

Sistemas de Automatización  
AÑO 2021

## UNIDAD 6

### Funcion de Transferencia Pulso

Profesores:

Ing. María Susana Bernasconi-

[sbernasc@uncu.edu.ar](mailto:sbernasc@uncu.edu.ar)

[susybernasconi@gmail.com](mailto:susybernasconi@gmail.com)

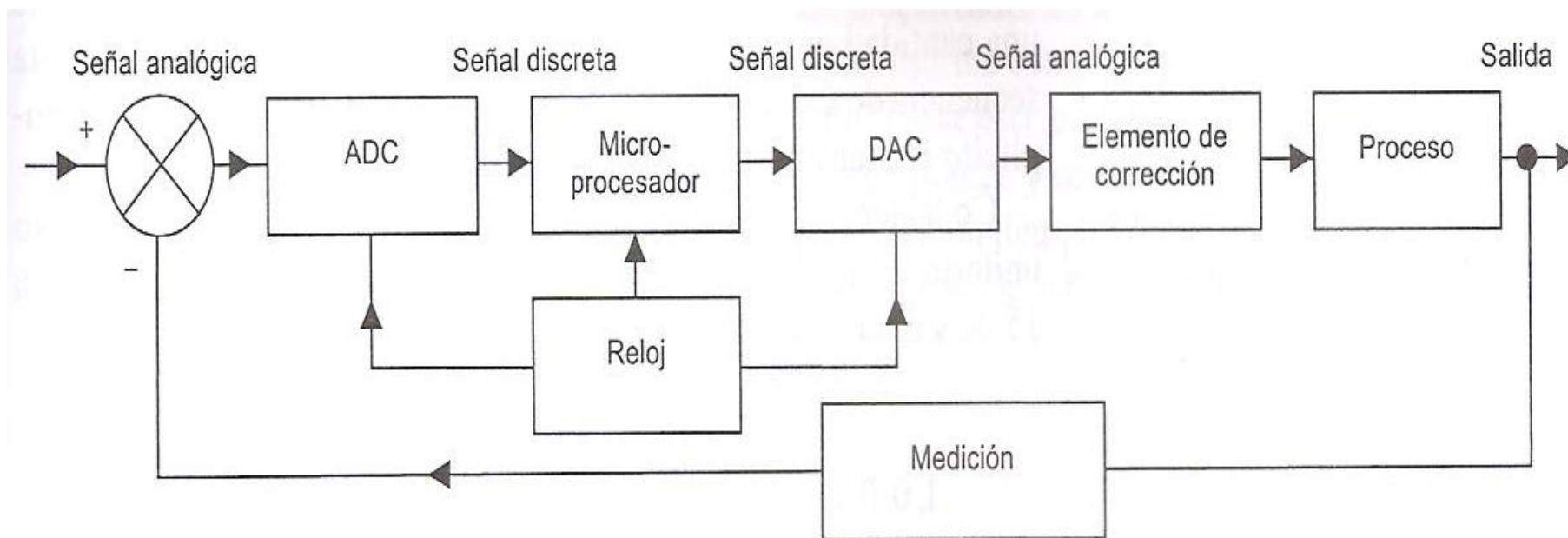
Ing Fernando Geli

[fernandogeli@gmail.com](mailto:fernandogeli@gmail.com)

Bibliografía:

Ingeniería de Control- W. BOLTON

## Controladores basados en microprocesador

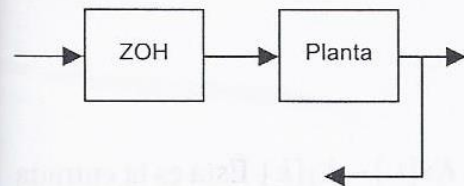
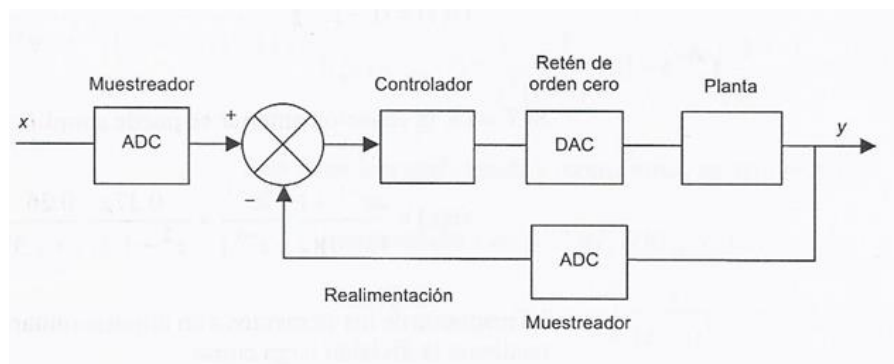
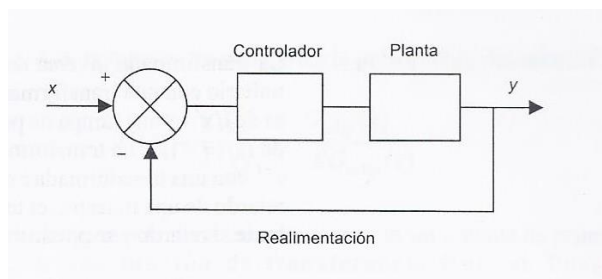


## Bloque PID en los PLC's (Controladores Lógicos Programables)

T : intervalo entre pulsos

The screenshot shows the TwidoSuite 2.30 software interface. On the left, there is a sidebar with a tree view containing categories like 'Objetos simples', 'Bloques funcion.', 'Objetos de E/S', and 'Objetos avanzad'. Under 'Objetos avanzad', 'PID' is selected. The main window displays the 'PID' configuration dialog. At the top, there are tabs for 'General', 'Entrada', 'PID', 'AT', and 'Salida', with 'PID' currently active. Below the tabs are 'Aplicar' and 'Cancelar' buttons. The configuration area is divided into several sections: 'Consigna' (setpoint) with a text input field, 'Corrector tipo' (controller type) with a dropdown menu set to 'PID', 'Parámetros' (parameters) with input fields for 'Kp (x 0,0)', 'Ti (x 0,1s)', and 'Td (x 0,1s)', and 'Período de muestreo' (sampling period) with an input field and a '(10ms)' label. A red arrow points from the text 'T : intervalo entre pulsos' to this 'Período de muestreo' field. At the bottom, there is a ladder logic diagram showing a 'Consigna' input connected to a 'PID' block, which is then connected to a 'Salida' output. The status bar at the bottom indicates 'La instrucción de la columna 7, fi' and 'TwidoSuite 2.30'. The Windows taskbar at the very bottom shows the time as 12:24 p.m. on 21/11/2012.

Uso	Dirección	Configura
<input checked="" type="checkbox"/>	PID 0	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 1	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 2	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 3	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 4	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 5	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 6	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 7	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 8	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 9	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 10	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 11	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 12	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	PID 13	<input type="checkbox"/>



**Figura 15.22** Parte del lazo de control digital

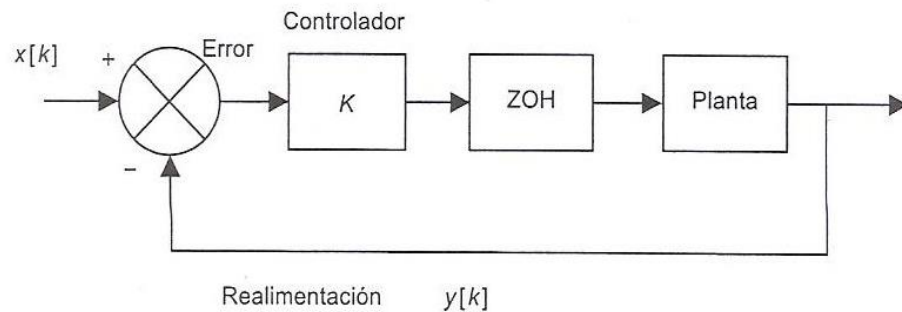
$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \quad [21]$$

Para obtener la salida muestreada de los elementos cuando hay una entrada muestreada, se necesita la función de transferencia pulso; esto es igual a decir que se necesita la transformada  $z$  de la respuesta de los elementos a una entrada impulso unitario. En el dominio de  $s$  la respuesta de los elementos a un impulso unitario es lo mismo que la función de transferencia. De este modo

$$G(z) = \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right\} \quad [22]$$

Suponga que la planta tiene una función de transferencia de  $1/s(s+1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} G(z) &= \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)} \right\} \\ &= \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1} \left\{ (1 - e^{-Ts}) \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right) \right\} \end{aligned}$$



$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

$$G_p(s)G_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s^2(s+1)} = (1-e^{-Ts})\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

la transformada z de  $L^{-1}\{G_p(s)G_{zoh}(s)\} = (1 - \frac{1}{z})\left(\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right)$

Para T=1 
$$G_{zohp}(z) = \frac{0.37z+0.26}{z^2-1.37z+0.37}$$

La función de transferencia pulso del sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KG_{zohp}(z)}{1+KG_{zohp}(z)}$$

Para K=1 
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KG_{zohp}(z)}{1+KG_{zohp}(z)} = \frac{0.37z+0.26}{z^2-z+0.63}$$

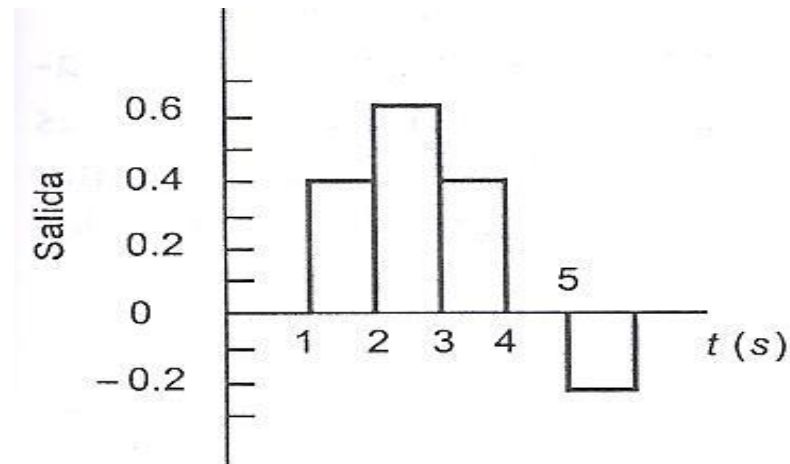
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KG_{zohp}(z)}{1 + KG_{zohp}(z)} = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63}$$

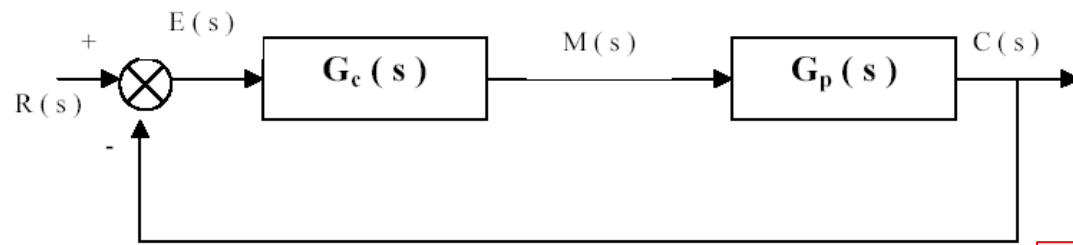
Si suponemos que la entrada  $X(z)=1$  (impulso unitario)

$$\text{Salida: } Y(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63} = 0.37z^{-1} + 0.63z^{-2} + 0.4z^{-3} - 0.25z^{-5} + \dots$$

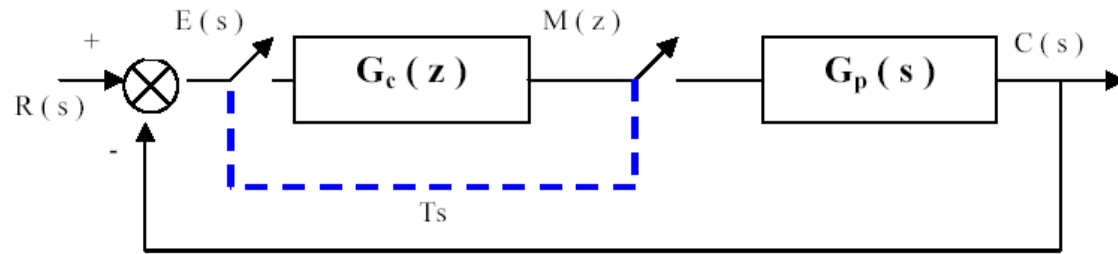
Así la salida es la secuencia en tiempo discreto: 0, 0.37, 0.63, 0.4, 0, 0.25....

y como esta salida está antes del elemento ZOH, tomará la forma:





$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$



$$G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}$$

En el caso de un algoritmo PID:  $G(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$

Acción integral:  $y[k] = y[k - 1] + Te[k] \rightarrow Y(z) = \frac{Tz}{z-1} E(z)$

Acción derivativa:  $y[k] = \frac{e[k] - e[k-1]}{T} \rightarrow Y(z) = \frac{z-1}{Tz} E(z)$

El controlador digital equivalente es:  $G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}$

La salida será:  $Salida(z) = (K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}) E(z)$

$Salida(k) = K_p e[k] + K_i (Te[k] + salida[k - 1]) + \frac{K_d}{T} (e[k] - e[k - 1])$



La ecuación de estado de un sistema continuo lineal:

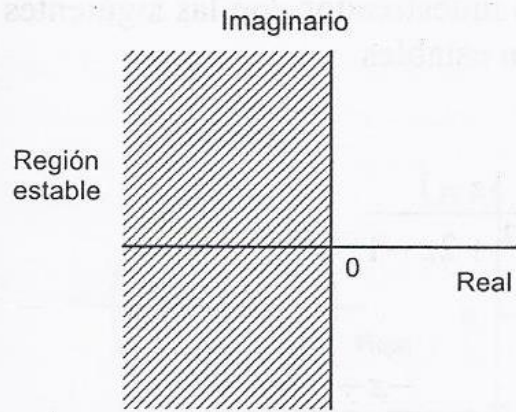
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

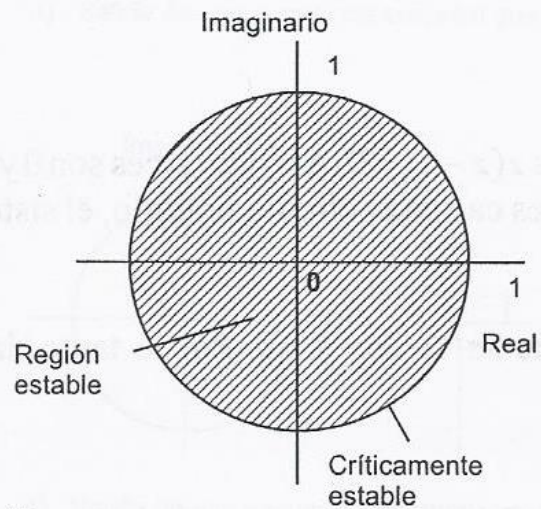
La ecuación de estado para sistemas lineales discretos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k + 1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}$$



a)



b)

**Figura 15.25** Regiones de estabilidad para los polos: a) plano  $s$ , b) plano  $z$

## Estabilidad

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

Para el caso de señales **continuas**, el sistema será estable si todos los polos de la Función de Transferencia en lazo cerrado caen en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , por lo que  $s$  debe tener  $\sigma < 0$ .

Debido a que  $e^{\sigma T}$  es la magnitud de  $z$ , es decir  $|z|$ , la condición de estabilidad en un **sistema de datos muestreados**, los polos de la Función de Transferencia pulso en lazo cerrado, deben caer dentro del círculo unitario (radio 1 y centro en el origen). Se dice que un sistema es críticamente estable si tiene un polo en el círculo.

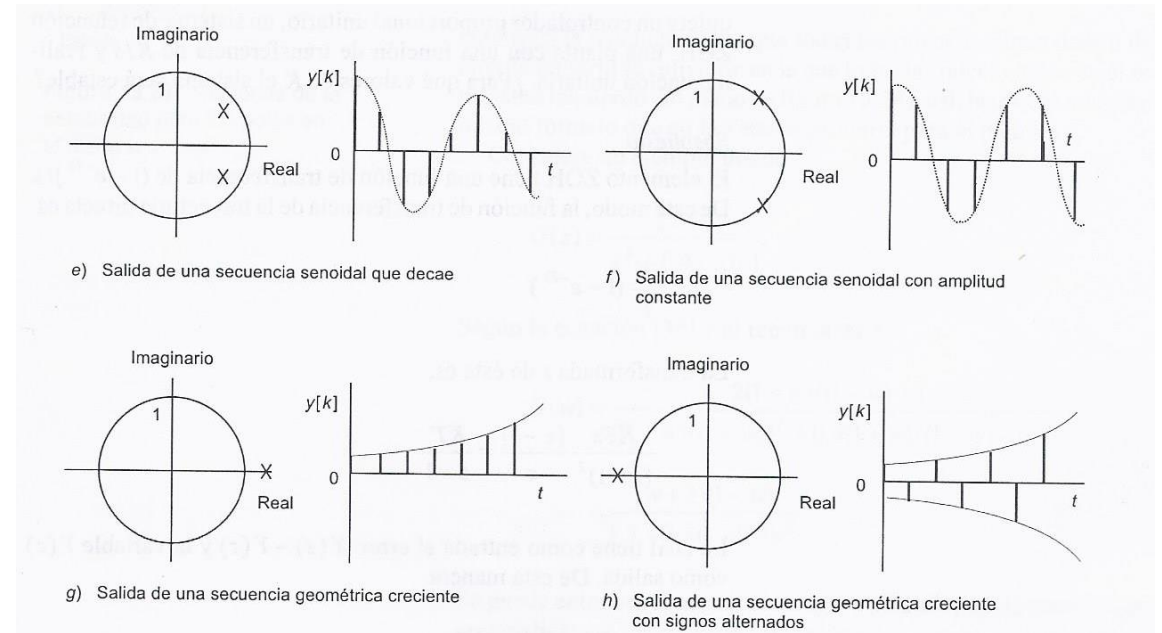
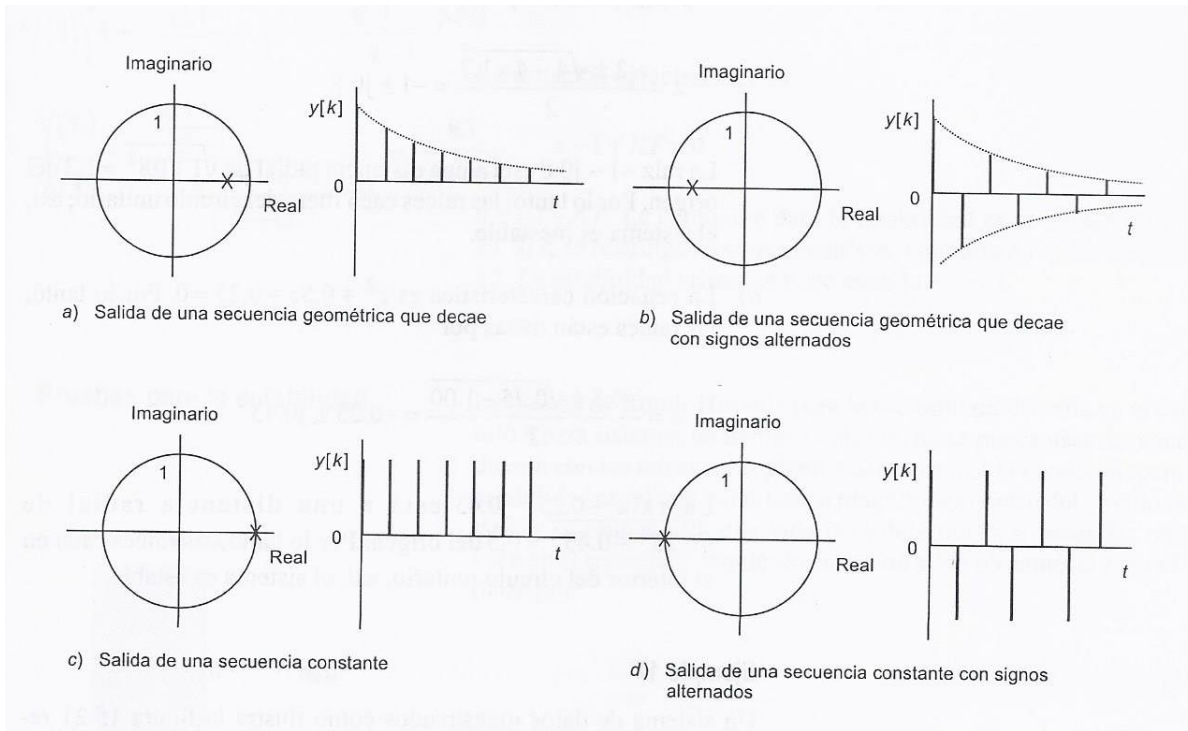


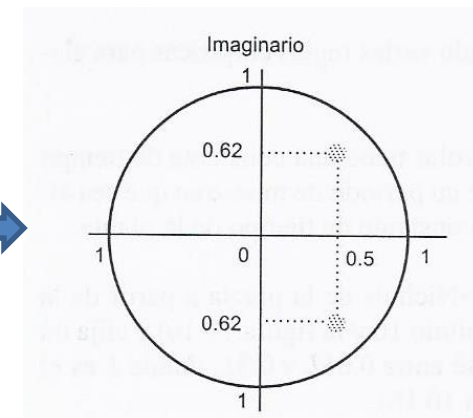
Figura 15.27 Efecto de la localización de las raíces en respuesta a una entrada impulso

$$G(z) = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63}$$

Ésta tiene la ecuación característica

$$z^2 - z + 0.63 = 0$$

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 0.63}}{2} = 0.50 \pm j0.6$$



## Prueba de Routh-Hurwitz

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$G(z) = \frac{2z+1}{z^2+0,4z-0,1}$$

$$G(w) = \frac{2 \cdot \frac{(1+w)}{(1-w)} + 1}{\left(\frac{(1+w)}{(1-w)}\right)^2 + 0,4 \cdot \frac{(1+w)}{(1-w)} - 0,1} = \frac{(w+3)(1-w)}{0,5w^2 + 2,2w + 1,3}$$

$$\begin{array}{c|cc} w^2 & 0.5 & 1.3 \\ w^1 & 2.2 & \\ w^0 & 1.3 & \end{array}$$

Como en el arreglo de Routh no *hay cambios* de signo en la primera columna, el sistema es estable