Unidad 7: Análisis dimensional y Semejanza

Análisis dimensional

Una **dimensión** es una medida de una cantidad física sin valores numéricos, mientras que una **unidad** es una manera de asignar un número a la dimensión. Por ejemplo, la longitud es una dimensión, pero el centímetro es una unidad. Existen siete dimensiones primarias:

Dimensiones primarias y sus unidades SI e inglesas primarias equivalentes

Dimensión	Símbolo*	Unidad SI	Unidad inglesa
Masa	m	kg (kilogramo)	lbm (libra-masa)
Longitud	L	m (metro)	ft (pie)
Tiempo†	t	s (segundo)	s (segundo)
Temperatura	T	K (kelvin)	R (rankine)
Corriente eléctrica	I	A (ampere)	A (ampere)
Cantidad de luz	C	cd (candela)	cd (candela)
Cantidad de materia	N	mol (mole)	mol (mole)

Eliminación de dimensiones-adimensionalidad: si cada término en una ecuación se divide entre un conjunto que tenga las mismas dimensiones, la ecuación queda sin dimensiones, y se denominan **adimensionales**. Si, además, los términos adimensionales en la ecuación son de orden de magnitud de uno, la ecuación se llama **normalizada**. Los beneficios de eliminar las dimensiones son que *se identifican las relaciones entre los parámetros clave en el problema* y en que *el número de parámetros en una ecuación adimensional es menor que el número de parámetros en la ecuación original*.

Las **variables dimensionales** se definen como cantidades dimensionales que cambian o varían en el problema, mientras que las **variables adimensionales** se definen como cantidades que cambian o varían en el problema, pero que no tienen dimensiones; un ejemplo es el ángulo de rotación, que se mide en grados o radianes, que son unidades adimensionales. El término **parámetros** (o módulos) se usa para el conjunto combinado de variables dimensionales, variables adimensionales y constantes dimensionales en el problema.

Análisis dimensional → Método físico-matemático que permite establecer la relación existente entre las variables que intervienen en un fenómeno agrupándolas en un número reducido de módulos adimensionales. Facilita la interpretación de los resultados.

Módulos adimensionales → Agrupación de variables sin dimensiones físicas. Algunos módulos o parámetros de interés son:

Reynolds number	$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$	Specific-heat ratio	$k = \frac{c_p}{c_v}$	Pressure coefficient	$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$
Mach number	$Ma = \frac{U}{a}$	Strouhal number	$St = \frac{\omega L}{U}$	Lift coefficient	$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$
Froude number	$Fr = \frac{U^2}{gL}$	Roughness ratio	$\frac{\epsilon}{L}$	Drag coefficient	$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$
Weber number	$We = \frac{\rho U^2 L}{\Upsilon}$	Grashof number	$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	Eckert number	$Ec = \frac{U^2}{c_p T_0}$
Cavitation number (Euler number)	$Ca = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$	Temperature ratio	$\frac{T_w}{T_0}$	Prandtl number	$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$

El análisis adimensional se fundamenta en la **ley de la homogeneidad dimensional:** "Todo término aditivo en una ecuación debe tener las mismas dimensiones". Además de homogeneidad dimensional, los cálculos son válidos sólo cuando las unidades también son homogéneas en cada término aditivo.

Trabajamos con dos métodos de análisis dimensional, el método de todo de Rayleigh y el método de Buckingham.

Método de Rayleigh → Método simple y directo de obtención de módulos adimensionales. Pero para un gran número de variables debo realizar un experimento ya que sino sólo me da una idea del orden.
La resolución a través de este método consiste en determinar las variables puestas en juego a fin de obtener la expresión analítica y luego seguir 6 pasos.

Consideremos el diseño de un submarino de manera experimental a escala laboratorio en un túnel de agua.
- Las variables → Fuerza de arrastre (F_a), velocidad del fluido (u), geometría del sólido (d), propiedades del fluido (ρ, μ)
- Expresión empírica → (Fa, u, d, ρ, μ) = 0

1) Establecemos una función potencial de la variable dependiente con el resto y consideramos una constante ψ

$$F_a = \psi \cdot u^a \cdot d^b \cdot \mu^c \cdot \rho^d$$

2) Sustituimos variables por sus dimensiones

$$F_a = MLt^{-2} \quad \therefore \quad u = Lt^{-1} \quad \therefore \quad d = L \quad \therefore \quad \mu = ML^{-1}t^{-1} \quad \therefore \quad \rho = ML^{-3}$$

$$MLt^{-2} = \psi \cdot (Lt^{-1})^a (L)^b (ML^{-1}t^{-1})^c (ML^{-3})^d$$

3) Ecuaciones de condición de homogeneidad

$$M \rightarrow 1 = c + d \quad \therefore \quad L \rightarrow 1 = a + b - c - 3d \quad \therefore \quad t \rightarrow -2 = -a - c$$

4) n-p incógnitas a fijar

$$\text{fijado } c \quad \rightarrow \quad a = 2 - c \quad \therefore \quad d = 1 - c \quad \therefore \quad b = 2 - c$$

5) Sustituyendo los exponentes calculados y fijados en la función potencial $F_a = \psi \cdot u^{2-c} \cdot d^{2-c} \cdot \mu^c \cdot \rho^{1-c}$

6) Desplazamos conjuntos de variables para ir formando los números adimensionales (conocimiento previo de la situación o fenómeno físico)

$$\boxed{\frac{F_a}{\rho u^2 \cdot d^2} = \varphi\left(\frac{\mu}{u \cdot d \cdot \rho}\right)^c} \rightarrow \quad C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Método de Buckingham → Método simple y sistemático que consiste en agrupar las variables de un problema en un número menor de grupos de variables adimensionales.
Está basado en el teorema de Buckingham el cual establece que: "*Si en un problema intervienen n variables, las cuales tienen m dimensiones independientes, se pueden formar k=n-m parámetros adimensionales π que nos permiten encontrar la ecuación*".

Si $f = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$ donde las X representan las variables n dimensionales, se deduce que se pueden reorganizar en un producto adimensional independiente de algunas de las X → $\phi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k) = 0$

Para la resolución a partir de este método debemos seguir 6 pasos:

1) Visualizar el problema y hacer una lista con las n variables que tienen influencia.

2) Hacer una lista con las dimensiones primarias de cada una de las n variables.

3) Establecer la reducción m como el número de dimensiones primarias. Calcular K=n-m, donde K es el número esperado de grupos π adimensionales.

4) Seleccionar un grupo de m variables que no puedan formar grupo adimensional, para usar como variables primarias de repetición. Formar los grupos π multiplicando los productos de las variables primarias, con exponentes desconocidos, por cada una de las variables restantes, una por una. Para esta selección debe tenerse en cuenta que:

- Nunca tomar la variable dependiente. De otro modo, podría aparecer en todas las π, lo que es indeseable.
- Los parámetros repetitivos elegidos no deben ser susceptibles de formar ellos mismos un grupo adimensional. De otro modo, sería imposible generar el resto de las π.
- Los parámetros repetitivos elegidos deben representar todas las dimensiones primarias en el problema.
- Nunca escoja parámetros que ya sean adimensionales. Éstos ya son π, por su cuenta.
- Nunca escoja dos parámetros con las mismas dimensiones o con dimensiones que difieran sólo por un exponente.
- Siempre que sea posible, elija constantes dimensionales sobre las variables dimensionales, de modo que sólo una
- contenga la variable dimensional.
- Escoja parámetros comunes porque ellos aparecen en cada una de las π.
- Escoja parámetros simples sobre los parámetros complejos siempre que sea posible.

5) igualar los exponentes de cada dimensión en ambos lados de cada ecuación π, y así hallar los exponentes y las formas de cada grupo adimensional.

6) Reorganizar los grupos π como desee. Se los puede elevar a un exponente constante, multiplicar por una constante pura, formar producto entre ellos con el fin de sustituir a otro π o sustituir un parámetro dimensional en el π por otro parámetro de las mismas dimensiones.

Ejemplo: Supongamos una experiencia en la que hemos establecido que el caudal que circula por un tubo es función de: $Q = f(\Delta P/L; D; \mu)$ $\rightarrow$ $f = \left(Q; \frac{\Delta P}{L}; D; \mu\right) = 0$

1) Tabla de dimensiones de cada magnitud:

Q	$L^3\,T^{-1}$
ΔP/L	$M\,L^{-2}\,T^{-2}$
D	L
μ	$M\,L^{-1}\,T^{-1}$

(1) Tienen que estar todas las magnitudes.

(2) Las dimensiones deben ser las correctas.

2) Establecer la cantidad de parámetros a formar (cantidad de variables): K=1 (parámetro adimensional)

$$\pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{y_1} D^{z_1}\mu$$

3) Se reemplazan las magnitudes por sus dimensiones:

$$\pi = M^0L^0T^0 = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1}(L)^{z_1}ML^{-1}T^{-1}$$

4) Se igualan en ambos miembros los exponentes de las mismas dimensiones:

$$M \rightarrow 0 = y_1 + 1 \qquad \rightarrow y_1 = -1$$

$$L \rightarrow 0 = 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 \qquad \rightarrow x_1 = 1$$

$$T \rightarrow 0 = -x_1 - 2y_1 - 1 \qquad \rightarrow z_1 = -4$$

5) Reemplazo los exponentes en la fórmula:

$$\pi = \frac{Q\mu}{\left(\frac{\Delta P}{L}\right)D^4} \rightarrow \Delta P = \frac{1}{\underset{k}{\underbrace{\pi}}} \times \frac{QL\mu}{D^4}$$ $\rightarrow$ comparamos la ecuación obtenida con la de Hagen – Poiseuille obtenemos π:

$$\Delta P = \frac{128}{\pi} \times \frac{QL\mu}{D^4}$$

Este método no proporciona la constante numérica (k) pero nos da la forma de la ecuación. El método es aplicable a cualquier ecuación de cualquier tipo.

Semejanza

Modelos hidráulicos → En muchos fenómenos son tantas las variables que intervienen, que muchas de ellas no se pueden abordar por vía analítica por lo que se recurre a ensayos sobre modelos a escala menor (puede ser una escala mayor). De esta forma, se aproximan soluciones reales sobre el modelo y sobre este se van modificando diversas situaciones. Todo el fundamento se basa en el hecho de que el experimento debe ser semejante a las condiciones a las que está sometido el prototipo. Los modelos a escala deben cumplir con las leyes de semejanza (implica las 3).

Semejanza geométrica → las relaciones entre todas las dimensiones homólogas entre modelo y prototipo son iguales. Hay proporción de longitudes.

$$\frac{L_{modelo}}{L_{prototipo}} = L_r \qquad \frac{A_{modelo}}{A_{prototipo}} = \frac{{L_{modelo}}^2}{{L_{prototipo}}^2} = {L_r}^2$$

Semejanza cinemática → Hay proporción de tiempo. Se refiere a que, en puntos homólogos, las trayectorias son geométricamente semejantes y las relaciones entre las velocidades, aceleraciones o caudal son iguales, la red de corriente debe ser semejante en ambos.

Para la velocidad: $\frac{V_m}{V_P} = \frac{L_m/T_m}{L_p/T_p} = \frac{L_r}{T_r} \rightarrow T_r = \frac{V_r}{L_r}$ (escala de tiempo)

Aceleración $\frac{a_m}{a_P} = \frac{L_m/{T_m}^2}{L_p/{T_p}^2} = \frac{L_r}{{T_r}^2}$

Caudal: $\frac{q_m}{q_P} = \frac{{L_m}^3/T_m}{{L_p}^3/T_p} = \frac{{L_r}^3}{T_r}$

Semejanza dinámica → Las relaciones entre las fuerzas homólogas en el modelo y prototipo son las mismas. Debe cumplirse la semejanza geométrica y dinámica.
Las fuerzas actuantes pueden ser cualquiera de las siguientes o una combinación de ellas: F gravitatoria, F de presión, F viscosas, F de elasticidad, F de tensión superficial y F de inercia.

- Gravedad: $F_g = mg = \rho L^3 g$
- Presión: $F_p = (\Delta P)A = (\Delta P)L^2$
- Viscosidad: $F_v = \mu \left(\frac{du}{dy}\right) A = \mu \left(\frac{V}{L}\right) L^2 = \mu V L$
- Elasticidad: $F_e = E_v A = E_v L^2$
- Tensión superficial: $F_t = \sigma L$
- Inercia: $F_i = ma = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho V^2 L^2$

Para la semejanza dinámica total, el factor de escala de fuerzas Fr debe ser constante, independientemente del campo de fuerzas considerado: $F_r = \frac{F_{gM}}{F_{gP}} = \frac{F_{pM}}{F_{pP}} = \frac{F_{vM}}{F_{vP}} = \frac{F_{eM}}{F_{eP}} = \frac{F_{tM}}{F_{tP}} = \frac{F_{iM}}{F_{iP}}$, y a partir de esta relación se obtienen ciertas magnitudes adimensionales que debe satisfacer el modelo y el prototipo:

- **Número de Reynolds:** es la relación de F de inercia y F viscosas. Se utiliza para el caso de conductos llenos de fluidos, donde las únicas fuerzas significativas son las inerciales y de fricción.

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{Ma}{\tau A} = \frac{\rho L^3 L}{\mu \frac{dv}{dy} L^2 T^2} = \frac{\rho L^2}{\mu \frac{dv}{dy} T^2} = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{dv}{dy}} = \frac{\rho v^2}{\mu \frac{v}{L}} = \frac{\rho v L}{\mu} \rightarrow \boxed{Re = \frac{\rho v L}{\mu}} \rightarrow \boxed{Re_m = Re_p}$$

- **Número de Euler:** se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las de presión. Este número tiene la particularidad de que es función de todos los otros números → $E = f(F, W, M, Re)$.
  En flujos confinados que trabajan a alta presión Eu es grande, en cambio en flujo con superficie libre el Eu es pequeño.
  $$Eu = \frac{F_i}{F_p} = \frac{V}{\sqrt{2\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)}} \rightarrow \boxed{E_m = E_p}$$
- **Número de Froude:** relación entre la fuerza de inercia y la de gravedad. Se utiliza cuando la fuerza predominante es la gravitatoria. Lo uso para analizar resistencia de los barcos por la acción de las olas, corriente sobre un pilar de puente, etc. La naturaleza del flujo depende de si el número de Froude es mayor o menor que 1.
  $$\frac{F_i}{F_g} = \frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho L^3 L}{\rho L^3 g T^2} = \frac{L}{gT^2} = \frac{v^2}{gL} = F^2 \rightarrow \boxed{F = \frac{v}{\sqrt{gL}}} \rightarrow \boxed{F_m = F_p}$$
  Si $F > 1 \rightarrow$ flujo rápido $v > \sqrt{gL}$, velocidad de onda elemental en un fluido líquido.

  Si $F < 1 \rightarrow$ flujo tranquilo $v < \sqrt{gL}$.
- **Número de Weber:** relación de fuerza de inercia y la de tensión superficial. Se utiliza para cosas de tamaño reducido. Tiene importancia cuando su valor es 1 o menos, en aquellos casos en que la curvatura de la superficie es comparable en tamaño a la profundidad del líquido (gotas, flujos capilares). Si el W toma un valor grande, su efecto puede despreciarse, mientras que más pequeño sea más importante es la tensión superficial. Importante para las interfaces g-l, l-l y l-s.
  $$\frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho L^3 L}{\sigma T^2 L} = \frac{\rho v^2 L}{\sigma} = \frac{v^2 L}{\sigma/\rho} = W^2 \rightarrow \boxed{W = v\sqrt{\frac{L}{\sigma/\rho}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}}} \rightarrow \boxed{W_m = W_p}$$
- **Número de Mach:** tiene influencia cuando se trabaja con fluidos compresibles que se mueven a alta velocidad (cerca de uno). Sirve para caracterizar los efectos de compresibilidad en un flujo. Es una medida de las fuerzas inerciales y las elásticas y también puede mostrarse como la razón entre la velocidad del modelo y la velocidad del sonido.
  $$Ma = \sqrt{\frac{F_i}{F_e}} = \left(\frac{\rho V^2 L^2}{E_v L^2}\right)^{1/2} = \frac{V}{\sqrt{\frac{E_v}{\rho}}} = \frac{V}{c}$$

El cumplimiento simultaneo de todas las igualdades anteriores: $Re_m=Re_p \quad Fr_m=Fr_p \quad Ma_m=Ma_p \quad We_m=We_p \quad Eu_m=Eu_p$ lleva al absurdo de que el factor de escala de longitudes sea 1, es decir que el modelo es el propio prototipo; lo que quiere decir que es imposible ensayar un modelo a escala, y que se conserve la semejanza en todos los campos de fuerza entre modelo y prototipo; no obstante, en los ensayos con modelos lo que se hace es considerar cual es el parámetro adimensional controlante, es decir el campo de fuerzas más importante (a parte del de inercia).

Ecuación de Bertrand

Se refiere al tema de estudio de los modelos en relación a los prototipos. Se escribe en mayúsculas el prototipo y en minúsculas el modelo.

Relaciones: $\frac{M}{\underbrace{m}_{\text{masa}}} = a$; $\frac{F}{\underbrace{f}_{\text{fuerza}}} = b$; $\frac{V}{\underbrace{v}_{\text{velocidad}}} = c$; $\frac{L}{\underbrace{l}_{\text{longitud}}} = d$; $\frac{T}{\underbrace{t}_{\text{tiempo}}} = e$

$F = M.a_p$; $f = m.a_m$

$$\frac{F}{f} = \frac{M}{m}\frac{a_p}{a_m} \rightarrow \frac{F}{f} = \frac{M}{m}\frac{L}{l}\frac{t^2}{T^2} \rightarrow \boxed{b = \frac{a.d}{e^2}}$$ Ecuación de Bertrand

La relación de fuerzas homólogas debe cumplir con esta ecuación en función de las escalas.

Aplicación

Para un fenómeno de gravedad (Barco).

$F = Mg \quad ; \quad f = mg$

$\rightarrow \frac{F}{f} = \frac{M}{m} \rightarrow b = a$

Como todas las fuerzas son homólogas, deben cumplir con Bertrand:

$\rightarrow b = \frac{a.d}{e^2}$

$b = a \rightarrow a = \frac{a.d}{e^2} \rightarrow d = e^2 \rightarrow e = \sqrt{d} \quad o \quad \frac{d}{e} = e$

Pero:

$\frac{V}{v} = \frac{L\,t}{T\,l} = \frac{d}{e} \rightarrow c = \frac{d}{e} \rightarrow \frac{d}{e} = \sqrt{d}$

$\frac{V}{v} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l}} \rightarrow \frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{v}{\sqrt{l}}$

Dividiendo por $\sqrt{g}$ ambos miembros obtenemos el número de Froude:

$\frac{V}{\sqrt{Lg}} = \frac{v}{\sqrt{lg}} \rightarrow \boxed{F_p = F_m}$

En un fenómeno donde predominen las fuerzas gravitatorias, se debe cumplir que los números de Froude del modelo y del prototipo sean iguales, para que exista semejanza.

Tipos de modelos

Antes de construir el prototipo se debe ensayar el modelo, es decir, a escala, la cual se hace en el laboratorio. Por ejemplo: elegimos 1:100 (100 veces más chico el modelo)
V =30 nudos.
Lo analizamos como fenómeno de superficie libre. ¿A qué velocidad debo mover el modelo para que la escala (experiencia) sea representativa?

$$F_p = F_m \rightarrow \frac{V}{\sqrt{Lg}} = \frac{v}{\sqrt{lg}} \rightarrow v = \frac{V}{\sqrt{L/l}} = \frac{30}{\sqrt{100}} = 3\ nudos$$

Supongamos que movemos el modelo a 3 nudos, y nos dicen que el prototipo se moverá con alas de 15 m, entonces mediremos en el modelo las fuerzas que esas alas producen sobre el modelo.

Ejemplo:

$f = 500\ gf \quad ; \quad F = ?$

Si los números de Froude son iguales, entonces también pueden ser iguales los de Euler.

$$E_p = E_m \quad ; \quad E = \frac{v}{\sqrt{\Delta P/\rho}} = \frac{v}{\sqrt{F/A\rho}}$$

$$\rightarrow \frac{V}{\sqrt{F/A_p\rho}} = \frac{v}{\sqrt{f/A_m\rho}} \rightarrow \frac{V}{v} = \sqrt{\frac{F/A_p\rho}{f/A_m\rho}} \rightarrow F = \left(\frac{V}{v}\right)^2 \frac{A_p}{A_m} f = 10^2 \times \frac{100}{1} \times 0{,}5 = 5\ toneladas$$

No siempre se puede diseñar el modelo en el fluido donde funcionará el prototipo $\rightarrow \boxed{Re_m = Re_p}$

Simulación

Consiste en reproducir la esencia del fenómeno, sin reproducir el fenómeno en sí. Cuando el proceso es muy complicado se simula.

Ejemplo: Supongamos un flujo laminar → Ecuación de Hagen – Poiseuille:

$$\Delta P = \frac{32\mu v L}{D^2} = R_h Q \qquad R_h\text{: resistencia hidráulica}$$

Comparamos con la ley de Ohm:

$$\Delta V = IR$$

$$\Delta P = R_h Q$$

Podemos simular circuitos hidráulicos (cañerías en paralelo) con resistencias en paralelo, es decir, con circuitos eléctricos. Éstos se llaman modelos análogos. La técnica de simulación da origen a la confección de modelos matemáticos (Laplace, Poisson, etc.), modelos análogos (aprovecha la similitud de dos fenómenos de distinta raíz) y modelos híbridos (relación entre ambos modelos: analógicos – matemáticos).