dice que la función f definida para todo valor de t es ***impar***, si:

$$f(-t) = -f(t) \qquad \forall t \tag{2.34}$$

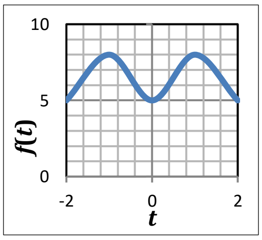
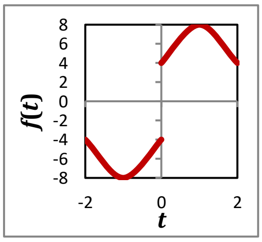
Si $f(t)$ es par, la gráfica de $y=f(t)$ resulta simétrica con respecto al eje y. En cambio, si $f(t)$ es impar, la gráfica de $y=f(t)$ resulta simétrica con respecto al origen.

La función $g(t)=\cos(t)$ es una función par, en tanto que la función $g(t)=sen(t)$ es una función impar.

La serie de Fourier de una función periódica par, tiene sólo términos **coseno**.

La serie de Fourier de una función periódica impar, tiene sólo términos **seno**.

Teniendo en cuenta las áreas bajo las gráficas de una función par y de una impar, resulta:

Si f es par: $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$ (2.35)	
Si f es impar: $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ (2.36)	

De (2.33) y (2.34) surge que el producto de dos funciones pares es par, así como lo es el producto de dos funciones impares. El producto de una función par y de una función impar es impar.

En particular, si $f(t)$ es una función periódica par de período 2L, entonces, $f(t)cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ es par y $f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ es impar, ya que las funciones coseno y seno son funciones par e impar respectivamente. Por lo tanto, al calcular los coeficientes de Fourier de f teniendo en cuenta (2.35) y (2.36), se obtiene:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \tag{2.37}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = 0 \tag{2.38}$$

Es así que la serie de Fourier de la función $f(t)$ par de período $2L$, sólo tiene términos coseno, con los valores de a_n dados por (2.37):

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad f \text{ es } \mathbf{PAR}} \tag{2.39}$$

Ahora consideramos $f(t)$ función periódica impar de período $2L$. Entonces, $f(t)cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ es impar y $f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ es par, por lo tanto:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = 0 \tag{2.40}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \tag{2.41}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de la función impar f de período $2L$, tiene sólo términos seno, con los coeficientes de b_n dados por (2.41):

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad f \text{ es } \mathbf{IMPAR}} \tag{2.42}$$

1.12. DERIVACIÓN TÉRMINO A TÉRMINO DE SERIES DE FOURIER

Sea f una función continua para todo valor de t, periódica con período $2L$, tal que su derivada $f\,'$ es suave por tramos para todo valor de t. Entonces, la serie de Fourier de $f\,'$ es la serie:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right) a_n sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \frac{n\pi}{L} b_n cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] \tag{2.43}$$

obtenida por derivación término a término de la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] \tag{2.44}$$

1.13. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS POR SERIE DE FOURIER

Consideremos el sistema ***masa-resorte*** no amortiguado, con la acción de una fuerza periódica $f(t)$:

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = f(t)} \tag{2.45}$$

La solución general de la ecuación (45) es de la forma:

$$u(t) = c_1 cos\omega_0 t + c_2 sen\omega_0 t + u_p(t) \tag{2.46}$$

donde $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ es la frecuencia natural del sistema y $u_p(t)$ es una solución particular de la ecuación (2.45). Los valores de c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Usaremos la serie de Fourier para encontrar una solución periódica particular de la ecuación (2.45), llamada $u_{sp}(t)$, solución periódica estacionaria. Si $f(t)$ es una función impar con período $2L$, su serie de Fourier tiene la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \tag{2.47}$$

Si $\frac{n\pi}{L} \neq \omega_0$ para cualquier entero positivo n, puede determinarse una solución periódica en estado permanente de la forma:

$$u_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \tag{2.48}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.47) y (2.48) en (2.45) para encontrar los coeficientes de la ecuación (2.48) a partir de la igualación de los términos semejantes.

Si existe un término $B_N sen\left(\frac{N\pi t}{L}\right)$ diferente de cero en la solución de la serie de Fourier de fuerza $f(t)$ en la ecuación (45) para la cual $\frac{N\pi}{L} = \omega_0$, entonces este término causa resonancia pura.

1.14. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Una Ecuación Diferencial Parcial es una ecuación en la que interviene una función (desconocida) de más de una variable independiente y sus derivadas parciales. El orden de la ecuación diferencial parcial (EDP) es el orden de la derivada de mayor orden.

Muchos fenómenos que se estudian en Ingeniería y otras ciencias, involucran más de dos variables independientes, y su modelación matemática conduce frecuentemente a EDP. Las variables independientes que intervienen pueden ser el tiempo y una o varias coordenadas en el espacio.

Como en el caso de una EDO, se dice que una EDP es ***lineal*** si es de primer grado en la variable dependiente, es decir la función desconocida y en sus derivadas parciales.
Se dice que la EDP es ***homogénea***, si cada término de la misma contiene a la variable dependiente o a una de sus derivadas. Caso contrario, se dice que es ***no homogénea***.

La expresión general correspondiente a EDP lineales de segundo orden, con dos variables independientes, resulta:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.49}$$

donde $A(x,y)$; $B(x,y)$; $C(x,y)$ son funciones continuas de x e y.

1.15. CLASIFICACIÓN DE LAS EDP LINEALES DE 2DO ORDEN

Dependiendo de los valores de $A(x,y)$; $B(x,y)$; $C(x,y)$ en algún punto particular $(x,y)=(a,b)$, la ecuación (2.49) puede ser ***elíptica***, ***parabólica*** o ***hiperbólica***, de acuerdo con las siguientes condiciones:

$B^2(a,b)-4A(a,b)C(a,b) < 0$ **Elíptica** en (a,b)

$B^2(a,b)-4A(a,b)C(a,b) = 0$ **Parabólica** en (a,b)

$B^2(a,b)-4A(a,b)C(a,b) > 0$ **Hiperbólica** en (a,b)

Es decir que una misma EDP puede ser parabólica en un punto e hiperbólica en otro, por ejemplo.

Sin embargo, si $A(x,y)$; $B(x,y)$; $C(x,y)$ son constantes, entonces la EDP es elíptica, parabólica o hiperbólica en todo punto.

1.16. EJEMPLOS DE EDP LINEALES DE 2DO ORDEN

a)	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Ecuación unidimensional de la onda
b)	$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Ecuación unidimensional de calor
c)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Ecuación bidimensional de Laplace
d)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$	Ecuación bidimensional de Poisson
e)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	Ecuación tridimensional de Laplace

Ejercicio de aplicación: Para cada una de las EDP indicadas, justifique si es parabólica, hiperbólica o elíptica y si se trata de una EDP homogénea o no homogénea.

1.17. SOLUCIÓN DE UNA EDP

Una solución de una EDP en alguna región **R** del espacio de las variables independientes es una función que tiene todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación en algún dominio que contiene a **R** y satisface la ecuación en todos los puntos de R.

Se sabe que si una EDO es lineal y homogénea, entonces a partir de soluciones conocidas, pueden obtenerse otras soluciones por superposición. Para una EDP lineal y homogénea es válido el siguiente teorema:

Teorema: Principio de superposición o Linealidad

Sean u_1, u_2,…,u_k funciones solución de una EDP lineal homogénea en alguna región **R**. Entonces, la combinación lineal:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k \tag{2.50}$$

donde las c_i, i=1,…,k, son constantes, también es una solución de esa ecuación en **R**.

Actividad: Demuestre el teorema de superposición para EDP lineal homogénea de segundo orden en dos variables independientes, con coeficientes constantes.

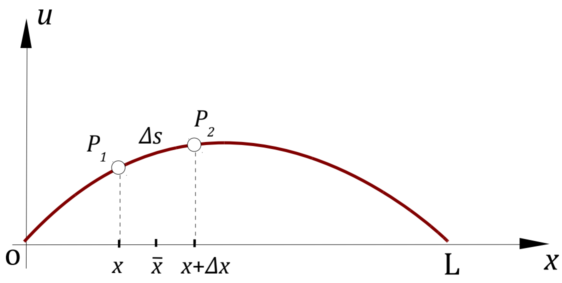
1.18. MODELADO: CUERDA VIBRATORIA. Ecuación de la onda unidimensional.

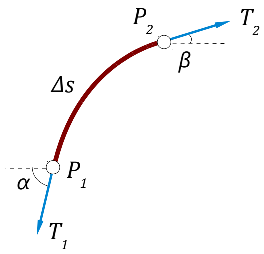
Como primera EDP importante en Ingeniería, se deduce la ecuación que gobierna las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda elástica. Se considera una cuerda uniforme, flexible, estirada mediante una tensión T, entre los puntos fijos x=0 y x=L. En t=0 se suelta la cuerda dejándola vibrar.

El problema es encontrar el desplazamiento $u(x,t)$ en cualquier punto x y en cualquier tiempo t>0. Es decir, a medida que la cuerda vibra en el plano x-u, alrededor de su posición de equilibrio, la función $u(x,t)$ representa el desplazamiento en el tiempo t del punto x de la cuerda. Siendo que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x, estas vibraciones se denominan ***vibraciones transversales.***

HIPÓTESIS:

- La cuerda es homogénea, es decir, la masa de la cuerda por unidad de longitud es constante.
- La cuerda es perfectamente elástica y no ofrece resistencia alguna a la flexión.
- La tensión causada por el estiramiento de la cuerda antes de fijarla en los extremos es tan grande que puede despreciarse la fuerza gravitacional sobre la cuerda.
- La cuerda realiza pequeños movimientos transversales en un plano vertical. Es decir, cada punto de la cuerda se mueve estrictamente en la dirección vertical y de modo tal que el desplazamiento y la pendiente en cada punto de la cuerda se mantienen siempre con valores absolutos pequeños.
- La tensión T actúa tangente a la cuerda y su magnitud es la misma en todos los puntos.





Posición de la Cuerda en un tiempo t

Detalle del segmento Δs

Para obtener la ecuación diferencial se consideran las fuerzas que actúan sobre una pequeña porción de la cuerda. Teniendo en cuenta que la cuerda no ofrece resistencia a la flexión, la tensión es tangencial a la curva de la cuerda en cada punto de la misma.

Sean T1 y T2 las tensiones en los puntos extremos $P1$ y $P2$ de esa porción. Considerando que no hay movimiento en la dirección horizontal, las componentes horizontales de la tensión deben ser constantes, es decir:

$$T_1 cos\alpha = T_2 cos\beta = T = cte \tag{2.51}$$

En la dirección vertical se tienen dos fuerzas: las componentes verticales $-T_1\,sen\alpha$ y $T_2\,sen\beta$, de T_1 y T_2 respectivamente.

Por la segunda ley de Newton, la resultante de estas dos fuerzas es igual al producto de la masa $\rho\Delta x$ de la porción de cuerda y la aceleración $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, evaluada en algún punto $\overline{x}$ entre x y $x+\Delta x$. Acá ρ es la masa de la cuerda no flexionada por unidad de longitud y Δx es la longitud de la porción de cuerda no flexionada. Es decir:

$$T_2 sen\beta - T_1 sen\alpha = \rho\Delta x \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\overline{x}} \tag{2.52}$$

Teniendo en cuenta (2.51), esta última expresión puede dividirse por: $\mathrm{T_1 cos\alpha = T_2 cos\beta = T}$

Resulta entonces:

$$\frac{T_2 sen\beta}{T_2 cos\beta} - \frac{T_1 sen\alpha}{T_1 cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\overline{x}} \tag{2.53}$$

$$\boxed{tg\beta - tg\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\overline{x}}} \tag{2.54}$$

Considerando que $tg\alpha$ y $tg\beta$ son las pendientes de la cuerda en x y $x+\Delta x$ respectivamente:

$$tg\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \qquad tg\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{2.55}$$

Es necesario escribir derivadas parciales debido a que u también depende de t. Dividiendo en (2.54), ambos miembros por Δx, se obtiene:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\right]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{\overline{x}} \tag{2.56}$$

Tomando límites de esta ecuación conforme $\Delta x \to 0$, entonces $\overline{x} \to x$ (debido a que $\overline{x}$ se encuentra en el intervalo $[x, x+\Delta x]$) y se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{2.57}$$

Dicha ecuación modela las vibraciones libres de una cuerda flexible uniforme, con densidad constante ρ, y tensión T. Para la constante física $\frac{T}{\rho}$ se adopta la notación c^2 (en lugar de c) para indicar que esta constante es positiva.

Condiciones iniciales: (CI)

Se especifica el desplazamiento o forma inicial $u_0(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$:

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x) \end{cases} \qquad 0<x<L \tag{2.58}$$

Condiciones en la frontera: (CF)

Puesto que la cuerda está fija en los extremos $x=0$ y $x=L$:

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \qquad t>0 \tag{2.59}$$

Este tipo de CF planteadas en la función u, se denominan condiciones de Dirichlet. En otros problemas puede aparecer una condición de frontera planteada sobre la dirección normal al borde, denominada condición de Neuman. La ecuación de onda también es posible encontrarla en mecánica de fluidos, acústica y elasticidad.

1.19. SEPARACIÓN DE VARIABLES. USO DE SERIES DE FOURIER.

Se busca una solución de (2.57) que satisfaga las condiciones dadas en (2.58) y (2.59). Para ello se seguirá el siguiente procedimiento:

Paso 1: se aplica el método de separación de variables o método del producto, para obtener dos EDOs.

Paso 2: se determinan las soluciones de esas dos EDOs que satisfagan las condiciones de frontera (CF).
Paso 3: usando series de Fourier se hace la composición de estas soluciones para llegar a una solución de (2.57) que satisfaga también las CI dadas.

Procedimiento:
Paso 1: En el método de separación de variables se plantea la solución de (2.57) como un producto de dos funciones, cada una de las cuales depende únicamente de las variables *x* y *t*. Es decir:

$$\boxed{u(x,t) = F(x)G(t)} \tag{2.60}$$

Al derivar (2.60) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}G \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \tag{2.62}$$

Que al sustituirlas en (2.57) resulta:

$$F\ddot{G} = c^2 F''G \tag{2.63}$$

Dividiendo ambos miembros por c^2FG obtenemos:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \tag{2.64}$$

Se observa que la expresión del primer miembro depende sólo de t, en tanto que la del segundo miembro sólo depende de *x*. Por lo tanto ambos miembros deben ser constantes (porque si fueran variables, al cambiar t o x se afectaría sólo el primer miembro, o sólo el segundo, sin alterar el otro). Por lo tanto:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = \lambda \tag{2.65}$$

De donde se obtienen dos EDO:

$$F'' - \lambda F = 0 \quad (2.66)$$

$$\boxed{\ddot{G} - c^2\lambda G = 0} \quad (2.67)$$

<u>Paso</u> <u>2</u>: se determinan ahora las soluciones de (2.66) y (2.67) de tal modo que (2.60) satisfaga las (CF) dadas por (59). Es decir:

$$u(0,t) = F(0)G(t) \qquad y \qquad u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \quad (2.68)$$

Resolución de la ecuación (66): Las (CF) deben cumplirse para todo t, y $G(t)$=0 no es de interés ya que conduce a $u(x,t)$=0. Por lo tanto debe cumplirse que:

$$F(0) = 0 \qquad y \qquad F(L) = 0 \quad (2.69)$$

Ahora bien:

- Si λ=0, la solución general de (2.66) es $F(x)=ax+b$. Pero a partir de (2.69) se obtiene $a=b=0$, de donde $F(x)$=0, que no es de interés porque conduce a $u(x,t)$=0
- Si λ>0, la solución general de (66) es $F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Pero a partir de (69) se obtiene $A=B=0$, de donde $F(x)$=0, que no es de interés como en el caso anterior. De esta manera sólo queda la posibilidad que λ<0.
- Si $\lambda=-\omega^2$, entonces (66) toma la forma $F'' + \omega^2 F = 0$ cuya solución general es:

$$F(x) = A\cos(\omega x) + B\,sen(\omega x) \quad (2.70)$$

Con las (CF) dadas en (2.69):

$$F(0) = A = 0 \qquad y \qquad F(L) = B\,sen(\omega L) = 0 \quad (2.71)$$

Debe ser $B\neq0$ para que $F(x)\neq0$. Entonces $sen(\omega L)=0$. Es decir $\omega L=n\pi$, de donde:

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \text{ entero}) \quad (2.72)$$

Haciendo B=1 se obtiene una infinidad de soluciones $F(x)=F_n(x)$ que satisfacen las (CF) dadas por (2.69).

$$\boxed{F_n(x) = sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \qquad (n = 1,2,\dots) \quad (2.73)$$

Resolución de la ecuación (2.67): la constante λ está ahora restringida a los valores $\lambda=-\omega^2=-(n\pi/L)^2$, que resulta de (2.72). Para estos valores de λ, la ecuación (2.67), resulta:

$$\ddot{G}(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0 \qquad con \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2.74}$$

Una solución general es:

$$G_n(t) = B_n cos(\lambda_n t) + B_n^* sen(\lambda_n t) \tag{2.75}$$

Es así que las funciones $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ resultan:

$$\boxed{u_n(x,t) = [B_n cos(\lambda_n t) + B_n^* sen(\lambda_n t)] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \tag{2.76}$$

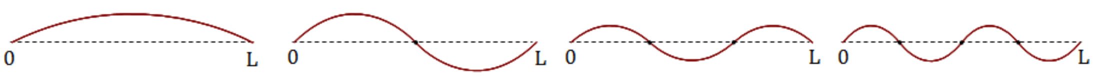
Las mismas son funciones solución de la ecuación (2.57) que satisfacen las (CF) dadas por (2.59). Las funciones $u_n(x,t)$ se llaman ***eigenfunciones*** o funciones características y los valores $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ se denominan ***eigenvalores*** o valores característicos de la cuerda vibratoria. El conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ se denomina ***espectro***.

Cada función $u_n(x,t)$ se denomina n-ésimo modo normal de la cuerda y representa un movimiento armónico que tiene una frecuencia en ciclos por unidad de tiempo dada por:

$$\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L} \tag{2.77}$$

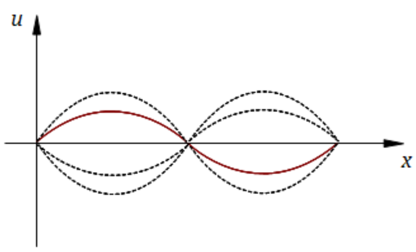
El primer modo normal, es decir n=1, se llama ***modo fundamental*** y los demás se conocen como ***armónicos***.

Se denominan ***nodos*** a los puntos de la cuerda que no se mueven (además de los dos extremos fijos). De la ecuación (2.76) se observa que $u_n(x,t)=0$ en los puntos en los que $sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0$, es decir, $x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{(n-1)L}{n}$. Es decir, el n-ésimo modo normal tiene (n-1) nodos.



n=1 **n=2** **n=3** **n=4**

Por ejemplo, el segundo modo normal para varios valores de t resulta:



<u>Paso</u> <u>3</u>: Una sola función $u_n(x,t)$ en general no satisfará las condiciones iniciales dadas en (2.58). Siendo la ecuación (2.57) una EDP lineal homogénea, por el principio de superposición, la suma de un número finito de funciones solución $u_n(x,t)$ es solución de (2.57). Para obtener una solución que satisfaga las CI dadas en (2.58), se considera la serie infinita:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n cos(\lambda_n t) + B_n^* sen(\lambda_n t)]\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2.78}$$

Considerando (78) y la (CI) $u(x,0)=u_0(x)$, se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x) \tag{2.79}$$

Por lo tanto los coeficientes B_n deben elegirse de modo tal que $u(x,0)$ quede como la serie senoidal de Fourier de $u_0(x)$:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \tag{2.80}$$

Ahora se considera (78) y la (CI) $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} [-B_n \lambda_n sen(\lambda_n t) + B_n^* \lambda_n cos(\lambda_n t)]\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_{t=0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)\end{aligned} \tag{2.81}$$

Por lo tanto, los coeficientes B_n^* deben elegirse de modo tal que para t=0, la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ quede como la serie senoidal de Fourier de $g(x)$.

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \tag{2.82}$$

Considerando que $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, (2.82) también puede escribirse como:

$$\boxed{B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx} \tag{2.83}$$

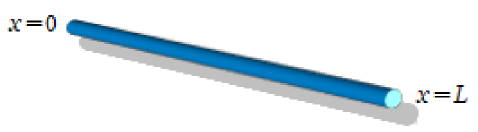
Se considera a continuación el caso en el que la velocidad inicial $g(x)$ es nula. Entonces los coeficientes B_n^* son cero y $u(x,t)$ resulta (ecuación (78)):

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n cos(\lambda_n t) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2.84}$$

La serie que representa a $u(x,t)$, solución de (57) con CI dadas por (58), siendo $g(x)$ nula puede obtenerse simplemente a partir de la serie senoidal de Fourier de $u_0(x)$, insertando el factor $cos(\lambda_n t)$ en el n-ésimo término. Este término tiene frecuencia angular $\omega_n = \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

1.20. VIBRACIONES LONGITUDINALES EN BARRAS

Estudiaremos las vibraciones longitudinales libres en una barra uniforme elástica, de longitud L, área de sección transversal A, módulo de elasticidad del material E y densidad ρ.



Barra

Elemento diferencial de la barra

Ecuación de movimiento:

Aplicando la segunda Ley de Newton, es decir, el equilibrio dinámico del volumen infinitesimal de longitud dx:

$$F + \frac{\partial F}{\partial x}dx - F = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.85}$$

$u(x,t)$: desplazamiento de la sección transversal cuya posición es x cuando la barra no está estirada y en reposo, en el tiempo t.

La fuerza F puede escribirse en términos de la tensión axial como:

$$F = \sigma A \tag{2.86}$$

y a su vez la tensión axial σ puede definirse en términos de la deformación axial ε mediante la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.87}$$

en tanto que la relación entre la deformación y el desplazamiento está definida por:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.88}$$

Considerando las ecuaciones (2.87) y (2.88), la ecuación (2.86) resulta:

$$F = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.89}$$

Sustituyendo (2.89) en (2.85):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \tag{2.90}$$

Dicha expresión es la ecuación diferencial que gobierna las vibraciones longitudinales libre (sin acción externa) de la barra. Se asume que la función $u(x,t)$ es lo suficientemente suave para que existan todas las derivadas apropiadas. Si asumimos que tanto el módulo de elasticidad E, como el área transversal de la barra A son constantes, se obtiene:

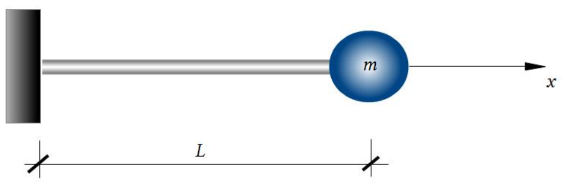
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{E}{\rho}} \tag{2.91}$$

La ecuación obtenida gobierna las vibraciones longitudinales libres en la barra.

Consideramos ahora el caso de una barra con un extremo fijo (en x=0) y una masa m adherida en el extremo libre (x=L).

Consideraremos además, que la barra está inicialmente estirada por el movimiento de la masa m a una distancia bl a la derecha, de modo tal que toda sección transversal x de la barra está inicialmente desplazada en bx. En el tiempo t=0, el sistema se pone en libertad partiendo del reposo.

Condiciones iniciales (CI):



$$\boxed{\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) = bx \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = 0 \end{cases} \qquad 0<x<L} \tag{2.92}$$

Dado que la masa m está sujeta a la barra, el extremo de la barra y la masa deben experimentar la misma aceleración. De acuerdo a la ecuación (2.89) la fuerza en la barra en x=L, es $EA\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}$ de donde se tiene:

$$m\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=L} = -EA\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} \qquad (2.93)$$

Condiciones en la frontera: (CF)

De acuerdo a lo visto, las condiciones de frontera de este problema están dadas por:

$$\boxed{\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ m\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=L} = -EA\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} \end{cases} \qquad t>0} \qquad (2.94)$$

Es decir, para este problema hay una condición de frontera homogénea del tipo *Dirichlet* y otra no homogénea del tipo *Neuman*.

Separación de variables:

<u>Paso</u> <u>1</u>: Se plantea la solución de (2.91) como un producto de dos funciones, cada una de las cuales depende únicamente de las variables x y t. Es decir:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \qquad (2.95)$$

Al derivar (2.95) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \qquad (2.96)$$

Que al sustituirlas en (2.91) resulta:

$$F\ddot{G} = c^2 F''G \qquad (2.97)$$

Dividiendo ambos miembros por c^2FG obtenemos:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \qquad (2.98)$$

Se observa que la expresión del primer miembro depende sólo de t, en tanto que la del segundo miembro sólo depende de x. Por lo tanto ambos miembros deben ser constantes (porque si fueran variables, al cambiar t o x se afectaría sólo el primer miembro, o sólo el segundo, sin alterar el otro). Por lo tanto:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = \lambda \qquad (2.99)$$

De donde se obtienen dos EDO:

$$F'' - \lambda F = 0 \qquad (2.100)$$

$$\ddot{G} - c^2\lambda G = 0 \qquad (2.101)$$

<u>Paso</u> <u>2</u>: se determinan ahora las soluciones de (2.100) y (2.101) de tal modo que (2.95) satisfaga las (CF) dadas por (2.94). Es decir, para todo t:

$$\boxed{u(0,t) = F(0)G(t)} \quad y \quad \boxed{mF(L)\ddot{G}(t) = -EAF'(L)G(t)} \qquad (2.102)$$

Las (CF) deben cumplirse para todo t y $G(t)$=0 no es de interés, ya que conduce a $u(x,t)$=0. Por lo tanto, a partir de la primer condición de frontera debe cumplirse que $F(0)$=0.

En la segunda condición de frontera vamos a sustituir $\ddot{G}(t)$ por su expresión dada en (101) y luego dividimos ambos miembros por $EG(t)/\rho$, resultando:

$$mF(L)\lambda = -\rho AF'(L) \qquad (2.103)$$

Resolución de la ecuación (2.100):

$$F'' - \lambda F = 0 \quad con \quad F(0) = 0 \quad y \quad mF(L)\lambda = -\rho AF'(L) \qquad (2.104)$$

λ=0 y λ>0 conducen a $F(x)$=0 que no es de interés porque implicaría $u(x,t)$=0. Entonces sólo queda la posibilidad de λ<0. Si $\lambda=-\omega^2$, (100) toma la forma:

$$\boxed{F'' + \omega^2 F = 0} \qquad (2.105)$$

cuya solución general es:

$$F(x) = \overline{A}cos(\omega x) + \overline{B}sen(\omega x) \qquad (2.106)$$

con la primera condición de frontera se obtiene:

$$F(0) = 0 \qquad \overline{A} = 0 \qquad F(x) = \overline{B}sen(\omega x) \qquad (2.107)$$

de la segunda condición de frontera resulta:

$$mF(L)\lambda = -\rho AF'(L)$$

$$F'(x) = B\omega sen(\omega x)$$

$$m\omega sen(\omega L) = \rho Acos(\omega L) \qquad (2.108)$$

Considerando la masa total de la barra $M=\rho AL$, se puede reescribir la ecuación anterior:

$$tg(\omega L) = \frac{M/m}{\omega L} \tag{2.109}$$

Haciendo $\overline{B} = 1$ se obtiene una infinidad de soluciones $F(x)$=$F_n(x)$

$$F_n(x) = sen(\omega_n x) \qquad n = 1,2, \ldots \tag{2.110}$$

O lo que es lo mismo:

$$F_n(x) = sen\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \qquad n = 1,2, \ldots \tag{2.111}$$

Donde β_n son las raíces positivas de la ecuación (2.109) que satisfacen las condiciones de frontera dadas en (2.104).

Resolución de la ecuación (2.101): la constante λ está ahora restringida a los valores λ=-ω^2, que resulta de la ecuación (2.109). La ecuación (2.101) resulta entonces:

$$\ddot{G} + c^2\omega^2 G = 0 \tag{2.112}$$

Una solución general es:

$$G_n(t) = B_n cos(c\omega_n t) + B_n^* sen(c\omega_n t) \tag{2.113}$$

Es así que las funciones $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ resultan:

$$\boxed{u_n(x,t) = [B_n cos(c\omega_n t) + B_n^* sen(c\omega_n t)]sen(\omega_n x)} \tag{2.114}$$

Son funciones solución de (2.91) que satisfacen las (CF) dadas por (2.94), llamadas ***eigenfunciones*** o funciones características con los ***eigenvalores*** o valores característicos $c\omega_n$

Paso 3: Una sola función $u_n(x,t)$ en general no satisfará las CI dadas en (2.92). Siendo (2.91) una EDP lineal homogénea, por el principio de superposición, la combinación lineal de funciones solución $u_n(x,t)$, es solución de (2.91). Para obtener una solución que satisfaga las CI dadas en (2.92) se considera la serie infinita:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[B_n cos(c\omega_n t) + B_n^* sen(c\omega_n t)]sen(\omega_n x)} \tag{2.115}$$

Considerando (115) y la (CI) $u(x,0)$=$u_0(x)$=bx, se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen(\omega_n x) = bx \tag{2.116}$$

Ahora se considera (2.115) y la condición inicial $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}[-B_n c\omega_n sen(c\omega_n t) + B_n^* c\omega_n cos(c\omega_n t)]sen(\omega_n x)\right]_{t=0}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* c\omega_n sen(\omega_n x) = g(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_n^* = 0 \tag{2.117}$$

Es decir, la ecuación (2.115) resulta:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n cos(c\omega_n t) sen(\omega_n x)} \tag{2.118}$$

con ω_n las raíces positivas de (2.109) y Bn que satisfagan (2.116).

Veamos cómo las frecuencias naturales de vibración de la barra son afectadas por la presencia de la masa m en su extremo libre: $c\omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\omega_n$
Multiplicamos y dividimos por L:

$$\frac{c}{L}(\omega_n L) = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}(\omega_n L) = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\beta_n \tag{2.119}$$

donde β_n es la n-ésima solución positiva de (2.109), la que a su vez puede reescribirse como:

$$cotg(\beta) = \frac{m\beta}{M} \tag{2.120}$$

Las frecuencias naturales de vibración se determinan por la relación entre la masa m y la masa M total de la barra.

Actividad de aplicación: Obtenga las frecuencias angulares de vibración para el caso en el que no hay masa en el extremo libre.

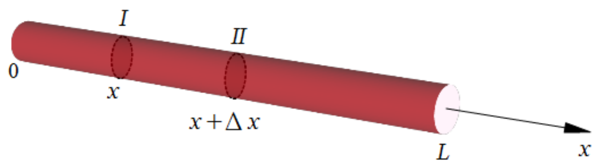
a) Como caso particular de (2.120)
b) Resolviendo el problema para una barra con un extremo fijo y el otro libre.

1.21. UN MODELO PARA EL FLUJO DE CALOR

Desarrollaremos un modelo para el flujo de calor a través de un alambre delgado, aislado, cuyos extremos se mantienen constantes a la temperatura 0°C y cuya distribución inicial de temperaturas debe especificarse.

Consideramos el alambre colocado a lo largo del eje x, con el extremo izquierdo del alambre en x=0 y el extremo derecho en x=L. Denominamos $u(x,t)$ a la temperatura del alambre en la posición x en un determinado tiempo t. Suponemos que el alambre es delgado, de forma tal que u es constante a través de una sección transversal del alambre para un valor fijo de x.

Consideraremos un pequeño volumen del alambre entre dos planos transversales, I y II, perpendiculares al eje x, en correspondencia con x y $x+\Delta x$ respectivamente.



La temperatura en el plano I, en el instante t, es $u(x,t)$. La temperatura en el plano II en el instante t es $u(x+\Delta x, t)$. Necesitamos de los siguientes principios de la física que describen el flujo de calor.

Conducción del calor: La tasa de flujo de calor (cantidad de calor por unidad de tiempo que fluye a través de una unidad de área transversal en I), es proporcional a $\frac{\partial u}{\partial x}$, el gradiente de temperatura en I. La constante de conductividad k, se denomina conductividad térmica del material. En general la conductividad térmica puede variar de un punto a otro, es decir k=$k(x)$.

Dirección del flujo de calor: La dirección del flujo de calor siempre va de puntos de temperatura más alta a puntos de temperatura más baja.

Capacidad calórica específica: La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un cuerpo de masa m en una cantidad Δu, es $\gamma m \Delta u$, donde la constante γ es la capacidad calórica específica del material.

La capacidad calórica específica también puede variar con la posición, es decir, γ=$\gamma(x)$.

Sea H la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través de la superficie I durante un intervalo de tiempo Δt. Entonces, la expresión para la conducción del calor es:

$$\boxed{H(x) = -k(x)A\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)} \tag{2.121}$$

donde A es el área de la sección transversal del alambre. El signo negativo en esta expresión es consecuencia del segundo principio: si $\frac{\partial u}{\partial x}$ es positivo, entonces el flujo de calor va de derecha a izquierda (de lo más caliente a lo más frío).

La cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano II durante un intervalo de tiempo Δt es:

$$\boxed{H(x+\Delta x) = -k(x+\Delta x)A\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)} \tag{2.122}$$

El cambio neto en el calor ΔE en el volumen V es la cantidad que entra en el extremo I menos la cantidad que sale en el extremo II, más cualquier calor generado por otras fuentes (como reacciones químicas, corrientes eléctricas etc.). Esto último se modela mediante un término $Q(x,t)\Delta xA\Delta t$, donde Q es la densidad de la tasa de energía. Por lo tanto:

$$\Delta E = H(x) - H(x+\Delta x) + Q(x,t)\Delta xA\Delta t \tag{2.123}$$

$$\Delta E = A\Delta t\left[k(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + Q(x,t)\Delta xA\Delta t\right] \tag{2.124}$$

De acuerdo al tercer principio, el cambio neto en el calor ΔE está dado por $\Delta E=\gamma m\Delta u$, donde Δu es el cambio en temperatura y γ es la capacidad calórica específica. Si suponemos que el cambio en la temperatura en el volumen V es esencialmente igual al cambio de temperatura en x, es decir, $\Delta u=u(x,t+\Delta t)-u(x,t)$ y que la masa del volumen V del alambre es $m=A\rho\Delta x$, donde $\rho=\rho(x)$ es la densidad del alambre, entonces:

$$\Delta E = \gamma(x)A\rho(x)\Delta x[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)] \tag{2.125}$$

Igualando las expresiones para ΔE dadas por (124) y (125) se obtiene:

$$\begin{aligned} A\Delta t\left[k(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + Q(x,t)\Delta xA\Delta t\right] = \\ = \gamma(x)A\rho(x)\Delta x[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)] \end{aligned} \tag{2.126}$$

Dividimos ambos miembros por $A\Delta x\Delta t$ y calculamos los límites cuando Δx y Δt tienden a 0, obteniendo:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + Q(x,t) = \rho(x)\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)} \tag{2.127}$$

Si los parámetros físicos k, γ y ρ son uniformes a lo largo de la longitud del alambre, entonces (2.127) queda como:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + P(x,t)} \tag{2.128}$$

Donde la constante positiva $c^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$ es la ***difusividad térmica*** del material y $P(x,t)=Q(x,t)/\rho\gamma$.

La ecuación (128) se denomina ***ecuación del flujo de calor unidimensional.***

Condiciones en la frontera: como los extremos del alambre se mantienen a 0°C, se pide que:

$$\boxed{u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t} \tag{2.129}$$

Condición inicial: debemos conocer la distribución inicial de temperaturas, es decir:

$$\boxed{u(x,0) = u_0(x) \qquad 0 < x < L} \tag{2.130}$$

1.22. MODELO MATEMÁTICO PARA EL FLUJO DE CALOR EN UN ALAMBRE UNIFORME SIN OTRAS FUENTES DE CALOR

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad c^2 = \frac{k}{\gamma\rho} \quad t > 0 \qquad 0 < x < L \tag{2.131}$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(0,t) = u(L,t) = 0 & \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \qquad 0 < x < L \end{array} \right.$$

Resolveremos la ecuación de flujo de calor unidimensional usando el método de separación de variables, siguiendo los mismos pasos que se usaron para resolver la ecuación de la onda.

Consideraremos la temperatura de una barra o alambre delgados de sección transversal constante y material homogéneo, orientada a lo largo del eje x, que está perfectamente aislada en su superficie lateral de modo que el calor sólo fluye en la dirección de x y la ecuación del calor resulta:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{k}{\gamma\rho}} \tag{2.132}$$

Manteniendo la temperatura en los extremos a 0°C y conociendo la distribución inicial de temperatura en el alambre, las condiciones en la frontera y la condición inicial, dadas por (2.129) y (2.130) respectivamente:

<u>Paso</u> <u>1</u>: En el método de separación de variables se plantea la solución de (2.132) como un producto de dos funciones, cada una de las cuales depende únicamente de las variables x y t. Es decir:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{2.133}$$

Al derivar (2.133) se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \frac{\partial G}{\partial t} \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = F\dot{G} \tag{2.134}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} G \qquad y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F'' G \tag{2.135}$$

Que al sustituirlas en (2.132) resulta:

$$F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t) \tag{2.136}$$

Dividiendo ambos miembros por $c^2 F(x)G(t)$ obtenemos:

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \tag{2.137}$$

Se observa que la expresión del primer miembro depende sólo de t, en tanto que la del segundo miembro sólo depende de x. Por lo tanto ambos miembros deben ser iguales a una constante λ. Por lo tanto:

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \tag{2.138}$$

De donde se obtienen dos EDO:

$$\boxed{F''(x) - \lambda F(x) = 0} \tag{2.139}$$

$$\boxed{\dot{G}(t) - c^2 \lambda G(t) = 0} \tag{2.140}$$

<u>Paso</u> <u>2</u>: se determinan ahora las soluciones de (2.139) y (2.140) de tal modo que $u(x,t) = F(x)G(t)$ satisfaga las (CF) dadas por (2.129). Es decir, para todo t:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \qquad y \qquad u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \tag{2.141}$$

Resolución de (139): Las (CF) deben cumplirse para todo t y $G(t)$=0 no es de interés, ya que conduce a $u(x,t)$=0.

Por lo tanto debe cumplirse que:

$$F(0) = 0 \qquad y \qquad F(L) = 0 \tag{2.142}$$

Ahora bien:

- Si λ=0, la solución general de (2.139) es $F(x)=ax+b$. Pero a partir de (2.142) se obtiene $a=b=0$, de donde $F(x)$=0, que no es de interés porque conduce a $u(x,t)$=0

- Si λ>0, la solución general de (2.139) es $F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Pero a partir de (2.142) se obtiene $A=B$=0, de donde $F(x)$=0, que no es de interés como en el caso anterior. De esta manera sólo queda la posibilidad que λ<0.

- Si $\lambda=-\omega^2$, entonces (2.138) toma la forma:

$$F''(x) + \omega^2 F(x) = 0 \qquad (2.143)$$

cuya solución general es:

$$F(x) = Acos(\omega x) + Bsen(\omega x) \qquad (2.144)$$

Con las (CF) dadas en (2.142):

$$F(0) = A = 0 \qquad y \qquad F(L) = Bsen(\omega L) = 0 \qquad (2.145)$$

Debe ser $B \neq 0$ para que $F(x) \neq 0$. Entonces $sen(\omega L)=0$. Es decir $\omega L = n\pi$, de donde:

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \text{ entero}) \qquad (2.146)$$

Haciendo B=1 se obtienen las soluciones de (2.143) que satisfacen las (CF) dadas por (2.140).

$$\boxed{F_n(x) = sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \qquad (n = 1,2,\dots) \qquad (2.147)$$

Resolución de la ecuación (2.140): la constante λ está ahora restringida a los valores $\lambda=-\omega^2=-(n\pi/L)^2$, que resulta de (2.146). Para estos valores de λ, la ecuación (2.140), resulta:

$$\dot{G}(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0 \qquad con \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \qquad (2.148)$$

Que tiene la solución general:

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1,2,\dots \qquad (2.149)$$

Donde B_n es una constante. Por lo tanto las funciones $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ resultan:

$$\boxed{u_n(x,t) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1,2,\dots} \qquad (2.150)$$

Estas son funciones solución de la ecuación de calor (2.132) que satisfacen las (CF) dadas por (2.129).

Las funciones $u_n(x,t)$ se llaman ***eigenfunciones*** o funciones características del problema, que corresponden a los ***eigenvalores*** o valores característicos $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

Paso 3: Una sola función $u_n(x,t)$ en general no satisfará las condiciones iniciales dadas en (130). Siendo la ecuación (2.132) una EDP lineal homogénea, por el principio de superposición, la suma de un número finito de funciones solución $u_n(x,t)$ es solución de (2.132).

Para obtener una solución que satisfaga las CI dadas en (2.130), se considera la serie infinita:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2.151}$$

A partir de esta expresión y de (2.131) se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x) \tag{2.152}$$

Así, para que (2.151) satisfaga (2.131), los coeficientes B_n deben elegirse de modo tal que $u(x,0)$ quede como la serie senoidal de Fourier de $u_0(x)$. Es decir:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \tag{2.153}$$

Observamos en (2.151) que debido al factor exponencial, todos los términos tienden a cero cuando t tiende a ∞. La rapidez del decremento varía con n.