Carrera: “INGENIERÍA EN MECATRÓNICA”

Cátedra: “Sistemas de Automatización”

ELEMENTOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

El orden de un elemento o sistema se puede definir como la máxima potencia de la derivada en la ecuación diferencial. De modo alternativo, el orden de un elemento o sistema se puede definir como la máxima potencia de s en el denominador de la función de transferencia.

Para un elemento de primer orden:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

Para $\theta_o = 0$ en $t = 0$:

$$a_1 s\theta_o(s) + a_0\theta_o(s) = b\theta_i(s) \Rightarrow G(s) = \frac{b}{a_1 s + a_0}$$

Reordenando se obtiene: $$G(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)s + 1}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{G_{ss}}{\tau s + 1}}$$

- G_{ss} =K : Función transferencia en estado estable.
- τ: Constante de tiempo del sistema

Ésta es la forma general que adopta la relación entrada-salida en el dominio de s para un sistema de primer orden.

ELEMENTOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Para un elemento de segundo orden:

$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i \Rightarrow G(s) = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\frac{b}{a_0}}{\left(\frac{a_2}{a_0}\right)s^2 + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)s + 1} = \frac{G_{ss}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\varepsilon s + 1}$$

La ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir como:

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b\omega_n^2\theta_i \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Ésta es la forma general que adopta la relación entrada-salida en el dominio de s para un sistema de segundo orden.

MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

- Esta presentación reúne el material de las presentaciones anteriores para estudiar el comportamiento de los sistemas de control cuando se tiene en cuenta el tiempo, es decir, el comportamiento dinámico de los sistemas.

FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE ELEMENTOS DINÁMICOS

Suponga un sistema en el que la entrada θ_i está relacionada con la salida θ_o mediante la ecuación diferencial:

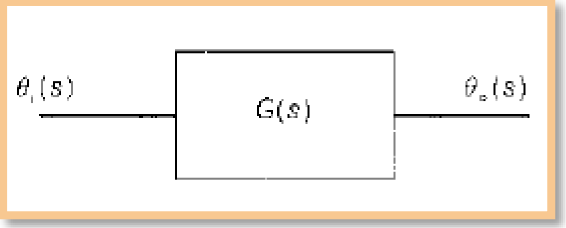
$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b\theta_i$$

Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de esta ecuación es:

$$a_2 s^2 \theta_o(s) + a_1 s \theta_o(s) + a_0 \theta_o(s) = b\theta_i(s)$$

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = G(s) = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$G(s)$ es la función de transferencia de un sistema lineal que describe su comportamiento dinámico (suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero).



- Para un sistema masa-resorte-amortiguador: $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$ ➡ $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$
- Para un circuito resistor-capacitor-inductor: $LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = v$ ➡ $G(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$

MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

RESPUESTA ESCALÓN DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

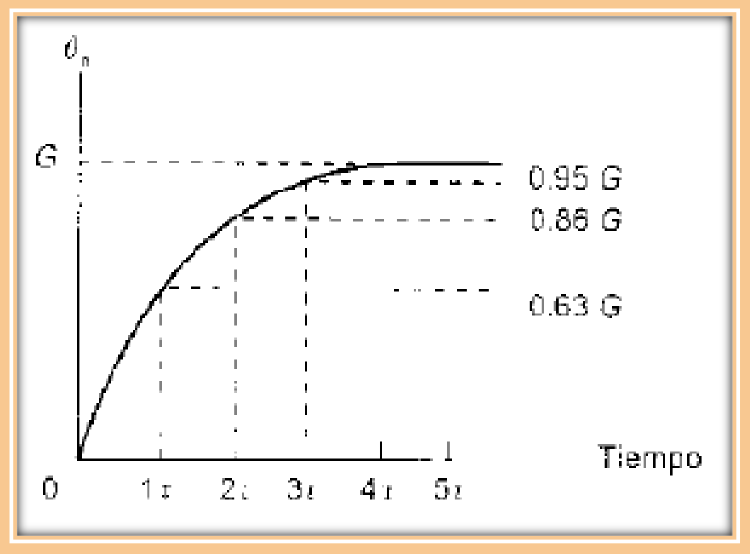
$$Transf.\ de\ Laplace\ de\ la\ salida = \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \theta_i(s) \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \frac{1}{s} \Rightarrow \theta_o(s) = G * \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)}{s\left[s + \left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

Por lo tanto, anti-transformando y, para una entrada escalón unitario, tenemos:

$$\theta_o(s) = G * \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]$$

Para una entrada escalón de magnitud A, tenemos:

$$\theta_o(s) = AG * \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]$$



MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

RESPUESTA RAMPA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

$$Transf.\ de\ Laplace\ de\ la\ salida = \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \theta_i(s) \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \frac{1}{s^2} \Rightarrow \theta_o(s) = G * \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)}{s^2\left[s + \left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

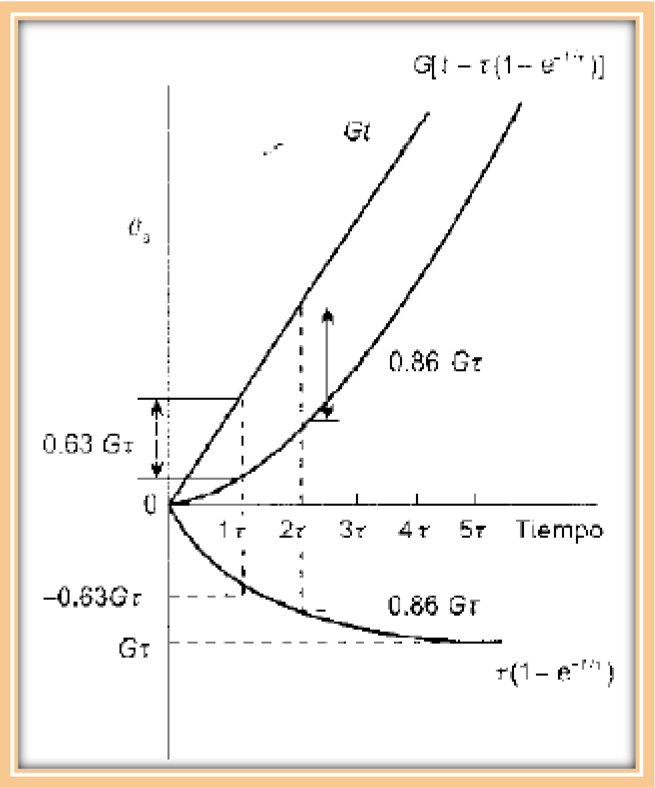
Por lo tanto, anti-transformando y, para una entrada rampa de pendiente unitaria, tenemos:

$$\theta_o(s) = G * \left[t - \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

Para una entrada rampa de pendiente A, tenemos:

$$\theta_o(s) = AG * \left[t - \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

La gráfica muestra al resultado final como una resta entre la recta Gt y la curva $G\tau\left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]$.



MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

RESPUESTA IMPULSO DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

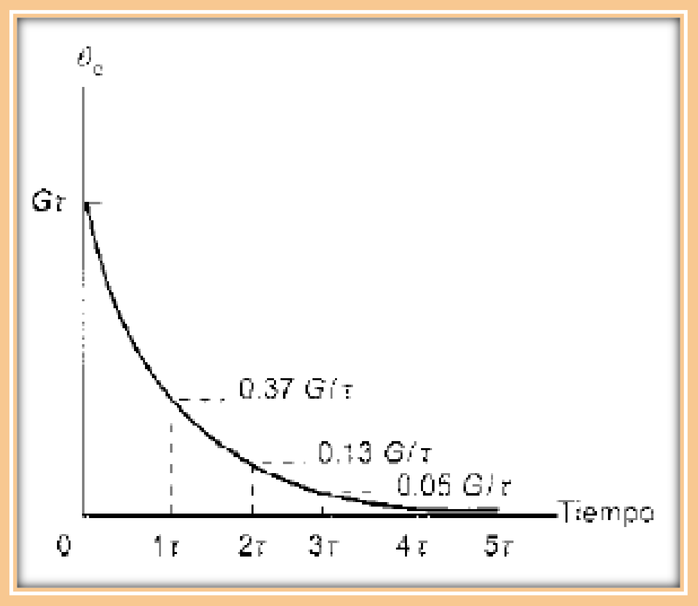
$$Transf.\ de\ Laplace\ de\ la\ salida = \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * \theta_i(s) \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = \frac{G}{\tau s + 1} * 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = G * \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)}{\left[s + \left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}$$

Por lo tanto, anti-transformando y, para una entrada impulso unitario, tenemos:

$$\theta_o(s) = G\left(\frac{1}{\tau}\right) * e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

Para una entrada impulso de magnitud A, tenemos:

$$\theta_o(s) = AG\left(\frac{1}{\tau}\right) * e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$



RESPUESTA ESCALÓN DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$ para una entrada escalón unitario, tenemos: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * \frac{1}{s}$$

Esta ecuación se puede reordenar como: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s-m_1)(s-m_2)s} \qquad (1)$$

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (2) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (3) \end{cases}$$

El tipo de respuesta que se presenta (es decir, la transformada inversa), depende del factor de amortiguamiento relativo ε:

- Cuando $\varepsilon > 1$, entonces hay 2 raíces reales diferentes y el sistema es sobre-amortiguado. Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (1) se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{A}{s-m_1} + \frac{B}{s-m_2} \qquad (4)$$ con: $$(s-m_1)(s-m_2) + As(s-m_2) + Bs(s-m_1) = b\omega_n^2$$

Cuando $\boldsymbol{s = m_1}$: $$A = \frac{b\omega_n^2}{m_1(m_1 - m_2)} \qquad (5)$$

Al sustituir (2) y (3) en (5) se obtiene: $$A = \frac{b\omega_n^2}{\left(-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right) * \left(2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right)}$$

Luego, simplificando la ecuación queda: $$A = \frac{b}{\left(-\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right) * \left(2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right)}$$

Al multiplicar y dividir por $\left[-\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]$ queda: $$A = \frac{b\left[-\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} \Rightarrow A = -\frac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \frac{b}{2}$$

Cuando $\boldsymbol{s = m_2}$: $$B = \frac{b\omega_n^2}{m_2(m_2 - m_1)} \qquad (6)$$

Al sustituir (2) y (3) en (6) y hacer el mismo procedimiento se obtiene: $$B = \frac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \frac{b}{2}$$

Luego, la transformada inversa de: $$\theta_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{A}{s - m_1} + \frac{B}{s - m_2}$$ es: $$\theta_o = 1 + Ae^{(m_1 t)} + Be^{(m_2 t)}$$

Al sustituir los valores de A, B, m_1 y m_2 antes obtenidos:

$$\boxed{\theta_o = 1 + \left[-\frac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \frac{b}{2}\right] e^{\left[-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]t} + \left[\frac{b\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} - \frac{b}{2}\right] e^{\left[-\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\right]t}}$$

MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

- Cuando $\varepsilon = 1$, se dice que el sistema está críticamente amortiguado. Para esta condición, $m_1 = m_2 = -\varepsilon\omega_n$. Entonces:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\theta_i(s)$$ para una entrada <u>escalón unitario</u>, tenemos: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} * \frac{1}{s}$$

La respuesta del sistema es la transformada inversa de esta última ecuación y según las tablas:

$$\boxed{\theta_o = b * \left[1 - e^{(-\omega_n t)} - \omega_n t e^{(-\omega_n t)}\right]}$$

- Cuando $\varepsilon < 1$ las raíces son complejas y se dice que el sistema es sub-amortiguado.

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + j\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)} & (7) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - j\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)} & (8) \end{cases}$$

La respuesta del sistema es la transformada inversa de la siguiente ecuación:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$ para una entrada <u>escalón unitario</u>, tenemos: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * \frac{1}{s}$$

Según las tablas, la transformada inversa es: $$\boxed{\theta_o = b * \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} * e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * sen\left[\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}t + \varphi\right]\right]}$$

De esta manera, la salida NO oscila con la frecuencia ω_n sino que la misma es amortiguada por la presencia de ε.

RESPUESTA RAMPA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$ para una entrada rampa unitaria, tenemos: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * \frac{1}{s^2}$$

Esta ecuación se puede reordenar como: $$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s-m_1)(s-m_2)s^2} \quad (9)$$

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (2) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (3) \end{cases}$$

El tipo de respuesta que se presenta (es decir, la transformada inversa), depende del factor de amortiguamiento relativo ε:

Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (9) se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-m_1} + \frac{D}{s-m_2}\right) \quad (10)$$

Repitiendo todo el mismo procedimiento que se vio en la respuesta para una entrada escalón unitario, se obtienen los valores de A, B, C y D:

$$A = 1 \qquad B = -\frac{2\varepsilon}{\omega_n} \qquad C = \frac{\varepsilon}{\omega_n} + \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} \qquad D = \frac{\varepsilon}{\omega_n} - \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}$$

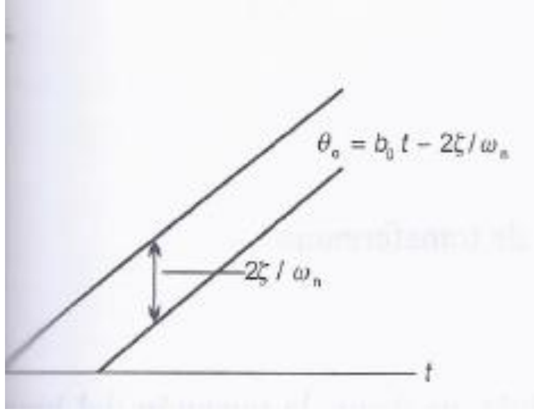
MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

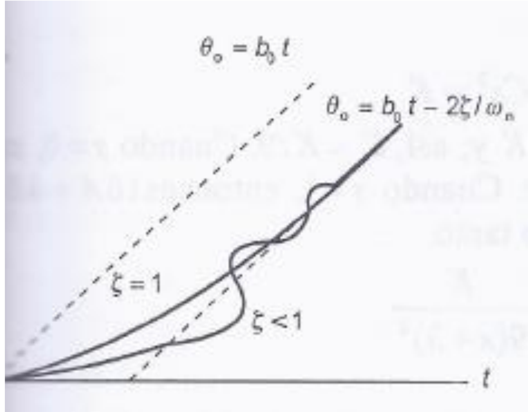
Luego, la transformada inversa de: $\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-m_1} + \frac{D}{s-m_2}\right)$ es: $\theta_o = b\left[At + B + Ce^{(m_1 t)} + De^{(m_2 t)}\right]$

Al sustituir los valores de A, B, C, D, m_1 y m_2 antes obtenidos:

$$\boxed{\theta_o = b\left\{t + \left(-\frac{2\varepsilon}{\omega_n}\right) + \underbrace{\left[\frac{\varepsilon}{\omega_n} + \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}}\right]}_{C} e^{\left[-\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t} + \underbrace{\left[\frac{\varepsilon}{\omega_n} - \frac{2\varepsilon^2 - 1}{2\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}}\right]}_{D} e^{\left[-\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t}\right\}}$$

Los términos C y D en la ecuación dan la respuesta transitoria. La forma de esta respuesta depende, ya sea que ε sea mayor, igual o menos que 1 y así, en consecuencia las raíces serán reales y diferentes, reales e iguales o complejas y diferentes.





RESPUESTA IMPULSO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2}\theta_i(s)$$

para una entrada impulso unitario, tenemos:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2} * 1$$

Esta ecuación se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = \frac{b\omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)} \qquad (11)$$

Donde m_1 como m_2 son las raíces de la ecuación: $s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2$

$$\begin{cases} m_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (2) \\ m_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} & (3) \end{cases}$$

El tipo de respuesta que se presenta (es decir, la transformada inversa), depende del factor de amortiguamiento relativo ε:

Utilizando las fracciones parciales, la ecuación (9) se puede reordenar como:

$$\theta_o(s) = b\left(\frac{A}{s - m_1} + \frac{B}{s - m_2}\right) \qquad (11)$$

Repitiendo todo el mismo procedimiento que se vio en la respuesta para una entrada escalón unitario, se obtienen los valores de A y B:

$$A = \frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}} \qquad B = -\frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}}$$

Luego, la transformada inversa de: $\theta_o(s) = b\left(\dfrac{A}{s-m_1} + \dfrac{B}{s-m_2}\right)$ es: $\theta_o = Ae^{(m_1 t)} + Be^{(m_2 t)}$

Al sustituir los valores de A, B, m_1 y m_2 antes obtenidos:

$$\boxed{\theta_o = \left[\frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2-1)}}\right] * \left\{e^{\left[-\varepsilon\omega_n+\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t} - e^{\left[-\varepsilon\omega_n-\omega_n\sqrt{(\varepsilon^2-1)}\right]t}\right\}}$$

La forma de la respuesta que se presenta dependerá de si las raíces m_1 y m_2, son reales o complejas.

- Cuando $\varepsilon > 1$ las raíces son reales diferentes y el resultado es sólo un incremento de la salida seguido de un lento decaimiento hacia el valor cero.
- Cuando $\varepsilon = 1$ las raíces son reales e iguales y el sistema está críticamente amortiguado. Esto significa que continúa el incremento inicial en la salida y la respuesta regresa a cero en un tiempo mínimo sin oscilaciones.
- Cuando $\varepsilon < 1$ las raíces son complejas y se tiene un incremento inicial en las oscilaciones de salida, con un decaimiento uniforme en la amplitud hasta que eventualmente regresa al valor cero. Para este caso la ecuación suele escribirse como:

$$\boxed{\theta_o = \left[\frac{b\omega_n^2}{2\sqrt{(\varepsilon^2-1)}}\right] * e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * sen\left[\omega_n\sqrt{(1-\varepsilon^2)}t\right]}$$