MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

FACULTAD DE INGENIERÍA

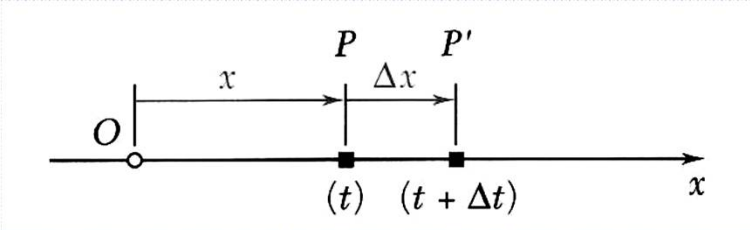
CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

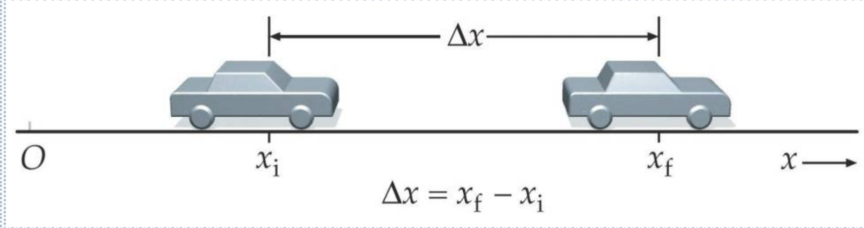
Ing. Carlos Barrera - 2022

Posición, velocidad y aceleración

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA



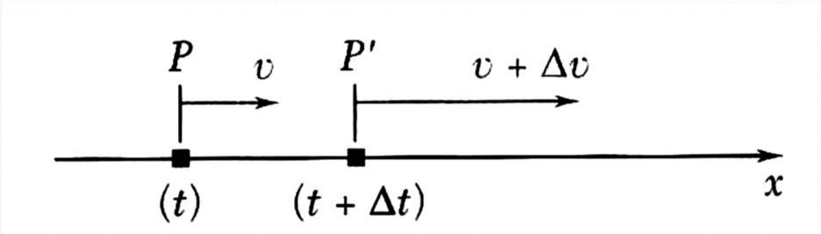


$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad se representa mediante un número que puede ser positivo o negativo

$$v = \frac{dx}{dt}$$



$$\text{Aceleración promedio} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\text{Aceleración instantánea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a = v\frac{dv}{dx}$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

08:00

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

08:00

DINÁMICA DEL PUNTO

A Cinemática del Punto

Para el estudio que haremos utilizaremos una terna fundamental positiva , A tal sistema de referencia lo suponemos fijo y al espacio que lo rodea con las propiedades de la geometría euclidiana.

1 Posición

La posición de un punto R referido a la terna esta definida por el conocimiento de sus tres coordenadas x , y , z o por el vector posición R – O en donde O es el punto coincidente con el origen de coordenadas , de manera que :

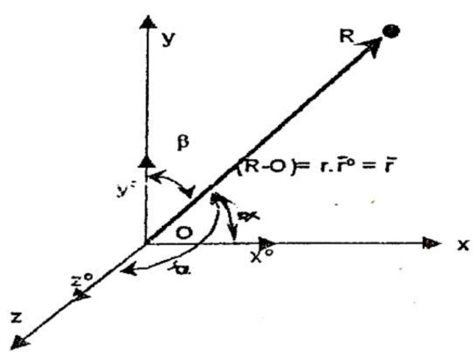
$$R - O = x \cdot \bar{x}^0 + y \cdot \bar{y}^0 + z \cdot \bar{z}^0$$

Con lo que la posición de R queda definida sin ambigüedad . Si denominamos $\bar{r}^0$ al versor que tiene la dirección del vector posición , podemos escribir que $R - O = r \cdot \bar{r}^0$ donde r es módulo del vector posición y r^0 su dirección . Podemos establecer que :

$$\bar{r}^0 = \cos\alpha . \bar{x}^0 + \cos\beta . \bar{y}^0 + \cos\gamma . \bar{z}^0$$

De este modo α, β, y , γ son los ángulos que forma nuestro vector posición con los ejes de referencia.

A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores .



La posición del punto R puede ser móvil y por lo tanto en cada momento quedará definido por el conocimiento de sus tres coordenadas x, y, z de manera que si la variación de las coordenadas es función continua del tiempo podemos escribir que

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t) \qquad (1)$$

o en forma vectorial

$$R - O = R(t) = r(t) . \bar{r}^0 \qquad (2)$$

Si estas funciones permanecen continuas y finitas en un intervalo comprendido entre un valor inicial t_0 hasta un valor t_F en que el movimiento está definido se les denomina ecuaciones o ley de movimiento del punto R.

Si en las ecuaciones (1) eliminamos el tiempo , obtenemos la ecuación de la trayectoria del móvil, y también a dichas ecuaciones se las puede considerar como ecuaciones paramétricas de la trayectoria donde el parámetro es el tiempo t .

Es decir que sintetizando

$$R - O = x(t) . \bar{x}^0 + y(t) . \bar{y}^0 + z(t) . \bar{z}^0$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

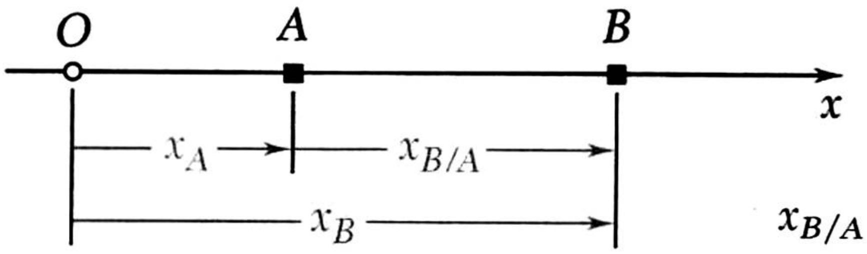
FACULTAD
DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

08:00

Movimiento relativo de partículas



$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{o} \quad \boxed{x_B = x_A + x_{B/A}}$$

La diferencia $x_B - x_A$ **define la Coordenada de posición relativa de B con respecto a A.**

Al diferenciar:

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{o} \quad \boxed{v_B = v_A + v_{B/A}}$$

La razón de cambio $v_{B/A}$ **se conoce como la velocidad relativa de B con respecto a A**

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{o} \quad \boxed{a_B = a_A + a_{B/A}}$$

se conoce como la aceleración relativa

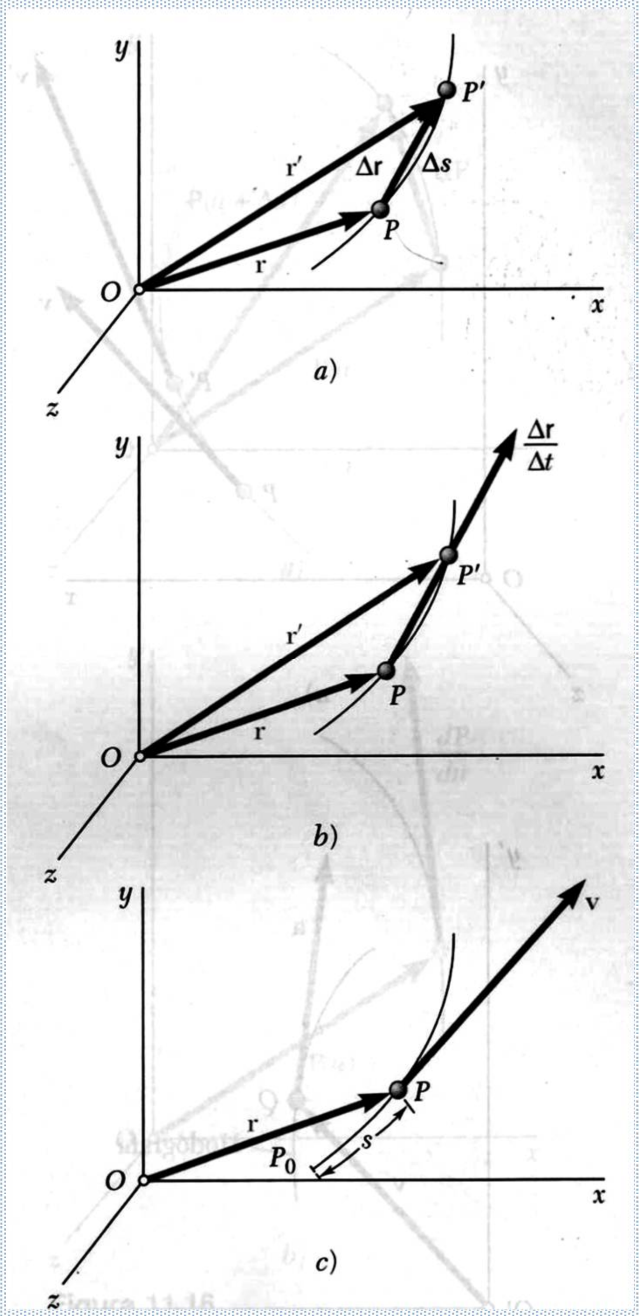
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MOVIMIENTO CURVILINEO DE PARTICULAS

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$



Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

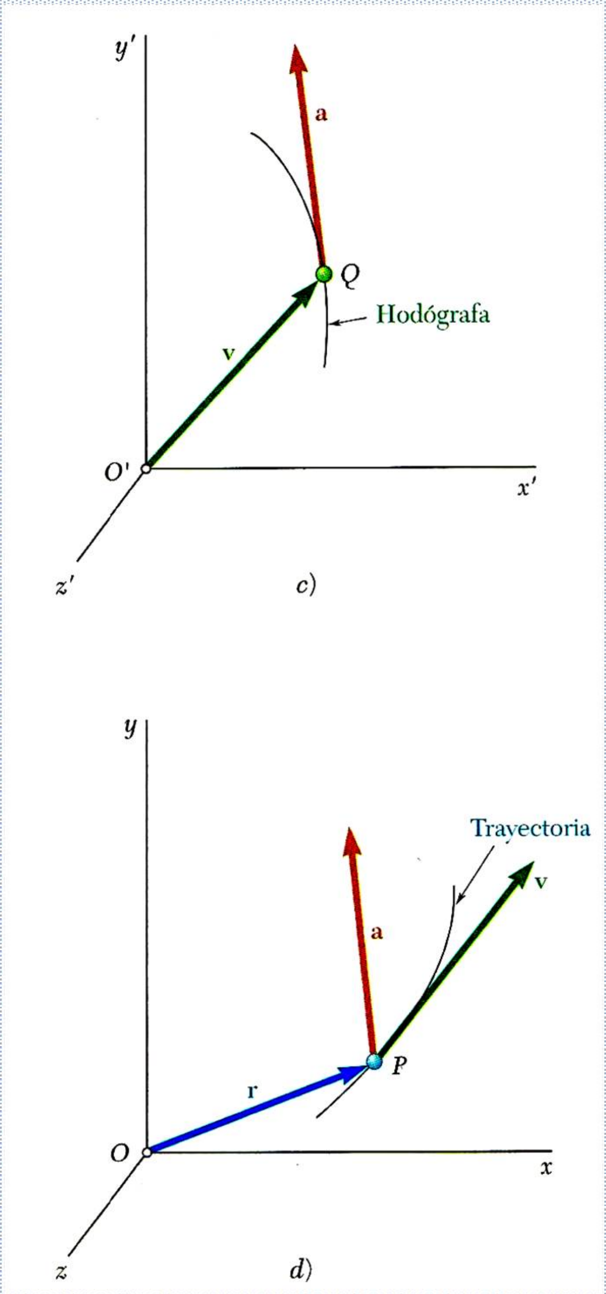
Ing. Carlos Barrera

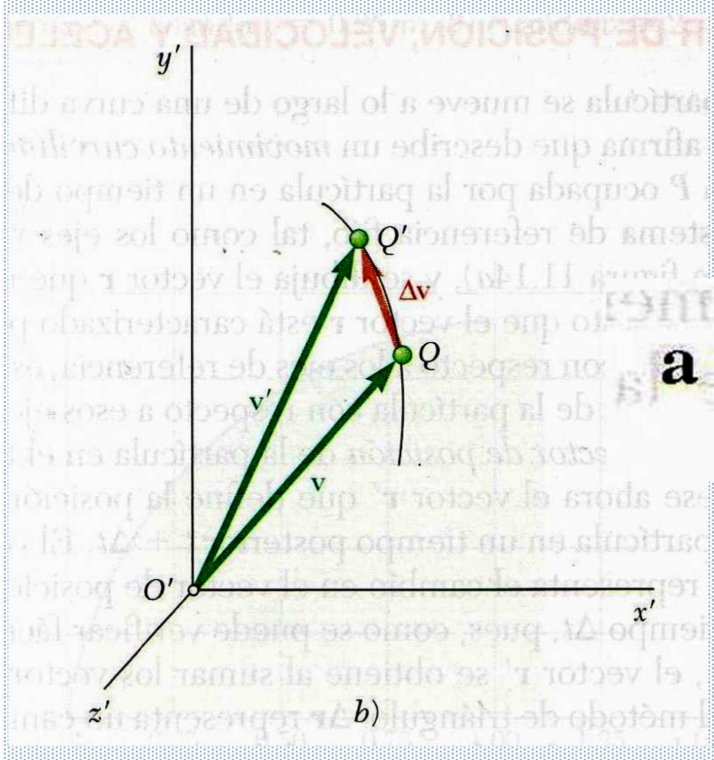
08:00

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS





$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

La curva descripta por la punta de v se conoce como la hodografa del movimiento

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Ing. Carlos Barrera

08:00

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

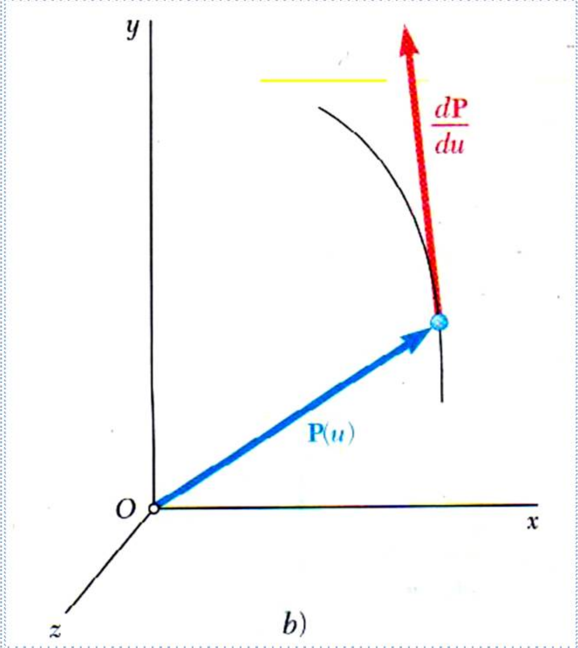
Ing. Carlos Barrera

08:01

P_x, P_y, P_z son las componentes escalares rectangulares

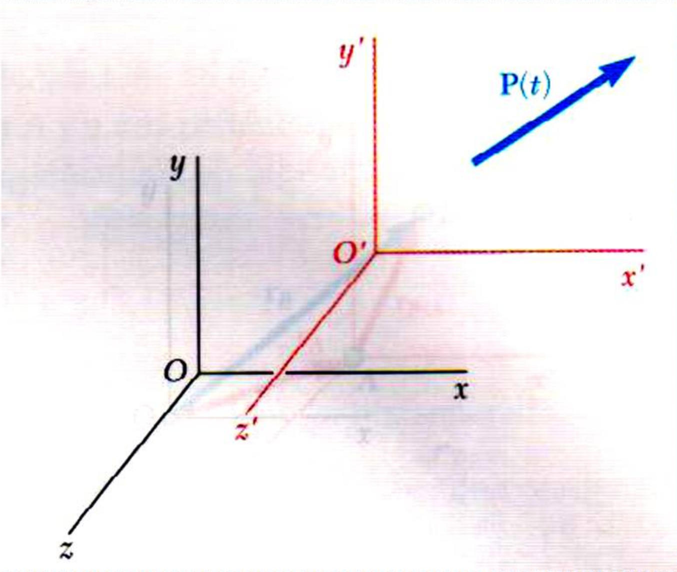
$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$

i,j,k versores o vectores unitarios correspondientes a los ejes x,y,z



Descomponiendo P en componentes rectangulares

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{du}\mathbf{k}$$



Diferenciando

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k}$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Vector de posición r en componentes rectangulares

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

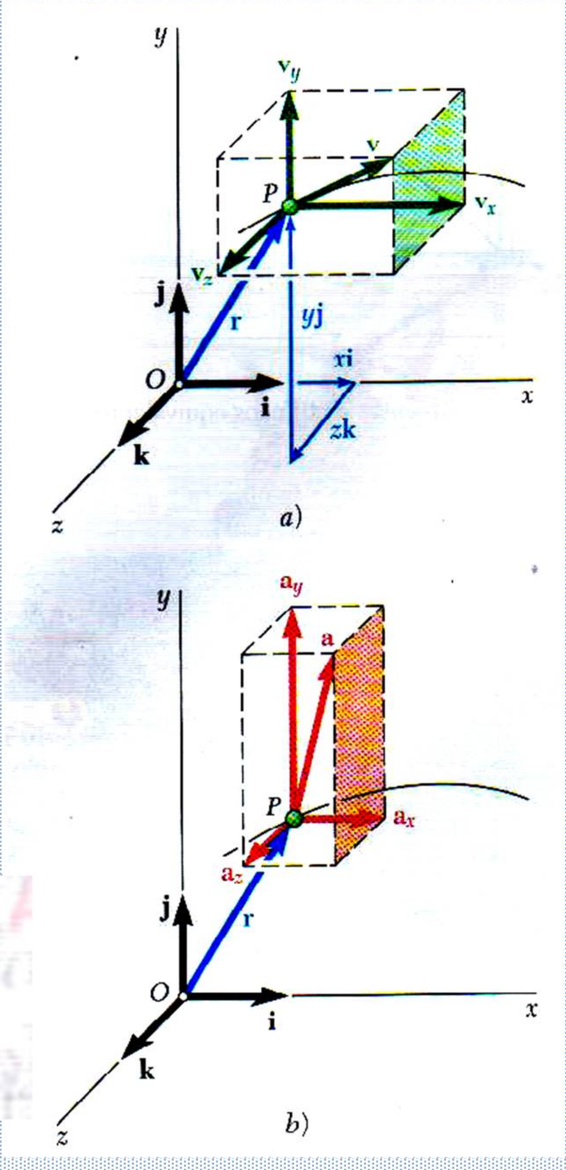
Derivando

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z}$$



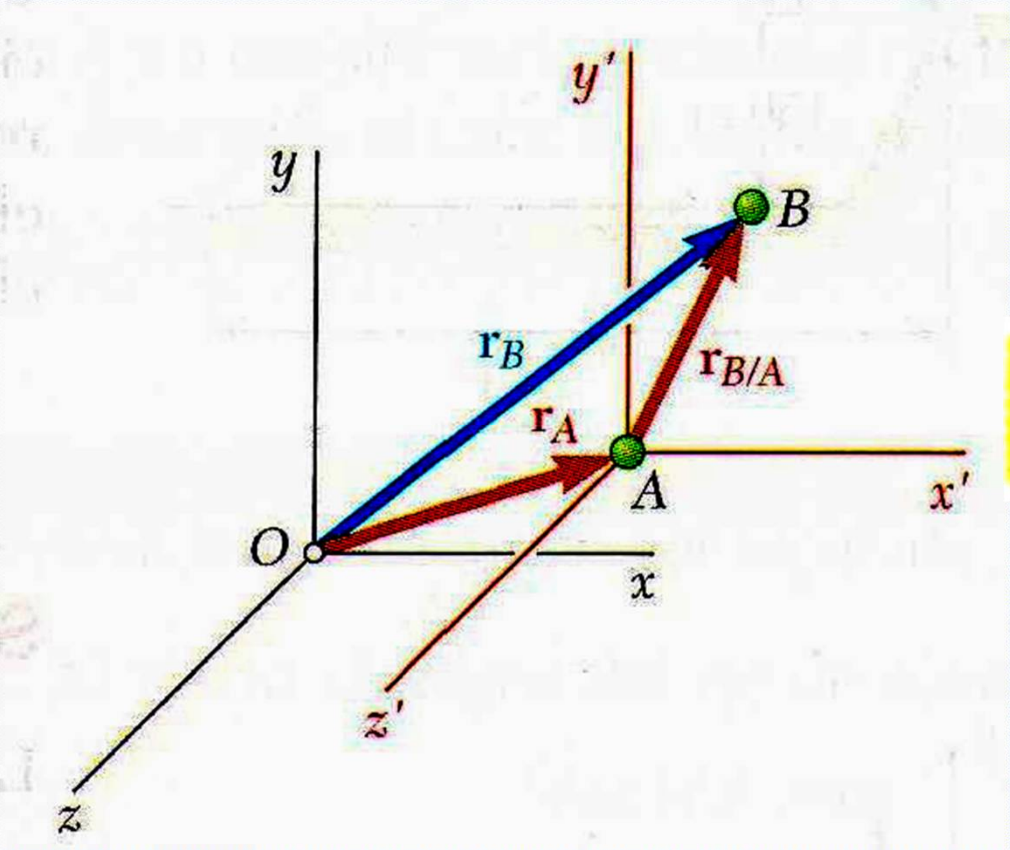
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación



$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

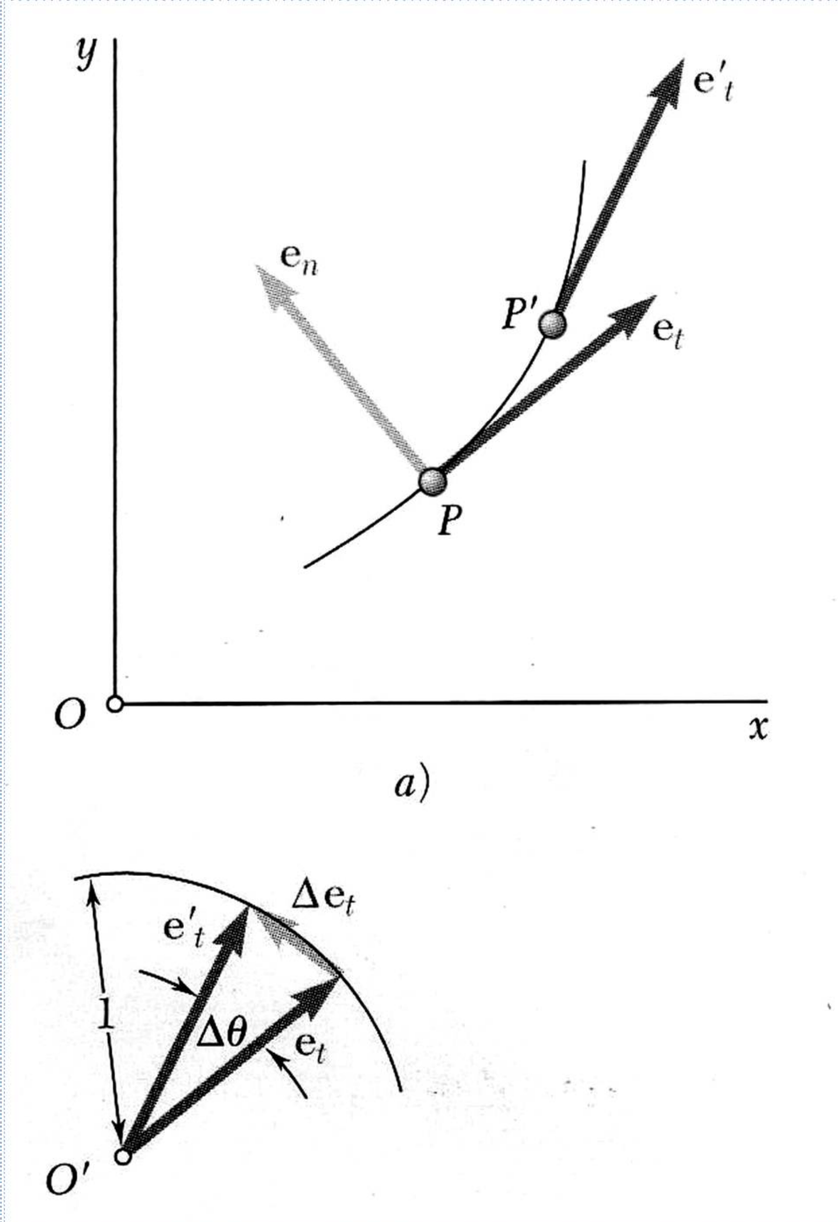
Ing. Carlos Barrera

08:01

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Componentes tangencial y normal



$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\ \mathrm{sen}\,(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}=1$$

$$\mathbf{e}_n=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\mathbf{e}_n=\frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}$$

$$\mathbf{v}=v\mathbf{e}_t$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

08:01

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$$

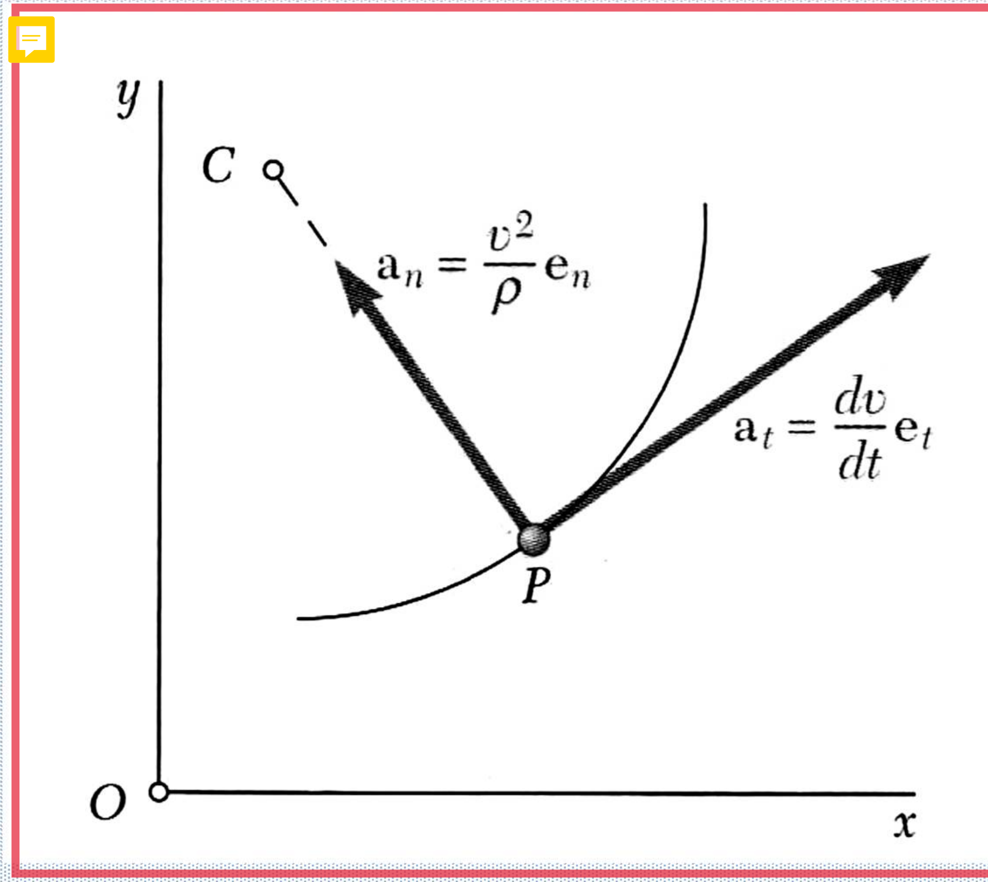
$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$

las componentes escalares de la aceleración son

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad \boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$



UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:

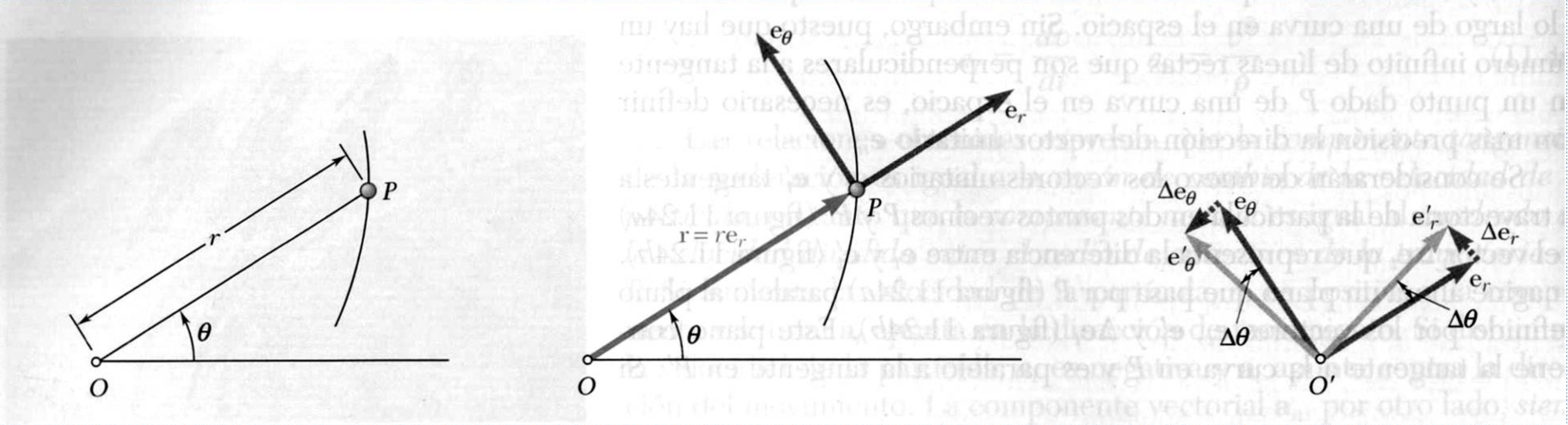
MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

08:01

Componentes radial y transversal



$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot\theta\mathbf{e}_\theta \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot\theta\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot r\mathbf{e}_r + r\dot\theta\mathbf{e}_\theta}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot r\mathbf{e}_r + \dot r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot r\dot\theta\mathbf{e}_\theta + r\ddot\theta\mathbf{e}_\theta + r\dot\theta\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

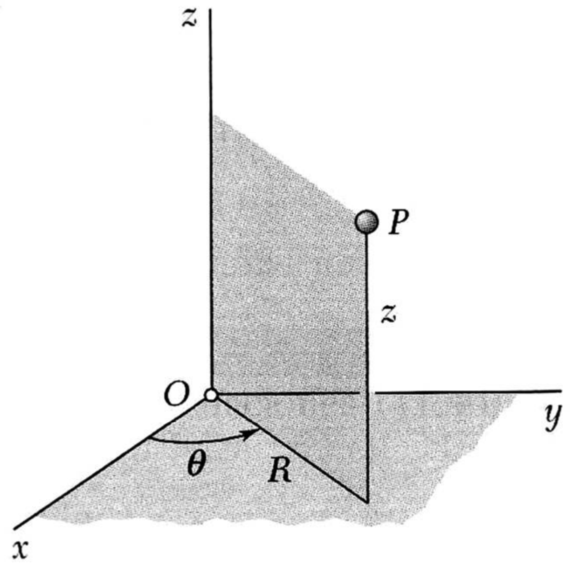
$$\boxed{\mathbf{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\mathbf{e}_\theta}$$

$$v_r = \dot r \qquad v_\theta = r\dot\theta$$

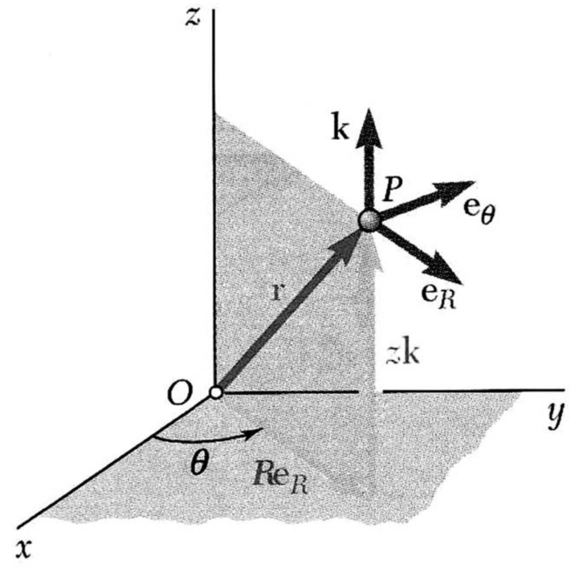
$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 \qquad a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$$

$$\boxed{\mathbf{v} = r\dot\theta\mathbf{e}_\theta \qquad \mathbf{a} = -r\dot\theta^2\mathbf{e}_r + r\ddot\theta\,\mathbf{e}_\theta}$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



a)



Coordenadas Cilíndricas

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

Ing. Carlos Barrera

08:01

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

BIBLIOGRAFIA A CONSULTAR

- **Mecánica Vectorial para Ingenieros   Beer Johnston**
- **Dinámica   Hibbeler**

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

08:01