Unidad 8: Flujo compresible

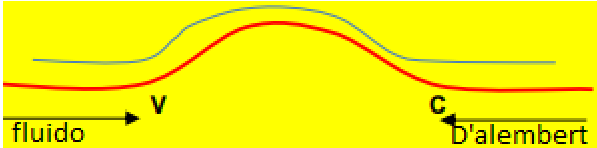
Ondas elásticas

Si se produce una perturbación en un fluido ésta se manifiesta como una variación de presión que se propaga en el seno del fluido en forma de onda. La velocidad de propagación de la onda elástica es c, también llamada celeridad. La velocidad de propagación depende del medio en el cual se produce la perturbación.

Si se somete a un cuerpo a un esfuerzo de compresión, éste no se transmite instantáneamente a todo el cuerpo, sino que la perturbación se propaga a través del cuerpo con una velocidad finita, que depende del módulo de elasticidad volumétrico Ev.

$$\mathrm{Ev} = -\frac{dP}{(dV/V)} = \frac{\mathrm{dP}}{(d\rho/\rho)}$$

Para definir la velocidad de propagación se considera al sistema estático, o sea, a la velocidad V se le opone una velocidad C (igual), y al movimiento esencialmente impermanente se lo transforma en permanente y se pueden aplicar las leyes de la aceleración y de la continuidad, para movimiento permanente.



- Ley de la aceleración en una dirección: $\frac{dVx}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\delta P}{\delta x}$ → - dP = ρ V dV → $dV = -\frac{dP}{\rho . V}$ (1)
- Ley de continuidad, considerando flujo compresible (ρ): div (ρV) = d (ρV) / dx=0

$$\rightarrow\ d(\rho V) = 0$$

$$d\rho V + \rho\, dV = 0$$

$$dV = \frac{-V\,d\rho}{\rho}\ (2)$$

Igualando (1) y (2): $\frac{dP}{\rho . V} = V . \frac{d\rho}{\rho}$ → $\boxed{V = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \mathrm{C}}$ Si dP $=$ Ev. $(\frac{d\rho}{\rho})$ → C = $\sqrt{\frac{Ev}{\rho}}$

Considerando una transformación adiabática:

$$\frac{P}{\rho^k} = cte$$

ln P - k ln ρ = cte

dP/p - k dρ / ρ = 0

dP/dρ = k P/ ρ ; k= Cp / Cv

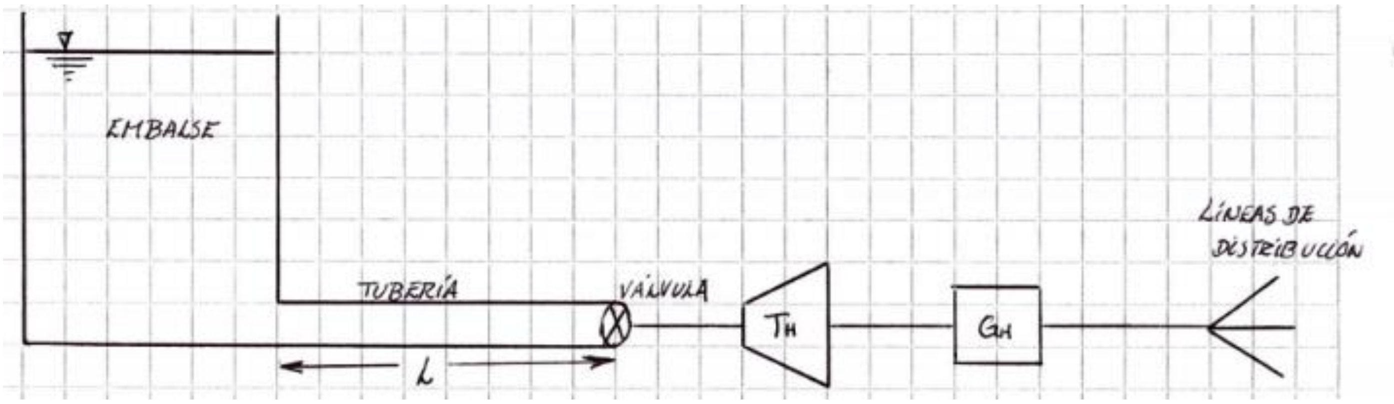
C^2= k * P/ ρ

C = $\sqrt{k * P/\rho}$ = $\sqrt{k\,RT}$ → indica que la velocidad de propagación de la onda en un fluido depende de la temperatura.

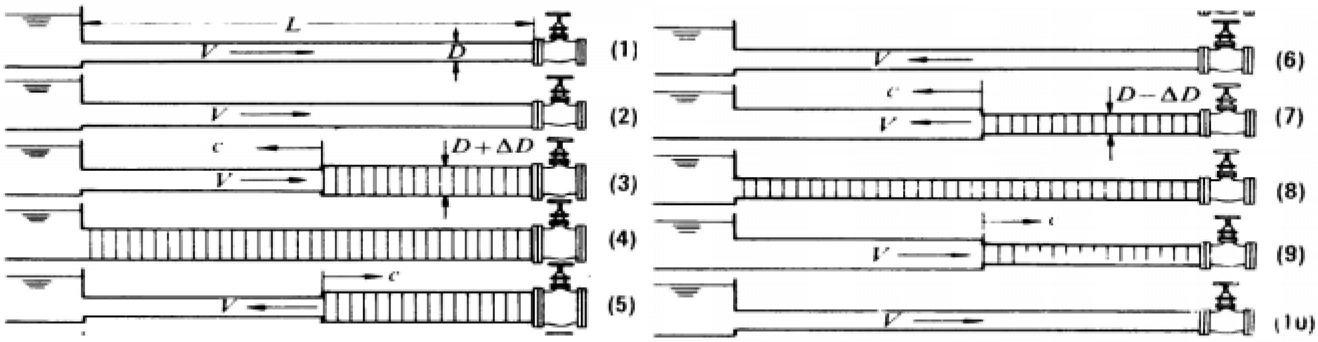
Golpe de ariete → Es un fenómeno transitorio, en régimen variable. La tubería no se considera rígida ni el fluido incompresible.

Se denomina golpe de ariete al choque violento que se produce sobre las paredes de un conducto forzado, cuando el movimiento líquido es modificado bruscamente, se puede presentar en una tubería que conduzca un líquido hasta el tope, cuando se tiene un frenado o una aceleración en el flujo; por ejemplo, el cambio de abertura en una válvula en la línea, esto provoca sobrepresiones y depresiones las cuales deforman las tuberías y eventualmente la destruyen.

Pero las válvulas son necesarias para cortar el suministro de agua en un caso en el que por ejemplo en una central eléctrica conformada por un embalse, una tubería y una turbina acoplada a un generador de corriente, el generador se quedara sin carga, se acelerarse y arrastre a la turbina hasta producir una rotura.



→ **Determinación de la secuencia de eventos luego del cierre de una válvula**



1) No hay perturbaciones. Régimen permanente. Diámetro normal. El fluido se dirige desde el embalse a la válvula con v.

2) Cierre instantáneo de la válvula. La velocidad se anula al lado de la válvula y de a poco se va anulando a lo largo de L hacia el embalse. (t=0 – cierre de la válvula)

3) Hay una onda de presión que se propaga v=c hacia el embalse. Ha llegado a la mitad de la tubería. LA mitad derecha está dilatada por la sobrepresión. La izquierda está normal, y el fluido sigue yendo con velocidad v a la válvula. Lado derecho v=0. (t=$\frac{L}{2C}$)

4) La onda de presión llega al embalse. Toda la tubería dilatada. Todo el fluido está en reposo, pero existe un desequilibrio ya que entre la intersección entre el embalse y la tubería la presión a la izquierda es la del embalse y hacia la derecha se encuentra la sobrepresión del ariete, por lo tanto el fluido empieza a ir hacia el embalse y hay una onda de depresión desde el embalse hacia la válvula, de manera que se va volviendo a la presión normal en la cañería. (t=$\frac{L}{C}$)

5) En la mitad izquierda el fluido va con v al embalse y la tubería ha vuelto a su diámetro normal. La onda de depresión sigue propagándose a la derecha con v=c. (t=$\frac{3L}{2C}$)

6) La tubería entera ha vuelto a su diámetro normal. No hay sobrepresión, pero por inercia el fluido sigue yendo hacia el embalse. Se genera una onda c de depresión con v=c, ahora de la válvula hacia el embalse. (t=$\frac{2L}{C}$)

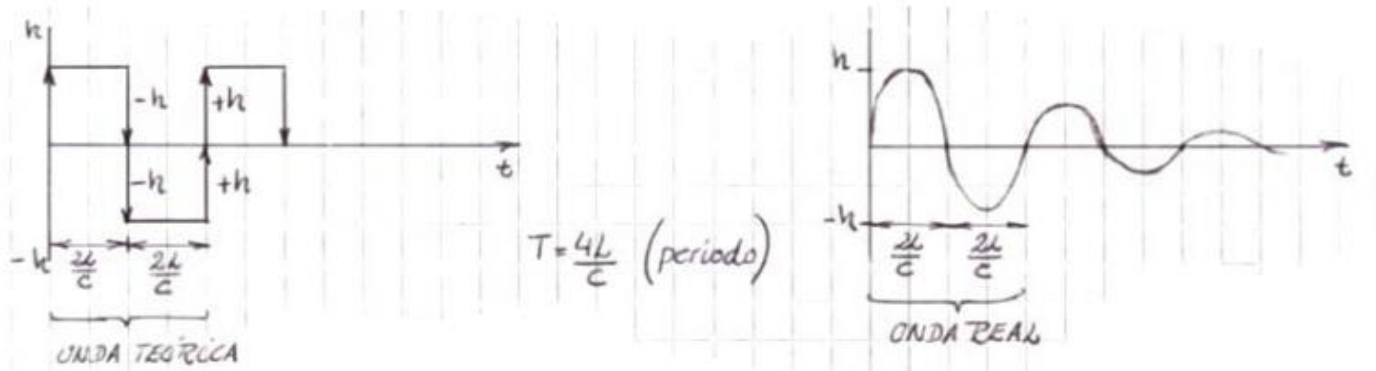
7) La mitad derecha de la tubería contiene agua en reposo y una presión por debajo de la normal. El diámetro se ha contraído. (t=$\frac{5L}{2C}$)

8) Toda la tubería está en depresión y con el D contraído. El fluido está en reposo (no en equilibrio-por diferencia de presión). El fluido vuelve a ir a del embalse a la válvula con v. (t=$\frac{3L}{C}$)

9) Izquierda: D normal. P normal. v.
Derecha: D<Dnormal. P<Pnormal. v=0. (t=$\frac{7L}{2C}$)

10) Diámetro normal, todo el fluido se mueve con v hacia la válvula. Todo igual que en 1. (t=$\frac{4L}{C} - periodo$)

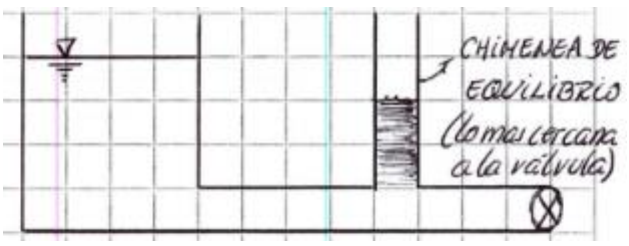
Teóricamente esto continuaría indefinidamente, pero en la práctica el movimiento se ve amortiguado por la rugosidad de la cañería y la viscosidad del fluido, que generan pérdidas.



Se dice que el <u>cierre es lento</u> cuando t > $\frac{2L}{C}$ y la presión máxima es menor ya que la depresión de la onda elástica llega a la válvula antes de que se complete el medio ciclo e impida el aumento ulterior de la presión.

Se dice que el <u>cierre es rápido</u> cuando t <= $\frac{2L}{C}$y la presión es la misma que en el cierre instantáneo. La onda de presión no tiene tiempo de ir hasta el estanque y volver a la válvula antes de que termine el medio ciclo.

Para evitar el golpe de ariete, se utilizan chimeneas de equilibrio o cañerías protegidas estructuralmente:



El golpe de ariete se favorece cuando $\uparrow L, \uparrow v, \downarrow t$

<u>Efecto de la compresibilidad – pérdidas de carga en tuberías con flujo compresible</u>

Buscamos el valor de la sobrepresión debida al golpe de ariete. Recordamos que la energía que trae el agua se transforma en energía de presión. Ec → Ep (comprime el líquido y expande la tubería).

Del principio de conservación de la energía:

$$\boxed{\underbrace{E_c}_{(1)} = \underbrace{\text{Trabajo de compresión del líquido}}_{(2)} + \underbrace{\text{Trabajo de expansión de la tubería}}_{(3)}} \quad (A)$$

1) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad ; \quad m = \rho V = \frac{\gamma}{g}AL$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}ALv^2} \quad (1)$$

2) El módulo de elasticidad volumétrico:

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta P V}{k}$$

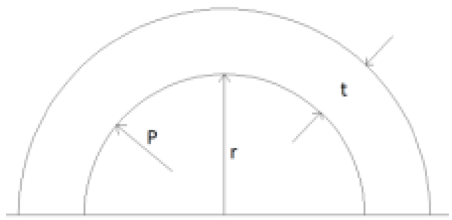
$$\Delta P = \gamma h \,; \quad V = AL \rightarrow \Delta V = \frac{\gamma h A L}{k}$$

El trabajo de compresión del líquido es la presión media por la variación de volumen:

$$T_{cl} = \frac{\Delta P}{2}\Delta V$$

$$\rightarrow \boxed{T_{cl} = \frac{\gamma h}{2}\left(\frac{\gamma h A L}{k}\right)} \quad (2)$$

3) Consideremos una tubería sometida a una presión interior P.



$$T\left[\frac{fza}{long}\right] = P.r \ (r = radio)$$

$$T = \gamma h \frac{D}{2}$$

Si el espesor de la tubería es t, la tensión unitaria será:

$$\frac{T}{t} = \frac{\gamma h D}{2t}$$

Y por ende, el alargamiento unitario:

$$\frac{T}{tE} = \underbrace{\frac{\gamma h D}{2tE}}_{deformación} \approx \frac{\sigma}{E} = \varepsilon$$

El alargamiento total será:

$$Alarg_T = \frac{T}{tE}\pi D = \frac{\gamma h D^2 \pi}{2tE}$$

El trabajo de expansión será entonces:

$$T_{ex} = F_{media} Alarg_T$$

$$\rightarrow T_{ex} = \frac{TL}{2}\frac{\gamma h D^2 \pi}{2tE} \rightarrow \boxed{T_{ex} = \frac{\gamma h L D}{4}\frac{\gamma h D^2 \pi}{2tE}} \quad (3)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (A):

$$\frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}ALv^2 = \frac{\gamma h}{2}\left(\frac{\gamma hAL}{k}\right) + \frac{\gamma^2 h^2 LD}{2tE}\underbrace{\frac{D^2\pi}{4}}_{A}$$

$$\frac{v^2}{g} = \frac{\gamma h^2}{k} + \frac{\gamma h^2 D}{tE} \rightarrow \frac{v^2}{g} = \gamma h^2\left(\frac{1}{k} + \frac{D}{tE}\right)$$

$$h^2 = \frac{v^2}{\gamma g\left(\frac{1}{k} + \frac{D}{tE}\right)} = \frac{v^2}{\rho g^2 \frac{1}{k}\left(1 + \frac{kD}{tE}\right)} = \frac{v^2\, k/\rho}{g^2\left(1 + \frac{kD}{tE}\right)}$$

$$\rightarrow \boxed{h = \frac{v}{g}\sqrt{\frac{k/\rho}{\left(1 + \frac{kD}{tE}\right)}}}$$ Sobrepresión de golpe de ariete

v = velocidad del fluido en la tubería.
K = módulo de elast. volumétrico del fluido
ρ = densidad del fluido
D = diámetro de la tubería
t = espesor de la tubería
E = módulo de Young de la tubería.

El término $\frac{kD}{tE}$ es la influencia de la tubería.

Si colocamos una chimenea, la sobrepresión ejercida produce un aumento del nivel de la superficie libre del líquido en la chimenea, evita el golpe de ariete en la tubería.

Si tenemos dos tuberías de iguales dimensiones, una de aluminio y otra de acero, la sobrepresión será mayor en la de acero, ya que $E_{ac} > E_{al} \rightarrow h_{ac} > h_{al}$.

Fórmula de Joukovsky

$$\boxed{\Delta P = \rho c(v - v')}$$ cierre instantáneo total o parcial

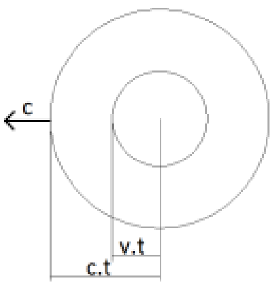
$$\boxed{c = \sqrt{\frac{k/\rho}{\left(1 + \frac{kD}{tE}\right)}}} \rightarrow \text{velocidad del sonido}$$

Características del flujo subsónico, sónico y supersónico

Recordemos que el número de Mach, que es la relación entre la velocidad del fluido y la velocidad del sonido en el medio fluido. $Ma = \frac{v}{c}$

Si lo referimos a un objeto, tendremos:

Supongamos que $v < c$:

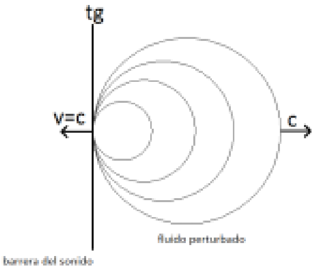


Al ser $v < c$, $M < 1 \rightarrow$ **Flujo subsónico.**

Supondremos que el movimiento lo hace por impulsos y no en forma continua. Cualquier perturbación pequeña se propaga con la velocidad del sonido *c*.

Sucede que el objeto le produce al aire una compresión, una perturbación, para cada desplazamiento habrá una perturbación, estas ondas se propagan con velocidad *c*, que se van alejando del objeto. Cuando la fuente de la perturbación se mueve con $v < c$, la onda viaja delante del cuerpo y da al fluido una oportunidad para ajustarse al cuerpo que viene. Cuando la partícula se ha movido un espacio vt, la onda se ha alejado del centro una distancia ct.

Supongamos ahora que $v = c$:

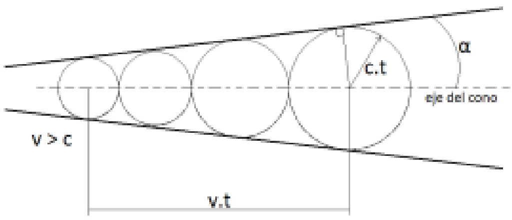


Al ser $v = c, M = 1 \rightarrow$ **Flujo sónico.**

Para cada desplazamiento, sigue provocando una perturbación. Ahora no se pueden propagar las ondas delante del objeto ya que c no es mayor que v, no la puede pasar, al ser $v = c \rightarrow$ todas las ondas se concentran en la proa (adelante) del objeto.

Trazada la tangente, el frente de onda es lo que se llama barrera de sonido. Las ondas se llaman "ondas de choque". Cada onda produce un ΔP que se van sumando. Las ondas son portadoras de un incremento de presión, si suponemos que se propagan producen estampidas sónicas.

Supongamos ahora que $v > c$:



Al ser $v > c, M > 1 \rightarrow$ **Flujo supersónico.**

En el movimiento supersónico de un objeto, el cuerpo se mueve más rápido que la onda esférica emitida por él, produciéndose un frente de onda en forma de cono en el vértice del cuerpo.

Las ondas quedan rezagadas respecto del cuerpo, ya que no se pueden propagar por delante de él, y son tangentes a las generatrices de un cono cuyo eje está en el centro del objeto.

Al medio ángulo del cono (α) se lo llama ángulo de Mach:

$$\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{1}{M}} \rightarrow \text{Ángulo de Mach}$$

Mientras mayor sea v, mayor será M y menor será α.

Es importante en el movimiento subsónico el desprendimiento de la capa límite, la cual resulta más determinante en la popa (atrás) que en la proa (adelante). En el movimiento supersónico es a la inversa.

De la ley adiabática:

$$\frac{P}{\rho^k} = cte \rightarrow \ln \frac{P}{\rho^k} = cte \rightarrow \ln P - k \ln \rho = cte$$

Derivando:

$$\frac{dP}{P} - k\frac{d\rho}{\rho} = 0 \rightarrow \frac{dP}{d\rho} = k\frac{P}{\rho} = c^2 \quad (A) \qquad \text{siendo kP: el módulo de elasticidad volumétrico}$$

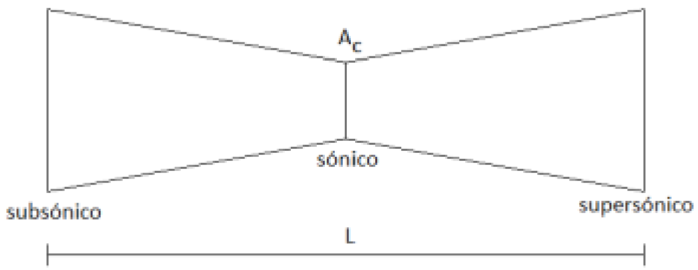
$$\rightarrow \boxed{c = \sqrt{k\frac{P}{\rho}} = \sqrt{kRT}}$$

La velocidad de un fluido depende de la temperatura. Vemos que a mayor altura, menor es la velocidad c, ya que hay menor T. Si M ↑ → T ↑, sobre la superficie de los aviones de cabotaje, tienen una forma especial para evitar el desprendimiento de la capa límite.

Flujo isoentrópico a través de toberas

Al hablar de flujo isoentrópico significa que la entropía es constante, es decir, que el flujo es adiabático y sin rozamiento. Analizaremos un flujo unidimensional.

Las toberas están compuestas por dos conductos, uno de sección convergente y otra de sección divergente.



Aplicamos Bernoulli:

$$\int \frac{dP}{\rho} + z.g + \frac{v^2}{2} = cte \to z \approx cte \to \int \frac{dP}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cte$$

Derivamos:

$$\frac{dP}{\rho} + vdv = 0$$

Sabemos que:

$$c^2 = \frac{k}{\rho} = \frac{dP}{d\rho} \to \frac{dP}{\rho \cdot d\rho} = \frac{k}{\rho^2} \to \frac{dP}{\rho} = \frac{k}{\rho} . \frac{d\rho}{\rho} = c^2 . \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{c^2 d\rho}{\rho} + vdv = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{vdv}{c^2}$$

Por continuidad:

$$\rho v A = cte$$

Aplicando logaritmo:

$$\ln(\rho v A) = cte \to \ln \rho + ln\, v + ln\, A = cte$$

$$\to \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}\right)$$

$$\to \frac{vdv}{c^2} = \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}$$

$$dA = \left(\frac{vdv}{c^2} - \frac{dv}{v}\right) A \to \frac{dA}{dv} = \left(\frac{v}{c^2} - \frac{1}{v}\right) A \to \frac{dA}{dv} = \frac{A}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)$$

$$\to \boxed{\frac{dA}{dv} = \frac{A}{v}(M^2 - 1)}$$

Podemos ver que obtenemos la relación entre el área de la tobera y la velocidad en función del n° de Mach.

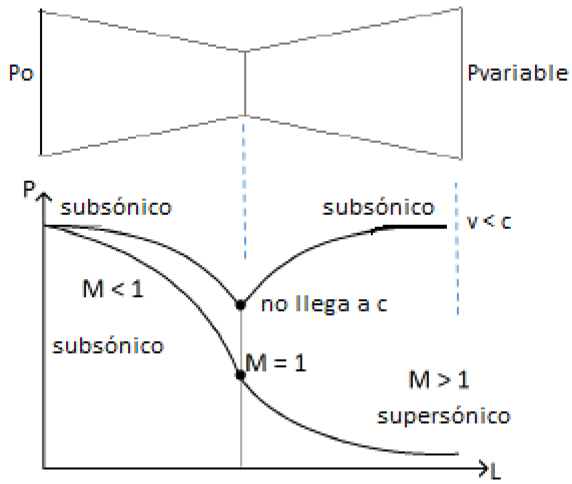
Analicemos la ecuación obtenida anteriormente:

- Si M<1 (subsónico) $\to \frac{dA}{dv} < 0$ → A medida que aumenta A, disminuye v y viceversa. Si queremos que v aumente → el área debe disminuir (zona convergente)
- Si M=1 (sónico) $\to \frac{dA}{dv} = 0$ → Matemáticamente significa que tengo un máximo o un mínimo; máx v para mín A → área crítica. En la tobera convergente v va aumentando hasta alcanzar la velocidad del sonido c (máxima que se puede alcanzar). Esta condición se produce en la garganta de un conducto convergente o convergente-divergente. El flujo será sónico en la garganta sólo si la diferencia de presiones (entre la región

aguas arribas de la garganta y ésta) es lo bastante grande como para acelerar el flujo lo suficiente. Para diferencias de presiones menores la velocidad en la garganta es subsónica.

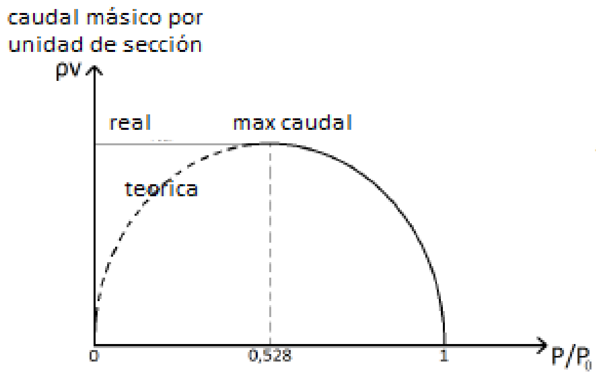
- Si M>1 (supersónico) → $\frac{dA}{dv} > 0$ → Para que la velocidad siga aumentando → debe aumentar el área → es una zona divergente. Si queremos lograr velocidades supersónicas (a régimen permanente) a partir de fluido en reposo, éste deberá pasar primero por una zona convergente y luego por otra divergente, y la garganta deberá tener un área crítica dónde el flujo sea sónico.

→ Analicemos una tobera en la que el lado izquierdo tengamos Po= cte y en el lado opuesto una presión variable:



Si en ningún lugar alcanzamos la velocidad c, dicho de otra manera, tenemos un flujo subsónico, la tobera se comportara como un venturi.

Podemos graficar $\dot{m}/A = \rho v$ en función de P/P_0:



Tenemos para el aire:

$$P/P_0 = P_{crit} = 0{,}528 \quad \text{para} \quad k = 1{,}4 \ \ \text{y} \ \ P = P_{ATM}$$

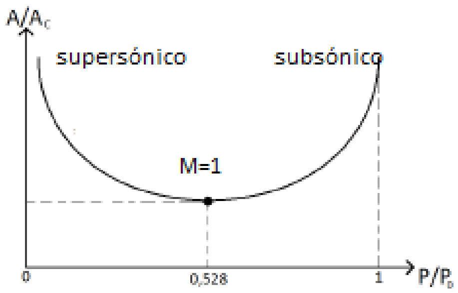
En A_C alcanza la velocidad del sonido.

Si $P/P_0 = 1 \rightarrow \dot{m}(\text{masa}) = 0 \rightarrow$ no hay flujo.

Si $P/P_0 = 0 \rightarrow P = 0 \rightarrow \rho = 0 \rightarrow m = 0$

Dibujamos una curva donde el máximo caudal de masa para P_{crit}, la mitad de la curva marcada con línea de trazos es teórica, jamás se puede llegar a P = 0.

Podemos tener un área genérica, donde $A = A_1 = A_2$:



Para $P/P_0 = 1 \rightarrow M = 0 \rightarrow$ rama derecha subsónica e izquierda supersónica.

Si $P/P_0 > P_{crit}$ → usamos sólo tobera convergente, porque en P/P_0 obtendremos la velocidad *c* sólo para tobera convergente.

Si $P/P_0 < P_{crit}$ → usamos tobera convergente – divergente.

Aplicación: para aumentar el empuje en cohetes $F = \rho Q(v_2 - v_1)$.

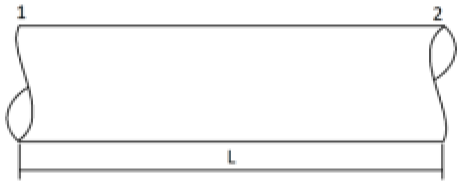
Flujo isotérmico a través de toberas

$$\underbrace{\Delta P = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2}\rho}_{Darcy-Weisbach} \quad ; \quad \underbrace{\frac{P}{\rho} = \frac{P_1}{\rho_1} = cte}_{isotérmicos} \quad ; \quad \underbrace{\rho v = \rho_1 v_1 = cte}_{ecuación\ de\ continuidad}$$

$$-dP = \frac{f}{D}\rho\frac{v^2}{2}dx \quad ; \quad v^2 = \left(\frac{\rho_1 v_1}{\rho}\right)^2$$

$$\rightarrow -dP = \frac{f}{D}\frac{\rho\rho_1^2 v_1^2}{2\rho^2}dx \rightarrow -\rho dP = \frac{f}{D}\frac{\rho_1^2 v_1^2}{2}dx \quad ; \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{P}{P_1} \rightarrow \rho = \rho_1\frac{P}{P_1}$$

$$\rightarrow -\rho_1\frac{P}{P_1}dP = \frac{f}{D}\frac{\rho_1^2 v_1^2}{2}dx \rightarrow -\frac{P}{P_1}dP = \frac{f}{D}\frac{\rho_1 v_1^2}{2}dx$$



Integrando:

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2P_1} = f\frac{L}{D}\rho_1\frac{v_1^2}{2} \rightarrow \frac{(P_1 - P_2)(P_1 + P_2)}{2P_1} = f\frac{L}{D}\rho_1\frac{v_1^2}{2}$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \Delta P = \frac{2P_1}{P_1 + P_2}f\frac{L}{D}\rho_1\frac{v_1^2}{2}}$$

El término $(2P_1)/(P_1 + P_2)$ son los cambios de presión.

$\Delta P \leq 5\%\ P_{ABS}$