Series de Fourier

Facultad de Ingeniería

Recorrido-SERIES DE FOURIER

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Recordemos el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Definición

Dadas dos funciones f y g definidas en $[a, b]$, el producto escalar usual entre ellas es

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Las funciones f y g son ortogonales en $[a, b]$ si $f \cdot g = 0$ en $[a, b]$.

Producto escalar de funciones en un intervalo dado

Ejemplo

Analice la ortogonalidad de las funciones dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1$ en $[0, 2\pi]$, en $[0, \pi]$ y en $[-\pi, \pi]$.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0: \; f \text{ y } g \text{ son ortogonales en } [0, 2\pi];$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2: \; f \text{ y } g \text{ no son ortogonales en } [0, \pi];$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0: \; f \text{ y } g \text{ son ortogonales en } [-\pi, \pi].$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Familias ortogonales de funciones

Definición

Una familia de funciones es ortogonal en $[a, b]$ si cada miembro de la familia es ortogonal a cada una de las restantes funciones de la familia en $[a, b]$.

Ejemplo

Las familias $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ y $\{1, \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ son ortogonales en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$.

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} 1 \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p} = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_0^{2p}$$

Si $m = n$, la integral vale 0. Si $m \neq n$:

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2p}\left(\operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{p} + \operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{p}{(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{p} - \frac{p}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\Big|_0^{2p} = 0.$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$$

Ejemplo

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[0, 2p]$.

$$\int_0^{2p} \cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 = \int_0^{2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\,dx,\ \ n \neq m.$$

Sistema trigonométrico

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$. Cada una de las funciones $\cos\frac{n\pi x}{p}$ es periódica, con periodo fundamental $\frac{2p}{n}$; lo mismo ocurre con $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}$, $n = 1, 2, \cdots$.

Familias ortogonales completas

Definición

Una familia ortogonal de funciones en $[a, b]$ es completa si la única función definida en $[a, b]$ que es ortogonal a todos los miembros de la familia es la función constante 0.

Ejemplos:

La familia $\{\cos\frac{n\pi x}{p},\ n = 0, 1, 2, 3, ...\} = \{1, \cos\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, 3, ...\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$, pero no es completa.

La familia $\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p},\ n = 1, 2, \cdots\}$ es ortogonal en $[-p, p]$ y en $[0, 2p]$. Y es completa.

Dadas la familia ortogonal de funciones en $[-p, p]$ (o en $[0, 2p]$)

$$\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p};\ n = 1, 2, 3, \cdots\right\},$$

y una función f definida en el mismo intervalo, se busca coeficientes c_0, a_n y b_n, $n = 1, 2, \ldots$ tales que

$$f(x) = c_0 \cdot 1 + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & c_0 && + && a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} && + a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && + && b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} && + b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} + \cdots \\
\textstyle\int_{-p}^{p} f(x)dx = {} & \textstyle\int_{-p}^{p} c_0 dx && + && \textstyle\int_{-p}^{p} a_1 \cos \tfrac{1\pi x}{p} dx && + \textstyle\int_{-p}^{p} a_2 \cos \tfrac{2\pi x}{p} dx + \cdots \\
& && + && \textstyle\int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen} \tfrac{1\pi x}{p} dx && + \textstyle\int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen} \tfrac{2\pi x}{p} dx + \cdots \\
= {} & \textstyle\int_{-p}^{p} c_0 dx && + && 0 + 0 + \cdots \\
= {} & 2pc_0
\end{aligned}
$$

$$c_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x)dx$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 & +a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} & \quad +a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& & +b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} & \quad +b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \cos \frac{1\pi x}{p} & +a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} & \quad +a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& & +b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} & \quad +b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} dx = & \int_{-p}^{p} c_0 \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \\
& + \int_{-p}^{p} a_2 \cos \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen} \frac{1\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \\
& + \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{p} \cos \frac{1\pi x}{p} dx + \cdots \\
= 0 + \int_{-p}^{p} a_1 \cos^2 \frac{1\pi x}{p} dx + 0 + 0 + \cdots = pa_1 \rightarrow & \; a_1 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{1\pi x}{p} dx
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$a_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx; \qquad c_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \rightarrow c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Coeficientes de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & c_0 && + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p} && + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
& && + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} && + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p} + \cdots \\
f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} = \quad & c_0 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} && + a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} && + a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + \cdots \\
& && + b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} && + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx = \int_{-p}^{p} c_0 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \int_{-p}^{p} a_1 \cos\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \\
+ \int_{-p}^{p} a_2 \cos\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \\
+ \int_{-p}^{p} b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{p}\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx + \cdots \\
= 0 + \int_{-p}^{p} b_1 \operatorname{sen}^2\frac{1\pi x}{p}dx + 0 + 0 + \cdots = pb_1 \rightarrow b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx
\end{aligned}
$$

Coeficientes de Fourier

$$b_1 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{1\pi x}{p}dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

Serie de Fourier generada por f

Dada f definida en $[-p, p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Serie de Fourier generada por f

Observación: lo mismo se hace en $[0, 2p]$: dada f definida en $[0, 2p]$, definimos

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots ;$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, n = 1, 2, \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right).$$

Convergencia de series de Fourier

Teorema

Sean f y f' continuas por partes (i.e., tienen un número finito de discontinuidades de salto) en $[-p,p]$. Entonces para toda $x \in (-p,p)$ la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan los límites laterales de f en x por derecha e izquierda, respectivamente.
Además, en p y $-p$ la serie converge a

$$\frac{f(-p+)+f(p-)}{2}.$$

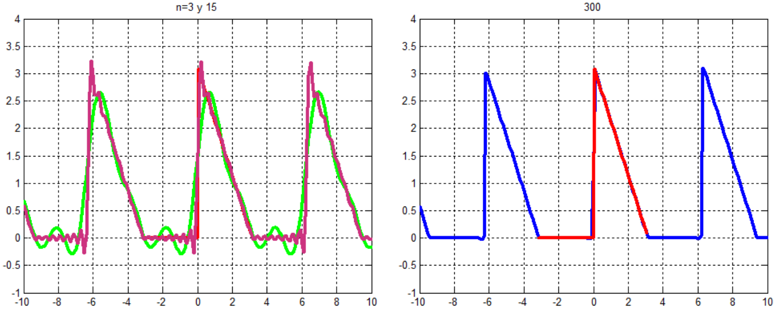
Observación: si x es un punto de continuidad de f, la serie de Fourier converge a $f(x)$ en ese punto.

Ejemplos

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0; \\ -x+\pi, & \text{si } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$



Gráficos de sumas parciales.

Ejemplos

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x + \pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$

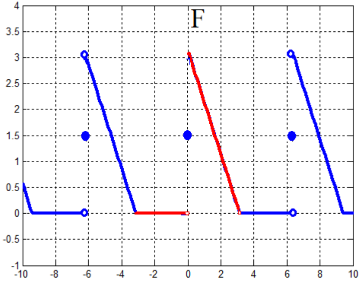
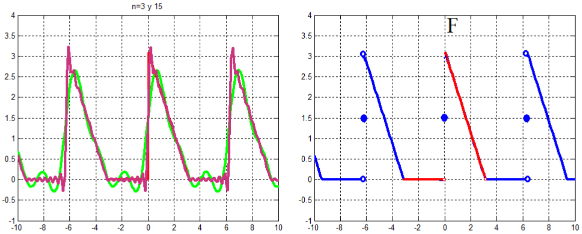


Gráfico de la función F dada por la serie de Fourier generada por f.

1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ -x+\pi, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$



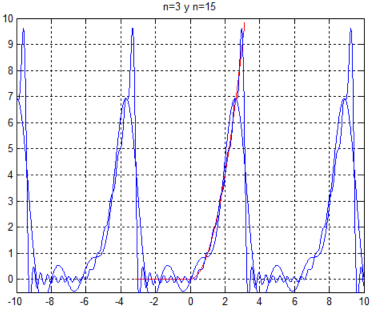
Llamando F a la función definida por la serie de Fourier generada por f:
F está definida en $\mathbb{R}$.
$F(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\pi, 0)$ y todo $x \in (0, \pi)$, ya que f es continua en esos puntos.

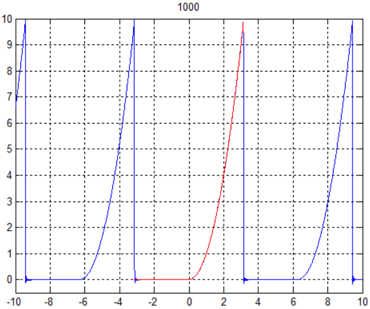
2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \leq x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \operatorname{sen}(nx) \right)$$





Gráficos de sumas parciales.

Ejemplos

2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \operatorname{sen}(nx) \right)$$

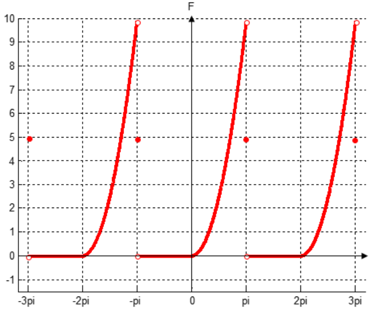


Gráfico de la función F dada por la serie de Fourier generada por f.