OTROS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES O ANOTACIONES EN GENERAL DEL LIBRO DE ZILL

ANOTACIONES ACERCA DE LA SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL:

Resuelva $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

SOLUCIÓN Dividiendo entre x, obtenemos la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \tag{6}$$

En esta forma identificamos a $P(x) = -4/x$ y $f(x) = x^5e^x$ y además vemos que P y f son continuas en $(0, \infty)$. Por tanto el factor integrante es

podemos utilizar $\ln x$ en lugar de $\ln |x|$ ya que $x > 0$

$$\downarrow$$

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Aquí hemos utilizado la identidad básica $b^{\log_b N} = N$, $N > 0$. Ahora multiplicamos la ecuación (6) por x^{-4} y reescribimos

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \quad \text{como} \quad \frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.$$

De la integración por partes se tiene que la solución general definida en el intervalo $(0, \infty)$ es $x^{-4}y = xe^x - e^x + c$ o $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$. ■

Excepto en el caso en el que el coeficiente principal es 1, la reformulación de la ecuación (1) en la forma estándar (2) requiere que se divida entre $a_1(x)$. Los valores de x para los que $a_1(x) = 0$ se llaman **puntos singulares** de la ecuación. Los puntos singulares son potencialmente problemáticos. En concreto, en la ecuación (2), si $P(x)$ (que se forma al dividir $a_0(x)$ entre $a_1(x)$) es discontinua en un punto, la discontinuidad puede conducir a soluciones de la ecuación diferencial.

Determine la solución general de $(x^2 - 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación diferencial en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0 \tag{7}$$

e identificando $P(x) = x/(x^2 - 9)$. Aunque P es continua en $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, \infty)$, resolveremos la ecuación en el primer y tercer intervalos. En estos intervalos el factor integrante es

$$e^{\int x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2-9)} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Después multiplicando la forma estándar (7) por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2 - 9}\,y\right] = 0.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $\sqrt{x^2 - 9}\,y = c$. De este modo, ya sea para $x > 3$ o $x < -3$ la solución general de la ecuación es

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

■

Observe en el ejemplo 4 que $x = 3$ y $x = -3$ son puntos singulares de la ecuación y que toda función en la solución general $y = c/\sqrt{x^2 - 9}$ es discontinua en estos puntos. Por otra parte, $x = 0$ es un punto singular de la ecuación diferencial en el ejemplo 3, pero en la solución general $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$ es notable que cada función de esta familia uniparamétrica es continua en $x = 0$ y está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y no sólo en $(0, \infty)$, como se indica en la solución. Sin embargo, la familia $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$ definida en $(-\infty, \infty)$ no se puede considerar la solución general de la ED, ya que el punto singular $x = 0$ aún causa un problema. Vea los problemas 45 y 46 en los ejercicios 2.3.

45. Lea nuevamente el ejemplo 3 y después analice, usando el teorema 1.2.1, la existencia y unicidad de una solución del problema con valores iniciales que consiste de $xy' - 4y = x^6e^x$ y de la condición inicial dada.

a) $y(0) = 0$ **b)** $y(0) = y_0$, $y_0 > 0$

c) $y(x_0) = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$

46. Lea nuevamente el ejemplo 4 y después determine la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-3, 3)$.

COEFICIENTES DISCONTINUOS

COEFICIENTES DISCONTINUOS En aplicaciones, los coeficientes $P(x)$ y $f(x)$ en la ecuación (2) pueden ser continuos en partes. En el siguiente ejemplo $f(x)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$ con una sola discontinuidad, en particular un salto (finito) discontinuo en $x = 1$. Resolvemos el problema en dos partes correspondientes a los dos intervalos en los que f está definida. Es entonces posible juntar las partes de las dos soluciones en $x = 1$ así que $y(x)$ es continua en $[0, \infty)$.

EJEMPLO 6 Un problema con valores iniciales

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0 \quad$ donde $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

SOLUCIÓN En la figura 2.3.3 se muestra la gráfica de la función discontinua f. Resolvemos la ED para $y(x)$ primero en el intervalo $[0, 1]$ y después en el intervalo $(1, \infty)$. Para $0 \leq x \leq 1$ se tiene que

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \qquad \text{o, el equivalente,} \qquad \frac{d}{dx}[e^x y] = e^x.$$

Integrando esta última ecuación y despejando y se obtiene $y = 1 + c_1 e^{-x}$. Puesto que $y(0) = 0$, debemos tener que $c_1 = -1$ y por tanto $y = 1 - e^{-x}, 0 \leq x \leq 1$. Entonces para $x > 1$ la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

conduce a $y = c_2 e^{-x}$. Por tanto podemos escribir

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ c_2 e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Recurriendo a la definición de continuidad en un punto, es posible determinar c_2, así que la última función es continua en $x = 1$. El requisito de $\lim_{x \to 1^+} y(x) = y(1)$ implica que $c_2 e^{-1} = 1 - e^{-1}$ o $c_2 = e - 1$. Como se muestra en la figura 2.3.4, la función

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases} \tag{9}$$

es continua en $(0, \infty)$. ■

Será importante tomar en cuenta un poco más la ecuación (9) y la figura 2.3.4; por favor lea y conteste el problema 48 de los ejercicios 2.3.

FACTORES INTEGRANTES:

FACTORES INTEGRANTES Recuerde de la sección 2.3 que el lado izquierdo de la ecuación lineal $y' + P(x)y = f(x)$ se puede transformar en una derivada cuando multiplicamos la ecuación por el factor integrante. Esta misma idea básica algunas veces funciona bien para una ecuación diferencial no exacta $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Es decir, algunas veces es posible encontrar un **factor integrante** $\mu(x, y)$ así que, después de multiplicar, el lado izquierdo de

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \tag{8}$$

es una diferencial exacta. En un intento por encontrar a μ, regresamos a la ecuación (4) del criterio de exactitud. La ecuación (8) es exacta si y sólo si $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, donde los subíndices denotan derivadas parciales. Por la regla del producto de la derivación, la última ecuación es la misma que $\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + \mu_x N$ o

$$\mu_x N - \mu_y M = (M_y - N_x)\mu. \tag{9}$$

Aunque M, N, M_y y N_x son funciones conocidas de x y y, la dificultad aquí al determinar la incógnita $\mu(x, y)$ de la ecuación (9) es que debemos resolver una ecuación diferencial parcial. Como no estamos preparados para hacerlo, haremos una hipótesis para simplificar. Suponga que μ es una función de una variable; por ejemplo, μ depende sólo de x. En este caso, $\mu_x = d\mu/dx$ y $\mu_y = 0$, así la ecuación (9) se puede escribir como

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{10}$$

Estamos aún en un callejón sin salida si el cociente $(M_y - N_x)/N$ depende tanto de x como de y. Sin embargo, si después de que se hacen todas las simplificaciones algebraicas resulta que el cociente $(M_y - N_x)/N$ depende sólo de la variable x, entonces la ecuación (10) es *separable* así como *lineal*. Entonces, de la sección 2.2 o de la sección 2.3 tenemos que $\mu(x) = e^{\int((M_y - N_x)/N)dx}$. De manera similar, de la ecuación (9) tenemos que si μ depende sólo de la variable y, entonces

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu. \tag{11}$$

En este caso, si $(N_x - M_y)/M$ es una función sólo de y, podemos despejar μ de la ecuación (11).

Resumiendo estos resultados para la ecuación diferencial.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{12}$$

- Si $(M_y - N_x)/N$ es sólo una función de x, entonces un factor integrante para la ecuación (12) es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}. \tag{13}$$

- Si $(N_x - M_y)/M$ es una función sólo de y, entonces un factor integrante de (12) es

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}. \tag{14}$$

La ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$$

es no exacta. Identificando $M = xy$, $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$, encontramos que las derivadas parciales $M_y = x$ y $N_x = 4x$. El primer cociente de la ecuación (13) no nos conduce a nada, ya que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4x}{2x^2 + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$$

depende de x y de y. Sin embargo, la ecuación (14) produce un cociente que depende sólo de y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}.$$

Entonces el factor integrante es $e^{\int 3dy/y} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$. Después de multiplicar la ED dada por $\mu(y) = y^3$, la ecuación resultante es

$$xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0.$$

Usted debería comprobar que la última ecuación es ahora exacta así como mostrar, usando el método que se presentó en esta sección, que una familia de soluciones es

$$\tfrac{1}{2}x^2y^4 + \tfrac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c.$$

■

SUSTITUCIONES

SUSTITUCIONES Con frecuencia, el primer paso para resolver una ecuación diferencial es transformarla en otra ecuación diferencial mediante una **sustitución**. Por ejemplo, suponga que se quiere transformar la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ sustituyendo $y = g(x, u)$, donde u se considera una función de la variable x. Si g tiene primeras derivadas parciales, entonces, usando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx} \quad \text{obtenemos} \quad \frac{dy}{dx} = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}.$$

Al sustituir dy/dx por la derivada anterior y sustituyendo y en $f(x, y)$ por $g(x, u)$, obtenemos la ED $dy/dx = f(x,y)$ que se convierten en $g_x(x,u) + g_u(x,u)\dfrac{du}{dx} = f(x, g(x,u))$, la cual, resuelta para $\dfrac{du}{dx}$, tiene la forma $\dfrac{du}{dx} = F(x, u)$. Si podemos determinar una solución $u = \phi(x)$ de esta última ecuación, entonces una solución de la ecuación diferencial original es $y(x) = g(x, \phi(x))$.

En el siguiente análisis examinaremos tres clases diferentes de ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden resolver mediante una sustitución.

ECUACIONES HOMÓGENEAS Si una función f tiene la propiedad $f(tx, ty) = t^{\alpha}f(x, y)$ para algún número real α, entonces se dice que es una **función homogénea** de grado α. Por ejemplo $f(x, y) = x^3 + y^3$ es una función homogénea de grado 3, ya que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3f(x, y),$$

mientras que $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ es no homogénea. Una ED de primer orden en forma diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

se dice que es **homogénea*** si ambas funciones coeficientes M y N son ecuaciones homogéneas del *mismo* grado. En otras palabras, la ecuación (1) es homogénea si

$$M(tx, ty) = t^{\alpha}M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^{\alpha}N(x, y).$$

Además, si M y N son funciones homogéneas de grado α, podemos escribir

$$M(x, y) = x^{\alpha}M(1, u) \quad \text{y} \quad N(x, y) = x^{\alpha}N(1, u) \quad \text{donde } u = y/x, \tag{2}$$

y

$$M(x, y) = y^{\alpha}M(v, 1) \quad \text{y} \quad N(x, y) = y^{\alpha}N(v, 1) \quad \text{donde } v = x/y. \tag{3}$$

Vea el problema 31 de los ejercicios 2.5. Las propiedades (2) y (3) sugieren las sustituciones que se pueden usar para resolver una ecuación diferencial homogénea. En concreto, *cualquiera* de las sustituciones $y = ux$ o $x = vy$, donde u y v son las nuevas variables dependientes, reducirá una ecuación homogénea a una ecuación diferencial de primer orden *separable*. Para mostrar esto, observe que como consecuencia de (2) una ecuación homogénea $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se puede reescribir como

$$x^{\alpha}M(1, u)\,dx + x^{\alpha}N(1, u)\,dy = 0 \qquad \text{o bien} \qquad M(1, u)\,dx + N(1, u)\,dy = 0,$$

donde $u = y/x$ o $y = ux$. Sustituyendo la diferencial $dy = u\,dx + x\,du$ en la última ecuación y agrupando términos, obtenemos una ED separable en las variables u y x:

$$M(1, u)\,dx + N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

$$[M(1, u) + uN(1, u)]\,dx + xN(1, u)\,du = 0$$

o

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)\,du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0.$$

Aquí le damos el mismo consejo que en las secciones anteriores: No memorice nada de esto (en particular la última fórmula); más bien, *siga el procedimiento cada vez.*

REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLES Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \tag{5}$$

siempre se puede reducir a una ecuación con variables separables por medio de la sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$. El ejemplo 3 muestra la técnica.

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7, \quad y(0) = 0.$

SOLUCIÓN Si hacemos $u = -2x + y$, entonces $du/dx = -2 + dy/dx$, por lo que la ecuación diferencial se expresa como

$$\frac{du}{dx} + 2 = u^2 - 7 \qquad \text{o} \qquad \frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$

OPERADORES DIFERENCIALES

OPERADORES DIFERENCIALES En cálculo, la derivación se denota con frecuencia con la letra D mayúscula, es decir, $dy/dx = Dy$. El símbolo D se conoce como **operador diferencial** porque convierte una función derivable en otra función. Por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4 \operatorname{sen} 4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se expresan en términos de D de manera natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \quad \text{y, en general} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny,$$

donde y representa una función suficientemente derivable. Las expresiones polinomiales en las que interviene D, tales como $D + 3$, $D^2 + 3D - 4$ y $5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 9$, son también operadores diferenciales. En general, se define un **operador diferencial de n-ésimo orden** u **operador polinomial** como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x). \tag{8}$$

Como una consecuencia de dos propiedades básicas de la derivada, $D(cf(x)) = cDf(x)$, c es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de linealidad; es decir, L operando sobre una combinación lineal de dos funciones diferenciables es lo mismo que la combinación lineal de L operando en cada una de las funciones. Simbólicamente esto se expresa como

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)), \tag{9}$$

donde α y β son constantes. Como resultado de (9) se dice que el operador diferencial de n-ésimo orden es un **operador lineal**.

REDUCCIÓN DE ORDEN

CASO GENERAL Suponga que se divide entre $a_2(x)$ para escribir la ecuación (1) en la **forma estándar**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en algún intervalo I. Supongamos además que $y_1(x)$ es una solución conocida de (3) en I y que $y_1(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo. Si se define $y = u(x)y_1(x)$, se tiene que

$$y' = uy_1' + y_1u', \quad y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy = u\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\text{cero}} + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0.$$

Esto implica que se debe tener

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0 \quad \text{o} \quad y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{4}$$

donde hacemos que $w = u'$. Observe que la última ecuación en (4) es tanto lineal como separable. Separando las variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P\,dx = 0$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int P\,dx + c \qquad \text{o} \qquad wy_1^2 = c_1e^{-\int P\,dx}.$$

Despejamos a w de la última ecuación, usamos $w = u'$ e integrando nuevamente:

$$u = c_1\int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}dx + c_2.$$

Eligiendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, se encuentra de $y = u(x)y_1(x)$ que una segunda solución de la ecuación (3) es

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{5}$$

Un buen ejercicio de derivación es comprobar que la función $y_2(x)$ que se define en (5) satisface la ecuación (3) y que y_1 y y_2 son linealmente independientes en algún intervalo en el que $y_1(x)$ no es cero.

NOTA: Date cuenta vos que no está utilizando funciones coeficientes constantes

Extensión del método de solución de EDOS lineales homogéneas de segundo orden a EDOS lineales homogéneas de orden mayor:

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR En general, para resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden (1) donde a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, se debe resolver una ecuación polinomial de n-ésimo grado

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{12}$$

Si todas las raíces de (12) son reales y distintas, entonces la solución general de (1) es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

Es un poco difícil resumir los análogos de los casos II y III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos ocurren en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado podría tener cinco raíces reales distintas, o tres raíces reales distintas y dos complejas, o una real y cuatro complejas, o cinco raíces reales pero iguales, o cinco raíces reales pero dos de ellas iguales, etc. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de n-ésimo grado (es decir, k raíces son iguales a m_1), es posible demostrar que las soluciones linealmente independientes son

$$e^{m_1 x}, \quad x e^{m_1 x}, \quad x^2 e^{m_1 x}, \ldots, \quad x^{k-1} e^{m_1 x}$$

y la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

Por último, se debe recordar que cuando los coeficientes son reales, las raíces complejas de una ecuación auxiliar siempre se presentan en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener a lo más dos raíces complejas.

Ejemplo coeficientes indeterminados

EJEMPLO 3 **Formando y_p por superposición**

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$. (3)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Primero, se encuentra que la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$ es $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

Paso 2. A continuación, la presencia de $4x - 5$ en $g(x)$ indica que la solución particular incluye un polinomio lineal. Además, debido a que la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, se supone también que la solución particular incluye tanto a xe^{2x} como a e^{2x}. En otras palabras, g es la suma de dos clases básicas de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = polinomio + exponenciales.$$

Por lo que, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.1.7) indica que se busca una solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituyendo

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación (3) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \quad (4)$$

De esta identidad obtenemos las cuatro expresiones

$$-3A = 4, \qquad -2A - 3B = -5, \qquad -3C = 6, \qquad 2C - 3E = 0.$$

La última ecuación en este sistema es resultado de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el miembro derecho de (4) es cero. Resolviendo, se encuentra que $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$ $C, = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$

En vista del principio de superposición (teorema 4.1.7) se puede aproximar también el ejemplo 3 desde el punto de vista de resolver dos problemas más simples. Se debe comprobar que sustituyendo

$$y_{p_1} = Ax + B \qquad \text{en} \qquad y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

y $$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \qquad \text{en} \qquad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

se obtiene, a su vez, $y_{p_1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9}$ y $y_{p_2} = -\left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}$. Entonces, una solución particular de (3) es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

En el siguiente ejemplo se ilustra que algunas veces la suposición "obvia" para la forma de y_p no es una suposición correcta.

Factorización de operadores y operadores anuladores

FACTORIZACIÓN DE OPERADORES Cuando los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots,$ n son constantes reales, un operador diferencial lineal (1) se puede factorizar siempre el polinomio característico $a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0$ sea factorizable. En otras palabras, si r_1 es una raíz de la ecuación auxiliar

$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0,$$

entonces $L = (D - r_1)\, P(D)$, donde la expresión polinomial $P(D)$ es un operador diferencial lineal de orden $n - 1$. Por ejemplo, si se trata a D como una cantidad algebraica, entonces el operador $D^2 + 5D + 6$ se puede factorizar como $(D + 2)(D + 3)$ o como $(D + 3)(D + 2)$. Así si una función $y = f(x)$ tiene una segunda derivada, entonces

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D + 2)(D + 3)y = (D + 3)(D + 2)y.$$

Esto muestra una propiedad general:

Los factores de un operador diferencial con coeficientes constantes conmutan.

Una ecuación diferencial tal como $y'' + 4y' + 4y = 0$ se escribe como

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \quad \text{o} \quad (D + 2)(D + 2)y = 0 \quad \text{o} \quad (D + 2)^2 y = 0.$$

OPERADOR ANULADOR Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f es una función suficientemente derivable tal que

$$L(f(x)) = 0,$$

entonces se dice que L es un **anulador** de la función. Por ejemplo, D anula una función constante $y = k$ puesto que $Dk = 0$. El operador diferencial D^2 anula la función $y = x$ puesto que la primera y la segunda derivada de x son 1 y 0, respectivamente. De manera similar, $D^3x^2 = 0$, etcétera.

El operador diferencial D^n anula cada una de las funciones

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{n-1}. \tag{3}$$

Las funciones que se anulan por un operador diferencial lineal de n-ésimo orden L son simplemente aquellas funciones que se obtienen de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.

El operador diferencial $(D - \alpha)^n$ anula cada una de las funciones

$$e^{\alpha x}, \quad xe^{\alpha x}, \quad x^2e^{\alpha x}, \quad \ldots, \quad x^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{5}$$

Para ver esto, observe que la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea $(D - \alpha)^n y = 0$ es $(m - \alpha)^n = 0$. Puesto que α es una raíz de multiplicidad n, la solución general es

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{6}$$

NOTA: Observar que estamos hablando de coeficientes constantes reales

Cuando α y β, $\beta > 0$ son números reales, la fórmula cuadrática revela que $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$ tiene raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ambas de multiplicidad n. Del análisis al final de la sección 4.3, se tiene el siguiente resultado.

El operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula cada una de las funciones

$$\begin{array}{lllll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, & xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, & x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, & \ldots, & x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \end{array} \tag{7}$$

Coeficientes indeterminados con operadores lineales

Resuelva $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$. (9)

SOLUCIÓN **Paso 1.** Primero, resolvemos la ecuación homogénea $y'' + 3y' + 2y = 0$. Entonces, de la ecuación auxiliar $m^2 + 3m + 2 = (m + 1)(m + 2) = 0$ se encuentra $m_1 = -1$ y $m_2 = -2$ y así la función complementaria es

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Paso 2. Ahora, puesto que $4x^2$ se anula con el operador diferencial D^3, se ve que $D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4D^3x^2$ es lo mismo que

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0. \qquad (10)$$

La ecuación auxiliar de la ecuación de quinto orden en (10),

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0 \quad \text{o} \quad m^3(m + 1)(m + 2) = 0,$$

tiene raíces $m_1 = m_2 = m_3 = 0, m_4 = -1$, y $m_5 = -2$. Así que su solución general debe ser

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \boxed{c_4e^{-x} + c_5e^{-2x}} \qquad (11)$$

Los términos del cuadro sombreado en (11) constituyen la función complementaria de la ecuación original (9). Se puede argumentar que una solución particular y_p, de (9) también debe satisfacer la ecuación (10). Esto significa que los términos restantes en (11) deben tener la forma básica de y_p:

$$y_p = A + Bx + Cx^2, \qquad (12)$$

donde, por conveniencia, hemos remplazado c_1, c_2 y c_3 por A, B y C, respectivamente. Para que (12) sea una solución particular de (9), es necesario encontrar coeficientes *específicos* A, B y C. Derivando la ecuación (12), se tiene que

$$y_p' = B + 2Cx, \qquad y_p'' = 2C,$$

y sustituyendo esto en la ecuación (9) se obtiene

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2Cx^2 = 4x^2.$$

Coeficientes indeterminados en ecuaciones de orden superior a dos:

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR El método que se describió para ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden se puede generalizar a ecuaciones lineales de n-ésimo orden que se han escrito en forma estándar

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \qquad (13)$$

Si $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ es la función complementaria para (13), entonces una solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

donde los u_k', $k = 1, 2, \ldots, n$ se determinan por las n ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1u_1' + \quad y_2u_2' + \cdots + \quad y_nu_n' &= 0 \\ y_1'u_1' + \quad y_2'u_2' + \cdots + \quad y_n'u_n' &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}u_n' &= f(x). \end{aligned} \qquad (14)$$

Las primeras $n - 1$ ecuaciones de este sistema, al igual que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ en (8), son suposiciones que se hacen para simplificar la ecuación resultante después de que $y_p = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$ se sustituye en (13). En este caso usando la regla de Cramer se obtiene

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

donde W es el Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y W_k es el determinante que se obtiene al remplazar la k-ésima columna del Wronskiano por la columna formada por el lado derecho de (14), es decir, la columna que consta de $(0, 0, \ldots, f(x))$. Cuando $n = 2$, se obtiene la ecuación (9). Cuando $n = 3$, la solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$, donde y_1, y_2 y y_3 constituyen un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ED homogénea asociada y u_1, u_2 y u_3 se determinan a partir de

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \qquad u_2' = \frac{W_2}{W}, \qquad u_3' = \frac{W_3}{W}, \tag{15}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix}, \qquad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$