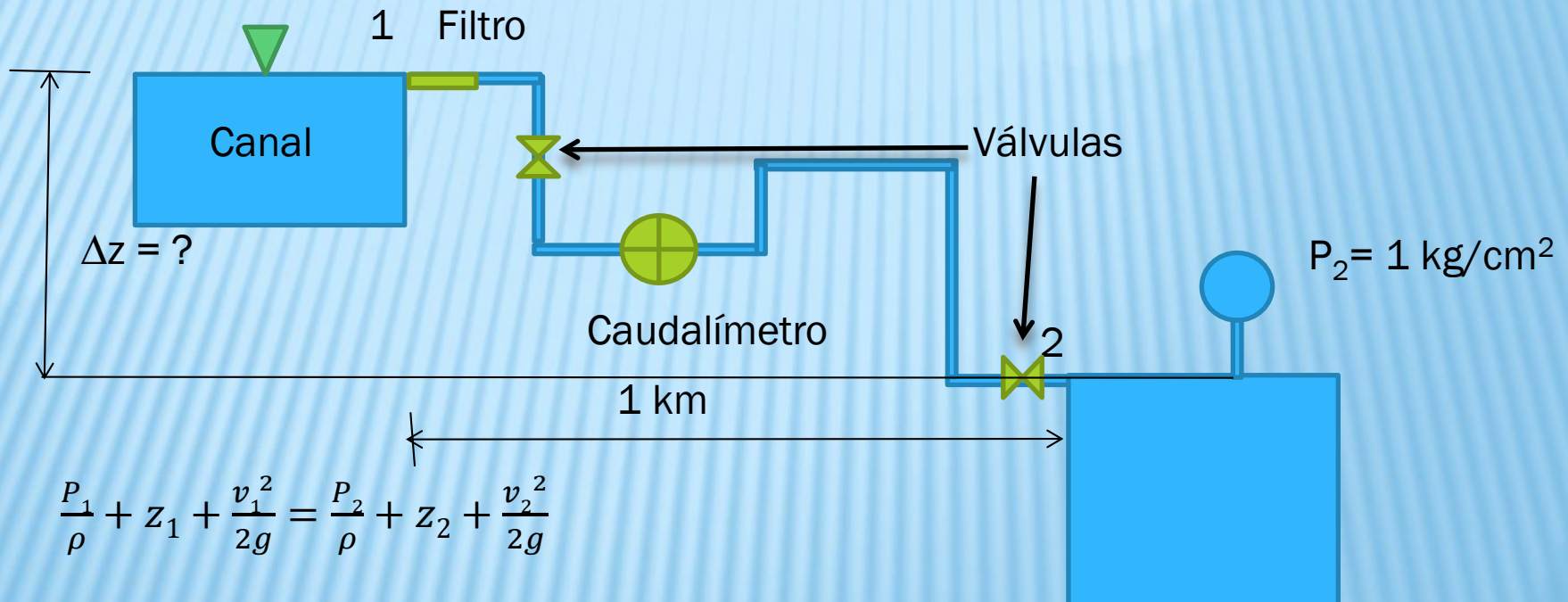


# TEMA 5: INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD

## Bibliografía

Mecánica de Fluidos. Franzini: Cap 8 y 9

Mecánica de Fluidos. Cengel: Cap 8 Y 11



$$\frac{P_1}{\rho} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$A_1 * v_1 = A_2 * v_2$$

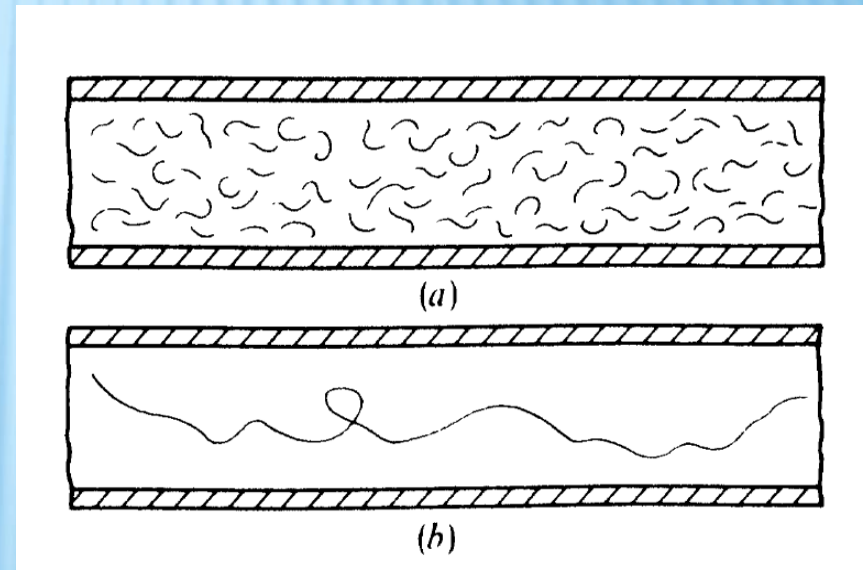
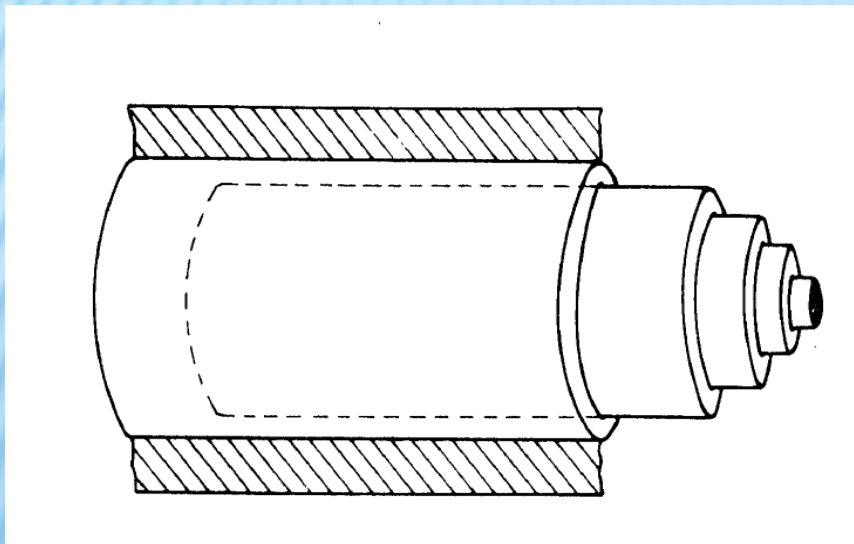
$$D_1 = D_2 \quad v_1 = v_2$$

$$z_1 = \frac{P_2}{\rho} + z_2$$

$$z_1 - z_2 = \frac{P_2}{\rho} = 10,22 \text{ m}$$

**NO ALCANZA**

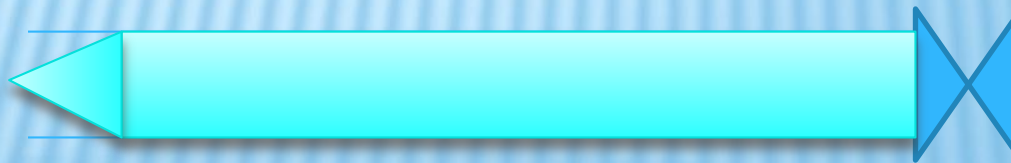
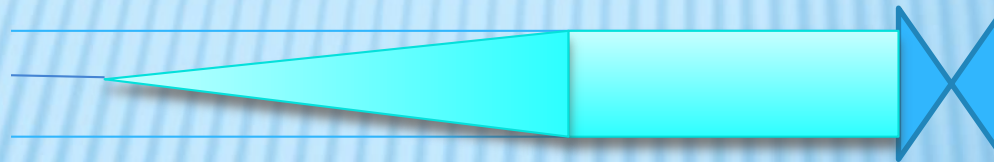
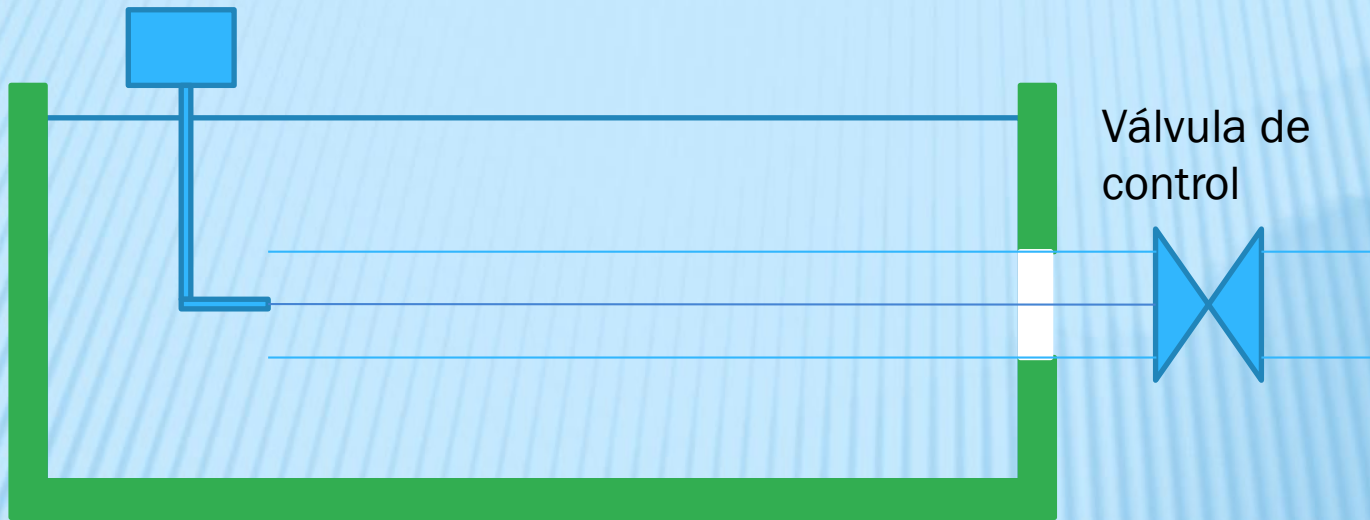
Debido a la viscosidad los fluidos reales ejercen una resistencia al desplazamiento o al corte. De acuerdo al patrón de desplazamiento se puede clasificar este movimiento en laminar o turbulento



Régimen Turbulento (hay una componente transversal a la dirección del flujo)

Régimen laminar (no hay componente transversal a la dirección del flujo)

Depósito de  
tinta







**Air bubbles  
passing through  
cristal tubes:**

**smooth and corrugated**



Cuantificamos :

$$Re = \frac{\text{Efecto de las furezas de inercia}}{\text{Efecto de las fuerzas viscosas}}$$

$$Re = \frac{L * V}{\gamma} = \frac{\rho * L * V}{\mu}$$

Placa plana

$$Re = \frac{D * V}{\gamma} = \frac{\rho * D * V}{\mu}$$

Cañería

Para una cañería

$Re < 2000$  Régimen laminar

$Re > 4000$  Régimen turbulento

$2000 < Re < 4000$



# Cañerías de sección no circular

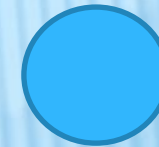
$$Dh = 4 * \frac{Ac}{Pm}$$

$$Rh = \frac{Ac}{Pm}$$

$$Dh = 4 * RH$$

Tubo circular.

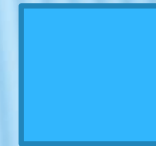
$$Dh = 4 * \frac{\pi * \frac{D^2}{4}}{\pi D} = D$$



D

Ducto cuadrado

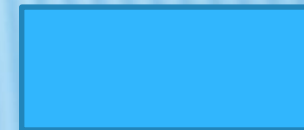
$$Dh = 4 * \frac{a^2}{4a} = a$$



a

Ducto rectangular

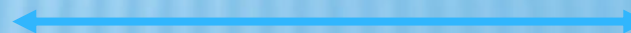
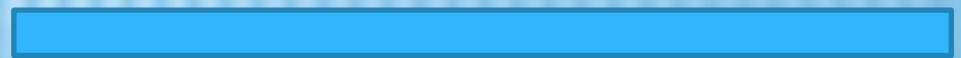
$$Dh = 4 * a * \frac{b}{2(a + b)} = \frac{2ab}{a + b}$$



a

b

Placa plana longitud  
característica

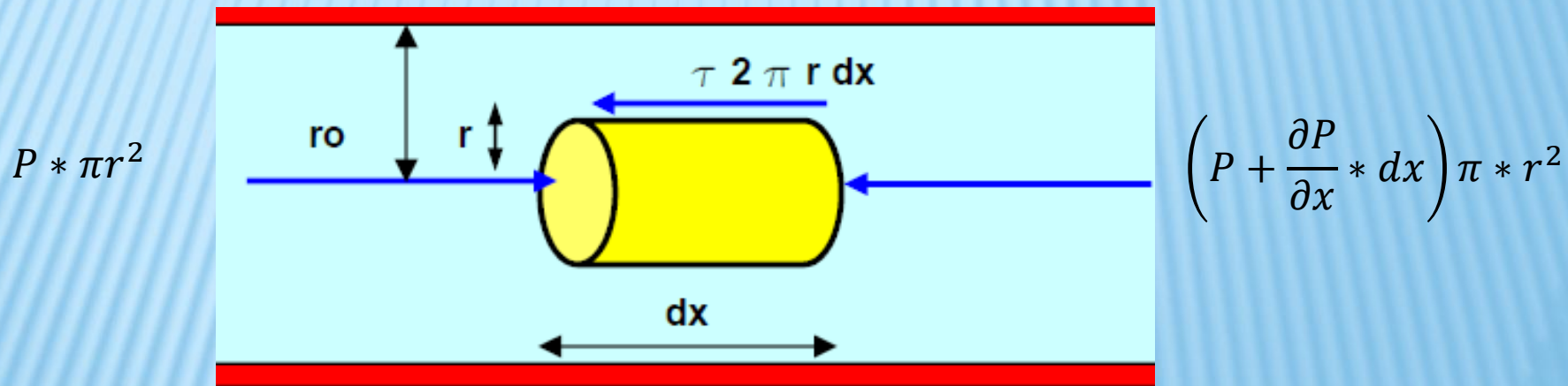


L

# CALCULO DE PERDIDAS EN RÉGMIEN LAMINAR

## ECUACION DE HAGEN POISEUILLE

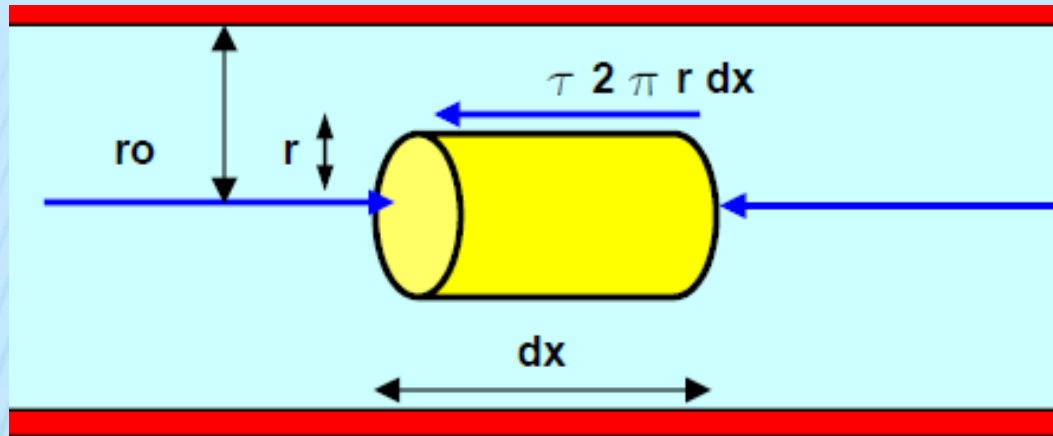
Se considera un flujo en una tubería de sección circular constante: en régimen laminar (permanente y uniforme) el fluido se mueve en capas que no se mezclan entre sí. La velocidad de desplazamiento de las capas interiores es máxima.



$$v = \text{cte} \longrightarrow a = 0 \longrightarrow \sum F_x = m * a = 0$$



$$P * \pi r^2$$



$$\left( P + \frac{\partial P}{\partial x} * dx \right) \pi * r^2$$

$$P * \pi r^2 - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} * dx \right) \pi * r^2 - \tau * 2\pi * r * dx = 0$$

$$P * \pi r^2 - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} * dx \right) \pi * r^2 = \tau * 2\pi * r * dx$$

$$-\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) * r = \tau * 2$$

$$\tau = -\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) * \frac{r}{2}$$

Distribución del esfuerzo de corte en función del radio

$$\tau = -\mu \left( \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} * \frac{r}{2}$$

$$dV = \frac{1}{2} * \frac{\partial P}{\partial x} * \frac{r}{\mu} * dr$$

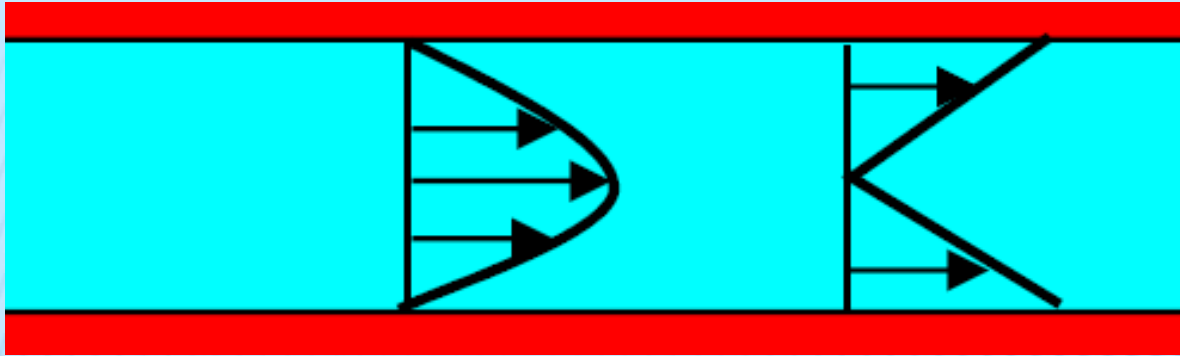
$$V = \frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * r^2 + C$$

$$V=0 \text{ para } r=r_o$$

$$C = -\frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * r_o^2$$

$$V = -\frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * (r_o^2 - r^2)$$

Distribución de velocidad  
parabólica



$$V = -\frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * (r_o^2 - r^2)$$

$$\tau = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) * \frac{r}{2}$$

$$V_{max} = -\frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * (r_o^2)$$

$$\tau_{max} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) * \frac{r_o}{2}$$

Para calcular la pérdida de carga se hace necesario determinar primero el caudal  
 Para calcular el caudal necesitamos una velocidad media que produzca el mismo efecto que la velocidad variable



Caudal = Vel. Media \* sección = Vel. Variable \* sección variable

$$V_m * \pi * r_o^2 = \int_0^{r_o} -\frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * (r_o^2 - r^2) * 2 * \pi * r * dr$$

$$V_m * \pi * r_o^2 = -\frac{\pi}{2\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} \int_0^{r_o} (r_o^2 - r^2) * r * dr$$

$$V_m * \pi * r_o^2 = -\frac{\pi}{2\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} \left( \frac{r_o^4}{2} - \frac{r_o^4}{4} \right) = -\frac{\pi}{8\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * r_o^4$$

$$V_m = -\frac{1}{8\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * r_o^2 = \frac{1}{2} V_{max} \quad V_{max} = -\frac{1}{4\mu} * \frac{\partial P}{\partial x} * (r_o^2)$$

Considerando

- Tubería circular,
- Flujo laminar
- La presión sólo varía en la dirección x

La derivada parcial se puede considerar total e integrar entre dos secciones

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -8 * \mu * \frac{V_m}{r_o^2} \int_0^L dx$$

$$P_1 - P_2 = \frac{8\mu V_m L}{r_o^2} = \frac{32\mu V_m L}{d_o^2}$$

Ecuación de Hagen -  
Poiseuille

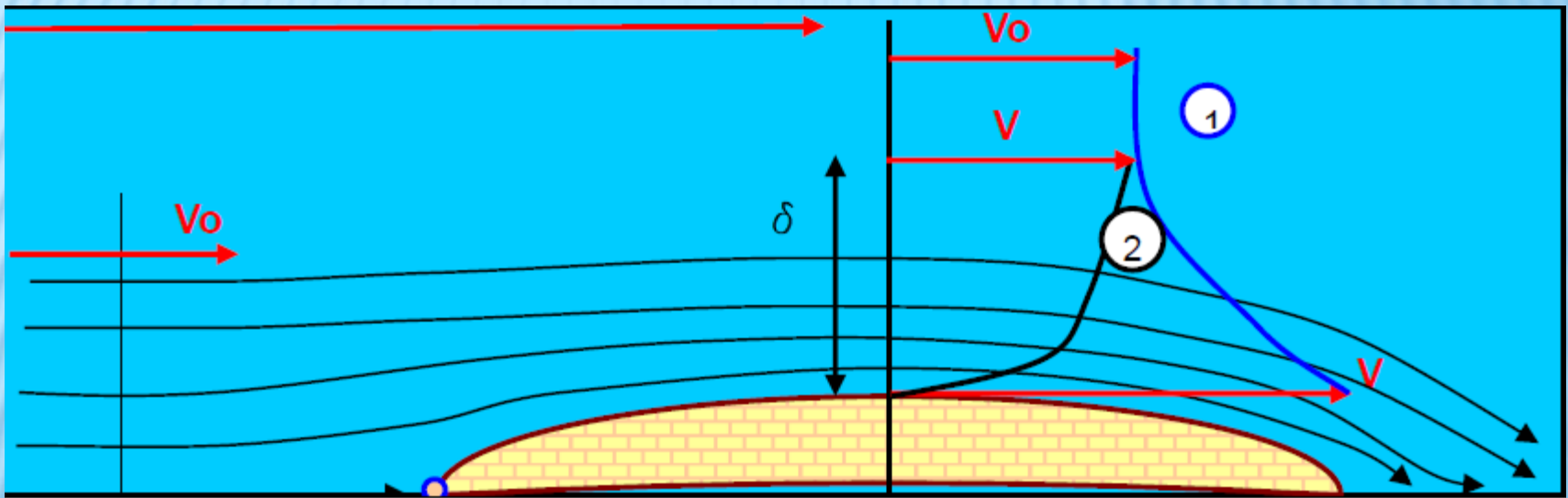
Se aplica a:

- Tubería circular
- Fluido viscoso
- Incompresible
- Newtoniano

## CAPA LIMITE

Es la zona donde se manifiesta la influencia de la viscosidad. La velocidad se ve afectada por las fuerzas cortantes

Suponiendo un fluido ideal y un objeto sumergido en la corriente

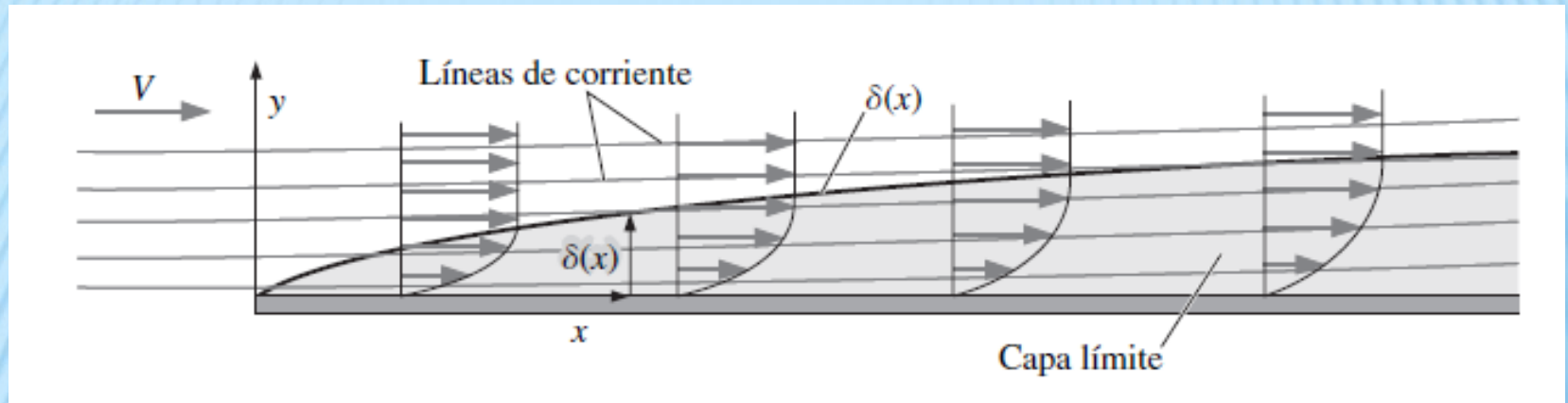


$$\frac{P_1}{\rho} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

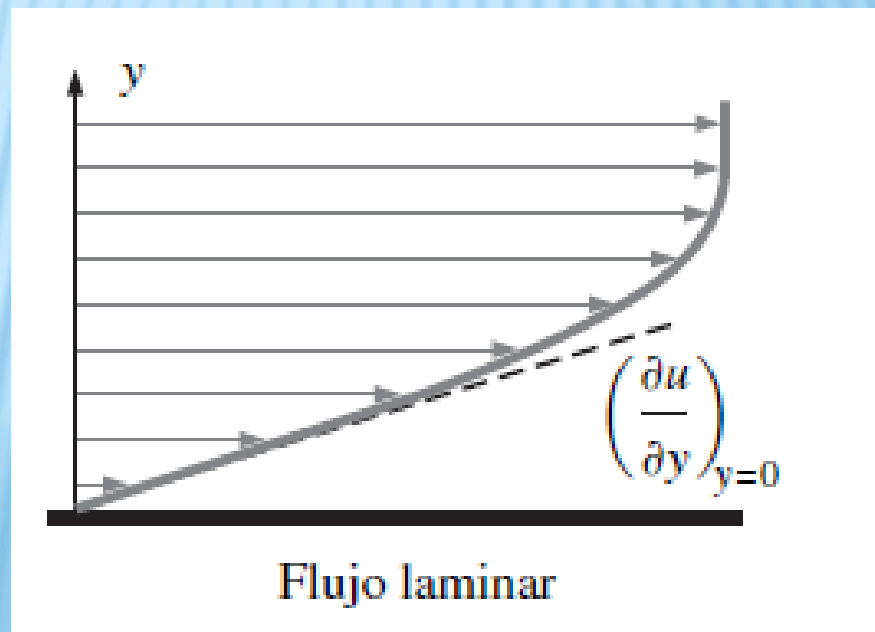
$$v = 0,99 * V_o$$



## PLACA PLANA (espesor despreciable)

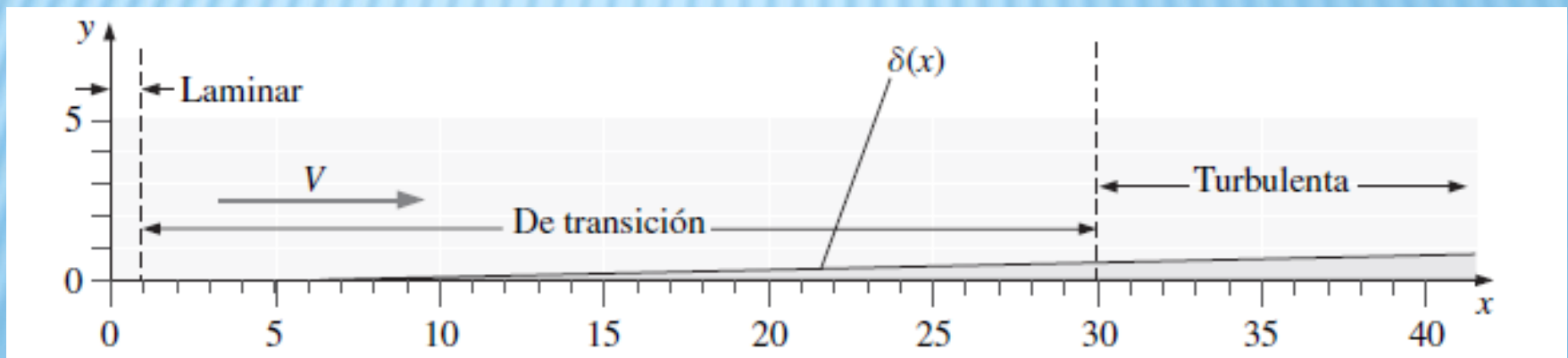
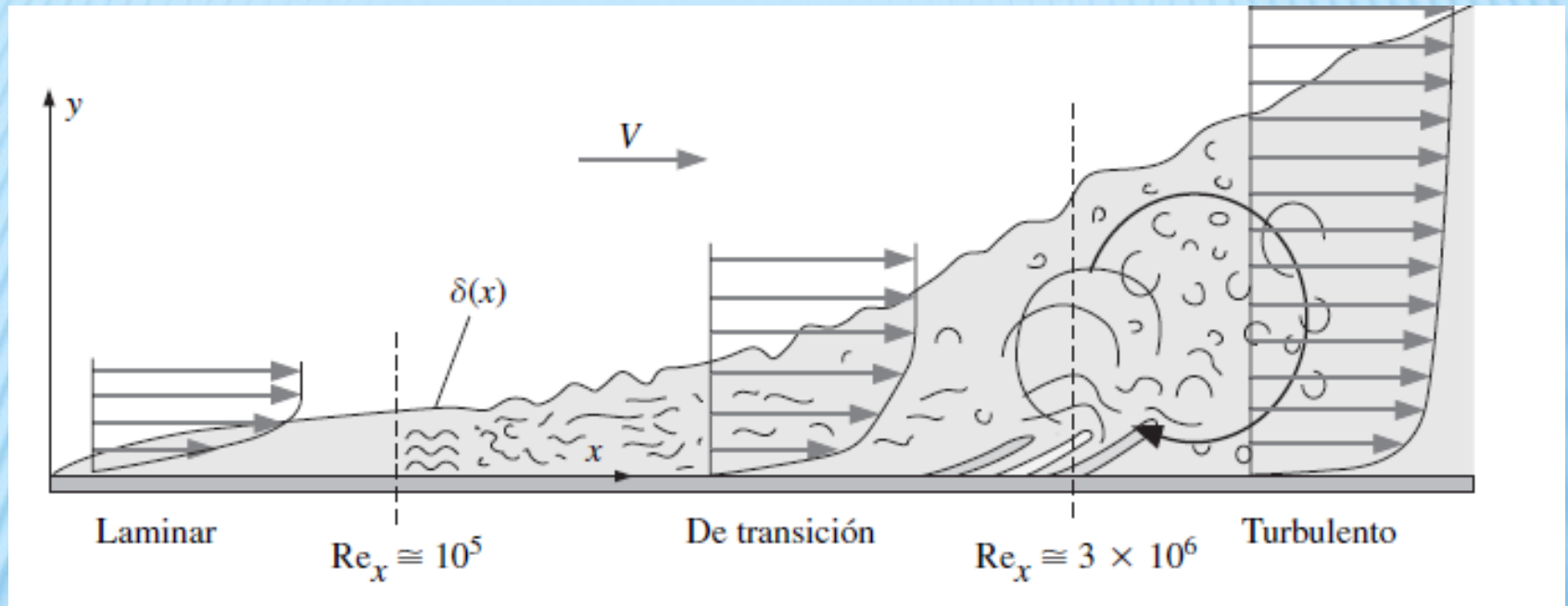


### Distribución de velocidad

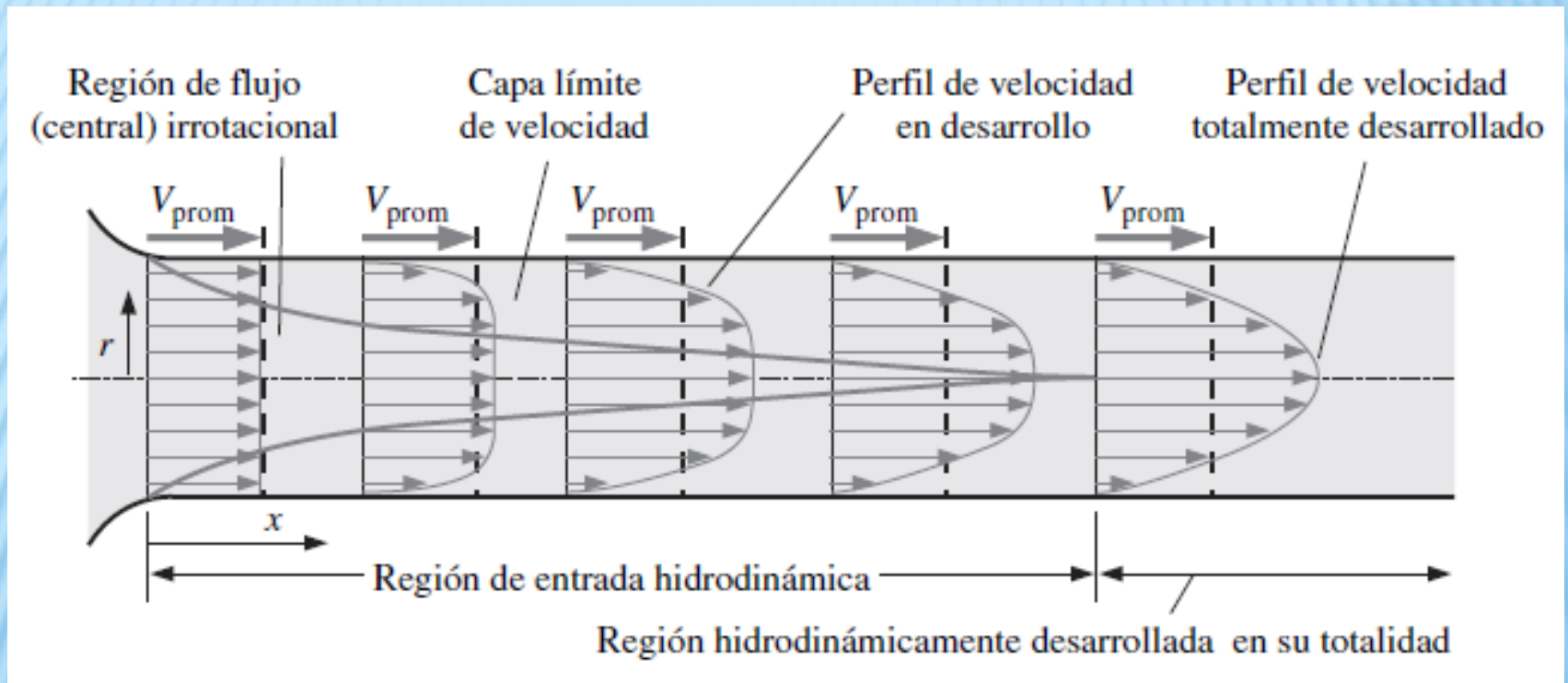


## PLACA PLANA

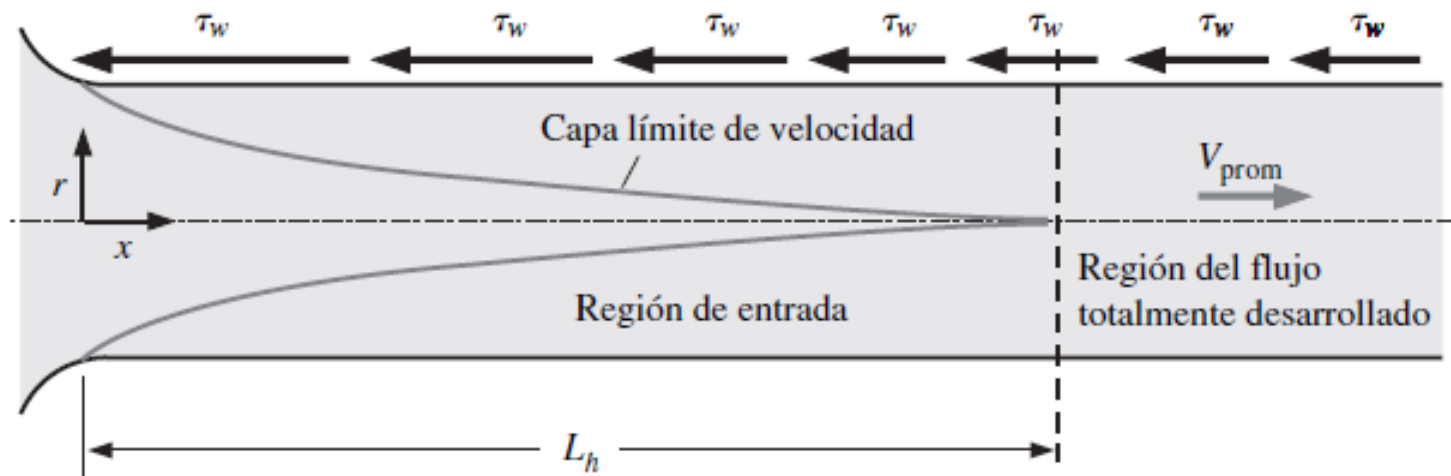
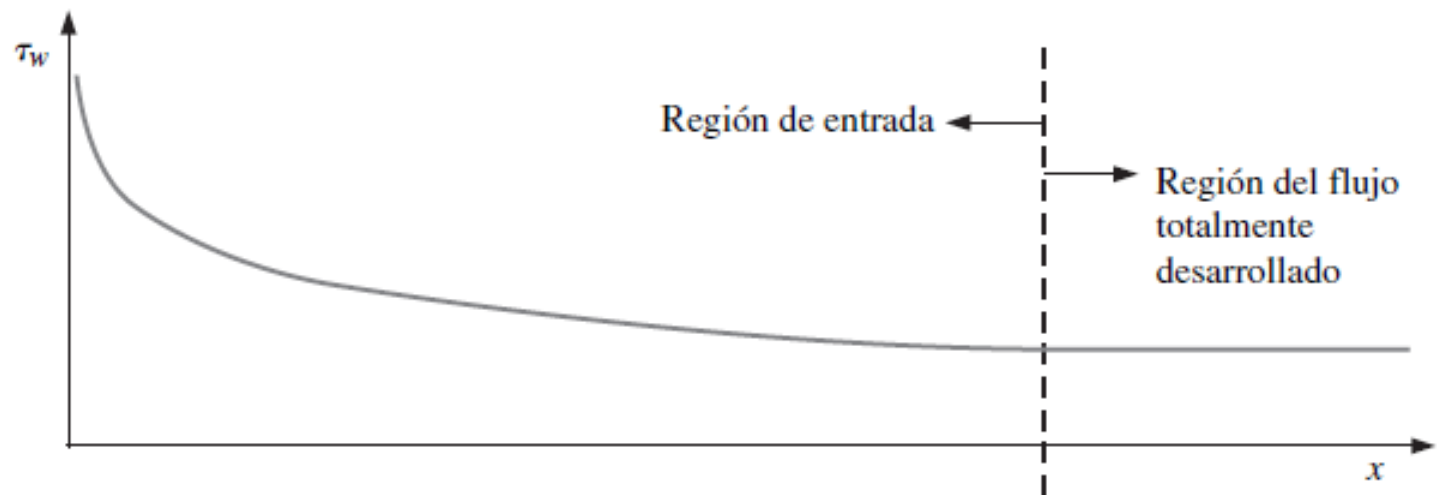
Al alejarnos Cómo sigue?

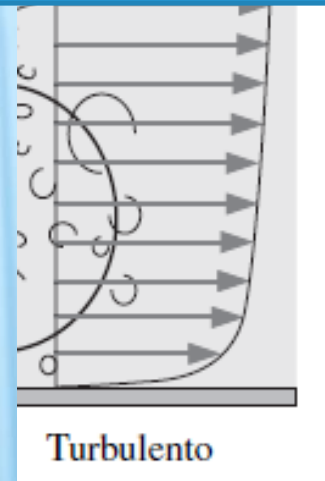
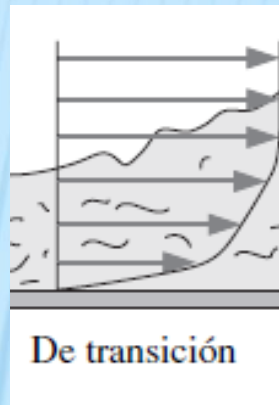
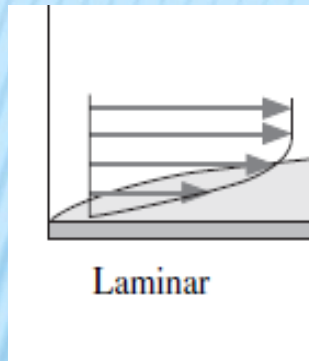
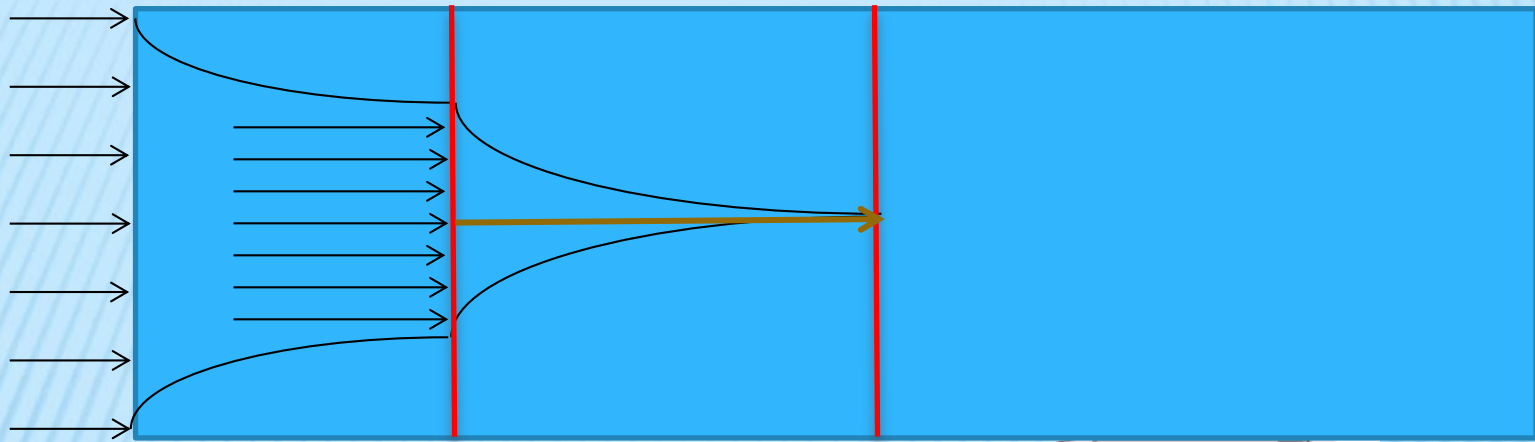


## ESTABLECIMIENTO DEL REGIMEN LAMINAR EN UNA CAÑERÍA









$$L_{h, \text{laminar}} \cong 0,05 * Re * D$$

$$L_{h, \text{turbulento}} \cong 1,359 * Re^{1/4}$$

- Se considera en esta región que el fluido se comporta como ideal.
- Es irrotacional
- A medida que se estrecha la sección se produce un aumento de la velocidad,

Esta región produce una pérdida. ¿Cómo se calcula?

$$\frac{P_1}{\rho} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} = + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

$V_1$ : velocidad media del fluido al ingresar =  $Q/A$

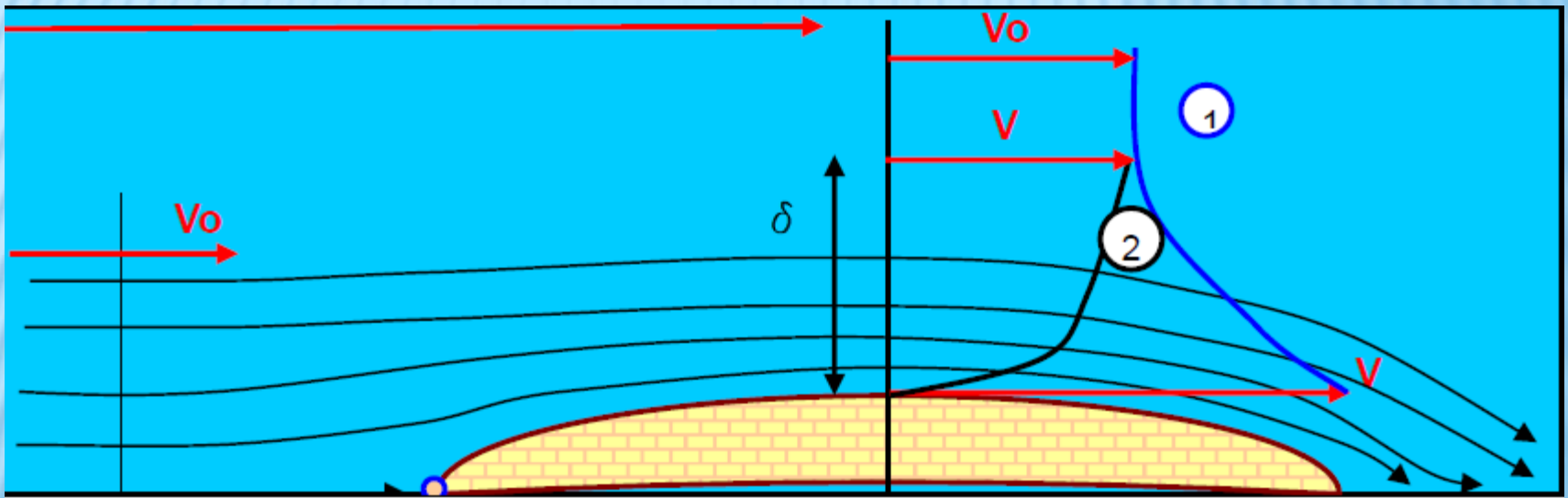
$V_2$ : es la velocidad máxima de la distribución de velocidades del fluido en el régimen que se considere

No se calcula la pérdida de la zona cuando  $L > 1000 D$

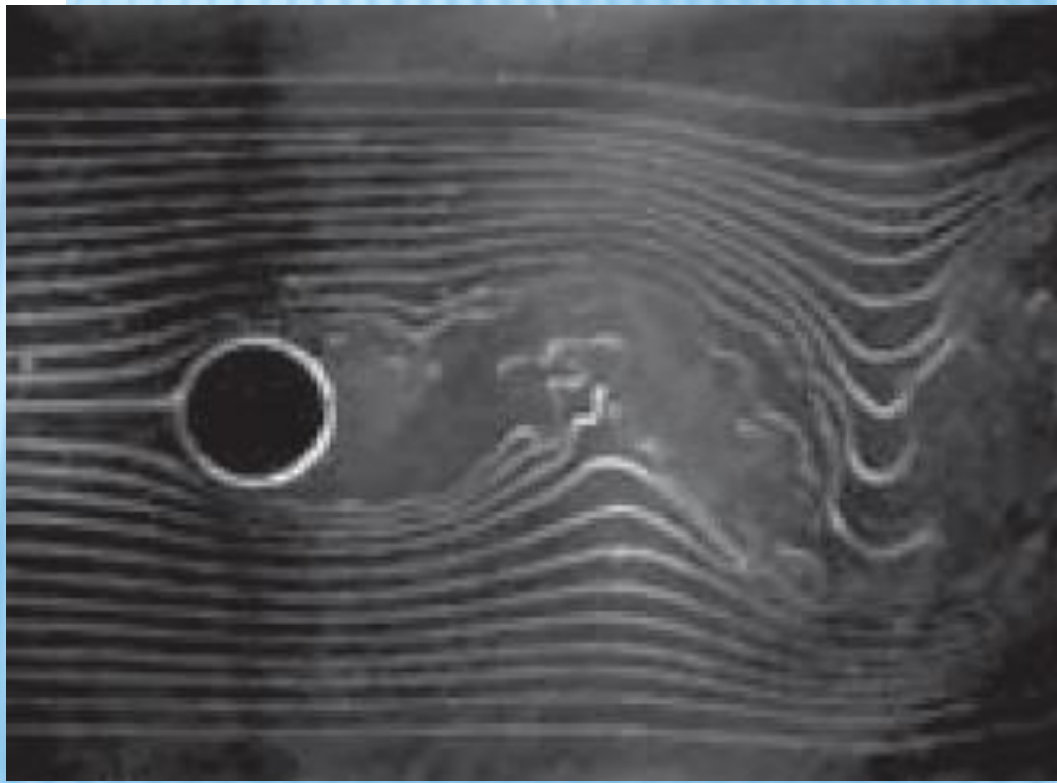
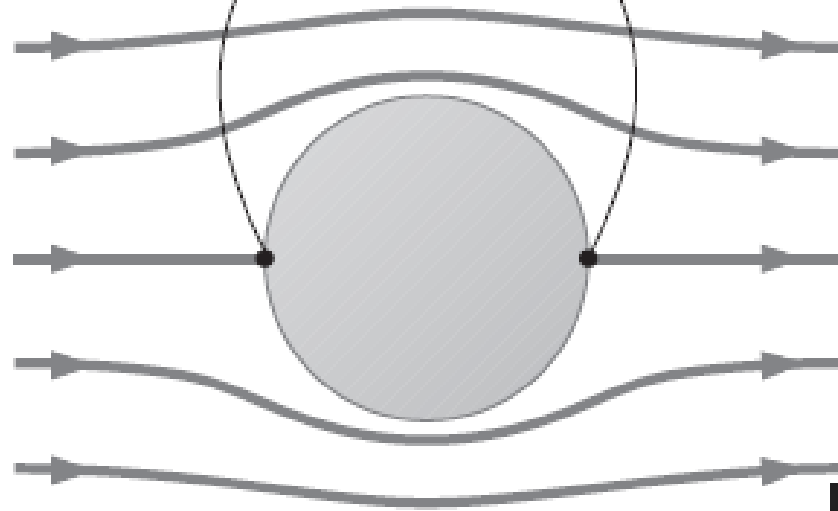


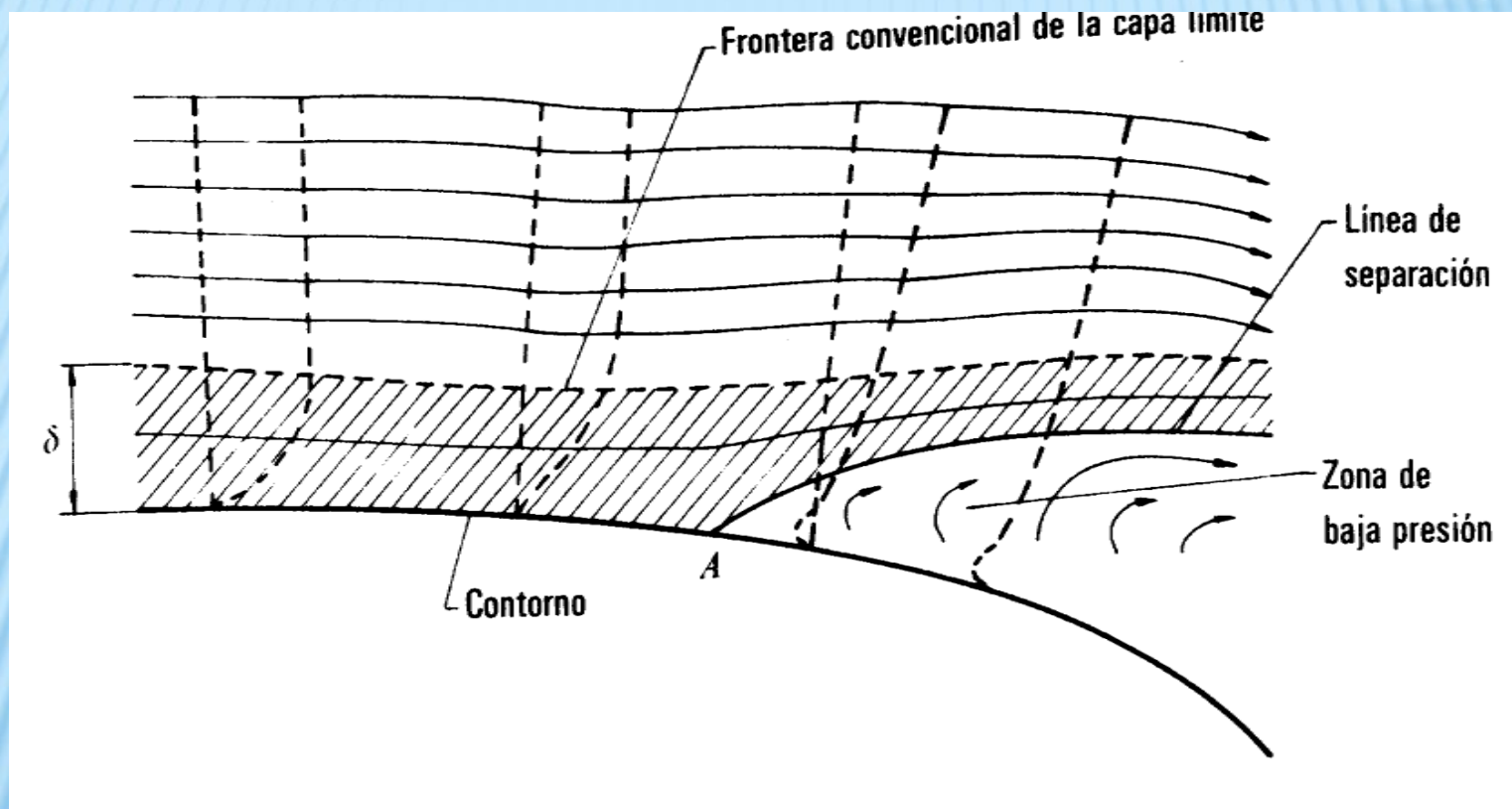
## Cuerpo con espesor apreciable

Suponiendo un fluido ideal y un objeto sumergido en la corriente



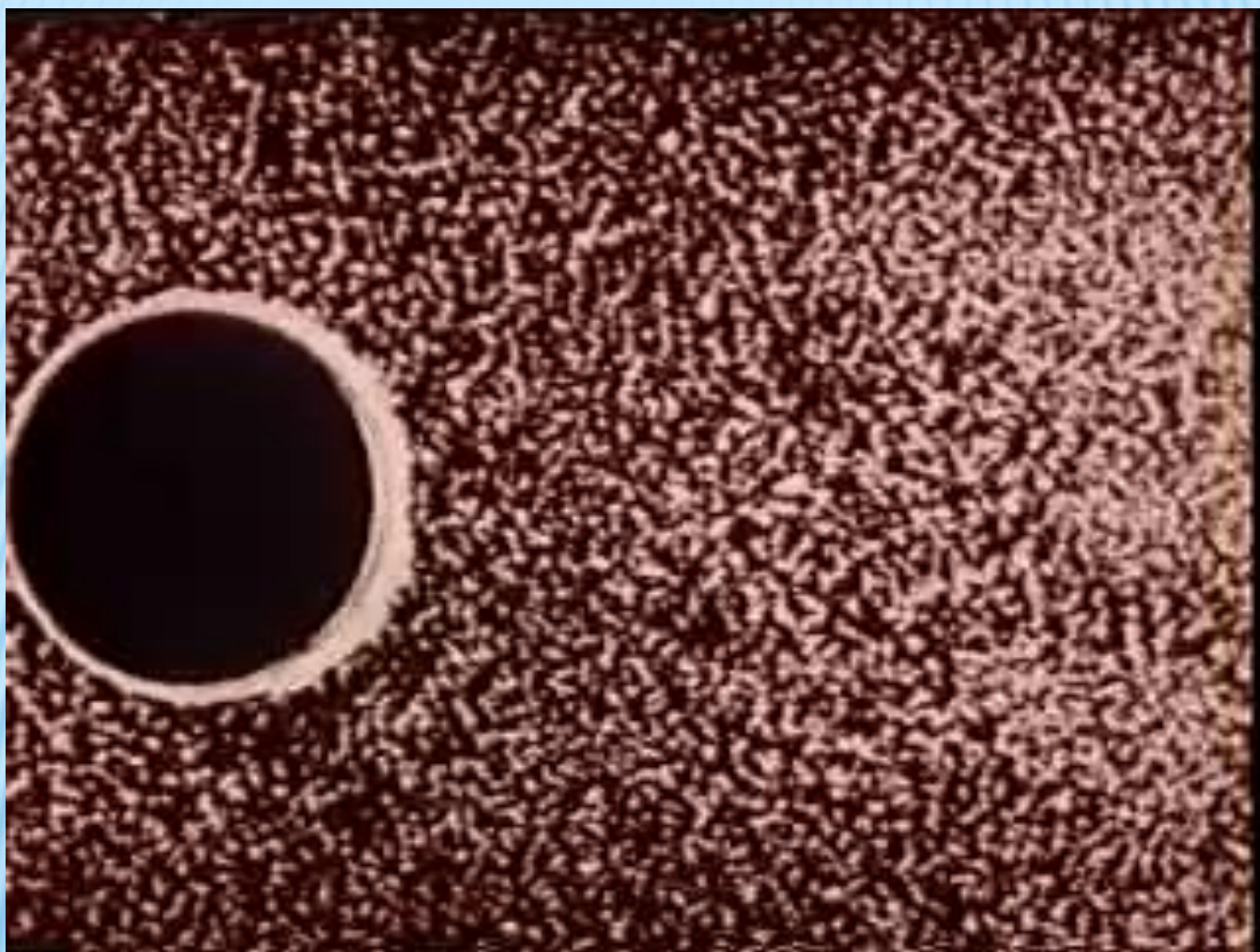
Puntos de  
estancamiento













## Efecto de la capa límite

La existencia de la capa límite produce una fuerza que se opone al movimiento que tiene dos orígenes

- 1- Existencia de la capa límite: Resistencia de superficie
- 2- Desprendimiento de la capa límite: Resistencia de forma

En general existen ambas, pero de acuerdo a las características del cuerpo y las propiedades del fluido puede predominar una sobre la otra o bien ambas son apreciables



## Efecto de la capa límite





## Efecto de la capa límite



## Efecto de la capa límite

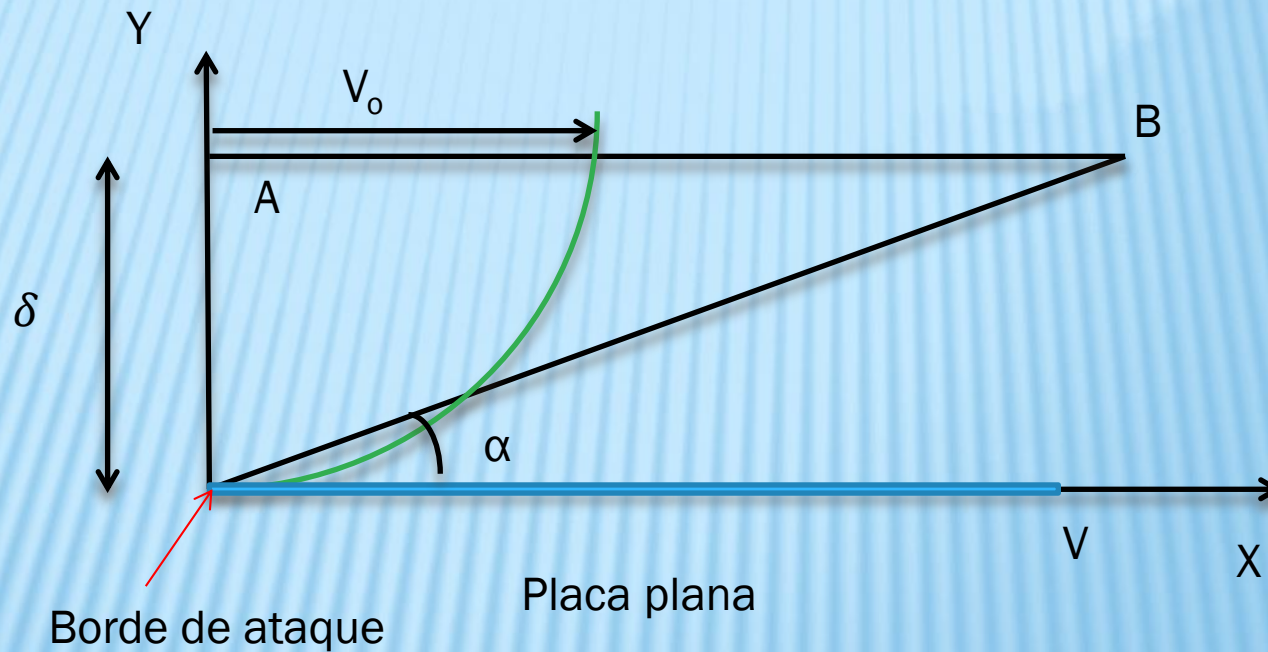




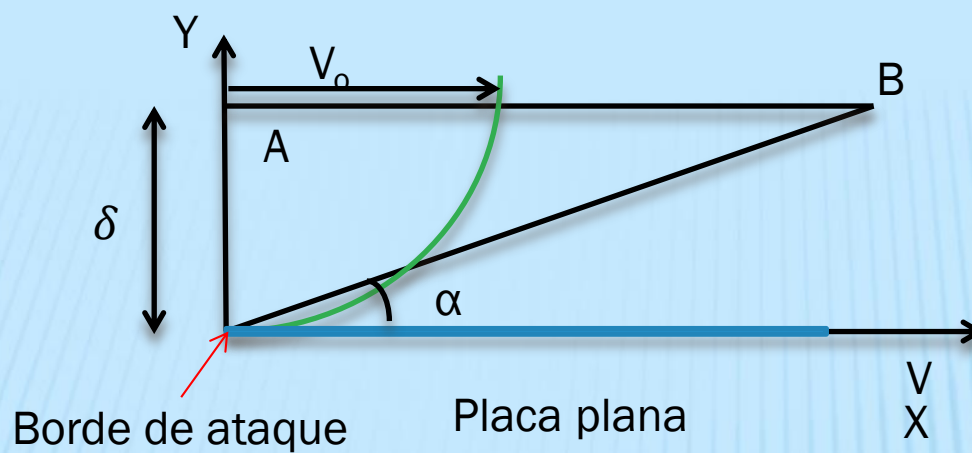
# RESISTENCIA SUPERFICIAL O DE ARRASTRE EN LA CAPA LIMITE

Considerando

- Placa plana
- Capa limite laminar: distribución parabólica



$$AB = CV_0 \longrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{CV_0}{\delta} \longrightarrow C = cte$$



$$\tau = \mu * \frac{dV}{dy} \longrightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{\tau}{\mu} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CV_0}{\delta}$$

$$\tau = \mu * \frac{CV_0}{\delta}$$

Considerando la distancia  $x$  desde el borde de ataque

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{V_0 \rho \frac{x}{\mu}}}$$

Según Prandtl

$$\longrightarrow \tau = \frac{\mu CV \sqrt{V_0 \frac{\rho x}{\mu}}}{5x}$$

Esfuerzo de corte  
junto a la placa

$$Re = \frac{V_0 \rho x}{\mu}$$

$x$  : longitud característica

Multiplicando y dividiendo por

$$\frac{\rho V_0^2}{2}$$

$$\tau = \frac{2C \rho V_0^2 / 2}{5 \sqrt{\frac{V_0 \rho x}{\mu}}}$$

$$\frac{\rho V_0^2}{2}$$

Sobrepresión dinámica

$$C_s = \frac{2C}{5 \sqrt{\frac{V_0 \rho x}{\mu}}}$$

Coficiente de resistencia de superficie local

$$\tau = \frac{C_s \rho V_0^2}{2}$$

$$Rs = \tau * A = C_s * A * \frac{\rho V_0^2}{2}$$

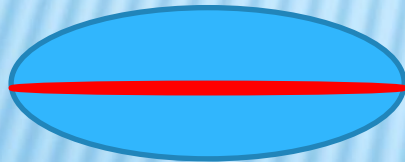
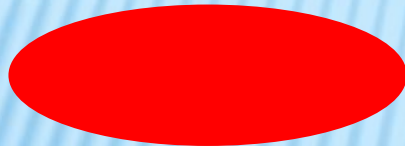
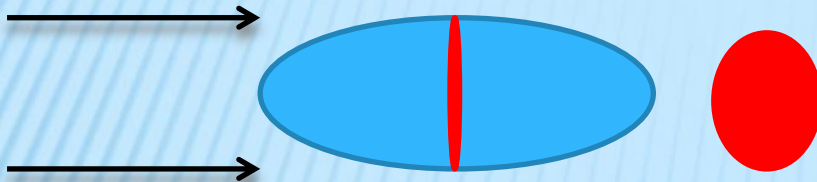
A = área bañada por el fluido



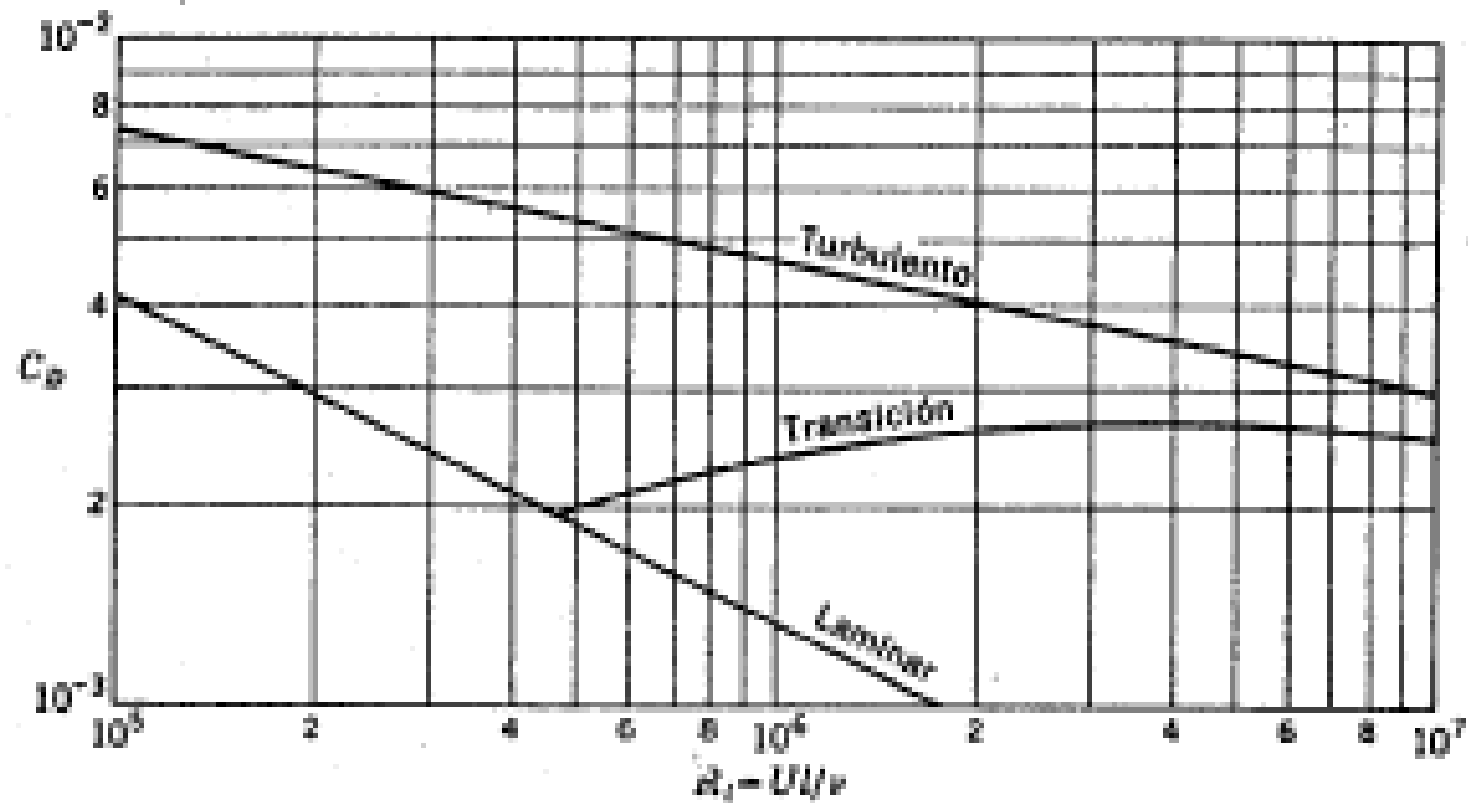
De forma similar

$$R_f = C_f * A * \frac{\rho V_0^2}{2}$$

A = área normal al flujo del fluido



	Forma de la carrocería	$C_D$ basado en el área frontal
1920		0.80
1940-45		0.54-0.58
1968-69		0.36-0.38
1990-92		0.29-0.30
Camión con remolque		0.75-0.95
Con cabina redondeada y carenado		0.55-0.75

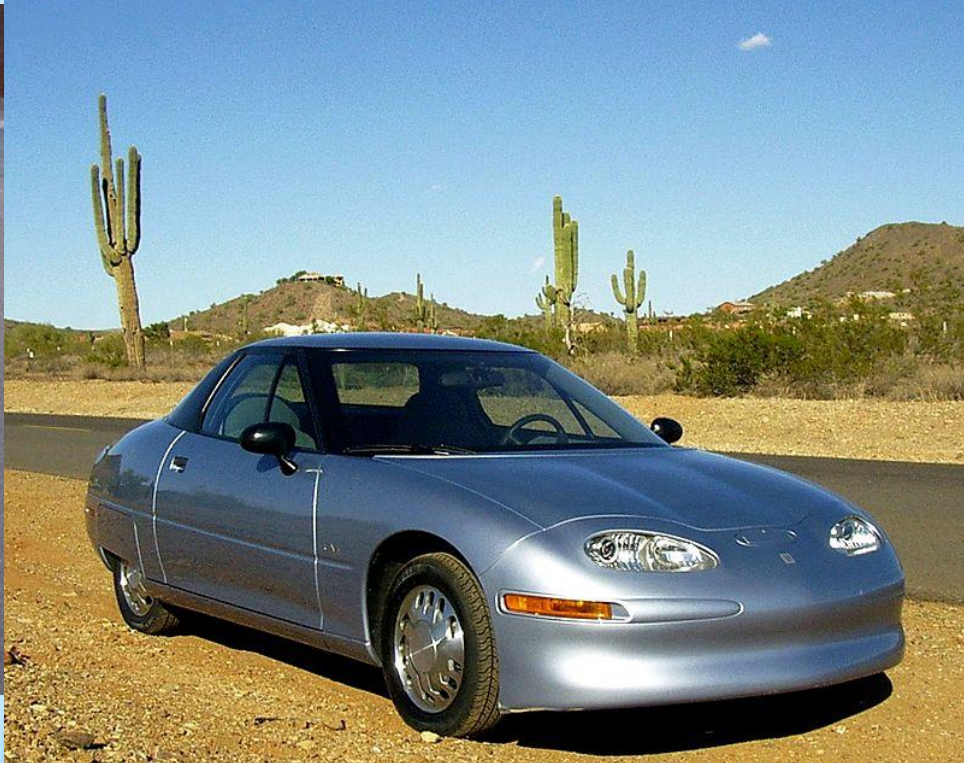


$$\text{Laminar } C_D = \frac{1.328}{\sqrt{R_1}}, \text{ transición } C_D = \frac{0.074}{R_1^{1/4}} - \frac{1.709}{R_1}, \text{ turbulento } C_D = \frac{0.074}{R_1^{1/2}}$$

$C_d$	Objeto
0.001	lámina plana paralela al flujo ( $Re < 10^5$ )
0.005	placa plana paralela al flujo ( $Re > 10^5$ )
0.075	<a href="#">Pac-car II</a>
0.1	Esfera lisa ( $Re = 10^6$ )
0.15	Schlörwagen 1939 <sup>14</sup>
0.186-0.189	<a href="#">Volkswagen XL1</a> 2014
0.19	<a href="#">General Motors EV1</a> 1996 <sup>15</sup>
0.25	<a href="#">Toyota Prius</a> (3.ª generación)
0.26	<a href="#">BMW i8</a>
0.28	<a href="#">Mercedes-Benz CLA-Class</a> Tipo C 117. <sup>16</sup>
0.295	bala (no <a href="#">ojiva</a> , a velocidad subsónica)
0.3	<a href="#">Audi 100</a> C3 (1982)
0.48	esfera rugosa ( $Re = 10^6$ ), <a href="#">Volkswagen Beetle</a> <sup>17 18</sup>
0.75	típico <a href="#">cohete de modelismo</a> <sup>19</sup>
.8-.9	Filtro de café viendo hacia arriba.



$C_d$	Objeto
1.0	<a href="#">Bicicleta de ruta</a> con ciclista en posición de ruta. <sup><a href="#">20</a></sup>
1.0–1.1	<a href="#">esquiador</a>
1.0–1.3	alambres
1.0–1.3	persona (de pie)
1.1–1.3	saltador de esquí <sup><a href="#">21</a></sup>
1.28	placa plana perpendicular al flujo (3D) <sup><a href="#">22</a></sup>
1.3–1.5	<a href="#">Edificio Empire State</a>
1.8–2.0	<a href="#">Torre Eiffel</a>
1.98–2.05	(placa plana perpendicular al flujo (2D))





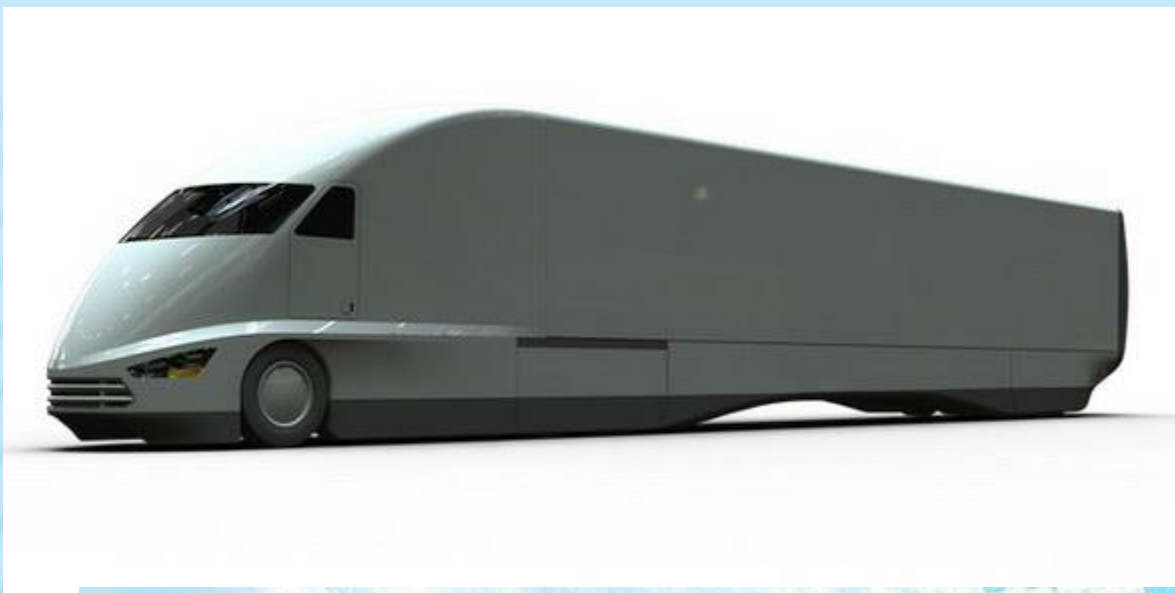














































Aeronave	
$c_d$	Tipo de aeronave
0.021	<a href="#">F-4 Phantom II</a> (subsónico)
0.022	<a href="#">Learjet 24</a>
0.024	<a href="#">Boeing 787<sup>24</sup></a>
0.027	<a href="#">Cessna 172/182</a>
0.027	<a href="#">Cessna 310</a>
0.031	<a href="#">Boeing 747</a>
0.044	F-4 Phantom II (supersónico)
0.048	<a href="#">F-104 Starfighter</a>
0.095	<a href="#">X-15</a> (No confirmado)

Forma del cuerpo			$C_D$	Número de Reynolds
Cilindro circular			1,2	$10^4$ a $1,5 \times 10^6$
Cilindro elíptico			0,6	$4 \times 10^4$
		2:1	0,46	$10^5$
			0,32	$2,5 \times 10^4$ a $10^5$
		4:1	0,29	$2,5 \times 10^4$
		8:1	0,20	$2 \times 10^5$
Prisma cuadrado			2,0	$3,5 \times 10^4$
Prisma triangular			1,6	$10^4$ a $10^5$
			2,0	$10^4$
			1,72	$10^4$
			2,15	$10^4$
			1,60	$10^4$
			2,20	$10^4$
			1,39	$10^4$
			1,8	$10^5$
			1,0	$10^5$
			1,0	$10^5$
Semitubo			2,3	$4 \times 10^4$
			1,12	$4 \times 10^4$

† Datos tomados de W. F. Lindsey, *NACA Tech. Rept.* 619, 1938.

# RUGOSIDAD. SUBCAPA LAMINAR

Aún en flujo turbulento siempre existe una delgada subcapa laminar junto a las paredes de la tubería.

Si esta subcapa cubre las rugosidades, la cañería se comportará como si fuera lisa y viceversa.

