FORMA CANONICA DE JORDAN Y ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES

Eleonora Catsigeras *

6 de mayo de 1997

Notas para el curso de Análisis Matemático II

Resumen

Se enuncia sin demostración el resultado referente a la existencia de la forma canónica de Jordan para matrices cuadradas de términos complejos. Se detalla, con ejemplos resueltos, el cálculo de la forma canónica y de la matriz de cambio de base de Jordan para matrices diagonalizables $n \times n$ y para matrices cualesquiera 2×2.

1 Multiplicidad algebraica y geométrica.

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con términos complejos. Sea v un vector de C^n:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definición 1.1 *v es vector propio de A con valor propio λ si $v \neq \vec{0}$ y $A \cdot v = \lambda v$.*

Se supone conocido por el lector el método para hallar los valores propios y vectores propios de A, y los siguientes resultados:

1. λ es valor propio de A si y solo si $\det(A - \lambda I) = 0$. El determinanate de la matriz $A - \lambda I$ es un polinomio de grado n en λ, llamado polinomio característico de A. Sus raíces son los valores propios de A.

*IMERL Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay.

2. En el campo complejo

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son las k raíces diferentes del polinomio caractístico, y $m_1, m_2, \cdots, m_k$ son sus multiplicidades respectivas. Se tiene $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

3. Se llama *subespacio propio de valor propio* λ_i al subespacio S_i formado por todos los vectores v tales que

$$(A - \lambda_i I) \cdot v = \vec{0}$$

Es decir, S_i está formado por el vector nulo y todos los vectores propios de valor propio λ_i. Es un subespacio de dimensión r_i con $1 \leq r_i \leq m_i$. El subespacio S_i se obtiene resolviendo el sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda_i I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es siempre compatible e indeterminado con r_i grados de libertad.

4. Eligiendo r_i vectores linealmente independientes que verifiquen el sistema anterior, se tendrá una base del subespacio propio S_i (formada por r_i vectores propios de A, todos con el mismo valor propio λ_i).

Definición 1.2 Al número m_i, multiplicidad de la raíz λ_i en el polinomio característico de A, se le llama *multiplicidad algebraica de* λ_i.

Al número r_i, dimensión del subespacio propio S_i de valor propio λ_i, igual a la cantidad de grados de libertad del sistema compatible indeterminado $(A - \lambda_i I) \cdot v = \vec{0}$, se le llama *multiplicidad geométrica de* λ_i.

Teorema 1.3 *Para cada valor propio* λ_i *se cumple:*

$$1 \leq r_i \leq m_i$$

2 Matrices diagonalizables

Definición 2.1 Una matriz cuadrada A, $n \times n$, se dice *diagonalizable* si existe una base de C^n (es decir n vectores linealmente independientes) formada exclusivamente con vectores propios de A.

Es inmediato que A es diagonalizable si y solo si la unión de bases de sus subespacios propios es una base de C^n, es decir, si y solo si

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$$

El nombre *diagonalizable* proviene del hecho que estas matrices tienen forma canónica de Jordan que es una matriz diagonal, como se verá más adelante.

Obsérvese que si A es *diagonal,* es decir si todos sus términos fuera de la diagonal principal son nulos, entonces la base canónica está formada por vectores propios de A, y resulta, por definición que A es diagonalizable. En el ejemplo 2.5 veremos una matriz diagonalizable que no es diagonal.

Teorema 2.2 *A es diagonalizable si y solo si*

$$r_i = m_i$$

para todo valor propio λ_i de A.

Prueba: A es diagonalizable si y solo si $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Como siempre $r_i \leq m_i$ y $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, lo anterior se cumple si y solo si $r_i = m_i$.

■

Corolario 2.3 *Si $m_i = 1$ para todo valor propio λ_i* (o sea, si hay exactamente n raices diferentes del polinomio característico), *entonces A es diagonalizable.*

Prueba: Si $m_i = 1$, como $1 \leq r_i \leq m_i$, se tiene $r_i = 1$, y entonces $r_i = m_i$ aplicándose el teorema anterior.

■

El recíproco del corolario es falso, como lo muestra el ejemplo que sigue:

Ejemplo 2.4 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ es diagonalizable porque es diagonal. Tiene un solo valor propio $\lambda_1 = 4$ con $m_1 = 2$ y $r_1 = 2$.

Ejemplo 2.5

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$$

A es 2×2 y tiene dos valores propios diferentes, entonces es *diagonalizable* . En este caso $m_1 = 1$ $m_2 = 1$ (multiplicidades algebraicas). Entonces $r_1 = 1$ $r_2 = 1$ (multiplicidades geométricas).

Hallemos una base de C^2 formada por vectores propios de A.

$$\lambda_1 = 3 : \quad (A - 3I) \cdot v = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (4-3)x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_1 + (1-3)x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Un grado de libertad $\Rightarrow r_1 = 1$. Eligiendo, por ejemplo $x_2 = 1$, se tiene una base de S_1 (subespacio propio de valor propio 3), formada por el vector

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 : \quad (A - 2I) \cdot v = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} (4-2)x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_1 + (1-2)x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Un grado de libertad $\Rightarrow r_2 = 1$. Eligiendo, por ejemplo $x_2 = 1$, se tiene una base de S_2 (subespacio propio de valor propio 2), formada por el vector

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

v_1 y v_2 son linealmente independientes, y forman una base de C^2 integrada con vectores propios de A.

3 Forma canónica de Jordan

Definición 3.1 El *bloque de Jordan de tamaño $k \times k$ y valor propio λ_1* es la matriz cuadrada $k \times k$ que tiene

el número λ_1 en la diagonal principal

el número 1 en la supradiagonal principal

el número 0 en los restantes términos

Ejemplos: El bloque de Jordan de tamaño 3×3 y valor propio 5 es

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

El bloque de Jordan de tamaño 2×2 y valor propio -4 es

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

El bloque de Jordan de tamaño 1×1 y valor propio 8 es

$$[8]$$

Como ejercicio verifíquese que λ_1 es el único valor propio del bloque de Jordan de tamaño $k \times k$, con multiplicidad algebraica k y con multiplicidad geométrica 1.

Nota 3.2 En alguna bibliografía se define bloque de Jordan poniendo 1 en la *subdiagonal* principal, en vez de hacerlo en la *supradiagonal.* La teoría resulta similar a la que se expone aquí, pero el cálculo de las matrices de cambio de base que veremos más adelante es diferente.

Definición 3.3 Un *suprabloque de Jordan de tamaño $m \times m$ y valor propio* λ_1 es una matriz cuadrada $m \times m$ formada por

- uno o más bloques de Jordan de diversos o iguales tamaños, todos con el mismo valor propio λ_1, ubicados diagonalmente (es decir, tales que la diagonal principal de cada bloque es parte de la diagonal principal del suprabloque)
- ceros en los restantes términos del suprabloque.

Ejemplo: Un suprabloque de Jordan de tamaño 6×6 de valor propio 7, formado por tres bloques de Jordan de tamaños 2×2, 3×3 y 1×1 respectivamente es:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Como ejercicio verifíquese que λ_1 es el único valor propio del suprabloque de Jordan de tamaño $m \times m$, con multipicidad algebraica igual a m y multiplicidad geométrica igual a r que es la cantidad de bloques de Jordan que forman el suprabloque.

Definición 3.4 Una matriz cuadrada $n \times n$ es una *forma canónica de Jordan* si está formada por

- uno o más suprabloques de Jordan, ubicados diagonalmente.
- ceros en los restantes términos de la matriz

Ejemplo: Una forma canónica de Jordan con un suprabloque 2×2 formado por dos bloques de valor propio 7 , un suprabloque 3×3 formado por dos bloques de valor propio 0, y un suprabloque 1×1 de valor propio 3, es:

$$\begin{bmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Véase que en este ejemplo la matriz tiene valores propios $\lambda_1 = 7$ con multiplicidad algebraica 2 y geométrica 2, $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad algebraica 3 y geométrica 2, y $\lambda_3 = 3$ con multiplicidad algebraica 1 y geométrica 1.

Es fácil probar el siguiente teorema:

Teorema 3.5 Una forma canónica de Jordan tiene como *valores propios* a los números de la diagonal, con *multiplicidad algebraica* igual a la cantidad de veces en que está repetido en la diagonal (o sea igual al *tamaño del suprabloque* respectivo), y *multiplicidad geométrica* igual a la *cantidad de bloques* que forman el respectivo suprabloque.

Nota 3.6 En particular la forma de Jordan es *diagonal* (es decir, todos sus términos fuera de la diagonal principal son nulos) si y solo si los bloques de Jordan tienen todos tamaño 1×1, y esto ocurre si y solo si la cantidad de bloques que forman cada suprabloque es igual al tamaño del suprabloque, o sea, la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica para todo valor propio. Usando el teorema 2.2 se concluye que *una forma canónica de Jordan es diagonalizable si y solo si es diagonal.*

El teorema que sigue es el teorema fundamental de las formas canónicas de Jordan, y dice esencialmente que *toda matriz cuadrada, mediante un cambio de base, se puede llevar a una forma canónica de Jordan:*

Teorema 3.7 (Forma canónica de Jordan) *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Entonces exis- te una matriz J que es una forma canónica de Jordan, y una matriz P invertible, ambas $n \times n$ con términos complejos, tales que:*

$$A = PJP^{-1}$$

.

Definición 3.8 La matriz J del teorema anterior se llama *forma canónica de Jordan de A.* La matriz P se llama *matriz de cambio de base de Jordan.*

Nota 3.9 La forma canónica de Jordan J y la matriz P de cambio de base de Jordan para la matriz dada A no son únicas. En efecto, permutando los suprabloques de J, o los bloques dentro de cada suprabloque, se obtiene otra forma canónica de Jordan para A. Se puede demostrar que J es *única a menos de permutaciones de sus bloques.*

El teorema que sigue permite, en muchos casos, calcular la forma canónica de Jordan de A, mediante el cálculo de los valores propios de A y de la dimensión de sus subespacios propios.

Teorema 3.10 *Sea A una matriz $n \times n$.*

Sean $\lambda_1, \dots \lambda_k$ sus valores propios diferentes, con multiplicidades algebraicas $m_1, \dots, m_k$ y multiplicidades geométricas $r_1, \dots, r_k$ respectivamente.

Entonces la forma canónica de Jordan de A tiene k suprabloques, cada uno de valor propio λ_i, tamaño $m_i \times m_i$, y formado por r_i bloques.

Ejemplo 3.11

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallemos la forma canónica de Jordan de A.

Los valores propios: $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 4)(\lambda + 1)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \;\; \lambda_2 = -1$ con multiplicidades algebraicas respectivas $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$. Entonces J va a estar formada por dos suprabloques: uno de valor propio 4 y tamaño 1×1, y otro de valor propio -1 y tamaño 3×3. Para determinar completamente la matriz J necesitamos saber cuántos bloques forman el suprabloque de tamaño 3×3, o sea la multiplicidad geométrica r_2 del valor propio -1. Para ello hallemos el subespacio propio:

$$(A + I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x_1 & = & 2x_4 \\ x_3 & = & 0 \\ x_2, \;\; x_4 & & \text{cualesquiera} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow r_2 = 2$$

Luego, el suprabloque 3×3 de valor propio -1, está formado por dos bloques. Entonces estos dos bloques tendrán tamaños 1×1 y 2×2, ya que 1 y 2 son los únicos dos números naturales mayores o iguales que 1 que suman 3. Entonces:

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a menos de una permutación de sus bloques.

Nota 3.12 Si la matriz dada A ya es una forma canónica de Jordan, es innecesario hacer cálculos para determinar J y P tales que $A = PJP^{-1}$. En efecto basta tomar $J = A$ y $P = I$ (I indica la matriz identidad).

Las siguientes propiedades de la forma canónica de Jordan pueden deducirse en forma sencilla de los resultados ya vistos. Demuéstrense como ejercicio.

Proposición 3.13

1. La forma canónica de Jordan es diagonal si y solo si las multiplicidades geométricas son iguales a las algebraicas para todo valor propio de A. (Usando el teorema 2.2 esto sucede si y solo si A es diagonalizable).

2. Si A es diagonalizable entonces su forma canónica de Jordan es la matriz que tiene en la diagonal los valores propios de A repetidos tantas veces como sus multiplicidades algebraicas, y ceros en todos los demás términos.

3. Si la matriz A es 2×2 y tiene un solo valor propio doble λ_1 con multiplicidad geométrica igual a 1, entonces su forma canónica de Jordan es $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$

Existen procedimientos, que no veremos en general, para encontrar una matriz P de cambio de base de Jordan: es decir una matriz invertible P tal que $A = PJP^{-1}$.

Ejercicio: en el ejemplo 3.11 verifíquese que $PJP^{-1} = A$ siendo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego P es una matriz de cambio de base de Jordan para A.

En las siguientes secciones veremos cómo hallar una matriz de cambio de base de Jordan cuando la matriz A es diagonalizable $n \times n$, o cuando no es diagonalizable pero es 2×2.

4 Cambio de base de Jordan para matrices diagonalizables

Usaremos la siguiente notación:

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

es la matriz $n \times n$ formada *colgando* en sus columnas los vectores v_i, es decir: la columna i-ésima de la matriz P es la columna formada con las componentes del vector v_i de C^n. Por ejemplo, si $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $[v_1, v_2]$ indica la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son linealmente independientes si y solo si la matriz $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ tiene determinante no nulo.

Teorema 4.1 (Cálculo de J y P cuando A es diagonalizable) *Sea A, $n \times n$, diagonalizable. Sea $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ una base de C^n formada con vectores propios de A, de valores propios respectivos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$* (aquí cada valor propio está repetido tantas veces como su multiplicidad geométrica, que es igual a su multiplicidad algebraica, porque A es diagonalizable). *Entonces la forma canónica de Jordan de A es, a menos de permutaciones de su diagonal principal, la matriz diagonal*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

y una matriz de cambio de base de Jordan (es decir, una matriz invertible P tal que $A = PJP^{-1}$), *es*

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

que se obtiene colgando en sus columnas los vectores propios de A (en el mismo orden en que se escribieron los valores propios respectivos para formar la matriz J).

Prueba: En la proposición 3.13, punto 2, ya se dedujo cómo es J. Siendo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linealmente independientes, el determinante de P es no nulo, y entonces P es invertible.

Falta probar que $PJP^{-1} = A$, o, lo que es lo mismo, que $AP = PJ$.

La primera columna de una matriz M, cuadrada $n \times n$ es igual a $M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Probemos que las primeras columnas de AP y de PJ son iguales:

$$AP \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Av_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = P\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = PJ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, las primeras columnas de AP y PJ son iguales. Análogamente se prueba que las columnas j-ésimas son iguales.

$\blacksquare$

Ejemplo 4.2 Sea la matriz A del ejemplo 2.5. Calculemos la forma canónica de Jordan y la matriz de cambio de base de Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya vimos en 2.5 que una base de vectores propios de A es $\{v_1, v_2\}$ con

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con valor propio } \lambda_1 = 3 \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con valor propio } \lambda_2 = 2$$

Entonces:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $A = PJP^{-1}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad PJ = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

5 Cambio de base de Jordan para matrices 2×2

Si A es una matriz 2×2 su polinomio característico será de grado 2, y habrá tres casos posibles:

1. Dos raices diferentes (en el campo complejo)
2. Una raiz doble λ_1 con multiplicidad geométrica 2.
3. Una raiz doble λ_1 con multiplicidad geométrica 1.

Caso 1: La matriz A es diagonalizable (por el corolario 2.3), y se aplica el teorema 4.1 para calcular la forma canónica de Jordan J y una matriz de cambio de base de Jordan P.

El siguiente ejemplo muestra que aunque la matriz A sea de términos reales, la forma canónica de Jordan J y la matriz de cambio de base P pueden tener términos no reales.

Ejemplo 5.1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \ det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i \ \ \lambda_2 = -i \Rightarrow J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Subespacio propio con $\lambda_1 = i$:

$$\begin{bmatrix} -3-i & -2 \\ 5 & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = & (-3-i)x_1/2 \\ x_1 & & \text{cualquiera} \end{cases}$$

Eligiendo $x_1 = 2$ se tiene $x_2 = -3 - i$ y $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3-i \end{bmatrix}$.

Subespacio propio con $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{bmatrix} -3+i & -2 \\ 5 & 3+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = & (-3+i)x_1/2 \\ x_1 & & \text{cualquiera} \end{cases}$$

Eligiendo $x_1 = 2$ se tiene $x_2 = -3 + i$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3+i \end{bmatrix}$.

$\{v_1, v_2\}$ es una base de vectores propios de A. Entonces podemos tomar

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3-i & -3+i \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $PJP^{-1} = A$. En efecto, $\det P = 4i$, entonces

$$P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{bmatrix} -3+i & -2 \\ 3+i & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+3i & 2i \\ 1-3i & -2i \end{bmatrix}$$

$$PJ = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ -3i+1 & 3i+1 \end{bmatrix}, \ \ PJP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -12 & -8 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Caso 2: La multiplicidad algebraica del valor propio λ_1 es dos, y su multiplicidad geométrica también es dos. La matriz es diagonalizable (por el teorema 2.2) y se aplica el teorema 4.1. Sin embargo puede demostrarse que este caso es trivial: la matriz A ya debe ser una forma canónica de Jordan, y por lo tanto basta elegir $J = A$ y $P = I$, como fue señalado en la nota 3.12.

Proposición 5.2 *Si la matriz A tiene un único valor propio λ_1, y si éste tiene multiplicidad algebraica igual a su multiplicidad geométrica, entonces A ya es una forma canónica de Jordan, y puede tomarse como matriz de cambio de base de Jordan a la identidad.*

Prueba: Según lo visto en el teorema 2.2, A es diagonalizable, y por el teorema 4.1 la matriz J tiene λ_1 en su diagonal principal, y ceros los demás términos. Entonces $J = \lambda_1 I$.

Sea P una matriz de cambio de base de Jordan cualquiera (no necesariamente la identidad). Se tiene:

$$A = PJP^{-1} = P(\lambda_1 I)P^{-1} = \lambda_1 PIP^{-1} = \lambda_1 PP^{-1} = \lambda_1 I = J$$

■

Caso 3: El caso que resta es cuando la multiplicidad geométrica r_1 del único valor propio λ_1 doble es 1. En este caso, como la multiplicidad algebraica m_1 es 2, por el teorema 2.2, la matriz A no es diagonalizable. Según lo visto en el teorema 3.10, la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una matriz de cambio de base de Jordan P puede aplicarse el siguiente teorema:

Teorema 5.3 *Si A es una matriz 2×2, con un único valor propio doble λ_1, si éste tiene multiplicidad geométrica 1, y si v_2 es un vector cualquiera que no está en el subespacio propio de A, entonces el vector $v_1 = (A - \lambda_1 I) \cdot v_2$ es un vector propio de A, $\{v_1, v_2\}$ son linealmente independientes, y la matriz $P = [v_1, v_2]$ es una matriz de cambio de base de Jordan para A.*

Prueba:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1 I + N, \quad \text{donde } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } N^2 = N \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Sea Q una matriz de cambio de base de Jordan para A, que existe en virtud del teorema 3.7, y cumple:

$$A = QJQ^{-1} = Q(\lambda_1 I + N)Q^{-1} = \lambda_1 QIQ^{-1} + QNQ^{-1} = \lambda_1 QQ^{-1} + QNQ^{-1} = \lambda_1 I + QNQ^{-1}$$

$$\Rightarrow A - \lambda_1 I = QNQ^{-1} \Rightarrow (A - \lambda_1 I)^2 = QNQ^{-1}QNQ^{-1} = QNNQ^{-1} =$$

$$= QN^2Q^{-1} = QOQ^{-1} = OQ^{-1} = O$$

$$\Rightarrow (A-\lambda_1 I)^2 \cdot v = \vec{0} \;\; \forall v$$

v_2 no pertenece al subespacio propio S_1, entonces $(A-\lambda_1 I)v_2 \neq \vec{0}$.

$v_1 = (A-\lambda_1 I)v_2 \Rightarrow v_1 \neq \vec{0}$. Además $(A-\lambda_1 I)v_1 = (A-\lambda_1 I)^2 v_2 = \vec{0}$. Entonces v_1 es un vector no nulo del subespacio propio, es decir, un vector propio.

Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0}$. Aplicando $A-\lambda I$ a la combinación lineal anterior resulta el vector nulo, es decir:

$$\alpha_1(A-\lambda_1 I)v_1 + \alpha_2(A-\lambda I)v_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \alpha_2(A-\lambda I)v_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Así, v_1 y v_2 son linealmente independientes, y la matriz P tiene determinante no nulo, o sea, es invertible.

Para probar que $A = PJP^{-1}$, basta mostrar que $AP = PJ$, y para esto alcanza probar que sus respectivas columnas son iguales. Nótese que la primera columna de una matriz M 2×2, cualquiera, es $M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y que su segunda columna es $M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$AP\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = Av_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = PJ\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se concluye que las primeras columnas de AP y de PJ son la misma.

$$AP\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Av_2 = \lambda_1 v_2 + v_1 = \lambda_1 P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\lambda_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= P\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = PJ\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se concluye que las segundas columnas de AP y de PJ son la misma. Luego $AP = PJ$, lo que termina la prueba.

■

Ejemplo 5.4

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \;\; \det(A-\lambda I) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = -3 \text{ doble}, \;\; m_1 = 2$$

Subespacio propio S_1:

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 1 \\ -1 & -4+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\; \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = \;\; -x_2 \\ x_2 & \;\;\;\; \text{cualquiera} \end{cases} \Rightarrow r_1 = 1$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Elijamos $v_2 \notin S_1$: Tomando $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$, por ejemplo $x_1 = 1$, se tiene $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces

$$v_1 = (A + 3I)v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $A = PJP^{-1}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad PJ = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad PJP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = A$$

Nota 5.5 Sea ahora una matriz A, 2×2, con todos sus términos reales. Si sus valores propios son ambos reales (iguales o distintos) se concluye que la matriz canónica de Jordan es real. De los procedimientos vistos, obsérvese que los vectores v_1 y v_2 que forman las columnas de la matriz de cambio de base de Jordan, se encuentran mediante ecuaciones lineales con coeficientes reales, cuando la matriz A y sus valores propios son reales. Luego, se concluye lo siguiente:

Si la matriz A tiene términos reales y todos sus valores propios son reales, entonces la forma canónica de Jordan es una matriz real, y puede elegirse una matriz de cambio de base de Jordan también real.

Esto significa que no es necesario pasar al campo complejo cuando los valores propios son reales. Sin embargo, aunque la matriz dada sea real, si sus valores propios no lo son, entonces la forma canónica de Jordan y la matriz de cambio de base de Jordan no son reales, como lo muestra el ejemplo 5.1.

6 Aplicación a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Sea

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$$

un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, donde A es una matriz $n \times n$, $\vec{b}(t)$ es un vector de R^n que depende continuamente de t y $\vec{x}$ es un vector de R^n cuya dependencia de t constituye la función incógnita de la ecuación diferencial.

Aplicaremos la teoría de la forma canónica de jordan para resolver el sistema dado.

Observación: Si A es una forma canónica de Jordan, entonces el sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado se puede *resolver ecuación por ecuación, empezando por la última.*

Ejemplo 6.1

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 9t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 & = & -3x_1 & +x_2 + e^{-3t} \\ \dot{x}_2 & = & & -3x_2 + 9t \end{cases}$$

La segunda ecuación tiene solución de homogénea $x_{2\ \text{hom}} = C_2 e^{-3t}$ y solución particular $x_{2\ \text{par}} = 3t-1$ (que se encuentra, o bien probando con $at+b$, o bien por el método de variación de constantes probando con $C_2(t)e^{-3t}$). Luego

$$x_2(t) = x_{2\ \text{hom}} + x_{2\ \text{par}} = C_2 e^{-3t} + 3t - 1$$

La primera ecuación ahora queda:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + C_2 e^{-3t} + 3t - 1 + e^{-3t}$$

Solución de la homogénea: $x_{1\ \text{hom}} = C_1 e^{-3t}$, y solución particular: $x_{1\ \text{par}} = (C_2+1)te^{-3t}+t-2/3$. Luego

$$x_1(t) = x_{1\ \text{hom}} + x_{1\ \text{par}} = C_1 e^{-3t} + (C_2+1)te^{-3t} + t - 2/3$$

Teorema 6.2 *Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales lineal a coeficientes constantes*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$$

Sea J la forma canónica de Jordan de A, y sea P una matriz de cambio de base de Jordan para A (es decir $A = PJP^{-1}$).

Entonces, haciendo el cambio de variables

$$\vec{x} = P \cdot \vec{z}$$

la ecuación dada se lleva a la forma

$$\dot{\vec{z}} = J\vec{z} + P^{-1}\vec{b}(t)$$

Prueba: $x = Pz \Rightarrow \dot{x} = P\dot{z}$; $\dot{x} = Ax + b(t) \Rightarrow P\dot{z} = APz + b(t) \Rightarrow \dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}b(t) \Rightarrow \dot{z} = P^{-1}(PJP^{-1})Pz + P^{-1}b(t) = (PP^{-1})J(P^{-1}P)z + P^{-1}b(t) = Jz + P^{-1}b(t)$.

■

Ejemplo 6.3 Resolver $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^{-3t} & + & 9t \\ -e^{-3t} & & \end{bmatrix}$.

En el ejemplo 5.4 se hallaron

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix};\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo el cambio de variables $x = Pz$ resultará

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & + & 9t \\ -e^{-3t} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 9t \end{bmatrix}$$

Este sistema ya fue resuelto en el ejemplo 6.1, resultando

$$z(t) = \begin{bmatrix} [C_1 + (C_2+1)t]e^{-3t} & + & t - 2/3 \\ C_2 e^{-3t} & + & 3t - 1 \end{bmatrix}$$

Deshaciendo el cambio de variables:

$$x(t) = Pz(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} z(t) = \begin{bmatrix} ((C_1 + C_2) + t(C_2+1))e^{-3t} & + & 4t - 5/3 \\ (-C_1 - t(C_2+1))e^{-3t} & - & t + 2/3 \end{bmatrix}$$

Nota 6.4 El procedimiento anterior da la solución $x(t)$ en R^n cuando A tiene términos reales y *todos los valores propios de A son reales.*

Cuando A tiene términos reales pero sus valores propios no son todos reales, las matrices P y J son complejas no reales, como en el ejemplo 5.1. Entonces es necesario pasar al campo complejo para hacer el cambio de variables y aplicar el teorema 6.2. La solución intermedia $z(t)$ estará en el campo complejo. Sin embargo la solución $x(t)$ del sistema dado estará en R^n y debe depender de n constantes arbitrarias reales. Para obtenerla por el método expuesto en el teorema 6.2 puede aplicarse lo siguiente:

Proposición 6.5 *Si A es una matriz $n \times n$ con todos sus términos reales, y con valores propios complejos no todos reales, entonces resolviendo el sistema como en el teorema* 6.2, *mediante el cambio de variables $x = Pz$, con la condición*

$$\vec{z}(0) = P^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son n constantes reales arbitrarias, se obtiene $\vec{x}(t)$ con parte imaginaria nula.

Prueba: Siendo $\vec{x} = P\vec{z}$ y $\vec{z}(0) = P^{-1}\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$, se tiene $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$. Como las constantes $C_1, \ldots C_n$ son reales, por el teorema de existencia y unicidad, existe $\vec{x}(t)$ que verifica la condición anterior y es solución en R^n, o sea, tiene parte imaginaria nula.

■

Ejemplo 6.6 $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} x$. En el ejemplo 5.1 se hallaron:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3-i & -3+i \end{bmatrix}; \; J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \; P^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} 1+3i & 2i \\ 1-3i & -2i \end{bmatrix}$$

Por el teorema 6.2, haciendo el cambio de variables $x = Pz$ se obtiene el sistema $\dot{\vec{z}} = Jz$, o sea:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iz_1 \\ -iz_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1(t) = z_1(0)e^{it} = z_1(0)\cos t + iz_1(0)\operatorname{sen} t \\ z_2(t) = z_2(0(e^{-it} = z_2(0)\cos t + iz_2(0)\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

$$z(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} C_1 + (3C_1 + 2C_2)i \\ C_1 - (3C_1 - 2C_2)i \end{bmatrix}$$

$$z(t) = 1/4 \begin{bmatrix} C_1\cos t - (3C_1 + 2C_2)\operatorname{sen} t + i[(3C_1 + 2C_2)\cos t + C_1 \operatorname{sen} t] \\ C_1\cos t - (3C_1 + 2C_2)\operatorname{sen} t - i[(3C_1 + 2C_2)\cos t + C_1 \operatorname{sen} t] \end{bmatrix}$$

$$x(t) = Pz(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3-i & -3+i \end{bmatrix} z(t) = 1/4 \begin{bmatrix} C_1\cos t - (3C_1 + 2C_2)\operatorname{sen} t \\ C_2\cos t + (5C_1 + 3C_2)\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

es la solución general del sistema dado, en R^2, con dos constantes arbitrarias reales C_1 y C_2.

Sin embargo, existe otra forma más sencilla para resolver la ecuación de este ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación resulta $\ddot{x}_1 = -3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2$. Sustituyendo $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ por las ecuaciones del sistema dado, se obtiene:

$$\ddot{x}_1 = -3(-3x_1 - 2x_2) - 2(5x_1 + 3x_2) = -x_1 \Leftrightarrow \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \Rightarrow x_1(t) = K_1\cos t + K_2 \operatorname{sen} t$$

Despejando x_2 de la primera ecuación:

$$x_2 = -1/2(\dot{x}_1 + 3x_1) \Rightarrow x_2(t) = -1/2(K_2 + 3K_1)\cos t + 1/2(K_1 - 3K_2)\operatorname{sen} t$$

Evidentemente las constantes C_1 y C_2 de la solución obtenida por el método de cambio de variables, no son las mismas que las constantes K_1 y K_2 de la solución obtenida por este método, sino que están vinculadas porque la solución $\vec{x}(t)$ sí es la misma:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} K_1 & = & -3C_1 - 2C_2 \\ K_2 & = & -C_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} C_1 & = & -K_2 \\ C_2 & = & 1/2(3K_2 - K_1) \end{array} \right.$$

Con esas igualdades entre las constantes, verifíquese que la solución hallada por los dos métodos es la misma.