TEMA 3: CINEMATICA DE LOS FLUIDOS

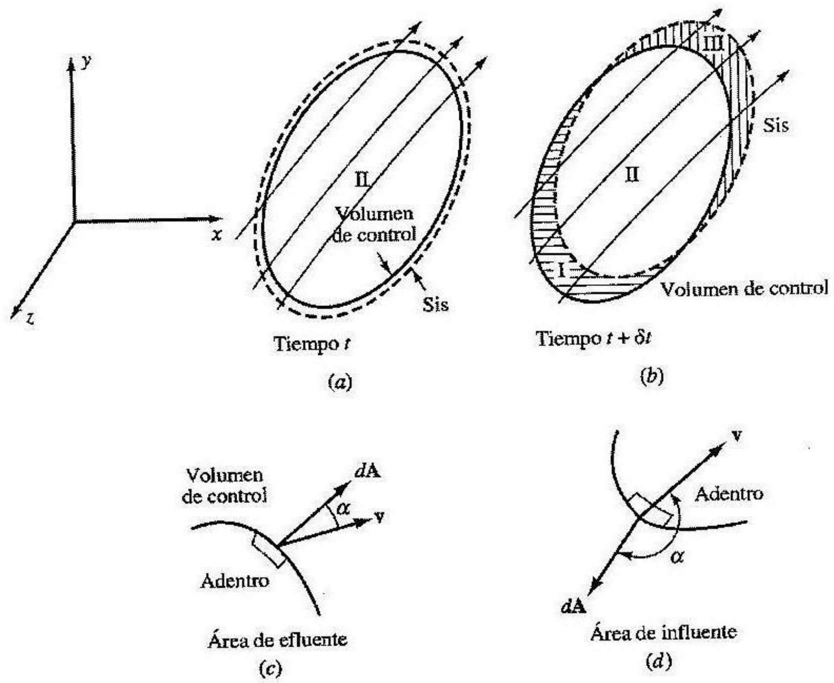
La cinemática de los fluidos trata del movimiento de los mismos sin considerar las causas que lo forman. Se especializa en las trayectorias, velocidades y aceleraciones.

BIBLIOGRAFÍA

Mecánica de los fluidos con aplicaciones en ingeniería. Franzini- Finnemore
Mecánica de los fluidos. Streeter-Wylie-Bedford
Mecánica de los fluidos. Mataix
Mecánica de los fluidos. White
Mecánica de los fluidos, Cengel-Cimbala

- **Métodos de Lagrange y Euler**
- **Sistema fluido**

Volumen de control



Relación entre sistema y volumen de control: teorema de Euler

$X_{S(t)} = X_{VC\ (t)}$

$X_{s\ (t+\Delta t)} = X_{VC\ (t+\Delta t)} + \Delta X_{VC}^{\ ingresante} - \Delta X_{VC}^{\ saliente}$

$X_{s\ (t+\Delta t)} - X_{S(t)} = X_{VC\ (t+\Delta t)} - X_{VC\ (t)} + \Delta X_{VC}^{\ ingresante} - \Delta X_{VC}^{\ saliente}$

Dividiendo por Δt y tomando límite para Δt tendiendo a 0.

$\delta X_s/\delta t = \delta X_{VC}/\delta t + \delta X_{VC}^{\ ingresante}/\delta t - \delta X_{VC}^{\ saliente}/\delta t$

Tipos y definición de flujos

- **Flujo ideal**: viscosidad nula
- **Fluido real**: se considera el efecto de la viscosidad
- **Flujo compresible**: se considera la variación de densidad
- **Flujo incompresible**: se considera densidad constante
- **Flujo estacionario:** Estacionario $dP/dt = 0$ $dv/dt = 0$ pero puede ser que $dP/dx \neq 0$ o $dv/dx \neq 0$.
- **No estacionario:** No estacionario ($dP/dt \neq 0$ o $dv/dt \neq 0$)
- **Flujo mixto**: dos o más fases
- **Flujo a presión**: el desplazamiento del fluido se produce por diferencia de presión
- **Flujo por gravedad**: el desplazamiento del fluido se efecto de la gravedad

Tipos y definición de flujos

- **Flujo espacialmente constante**: densidad del fluido y la velocidad media local del flujo son idénticas en todos los puntos del campo fluido.

- **Flujo espacialmente variable**: no se verifican las condiciones anteriores

- **Flujo uniforme:** se usa en canales abiertos: la forma y dimensiones de la sección transversal se mantiene constante

- **Flujo variable**: no se verifican las condiciones anteriores

- **Flujo supersónico:** la velocidad del fluido o de una partícula desplazándose en un fluido estacionario es superior a la velocidad de una onda de compresión o celeridad

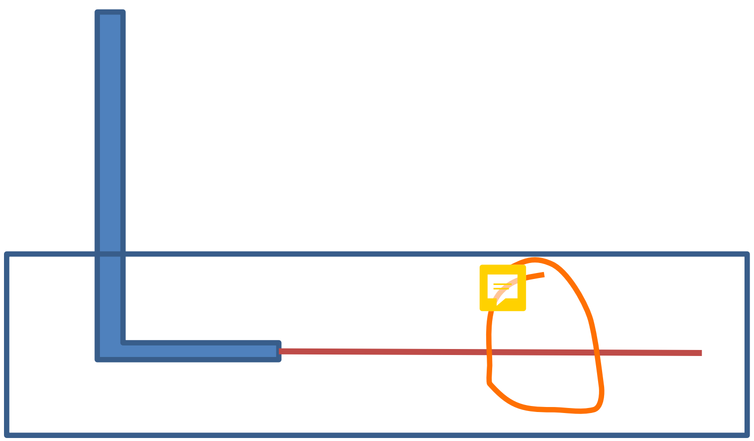
- **Flujo subsónico:** la velocidad del fluido o de una partícula desplazándose en un fluido estacionario es inferior a la celeridad

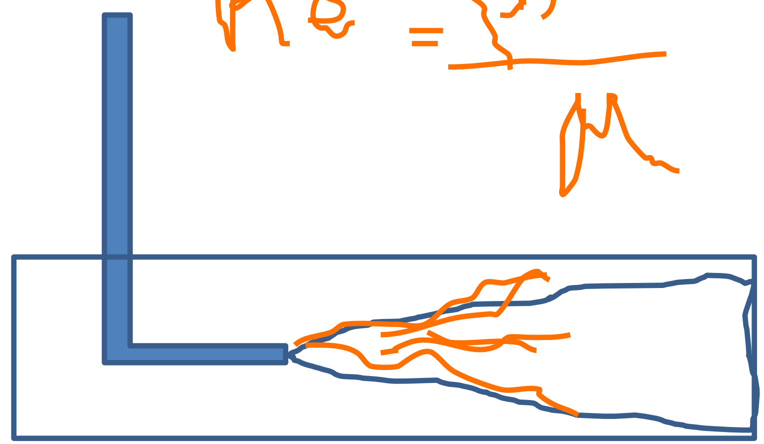
- **<u>Flujo laminar</u>**: en este caso el fluido se mueve desplazándose una capa respecto de la otra en forma longitudinal y paralela sin que exista movimiento de fluido en una dirección diferente (por ejemplo transversal).

- **<u>Flujo turbulento</u>**: en este caso existe un componente de la velocidad que tiene una dirección diferente a la del flujo general y se produce mezcla de fluido en sentido transversal al flujo.

- **<u>Experiencia de Reynolds</u>**:

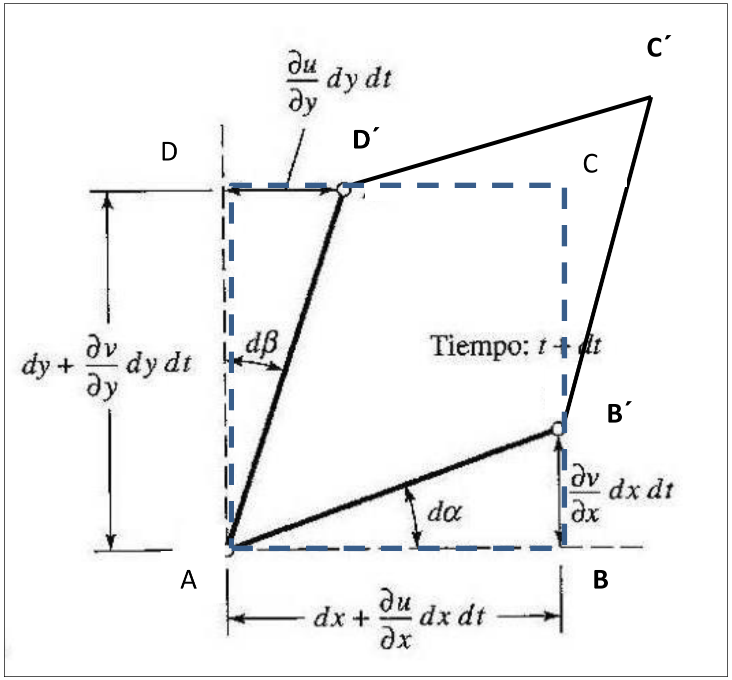
$$Re = \frac{\rho \lambda v}{\mu}$$





Re = ρVl/μ **Laminar Re < 2000 y turbulento Re > 4000**

Flujo rotacional o irrotacional



$d\alpha = BB'/\,dx$

$BB' = ((\partial v/\partial x)dx)\ dt$

$d\alpha = ((\partial v/\partial x)dx)\ dt/\ dx = (\partial v/\partial x)\ dt$

$\omega_\alpha = \Delta\alpha/\Delta t = \partial v/\partial x$

$d\beta = DD'/\,dy$

$DD' = ((-\ \partial u/\partial y)dy)\ dt$

$\Delta\beta = ((-\ \partial u/\partial y)dy)\ dt/\ dy = -\ (\partial u/\partial y)\ dt$

$\omega_\beta = d\beta/dt = -\ \partial u/\partial y$

$\omega_z = (1/2)\ (\ \partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$

$\omega_y = (1/2)\ (\ \partial u/\partial z - \partial w/\partial x)$

$\omega_x = (1/2)\ (\ \partial w/\partial y - \partial v/\partial z)$

El flujo se dice irrotacional si las velocidades angulares son nulas

$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ o lo que es lo mismo:

$\partial w/\partial y - \partial v/\partial z = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y = 0$

Lo que se verificará cuando

$\partial w/\partial y = \partial v/\partial z$; $\partial u/\partial z = \partial w/\partial x$; $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$

Vectorialmente:

$$\omega = ½ (\text{rot } \cancel{\mathbf{V}}) = ½ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \textbf{rot } \cancel{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$$

Trayectoria

Se define como trayectoria a los sucesivos puntos que ocupan en el espacio una partícula de fluido durante el tiempo. Indica la posición de la partícula a lo largo del tiempo.

Líneas de corriente

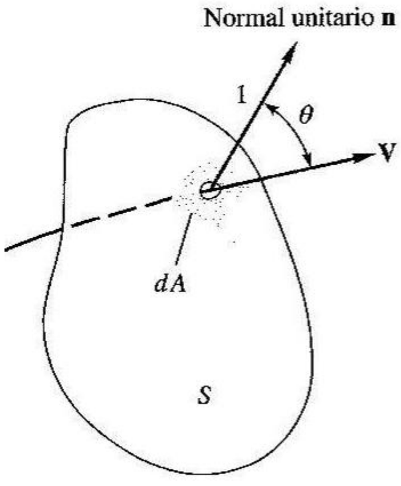
La línea de corriente es la tangente a los vectores velocidad de un grupo de partículas de fluido. No coincide con la trayectoria excepto en los flujos estacionarios.

Dado que la línea de corriente es tangente al vector velocidad, ninguno de ellos la atraviesa por lo que la misma se dice que es impermeable

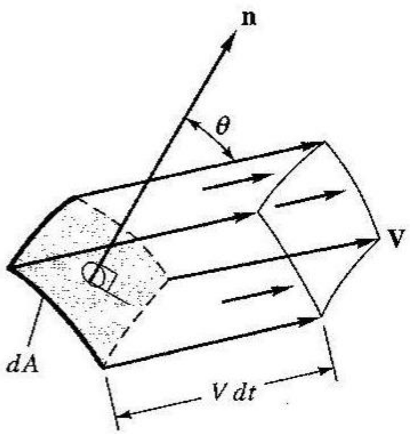
Tubo de corriente

Es un conjunto de líneas de corriente.

Caudal o cantidad de flujo



(a)



(b)

Caudal másico

dG = dm/dt = ρ**dA**.**dx**/dt

Pero **dx**/dt = **V** (velocidad)

dG = ρ**dA**.**V** = ρ dA cos θ V

G = ρ ∫**dA**. **V** = ρ A cos θ V

Dimensiones: [G] = [M]/[T]

Unidades : kg/s; ton/hr, slug/s;

Caudal volumétrico

dQ = dv/dt = **dA**.**dx**/dt

Pero **dx**/dt = **V** (velocidad)

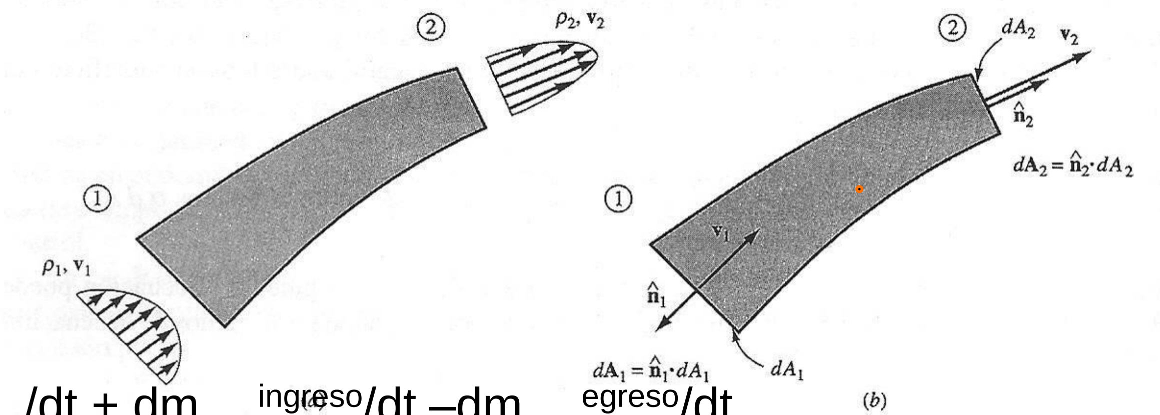
dQ = **dA**.**V** = dA cos θ V

Q = ∫**dA**. **V** = A cos θ V

Las dimensiones son [Q] = $[L]^3/[T]$, Unidades: m^3/s, cm^3/s, pie^3/s

G = ρQ

Ecuación de continuidad para fluidos compresibles e incompresibles



$dm_s/dt = dm_{vc}/dt + dm_{vc}^{ingreso}/dt - dm_{vc}^{egreso}/dt$

$dm_s/dt = 0$

$dm_{vc}/dt = 0$

$dm_{vc}^{ingreso}/dt - dm_{vc}^{egreso}/dt = 0$

$dm_{vc}^{ingreso}/dt = \rho_1 A_1 dx_1/dt = \rho_1 A_1 V_1$

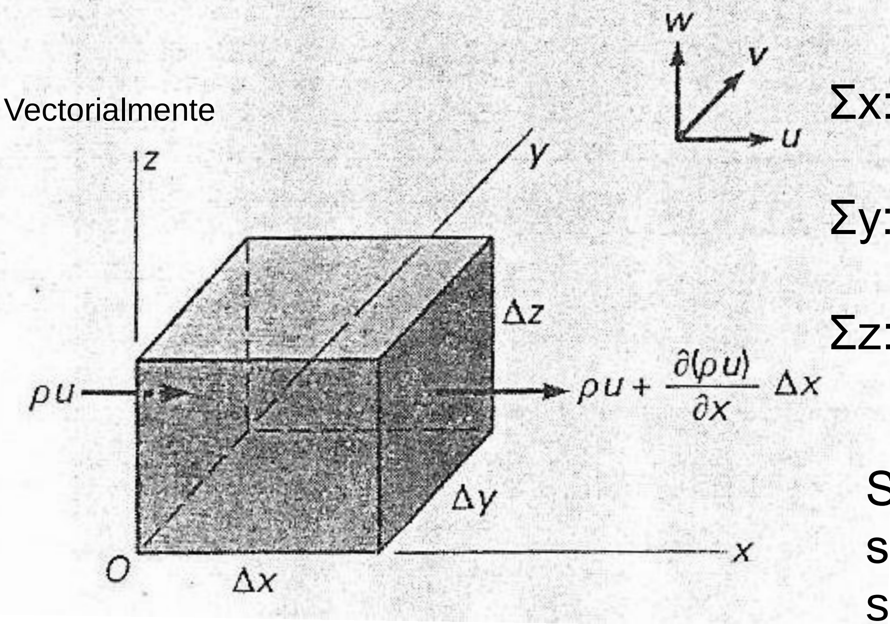
$dm_{vc}^{egreso}/dt = \rho_2 A_2 dx_2/dt = \rho_2 A_2 V_2$

Reemplazando para fluidos compresibles — para incompresibles

$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ — $A_1 V_1 = A_2 V_2$

$G = dm/dt = \rho_1 A_1 dx/dt = \rho_1 A_1 V_1$ — $Q = dV/dt = A_1 dx/dt = A_1 V_1$

Vectorialmente



Σx: $\rho u \Delta y \Delta z - \{\rho u + [\partial(\rho u)/\partial x]\}\Delta y \Delta z = \partial\rho/\partial t \; \Delta y \Delta z$

Σy: $\rho v \Delta x \Delta z - \{\rho v + [\partial(\rho v)/\partial y]\}\Delta x \Delta z = \partial\rho/\partial t \; \Delta x \Delta z$

Σz: $\rho w \Delta x \Delta y - \{\rho w + [\partial(\rho w)/\partial z]\}\Delta x \Delta y = \partial\rho/\partial t \; \Delta x \Delta y$

Si dividimos la primera ecuación por $\Delta y \Delta z$, la segunda por $\Delta x \Delta z$, y la tercera por $\Delta x \Delta y$ y sumando miembro a miembro

$$\rho u - \{\rho u + [\partial(\rho u)/\partial x]\} + \rho v - \{\rho v + [\partial(\rho v)/\partial y]\} + \rho w - \{\rho w + [\partial(\rho w)/\partial z]\} = \partial\rho/\partial t$$

$$- [\partial(\rho u)/\partial x] - [\partial(\rho v)/\partial y] - [\partial(\rho w)/\partial z] = \partial\rho/\partial t$$

Como $\partial\rho/\partial t = 0$ la sumatoria debe ser 0 también. Multiplicando por -1 y distribuyendo:

$$u \, \partial\rho/\partial x + v \, \partial\rho/\partial y + w \, \partial\rho/\partial z + \rho \, (\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z) = 0$$ (flujo compresible)

Vectorialmente

$\mathrm{div}\,(\rho \mathbf{V}) = 0$ compresible

Para flujo incompresible ρ = constante,

$$\partial\rho/\partial x = \partial\rho/\partial y = \partial\rho/\partial z = 0$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$$

$$\text{div} \, . \, \mathbf{V} = 0 \qquad \text{incompresible}$$

Condiciones para el flujo ideal

- Satisface la ecuación de continuidad
- Satisface la segunda ley de Newton en cualquier punto en cualquier instante.
- Ninguna frontera sólida puede ser penetrada por el flujo ni pueden existir vacios entre el fluido y la frontera.

Velocidad y Aceleración

En un campo tridimensional las velocidades pueden variar tanto en magnitud como en dirección. Cada componente del vector velocidad **V** se puede escribir como.

$\mathbf{V}\ (x,y,z) = u\ (x,y,z) + v\ (x,y,z) + w\ (x,y,z)$

la aceleración se define como

$\mathbf{a}_{est} = d\ [\mathbf{V}\ (x,y,z)]/dt = (\partial\mathbf{V}/\partial x)\ (dx/dt) + (\partial\mathbf{V}/\partial y)\ (dy/dt) + (\partial\mathbf{V}/\partial z)\ (dz/dt)$

Como $dx/dt = u$; $dy/dt = v$; $dz/dt = z$ la ecuación se puede escribir:

$\mathbf{a}_{est} = \mathbf{u}\ \partial\mathbf{V}/\partial x + \mathbf{v}\ \partial\mathbf{V}/\partial y + \mathbf{w}\ \partial\mathbf{V}/\partial z$

Donde cada componente es

$(a_x)_{est} = u\ (\partial u/\partial x) + v\ (\partial v/\partial y) + w\ (\partial w/\partial z)$

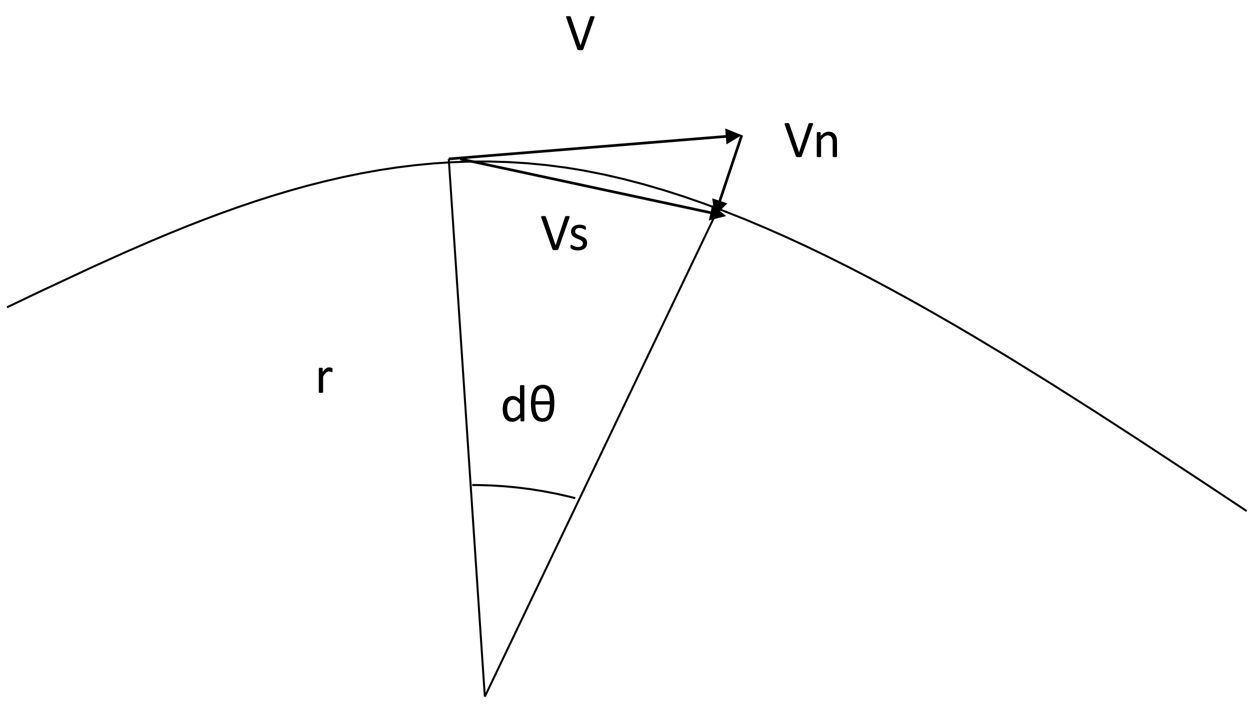
$(a_y)_{est} = u\ (\partial u/\partial x) + v\ (\partial v/\partial y) + w\ (\partial w/\partial z)$

$(a_z)_{est} = u\ (\partial u/\partial x) + v\ (\partial v/\partial y) + w\ (\partial w/\partial z)$

La aceleración podemos dividirla en dos tipos: convectiva (por efecto de la traslación) y local (por efecto de la rotacionalidad)

La aceleración convectiva tiene dos componentes: tangencial y normal

Si se considera una curva o una línea de corriente conviene colocar el eje x en coincidencia con el vector velocidad que es tangente a la línea de corriente



$a_t = dV_s/dt = (dV_s/dt) \;.\; (ds/ds) = (dV_s/ds) \;.\; (ds/dt) = V_s \;.\; dV_s/ds = ½\; d\,(V_s^2)/ds$

$a_n = dV_n/dt = dV_n/dt\; ds/ds = dV_n/ds\; ds/dn = V_s\; dV_n/ds$

$d\theta = ds/r = \Delta V_n/V_s = dVn/ds = Vs/r$

$a_n = V_s.V_s/r = (V_s)\,^2/r$

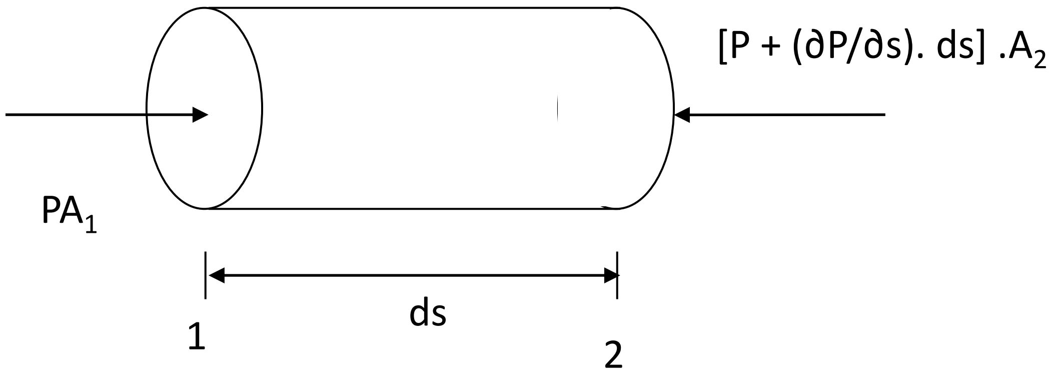
La aceleración total será la suma de la aceleración convectiva y local con dos componentes: tangencial (T) y normal (N).

$a_T = ½ \, d (V_s^2)/ds + dV_s/dt$

$a_N = (V_s)^2/r + dV_n/dt$

donde dV_s/dt y dV_n/dt son los componentes tangencial y normal de la aceleración local.

Relación entre la aceleración y el gradiente de presión



$F_s = PA - [P + (\partial P/\partial s).\ ds]\ .A$ como $A_1 = A_2 = A$

$F_s/(A.ds) = -(\partial P/\partial s) = f_s$ (fuerza por unidad de volumen)

Por la segunda ley de Newton:

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ a_s$

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ a_n$

Reemplazando los valores de a_s y a_n

$-(\partial P/\partial s) = \rho\ [½\ d\ (V_s^2)/ds]$

$-(\partial P/\partial s) = \rho.\ [(V_s)^2/r] = \rho\ V_s\ dV_n/ds$

Despejando e integrando

$$\int_1^2 -dP = \int_1^2 (\rho/2)\, d\,[(V_s^2)/ds] = P_2 - P_1 = \rho/2\,(V_{s2}^2 + V_{s1}^2)$$

$$-(\partial P/\partial s) = \rho.\,[(V_s)^2/r] + \rho\,[½\, d\,(V_s^2)/ds] - \rho\,[½\, d\,(V_s^2)/ds]$$

-Reordenando

$$-(\partial P/\partial s) = \rho.\, V_s\,[dV_n/ds - dV_s/ds] + \rho\,[½\, d\,(V_s^2)/ds]$$

$dV_n/ds - dV_s/ds = 0$ por irrotacionalidad

$$-(\partial P/\partial s) = \rho\,[½\, d\,(V_s^2)/ds]$$

$$\int_1^2 -dP = \int_1^2 (\rho/2)\, d\,[(V_s^2)/ds] = P_2 - P_1 = \rho/2\,(V_{s2}^2 + V_{s1}^2)$$

$P_1 + (\rho/2)\, V_{s1}^2 = P_2 + (\rho/2)\, V_{s2}^2$ Energía de la línea de corriente

Cuando el movimiento es irrotacional la energía de la partícula es constante para cualquier línea de corriente (este concepto se aplica sobre una línea de corriente).

Función Potencial y función de corriente

La velocidad angular resultante de un movimiento rotacional era

$$\omega = ½\,(\text{ rot } \mathbf{V}\,) = ½ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = ½\,(\mathbf{V} \times \mathbf{V})$$

$\omega = ½[(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z)i + (\partial u/\partial z - \partial w/\partial x)j + (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)k]$

Si definimos una función φ tal que

$\varphi = \varphi\,(x,y,z)$

en donde se cumple que

$u = \partial\varphi/\partial x$

$v = \partial\varphi/\partial y$

$w = \partial\varphi/\partial z$

Si esta función existe y cumple con la condición de que $\omega = 0$ (flujo irrotacional)

se denomina función potencial.

Consideremos el plano yz

$d\varphi = v\,dy + w\,dz = (\partial\varphi/\partial y)\, dy + (\partial\varphi/\partial z)\, dz$

$\cancel{\mathbf{V}} = v\mathbf{j} + w\mathbf{k} = (\partial\varphi/\partial y)\mathbf{j} + (\partial\varphi/\partial z)\mathbf{k} =$ (gradiente de φ)

Vemos que la velocidad es el gradiente de la función Potencial
Por la condición de irrotacionalidad

$$\text{Rot } V = V \times (\nabla .\, \varphi) = 0$$

$d\varphi = (\partial\varphi/\partial y)\, dy + (\partial\varphi/\partial z)\, dz = 0$ entonces φ es contante y por lo tanto es una superficie equipotencial de valor φ.

$$\text{div } (\varphi) = \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = \partial^2\varphi/\partial^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = \nabla^2 \varphi = 0$$

$\nabla^2 \varphi$ se denomina Laplaciano

Definimos la función de corriente como aquella $\psi = \psi\ (y,z)$ tal que en el plano yz cumple con

$v = \partial\psi/\partial z$

$w = -\ \partial\psi/\partial y$

$d\psi = (\partial\psi/\partial y).\ dy + (\partial\psi/\partial z).\ dz = -\ wdy + vdz = vdz - wdy$

Si $d\psi = 0$ entonces ψ = constante

div (ψ) = $\mathbf{V} \times \mathbf{V} = \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ la divergencia de la velocidad es igual al laplaciano de la la función de potencial y de corriente

div (ψ) = $\mathbf{V} \times \mathbf{V} = (\partial^2\ \psi/\partial y\partial z) - (\partial^2\psi/\partial z\partial y) = 0$

Consideremos lo siguiente

$v = dy/dt$; $w = dz/dt$

$dt = dy/v = dz/w$

considerando las dos últimas igualdades

$vdz – wdy = 0$ que es la función de corriente

Supongamos dos líneas de corriente

dn es un diferencial exacto y V es la velocidad del flujo

$V\, dn = vdz – wdy = (\partial\psi/\partial z)\, dz + (\partial\psi/dy)\, dy = d\, \psi\varphi$

El incremento entre dos líneas de corriente es igual al caudal volumétrico que circula entre ellas dos.

Red de corriente

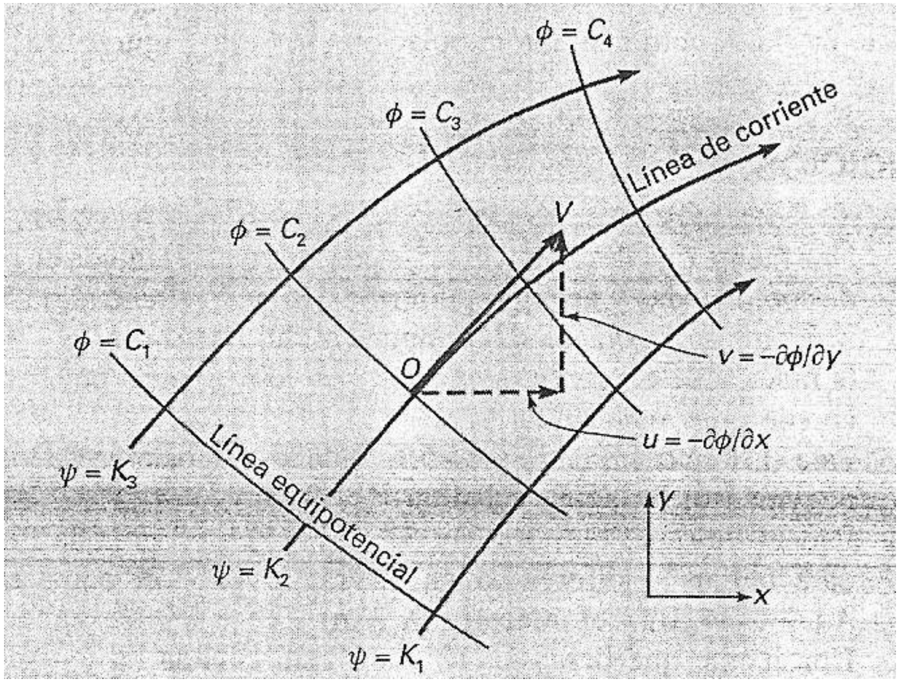
Es el conjunto de líneas de corriente y líneas de potencial. Se caracteriza porque las líneas de corriente son perpendiculares a las líneas de potencial.

De la ecuación de función de corriente

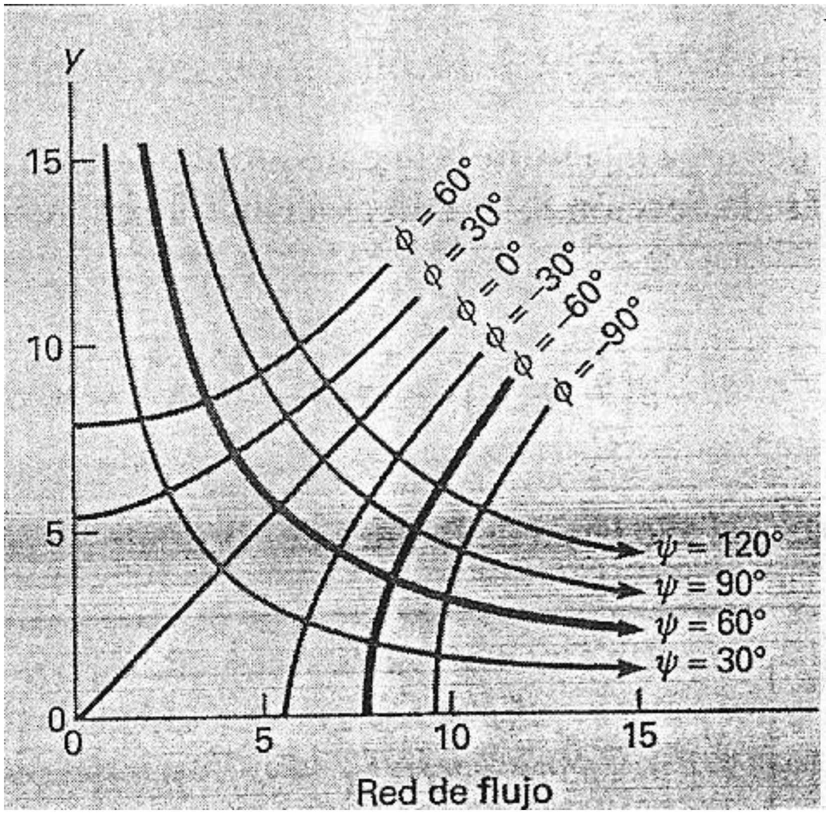
$d\psi = vdz - wdy = 0$ de donde $dz/dy = w/v$

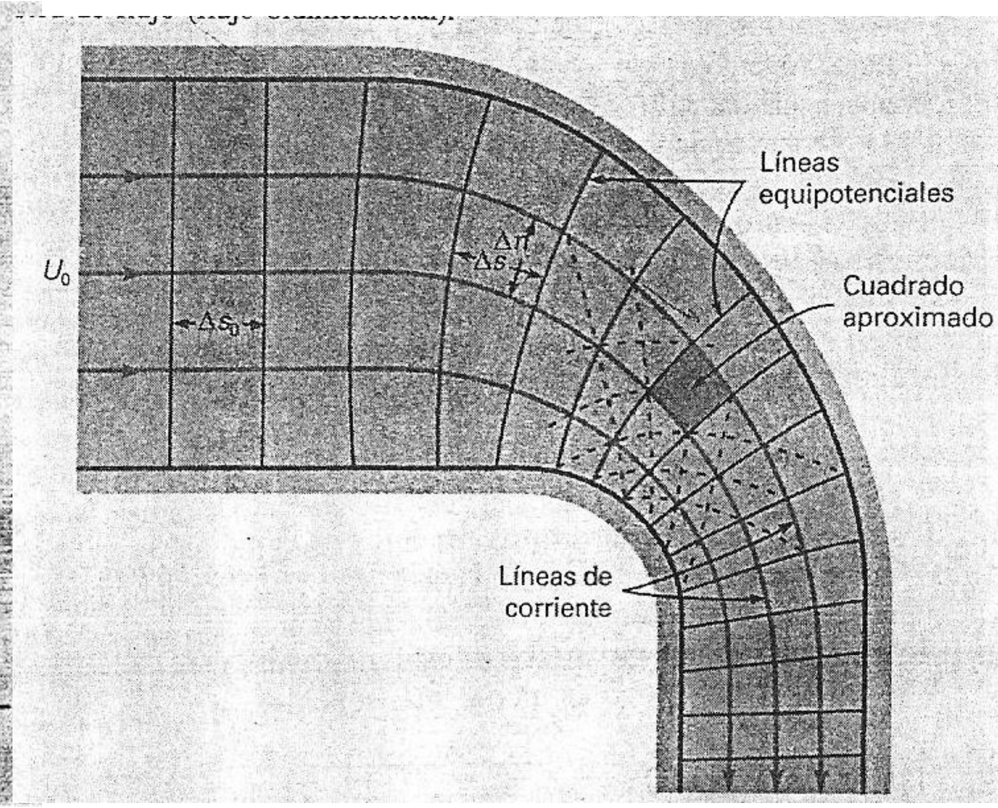
de la función de potencial

$d\varphi = vdy + wdz = 0$ de donde $dz/dy = - v/w$



Ejemplos de red de corriente



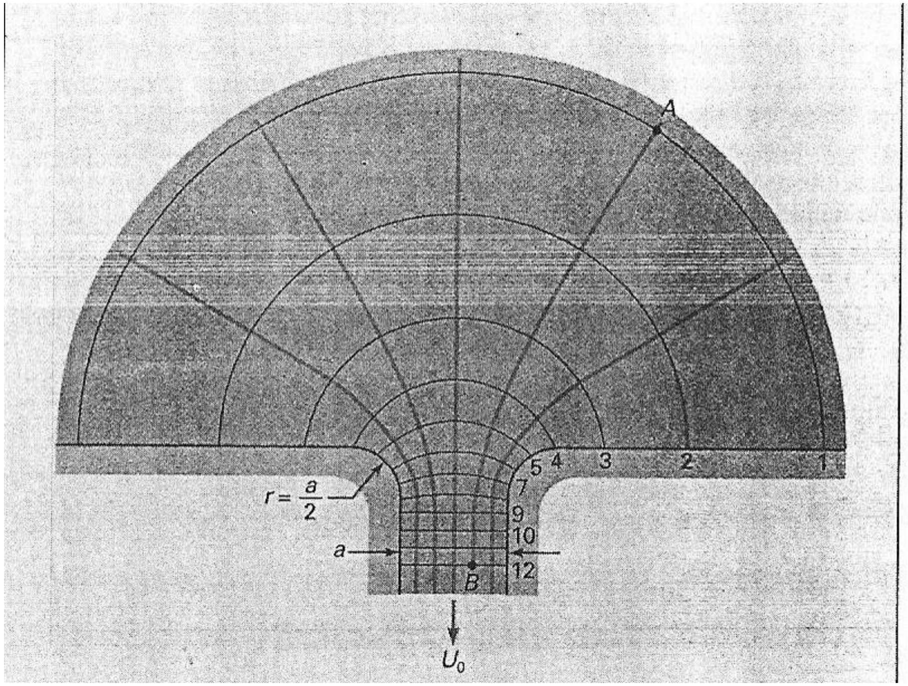


Esquina

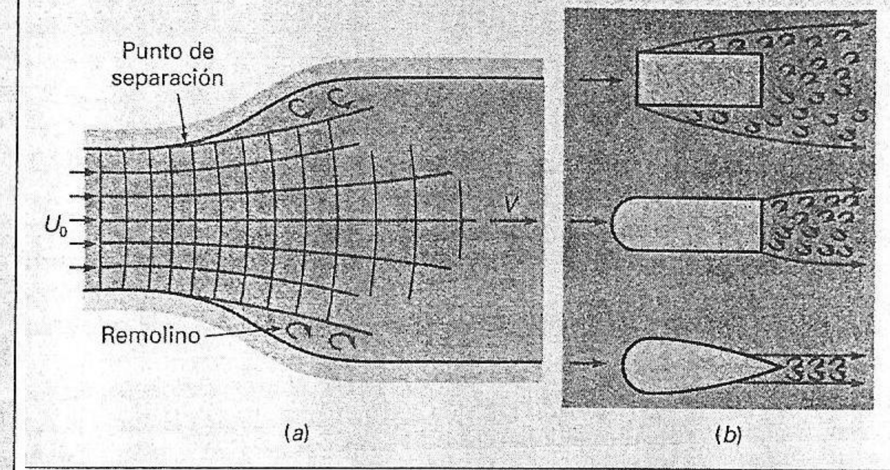
Codo reductor

Uso y limitaciones de la red de corriente

$$V_i \Delta n_i \, 1 = V_{i+1} \, \Delta n_{i+1} \, 1$$

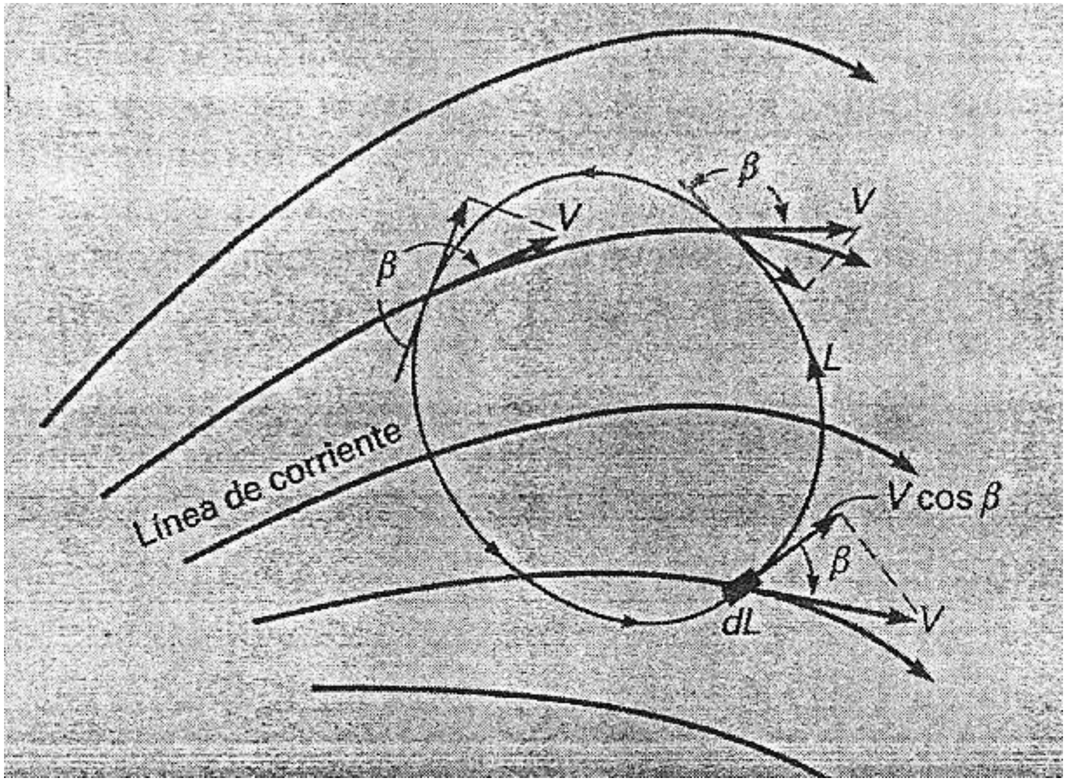


Separación en un flujo divergente. *a*) Formación de remolinos en un canal divergente. *b*) Estelas turbulentas.



Circulación

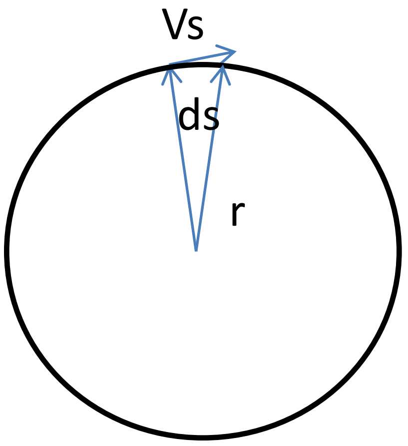
Supongamos un campo fluido bidimensional, donde L es una curva cualquiera



Se define la circulación como

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \,.\, d\mathbf{L} = \oint_L V \cos\beta \,.\, d\mathbf{L}$$

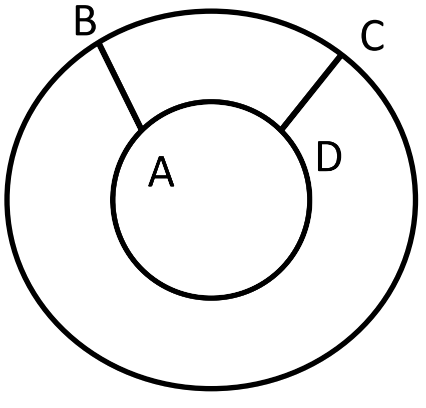
1. Integración en una circunferencia (línea de corriente circular)



$$\Gamma = \int_0^{2\pi} Vs.ds = \int_0^{2\pi} Vs\ r\ d\theta = \int_0^{2\pi} \omega\ r\ dr = 2\pi\ \omega\ r^2$$

$\Gamma/\pi\ r^2 = 2\ \omega = \nabla \times \mathbf{V}$ Todos los movimientos que tienen rotación son rotacionales.

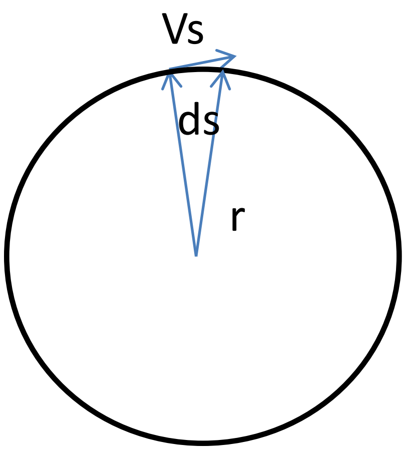
2. Integración en un sector circular



$$\Gamma = \int_A^B Vs\ ds + \int_B^C Vs\ ds - \int_C^D Vs\ ds - \int_D^A Vs\ ds$$

$$\Gamma = \int_0^{\theta} \omega\ r_1 r_1 d\theta - \int_0^{\theta} \omega\ r_2\ r_2 d\theta = \omega\theta(r_1^2 - r_2^2)$$

3. Consideremos una función potencial como rotacional



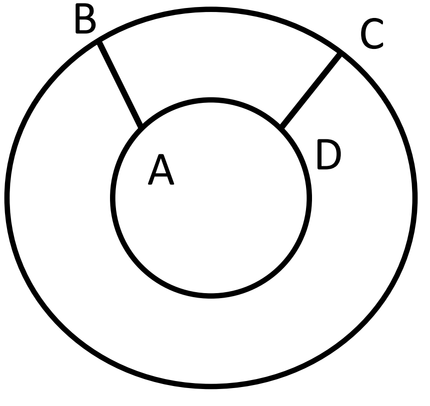
$V = d\psi/ds = d\psi/rd\theta = kd\theta/rd\theta = k/r$

Vr= k esta función se llama droll y es el momento del vector velocidad

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} Vs\, ds = \int_0^{2\pi} (k/r)\, r\, d\theta = 2\pi\, k$$

La circulación es constante

4. Consideremos el mismo razonamiento con otro circuito



$$\Gamma = \int_A^B Vs\, ds - \int_C^D Vs\, ds = \int_0^\theta (k/r_1)\, r_1 d\theta - \int_0^\theta (k/r_2)\, r_2 d\theta = 0$$

irrotacional

Conclusión: cuando el movimiento contiene al centro de rotación $\Gamma \neq 0$ el movimiento es rotacional y cuando no contiene el centro de giro $\Gamma = 0$.

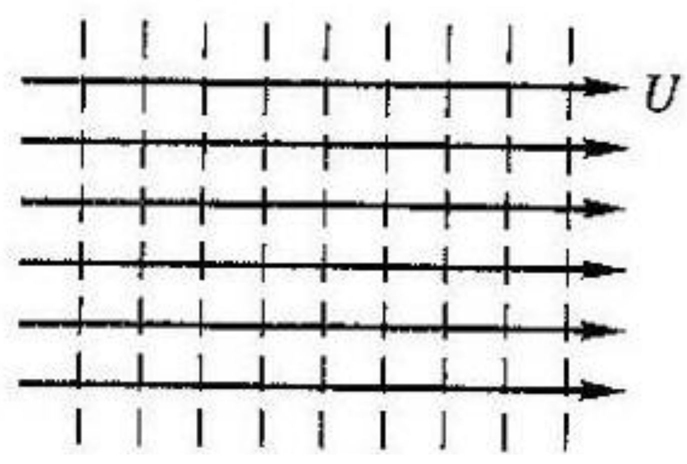
Flujos sencillos

•Corriente uniforme en la dirección del eje x

Una corriente uniforme en la dirección del eje x uniforme **V** = u**i**. El campo de potencial como las líneas de corriente se determinan como:

u= ∂φ/∂x = ∂ψ/∂y v = ∂φ/∂x = - ∂ψ/∂x = 0

Corriente uniforme u**i** ψ= uy φ = ux



•<u>Fuente o sumidero en el origen</u>

La fuente se define como un punto en donde se genera un flujo radial uniforme saliente. El sumidero es similar pero con un flujo entrante. En este caso conviene usar coordenadas polares pues no hay velocidad circunferencial. A una distancia radial r, considerando un caudal Q constante y una altura o espesor unitario, la velocidad es.

$v_r = Q/(2\pi r1) = m/r = (1/r).\ \partial\psi/\partial\theta = \partial\varphi/\partial r$

$v_\theta = 0 = -\partial\psi/\partial r = (1/r)\ \partial\varphi/\partial\theta$

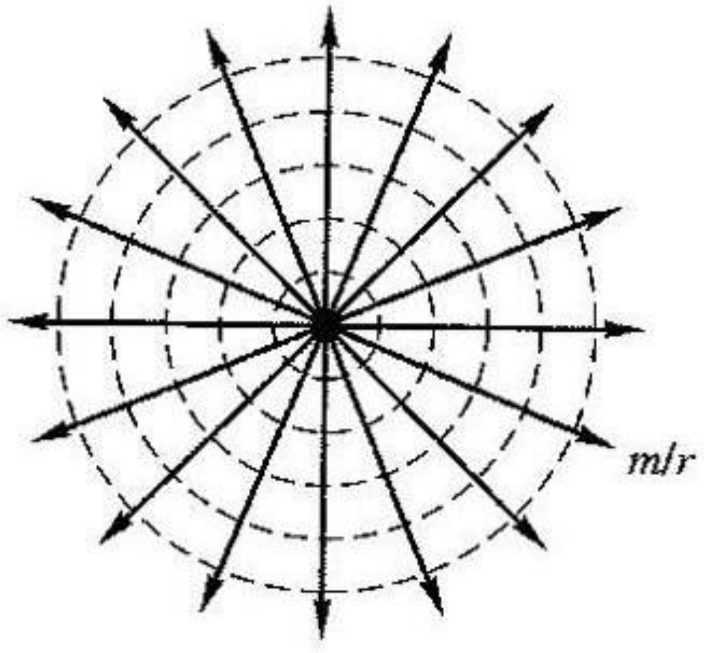
las funciones quedan

$\psi = m\theta$ y $\varphi = m \ln r$

donde $m = Q/2\pi$ es constante

(consideramos un espesor unitario)

Para el sumidero las líneas de corriente cambian de signo

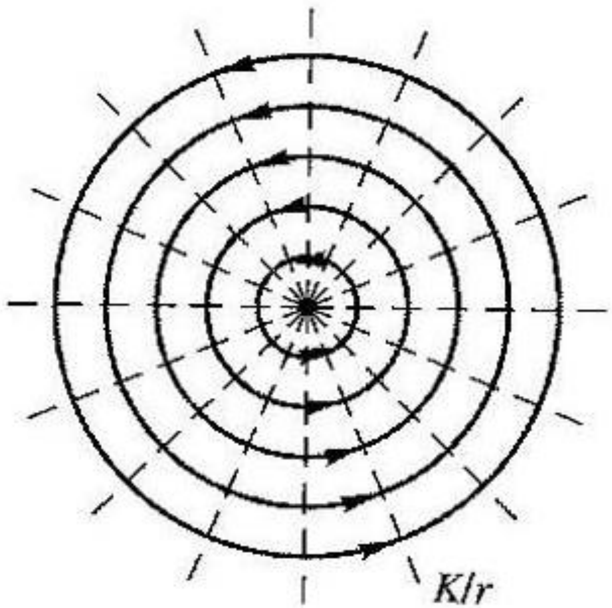


•**Vórtice libre o torbellino irrotacional**

Un vórtice libre es un flujo circulatorio puro donde $v_\theta = f(r)$ y $v_r = 0$. Hay muchas distribuciones de velocidad pero tenemos que $v_\theta = k/r$ (verifica la ley de droll), la función de corriente y el potencial de velocidad son:

$v_r = 0 = (1/r).\ \partial\psi/\partial\theta = \partial\varphi/\partial r$ $\qquad$ $v_\theta = k/r = -\partial\psi/\partial r = (1/r)\ \partial\varphi/\partial\theta$

$\psi = -k \ln r$ $\qquad$ $\varphi = k\theta$



Otra forma del vórtice libre

Para un vórtice forzado la superficie tenía la forma de un paraboloide de revolución. La parábola que lo representa es $y = \omega^2 r^2/(2g)$

En el caso del vórtice libre consideremos el efecto de la fuerza centrífuga

$df = dm\,\omega^2 r = \rho dAdr\,\omega^2 r$

$dP = df/dA = \rho dr\,\omega^2 r$

$dP/dr = \rho\,\omega^2 r$

Cuando se vió aceleración la energía a lo largo de esta línea de corriente es

$P + \rho v^2/2 =$ constante (mov irrotacional)

Derivando respecto de r

$dP/dr + \rho v dv/dr = 0$

$dP/dr = -\rho v dv/dr$

$\rho\,\omega^2 r = -\rho v dv/dr$

$v/r = dv/dr$

Reordenando

$dr/r + dv/v = 0$ integrando

$\ln r + \ln v = cte$

$vr = e^{cte} = k$ verifica la ley del Droll

Volviendo a la ecuación

$dP = \rho\, v^2/r\, dr = (\gamma/g)\,(k^2/r^3)\, dr$

$dP/\gamma = dy = k^2/(gr^3)\, dr$

$y = k^2/(2gr^2)$ Esta ecuación es una hipérbola

Consideremos la ecuación de la energía

$P + \rho v^2/2 = P(x) - \rho v^2/2 = cte$ para x muy alejado $v = 0$

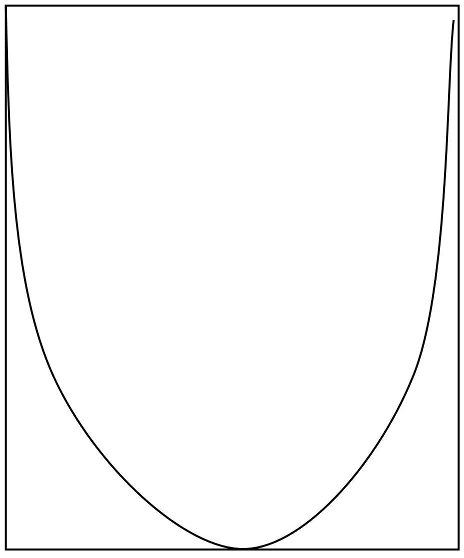
$P = P(\infty) - \rho v^2/2$

Reemplazado v por k/r

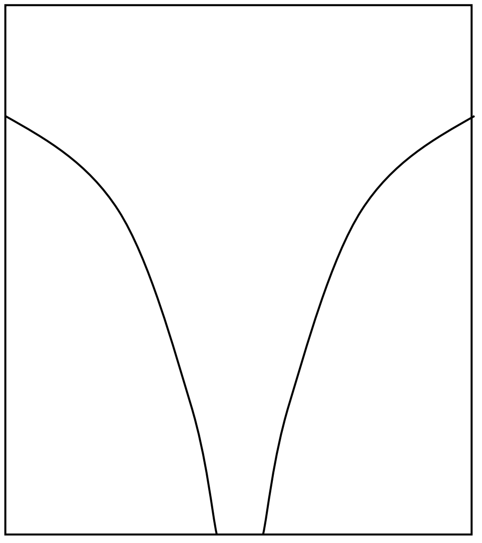
$P = P(\infty) - \rho k^2/2r^2$

Cuando r tiende a 0, P tiende a $-\infty$

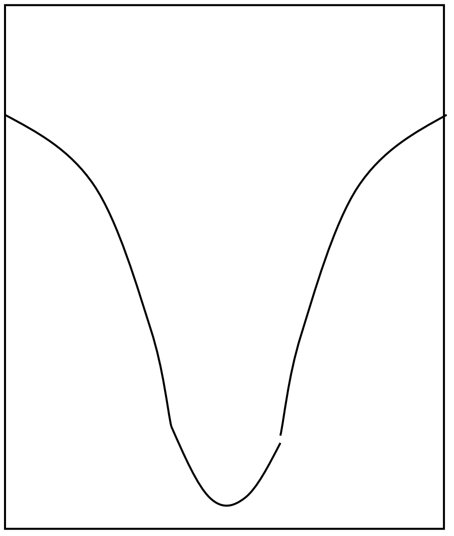
Esta condición no se dá en la realidad. En las proximidades del eje se comporta como un vórtice forzado.



Vórtice forzado

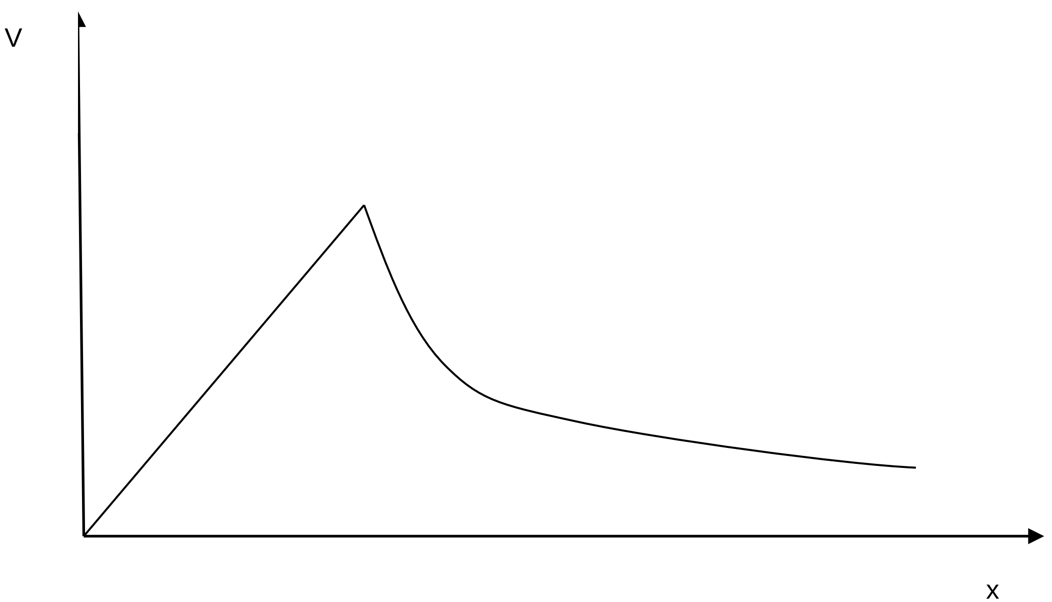


Vórtice libre



Vórtice real

Distribución de velocidades



El punto en donde se produce el cambio de vórtice libre a forzado está dado por

$y_{forzado} = y_{libre} = k^2/(2gr^2) = \omega^2 r^2/(2g)$

$k^2/(r^2) = \omega^2 r^2$

$k^2/\omega^2 = r^4$ de donde $r = \sqrt{}(k/\omega)$

Superposición fuente más sumidero de igual intensidad

Consideremos una fuente de intensidad +m situada en un punto de coordenadas (x,y) = (-a,0) y un sumidero de intensidad –m situado en coordenadas (x´, y´) = (0, a) la función de corriente (en coordenadas rectangulares) es:

$\psi = \psi_{\text{fuente}} + \psi\ s_{\text{umidero}} = m\ tg^{-1}\ [y/(x+a)] - m\ tg^{-1}\ [y/(x-a)]$

La función potencial es:

$\varphi = \varphi_{\text{fuente}} + \varphi_{\text{sumidero}} = ½\ m\ \ln[(x+a)^2 + y^2] – ½\ m\ \ln\ [(x+a)^2 + y^2]$

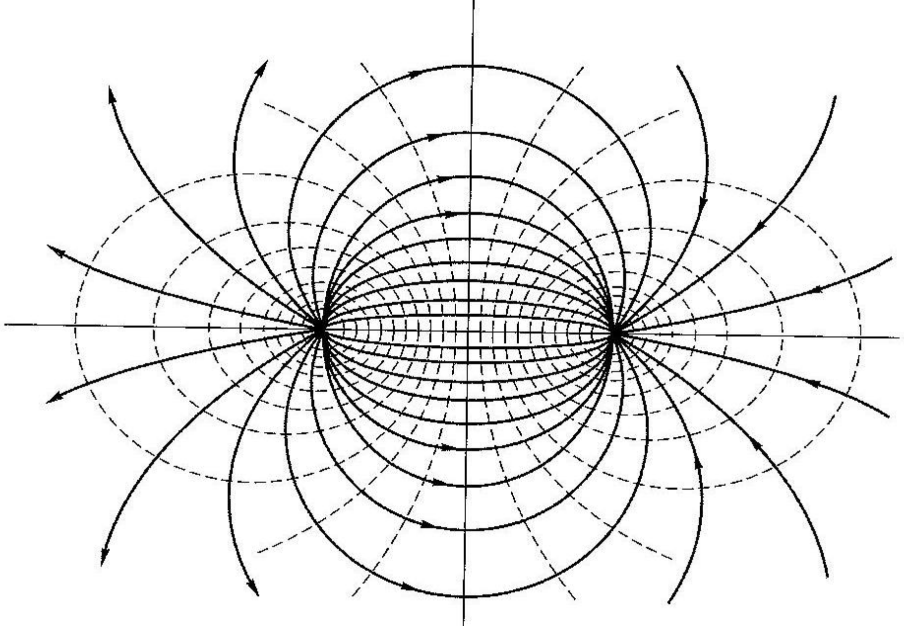
usando identidades trigonométricas y logarítmicas las funciones quedan:

$\psi = -\ m\ tg^{-1}\ [\ 2ay/(x^2 + y^2 – a^2)] =$

$\psi = -(m/r)\ \text{sen}\ \theta$

$\varphi = ½\ m\ \ln\ \{[(x+a)^2 + y^2]/[(x-a)^2+y^2]\}$

$\varphi = (m/r) \cos \theta$



Dipolo y corriente uniforme

Consideremos el flujo uniforme en coordenadas polares y un dipolo

$\varphi = ux = u\, r \cos\theta$ $\qquad\qquad$ $\varphi = (k/r) \cos\theta$

$\psi = uy = u\, r \operatorname{sen}\theta$ $\qquad\qquad$ $\psi = (-k/r) \operatorname{sen}\theta$

$\varphi = ux + (k/r) \cos\theta = ur \cos\theta + (k/r) \cos\theta = \cos\theta(ur + k/r)$

$\psi = uy + (-k/r) \operatorname{sen}\theta = ur \operatorname{sen}\theta - (k/r) \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\, (ur - k/r)$

Para que $\psi = 0$ necesita ser cero la función sen θ o el paréntesis

De la primera opción

sen $\theta = 0$ cuando $\theta = 0$ o $180°$

El paréntesis es cero cuando $ur = k/r$ o bien $r^2 = k/u$ de donde $r = \sqrt{(k/u)} = a$

La función de corriente cuyo valor es cero está representada por un circulo de radio a

con centro en el eje x

La velocidad v está dada por

$v = \partial\psi/\partial r = u\,\text{sen}\theta + (k/r^2)\,\text{sen}\theta = \text{sen}\,\theta\,(u + k/r^2)$

por el droll $k = ua^2$

$v = \text{sen}\,\theta\,(u + ua^2/r^2)$

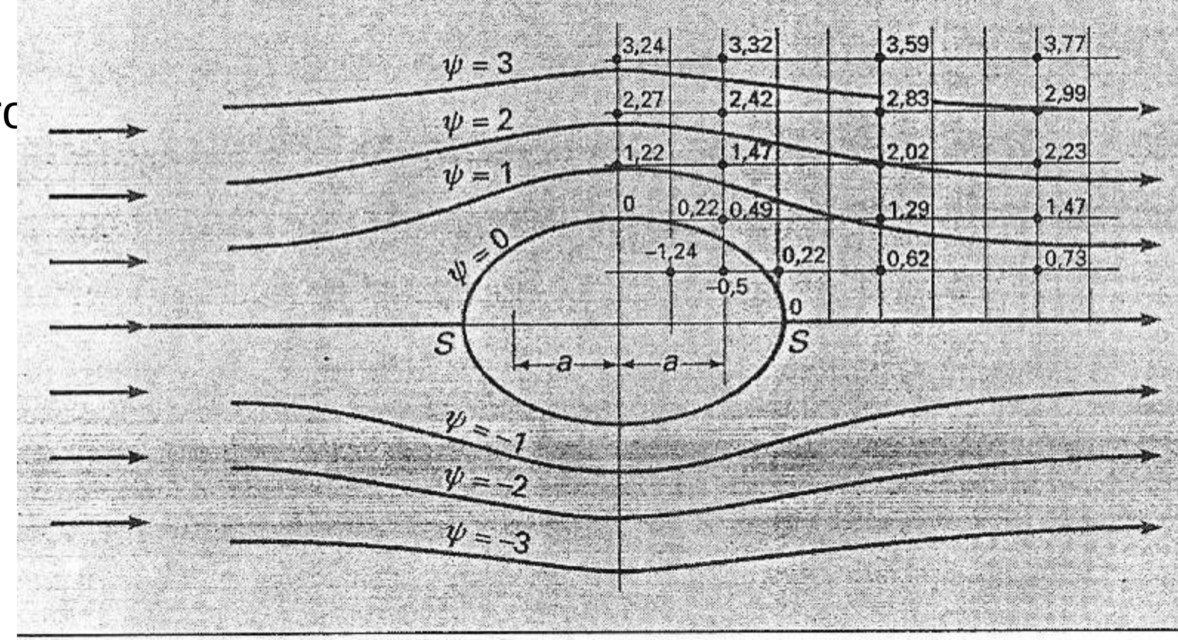
para r = a (superficie del cilindro

$v = 2u\,\text{sen}\,\theta$

para $\theta = 0°$ y $180°$; $v = 0$,

para $\theta = 90°$ y $270°$ $v = 2u$

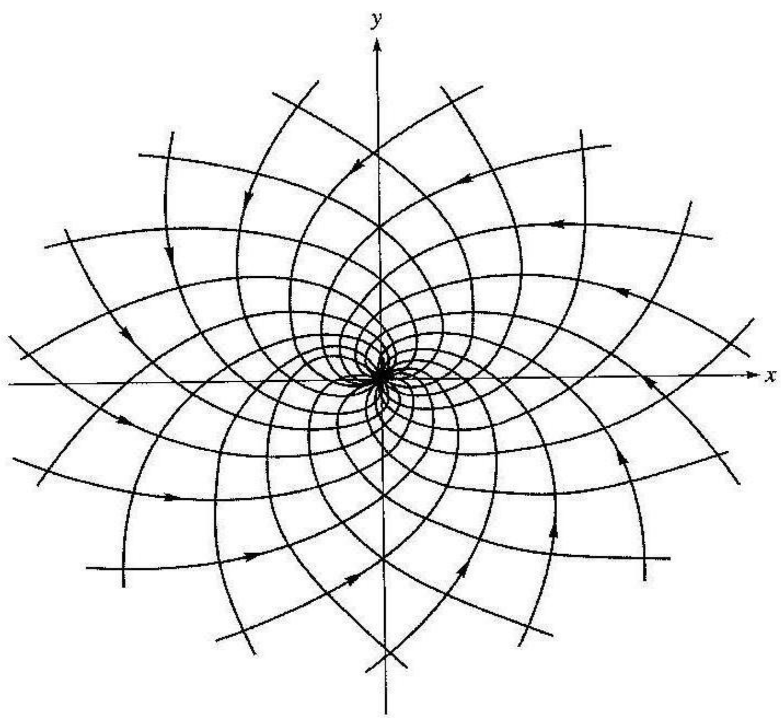
Campo fluido de una fuente y un sumidero de igual intensidad en un campo fluido rectilíneo uniforme. *S* representa un punto de remanso.



Sumidero mas torbellino en el origen

Esta combinación se puede observar en la naturaleza. Se adapta bastante bien al movimiento de un tornado o al desagüe de una bañera.

$\psi = m\theta - k \ln r$ y $\varphi = m \ln r + k\theta$



Corriente uniforme más fuente en el origen: cuerpo infinito de Rankine

En este caso se suman las corrientes. Las ecuaciones son:

$\psi = u\, r \,\text{sen}\, \theta + m\theta$ y $\varphi = u\, r\, \text{sen}\theta + m \ln r$

el cuerpo formado no es una elipse, la semianchura aguas abajo en un punto muy alejado está dado por $\pi m/U$ y el radio es:

$r = m(\pi-\theta)/u \,\text{sen}\, \theta$

Las componentes cartesianas de la velocidad son

$u = \partial\varphi/\partial y = u + (m/r) \cos \theta$ y $v = -\partial\varphi/\partial x = (m/r)\, \text{sen}\, \theta$