Sistemas de Automatización
AÑO 2021

UNIDAD 5
Lugar de raíces

Profesores:

Ing. María Susana Bernasconi-
sbernasc@uncu.edu.ar
susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli
fernandogeli@gmail.com

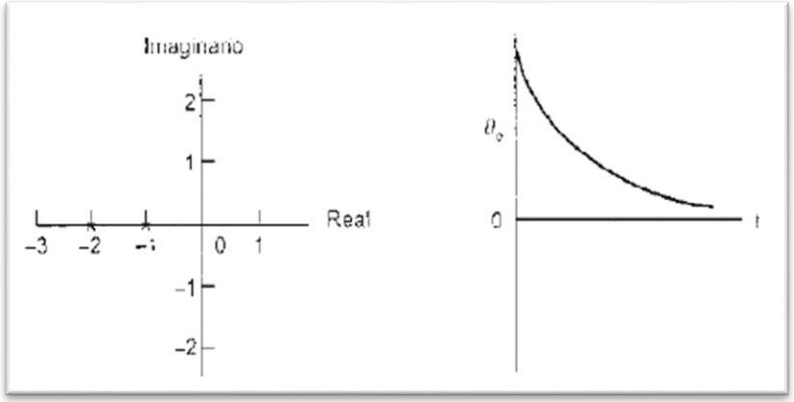
Bibliografía:
Ingeniería de Control- W. BOLTON
Ingeniería de Control Moderna-K.OGATA
Control Automático de Procesos- C.SMITH, A. CORRIPIO

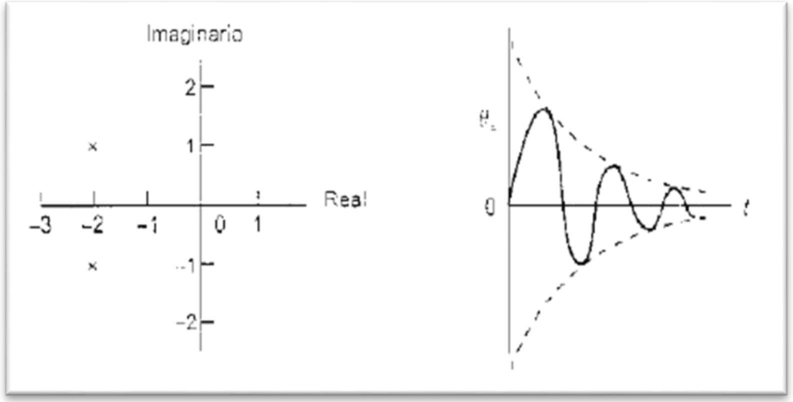
ANÁLISIS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

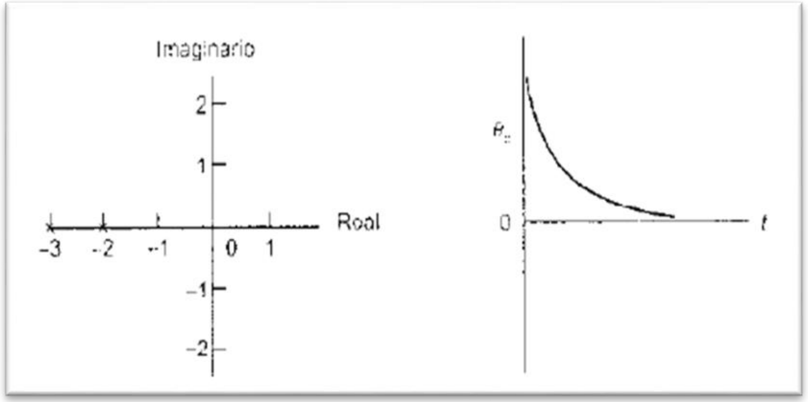
Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia de un sistema (polos) determinan la forma general de la respuesta transitoria de ese sistema. Las siguientes figuras muestran para un sistema con la función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

cómo al cambiar la posición de los polos, p_1 y p_2, en el plano s cambia la respuesta transitoria cuando el sistema está sujeto a un impulso.



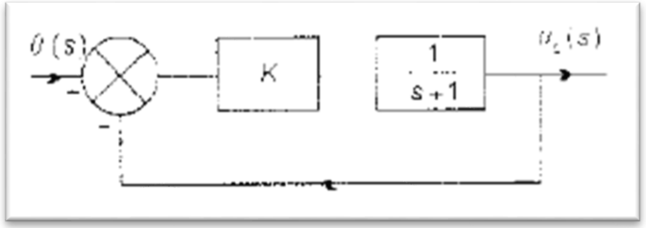




La relación entre el comportamiento de los sistemas y las posiciones de sus raíces varía con el valor de K . Este análisis se denomina ***"método del lugar geométrico de las raíces"***.

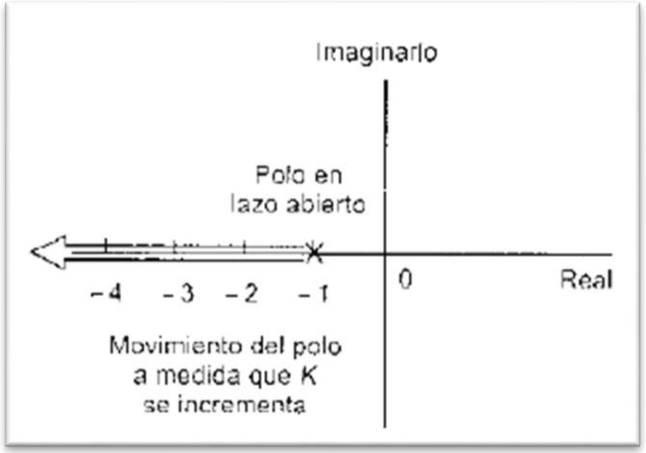
ANÁLISIS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS DE 1º ORDEN



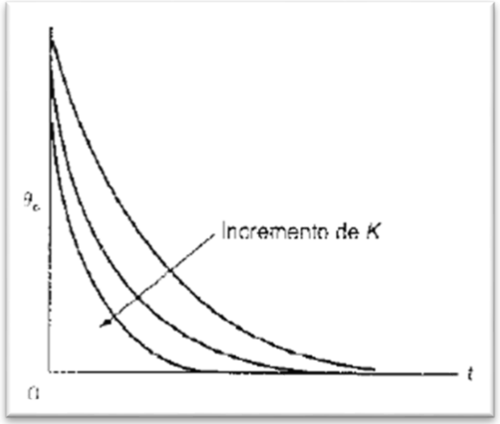
La función de transferencia del sistema en lazo abierto, $G_0(s)$ es $\frac{K}{s+1}$, siendo K el ajuste del controlador proporcional. El sistema a lazo cerrado tiene una función de transferencia

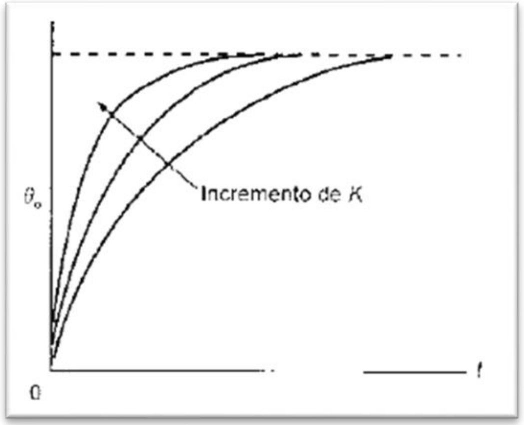
$$G(s) = \frac{\frac{K}{s+1}}{1+\frac{K}{s+1}} = \boxed{\frac{K}{s+(1+K)}}$$



El sistema tiene un polo en $-(1+K)$. Cuando $K=0$, entonces el polo está en -1 (***polo en lazo abierto***) y a medida que se incrementa el valor de K, el valor del polo se hace más negativo.

La línea que muestra cómo cambia la posición del polo se aleja desde $K=0$ a medida que K cambia, y se denomina ***lugar geométrico de las raíces***.

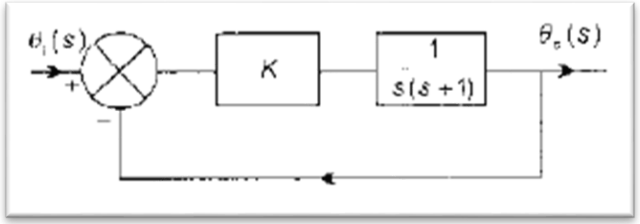




Puesto que el valor de la raíz depende del valor de K, la respuesta del sistema también depende del valor de K.

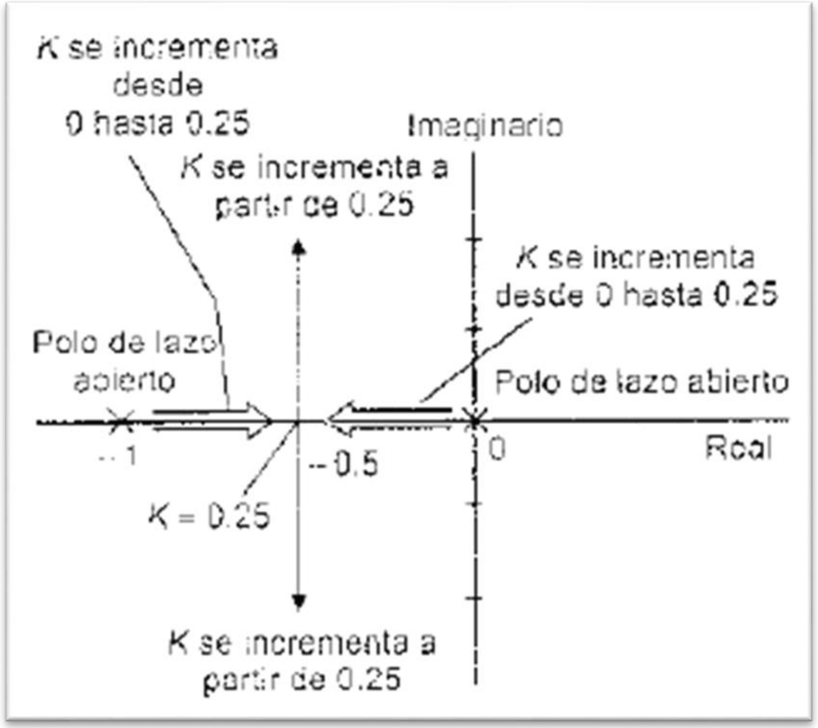
Ver respuesta del sistema para una entrada impulso y una escalón.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS DE 2º ORDEN



La función de transferencia del sistema en lazo abierto, $G_0(s)$ es $\frac{K}{s(s+1)}$ y la del sistema a lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$



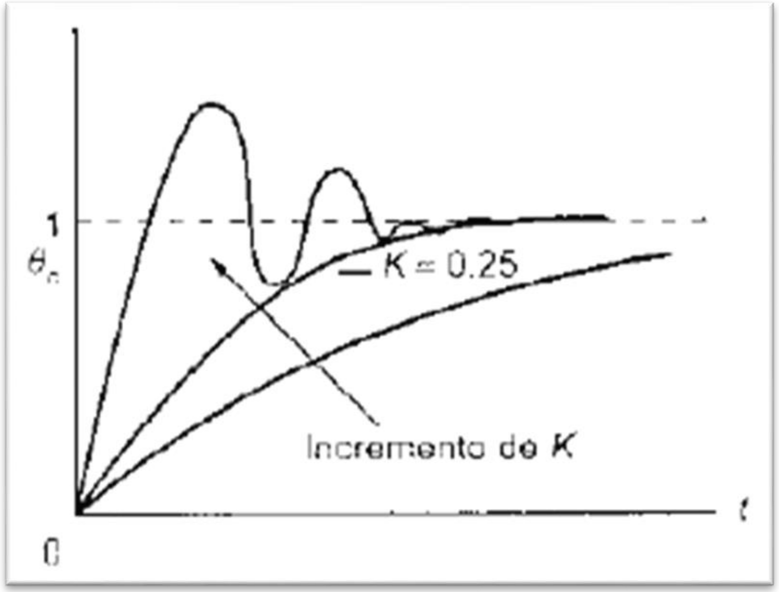
Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia son:

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K}$$

Cuando $K = 0$, las raíces en lazo abierto están en 0 y -1. Cuando $K = \frac{1}{4}$, ambas raíces están en $\frac{1}{2}$. Para los valores de K entre 0 y $\frac{1}{4}$ la raíz en 0 se hace más negativa y se mueve hacia $-\frac{1}{2}$, mientras que la raíz en -1 se hace menos negativa y se mueve hacia $-\frac{1}{2}$.

Para $K = 1$, las raíces están dadas por $p = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{3}$. Para todos los valores de $K > \frac{1}{4}$ se presenta un par de raíces complejas, siendo constante la componente real de valor $-\frac{1}{2}$ y la parte imaginaria tiene un valor que se incrementa a medida que K aumenta.

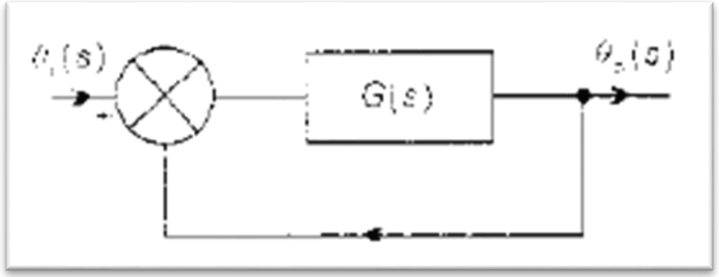
Puesto que los valores de las raíces dependen del valor de K, la respuesta del sistema a entradas externas también depende del valor de K. La siguiente figura muestra la respuesta del sistema con diferentes valores de K para una entrada escalón unitario.



Para valores de K entre 0 y $\frac{1}{4}$ se tiene la respuesta sobre-amortiguada de un sistema de segundo orden. Para $K = \frac{1}{4}$ el sistema es críticamente amortiguado. Para $K > \frac{1}{4}$ el sistema es sub-amortiguado y presenta oscilaciones.

El polinomio del denominador de la función de transferencia, es decir, $(s^2 + s + K)$, se puede escribir de la forma $(s^2 + 2\omega_n \varepsilon s + \omega_n^2)$. De esta manera, para este sistema $\omega_n^2 = K$ y es $2\omega_n \varepsilon = 1$ y así $\omega_n = \sqrt{K}$ y $\omega_n \varepsilon = \frac{1}{2}$, es decir, los valores de los polos en el amortiguamiento crítico, y $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{K}}$. Así a medida que K se incrementa a partir de $\frac{1}{4}$, también se incrementa la frecuencia natural y decrece el factor de amortiguamiento relativo.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO



Dado el siguiente sistema de lazo cerrado, la función de transferencia en lazo abierto es $G_0(s)$ y la función de transferencia de lazo cerrado es $G(s)$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

Los polos serán los valores de s para los cuales el polinomio del denominador es cero, es decir: $G_0(s) = -1$

En general, la función de transferencia de lazo abierto se escribe como:

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)}$$

- $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son los ceros.
- $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son los polos.
- K es una constante o ganancia del sistema.
- Debe cumplirse que n >m

$$\frac{K(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)} = -1$$

Debido a que s es una variable compleja la ecuación anterior se puede escribir en forma polar.

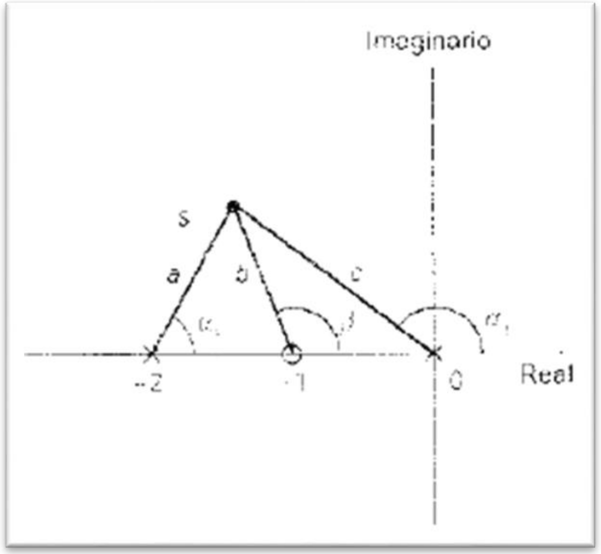
$$Magnitud\ en\ forma\ polar: \frac{K|s - z_1||s - z_2| \ldots |s - z_m|}{|s - p_1||s - p_2| \ldots |s - p_n|} = 1$$

$$Argumento\ en\ forma\ polar:$$
$$[\angle(s - z_1) + \angle(s - z_2) + \cdots + \angle(s - z_m)] - [\angle(s - p_1) + \angle(s - p_2) + \cdots + \angle(s - p_n)] = \pm múltiplo\ impar\ de\ \pi$$

Ejemplo: función Go(s) y realimentación unitaria: $G_0(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+2)}$

$$G(s) = \frac{\dfrac{K(s+1)}{s(s+2)}}{1 + \dfrac{K(s+1)}{s(s+2)}} = \frac{K(s+1)}{s(s+2) + K(s+1)}$$

El sistema tiene los polos en lazo abierto en 0 y en -2 y un cero en -1.



$$\frac{Kb}{ac} = 1 \quad \rightarrow \quad K = \frac{ac}{b}$$

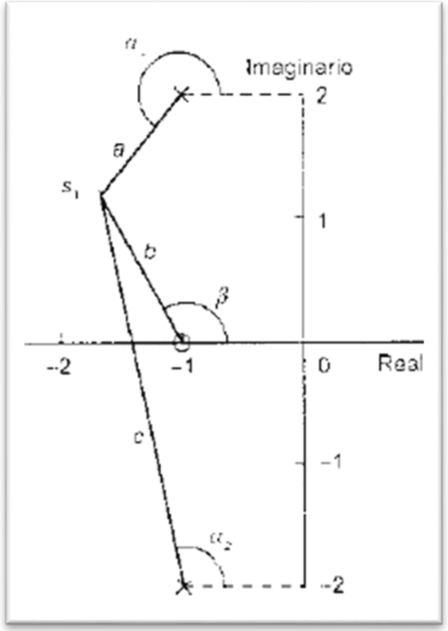
$$\beta - (\alpha_1 + \alpha_2) = \pm múltiplo\ impar\ de\ \pi$$

Si se cumplen ambas ecuaciones, s es solución del Lugar de raíces.

Ejemplo: función Go(s) y realimentación unitaria: $G_0(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+5}$

$$G(s) = \frac{\dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+5}}{1 + \dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+5}} = \frac{K(s+1)}{s^2+2s+5+K(s+1)}$$

Existe un cero en -1 y raíces en lazo abierto en $-1 \pm j2$

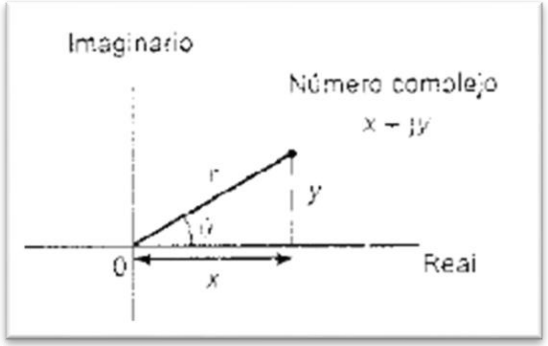


Para que el punto s_1 esté sobre el lugar geométrico de las raíces, se debe cumplir:

$$\beta - (\alpha_1 + \alpha_2) = \pm múltiplo\ impar\ de\ \pi$$

$$\frac{Kb}{ac} = 1$$

REPRESENTACIÓN POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS



Dadoun número complejo $(x + jy)$:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x + jy = r(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$$

r se denomina magnitud o módulo del número complejo.
θ se denomina argumento del número complejo

- Producto de 2 números complejos:

$$r_1(\cos\theta_1 + j\operatorname{sen}\theta_1) * r_2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2) = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + j(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

El producto tiene una magnitud que es el producto de las magnitudes y un argumento que es la suma de los argumentos.

- Cociente de 2 números complejos:

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + j\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + j\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2)} * \frac{(\cos\theta_2 - j\operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 - j\operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} * [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

El cociente tiene una magnitud que es el cociente de las magnitudes y un argumento que es la resta de los argumentos.

CONSTRUCCIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES

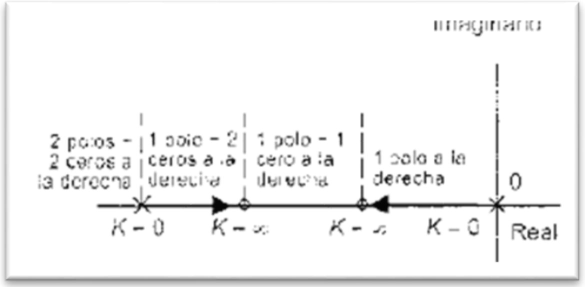
Existen varias reglas que ayudan a elegir en forma apropiada los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces:

I. El número de lugares geométricos es igual al grado n de la ecuación característica de la función de transferencia en lazo abierto, es decir, el polinomio del denominador. Cada raíz traza un lugar geométrico a medida que K vería desde 0 en un polo en lazo abierto, hasta infinito en un cero en lazo cerrado. El término ***rama de lugar geométrico de las raíces*** se usa con frecuencia para cada lugar geométrico de las raíces. Estas ramas son curvas continuas que inician en cada uno de los n polos en lazo abierto, donde $K = 0$, y se aproxima a infinito en los m ceros en lazo abierto. Las ramas del lugar geométrico para los polos en exceso (polos que no tienen correspondencia con ceros finitos), es decir, donde $\mathrm{n} > m$, se extienden a infinito. Para ceros en exceso, es decir, $m > n$, las ramas se extienden desde infinito a los polos en lazo abierto.

II. Los lugares geométricos de las raíces comienzan en los n polos del sistema donde $K = 0$.

III. Los lugares geométricos de las raíces finalizan en los m ceros del sistema, donde $K = \infty$. Si hay más polos que ceros, qué es el caso más común, entonces m lugares geométricos terminan en los m ceros finitos y los $(n - m)$ lugares geométricos restantes terminan en infinito.

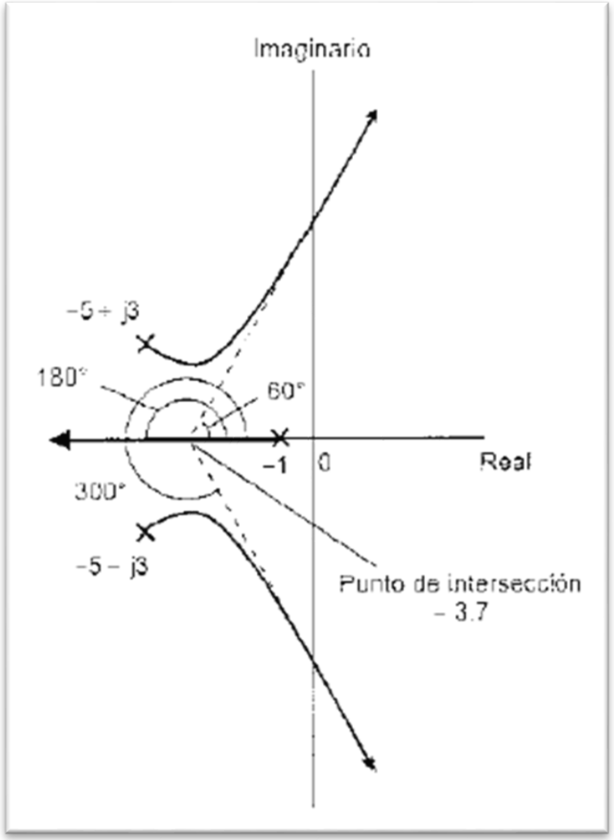
IV. Las proporciones del eje real son secciones de los lugares geométricos de las raíces si el número de polos y ceros a la derecha de dicha porción es impar.



V. Aquellos lugares geométricos que terminan en infinito tienden hacia las asíntotas que forman ángulos respecto al eje real positivo de $\frac{\pi}{(n-m)}, \frac{3\pi}{(n-m)}, \frac{5\pi}{(n-m)}, \dots, \frac{[2(n-m)-1]\pi}{(n-m)}$.

VI. Las asíntotas intersectan sobre el eje real en un punto, algunas veces llamado ***centro de gravedad*** o ***centroide*** de las asíntotas, dado por $\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1 z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$.

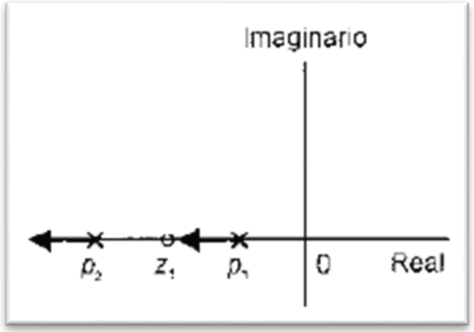
VII. La intersección de los lugares geométricos de las raíces con el eje imaginario se puede encontrar calculando aquellos valores de K que den como resultado la existencia de las raíces imaginarias en la ecuación característica, es decir, $s = \sigma + j\omega$ con $\sigma = 0$. Por ejemplo, con una ecuación característica $s^3 + 2s^2 + 3s + K$, entonces haciendo $s = j\omega$ resulta: $-j\omega^3 - 2\omega^2 + 3j\omega + K = 0$ y así, al igualar la parte imaginaria se obtiene $-\omega^3 + 3\omega = 0$ y luego $\omega = \sqrt{3}$ e igualando las partes reales da como resultado $2\omega^2 + K = 0$ y así, $K = 6$.



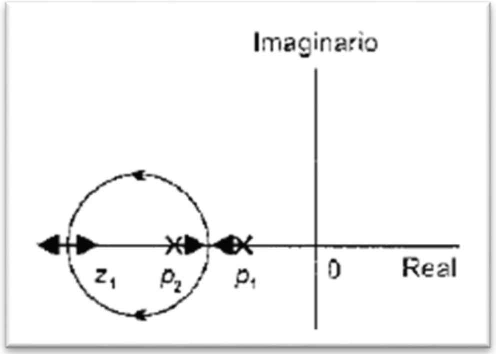
VIII. El término ***punto de desprendimiento o ruptura*** se usa cuando 2 o más lugares geométricos se encuentran en un punto y en forma subsecuente se "separan" de ese punto siguiendo trayectorias separadas. Los puntos de desprendimiento se presentan en aquellos puntos para los cuales, la ecuación característica $\frac{dK}{ds} = 0$. Sin embargo, se debe observar que no todas las raíces de la ecuación $\frac{dK}{ds} = 0$ corresponden a los puntos de desprendimiento, solamente aquellas para las cuales la ecuación (4), es decir la ecuación de argumento, se satisface.

Gráficas de lugares geométricos de las raíces de:

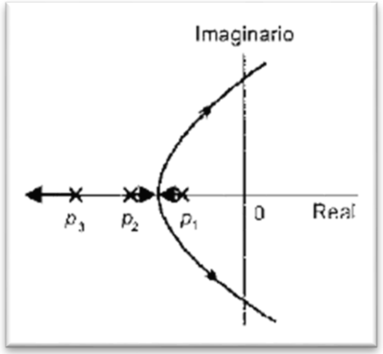
$$G_0(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)}, cuando\ p_2 > z_1 > p_1$$



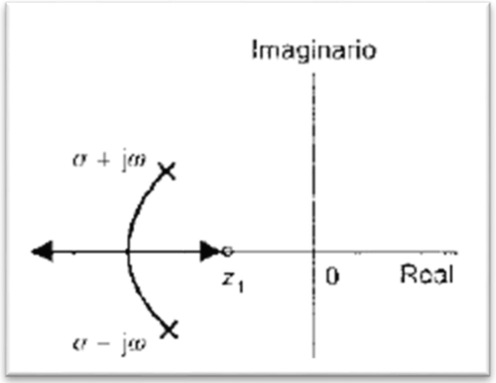
$$G_0(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)}, cuando\ z_1 > p_2 > p_1$$



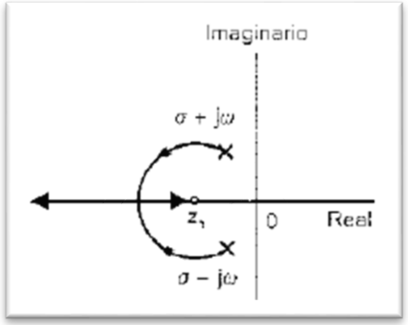
$$G_0(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$



$$G_0(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)}, cuando\ \sigma > z_1$$



$$G_0(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)}, cuando\ z_1 > \sigma$$



INTERPRETACIÓN DE LOS DIAGRAMAS DEL LUGAR GEOMÉTRICOS DE LAS RAÍCES

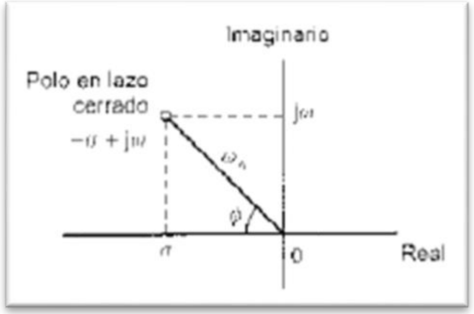
El diagrama del lugar geométrico de las raíces muestra el efecto que la variación de la ganancia tiene sobre las raíces de la ecuación característica en lazo cerrado y, por lo tanto, el comportamiento dinámico del sistema. Esto permite observar el efecto de modificar o adicionar polos y ceros al sistema según los modos de control que ajustemos.

Los polos en lazo abierto de esos diagramas se puede considerar que actúan como las "fuentes" de los lugares geométricos y los ceros como "pozos" con K incrementándose desde un polo en lazo abierto hasta infinito en un cero.

Si analizamos la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de segundo orden se puede representar mediante:

$$\boxed{G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0 y 1, entonces los polos son complejos, y el sistema produce una respuesta oscilatoria. Para esta condición se puede escribir:



$$s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega) = s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2$$

Igualando: $2\varepsilon\omega_n s = 2\sigma s \longrightarrow \varepsilon = \dfrac{\sigma}{\omega_n} \longrightarrow \omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 \longrightarrow \varepsilon = \cos\varphi$

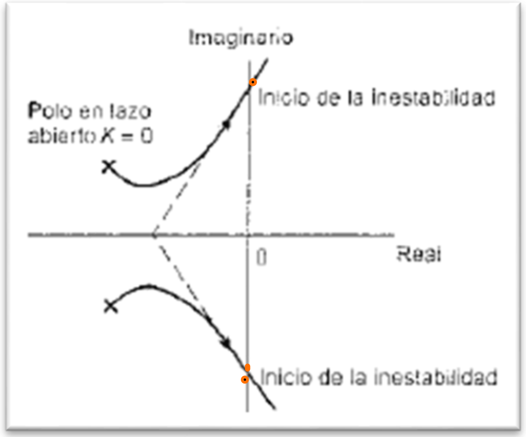
ω_n es la longitud de la línea que une el origen del plano s y el polo en lazo cerrado

- si la frecuencia angular de oscilación de un sistema (ω_n) se incrementa, aumenta la long. Del vector
- si el factor de amortiguamiento relativo (ε)se incrementa, el ángulo φ decrece ($\cos\varphi$ *aumenta*).
- al cambiar la frecuencia natural angular y/o el factor de amortiguamiento relativo se producirán cambios en:

$$t_s = \frac{4}{\varepsilon\omega_n} = \frac{4}{\sigma} \quad \textit{Tiempo de asentamiento de 2\%.} \qquad t_r = \frac{\pi}{2\omega} \quad \textit{Tiempo de levantamiento de un sistema.}$$

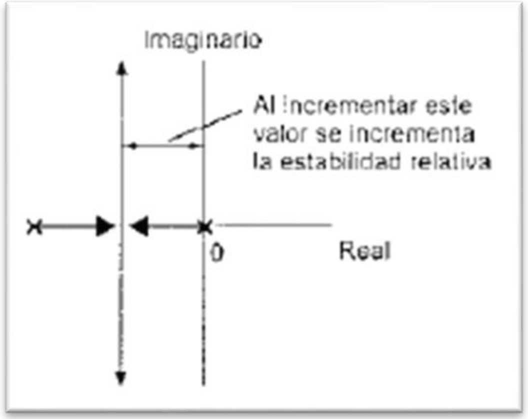
El diagrama del lugar geométrico de las raíces permite estudiar el efecto de cambiar la ganancia en la estabilidad del sistema.

- la inestabilidad comienza a presentarse cuando el valor de K es tal que el diagrama del lugar geométrico de las raíces alcanza al eje imaginario.



- la inestabilidad relativa de un sistema se puede juzgar por la proximidad de sus lugares geométricos de las raíces al eje imaginario. Un sistema con lugares geométricos de las raíces más alejados del correspondiente a otro sistema es relativamente más estable.

- la introducción de un cero en el semiplano izquierdo del plano s mejora la estabilidad relativa de un sistema ya que mueve los lugares geométricos alejándolos del eje imaginario.
- la introducción de un polo extra tiene el efecto contrario.



Existe una dominancia razonable si el cociente de las partes reales de las raíces es mayor o casi 5. La función de transferencia y, por lo tanto, el análisis de los lugares geométricos de las raíces se puede simplificar considerando sólo las raíces dominantes.

Consideremos un sistema con una función de transferencia en lazo cerrado de:

$$\boxed{G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}}$$

Las raíces son -1 y -5.

La respuesta del sistema a un impulso unitario es:

$$\theta_o(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)} \Rightarrow \theta_o = 5 * 0{,}25(e^{-1t} - e^{-5t})$$

Por lo general, el término e^{-5t} se puede despreciar en comparación con el término e^{-1t} de modo que la respuesta es, en efecto:

$$\theta_o \approx 5 * 0{,}25e^{-1t}$$

Para tener esto como solución se requiere un sistema con una función de transferencia de:

$$\boxed{G(s) = \frac{5 * 0{,}25}{(s+1)}}$$

Lugar de raíces

$$\boxed{G(s)=\frac{Gc.Gp}{1+Gc.Gp}}$$ ➡ Función de transferencia de lazo cerrado

Si: $Gc(s)=Kc$ $\quad Gp(s)=\frac{1}{s(s+1)}$

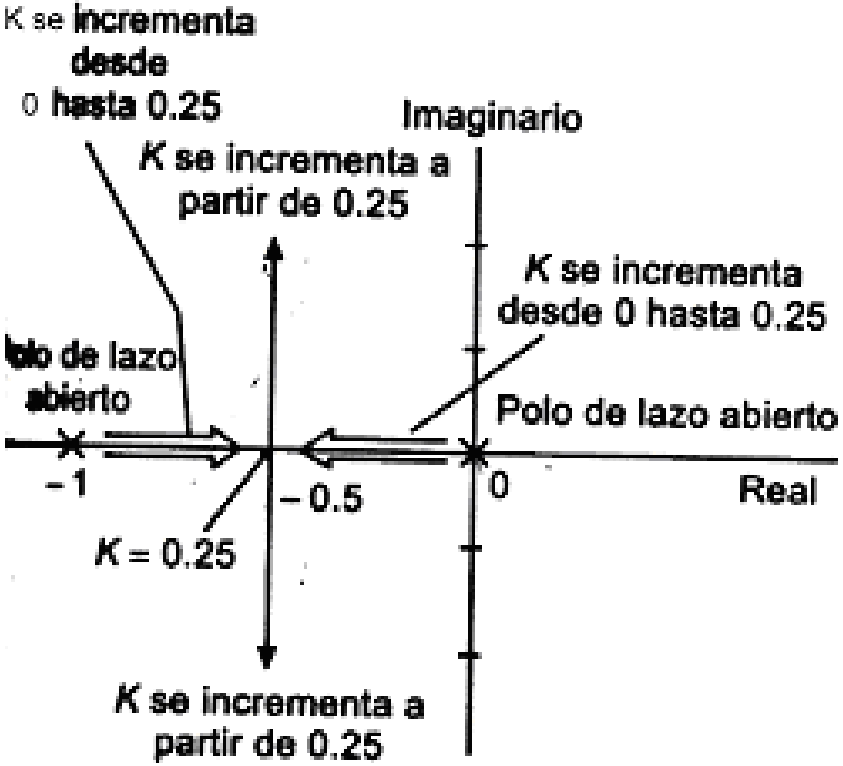
$$G(s)=\frac{Kc/[s(s+1)]}{1+Kc/[s(s+1)]}$$

$$G(s)=\frac{Kc}{s^2+s+Kc}$$

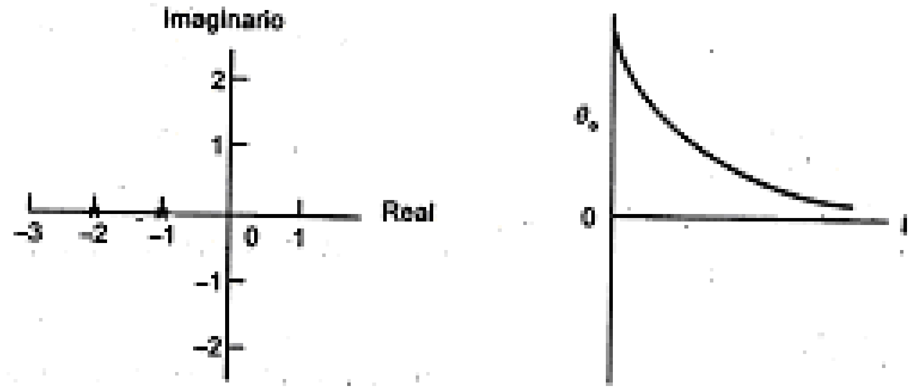
Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia son:

$$p=\frac{-1\pm\sqrt{1-4Kc}}{2}$$

$$p=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4Kc}$$

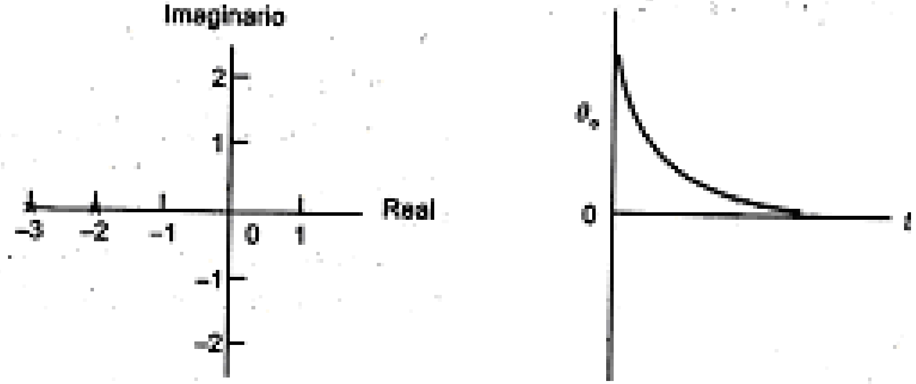


Raíz= -1



a)

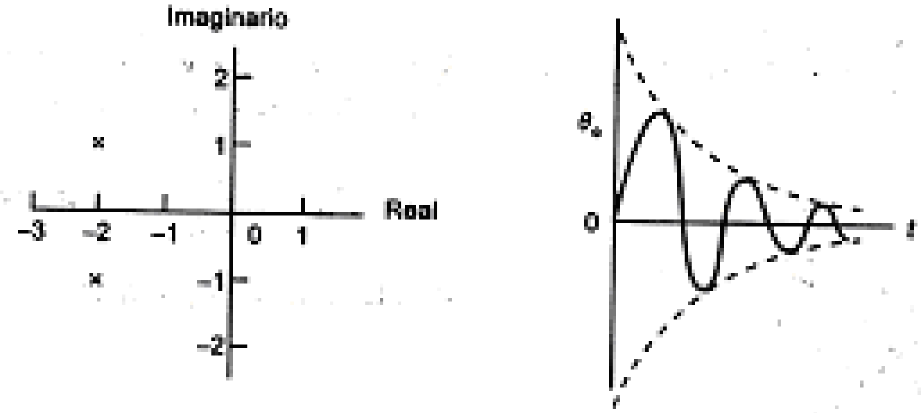
Raíz= -2

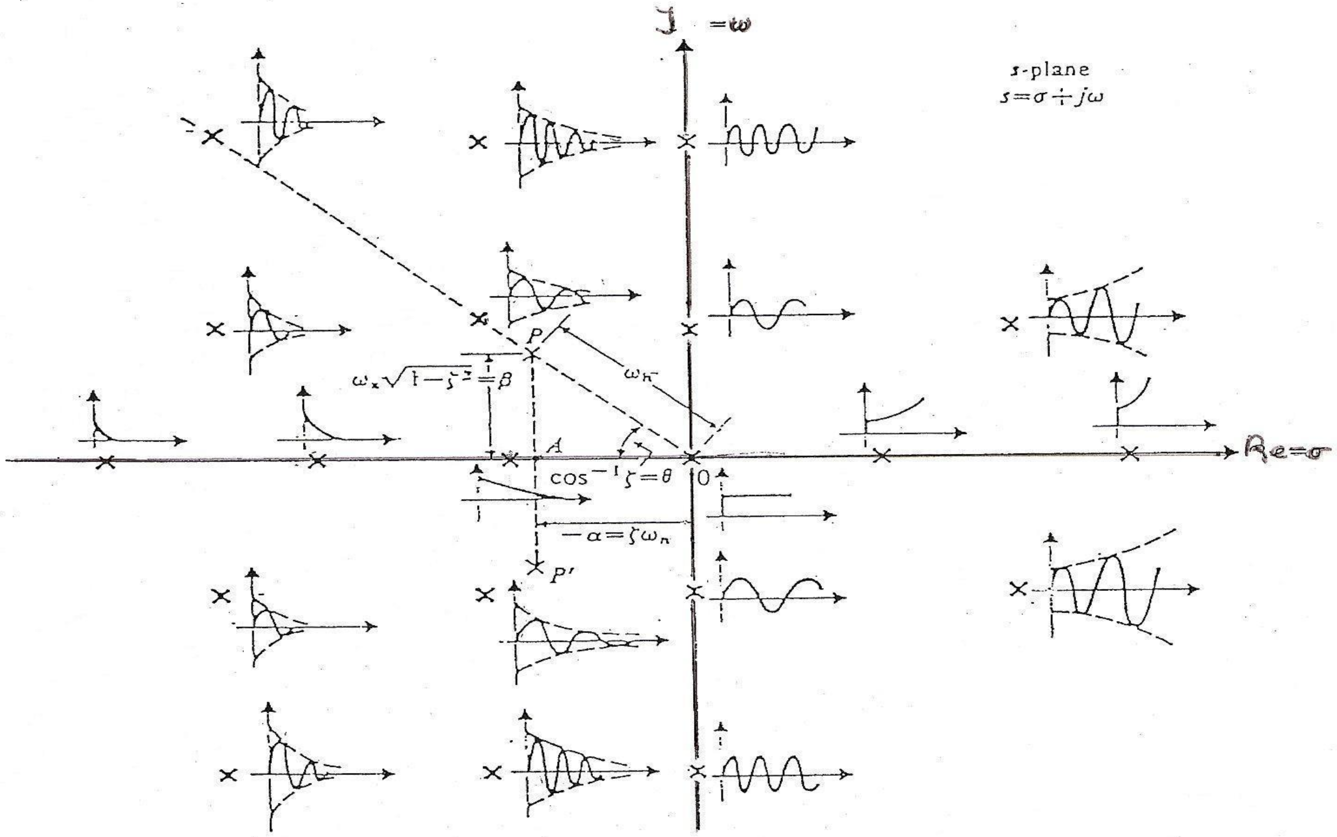


b)

Raíces= -2+1j

-2-1j





Significance of root location in the s-plane.

$$G(s)=\frac{K\,\Pi(s-z_j)\;\Pi\left[(s+\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]}{\Pi(s-p_i)\;\Pi\left[(s+\alpha_i)^2+\beta_i^2\right]}=\frac{K\,\Pi(1+\tau_j s)\;\Pi\left[1+2\xi_j\tau_j s+(\tau_j s)^2\right]}{\Pi(1+\tau_i s)\;\Pi\left[1+2\xi_i\tau_i s+(\tau_i s)^2\right]}$$