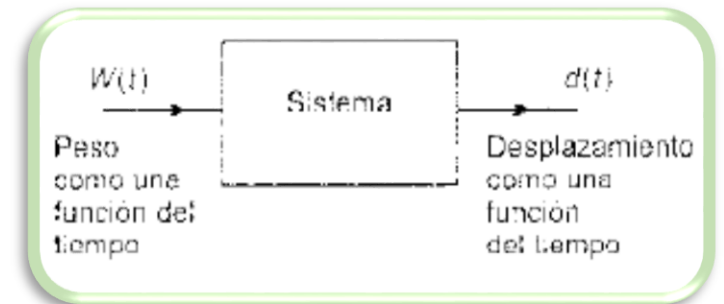
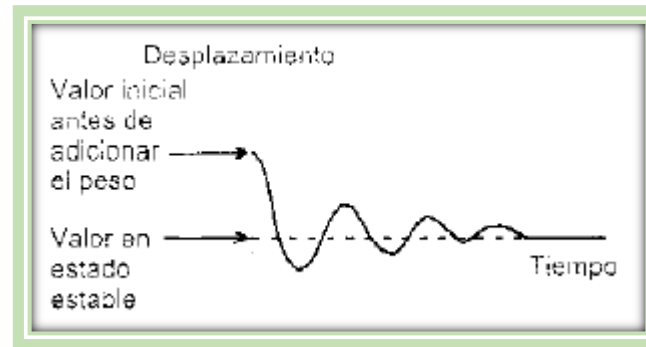
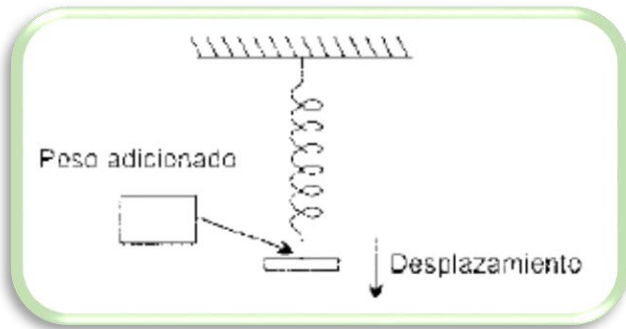


Carrera: “INGENIERÍA EN MECATRÓNICA”

Cátedra: “Sistemas de Automatización”

RESPUESTA DEL SISTEMA

- La respuesta de un sistema de control, o de un elemento del sistema, está formada de 2 partes: la respuesta en estado estable y la respuesta transitoria.
- La *respuesta transitoria* es la parte de la respuesta de un sistema que se presenta cuando hay un cambio en la entrada y desaparece después de un breve intervalo.
- La *respuesta en estado estable* es la respuesta que permanece después de que desaparecen todos los transitorios.



- El valor estable es la respuesta en estado estable del sistema. La oscilación que se presenta antes de este estado estable, es la respuesta transitoria.
- La entrada al sistema resorte es una cantidad que varía con el tiempo. Este tipo de entrada se conoce como entrada escalón. La salida del sistema es un valor que varía con el tiempo. Tanto la entrada como la salida son funciones del tiempo.

RESPUESTA DEL SISTEMA

Para describir por completo el comportamiento de un sistema el modelo debe considerar la relación entre las entradas y las salidas, las cuales son funciones del tiempo y, por lo tanto, son capaces de describir los comportamientos tanto transitorio como en estado estable.

Así, se necesitará un modelo que indique cómo variará la respuesta del sistema con el tiempo. Un tipo de modelo que con frecuencia se emplea para describir el comportamiento de un sistema de control o de un elemento de un sistema de control es una *“ecuación diferencial”*.

Este tema trata los tipos de respuestas que se pueden esperar de sistemas de primero y segundo orden, así como la solución de dichas ecuaciones diferenciales con el fin de obtener la respuesta del sistema ante diferentes tipos de entradas.

Los métodos empleados se pueden clasificar en esencia, en los que se prueba una solución que la satisfaga y, en los que la ecuación se transforma en otra que se puede trabajar con el álgebra convencional (transformada de Laplace).

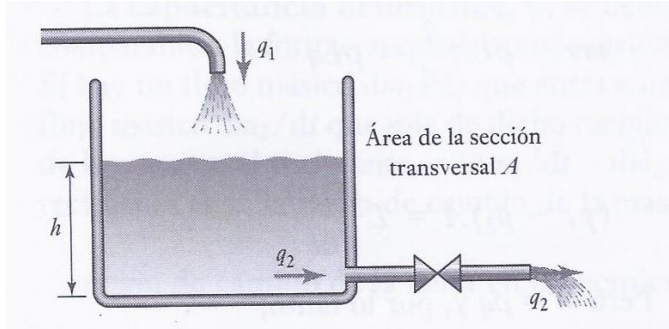
RESPUESTA DEL SISTEMA

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Ejemplo fluídico:

Un ejemplo de primer orden es un tanque de agua

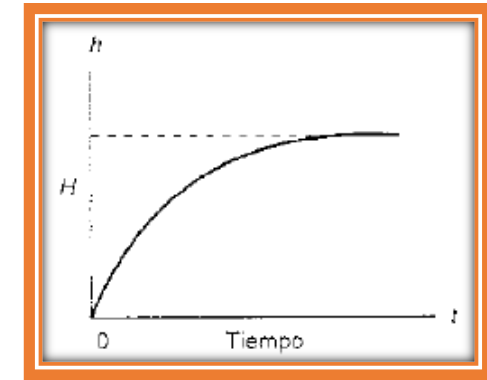
$$q_1 = A \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g h}{R} \longrightarrow A \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g}{R} h = q_1 \longrightarrow \frac{AR}{\rho g} \frac{dh}{dt} + h = \frac{R}{\rho g} q_1$$



Ante un aumento de q_1 en forma escalón, se producirá un aumento del nivel.

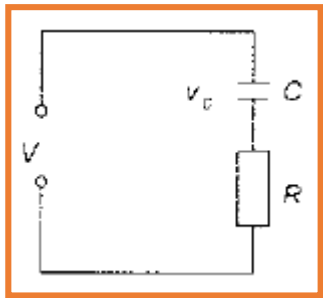
La ecuación que describe esta gráfica es:

$$h = kq_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Ejemplo eléctrico:

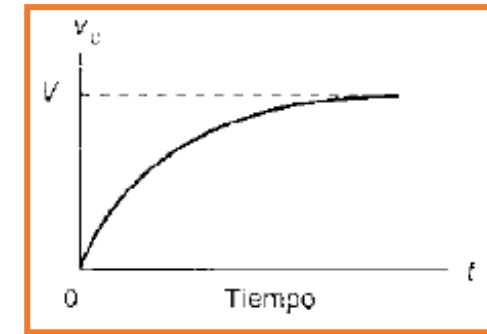
Un ejemplo de primer orden es un capacitor en serie con un resistor:



La razón de cambio de la diferencia de potencial v_c a través del capacitor con el tiempo es proporcional a la diferencia en valor entre v_c y el voltaje de entrada al sistema V .

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{RC}(V - v_c)$$

$$v_c = V(1 - e^{-t/RC})$$



RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\theta_0(s) = G(s) * \theta_i(s)$$

$$\theta_0(s) = \frac{C1}{s + p1} + \frac{C2}{s + p2} + \frac{C3}{s + p3} + \dots + \frac{A}{s + a} + \frac{B}{s + b}$$

Al antitransformar:

$$\theta_0(t) = \underbrace{C1 * e^{-p1t} + C2 * e^{-p2t} + C3 * e^{-p3t} + \dots}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\text{terminos de entrada}}_{\text{Respuesta Forzada}}$$

Respuesta Transitoria

Respuesta Forzada

RESPUESTA DEL SISTEMA

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial de primer orden es de la forma:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b \theta_i$$

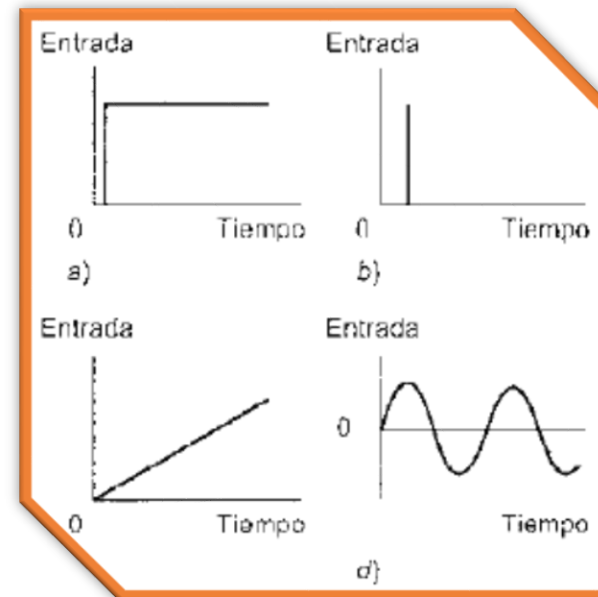
a_1 , a_0 y b son constantes.

θ_i es la función de entrada al sistema.

θ_o es la salida del sistema.

$\frac{d\theta_o}{dt}$ es la razón de cambio a la cual la salida cambia con el tiempo.

Las señales de entrada al sistema pueden adoptar diferentes formas. Una de las más comunes es la entrada escalón. Otras formas que a menudo se encuentran son las señales impulso, rampa y senoidal.



RESPUESTA DEL SISTEMA


SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b\theta_i$$


Si sustituimos: $\theta_o = u + v$

Luego:
$$a_1 \frac{d(u + v)}{dt} + a_0(u + v) = b\theta_i$$

Al reordenar se obtiene:
$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) + \left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b\theta_i$$

$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) = 0$$


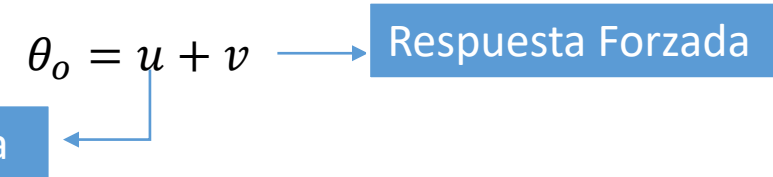
Respuesta Transitoria

$$\left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b\theta_i$$


Respuesta Forzada

RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN


La solución total es: $\theta_o = u + v$ 

- ✓ Al resolver esta ecuación, se obtiene un valor para u en una ecuación que no tiene entrada. Por esta razón u se conoce como *respuesta transitoria o libre* y es parte de la solución.
- ✓ La ecuación que involucra a v tiene la función de entrada y da un valor de v cuando existe la entrada, la cual fuerza una **respuesta particular** del sistema. Por esta razón v se denomina *respuesta forzada* y es parte de la solución.

Para obtener la respuesta transitoria no es necesario conocer ninguna forma que adopte la entrada; la respuesta es independiente de la entrada. Esta ecuación se puede resolver mediante la prueba de una solución.

Se supone: $u = Ae^{st}$ luego: $\frac{du}{dt} = Ase^{st}$

$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad (a_1 Ase^{st} + a_0 Ae^{st}) = 0 \quad \longrightarrow \quad s = -\frac{a_0}{a_1}$$

De esta manera: $u = Ae^{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)t}$ 

RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Para obtener la solución de la ecuación de respuesta forzada $\left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v\right) = b\theta_i$ también se prueba una solución.

La forma de la solución a probar dependerá de la forma de la señal de entrada.

Para una **señal escalón** cuando $\theta_i = k$ (para $t \geq 0$), la solución que se prueba es $v = k$ donde k es una constante.

Para una **señal rampa** donde se tiene $\theta_i = bt$ entonces la solución a probar es $v = bt$.

Para una **señal seno** o coseno se prueba con $v = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$.

Supongamos que la entrada que se toma es la entrada escalón que se presenta en $t = 0$ a un valor de θ_i , y permanece constante en ese valor para el resto del tiempo. Luego:

$v = k$ Puesto que k es una constante: $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v\right) = b\theta_i \quad \longrightarrow \quad a_0 k = b\theta_i \quad \longrightarrow \quad v = \frac{b\theta_i}{a_0}$$

De este modo, la solución completa es: $\theta_o = u + v \quad \longrightarrow \quad \theta_o = A e^{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)t} + \frac{b\theta_i}{a_0}$

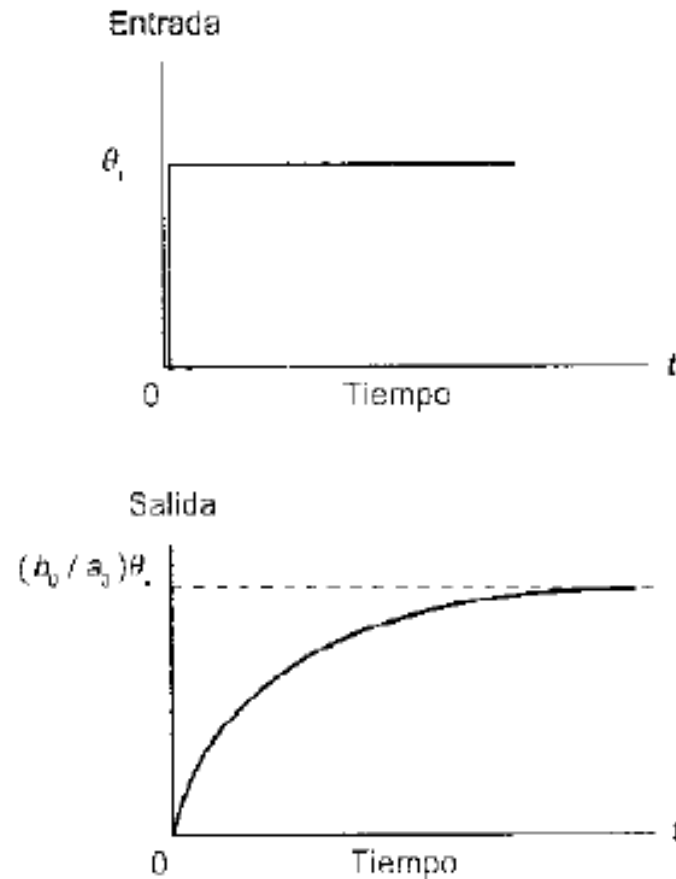
El valor de la constante A se puede determinar al dar una condición inicial (o en la frontera). Así, si $\theta_o = 0$ cuando $t = 0$:

$$0 = A + \left(\frac{b}{a_0}\right)\theta_i \quad \text{Así la ecuación se convierte en:} \quad \theta_o = -\left(\frac{b}{a_0}\right)\theta_i e^{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)t} + \frac{b\theta_i}{a_0} \quad \longrightarrow \quad \theta_o = \left(\frac{b}{a_0}\right)\theta_i [1 - e^{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)t}]$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

La siguiente gráfica muestra cómo varía θ_o con el tiempo para la entrada escalón. La gráfica y la ecuación son generales y describen la respuesta de todos los sistemas de primer orden a una entrada escalón que se presenta en $t = 0$:



RESPUESTA DEL SISTEMA

LA CONSTANTE DE TIEMPO

Para la solución de una ecuación diferencial de primer orden: $\theta_o = \left(\frac{b}{a_0}\right) \theta_i [1 - e^{-(\frac{a_0}{a_1})t}]$ (1)

Cuando $t = 0$, entonces el término exponencial tiene el valor de 1 y así $\theta_o = 0$.

Cuando $t = \infty$, entonces el término exponencial tiene el valor de 0 y así $\theta_o = \left(\frac{b}{a_0}\right) \theta_i$. Éste es el valor de la salida que cuando los efectos transitorios han desaparecido; es decir, el valor es estado estable.

Para $t = \infty$: $\theta_o = \left(\frac{b}{a_0}\right) \theta_i$ y la función de transferencia en estado estable G_{ss} es: $G_{ss} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{b}{a_0}$

Función Transferencia
en Estado estable o
ganancia estática

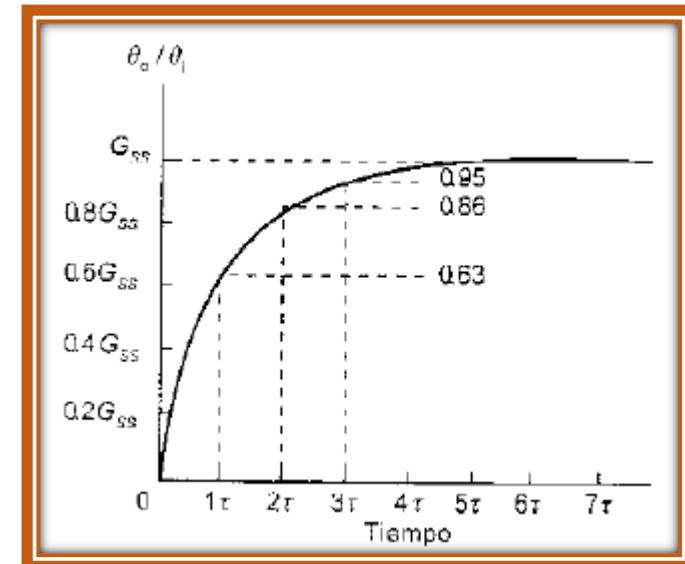
Por ende la ecuación (1) puede escribirse como: $\theta_o = G_{ss} \theta_i [1 - e^{-(\frac{a_0}{a_1})t}]$

Cuando el tiempo es $t = \frac{a_1}{a_0}$ entonces el término exponencial tiene el valor de 0,37 y:

$$\theta_o = G_{ss} \theta_i (1 - 0,37) = 0,63 G_{ss} \theta_i$$

En este tiempo, la salida ha alcanzado el 0,63 de su valor en estado estable. Este tiempo se denomina *constante de tiempo* τ .

$$\theta_o = G_{ss} \theta_i [1 - e^{-t/\tau}]$$



RESPUESTA DEL SISTEMA

LAS CONSTANTES en una FUNCION DE 1° ORDEN

Se pueden usar las relaciones de $G_{ss} = \frac{b}{a_0}$ y $\tau = \frac{a_1}{a_0}$ para escribir la ecuación diferencial de primer orden en la forma:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b \theta_i$$

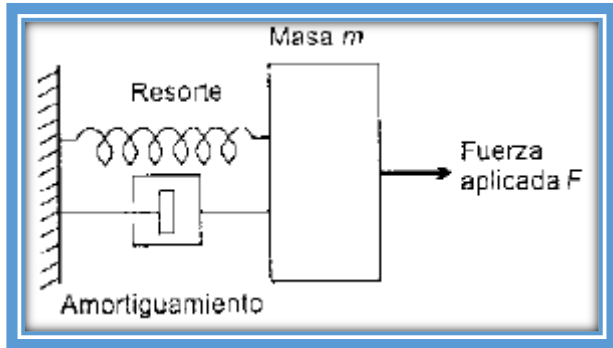
$$\frac{a_1}{a_0} \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = \frac{b}{a_0} \theta_i \quad \longrightarrow \quad \boxed{\tau \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = G_{ss} \theta_i}$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Ejemplo mecánico:

Un ejemplo de segundo orden es una rueda de un auto:



$$\text{Fuerza neta} = F - kx - c \frac{dx}{dt}$$

$$\text{Luego: } m \frac{d^2x}{dt^2} = F - kx - c \frac{dx}{dt}$$

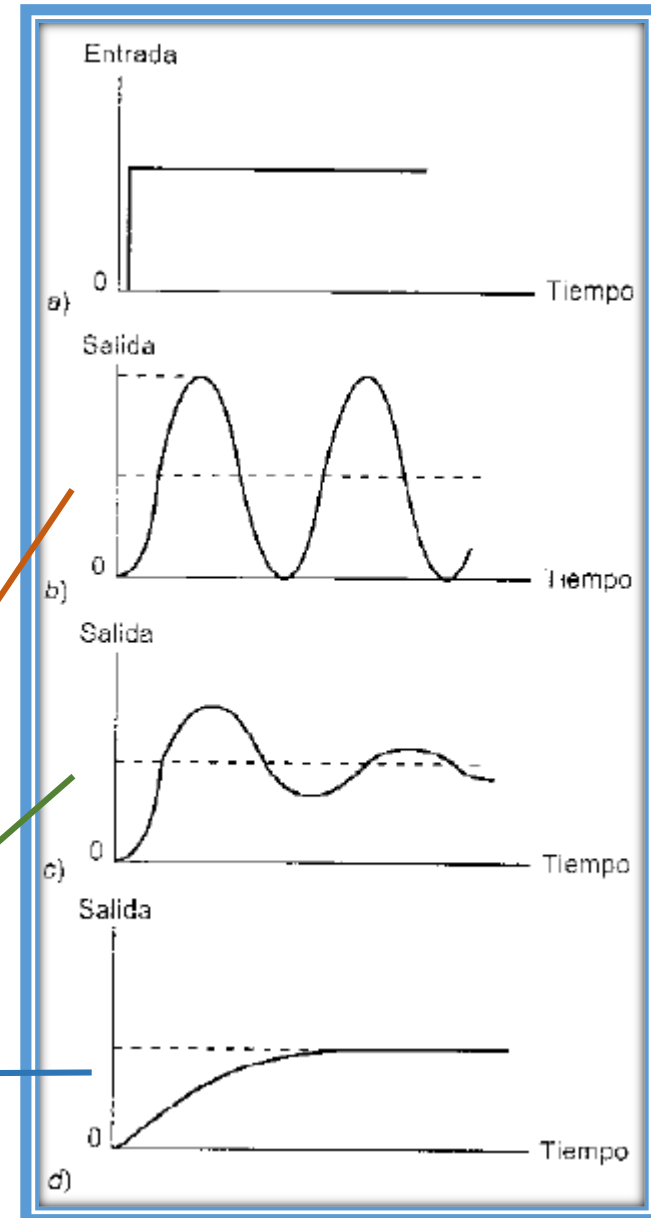
$$\text{Reordenando: } m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden de un sistema que tuvo una abrupta aplicación de la fuerza F , es decir, una entrada escalón.

Sin amortiguamiento, la masa oscilaría libremente sobre el resorte y las oscilaciones continuarían indefinidamente.

El amortiguamiento causará oscilaciones que desaparecen hasta que se obtiene el desplazamiento estable de la masa.

Si el amortiguamiento es lo suficientemente grande, no habrá oscilaciones y el desplazamiento de la masa se incrementará lentamente con el tiempo y la masa se moverá de manera gradual hacia la posición de desplazamiento estable.

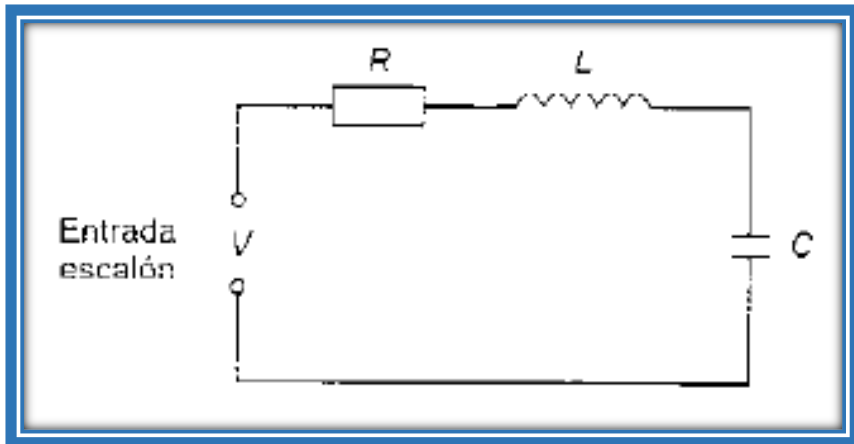


RESPUESTA DEL SISTEMA

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Ejemplo eléctrico:

Un ejemplo de segundo orden es el amortiguamiento en el circuito RLC en serie. Para tal circuito, cuando está sujeto a una entrada escalón de magnitud V en $t = 0$, la corriente i está dada por:



$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{V}{LC}$$

El amortiguamiento en el circuito RLC está provisto por la resistencia. En ausencia de ésta, la corriente del circuito oscilará libremente y continuará de manera indefinida.

No obstante, la presencia de la resistencia causará oscilaciones que desaparecen hasta que se obtiene la corriente estable. Sin embargo, si la resistencia (amortiguamiento) es lo suficientemente grande no habrá oscilaciones.

RESPUESTA DEL SISTEMA

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial de segundo orden es de la forma:

$$a_2 \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b \theta_i$$

$\left\{ \begin{array}{l} a_2, a_1, a_0 \text{ y } b \text{ son constantes.} \\ \theta_i \text{ es la función de entrada al sistema.} \\ \theta_o \text{ es la salida del sistema.} \end{array} \right.$

En ausencia de cualquier tipo de amortiguamiento, la salida de un sistema de segundo orden es una oscilación continua, la cual se puede escribir como:

$$\theta_o = A \sin(\omega_n t)$$

A es la amplitud y ω_n la frecuencia angular de las oscilaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_o}{dt} = A \omega_n \cos(\omega_n t) \\ \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} = -\omega_n^2 A \sin(\omega_n t) = -\omega_n^2 \theta_o \end{array} \right.$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

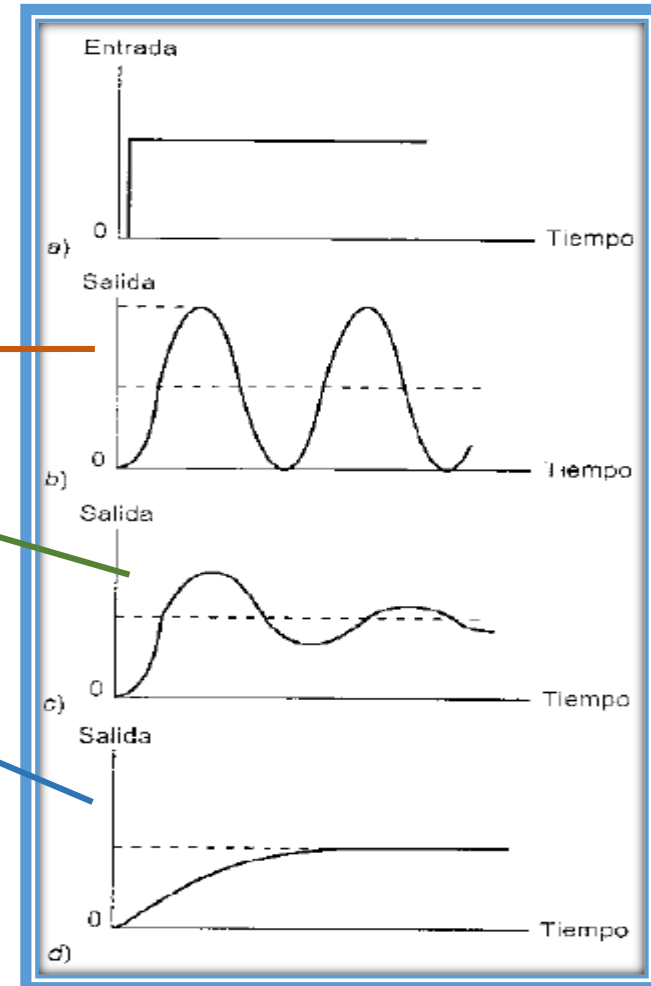
La ecuación diferencial de segundo orden general normalmente se escribe como:

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_0\omega_n^2\theta_i$$

ω_n : es la frecuencia angular con la cual el sistema oscilará libre en ausencia de cualquier tipo de amortiguamiento.

ε : es el factor de amortiguamiento relativo.

- Cuando $\varepsilon = 0$, se tiene oscilaciones libres.
- Cuando $\varepsilon < 1$, amortiguamiento causará oscilaciones que desaparecerán.
- Cuando $\varepsilon > 1$, amortiguamiento será lo suficientemente grande que no habrá oscilaciones.



RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial de segundo orden se puede resolver mediante el método antes descrito para la ecuación de primer orden:

Se sustituye θ_o :

$$\theta_o = u + v$$

Respuesta Forzada

Respuesta Transitoria

Para v :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2 v = b_0 \omega_n^2 \theta_i$$

Para u :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0$$

Para resolver la **ecuación transitoria** se puede probar una solución de la forma: $u = Ae^{st}$

Luego: $\frac{du}{dt} = Ase^{st}$ y, $\frac{d^2u}{dt^2} = As^2e^{st}$

Ecuación Auxiliar

Entonces: $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0 \implies As^2e^{st} + 2\varepsilon\omega_n Ase^{st} + \omega_n^2 Ae^{st} = 0 \implies s^2 + 2\varepsilon\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Las raíces de la ecuación auxiliar se pueden obtener factorizando o utilizando la fórmula general para las ecuaciones cuadráticas:

$$s = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \quad \begin{cases} s_1 = -\varepsilon\omega_n + \omega_n \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \\ s_2 = -\varepsilon\omega_n - \omega_n \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \end{cases}$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Los valores de s que se obtienen a partir de la ecuación anterior dependen en gran medida de $\varepsilon^2 - 1$.

De esta manera, cuando $\varepsilon^2 > 1$, la raíz cuadrada es positiva.

De esta manera, cuando $\varepsilon^2 < 1$, la raíz cuadrada es negativa.

El factor de amortiguamiento relativo es crucial, ya que determina si el número al que se extrae raíz cuadrada es positivo o negativo y, por lo tanto, la forma que tendrá la salida del sistema.

- Cuando $\varepsilon > 1$, entonces hay 2 raíces reales diferentes s_1 y s_2 :

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\varepsilon\omega_n + \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \\ s_2 &= -\varepsilon\omega_n - \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \text{ y así la solución general para } u \text{ es: } u = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Respuesta Transitoria para sistema sobre-amortiguado

- Cuando $\varepsilon = 1$, entonces hay 2 raíces reales iguales $s_1 = s_2 = -\omega_n$:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n \quad \text{y así la solución general para } u \text{ es: } u = (At + B)e^{-\omega_n t}$$

Respuesta Transitoria para sistema críticamente amortiguado

Podría parecer que la solución en este caso sería $u = Ae^{st}$, pero tal solución, con una sola constante A , no satisface las condiciones iniciales para un sistema de segundo orden.

RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

- Cuando $\varepsilon < 1$, entonces hay 2 raíces complejas:

$$s = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\varepsilon^2 - 1)} = -\varepsilon\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(-1)(1 - \varepsilon^2)} \quad \longrightarrow \quad s = -\varepsilon\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{(1 - \varepsilon^2)} \quad \omega$$

$$\text{Luego: } s = -\varepsilon\omega_n \pm j\omega \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -\varepsilon\omega_n + j\omega \\ s_2 = -\varepsilon\omega_n - j\omega \end{array} \right.$$

ω es la **frecuencia angular del movimiento** cuando está en la condición amortiguada especificada por ε . La solución en estas condiciones es:

$$u = Ae^{(-\varepsilon\omega_n + j\omega)t} + Be^{(-\varepsilon\omega_n - j\omega)t} = e^{-\varepsilon\omega_n t} [Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}]$$

$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\text{sen}(\omega t)$

$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)$

Por lo tanto:

$$u = e^{-\varepsilon\omega_n t} [A\cos(\omega t) + jA\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t) - jB\text{sen}(\omega t)] = e^{-\varepsilon\omega_n t} [(A + B)\cos(\omega t) + j(A - B)\text{sen}(\omega t)]$$

Si se sustituyen las constantes P y Q para $(A + B)$ y $j(A - B)$, entonces:

$$u = e^{-\varepsilon\omega_n t} [P\cos(\omega t) + Q\text{sen}(\omega t)]$$

Respuesta Transitoria para sistema
sub-amortiguado

RESPUESTA DEL SISTEMA

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Para resolver la **ecuación forzada** se considera una forma particular de la señal de entrada y de esta manera se prueba una solución. Así, para una entrada escalón de magnitud θ_i en el tiempo $t = 0$, se puede probar una solución de la forma:

$$v = k \quad \text{dado que } k = cte: \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{d^2v}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2 v = b_0\omega_n^2\theta_i \quad \longrightarrow \quad v = k = b_0\theta_i$$

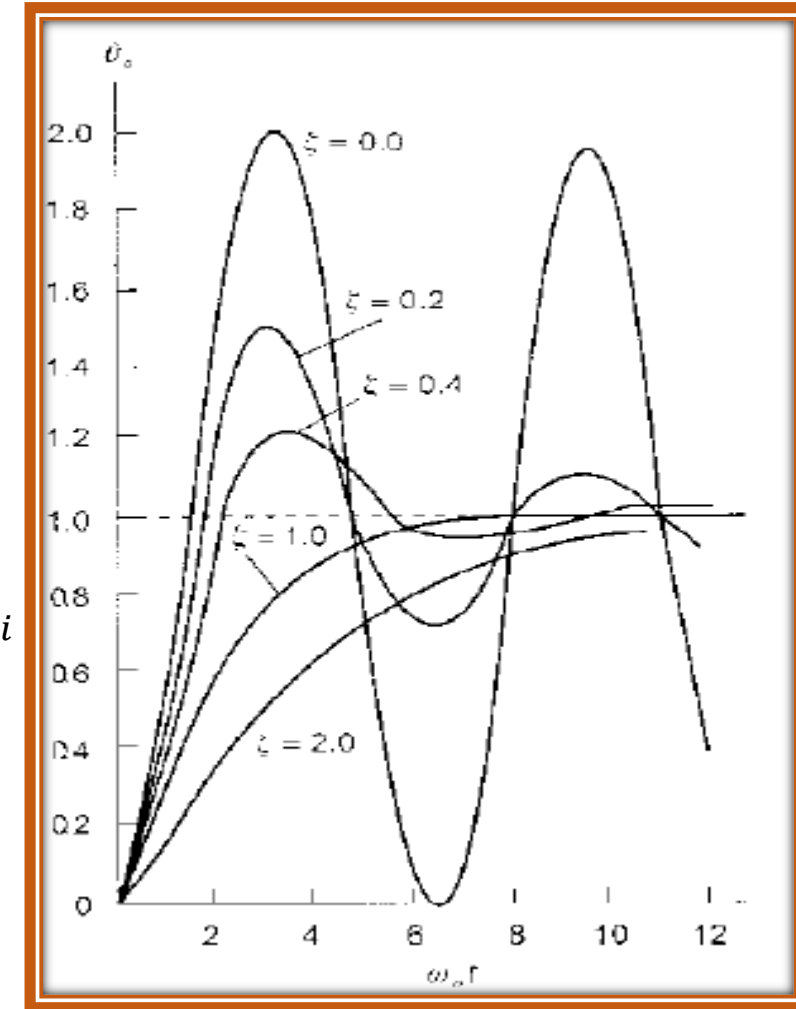
La solución completa es, de esta manera, la suma de u y v . Así:

- Para un sistema sobre-amortiguado: $\theta_o = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t} + b_0\theta_i$
- Para un sistema críticamente amortiguado: $\theta_o = (At + B)e^{-\omega_n t} + b_0\theta_i$
- Para un sistema sub-amortiguado: $\theta_o = e^{-\varepsilon\omega_n t} [P\cos(\omega t) + Q\sen(\omega t)] + b_0\theta_i$

Para las 3 ecuaciones, cuando $t \rightarrow \infty$ luego $\theta_o = b_0\theta_i$.

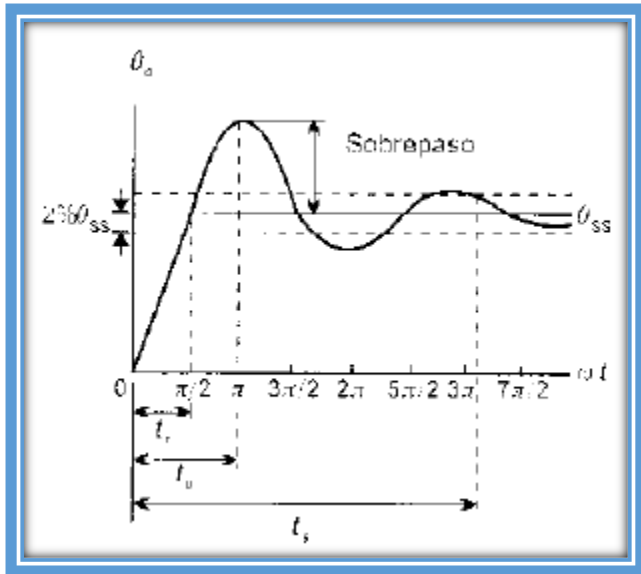
$$\text{De esta manera: } G_{ss} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = b_0$$

Función Transferencia
en Estado estable



RESPUESTA DEL SISTEMA

MEDIDAS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN



La figura ilustra la forma típica de la respuesta de un sistema sub-amortiguado a una entrada escalón. Se emplean algunos términos para especificar tal desempeño:

- El **tiempo de levantamiento** t_r es el tiempo que toma a la respuesta θ_o levantarse desde 0 hasta el valor en estado estable θ_{ss} , y es la medida de qué tan rápido el sistema responde a una entrada. Éste es el tiempo para que la respuesta oscilatoria complete $\frac{1}{4}$ de ciclo; es decir, $\frac{\pi}{2}$:

$$\omega t_r = \frac{\pi}{2}$$

- El **tiempo pico** t_p es el tiempo que toma a la respuesta θ_o levantarse desde 0 hasta el primer valor pico. Éste es el tiempo para que la respuesta oscilatoria complete $\frac{1}{2}$ de ciclo; es decir, π :

$$\omega t_p = \pi$$

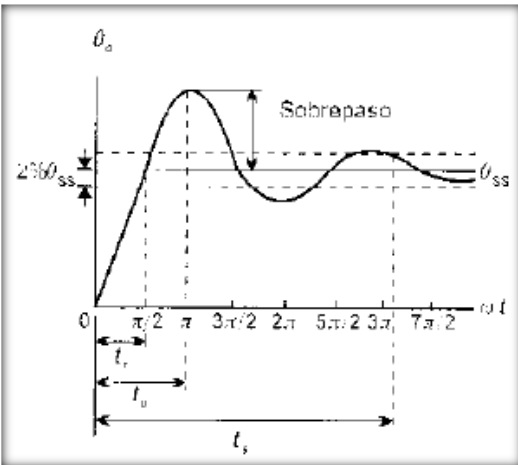
- El **sobrepaso** es la máxima cantidad que adquiere la respuesta por encima del valor en estado estable. Ésta es, así, la amplitud del primer pico. Con frecuencia, el sobrepaso se escribe como un porcentaje del valor en estado estable:

$$\text{Sobrepaso} = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]} \longrightarrow \text{Sobrepaso} = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]} * 100\%$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

MEDIDAS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Una indicación de qué tan rápido decaen las oscilaciones la proporciona la *razón de asentamiento o decremento*. Es decir, la amplitud del segundo sobrepaso dividida entre la amplitud del primer sobrepaso. El primer sobrepaso se presenta cuando $\omega t = \pi$; el segundo sobrepaso, cuando $\omega t = 2\pi$. (tener en cuenta que aquí estamos tomando como segundo sobrepaso cuando llega a su máximo por debajo del valor estacionario)



$$\text{Primer sobrepaso} = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]}$$

$$\text{Segundo sobrepaso} = \theta_{ss} e^{\left[\frac{-2\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]}$$

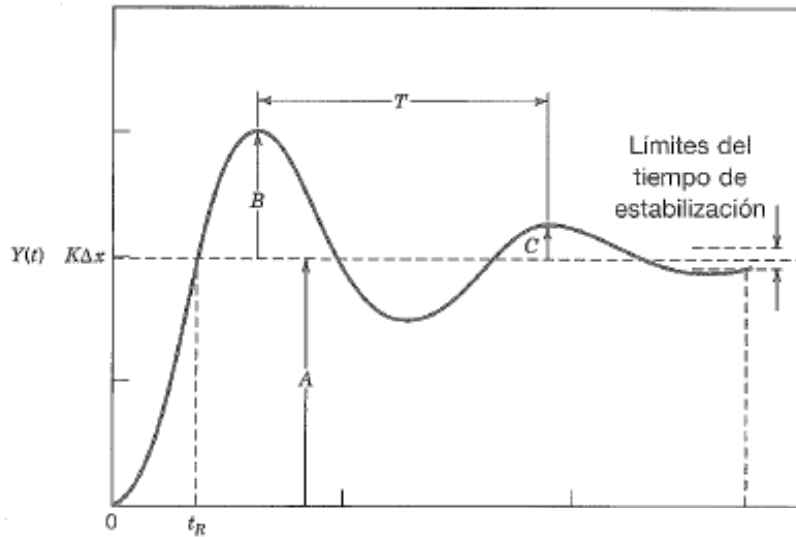
Luego, la razón de asentamiento es:

$$\text{Razón de asentamiento} = \frac{\text{Segundo sobrepaso}}{\text{Primer sobrepaso}}$$

$$\text{Razón de asentamiento} = \frac{\theta_{ss} e^{\left[\frac{-2\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]}}{\theta_{ss} e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]}} \Rightarrow \text{Razón de asentamiento} = e^{\left[\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} \right]}$$

- El *tiempo de asentamiento* t_s se emplea como una medida del tiempo que toman las oscilaciones en desaparecer. Éste es el tiempo que le toma a la respuesta decaer y mantenerse dentro de un porcentaje especificado (por ejemplo: 2%), alrededor del valor en estado estable. Esto significa que la amplitud debe ser menor al 2% de θ_{ss} .

La siguiente ecuación indica cómo varía la respuesta θ_o con el tiempo: $\theta_o = e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * [\theta_{ss} \cos(\omega t) + Q \sin(\omega t)] + \theta_{ss}$



$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\psi} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Razón de asentamiento. La razón de asentamiento (*decay ratio*) es la razón a la cual la amplitud de la onda sinusoidal se reduce durante un ciclo completo. Se define como el cociente de dos picos consecutivos en la misma dirección, C/B en la figura 2-5.2:

$$\text{Razón de asentamiento} = e^{-(\zeta/\tau)T} = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(tener en cuenta en esta ecuación que se define la razón de asentamiento entre 2 picos sucesivos máximos por encima del valor estacionario)

RESPUESTA DEL SISTEMA

MEDIDAS DE DESEMPEÑO PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

La amplitud de la oscilación es $(\theta_o - \theta_{ss})$, y de este modo: $Amplitud = e^{(-\varepsilon\omega_n t)} * [\theta_{ss} \cos(\omega t) + Q \sin(\omega t)]$

Los valores máximos de la amplitud se presentan cuando ωt es un múltiplo de π y así $\cos(\omega t) = 1$ y $\sin(\omega t) = 0$. El tiempo de asentamiento t_s , es cuando la amplitud máxima es el 2% de θ_{ss} . Entonces:

$$0,02\theta_{ss} = e^{(-\varepsilon\omega_n t_s)}\theta_{ss} \quad \longrightarrow \quad 0,02 = e^{(-\varepsilon\omega_n t_s)} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\ln(0,02)}_{3,9 \approx 4} = -\varepsilon\omega_n t_s$$

De esta manera:

$$\begin{cases} t_s = \frac{4}{\varepsilon\omega_n} & \text{para un 2\% de amplitud máxima.} \\ t_s = \frac{3}{\varepsilon\omega_n} & \text{para un 5\% de amplitud máxima.} \end{cases}$$

Puesto que: $Periodo = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ en un tiempo asentamiento t_s el número de oscilaciones que se presentan es:

$$Número\ de\ oscilaciones = \frac{tiempo\ de\ asentamiento}{periodo} = \frac{\frac{4}{\varepsilon\omega_n}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\omega}{\pi\varepsilon\omega_n} \quad \text{Puesto que: } \omega = \omega_n\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}$$

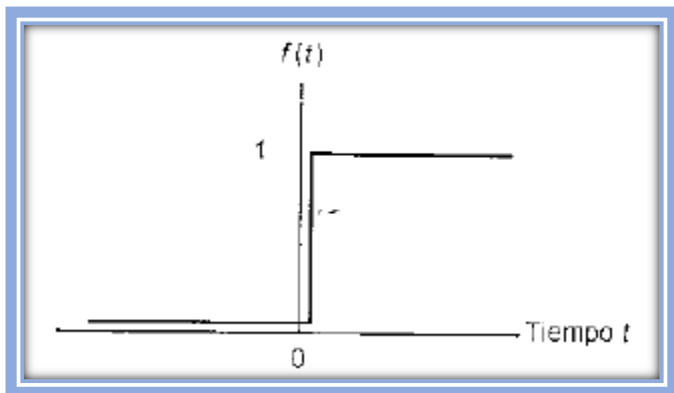
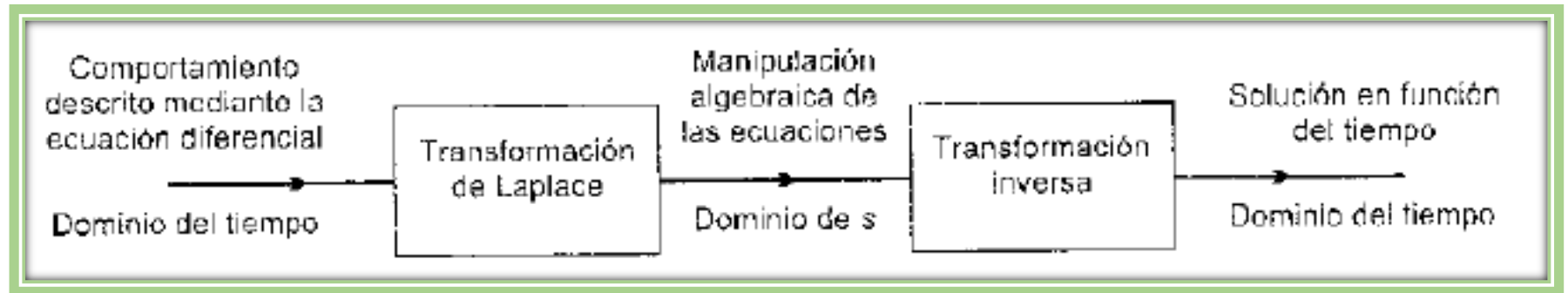
$$Número\ de\ oscilaciones = \frac{2\omega_n\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}{\pi\varepsilon\omega_n} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)}$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

La ecuación diferencial que describe cómo se comporta un circuito con el tiempo se transforma a relaciones algebraicas sencillas, que no involucran al tiempo, donde es posible realizar las manipulaciones algebraicas normales. Se dice que el comportamiento del circuito en el *dominio del tiempo* se transforma al *dominio de s*. Luego, se utiliza una transformada inversa a fin de obtener la solución que describe cómo la señal varía con el tiempo.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$



Transformada de Laplace para una función escalón:

$$f(t) = a \text{ para } t > 0$$

$$f(t) = 0 \text{ para } t < 0$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} a e^{-st} dt = \frac{a}{s}$$

Escalón General.

RESPUESTA DEL SISTEMA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Afortunadamente no siempre es necesario evaluar las integrales que se obtienen al realizar la transformada de Laplace, puesto que se dispone de tablas que proporcionan las transformadas de todas las funciones más comunes, que, combinadas con algunas reglas básicas para manipular dichas transformadas, permiten abordar los problemas por resolver.

Las reglas básicas son:

- La adición/sustracción de 2 funciones se convierte en la adición/sustracción de sus 2 transformadas de Laplace:

$$f_1(t) \pm f_2(t) \text{ se convierte en } F_1(s) \pm F_2(s)$$

- La multiplicación de una función por una constante se convierte en la multiplicación de la transformada de Laplace de la función por la misma constante:

$$af(t) \text{ ...se convierte en ... } aF(s)$$

- Una función que esté retrasada un tiempo T con valores de $T \geq 0$ se convierte en:

$$f(t - T) \text{ ...se convierte en ... } e^{-Ts}F(s)$$

- La derivada de una función $f(t)$ se convierte en:

$$\frac{df(t)}{dt} \text{ ...se convierte en ... } sF(s) - f(0)$$

- La derivada segunda de una función $f(t)$ se convierte en:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \text{ ...se convierte en ... } s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

- La integral de una función $f(t)$ se convierte en:

$$\int_0^{\infty} f(t) \text{ ...se convierte en ... } \frac{1}{s}F(s)$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para utilizar la transformada de Laplace en la solución de una ecuación diferencial, se adopta el siguiente procedimiento:

1. Transformar cada término de la ecuación diferencial en su equivalente en transformada de Laplace.
2. Realizar todas las operaciones algebraicas.
3. Convertir otra vez la función de Laplace resultante en una ecuación que dé una función del tiempo. A fin de emplear tablas para hacer la conversión, a menudo es necesario primero realizar una expansión en fracciones parciales para obtener de éstas formas estándares dadas en las tablas.

Ejemplo

$$3 \frac{dx}{dt} + 2x = 4 \quad \longrightarrow \quad 3[sX(s) - x(0)] - 2X(s) = \frac{4}{s} \quad \longrightarrow \quad 3s^2X(s) + 2sX(s) = 4 \quad \longrightarrow$$

$$X(s) = \frac{4}{3s^2 + 2s} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{s\left[s + \left(\frac{2}{3}\right)\right]}$$

Según tablas:

$$\frac{a}{s[s + a]} = 1 - e^{-at} \quad \longrightarrow \quad x = 2\left[1 - e^{-\left(\frac{2}{3}\right)t}\right]$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

El proceso de convertir una expresión algebraica en términos que sean fracciones simples se denomina descomposición en *fracciones parciales*. Por ejemplo, la conversión de:

$$\frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 2}$$

- factorizar el denominador, y el numerador debe ser al menos un grado menor que el denominador (el numerador tiene x a la primera potencia y el denominador a la segunda potencia).
- Si el grado del numerador es igual o mayor que el del denominador, el numerador se debe dividir entre el denominador para obtener términos en los que se tengan numeradores que por lo menos sean de un grado menor al del denominador.

Existen 3 tipos de fracciones parciales:

■ Factores lineales en el denominador:
$$\frac{f(s)}{(s + a)(s + b)(s + c)} = \frac{A}{s + a} + \frac{B}{s + b} + \frac{C}{s + c}$$

■ Factores lineales repetidos en el denominador:
$$\frac{f(s)}{(s + a)^2} = \frac{A}{s + a} + \frac{B}{(s + a)^2} + \frac{C}{(s + a)^3} + \dots + \frac{N}{(s + a)^n}$$

■ Factores cuadráticos en el denominador, cuando éstos se factorizan sólo con términos imaginarios:
$$\frac{f(s)}{(as^2 + bs + c)(s + d)} = \frac{As + B}{as^2 + bs + c} + \frac{C}{s + d}$$

RESPUESTA DEL SISTEMA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sin importar la forma de las fracciones parciales, los valores de las constantes A, B, C, etc , se pueden encontrar al combinar las fracciones parciales de una expresión con el mismo denominador que la ecuación original. Así:

$$\frac{3x + 4}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} \longrightarrow \frac{3x + 4}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} \longrightarrow 3x + 4 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

El procedimiento consiste entonces en elegir valores de la variable con los que algunos términos se hagan cero

$$\text{Si } x = -2, \text{ entonces: } 3(-2) + 4 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1) \longrightarrow B = 2$$

$$\text{Si } x = -1, \text{ entonces: } 3(-1) + 4 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1) \longrightarrow A = 1$$

$$\boxed{\frac{3x + 4}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 2}}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Teorema del valor final

Teoremas del valor inicial y del valor final:

Los teoremas del valor inicial y del valor final son útiles cuando es necesario determinar, a partir de la transformada de Laplace, el comportamiento de la función $f(t)$ en 0 y en ∞ .