

## Función de transferencia de un controlador PID

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

## Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia en una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que

**NOTA:** Por ejemplo si el sistema estará sometido a entradas que varíen de forma gradual con el tiempo, una señal de prueba adecuada será una rampa mientras que si el mismo estará sometido a cambios repentinos de la entrada tal vez una entrada escalón sea una entrada de prueba más adecuada, etc.

La **respuesta de un sistema de control es la suma de la respuesta estacionaria** (cuando el tiempo tiende a infinito) **y la respuesta transitoria** (la respuesta hasta que se alcanza el estado estacionario del sistema)

$$c(t) = c_{tr} + c_{ss}(t)$$

## Estabilidad absoluta, relativa y error estado estacionario

inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan de forma indefinida. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En realidad, la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitada por «detenciones» mecánicas, o el sistema puede colapsarse o volverse no lineal una vez que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales.

## Propiedad de los sistemas lineales e invariantes

Una comparación de las respuestas del sistema para estas tres entradas indica con claridad que la respuesta a la derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original. También se observa que la respuesta para la integral de la señal original se obtiene integrando la respuesta del sistema para la señal original y determinando las constantes de integración a partir de la condición inicial de salida cero. Esta es una propiedad de los siste-

**NOTA:** La respuesta del sistema a una entrada que es la derivada de otra puede obtenerse por derivación de la respuesta a esta última entrada.

## Definiciones de las especificaciones de la respuesta transitoria

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es una práctica común usar la condición inicial estándar de que el sistema está en reposo al inicio, por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad.

1. **Tiempo de retardo  $t_d$** : el tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.
2. **Tiempo de subida,  $t_r$** : el tiempo de subida es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para **sistemas subamortiguados de segundo orden**, por lo general se usa el tiempo de subida de **0 a 100%**. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.
3. **Tiempo pico,  $t_p$** : el tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongación.
4. **Sobreelongación máxima (porcentaje),  $M_p$** : la máxima sobreelongación es el máximo valor del pico de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estacionario de la respuesta es diferente de la unidad, es frecuente utilizar el **porcentaje de sobreelongación máxima**. Se define mediante

$$\text{Porcentaje de sobreelongación máxima} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobreelongación máxima (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

5. **Tiempo de asentamiento,  $t_s$** : El tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 o 5%). El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan qué criterio de error en porcentaje utilizar.

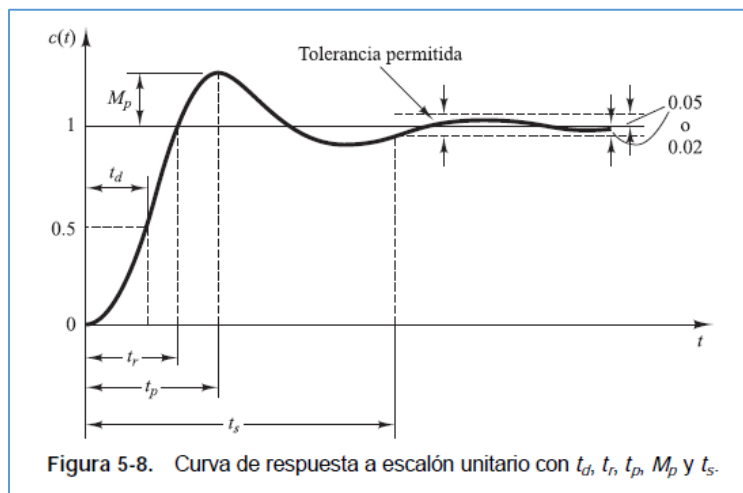


Figura 5-8. Curva de respuesta a escalón unitario con  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $M_p$  y  $t_s$ .

## Respuesta transitoria de un sistema de orden superior

Tenemos un sistema de control de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de orden superior

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Que puede expresarse como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

**NOTA:** La cual se considera que es una expresión racional impropia. Es decir con mayor orden del numerador que del denominador

Si todos los polos en lazo cerrado son reales y distintos, la forma de la respuesta en el plano complejo será:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}$$

**NOTA:** Donde el primer término corresponde al polo en lazo cerrado introducido por la entrada, que es el valor de referencia del lazo de control (considerado un escalón unitario)

**NOTA:** La repuesta del sistema puede aproximarse a partir de la respuesta de un sistema de orden inferior si se desprecian aquellos términos correspondientes a residuos de pequeño valor relativo (que son aquellos correspondiente a polos lejanos del origen y a polos que se encuentran cercanos a ceros-lo cual es cierto si se lo analiza un poco)

Si en cambio hay polos complejos conjugados y polos reales distintos tendremos

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (q + 2r = n)$$

**NOTA:**  $b_k$  y  $c_k$  son respectivamente el doble de la parte real y la parte imaginaria de los residuos (complejos conjugados) del par de polos complejos conjugados. Estos residuos son de la forma  $A_k = \frac{1}{2}(b_k - jc_k)$  (que corresponde al residuo del polo conjugado) para que la expresión indicada sea correcta. Por otro lado los polos complejos conjugados son de la forma  $p_k = \omega_k(\epsilon_k + j\sqrt{1 - \epsilon^2})$

Entonces la forma de la respuesta será:

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t, \quad \text{para } t \geq 0$$

**NOTA:** Lo cual es correcto, no hace falta demostrarlo

### Análisis de la estabilidad en el plano complejo

Un sistema será **estable absolutamente si todos sus polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo**. Es una propiedad del sistema (tal y como lo es la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control) y **no depende de la función de entrada al sistema**. En cambio los polos de la función de entrada no afectan a la estabilidad del sistema, **solo contribuyen a la respuesta en estado estacionario del sistema**

### Criterio de estabilidad de Routh

El criterio de estabilidad de Routh se aplica solamente **a ecuaciones polinomiales de coeficientes constantes reales con una cantidad finita de términos y permite determinar el número de raíces inestables** directamente a partir de los coeficientes de la ecuación.

1. Se expresa de la forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

**NOTA:** Se eliminan las raíces nulas  $a_n \neq 0$

2. Todo polinomio de coeficientes reales constantes puede factorizarse en términos de  $(s + a)$  y  $(s^2 + bs + c)$ . La primera forma corresponde a raíces reales y la segunda a raíces complejas conjugadas. **Si el sistema es estable absolutamente**, las raíces reales  $r$  serán negativas, las complejas conjugadas tendrán partes reales  $\sigma$  negativas y tendremos  $a = -r > 0$ ;  $b = -2\sigma > 0$ ;  $c = \rho^2 > 0$ . **Entonces** al desarrollar el producto de los factores **se obtiene un polinomio solo con coeficientes positivos**.

Lo contrario no es necesariamente cierto. Pero **es condición necesaria para la estabilidad absoluta que todos los coeficientes de la ecuación característica sean números positivos**. Si son todos negativos basta con multiplicar por -1

3. El arreglo es de la forma:

$s^n$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$\dots$	
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$\dots$	
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$s^2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$\dots$	
$s^1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$\dots$	
$s^0$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$\dots$	

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

**NOTA:** Es como el determinante de segundo orden pero cambiando los signos

**NOTA:** El array del arreglo de Routh es triangular. Se puede **multiplicar una fila completa por una constante positiva** (importante que sea positiva y es evidente que si se vale dado que es como multiplicar el determinante por esa constante positiva o sea que no cambia el signo) para simplificar el cálculo sin alterar las conclusiones de estabilidad.

**NOTA:** El número de cambio de signos en la primera columna indica el número de raíces con parte real positiva. Entonces todas las raíces están en el semi-plano izquierdo ssi todos los coeficientes de la ecuación polinómica son positivos y en la primera columna del arreglo todos los coeficientes son positivos.

#### Casos especiales

**Casos especiales.** Si el término de la primera columna de cualquier fila es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay términos restantes, el término cero se sustituye con un número positivo muy pequeño  $\varepsilon$  y se evalúa el resto del array. Por ejemplo, considérese la Ecuación

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \quad (5-62)$$

El array de coeficientes es

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Si el signo del coeficiente que está encima del cero ( $\varepsilon$ ) es el mismo que el signo que está debajo de él, quiere decir que hay un par de raíces imaginarias. En realidad, la Ecuación (5-62) tiene dos raíces en  $s = \pm j$ .

Sin embargo, si el signo del coeficiente que está encima del cero ( $\varepsilon$ ) es opuesto al del que está debajo, quiere decir que hay un cambio de signo. Por ejemplo, para la ecuación

**NOTA:** Observar que signos opuestos de los números por encima y por debajo de  $\varepsilon$  se toma como un solo cambio de signo (una raíz con parte real positiva). Cuando no hay cambio de signo se toman como raíces imaginarias conjugadas.

- Cuando una **fila del arreglo está formada solo por ceros** esto indica la existencia de pares de **raíces de igual magnitud y radialmente opuestas en el plano s**. Para continuar con la evaluación del arreglo debe considerarse los coeficientes de la fila anterior para formar un **polinomio auxiliar** el que luego se **deriva** para obtener los coeficientes de la fila nula (los que se reemplazan por los obtenidos)

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

$s^5$	1	24	-25	
$s^4$	2	48	-50	← Polinomio auxiliar $P(s)$
$s^3$	0	0		

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

$s^5$	1	24	-25	
$s^4$	2	48	-50	
$s^3$	8	96		← Coeficientes de $dP(s)/ds$
$s^2$	24	-50		
$s^1$	112.7	0		
$s^0$	-50			

Se observa que hay un cambio de signo en la primera columna del array nuevo. Por tanto, la ecuación original tiene una raíz con una parte real positiva. Despejando las raíces de la ecuación del polinomio auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

se obtiene

$$s^2 = 1, \quad s^2 = -25$$

o bien

$$s = \pm 1, \quad s = \pm j5$$

**NOTA:** Observar cómo se pueden obtener las raíces del polinomio auxiliar directamente.

### Estabilidad relativa

$$s = \hat{s} - \sigma \quad (\sigma = \text{constante})$$

**NOTA:** A partir de esta transformación de coordenadas y la utilización del criterio se puede determinar la **cantidad de raíces a la derecha del eje imaginario del sistema transformado**.



## Construcción de los lugares de raíces

1. *Situar los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  en el plano  $s$ . Las ramas del lugar de las raíces empiezan en los polos en lazo abierto y terminan en los ceros (ceros finitos o ceros en infinito). A partir de la forma factorizada de la función de transferencia en lazo abierto, sitúense los polos*

**NOTA:** Además los lugares de raíces son simétricos respecto del eje real

2. *Determinar los lugares de las raíces sobre el eje real.*

**NOTA:** Se elige un punto de prueba sobre el mismo y se tienen en cuenta solamente los polos y ceros reales en lazo abierto dado que **los complejos conjugados no afectan al lugar de raíces en el eje real**. Cuando se cuenta a la derecha si la cantidad de polos y ceros es par o impar hay que contar a los ceros y polos repetidos tantas veces como su multiplicidad. Si la cantidad a la derecha del punto de prueba es impar entonces el punto **forma parte del lugar de raíces** y no forma parte en caso contrario

3. *Determinar las asíntotas de los lugares de las raíces.*

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{n - m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

**NOTA:** Donde  $n$  es el número de polos en lazo abierto y  $m$  es el número de ceros en lazo abierto finitos

El punto de intersección de las asíntotas se obtiene como

$$s = - \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m}$$

Es importante señalar que las asíntotas muestran el comportamiento de los lugares de las raíces para  $|s| \gg 1$ . Una ramificación del lugar de las raíces puede encontrarse en un lado de la asíntota correspondiente o puede atravesar esta de un lado al otro.

4. *Encontrar los puntos de ruptura y de ingreso.*

Si un lugar de las raíces se encuentra entre dos polos en lazo abierto adyacentes sobre el eje real, existe al menos un punto de ruptura entre dichos dos polos. Asimismo, si el lugar de las raíces está entre dos ceros adyacentes (un cero puede localizarse en  $-\infty$ ) sobre el eje real, siempre existe al menos un punto de ingreso entre los dos ceros. Si el lugar de las raíces se encuentra entre un polo en lazo abierto y un cero (finito o infinito) sobre el eje real, pueden no existir puntos de ruptura o de ingreso, o bien pueden existir ambos.

$$\frac{dK}{ds} = - \frac{B(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0$$

**NOTA:** Las raíces obtenidas serán puntos de ruptura si corresponden si se encuentran en el lugar de raíces y los valores de  $K$  correspondientes son positivos.

5. *Determinar el ángulo de salida (ángulo de llegada) de un lugar de las raíces a partir de un polo complejo (un cero complejo).* Para dibujar los lugares de las raíces con una precisión

Ángulo de salida desde un polo complejo =  $180^\circ$

– (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde otros polos)

+ (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde los ceros)

Ángulo de llegada a un cero complejo =  $180^\circ$

– (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde otros ceros)

+ (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde los polos)

6. *Encontrar los puntos donde los lugares de las raíces cruzan el eje imaginario.*

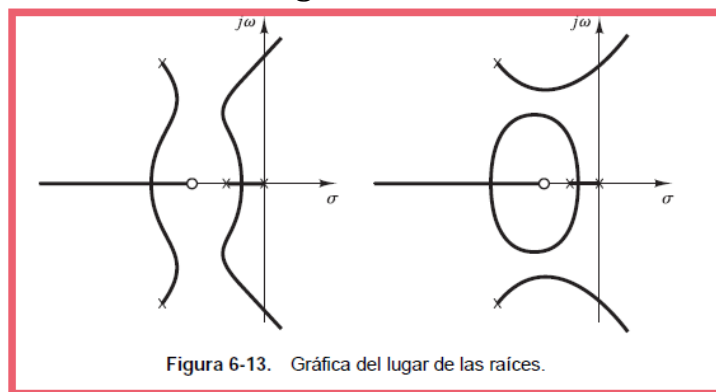
**NOTA:** Esto se hace por sustitución directa o por criterio de Routh

7. *Tomando una serie de puntos de prueba en la cercanía del origen del plano  $s$ , dibujar los lugares de las raíces.* Determinéense los lugares de las raíces en la cercanía del eje  $j\omega$  y el

8. *Determinar los polos en lazo cerrado.* Un punto específico de cada ramificación del lugar de las raíces será un polo en lazo cerrado si el valor de  $K$  en dicho punto satisface la condición de magnitud. Por otra parte, la condición de magnitud permite determinar el valor de la

$$K = \frac{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los polos}}{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los ceros}}$$

### Consideraciones acerca de los lugares de raíces

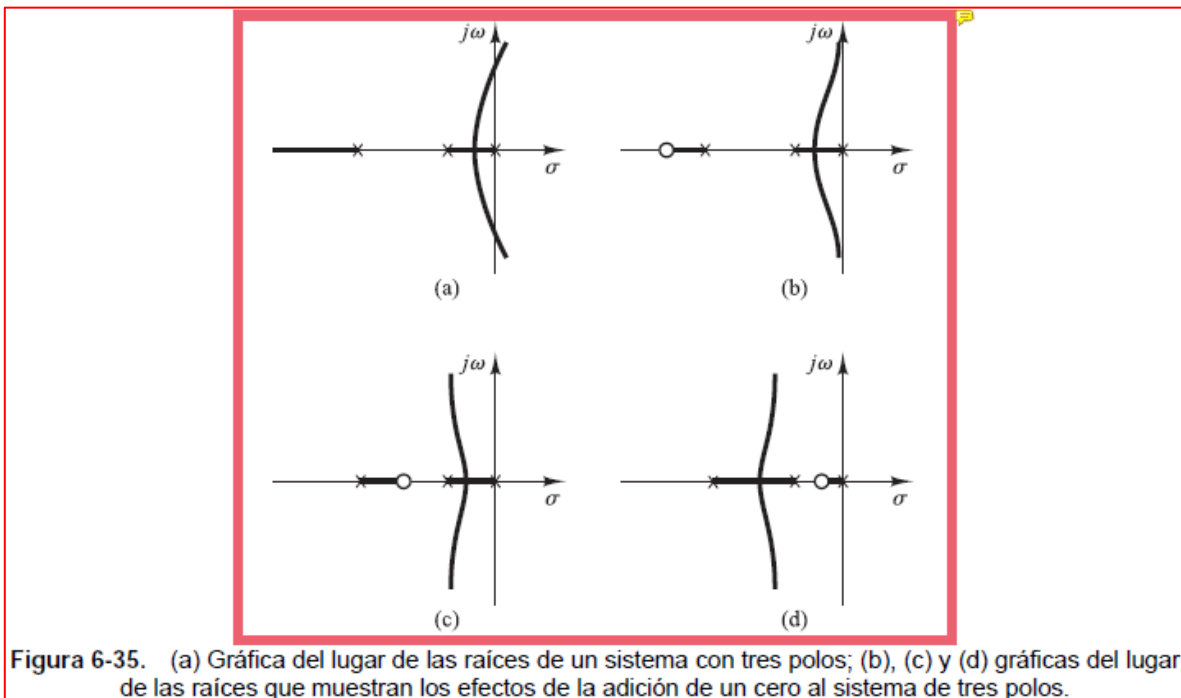


**NOTA:** Un pequeño cambio en la configuración de los polos y ceros en lazo abierto comporta un rotundo cambio en la forma de los lugares de raíces

to. Si el número de polos en lazo abierto es mayor que el número de ceros finitos en tres o más, existe un valor de la ganancia  $K$  más allá del cual los lugares de las raíces entran en el semiplano derecho del plano  $s$  y, por tanto, el sistema puede volverse inestable. Un sistema estable debe tener todos sus polos en lazo cerrado en el semiplano izquierdo del plano  $s$ .



**NOTA:** Esto es evidente dado que la división de polinomios da como resultado un polinomio neto en el denominador de grado mayor o igual a 3 y por lo tanto a una ecuación característica polinomial de grado 3 o más (función de transferencia a lazo cerrado de orden 3 o más). En cambio sabemos que un sistema de orden 2 es siempre estable (para todo  $K$ ) (por criterio de Routh cuando todos los coeficientes son positivos). En realidad la interpretación viene dada por el ángulo de las asíntotas (el comportamiento cuando  $s \rightarrow \infty$ , que no cortarían el eje imaginario cuando la cantidad de polos en lazo abierto sea mayor al número de ceros en lazo abierto en un número menor a 3)



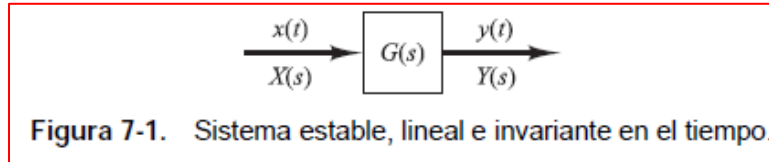
**Figura 6-35.** (a) Gráfica del lugar de las raíces de un sistema con tres polos; (b), (c) y (d) gráficas del lugar de las raíces que muestran los efectos de la adición de un cero al sistema de tres polos.

**NOTA:** La adición de polos a la función de transferencia de lazo abierto tiene por efecto el desplazamiento de la gráfica del lugar de raíces a la derecha (disminuye la estabilidad relativa) y el agregado de ceros tiene el efecto contrario, es decir que desplaza el lugar de raíces a la izquierda (aumenta la estabilidad relativa)

## Respuesta en frecuencia

Con el término respuesta en frecuencia, se quiere hacer referencia a la respuesta de un sistema en estado estacionario a una entrada sinusoidal. En los métodos de respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se varía en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

Consideramos el siguiente sistema el que se somete a una entrada sinusoidal de amplitud  $X$  y una frecuencia  $\omega$



La respuesta en estado estacionario de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales (por tanto, se puede suponer que las condiciones iniciales son cero). Si  $Y(s)$  tiene únicamente polos distintos (simples), el desarrollo de la Ecuación (7-1) en fracciones parciales queda

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \underbrace{\frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega}}_{\text{azules}} + \underbrace{\frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n}}_{\text{rojo}}$$

**NOTA:** Los términos en **rojo** corresponden a la **entrada sinusoidal** y los **azules** corresponden a la **función de transferencia**. Estos últimos generan términos exponenciales decrecientes (por ser un sistema estable) en la respuesta en el tiempo el sistema:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \dots + b_ne^{-s_nt} \quad (t \geq 0)$$

**NOTA:** Aun cuando hubiese polos repetidos de la función de transferencia, como se trata de un sistema estable, los términos que generan tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Luego la respuesta en estado estacionario vendrá dada como:

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

Donde:

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s = j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Dado que  $G(j\omega)$  es un número complejo, puede expresarse de la forma:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

Luego los residuos pueden expresarse como:

$$a = \frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

Y luego la respuesta en estado estacionario vendrá dada como:

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= X|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ &= Y \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

**NOTA:** Observe que  $Y$  denota la amplitud de la salida en estado estacionario y la relación de amplitudes viene dada por  $|G(j\omega)|$

Obtenemos que:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \text{Cociente de amplitud entre las señales sinusoidales de salida y de entrada} \\ \angle G(j\omega) &= \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \text{Desplazamiento de fase de la señal sinusoidal de salida con respecto a la de entrada} \end{aligned}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

**NOTA:** Cuando el ángulo de fase es positivo se trata de una red de adelante mientras que cuando el ángulo es negativo se trata de una red de retardo.

**Diagramas de Bode o diagramas logarítmicos.** Un diagrama de Bode está formado por dos gráficas: una es la gráfica del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia sinusoidal, y la otra es la gráfica del ángulo de fase; ambas se dibujan contra la frecuencia en escala logarítmica.

La representación común de la magnitud logarítmica de  $G(j\omega)$  es  $20 \log |G(j\omega)|$ , donde la base del logaritmo es 10. La unidad utilizada en esta representación para la magnitud es el decibelio, por lo general abreviado dB. En la representación logarítmica, se dibujan las curvas sobre papel semilogarítmico, con la escala logarítmica para la frecuencia y la escala lineal para cualquier magnitud (en decibelios) o el ángulo de fase (en grados). (El rango de frecuencia de interés determina el número de ciclos logarítmicos que se requieren en la abscisa.)

**Factores básicos de  $G(j\omega)H(j\omega)$ .** Como se planteó anteriormente, la ventaja principal de utilizar un diagrama logarítmico es la facilidad relativa de dibujar las curvas de la respuesta en frecuencia. Los factores básicos que suele presentar una función de transferencia arbitraria  $G(j\omega)H(j\omega)$  son:

1. La ganancia  $K$
2. Los factores integrales y derivativos  $(j\omega)^{\mp 1}$
3. Los factores de primer orden  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
4. Los factores cuadráticos  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

Cuando los diagramas logarítmicos de estos factores básicos resulten familiares, es posible utilizarlos con el fin de construir un diagrama logarítmico para cualquier forma de  $G(j\omega)H(j\omega)$  dibujando las curvas para cada factor y agregando curvas individuales de forma gráfica, ya que agregar los logaritmos de las ganancias corresponde a multiplicarlos entre sí.

**La ganancia  $K$ .** Un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibelios, mientras que un número menor que la unidad tiene un valor negativo. La curva de magnitud logarítmica para una ganancia constante  $K$  es una recta horizontal cuya magnitud es de  $20 \log K$  decibelios. El ángulo de fase de la ganancia  $K$  es cero. El efecto de variar la ganancia  $K$  en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta a la curva de fase.

**Factores integrales y derivativos  $(j\omega)^{\mp 1}$ .** La magnitud logarítmica de  $1/j\omega$  en decibelios es

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de  $1/j\omega$  es constante e igual a  $-90^\circ$ .

En los diagramas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de **octavas o décadas**. Una **octava** es una banda de frecuencia de  $\omega_1$  a  $2\omega_1$ , donde  $\omega_1$  es cualquier frecuencia. Una **década** es una **banda de frecuencia** de  $\omega_1$  a  $10\omega_1$ , donde, otra vez,  $\omega_1$  es cualquier frecuencia. (En la escala logarítmica del papel semilogarítmico, cualquier razón de frecuencia determinada se representa mediante la misma distancia horizontal. Por ejemplo, la distancia horizontal de  $\omega = 1$  a  $\omega = 10$  es igual a la de  $\omega = 3$  a  $\omega = 30$ .)

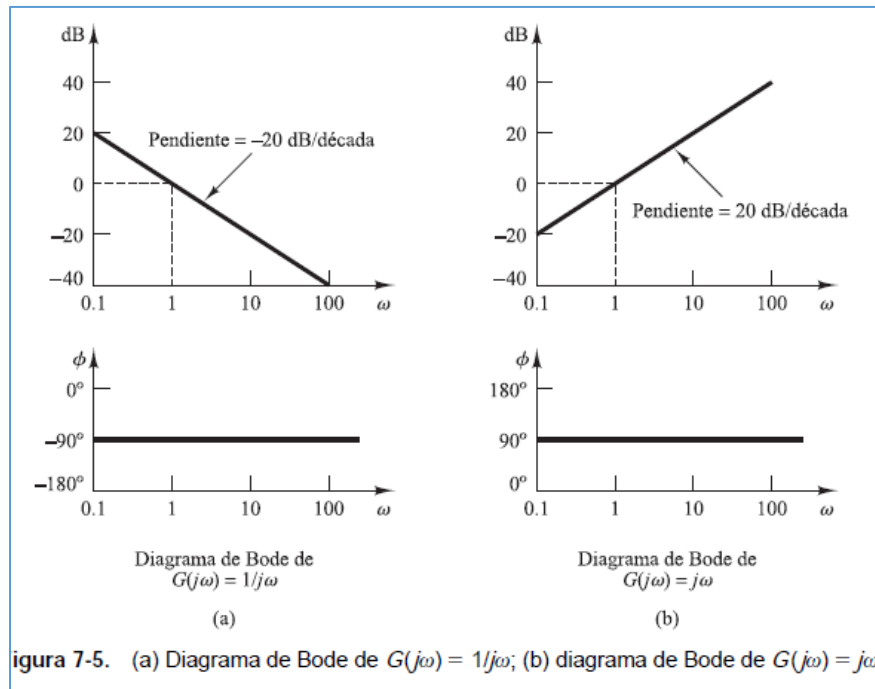
Si la función de transferencia contiene el factor  $(1/j\omega)^n$  o  $(j\omega)^n$ , la magnitud logarítmica se convierte, respectivamente, en

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

o bien

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ dB}$$

Por tanto, las **pendientes** de las curvas de magnitud logarítmica para los factores  $(1/j\omega)^n$  y  $(j\omega)^n$  son  **$-20n$  dB/década** y  **$20n$  dB/década**, respectivamente. El **ángulo de fase** de  $(1/j\omega)^n$  es igual a  **$-90^\circ \times n$**  durante todo el rango de frecuencia, mientras que el de  $(j\omega)^n$  es igual a  **$90^\circ \times n$**  en todo el rango de frecuencia. **Las curvas de magnitud pasarán por el punto (0 dB,  $\omega = 1$ ).**



**Factores de primer orden  $(1 + j\omega T)^{-1}$ .** La magnitud logarítmica del factor de primer orden  $1/(1 + j\omega T)$  es

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Para bajas frecuencias, tales que  $\omega \ll 1/T$ , la magnitud logarítmica se aproxima mediante

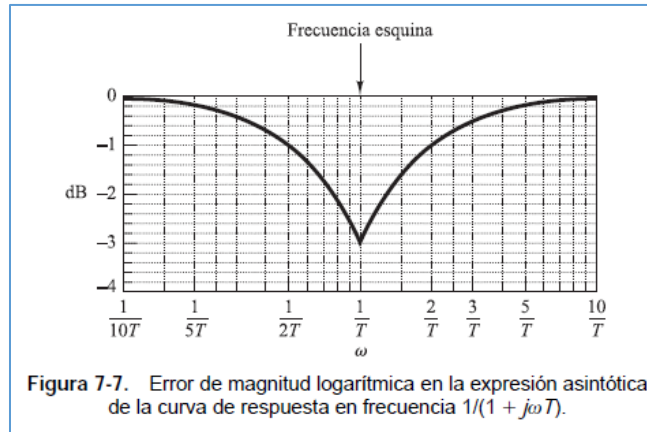
$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la curva de magnitud logarítmica para bajas frecuencias es la línea 0 dB constante. Para altas frecuencias, tales que  $\omega \gg 1/T$ ,

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log \omega T \text{ dB}$$

Este análisis muestra que la representación logarítmica de la curva de respuesta en frecuencia del factor  $1/(1 + j\omega T)$  se aproxima mediante dos asíntotas (líneas rectas), una de las cuales es una recta de 0 dB para el rango de frecuencia  $0 < \omega < 1/T$  y la otra es una recta con una pendiente de  $-20 \text{ dB/década}$  (o  $-6 \text{ dB/octava}$ ) para el rango de frecuencia  $1/T < \omega < \infty$ . La curva de magnitud logarítmica exacta, las asíntotas y la curva de ángulo de fase exacta se muestran en la Figura 7-6.

La siguiente es una gráfica que muestra el error de las aproximaciones asintóticas en función de la frecuencia de la entrada

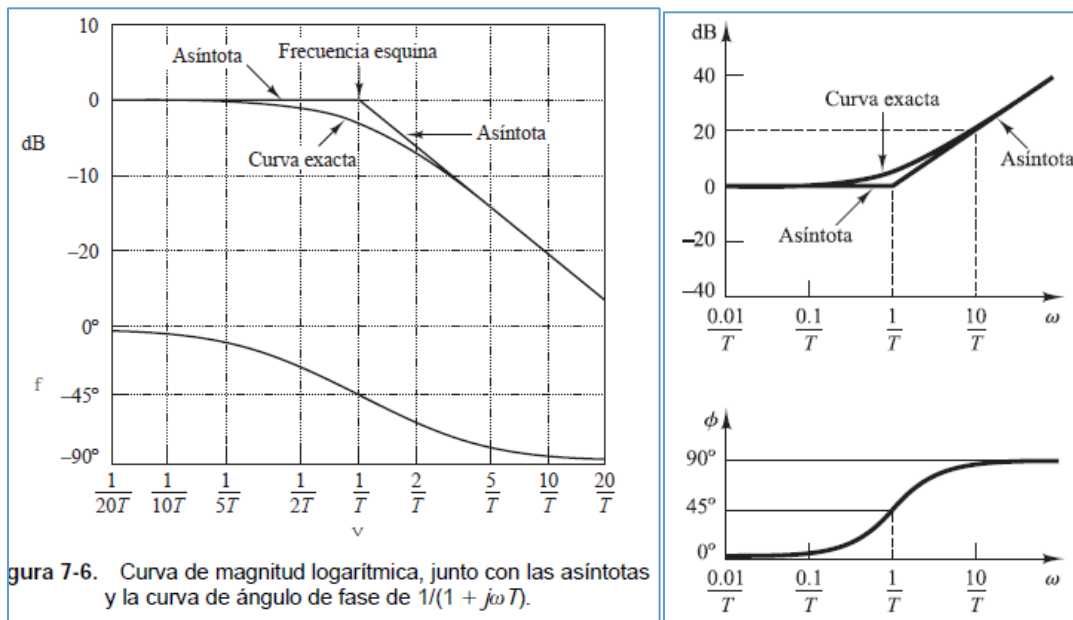


**NOTA:** El error de las aproximaciones asintóticas es de cerca de 3 dB para la frecuencia esquina y de aproximadamente de 1 dB a una octava por delante y por detrás de la misma

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$\angle 1 + j\omega T = \tan^{-1} \omega T = - \angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$

**NOTA:** Entonces el diagrama de fases y de RA de  $1 + j\omega$  se obtiene simplemente multiplicando por -1 los correspondientes a  $\frac{1}{1+j\omega}$ .



**NOTA:** Los diagramas de la derechas corresponden a  $1 + j\omega$



La función de transferencia  $1/(1 + j\omega T)$  tiene la característica de un filtro paso-baja. Para frecuencias por encima de  $\omega = 1/T$ , la magnitud logarítmica disminuye rápidamente hacia  $-\infty$ . Esto se debe, en esencia, a la presencia de la constante de tiempo. En el filtro paso-baja, la salida sigue fielmente una entrada sinusoidal a bajas frecuencias. Pero, conforme aumenta la frecuencia de entrada, la salida no puede seguir a la entrada debido a que se necesita cierta cantidad de tiempo para que el sistema aumente en magnitud. Por tanto, para altas frecuencias, la amplitud de la salida tiende a cero y el ángulo de fase de la salida tiende a  $-90^\circ$ . En este caso, si la función de entrada contiene muchos armónicos, las componentes de baja frecuencia se reproducen fielmente en la salida, mientras que las componentes de alta frecuencia se atenúan en amplitud y cambian en fase. Por tanto, un elemento de primer orden produce una duplicación exacta, o casi exacta, sólo para fenómenos constantes o que varían lentamente.

Para el caso en el que una función de transferencia determinada contiene términos como  $(1 + j\omega T)^{\mp n}$ , se hace una construcción asintótica similar. La frecuencia esquina está todavía en  $\omega = 1/T$  y las asíntotas son rectas. La asíntota de baja frecuencia es una recta horizontal en 0 dB,

mientras que la asíntota de alta frecuencia tiene una pendiente de  $-20n$  dB/década o  $20n$  dB/década. El error implícito en las ecuaciones asintóticas es  $n$  veces el que existe para  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ . El ángulo de fase es  $n$  veces el de  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$  en cada punto de frecuencia.

mientras que la asíntota de alta frecuencia tiene una pendiente de  $-20n$  dB/década o  $20n$  dB/década. El error implícito en las ecuaciones asintóticas es  $n$  veces el que existe para  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ . El ángulo de fase es  $n$  veces el de  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$  en cada punto de frecuencia.

**NOTA:** Todo esto último es cierto y hace basta un poquito de análisis para darse cuenta

Para factores cuadráticos de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

La curva asintótica de respuesta en frecuencia se obtiene del modo siguiente. Como

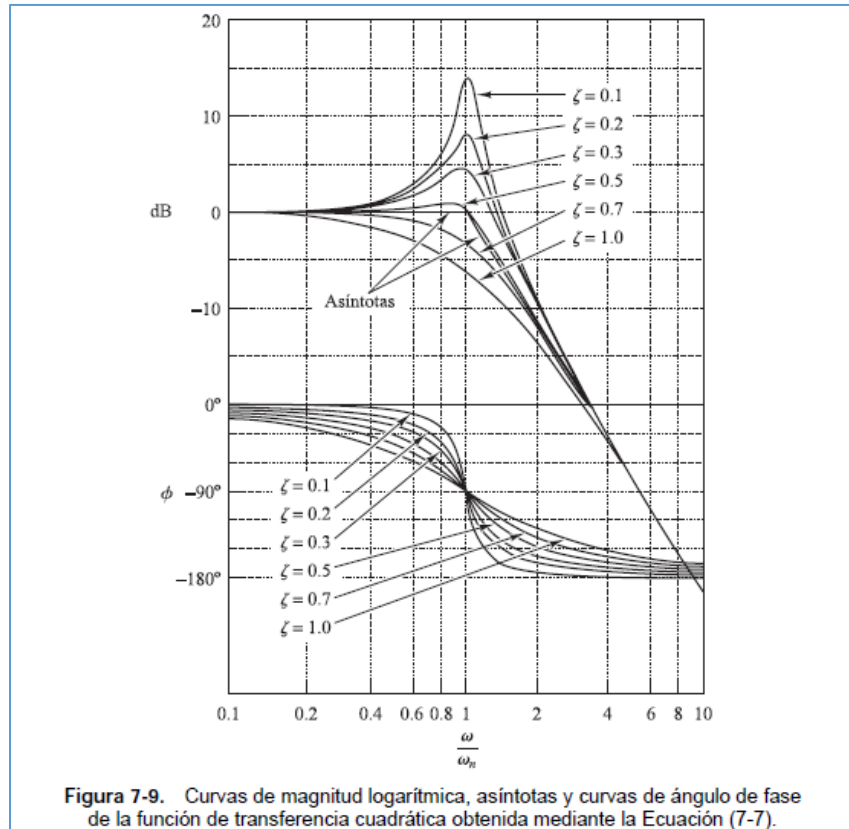
$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

para bajas frecuencias tales que  $\omega \ll \omega_n$  la magnitud logarítmica resulta

$$-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la asíntota de baja frecuencia es una recta horizontal en 0 dB. Para altas frecuencias tales que  $\omega \gg \omega_n$ , la magnitud logarítmica es

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$



**NOTA:** Puede verse que las ecuaciones de las asíntotas son independientes del valor de la amortiguación y el error de las aproximaciones asíntóticas es mayor para valores más pequeños del amortiguamiento. La frecuencia esquina es la correspondiente a la frecuencia natural como se observa, y para este valor (donde hay resonancia) hay un pico de RA que será mayor en tanto menor el amortiguamiento

$$\phi = \left[ \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (7-8)$$

El ángulo de fase es una función de  $\omega$  y de  $\zeta$ . En  $\omega = 0$ , el ángulo de fase es igual a  $0^\circ$ . En la frecuencia esquina  $\omega = \omega_n$ , el ángulo de fase es  $-90^\circ$  sin considerar  $\zeta$ , debido a que

$$\phi = -\tan^{-1} \left( \frac{2\zeta}{0} \right) = -\tan^{-1} \infty = -90^\circ$$

En  $\omega = \infty$ , el ángulo de fase se convierte en  $-180^\circ$ . La curva del ángulo de fase tiene una

**NOTA:** Para el factor de segundo orden en el numerador solamente se multiplica por menos 1 la magnitud y por menos uno la fase dado lo que ya dijimos de las magnitudes logarítmicas

## Retardo de transporte

**Retardo de transporte.** El retardo de transporte tiene un comportamiento de fase no mínima y tiene un retardo de fase excesivo sin atenuación en altas frecuencias. Estos retardos de transporte aparecen normalmente en los sistemas térmicos, hidráulicos y neumáticos.

Considérese el retardo de transporte obtenido mediante

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

La magnitud siempre es igual a la unidad debido a que

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$

Por tanto, la magnitud logarítmica del retardo de transporte  $e^{-j\omega T}$  es igual a 0 dB. El ángulo de fase del retardo de transporte es

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= -\omega T \quad (\text{radianes}) \\ &= -57.3\omega T \quad (\text{grados})\end{aligned}$$

El ángulo de fase varía de forma lineal con la frecuencia  $\omega$ . La característica del ángulo de fase del retardo de transporte aparece en la Figura 7-14.

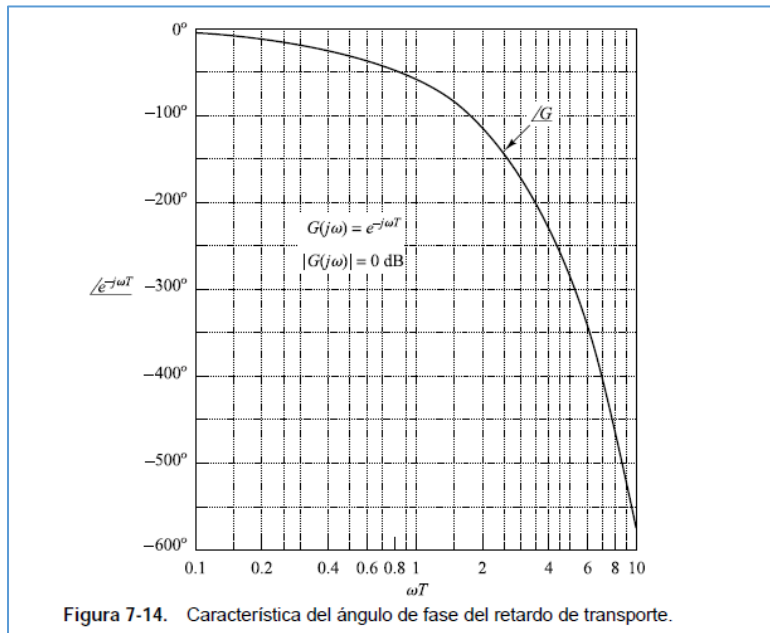


Figura 7-14. Característica del ángulo de fase del retardo de transporte.

**NOTA:** Por lo tanto el retardo de transporte en un diagrama de Nyquist viene dado por una circunferencia de radio 1 con centro en el origen

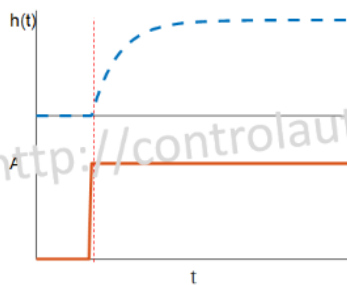
Ejemplo de un sistema de primer orden con tiempo muerto. En esencia es que la respuesta está en atraso respecto de la entrada (no ocurre de forma instantánea la salida)

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha) u_s(t-\alpha)] \quad e^{-s \cdot \alpha} F(s)$$

### Sistema Ideal

$$\frac{H(s)}{\alpha(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

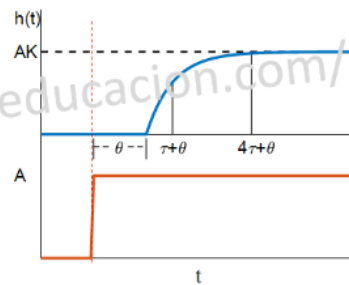
$$h(t) = AK (1 - e^{-t/\tau})$$



### Sistema con Retardo

$$\frac{H(s)}{\alpha(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

$$h(t) = AK (1 - e^{-(t-\theta)/\tau}) H(t - \theta)$$



Aproximaciones de Padé de primer y de segundo orden

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}$$

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2}{1 + \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-s}$$

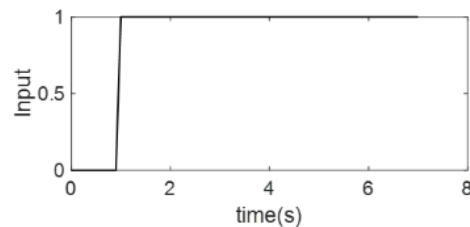
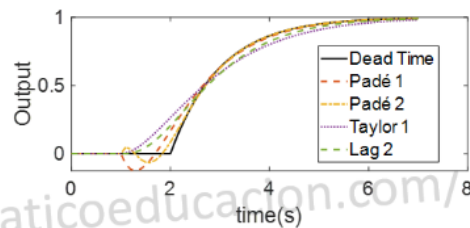
Sistema:  $G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-s}$

Padé 1er:  $G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{-0.5s+1}{0.5s+1}$

Padé 2do:  $G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{0.08333s^2 - 0.5s + 1}{0.08333s^2 + 0.5s + 1}$

Taylor 1er:  $G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+1}$

Lag 2do:  $G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{0.25s^2 + s + 1}$



### Comandos para la representación del tiempo muerto en Matlab

- `InputDelay`, para especificar retrasos en las entradas
- `OutputDelay`, para especificar retrasos en las salidas
- `IODelay`, para especificar retrasos de transporte independientes para cada par de E / S.