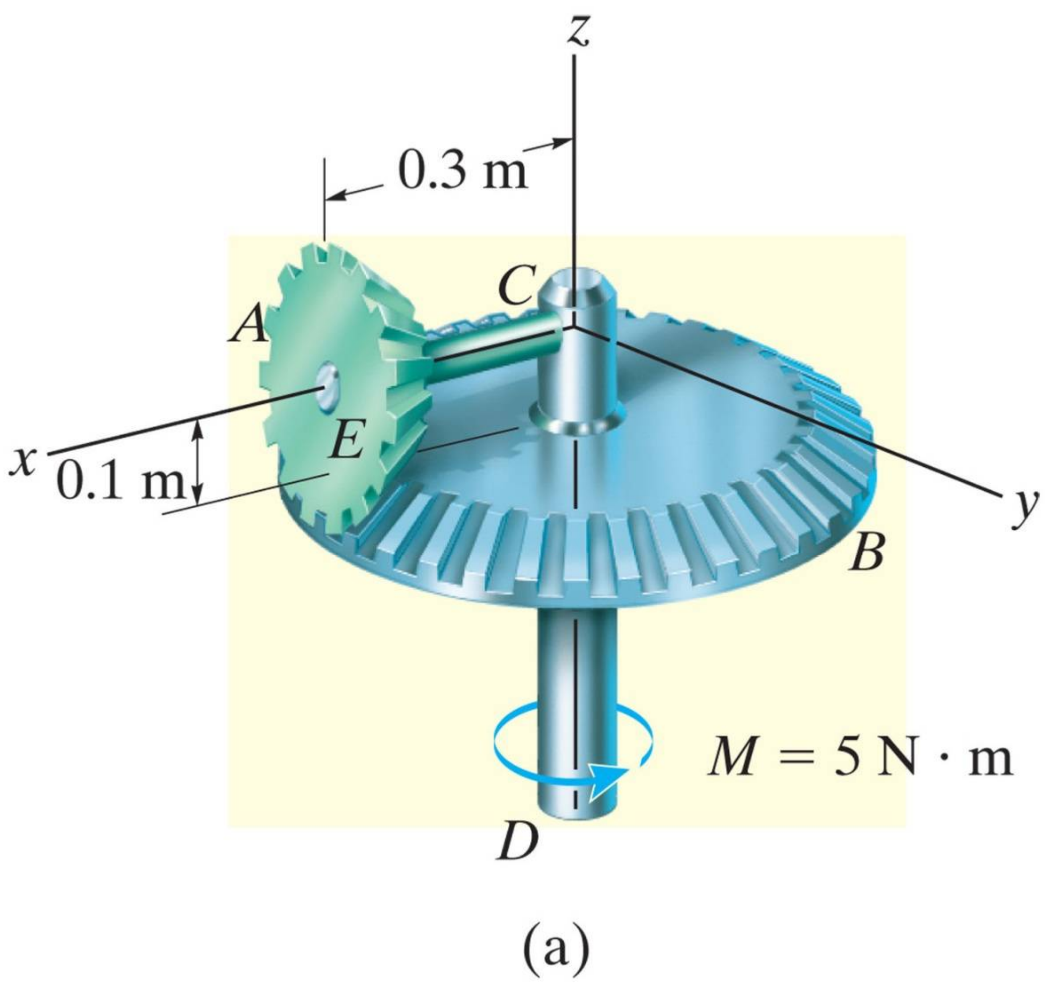
FACULTAD DE INGENIERÍA

MECÁNICA APLICADA

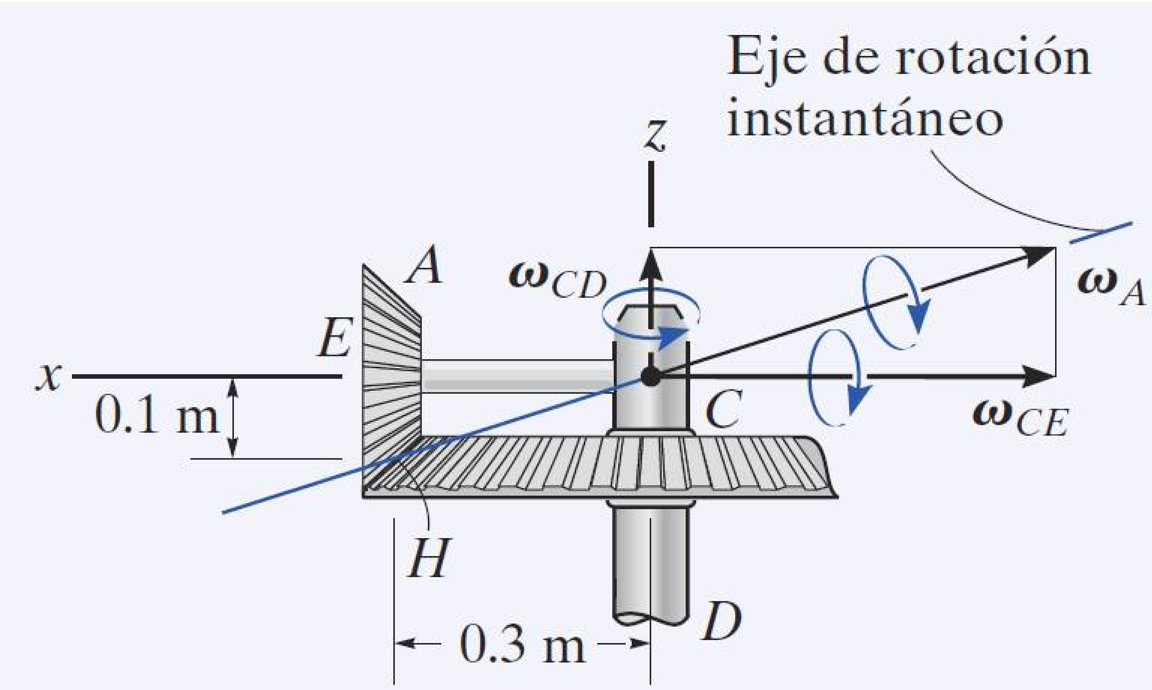
MECÁNICA Y MECANISMOS

CUERPO RÍGIDO TRIDIMENSIONAL

Ing. Carlos Barrera-2021



1) Un torque de 5 N.m es aplicado a un árbol CD mostrado en la figura, el cual permite que el engrane A de 10 kg gire libremente alrededor de CE. Suponiendo que el engrane A parte del reposo, calcular la velocidad angular de la flecha CD después que ésta ha efectuado dos revoluciones. Desprecie la masa del árbol CD y del eje CE y suponga que el engrane A puede ser aproximado por un disco delgado. El engrane B está fijo



Si la flecha CD, el eje CD y el engrane A se consideran como un sistema de cuerpos conectados, solo el par de torsión aplicado M realiza trabajo.

Con dos revoluciones de CD, este trabajo es:

$$\sum \mathbf{U}_{1-2} = (5\mathbf{Nm})(4\pi\mathbf{rad}) = 62{,}83\mathbf{J}$$

Como el engrane está inicialmente en reposo, la energía cinética inicial es cero. Si la velocidad angular de CD se toma como ω_{CD} *entonces la velocidad angular del engrane* A es $\omega_A = \omega_{CD} + \omega_{CE}$ El engrane puede ser imaginado como una porción de un cuerpo extendido sin masa que está rotando con respecto al punto fijo C. El eje instantáneo de rotación para este cuerpo está a lo largo de la línea CH, porque ambos puntos C y H sobre el cuerpo tienen velocidad cero y por tanto deben encontrarse sobre este eje. Esto requiere que las componentes ω_{CD} y ω_{CE} estén relacionadas mediante la ecuación $\omega_{CD} /\ 0{,}1m = \omega_{CE} /\ 0{,}3\ m$ o $\omega_{CE} = 3\ \omega_{CD}$

$$\omega_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k}$$

$$T = \frac{1}{2}I_x{\omega_x}^2 + \frac{1}{2}I_y{\omega_y}^2 + \frac{1}{2}I_z{\omega_z}^2$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO FACULTAD DE INGENIERÍA

$$I_x = \frac{1}{2}(10\,kg)(0,1m)^2 = 0,05\,kg\,m^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}(10\,kg)(0,1\,m)^2 + 10\,kg(0,3m)^2 = 0,925\,kg\,m^2$$

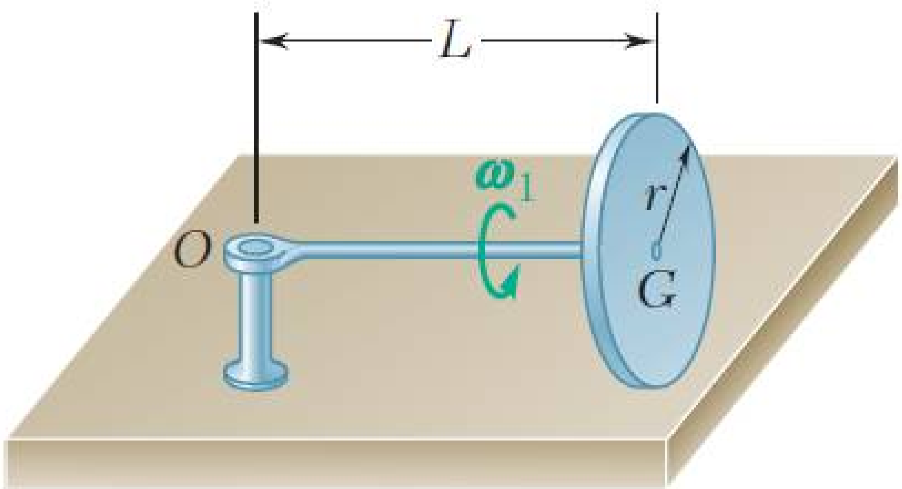
$$T_A = \frac{1}{2}(0,05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \frac{1}{2}(0,925)(\omega_{CD})^2 = 0,6875\,\omega_{CD}{}^2$$

Principio del Trabajo y la Energía

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

$$0 + 62{,}83 = 0{,}6875\omega_{CD}{}^2$$

$$\omega_{CD} = 9{,}56\,rad/s$$



2) Un disco homogéneo de radio r y masa m se monta sobre un eje OG de longitud L y masa despreciable. El eje está articulado en el punto fijo O. Si el disco gira en el sentido indicado a la velocidad ω_1 alrededor del eje OG, calcular a) velocidad angular del disco, b) cantidad de movimiento angular alrededor de O, c) Energía cinética, d) el vector y el momento en G

a) Cuando el disco gira alrededor del eje OG también gira con el eje alrededor del eje y a una velocidad ω_2

La velocidad angular total del disco es:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_1 i} - \boldsymbol{\omega_2 j}$$

Para determinar ω_2 se define que la velocidad de C es cero

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} * \boldsymbol{r_C} = 0$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{i} - \boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{j}) * (\mathbf{Li} - \mathbf{rj}) = 0$$

$$(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{r}\boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{k} = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{r}\,\boldsymbol{\omega}_1/\mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{i} = \left(\frac{\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}_1}{\mathbf{L}}\right)\mathbf{j}$$

b) Consideramos que los ejes x, y y z son ejes principales de inercia para el disco

$$H_x = I_x\omega_x = (\tfrac{1}{2}mr^2)\omega_1$$
$$H_y = I_y\omega_y = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)(-r\omega_1/L)$$
$$H_z = I_z\omega_z = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)0 = 0$$
$$\mathbf{H}_O = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} - m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(r\omega_1/L)\mathbf{j}$$

c) $$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(-r\omega_1/L)^2]$$
$$T = \tfrac{1}{8}mr^2\left(6 + \frac{r^2}{L^2}\right)\omega_1^2$$

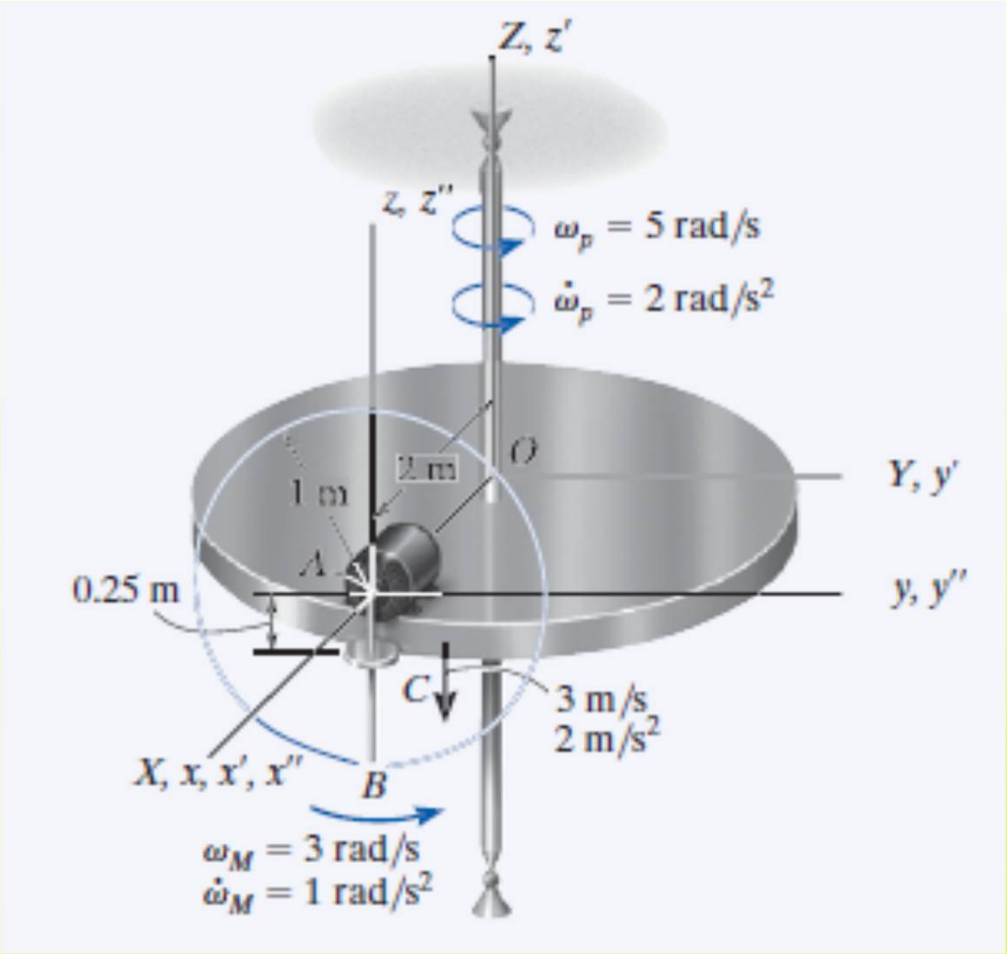
d) El vector de cantidad de movimiento lineal y el momento de cantidad de movimiento angular

$$m\bar{\mathbf{v}} = mr\omega_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_{x'}\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_{y'}\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_{z'}\omega_z\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}mr^2(-r\omega_1/L)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right)$$

3) El motor y la barra AB conectada tienen los movimientos angulares mostrados. El collarín C insertado en la barra se encuentra a 0,25 m de A y desciende a lo largo de la barra a una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s2. Calcular la velocidad y aceleración de C.



$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

Movimiento de A: r_A **cambia de dirección con respecto a X,Y,Z. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo utilizamos un sistema de ejes x´´, y´, z´ coincidentes con los ejes X,Y,Z que giran a** $\Omega^{´} = \omega_p$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s } (\boldsymbol{\Omega} \text{ no cambia de dirección respecto a } X, Y, Z)$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{2\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_A = \{2\mathbf{i}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_A = \mathbf{0} + 5\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} = \{10\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = [(\ddot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{r}}_A$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 2\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \times 10\mathbf{j} = \{-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de C con respecto a A: $\left(r_{\frac{C}{A}}\right)_{xyz}$ **cambia de dirección con respecto a x,y,z. Para obtener las derivadas con respecto al tiempo de** $\left(r_{\frac{C}{A}}\right)_{xyz}$ **se utiliza un sistema de ejes x¨,y¨,z¨ que giren a** $\Omega^{¨} = \Omega_{xyz} = \omega_M$

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M = \{3\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}\ (\boldsymbol{\Omega}_{xyz}\ \text{no cambia de dirección respecto a}\ x, y, z)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_M = \{1\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$$

$$(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} = \{-0.25\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$$
$$= -3\mathbf{k} + [3\mathbf{i} \times (-0.25\mathbf{k})] = \{0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$$

$$(\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}$$
$$= [-2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})] + (1\mathbf{i}) \times (-0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{i}) \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$= 10\mathbf{j} + [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{10.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$
$$= (-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + [2\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + 5\mathbf{k} \times [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})]$$
$$+ 2[5\mathbf{k} \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] + (18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})$$
$$= \{-57.5\mathbf{i} + 22.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$