Unidad 2: Estática de los fluidos

La estática de los fluidos comprende el estudio de la presión y de sus variaciones a través del fluido y el estudio de las fuerzas debidas a la presión sobre superficies finitas. Además, se incluye el estudio del caso especial de fluidos en movimiento que se comportan como sólidos dada la semejanza en las fuerzas que implica.

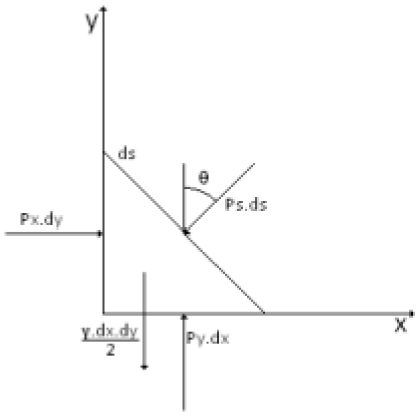
Presión

Presión: es la fuerza normal ejercida por un fluido por unidad de área plana, [Pa]=[N/m^2]. Si F representa la fuerza de presión normal total sobre un área finita A, mientras que dF representa la fuerza sobre un área infinitesimal dA, la presión está dada por: $p=\frac{dF}{dA}$. Si la presión es uniforme sobre toda el área → $p=\frac{F}{A}$

Presión en un punto: es el límite del cociente entre la fuerza normal a un área y dicha área, cuando ésta tiende a cero, es decir, un punto. $P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$ Es una función escalar.

Cuando un fluido se encuentra en reposo, además del peso del propio fluido, consideramos que solo actúan fuerzas normales debidas a la presión, ya que no existe movimiento relativo entre sus capas y por lo tanto no habrá tensiones de cortadura en el fluido → *(dv/dy)=0* y *µ=0* → se comporta como un fluido ideal.

Principio de Pascal: *"La presión en un punto interior en un fluido en reposo tiene la misma magnitud en todas las direcciones"*. Consideramos un elemento de fluido muy pequeño en reposo con forma de cuña cuyo espesor normal al plano del papel es constante e igual a *dz,* llamamos *p* a la presión en cualquier punto, y p_x y p_y serán las presiones en las direcciones de los ejes. Las fuerzas en z se cancelan mutuamente por lo que no se tienen en cuenta.



Profundidad unitaria

Como condición de equilibrio, la suma de los componentes de fuerza en el elemento en una dirección dada debe ser igual a cero:

$\sum F_x = 0 = P_x.dy - P_s.ds.\,\text{sen}\,\theta = 0$ $\qquad dy = ds.\text{sen}\,\theta$

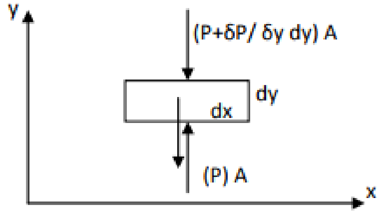
$\sum F_y = 0 = P_y.dx - P_s.ds.\cos\theta - \gamma.(dx.dy/2) = 0$ $\qquad dx = ds.\cos\theta$

Como $\gamma.(dx.dy/2)$ es un término de orden superior respecto a los otros términos, puede considerarse despreciable, entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} P_x.dy - P_s.dy = 0 & P_x=P_s \\ P_y.dx - P_s.dx = 0 & P_y=P_s \end{array}\right\} P_y = P_x = P_s = P$$

Variación de la presión con la profundidad:

- Caso bidimensional:

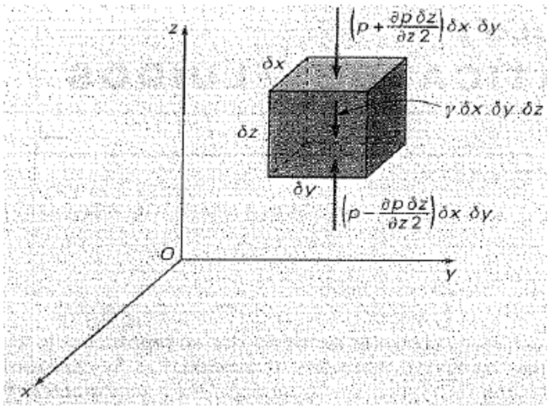


$$\sum F_y = 0 = PA - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy)\,A - \gamma\,dy\,A$$

$$\sum F_y = 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} dy\,A - \gamma\,dy\,A$$

$$\gamma = -\frac{dp}{dy}$$

- <u>Caso tridimensional:</u> consideramos un elemento diferencial de fluido en reposo muy pequeño, por lo que consideramos a la densidad cte, suponemos que la presión en el centro del elemento es *p* y que las dimensiones del elemento son ∂x, ∂y y ∂z.



Como el fluido está en reposo la suma de las fuerzas en cualquier dirección debe ser igual a cero, entonces:

$\Sigma F_x=0$ y $\Sigma F_y=0$ → las presiones en las caras verticales opuestas deben ser iguales, por lo tanto $\partial p/\partial x=\partial p/\partial y=0$.

Por otra parte:

$$\Sigma F_z=\left(p-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{2}\right)\partial x\partial y-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{2}\right)\partial x\partial y-\gamma\partial x\partial y\partial z$$

Esto da que $\frac{\partial p}{\partial z}=-\gamma$, y como *p* es independiente de $\boxed{\frac{dp}{dz}=-\gamma}$ donde el negativo indica que a mayor z (altura), disminuye la presión.

Para evaluar la variación de la presión integramos dicha ecuación:

- Fluidos con densidad constante

$$\frac{dp}{dz}=-\gamma$$

$$\int_{p_1}^{p}dp=-\gamma\int_{z_1}^{z}dz$$

$$(p-p_1)=-\gamma(z-z_1)$$

- Procesos isotérmicos

$$\frac{dp}{dz}=-\gamma\,;pv=cte\,;\ \frac{p}{\gamma}=\frac{p_1}{\gamma_1}$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\gamma_1}{p_1}dz$$

$$\int_{p_1}^{p}\frac{dp}{p}=-\frac{\gamma_1}{p_1}\int_{z_1}^{z}dz$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_1}\right)=-\frac{\gamma_1}{p_1}(z-z_1)$$

$$p=p_1e^{-\frac{\gamma_1}{p_1}(z-z_1)}$$

- Procesos isoentrópico

$$\frac{dp}{dz}=-\gamma\,;para\ aire\ pv^{1.4}=cte\,;\ \frac{p}{\gamma^{1.4}}=\frac{p_1}{\gamma_1{}^{1.4}}$$

$$dp=-\gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/1.4}dz$$

$$\int_{p_1}^{p}p^{(-1/1.4)}dp=-\gamma_1p_1{}^{(-1/1.4)}\int_{z_1}^{z}dz$$

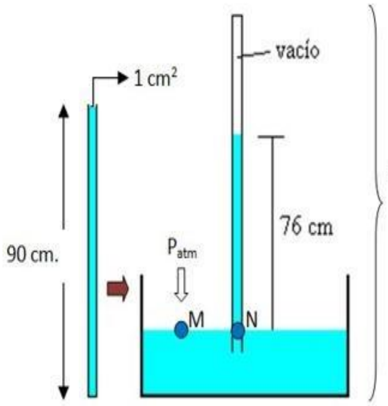
Presión atmosférica: las presiones pueden expresarse con referencia a un origen arbitrario. Los orígenes más usuales son el vacío absoluto y la presión atmosférica local. Cuando se toma como origen el vació absoluto, la presión se denomina absoluta y cuando se toma como origen la presión atmosférica local, se denomina presión manométrica. La presión atmosférica varía con la temperatura y con la altitud. Los libros dan las presiones absolutas, ya que según donde estemos la P relativa varía.

$$P_{man}=P_{abs}-P_{atm}$$

$$P_{vac}=P_{atm}-P_{abs}$$

Instrumentos de medición

Barómetro: Consiste en un tubo cuya parte abierta se encuentra inmersa en un líquido expuesto a la presión atmosférica, si el tubo es lo suficientemente alto y se ha extraído por completo el aire de su interior, entonces, el líquido dentro del tubo subirá dentro de él. La única presión en la superficie del líquido dentro del tubo será la de su propio vapor.



La presión en M y N deben ser iguales

A: área transversal del tubo

Si la P de vapor en la superficie del tubo es despreciable (mercurio, por ejemplo) →

$$p_M = p_N$$

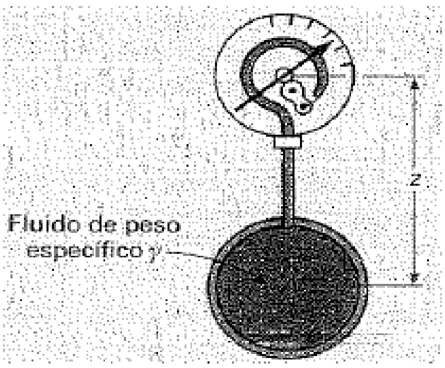
$$P_{atmosférica} \cdot A - P_{vapor} \cdot A - \gamma . A . y = 0$$

$$P_{atmosférica} = \gamma y + \cancel{P_{vapor}}$$

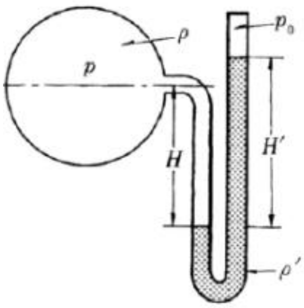
Se utiliza para medir la presión atmosférica, altímetros barométricos, aviones, etc.

Manómetro de Bourdon: Para medir presiones o vacíos. Consiste en un tubo curvado de sección elíptica que cambiará su curvatura al cambiar la presión dentro del tubo, un extremo móvil del tubo se encargará de girar la manecilla.

La escala marca cuando la P es la misma del medio, mide P relativa.

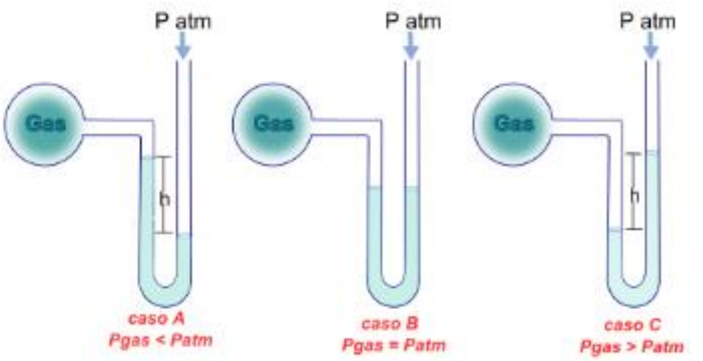


Manómetro simple: se emplean columnas de líquido para determinar diferencias de presión.

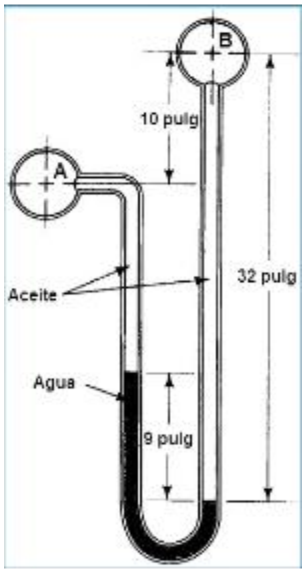


$$p + \rho g H = p_0 + \rho' g H'$$

$$p = p_0 + \rho' g H' - \rho g H$$



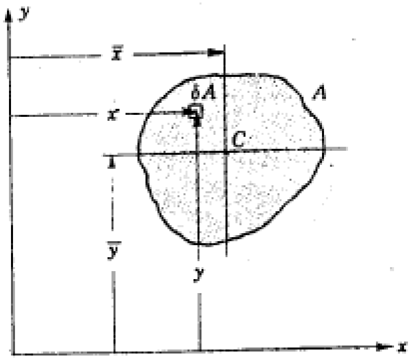
<u>Manómetros diferenciales:</u> nos interesa la diferencia entre dos presiones, y para ello debemos conocer las densidades de los fluidos que se encuentran en juego. Se aplica al tuvo de Venturi.



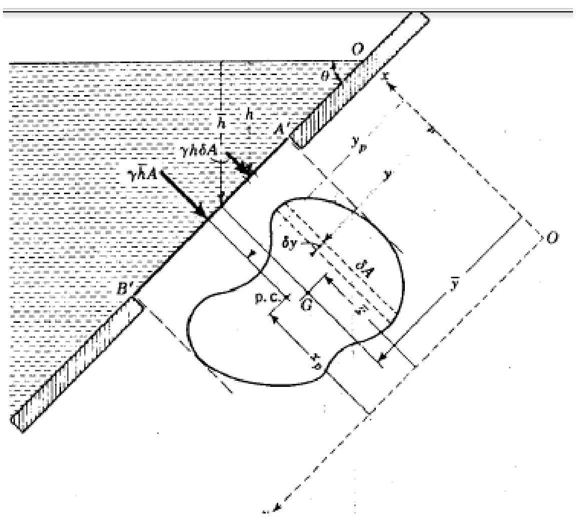
Fuerzas hidrostáticas sobre superficies planas sumergidas

El conjunto de fuerzas que resultan de la acción del fluido sobre la cara de una superficie de área finita puede ser reemplazado por una **fuerza resultante** que actuará sobre el **centro de presión**.

- <u>Superficies horizontales</u>: una superficie plana en posición horizontal en un fluido en reposo está sometida a una presión constante. El módulo de la fuerza que actúa sobre la cara de una superficie es
  $F = \int P \, dA = P \int dA = PA = \gamma h A.$
  Para encontrar la línea de acción de la resultante, es decir el punto de la superficie donde el momento del conjunto de fuerzas respecto a cualquier eje que pasa por el punto es cero, se eligen unos ejes arbitrarios xy. Como el momento resultante debe ser igual al momento del conjunto de fuerzas respecto a cualquier eje, por ejemplo, el y: $PAx' = \int xPdA$ siendo x' la distancia del eje y a la resultante, como P es constante: $x' = \frac{1}{A}\int xdA = \tilde{x}$, siendo $\tilde{x}$ la distancia al centroide del área → **para una superficie horizontal la resultante pasa por el centroide del área.**
  Esto surge del momento de primer orden.
  Para el eje x: $PAy' = \int yPdA \rightarrow \; y' = \frac{1}{A}\int ydA = \tilde{y}$



- <u>Superficies inclinadas:</u> representamos a una superficie plana inclinada $\theta°$ respecto a la horizontal por su traza A'B'. El plano xy contiene a la superficie dada. Para un elemento de área δA con forma de tira, de espesor δy, con sus lados más largos horizontales, el módulo de la fuerza δF qué actúa sobre él es: $\delta F = p\delta A = \gamma h \delta A = \gamma y \, sen\theta \delta A$ → la integral extendida da la F que actúa sobre una cara
  $\int p\delta A = \gamma \, sen\theta \int y\delta A = \gamma sen\theta \tilde{y} A = \gamma \tilde{h} A = P_G A$, donde P_G es la presión en el centroide del área, una superficie puede girarse alrededor de su centroide sin que cambie el módulo de la resultante, siempre que se mantenga sumergida.
  Como todas las fuerzas elementales son normales a la superficie, la línea de acción de la resultante será también



normal a la superficie. La línea de acción de la resultante corta a la superficie en un punto $P(x_P, y_P)$ que se llama CENTRO DE PRESIÓN. Contrariamente a lo que sucede para una superficie horizontal, el centro de presión de una superficie inclinada no está en el baricentro.

$$F.x_P = \int P.x.dA \rightarrow x_P = \frac{1}{F}\int P.x.dA \ ; \ siendo\ P.dA = dF$$

$$F.y_P = \int P.y.dA \rightarrow y_P = \frac{1}{F}\int P.y.dA$$

$$x_P = \frac{1}{\gamma.sen\,\theta.y_G.A}\int \gamma.sen\,\theta.y.x.dA \rightarrow x_P = \frac{I_{xy}}{y_G.A}$$

Aplicando Steiner: $I_{xy} = I_{x_G y_G} + x_G.y_G.A$

$$x_P = \frac{I_{x_G y_G} + x_G y_G.A}{y_G.A} \rightarrow x_P = \frac{I_{x_G y_G}}{y_G.A} + x_G$$

x_P puede ser positivo, negativo o igual que x_G dependiendo del valor de $I_{x_G y_G}$.

$$y_P = \frac{1}{F}\int P.y.dA = \frac{1}{\gamma.sen\,\theta.y_G.A}\int \gamma.sen\,\theta.y^2.dA \rightarrow y_P = \frac{I_x}{y_G.A}$$

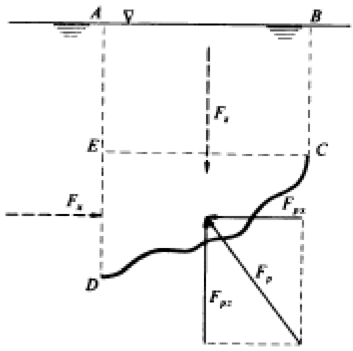
Aplicando Steiner: $I_x = I_{x_G} + y_G^2.A$

$$y_P = \frac{I_{x_G} + y_G^2.A}{y_G.A} \rightarrow y_P = \frac{I_{x_G}}{y_G.A} + y_G$$

Al ser I_{x_G} siempre positivo, $(y_P - y_G)$ también lo será → el centro de presión siempre estará por debajo del baricentro.

Fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas sumergidas

Cuando las F elementales varían en su dirección, se deben sumar como cantidades vectoriales.



Consideramos una superficie curva CD, la resultante de fuerzas debidas a la presión se obtiene a partir de las componentes F_{px} y F_{pz}.

La componente horizontal F_{px} es de igual magnitud y sentido contrario a la resultante de las presiones que el fluido ejerce sobre la proyección de la superficie sobre un plano vertical ED

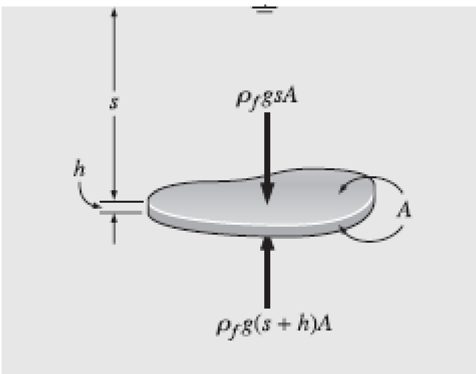
F_{px}=- F_x=$\int P.dA.\cos\theta$= $\gamma h A$; y su línea de acción está en: $y_C = \frac{\int y^2\,dA}{\int y\,dA} = \frac{I_x}{A\,y_G}$.

La componente vertical F_{pz} es de magnitud y sentido contrario al peso del líquido contenido :

$$dF_y = P\,dA\,\mathrm{sen}\,\theta \rightarrow F_y = \int_A P\,dA\,\mathrm{sen}\,\theta = \gamma\int_A h\ \mathrm{sen}\,\theta\ dA = \gamma\int_V dV = \gamma V$$ y actúa en el baricentro.

De manera que la resultante es $F = \sqrt{F_x^2 + Fy^2}; \theta = \tan^{-1}\frac{Fy}{Fx}$

Flotación y estabilidad



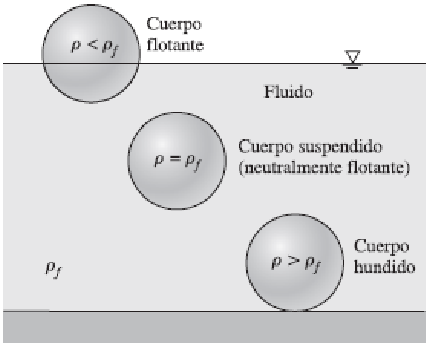
Cuando un cuerpo esta total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, este ejerce una presión sobre todas las partes de la superficie del cuerpo. La presión es mayor en las porciones sumergidas a mayor profundidad, por lo que la resultante de todas las fuerzas debidas a ella, está dirigida hacia arriba. Esta fuerza que tiende a levantar el cuerpo se llama fuerza de flotación y se denota por F_B.
Consideramos una placa plana de espesor *h* sumergida en un líquido de densidad δ, tanto el área superior como inferior son A, y su distancia a la superficie libre es s. Si las presiones en las superficies superior e inferior de la placa son δgs y δg(s+h) respectivamente, entonces las fuerzas son F_{suo}= δgsA que actúa hacia abajo y F_{inf}= $\delta g(s+h)A$ que actúa hacia arriba, la diferencia entre estas determina F_B.
F_B=F_{inf}-F_{sup}= $\delta ghA = \delta gV$ donde δgV es además igual al peso del volumen del líquido cuyo volumen es igual al volumen de la placa → *la fuerza de flotación que actúa sobre la placa es igual al peso del líquido desplazado por la propia placa.*

→ Principio de Arquímedes: "Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje de abajo hacia arriba, igual al peso del volumen de líquido desalojado". E= δgV
El punto en el que actúa se llama centro de empuje y coincide con el baricentro del volumen de liquido desalojado.

Ahora consideremos un cuerpo completamente sumergido. Sobre él actúan dos fuerzas:

W= ρ_C.g.V ↓
E= ρ_F.g.V ↑

1) W > E → El cuerpo se hunde totalmente.
2) W = E → El cuerpo flota en el seno del líquido (entre dos aguas).
3) W < E → El cuerpo sale a la superficie del líquido hasta que el peso del fluido desalojado iguale a W.



Estabilidad de los cuerpos sumergidos y de los flotantes

- **Estabilidad vertical:** Para un cuerpo suspendido o flotante en equilibrio estático, el peso y la fuerza de flotación que actúan sobre él se equilibran entre sí y, de manera inherente, esos cuerpos son estables en la dirección vertical.

- <u>Cuerpos suspendidos neutralmente flotante W=E</u> si ascienden o descienden hasta una profundidad diferente, el cuerpo permanecerá en equilibrio en esa ubicación → es neutralmente estable ya que no regresa a su posición original.

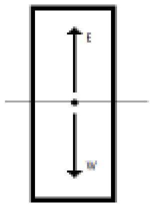
- <u>Cuerpos flotantes W<E</u> si ascienden o descienden mediante una fuerza vertical, el cuerpo regresará a su posición original tan pronto como se elimine el efecto externo → un cuerpo flotante posee estabilidad vertical.

- **Estabilidad rotacional:** depende de las ubicaciones relativas del centro de gravedad G del cuerpo y del centro de flotación *e*, el cual es el centroide del volumen desplazado.

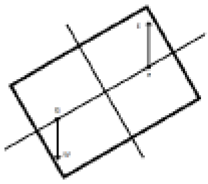
- <u>Cuerpos suspendidos neutralmente flotante W=E</u>

  Si W y E dejan de estar alineados, aparece una cupla donde:

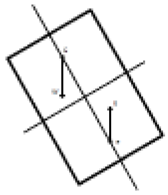
  A) Coincide e con G → no hay cupla, hay equilibrio.
  NEUTRALMENTE ESTABLE



  B) G está debajo de e; M > 0 y la cupla tiende a restaurar el equilibrio
  EQUILIBRIO ESTABLE.



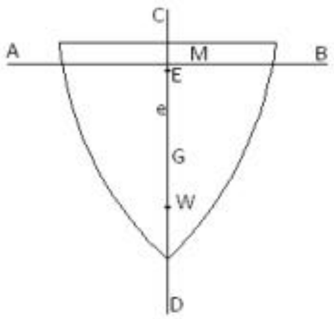
  C) G está encima de e y la cupla tiende a desalinear aún más a W con E
  EQUILIBRIO INESTABLE.



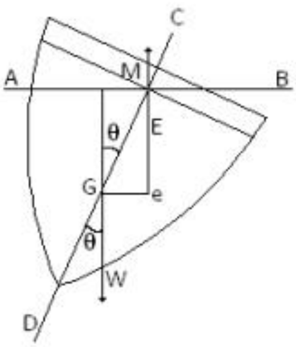
- <u>Cuerpos flotantes W<E</u> (Barco)

W es igual al peso del volumen de líquido desplazado por la porción sumergida.
Sobre el barco actúan dos fuerzas, E debida al empuje del agua y G debido al peso.

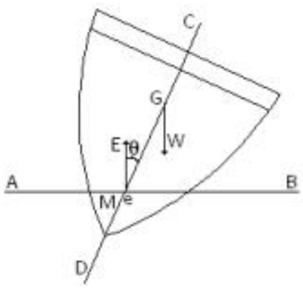
"El punto e no es fijo, sino que se mueve de acuerdo a la oscilación del barco"



AB plano de flotación: punto en que la superficie del agua corta al barco totalmente cargado y en posición normal.
CD plano de simetría: perpendicular al plano de flotación, eje de flotación.
Se considera que G, e y M (metacentro: punto de intersección del eje CD con la dirección del empuje) forman una línea común en la posición normal. El barco estará o no en equilibrio según la posición de M.
En este caso, M coincide con G, hay EQUILIBRIO INDIFERENTE.



- M encima de G, aparece una cupla (E > W) que vuelve al barco a su posición normal.
EQUILIBRIO ESTABLE.



- M debajo de G, la cupla tiende a volcarlo (cubierta mal cargada).
EQUILIBRIO INESTABLE.

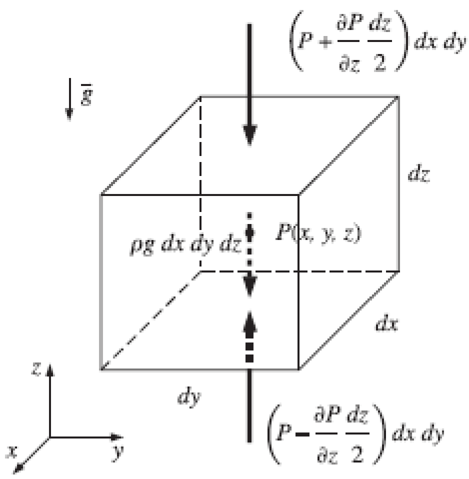
"El valor de la cupla depende del brazo MG (altura metacéntrica)"

Fluidos en el movimiento del cuerpo rígido.

Cuando se acelera un fluido de tal manera que no haya movimiento relativo de una capa con respecto a la adyacente (similar al solido), no existen esfuerzos de corte y la variación de presión puede determinarse mediante los principios de la estática, modificados para tener en cuenta los efectos de la aceleración.

Consideramos un elemento rectangular diferencial de fluido con longitudes de los lados *dx, dy* y *dz* que se comporta como rígido → cumple con las leyes de Newton → $\partial F = \partial m . a$ es la fuerza neta que actúa sobre el elemento. P es la presión en el centro del elemento.

La fuerza superficial neta que actúa sobre la superficie del elemento en la dirección de z es la diferencia entre las fuerzas de presión que actúan en las caras superior e inferior:



$$\delta F_{S,z} = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy = -\frac{\partial P}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

Las fuerzas netas en las direcciones x e y son:

$$\delta F_{S,x} = -\frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz \qquad \text{y} \qquad \delta F_{S,y} = -\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

→ La <u>fuerza superficial (presión) que actúa sobre el elemento completo</u> es:

$$\delta \vec{F}_S = \delta F_{S,x}\vec{i} + \delta F_{S,y}\vec{j} + \delta F_{S,z}\vec{k}$$
$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right)dx\,dy\,dz = -\vec{\nabla}P\,dx\,dy\,dz$$

donde $\vec{\nabla}P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$ es el gradiente de presión.

→ El <u>peso</u> del elemento actúa en dirección *z* negativa y se expresa como $\delta F_B = -g\delta m = \rho g dxdydz$, que en forma vectorial es: $\delta \vec{F}_{B,z} = -g\delta m\vec{k} = -\rho g\,dx\,dy\,dz\vec{k}$

→ La <u>fuerza total</u> que actúa sobre el elemento es: $\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_S + \delta\vec{F}_B = -(\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k})\,dx\,dy\,dz$, que reemplazando en $\delta\vec{F} = \delta m \cdot \vec{a} = \rho\,dx\,dy\,dz \cdot \vec{a}$ se cancelan los *dx dy dz* y obtengo la **ecuación general del movimiento de cuerpo rígidos de fluidos:** $\vec{\nabla}P + \rho g\vec{k} = -\rho\vec{a}$ que podemos expresarla en las tres direcciones ortogonales como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

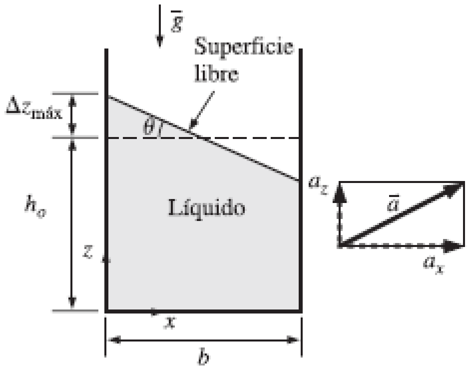
donde a_x, a_y y a_z son las aceleraciones en las direcciones *x*, *y* y *z* respectivamente.

Para el caso de <u>un fluido en reposo</u> $\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g$, lo cual confirma que la presión permanece constante en cualquier dirección horizontal y sólo varía en la dirección vertical como resultado de la gravedad.

Para el caso de caída libre acelera bajo la influencia de la gravedad y la aceleración respecto a cualquier dirección horizontal es cero → a_x=0 a_y=0 y a_z=-g → las ecuaciones se reducen a $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ → P=cte

Aceleración sobre una trayectoria recta.

Consideramos que un recipiente, parcialmente lleno con un líquido, se mueve sobre una trayectoria recta con una aceleración contante en las direcciones *x* y *z,* cuyas componentes son a_x y a_z, mientras que en el eje *y* no existe movimiento por lo que $a_y=0$ → las ecuaciones del movimiento son



$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

→ $dP = -\rho a_x\,dx - \rho(g + a_z)\,dz$; y si ρ=cte podemos determinar la diferencia de presión entre dos puntos a partir de la integración:

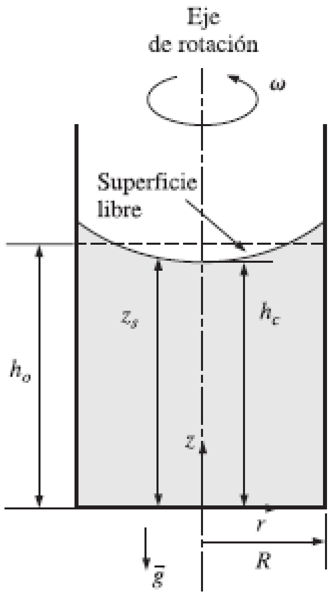
$$P_2 - P_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$$

Si tomo los puntos sobre la superficie libre $P_2=P_1$ → $\frac{-a_x(x_2 - x_1)}{(a_z + g)} = (z_2 - z_1) = \Delta Z_s$

La superficie a presión constante: $\frac{dz_{isobara}}{dx} = -\frac{a_x}{(a_z+g)} = -tan\,\theta$

Rotación en un recipiente cilíndrico

Movimiento de vórtice forzado → un recipiente con un líquido gira y en la superficie libre de líquido se forma una superficie cóncava.
Consideramos un recipiente cilíndrico girando a una velocidad angular *w* constante que está parcialmente lleno con un líquido que se comporta como rígido. No se tiene deformación por lo que no hay esfuerzo cortante y todas las partículas del fluido se mueven con la misma velocidad. Además, consideramos coordenadas cilíndricas *(r,θ,z).* La aceleración radial de una partícula $a_r=-rw^2$. Hay simetría respecto al eje z, y no hay dependencia de *θ* → *P=(r,z),* $a_z=0$ por que no hay movimiento en dicha dirección (estudio el movimiento cuando ya se comporta como sólido rígido) y $a_\theta=0$, entonces las ecuaciones del movimiento son:



$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r\omega^2, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \rightarrow \quad dP = \rho r\omega^2\,dr - \rho g\,dz$$

↓
No es negativo porque el radio crece y la aceleracion es entrante

La ecuación para una superficie a P=cte se obtiene para *dP=0*

→ $\frac{dz_{\text{isobara}}}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$ → si integramos obtenemos la ec. para una superficie de P=cte

→ $z_{\text{isobara}} = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C_1$ → donde C_1 es la contante de integración y varía para distintos valores de P cte

→ Para r=0 $C_1=h_c$ → $z_s = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + h_c$ → altura desde la superficie libre hasta el fondo del recipiente en un radio r

El volumen de un elemento de cascarón cilíndrico de radio *r* y altura z_s, y espesor *dr* es $dV=2\pi r z_s$ → el volumen del paraboloide formado por la superficie libre es:

$$V = \int_{r=0}^{R} 2\pi z_s r\,dr = 2\pi \int_{r=0}^{R} \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c\right) r\,dr = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c\right)$$

Además $V = \pi R^2 h_0$ es el volumen inicial, y este se mantiene dado que la masa se conserva y la densidad es constante

$$\rightarrow \quad \pi R^2 h_0 = \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c\right) \rightarrow \quad h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

es la altura del fluido en el eje de rotación

Reemplazando obtenemos que la superficie libre es: $z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$

La altura máxima se obtiene en el borde donde *r=R* y la diferencia máxima de alturas entre el borde y el centro de la superficie libre se determina evaluando z_s en *r=R* y en *r=0* también y calculando su diferencia:

$$\Delta z_{s,\,\text{máx}} = z_s(R) - z_s(0) = \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

La diferencia de presión entre dos puntos cualquiera se obtiene al integrar $dP = \rho r \omega^2\,dr - \rho g\,dz.$ →

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1)$$

; y si se toma el punto 1 como el origen (r=0 y z=0) donde $P=P_o$ →

$$P = P_0 + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z$$

Y la variación de la presión en un plano horizontal es: $\Delta P = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2}$