Teoría convencional de control

En esta arte se consideran solamente sistemas que pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales e invariantes en el tiempo, a los que son aplicables los conceptos de función de transferencia. Se ve básicamente esos conceptos y la representación en diagramas de bloques

Función de transferencia

Función de transferencia. La *función de transferencia* de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \qquad \boxed{(n \geqslant m)}$$

donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero, o

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Función de transferencia} = G(s) &= \left.\frac{\mathscr{L}[\text{salida}]}{\mathscr{L}[\text{entrada}]}\right|_{\text{condiciones iniciales cero}} \\ &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}\end{aligned}}$$

NOTA: Es importante notar que el concepto de función de transferencia es aplicable únicamente a sistemas dados por ecuaciones diferenciales lineales ordinarias e invariantes en el tiempo (lo que quiere decir que los coeficientes de la ecuación diferencial no dependen del tiempo).

NOTA: Cuando se define la función de transferencia se consideran condiciones iniciales nulas tanto para la salida como para la entrada de la función y es por eso que en su definición no aparecen las condiciones iniciales de la entrada ni de la salida.

NOTA: Observar que el orden de la máxima derivada de la entrada ha de ser menor o igual al máximo orden de la derivada de la salida. Esto es lo que garantiza expresiones algebraicas racionales impropias de la función de transferencia.

Integral de convolución

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}}$$

NOTA: Recordamos que la operación de multiplicación en el plano s es equivalente a la operación de convolución en el dominio del tiempo. Ambas integrales se supone que:

$$\boxed{g(t) \text{ como } x(t) \text{ son } 0 \text{ para } t < 0.}$$

Consideración práctica de entrada impulso unitario

respuesta. (En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso.)

Diagramas de bloques

Diagramas de bloques. Un *diagrama de bloques* de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

Figura 2-1. Elementos de un diagrama de bloques.

Las señales del sistema se enlazan a través de los bloques funcionales que representan operaciones que se realizan sobre las señales de entrada para obtener las señales de salida del bloque. En general esta operación se representa por una función de transferencia del bloque la cual se indica en el mismo.

NOTA: Hay que tener en cuenta que diferentes sistemas físicos pueden tener una representación en diagramas de bloques equivalentes por cuanto el mismo abstrae la constitución física del sistema y solo representa el comportamiento dinámico del sistema.

NOTA: De la misma manera, un mismo sistema puede tener representaciones distintas en diagramas de bloques dependiendo del punto de vista del análisis o bien por la existencia de diagramas equivalentes.

NOTA: Todo sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques constituido solo por puntos de suma, de ramificación y bloques funcionales.

Punto de suma

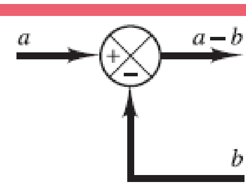


Figura 2-2. Punto de suma.

NOTA: El signo indica el signo algebraico que ha de considerarse para la señal en la operación de suma

Punto de ramificación

Es el equivalente a un nodo en un circuito eléctrico

Sistema en lazo cerrado

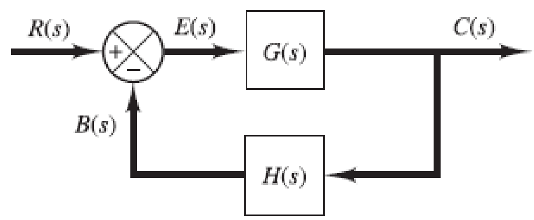


Figura 2-4. Sistema en lazo cerrado.

NOTA: La función del bloque de realimentación en el lazo cerrado es la de modificar la señal de salida para que sea comparable con la señal de entrada (por ejemplo de temperatura a tensión o corriente, etc.). La función de transferencia del elemento de realimentación se representa como $H(s)$.

Función de transferencia en trayectoria directa y en lazo cerrado

$$\text{Función de transferencia de la trayectoria directa} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Controlador automático

Controladores automáticos. Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina *acción de control*. La

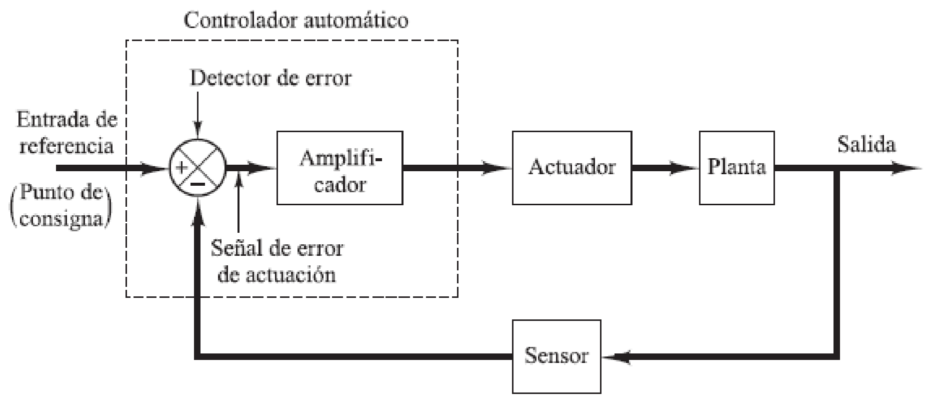


Figura 2-6. Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición).

Clasificación de los controladores industriales

1. De dos posiciones o controladores on-off
2. Controladores proporcionales
3. Controladores integrales
4. Controladores proporcionales-integrales
5. Controladores proporcionales-derivativos
6. Controladores proporcionales-integrales-derivativos

Esta clasificación es teniendo en cuenta la forma de operar con la señal del error. Sin embargo es posible también establecer una clasificación en función de la fuente de energía por ejemplo

Teoría de control moderna

Se lleva a cabo el análisis de los sistemas de control en el espacio de estados. Con lo cual es concepto fundamental de este método de análisis es el concepto de estado

Bajo esta teoría se puede llevar a cabo el análisis de sistemas de control que pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas (sistemas MIMO) y además los mismo pueden ser lineales o no, e invariantes en el tiempo o no.

NOTA: Sin embargo solo vamos a considerar el caso de sistemas MIMO lineales e invariantes en el tiempo.

Conceptos fundamentales para el análisis en el espacio de estados

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas *variables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geqslant t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geqslant t_0$.

NOTA: Entonces es la definición conocida e intuitiva de lo que es un estado de un sistema

Variables de estado. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de forma que una vez que la entrada para $t \geqslant t_0$ está dada y el estado inicial en $t = t_0$ está especificado, el estado futuro del sistema está determinado completamente), entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado.

NOTA: En definitiva las variables de estado son las que dan el estado del sistema en un instante de tiempo dado. Observar que un conjunto de variables de estado de un sistema puede no ser único, es decir, que el conjunto de mínimo de variables puede elegirse según convenga y según el enfoque. De la misma manera las variables de estado pueden no representar cantidades físicas observables o medibles (pueden ser bastante abstractas). Aunque en la teoría de control óptico se requiere de la realimentación con una ponderación adecuada de todas las variables de estado de un sistema con lo cual siempre que sea posible es conveniente que las variables de estado sean definidas como cantidades medibles u observables.

Vector de estado: Es básicamente el ordenamiento de las variables de estado en un vector de dimensión n

Espacio de estado: Es el conjunto de todos los estados posibles del sistema y por lo tanto es un espacio n dimensional.

Ecuaciones en el espacio de estados:

Ecuaciones en el espacio de estados. En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. Como se verá en la Sección 2-5, la representación en el espacio de estados de un sistema dado no es única, salvo que el número de variables de estado es el mismo para cualquiera que sea la representación en variables de estado de un mismo sistema.

El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entrada para $t \geqslant t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivo de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico. Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo.

NOTA: Téngase en cuenta que la representación en el espacio de estados de un mismo sistema no es única pero que la cantidad de variables de estado en todos los casos sí es la misma y estas coinciden con el número de integradores del sistema dado que sus salidas pueden considerarse variables de estado al ser dispositivos de memoria aparentemente.

Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$. Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Entonces el sistema se puede describir mediante

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
(2.10 y 2.11)

NOTA: La primera es la ecuación de estado y la segunda es la ecuación de la salida. Si involucran al tiempo explícitamente se dice que el sistema es variante

Ecuación de estado y de salida de un sistema variante

Si se linealizan las Ecuaciones (2-10) y (2-11) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.12}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.13}$$

donde $\mathbf{A}(t)$ se denomina matriz de estado, $\mathbf{B}(t)$ matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ matriz de salida y $\mathbf{D}(t)$ matriz de transmisión directa. (Los detalles de la linealización de sistemas no lineales en torno al

NOTA: Observar que las expresiones anteriores son linealizaciones de las ecuaciones de estado y de salida del sistema alrededor del punto de operación y no son las ecuaciones originales.

Ecuación de estado y de salida de un sistema invariante

Cuando el sistema es invariante en el tiempo y se procede a linealizar alrededor del punto de operación se obtienen las siguientes expresiones donde se observa como las matrices ya no dependen del tiempo.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Representación en el espacio de estados de un sistema lineal invariante

Consideramos un sistema lineal invariante de una sola entrada con una sola salida (SISO)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

NOTA: Función de transferencia del sistema para una sola entrada y una sola salida.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

NOTA: Esta sería la representación en el espacio de estado del sistema. Observar como la salida y la entrada del sistema son escalares

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s)$$

NOTA: Se obtiene aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de cada una de las ecuaciones (y a cada componente de cada uno de los vectores). Esta forma de operar es correcta dada la propiedad de conservar las combinaciones lineales de la transformada de Laplace (el producto por una matriz es en definitiva la aplicación de combinaciones lineales de los elementos de cada vector) (téngase en cuenta que dado que se trata de un sistema invariante las matrices no dependen del tiempo y por lo tanto no aparecen transformadas de elementos de las matrices)

$$\boxed{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)}$$

NOTA: Al considerar condiciones iniciales nulas

$$\boxed{\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)}$$

NOTA: Obsérvese la semejanza con la expresión para una sola EDO lineal de primer orden

$$\boxed{Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s)}$$

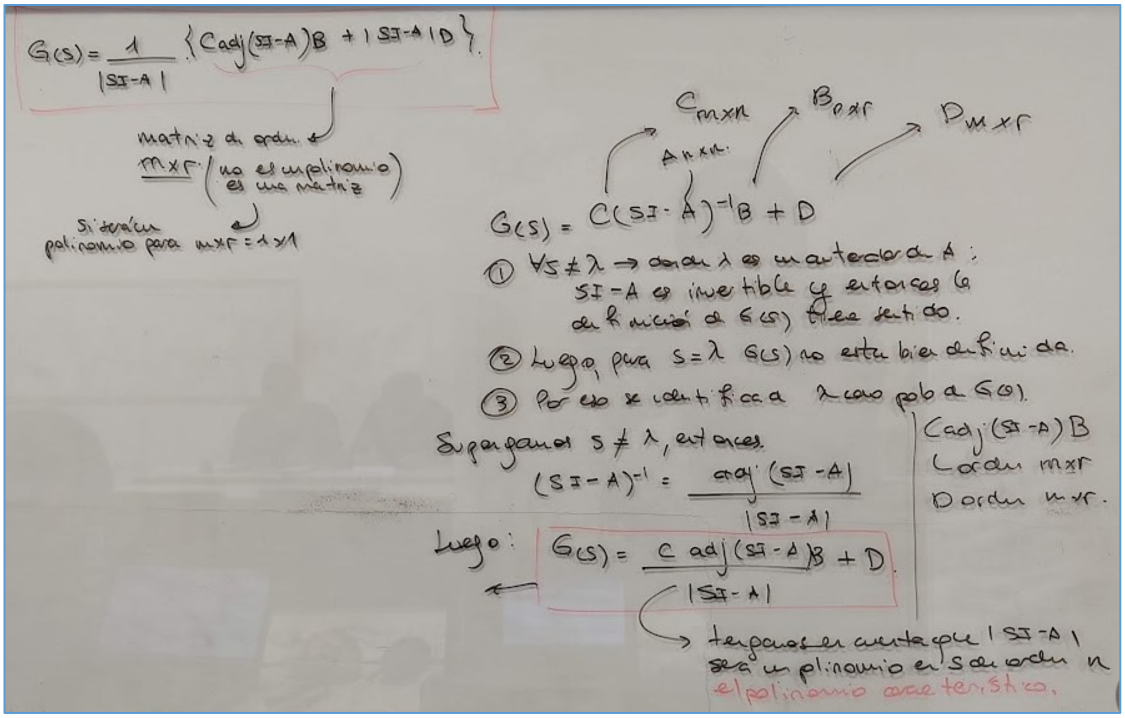
$$\boxed{G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D}$$

NOTA: Esta última es la función de transferencia del sistema de una sola entrada y una sola salida

$$\boxed{G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}}$$

NOTA: Esta es una forma de expresar la función de transferencia. En el denominador las barras indican el determinante con lo cual se trata del polinomio característico de la matriz A en el denominador. El numerador es un polinomio de s. Se observa que los valores propios de A son los polos de la función de transferencia.

Esta es la justificación de lo anterior. Se observa que en el caso de una sola entrada y una sola salida $mxr = 1x1$



<u>Representación en el espacio de estados de un sistema lineal dado por una EDO lineal de orden superior en la que la función de excitación contiene términos derivativos hasta el orden de la EDO</u>

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \qquad (2\text{-}33)$$

El problema principal al definir las variables de estado para este caso radica en los términos que están derivados. Las variables de estado deben ser de tal modo que eliminen las derivadas de u en la ecuación de estado.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \qquad (2\text{-}34) \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u \end{aligned}$$

NOTA: La parte señalada en rosa es obvia dado que si aparecen términos derivativos no se podrá expresar la ecuación de estado y la ecuación de salida de la forma en que se habían expresado antes

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0
\end{aligned}
$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado. (Obsérvese que esta no es la única elección de un conjunto de variables de estado.) Con la elección actual de variables de estado, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}
\tag{2-36}
$$

donde β_n está dado por

$$\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
-a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u
$$

$$
y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u
$$

En esta representación en el espacio de estados, las matrices **A** y **C** son exactamente las mismas que para el sistema de la Ecuación (2-30). Las derivadas del segundo miembro de la Ecuación (2-33) sólo afectan a los elementos de la matriz **B**.

Obsérvese que la representación en el espacio de estados para la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

NOTA: Las matrices de estado del sistema y la de salida del sistema son las mismas que la correspondiente al sistema con una sola entrada y una sola salida y sin términos derivativos de la función de excitación. O sea que los términos derivativos únicamente afectan a la matriz de salidas.

Transpuesta conjugada de una matriz

[1] Obsérvese que en este libro se utiliza un asterisco como superíndice de una matriz, por ejemplo $\mathbf{A}^*$ significa la **transpuesta conjugada** de la matriz $\mathbf{A}$. La transpuesta conjugada es la conjugada de la transpuesta de una matriz. Para una matriz real (una matriz cuyos elementos son todos reales), la transpuesta conjugada $\mathbf{A}^*$ es la misma que la transpuesta $\mathbf{A}^T$.

Formas de representación en el espacio de estado

Las formas de representación principales en el espacio de estado son la forma canónica controlable, la forma canónica observable, la forma canónica de Jordan y la forma canónica diagonal

Forma canónica controlable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (9\text{-}3)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

NOTA: Pero esto es todo para un sistema de una sola entrada y una sola salida en la que se encuentran términos derivativos de la función de excitación

Forma canónica observable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \tag{9-5}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-6}$$

Obsérvese que la matriz de estado de $n \times n$ de la ecuación de estado obtenida mediante la Ecuación (9-5) es la transpuesta de la ecuación de estado definida por la Ecuación (9-3).

Forma canónica diagonal. Considérese el sistema representado por la función de transferencia definida mediante la Ecuación (9-2). Se considera el caso en el que el polinomio del denominador sólo contiene raíces distintas. En este caso, la Ecuación (9-2) se puede escribir como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} \tag{9-7}$$

La forma canónica diagonal de la representación en el espacio de estados de este sistema viene dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Forma canónica de Jordan. A continuación se considera el caso en el que el polinomio del denominador de la Ecuación (9-2) contiene raíces múltiples. En este caso la forma canónica diagonal anterior debe modificarse a la forma canónica de Jordan. Suponga, por ejemplo, que todos los p_i, excepto los tres primeros, son diferentes entre sí, o sea, $p_1 = p_2 = p_3$. En este caso, la forma factorizada de $Y(s)/U(s)$ se hace

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)}$$

El desarrollo en fracciones simples de esta última ecuación se convierte en

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

Una representación en el espacio de estados de este sistema en su forma canónica de Jordan se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Diagonalización de la matriz de estado

Si la matriz de estado viene dada de la siguiente manera

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Y si además A tiene n autovalores distintos, la siguiente matriz diagonaliza a A

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = n$ valores propios distintos de $\mathbf{A}$

Y la transforma en la matriz diagonal en la que en la diagonal principal los elementos son los autovalores de A ordenados en correspondencia de numeración con número de fila.

Se demuestra:

$$\bar{a} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$$

$$\bar{\lambda}_k = (\lambda_k^0, \lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^{n-1}); \quad 1 \le k \le n$$

$$AP = PD$$

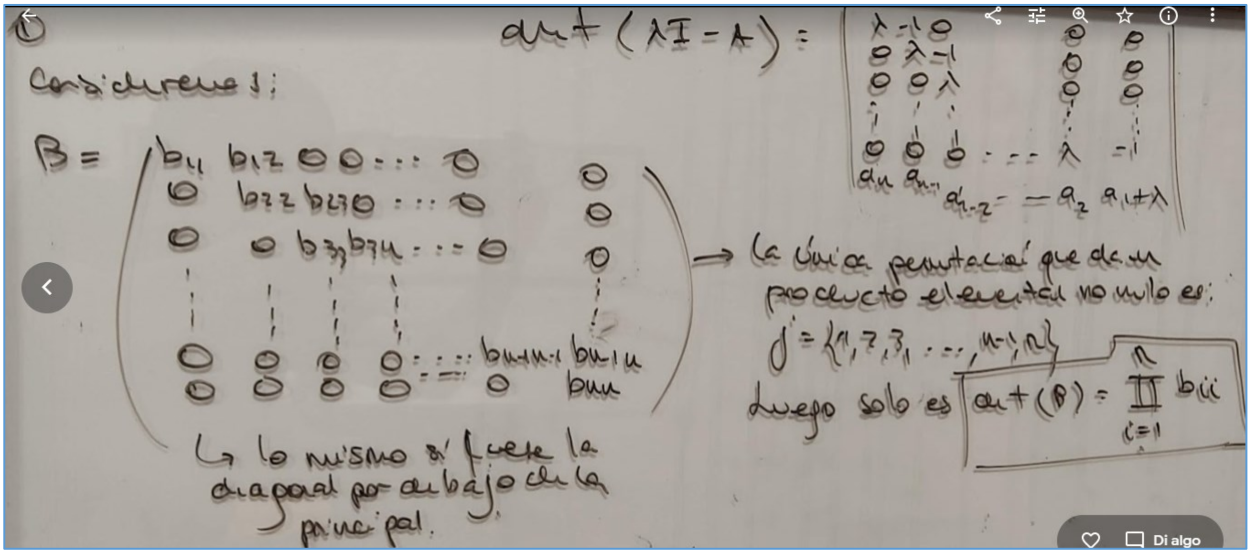
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ -\bar{a}\cdot\bar{\lambda}_1 & -\bar{a}\cdot\bar{\lambda}_2 & \cdots & -\bar{a}\cdot\bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

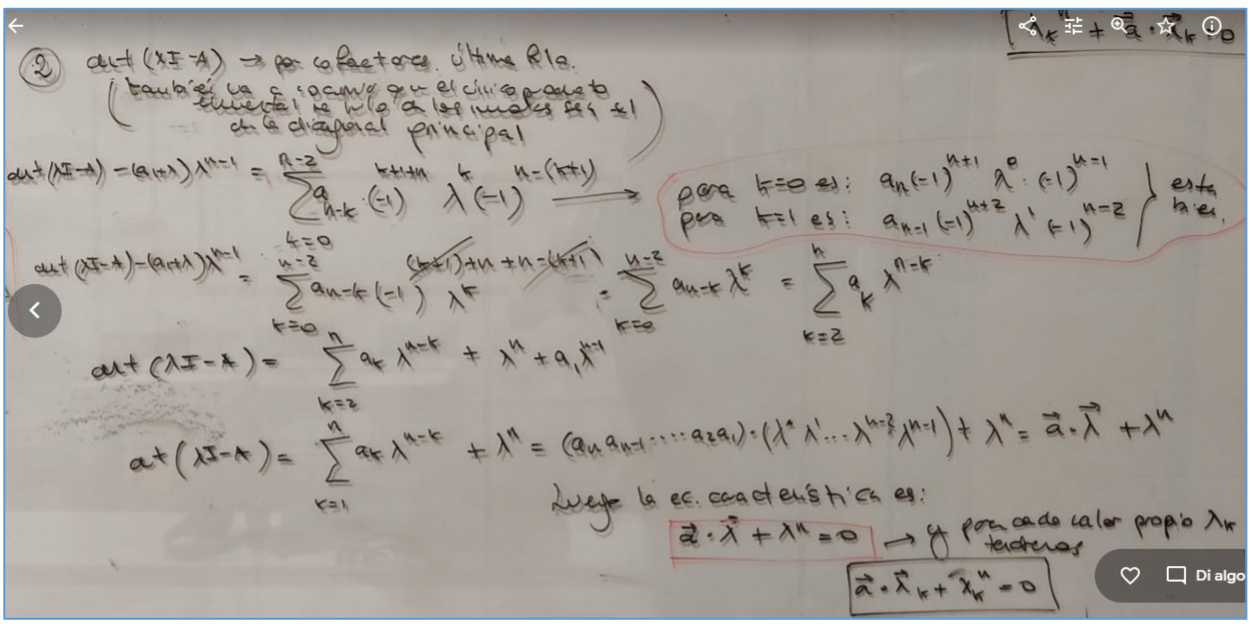
$$PD = (\lambda_1\bar{\lambda}_1 \;\; \lambda_2\bar{\lambda}_2 \;\; \lambda_3\bar{\lambda}_3 \cdots \lambda_n\bar{\lambda}_n)$$

$$\lambda_k^n = -\bar{a}\cdot\bar{\lambda}_k$$

$$\boxed{\lambda_k^n + \bar{a}\cdot\bar{\lambda}_k = 0}$$



NOTA: Al final la forma de los menores de $\lambda I - A$ obtenidos de los elementos de la última fila no son exactamente de la forma de B, pero con un razonamiento similar se puede obtener que el único producto elemental de esos menores que no es nulo es el de los elementos de la diagonal principal y por lo tanto da para cada uno de ellos el determinante.



NOTA: Obtuvimos lo que se requería para que P sea la matriz que diagonalice a A con lo cual queda demostrado.

Ejemplo

EJEMPLO 9-2 Considere la siguiente representación en el espacio de estados de un sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \tag{9-13}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{9-14}$$

Las Ecuaciones (9-13) y (9-14) se escriben en una forma estándar como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{9-15}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{9-16}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Los valores propios de la matriz **A** son

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = -3$$

Por tanto, los tres valores propios son distintos. Si se define un nuevo conjunto de variables de estado z_1, z_2 y z_3 mediante la transformación

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \tag{9-17}$$

donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{9-18}$$

entonces, sustituyendo la Ecuación (9-17) en la Ecuación (9-15), se obtiene

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $\mathbf{P}^{-1}$, se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{9-19}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Al simplificar se deduce

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \tag{9-20}$$

La Ecuación (9-20) es también una ecuación de estado que describe el mismo sistema definido mediante la Ecuación (9-13).

La ecuación de salida, Ecuación (9-16), se modifica a

$$y = \mathbf{CPz}$$

o bien

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{9-21}$$

Observe que la matriz de transformación $\mathbf{P}$, definida mediante la Ecuación (9-18), modifica la matriz de coeficientes de $\mathbf{z}$ en la matriz diagonal. Como se aprecia claramente en la Ecuación (9-20), las tres ecuaciones de estado escalares no están acopladas. Observe también que los elementos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ en la Ecuación (9-19) son idénticos a los tres valores propios de $\mathbf{A}$. Es muy importante señalar que los valores propios de $\mathbf{A}$ son idénticos a los de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. A continuación se demuestra esto para un caso general.

Diferentes variables de estado para un mismo sistema

forman un conjunto de variables de estado. Se puede tomar como otro conjunto de variables de estado cualquier conjunto de funciones

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}_1 &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \hat{x}_2 &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}}$$

siempre y cuando, a cada conjunto de valores $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$, le corresponda un conjunto único de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y viceversa. Por tanto, si $\mathbf{x}$ es un vector de estado entonces, $\hat{\mathbf{x}}$, donde

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$$

es también un vector de estado, siempre y cuando la matriz $\mathbf{P}$ sea no singular. Los diferentes vectores de estado aportan la misma información acerca del comportamiento del sistema.

NOTA: La matriz ha de ser no singular justamente para que haya una relación biyectiva entre vectores de estado y por lo tanto entre espacios de estado

Solución de sistema homogéneo lineal e invariante en espacio de estado-Matriz exponencial

Método de la expansión en serie de potencias

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}}$$

Se propone una solución del sistema en expansión de serie de potencias de t

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots}$$

Se obtiene lo siguiente

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right)\mathbf{x}(0)}$$

Por la equivalencia formal de la expansión en serie de Taylor de la función exponencial con centro en cero, se toma por definición

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}}$$

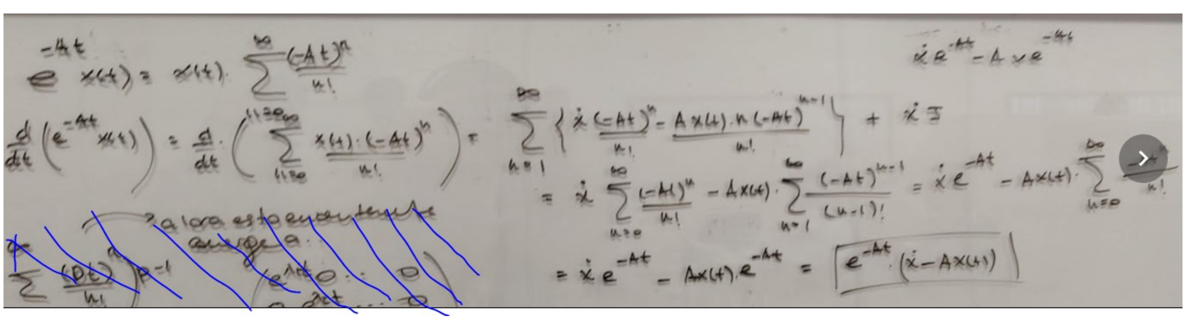
Que se denomina matriz exponencial y converge para todo tiempo finito (lo cual permite derivar término a término los elementos de la serie para obtener la derivada de la matriz exponencial)

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}$$

Entonces la anterior expresa la solución del sistema lineal homogéneo invariante en el tiempo

Propiedades de la matriz exponencial

- Derivación término a término de la serie



- Calculo de la matriz exponencial de A a partir de la exponencial de D (matriz diagonal de A la cual tiene n autovalores distintos)
- Propiedad de la suma de exponentes

La matriz exponencial tiene las siguientes propiedades:

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Esto se demuestra del modo siguiente:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k s^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i s^{k-i}}{i!(k-i)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(t+s)^k}{k!} \\ &= e^{\mathbf{A}(t+s)} \end{aligned}$$

En particular, si $s = -t$, entonces

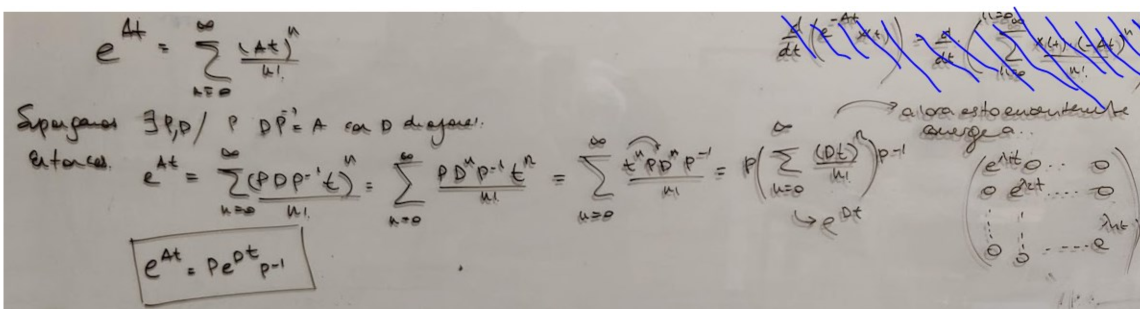
$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Por tanto, la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ es $e^{-\mathbf{A}t}$. Como la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ siempre existe, $e^{\mathbf{A}t}$ es no singular. Es

- Condición para la distribución respecto de la suma de matrices de la matriz exponencial

$$\boxed{\begin{aligned} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &\neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \end{aligned}}$$

-



NOTA: Cuando hay multiplicidad algebraica de los autovalores entonces no se podrá diagonalizar y la matriz exponencial tendrá además elementos con las exponenciales de los autovalores (repetidos) por los elementos de la base canónica de polinomios en t. Y en este caso hay que usar algo de la forma canónica de Jordan

Método de la transformada de Laplace

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)}$$

$$\boxed{s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots = e^{\mathbf{A}t}$$

Acá hay una justificación más o menos de $(sI - A)^{-1}$ a partir de la fórmula general de expansión en serie de un binomio (expansión binomial):

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} sI^{(-1-n)} (-A)^n$$

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\prod_{i=0}^{n-1}(-1-i)\right)}{n!}(-1)^n \cdot \left((sI)^{n+1}\right)^{-1} A^n$$

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)}{n!} \left(s^{n+1} I\right)^{-1} A^n$$

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \frac{I}{s^{n+1}} A^n$$

$$(sI-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s^{n+1}} IA^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!\,s^{n+1}}A^n$$

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\frac{A^n}{n!}\right] = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} t^n}$$

Método de diagonalización

Supongamos que la matriz de transición de estados tiene n autovalores distintos

$$\{\lambda_i\}: 1 \leq i \leq n$$

La matriz P que la diagonaliza está formada por columnas por los autovectores de A en correspondencia con los autovalores y la escribimos como:

$$P = [\boldsymbol{v_1}|\boldsymbol{v_2}| \dots |\boldsymbol{v_{n-1}}|\boldsymbol{v_n}]$$

Aplicamos la transformación lineal del espacio de estados definida como:

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z}$$

La solución de la ecuación de estados en el espacio de estados de **z** viene dada como

$$\boldsymbol{z} = P^{-1}e^{At}P\boldsymbol{z}(\boldsymbol{0}) = e^{Dt}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{0})$$

Donde D es la matriz A diagonalizada y se escribe como.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ y por lo tanto } e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \text{ y } e^{Dt}\boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} z_{10} \\ e^{\lambda_2 t} z_{20} \\ e^{\lambda_3 t} z_{30} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_{n0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución en el espacio de estados original viene dada como

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z} = Pe^{Dt}\boldsymbol{z}(0) = \sum_{k=1}^{n} z_{k0}\, e^{\lambda_k t}\boldsymbol{v_k}$$

Entonces observemos que si $\forall j \neq k: \{z_{j0} = 0\}$ y $z_k \neq 0$, entonces solamente $\boldsymbol{v_k}$ interviene en la solución del sistema en el tiempo y por lo tanto la evolución del sistema en el espacio de estados es en una curva recta cuya dirección es la correspondiente al autovector indicado. Para que esto ocurra, el estado inicial del sistema debe ser un punto sobre esta recta. Cada uno de estas curvas rectas es un **modo principal** del sistema

Para cualquier otro caso de condición inicial (es decir que el sistema parte de un estado representado por un punto que no pertenece a ninguna de las direcciones dadas por los autovectores) la evolución del sistema será según una curva que será una combinación de los modos principales (lo que no implica que todos ellos intervengan, de hecho, el modo k no va a intervenir en la solución si $z_{k0} = 0$).

Podemos averiguar cuales modos no intervienen de forma directa una vez obtenida la matriz de cambio de base P. Dado que tendremos $\boldsymbol{z}(0) = P^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ o sea:

$$z_{k0} = \sum_{j=1}^{n} P_{kj}^{-1} x_j = \boldsymbol{P_k^{-1}}.\boldsymbol{x}$$

Entonces cuando dicho producto escalar sea nulo el modo correspondiente no interviene. Entonces para na visualización rápida tal vez conviene representar en el espacio de estado las direcciones de los autovectores y las direcciones de las filas de la matriz de transformación inversa. Cuando **x** sea normal a una de estas últimas, el modo correspondiente no intervendrá en la solución.

Si los autovectores de A están normalizados se puede observar que los modos más rápidos serán aquellos que corresponden a autovalores de mayor valor absoluto (tanto en sentido creciente como decreciente, que en este caso sería en oposición o en el sentido del modo) y los más lentos corresponden a autovalores con menor valor absoluto. La importancia de cada modo estará dada por el valor de la componente del vector de estados en **z** por la cual se multiplique

Matriz de transición de estados

La solución a la ecuación de estado homogénea se puede expresar de la siguiente manera.

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)}$$

NOTA: Observar que en principio la matriz de transición de estados depende del tiempo

Donde $\Phi(t)$ es una matriz de orden n que es la solución única de:

$$\boxed{\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}}$$

NOTA: Observar que se trata de un problema de valores iniciales en Φ

$$\boxed{\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)}$$

NOTA: Estas dos últimas son la verificación de lo previously stated

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\[2em] \mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(-t)\end{gathered}}$$

Propiedades de la matriz de transición de estados

Propiedades de la matriz de transición de estados. A continuación se resumen las propiedades importantes de la matriz de transición de estados $\mathbf{\Phi}(t)$. Para el sistema lineal e invariante con el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

para el cual

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

se tienen las propiedades siguientes:

1. $\mathbf{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$
2. $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = (e^{-\mathbf{A}t})^{-1} = [\mathbf{\Phi}(-t)]^{-1}$ o $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$
3. $\mathbf{\Phi}(t_1 + t_2) = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = \mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2)\mathbf{\Phi}(t_1)$
4. $[\mathbf{\Phi}(t)]^n = \mathbf{\Phi}(nt)$
5. $\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)\mathbf{\Phi}(t_1 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_1 - t_0)\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)$

NOTA: Evidentemente se denomina matriz de transición de estados dado que se puede obtener el estado en cualquier otro instante de tiempo simplemente como una transformación de las condiciones iniciales

Solución de la ecuación de estado para el caso no homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$\mathbf{x}$ = vector de dimensión n
$\mathbf{u}$ = vector de dimensión r
$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times r$

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

NOTA: Se despeja la entrada y se pre multiplica ambos miembros por la inversa de la matriz exponencial.

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

NOTA: En el miembro izquierdo se toma que una antiderivada de combinaciones lineales de funciones (las componentes del vector de estado) es la combinación lineal de las antiderivadas de las funciones.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

NOTA: Se puede identificar una parte de la solución que depende de la transición de estados (que podría considerarse la parte de la respuesta natural) y otra parte que depende de las entradas

NOTA: Lo anterior también puede obtenerse a partir de la aplicación de la transformada de Laplace

Cuando el instante de tiempo inicial no es cero, se modifica de la siguiente manera la expresión

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau}$$

Teoremas importantes

El teorema de Cayley-Hamilton expresa que la matriz $\mathbf{A}$ satisface su propia ecuación característica, o que

$$\boxed{\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}} \tag{9-44}$$

Polinomio mínimo. El teorema de Cayley-Hamilton asegura que toda matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica. Sin embargo, la ecuación característica no necesariamente es la ecuación escalar de grado mínimo que $\mathbf{A}$ satisface. El polinomio de grado mínimo que tiene a $\mathbf{A}$ como raíz se denomina *polinomio mínimo*. Es decir, el polinomio mínimo de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se define como el polinomio $\phi(\lambda)$ de grado mínimo,

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m, \qquad m \leqslant n$$

tal que $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, o

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

El polinomio mínimo representa una función importante en el cálculo de polinomios de una matriz de $n \times n$.

Supóngase que $d(\lambda)$, polinomio en λ, es el máximo común divisor de todos los elementos de $\mathrm{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Se puede demostrar que si se elige 1 como el coeficiente del término de mayor grado en λ de $d(\lambda)$, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} \tag{9-45}$$

1. Forme $\mathrm{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y escriba los elementos de $\mathrm{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ como polinomios factorizados en λ.
2. Determine $d(\lambda)$ como el máximo común divisor de todos los elementos de $\mathrm{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Seleccione 1 como el coeficiente del término de mayor grado en λ de $d(\lambda)$. Si no hay un común divisor, $d(\lambda) = 1$.
3. El polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene, entonces, como $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ dividido entre $d(\lambda)$.

Controlabilidad y observabilidad

Controlabilidad y observabilidad. Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

NOTA: La mayoría de los sistemas físicos son controlables y observables pero es posible que los modelos matemáticos que describen su comportamiento dinámico no posean estas características con lo cual hay que distinguir entre la controlabilidad y observabilidad del sistema y del modelo matemático

Controlabilidad

Controlabilidad completa de estado sistemas de tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{9-51}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estados (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de $n \times 1$

Se dice que el sistema descrito mediante la Ecuación (9-51) es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

NOTA: La señal de control es justamente la entrada del sistema en ese intervalo de tiempo finito

Considerando la solución de la ecuación de estado no homogénea que ya obtuvimos y a partir de un desarrollo que no entendimos un choto porque involucra cosas de interpolación de sylvester que no entendimos nada se obtiene que:

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\beta_k$$

$$= -[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \hline \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}55)$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$, la Ecuación (9-55) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz $n \times n$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

De este análisis se puede concluir la condición para controlabilidad completa del estado de la forma siguiente. El sistema obtenido mediante la Ecuación (9-51) es de estado completamente controlable si y sólo si los vectores $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, ..., \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ son linealmente independientes, o la matriz $n \times n$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es de rango n.

NOTA: En el caso de una sola entrada escalar la matriz B es un vector de tamaño n

El resultado recién obtenido se extiende al caso en el que el vector de control $\mathbf{u}$ es de dimensión r. Si el sistema se describe por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector de dimensión r, se demuestra que la condición para controlabilidad completa del estado es que la matriz $n \times nr$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea de un rango n, o que contenga n vectores columna linealmente independientes. La matriz

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

se conoce comúnmente como *matriz de controlabilidad*.

Matriz de controlabilidad

$$\boxed{[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]}$$

Condiciones alternativa para la controlabilidad cuando la matriz de estado es diagonalizable en n autovalores distintos o en el plano s

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{Pz}}$$

NOTA: Se define esta transformación donde P es la matriz que diagonaliza a A.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = P\dot{\boldsymbol{z}} = AP\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}AP\boldsymbol{z} + P^{-1}B\boldsymbol{u} = D\boldsymbol{z} + F\boldsymbol{u}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \cdots + f_{1r}u_r \\
\dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \cdots + f_{2r}u_r \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \cdots + f_{nr}u_r
\end{aligned}
$$

NOTA: F es la el producto de matrices que acompaña al vector de entradas

Si todos los elementos de cualquier fila de la matriz **F** $n \times r$ son nulos, entonces la variable de estado correspondiente es no controlable por cualquiera de las u_i. Por tanto, la condición de controlabilidad completa del estado es que, si los vectores propios de **A** son distintos, el sistema es de estado completamente controlable si y sólo si ninguna fila de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ tiene todos sus elementos cero. Es importante señalar que, a fin de aplicar esta condición para controlabilidad completa del estado, se debe poner en forma diagonal la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ de la Ecuación (9-58).

Si la matriz **A** de la Ecuación (9-56) no posee vectores propios distintos, es imposible la diagonalización. En este caso, se transforma **A** en una forma canónica de Jordan. Por ejemplo, si **A** tiene valores propios λ_1, λ_1, λ_1, λ_4, λ_4, λ_6, ..., λ_n y tiene $n - 3$ vectores propios distintos, la forma canónica de Jordan de **A** es

$$
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_4 & 1 & & & \\
 & & & 0 & \lambda_4 & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_6 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & \lambda_n
\end{array}\right]
$$

Condición para controlabilidad completa del estado en el plano *s*. La condición para controlabilidad completa del estado se puede plantear en términos de funciones de transferencia o matrices de transferencia.

Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para controlabilidad completa del estado es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el sistema no puede controlarse en la dirección del modo cancelado.

EJEMPLO 9-13 Sea la función de transferencia siguiente:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s - 1)}$$

Es evidente que ocurre una cancelación del factor $(s + 2.5)$ en el numerador y el denominador de esta función de transferencia. (Por tanto, se pierde un grado de libertad.) Debido a esta cancelación, este sistema no es de estado completamente controlable.

Controlabilidad completa de salida

Controlabilidad de la salida. En el diseño práctico de un sistema de control, se puede necesitar controlar la salida en lugar del estado del sistema. Una controlabilidad completa del estado no es condición necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema. Por esta razón, es conveniente definir de forma independiente la controlabilidad completa de la salida.

Sea el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{9-61}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{9-62}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)

$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)

$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión n)

$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$

$\mathbf{B}$ = matriz $n \times r$

$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$

$\mathbf{D}$ = matriz $m \times r$

Se dice que el sistema descrito mediante las Ecuaciones (9-61) y (9-62) es de salida completamente controlable si es posible construir un vector de control sin restricciones $\mathbf{u}(t)$ que transfiera cualquier salida inicial $\mathbf{y}(t_0)$ a cualquier salida final $\mathbf{y}(t_1)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}]$$

es de rango m. (Para una demostración, véase el Problema **A-9-16.**) Obsérvese que la presencia del término $\mathbf{Du}$ en la Ecuación (9-62) siempre ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

Sistema no controlable

Sistema no controlable. Un sistema no controlable tiene un susbsistema que está desconectado físicamente de la entrada.

Estabilizabilidad

Estabilizabilidad. Para un sistema parcialmente controlable, si los modos no controlables son estables y los modos inestables son controlables, el sistema se dice entonces que es estabilizable. Por ejemplo, el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

no es de estado controlable. El modo estable que se corresponde con el valor propio -1 no es controlable. El modo inestable que corresponde al valor propio 1 es controlable. Este sistema se puede estabilizar mediante una realimentación adecuada. Así que este sistema es estabilizable.

Observabilidad

En esta sección analizaremos la observabilidad de los sistemas lineales. Sea el sistema no forzado descrito mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9-63}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{9-64}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m)
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $\mathbf{x}(t_0)$ se determina a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible. En esta sección, se tratan sólo sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Por tanto, sin pérdida de generalidad, se supone que $t_0 = 0$.

NOTA: Es suficiente la consideración de un sistema no excitado para obtener una condición de observabilidad, esto se demuestra y tiene que ver con que aparece un término que involucra matrices y la señal de entrada que son todos conocidos

A partir de un desarrollo que involucra nuevamente una cosa que no entendimos un choto se obtiene lo siguiente (considerando que el instante de tiempo inicial es cero)

Matriz de observabilidad

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

es de rango n, o tiene n vectores columna linealmente independientes. Esta matriz se denomina *matriz de observabilidad.*

NOTA: Recordar que el asterisco indica la traspuesta conjugada de la matriz con lo cual tiene sentido la indicación de orden dada

Condición para observabilidad en el plano s

Condiciones para observabilidad completa en el plano *s*. Las condiciones para observabilidad completa también se pueden expresar en términos de funciones de transferencia o matrices de transferencia. La condición necesaria y suficiente para observabilidad completa es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el modo cancelado no se puede observar en la salida.

Comentarios. La función de transferencia no presenta cancelación si y sólo si el sistema es de estado completamente controlable y es completamente observable. Esto significa que la función de transferencia cancelada no transporta toda la información que caracteriza al sistema dinámico.

Forma alternativa de la condición de observabilidad para una matriz de estado diagonalizable en n autovalores distintos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0)$$

o bien

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CP}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\mathbf{z}(0) = \mathbf{CP}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}z_1(0)\\ e^{\lambda_2 t}z_2(0)\\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}z_n(0)\end{bmatrix}$$

El sistema es completamente observable si ninguna de las columnas de la matriz **CP** $m \times n$ está formada sólo por elementos cero. Esto se debe a que, si la i-ésima columna de **CP** está formada sólo por elementos cero, la variable de estado $z_i(0)$ no aparecerá en la ecuación de salida y, por tal razón, no puede determinarse a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$. En este caso, $\mathbf{x}(0)$, que se relaciona con $\mathbf{z}(0)$ mediante la matriz **P** no singular, no puede determinarse. (Recuérdese que esta prueba sólo se aplica si la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ está en forma diagonal.)

Detectabilidad. Para un sistema parcialmente observable, si los modos no observables son estables y los modos observables son inestables, se dice que es detectable. Obsérvese que el concepto de detectabilidad es dual al concepto de estabilizabilidad.

Ejemplo de determinación de observabilidad y controlabilidad

EJEMPLO 9-14 Sea el sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

¿Es este sistema controlable y observable?

Como el rango de la matriz

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2, el sistema es de estado completamente controlable.

Para la controlabilidad de salida, se calcula el rango de la matriz $[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB}]$. Como

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB}] = [0 \quad 1]$$

el rango de esta matriz es 1. Por tanto, el sistema tiene una salida completamente controlable.

Para verificar la condición de observabilidad, examine el rango de $[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*]$. Como

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el rango de $[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*]$ es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable.