Sistemas de Automatización
AÑO 2021

UNIDAD 6
Transformada Z

Profesores:
Ing. María Susana Bernasconi-
sbernasc@uncu.edu.ar
susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli
fernandogeli@gmail.com

Bibliografía:

Ingeniería de Control- W. BOLTON

Unidad 6 - INTRODUCCIÓN AL CONTROL DIGITAL Y A LA TRANSFORMADA “z”

6.A: Controladores basados en microprocesador, introducción.

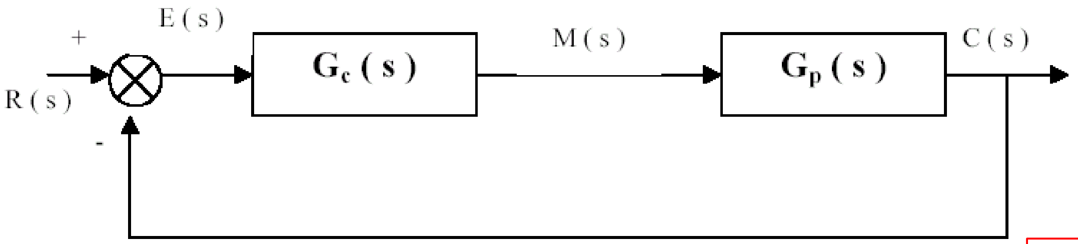
6.B: Transformada Z.

6.C: Transformada Z inversa.

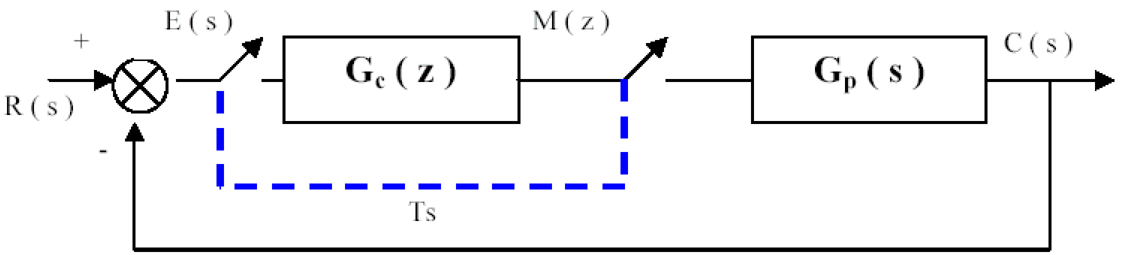
6.D: Funciones de transferencias en lazos continuos y muestreados.

6.E: Análisis del algoritmo PID digitalizado.

6.F: Estabilidad de sistemas muestreados.

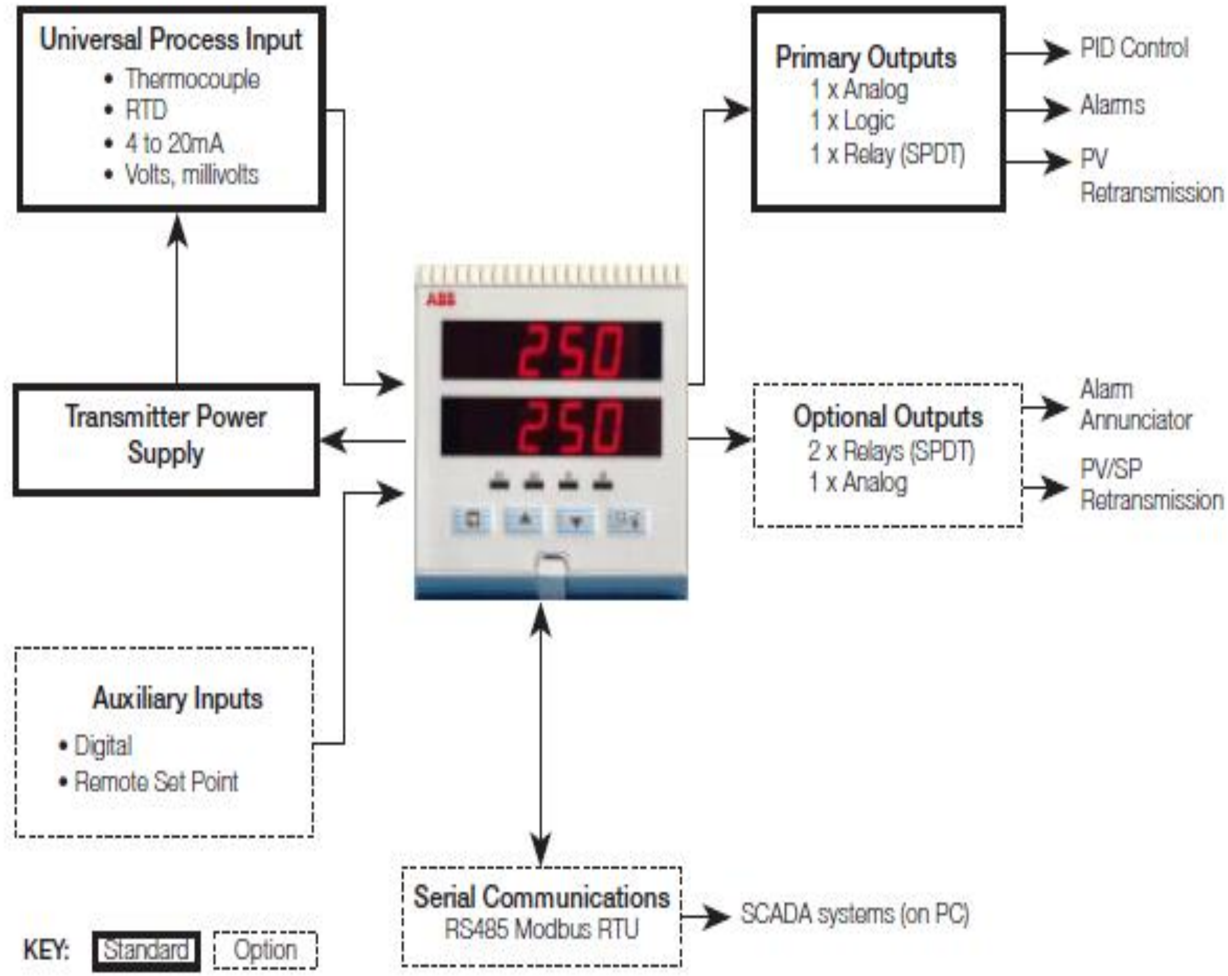


$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)$$

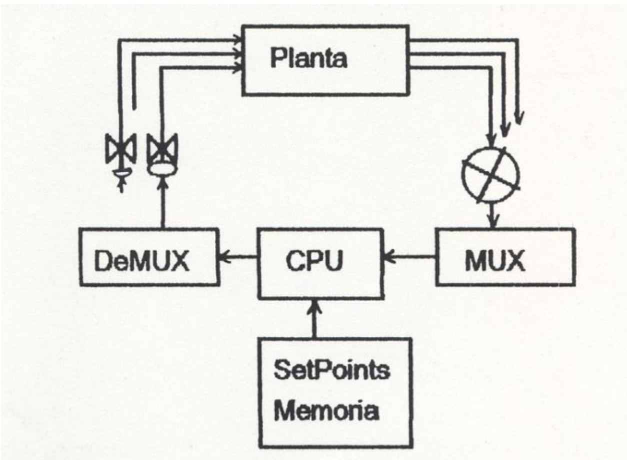


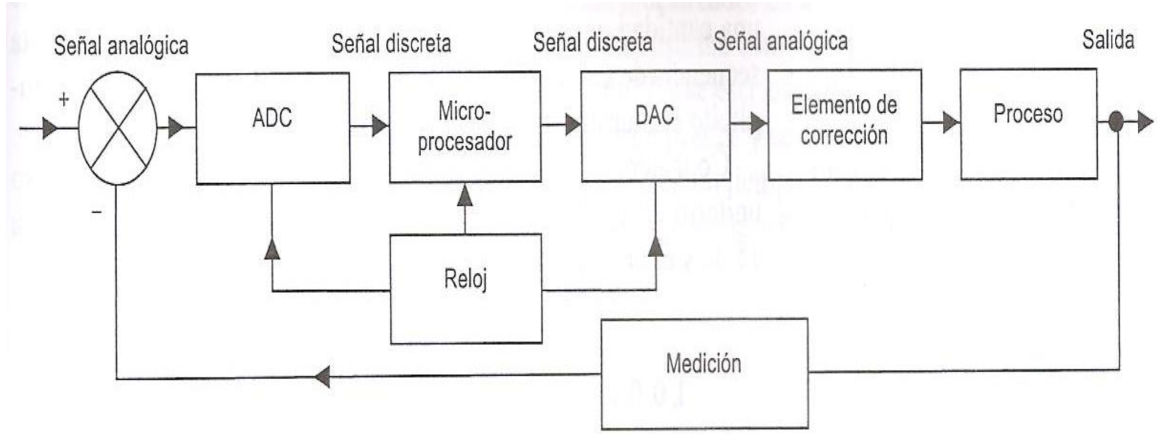
$$G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}$$

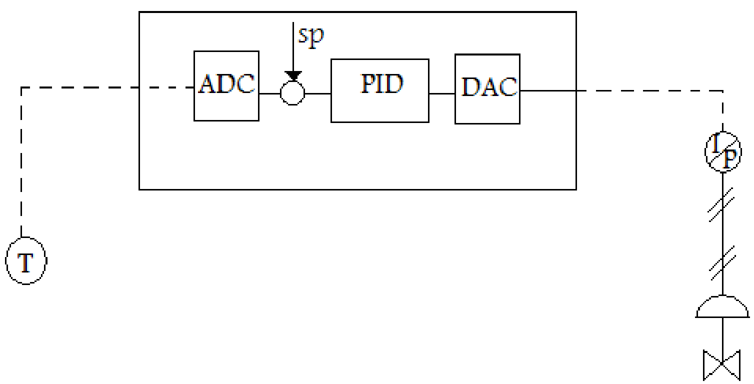
Controladores basados en microprocesador



Controladores basados en microprocesador







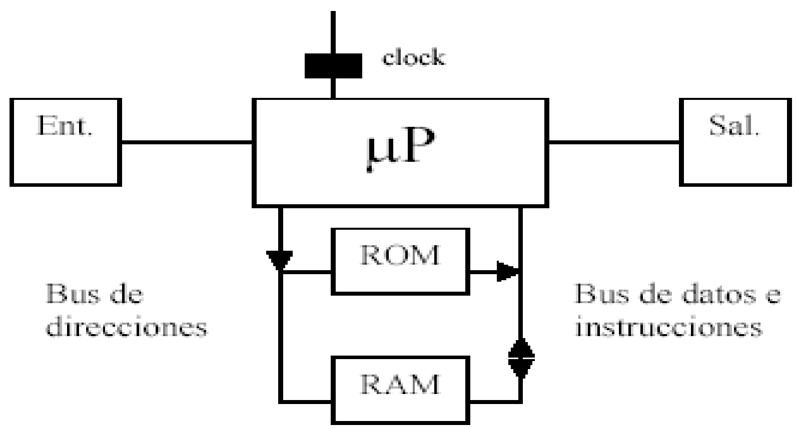
La entrada (o entradas para controladores multilazos) será una señal que en 4 – 20 mA llegan desde un transmisor en campo y la salida (o salidas para controladores multilazos) también en 4 – 20 mA, irá al convertidor de corriente a presión (I/P) si el elemento final de control es una válvula o directamente en corriente si es un variador de frecuencia.

-Microprocesador:

CPU: reconoce y ejecuta las instrucciones de un programa

INTERFASES DE E/S: dispositivos periféricos.
Los circuitos de interfase sincronizan la transferencia de datos con el microprocesador

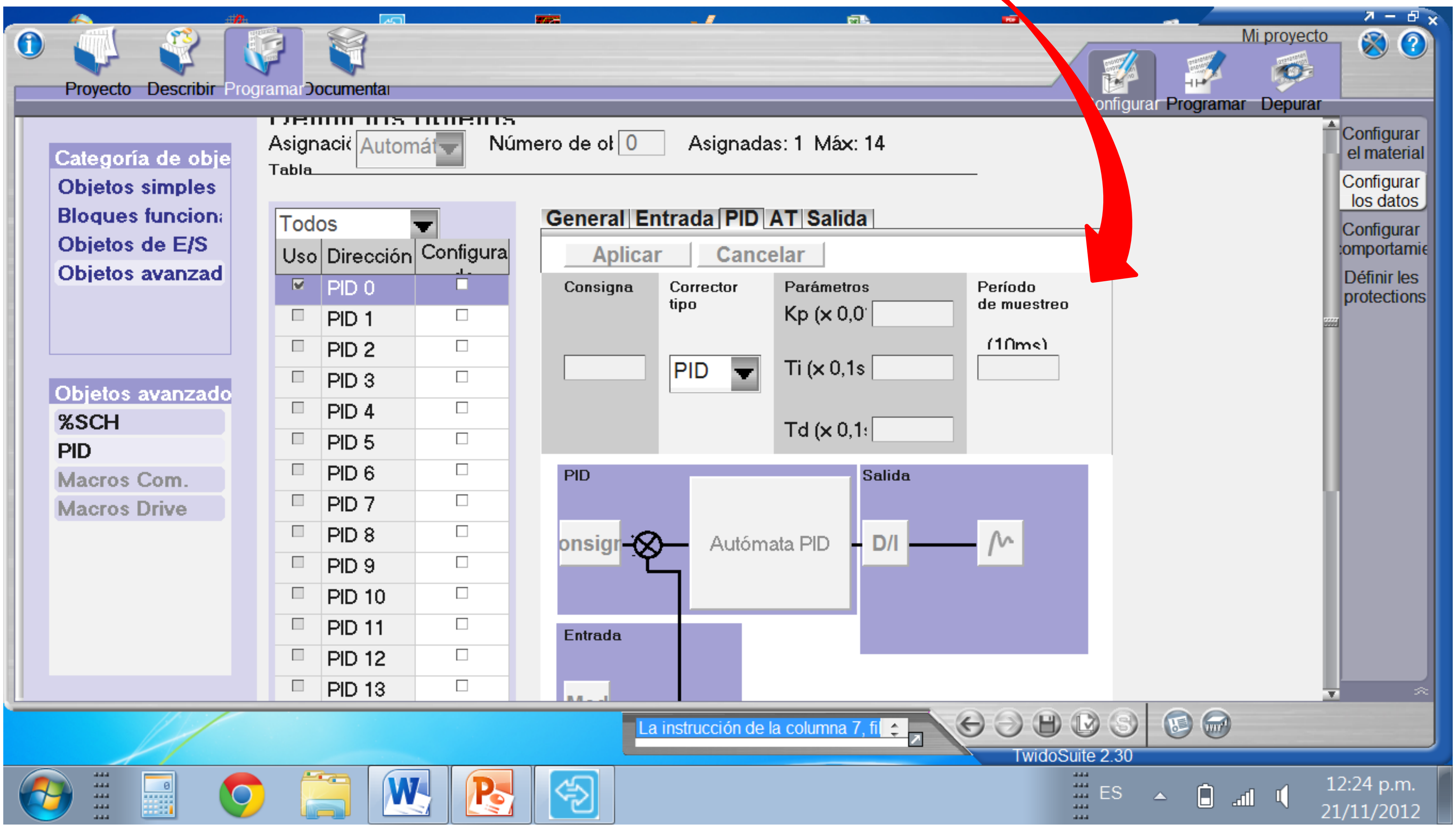
- 4-20 mA, 0-20mA, 0-10V, RTD, TC
- salida de comunicaciones digitales RS-422 o RS-485 (que mediante una interfase a RS-232C posibilita el dialogo con PC´s)
- salidas USB,
- panel frontal de operación



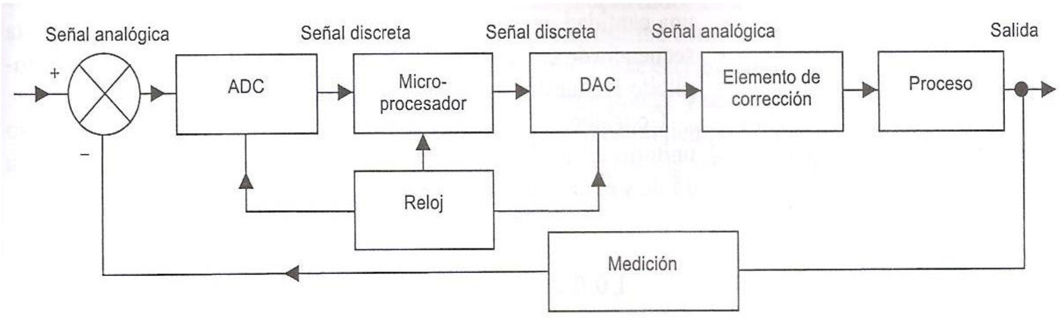
-MEMORIAS:

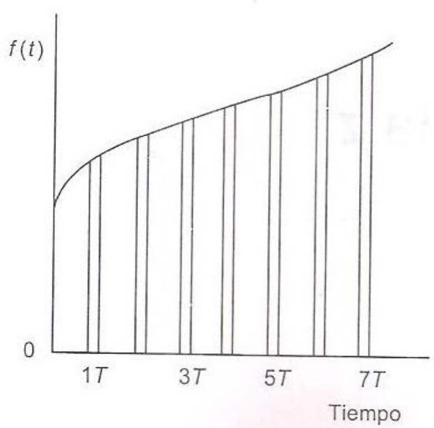
- ROM: (firmware) sistema de arranque (boot) , algoritmo PID, biblioteca de funciones , por ejemplo, para linealizado de termocuplas, según el tipo que se trate (J, K, R, S...), totalizado de caudales, álgebra para cálculos sencillos, etc.
- RAM: (software) Cuando el sistema se activa, el software se puede cargar en la RAM desde cualquier periférico (teclado, disco duro, discos flexibles) . Se guardan datos temporales con los que se están realizando operaciones .

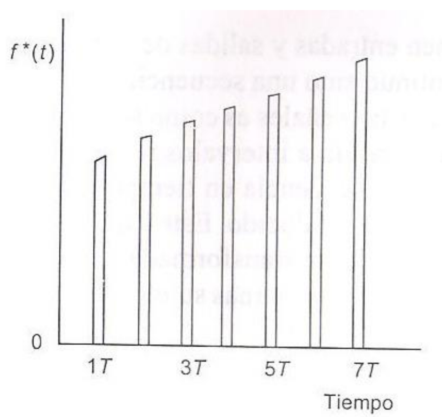
T :   intervalo entre pulsos



Funciones muestreadas:







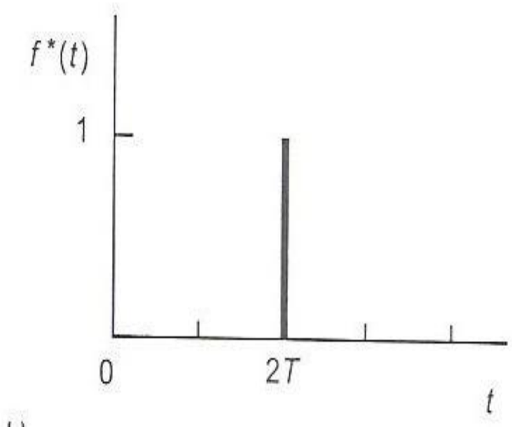
La señal antes del ADC se puede representar como f(t) ya que es una señal continua.

El reloj alimenta un pulso cada T seg. Cada vez que el ADC recibe un pulso, muestrea la señal de error y provoca a la entrada del microprocesador una serie de pulsos.

Esta señal muestreada y convertida a una señal en tiempo discreto, se representa como $f^{*}(t)= f(kT)$, donde k es un entero que indica el numero de la secuencia de los impulsos y f[kT] es el valor de la secuencia en el t=kT

.

$$\boxed{f^{*}(t)= f(kT)= f[kT]\delta(t)}$$

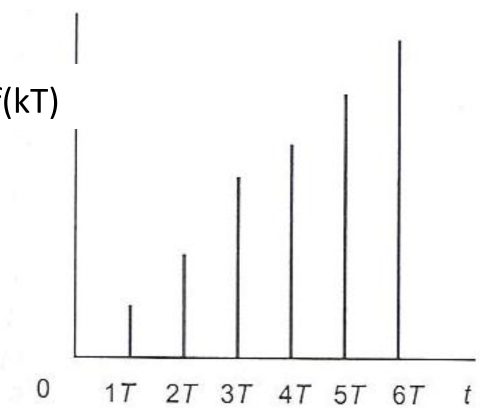


Impulso unitario en t=2T

$f^*(t)= f(kT)= f[kT]\delta(t\text{-}kT)$ cuando el impulso se produce en el t= kT

$0\delta(t)$, $0\ \delta(t\text{-}1T)$, $1\ \delta(t\text{-}2T)$, $0\ \delta(t\text{-}3T)$, ...

$f^*(t)= f(kT)$

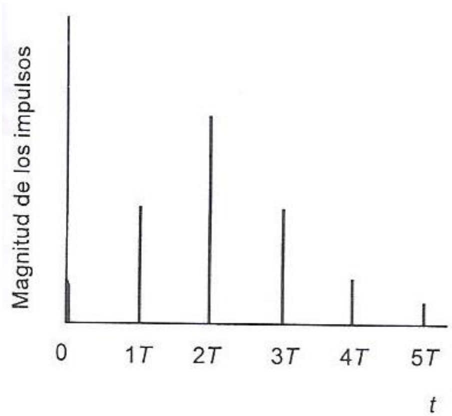


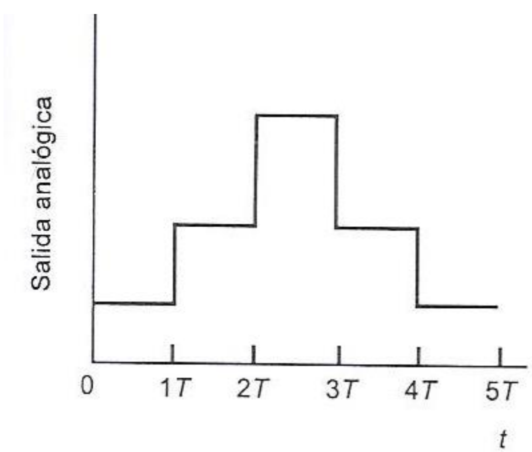
$f^*(t)= 0\delta(t)+1\ \delta(t\text{-}1T)+ 2\ \delta(t\text{-}2T)+ 3\ \delta(t\text{-}3T)+ \ldots$

$\ldots.+f[k]\ \delta(t\text{-}kT)$

Se puede representar como $0\delta(t)$, $1\ \delta(t\text{-}1T)$, $2\ \delta(t\text{-}2T)$, $3\ \delta(t\text{-}3T)$, ...

Reten de orden cero ZOH (Zero-order hold)





Un convertidor digital a analógico (DAC) convierte su entrada (señal codificada en binario) en una secuencia de impulsos cuyo intervalo es el tiempo de muestreo y sus magnitudes están relacionadas con la magnitud de la señal en los tiempos considerados. Esta señal en tiempo continuo se reconstituye a partir de la discreta mediante la retención del DAC del valor previo de un impulso hasta que llega el siguiente pulso convertido .
En cada instante el pulso se lo puede considerar como la suma de dos señales escalón: una que se inicia en t=0 (positiva con altura=1) y otra que se inicia en t=T (con altura negativa de 1)
Se los denomina ZOH (Zero-order hold) . Puesto que la Transformada de Laplace del escalón unitario es 1/s y que empieza con retardo de T unidades de tiempo, podemos decir que

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

La transformada Z

f*(t)= f[0]δ(t)+ f[1] δ(t-1T)+ f[2] δ(t-2T)+ f[3] δ(t-3T)+ ….+f[k] δ(t-kT)

describe una secuencia de impulsos

La Transformada de Laplace de un impulso en t=0 es 1, en el tiempo t= 1T es e^{-Ts}, en el tiempo t= 2T es e^{-2Ts}

$L\{f^*(t)\} = F^*(s)$= f[0]+ f[1] e^{-Ts}+ f[2] e^{-2Ts}+ ….+f[k] e^{-kTs}= $\sum_{k=0}^{\infty} f[k]e^{-kTs}$

$z = e^{Ts}$ ⇨ $s = \frac{1}{T} lnz$

$F^*(s)$ con $s = \frac{1}{T} lnz$ se denomina **Transformada Z y se escribe** $Z\{f(k)\} = F(z)$ donde cada periodo de retardo da como resultado un impulso que se multiplica por z^{-1}

$$Z\{f(k)\} = F(z)$$
$$= f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \cdots ..+f[k]z^{-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}$$

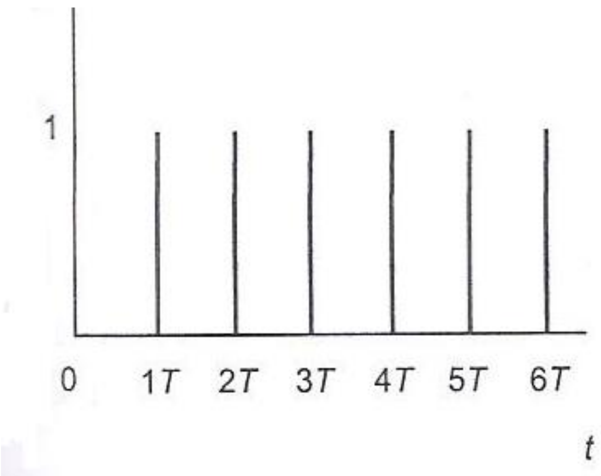
Para el caso de un escalón unitario muestreado:

f(t)=1

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + \ f[2]z^{-2} + \cdots .. + f[k]z^{-k}$$

f*(t)

$$= 1z^{0} + 1z^{-1} + \ 1z^{-2} + \cdots .. + 1z^{-k}$$



Esta serie puede escribirse como:

$$F(z) = \frac{1}{1-(\frac{1}{z})} = \ \frac{z}{z-1}$$

Si la secuencia fuera 0,1,1,1,1,1

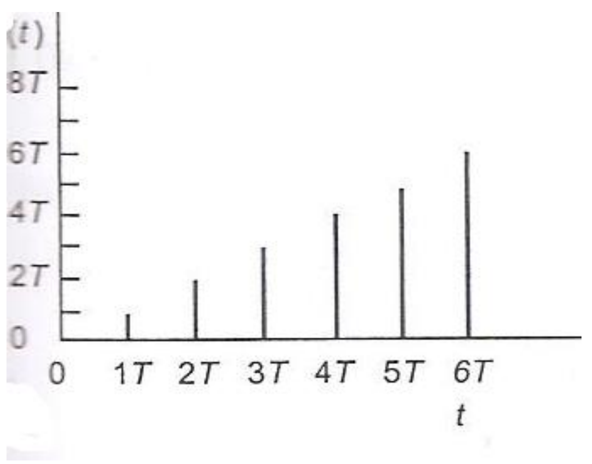
F(z)= $0z^0 + 1z^{-1} + \ 1z^{-2} + \cdots .. + 1z^{-k}$

que corresponde a la secuencia anterior retardada un intervalo de muestreo (la multiplicación por z^{-1} denota este retraso)

Para un escalón retardado kT intervalos de tiempo:

$$\boxed{F(z) = \frac{z.z^{-k}}{(z-1)}}$$

f*(t)



$$\boxed{F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}}$$

Algunas Propiedades básicas:

1**) Linealidad:**

La transformada z de la suma de 2 secuencias f[k] y g[k] es la suma de las transformadas z de las secuencias cuando se las considera por separado

$$Z\{f[k]+g[k]\} = Z\{f[k]\} + Z\{g[k]\}$$

La transformada z de una secuencia f[k] multiplicada por una constante es misma transformada z de la secuencia multiplicada por la constante$Z\{af[k]\} = aZ\{f[k]\}$

2) **Teorema del valor inicial y del valor final**

El teorema del **valor inicial** proporciona el valor de la función del tiempo cuando t=0

$$f[0] = \lim_{t\to 0} f[k] = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

El teorema **del valor final** da, siempre que exista limite, el valor que tiene la función a medida que tiempo tiende a un valor infinito, es decir la condición estable

$$f[\infty] = \lim_{t\to\infty} f[k] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$$

Ejemplo:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1).(z-0.5)} = \frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5} = \frac{1}{1-\frac{1.5}{z}+\frac{0.5}{z^2}}$$

Aplicando teorema valor inicial $=\lim_{z\to\infty} F(z) = 1$

Aplicando teorema valor final $=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z) = \lim_{z\to 1}(\frac{z-1}{z})(\frac{z^2}{(z-1).(z-0.5)}) =$

$\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-0.5)} = 2$

Transformada z inversa:

a) Expresar la función descomponiéndola en fracciones parciales:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1).(z-0.5)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z-0.5} = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.5}$$

- 1° termino es la transformada z de un escalón unitario muestreado x2
- 2° termino es la transformada de $a^k por\ lo\ tanto = (0.5)^k$ x2

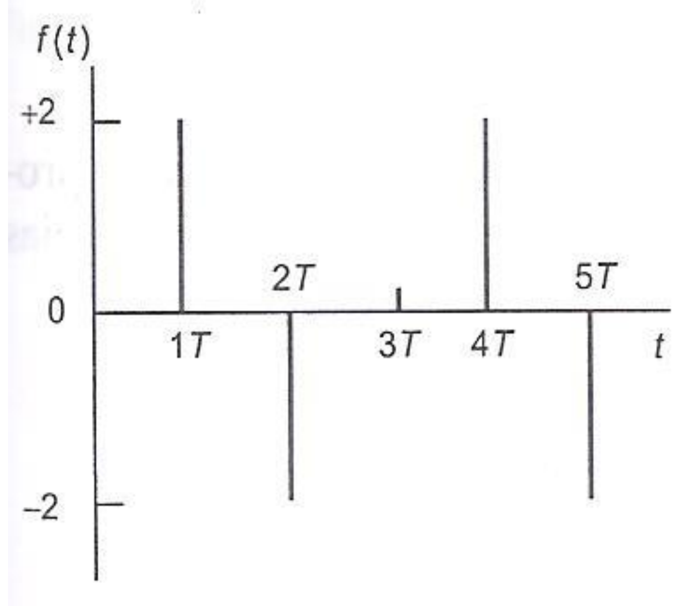
F[k]=2 u[k]- 2 $(0.5)^k$

que corresponde a la secuencia: 0, 1, 1.5, 1.75

b) Expansión como una serie de potencias mediante división larga:

$$F(z)=\frac{2z}{z^2+z+1}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2z^{-1}-2z^{-2}+2z^{-4}-2z^{-5}+\ldots \\
\hline
z^2+z+1 & 2z \\
 & \underline{2z+2z^0+2z^{-1}} \\
 & \quad -2z^0-2z^{-1} \\
 & \quad \underline{-2z^0-2z^{-1}-2z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad 2z^{-2} \\
 & \qquad\qquad \underline{2z^{-2}+2z^{-3}+2z^{-4}} \\
 & \qquad\qquad\quad -2z^{-3}-2z^{-4} \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-2z^{-3}-2z^{-4}-2z^{-5}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 2z^{-5}
\end{array}
$$



$$F(z)=\frac{2z}{z^2+z+1}= \;0z^0+2z^{-1}-2z^{-2}+0z^{-3}+2z^{-4}-2z^{-5}+\cdots\ldots$$

que es la secuencia en tiempo discreto 0,2,-2,0,2,-,2,....