Sistemas de Automatización
AÑO 2021

UNIDAD 6
Funcion de Transferencia Pulso

Profesores:

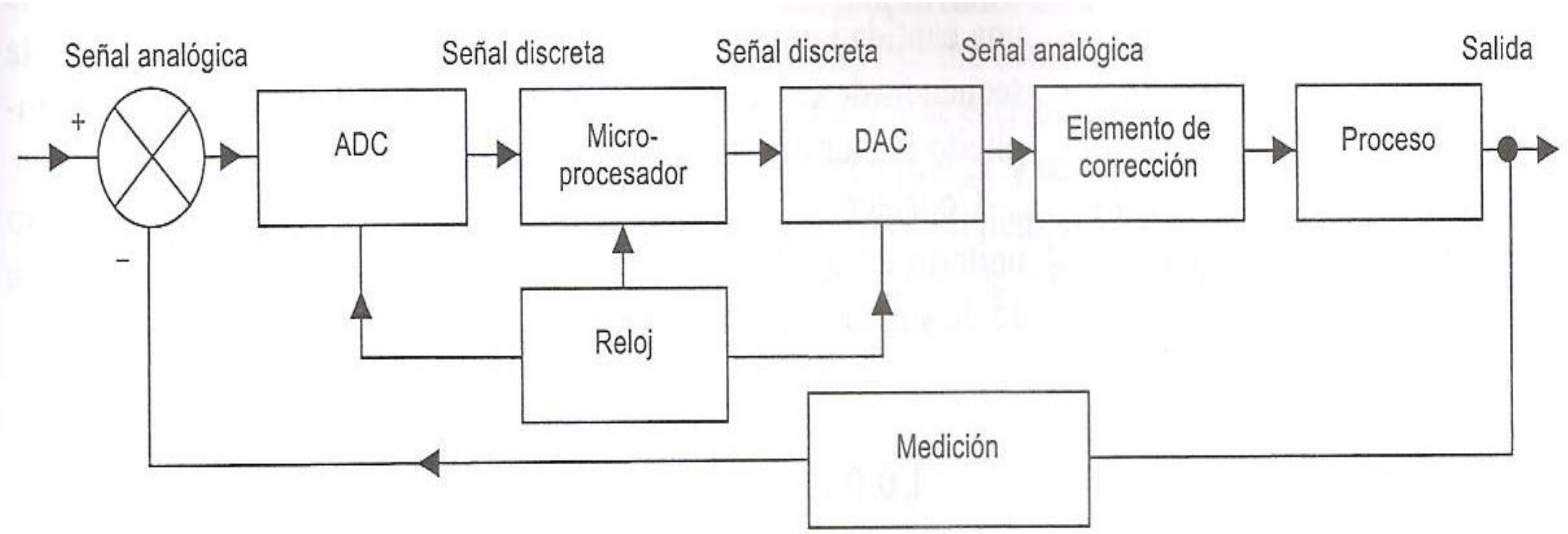
Ing. María Susana Bernasconi-
sbernasc@uncu.edu.ar
susybernasconi@gmail.com

Ing Fernando Geli
fernandogeli@gmail.com

Bibliografía:

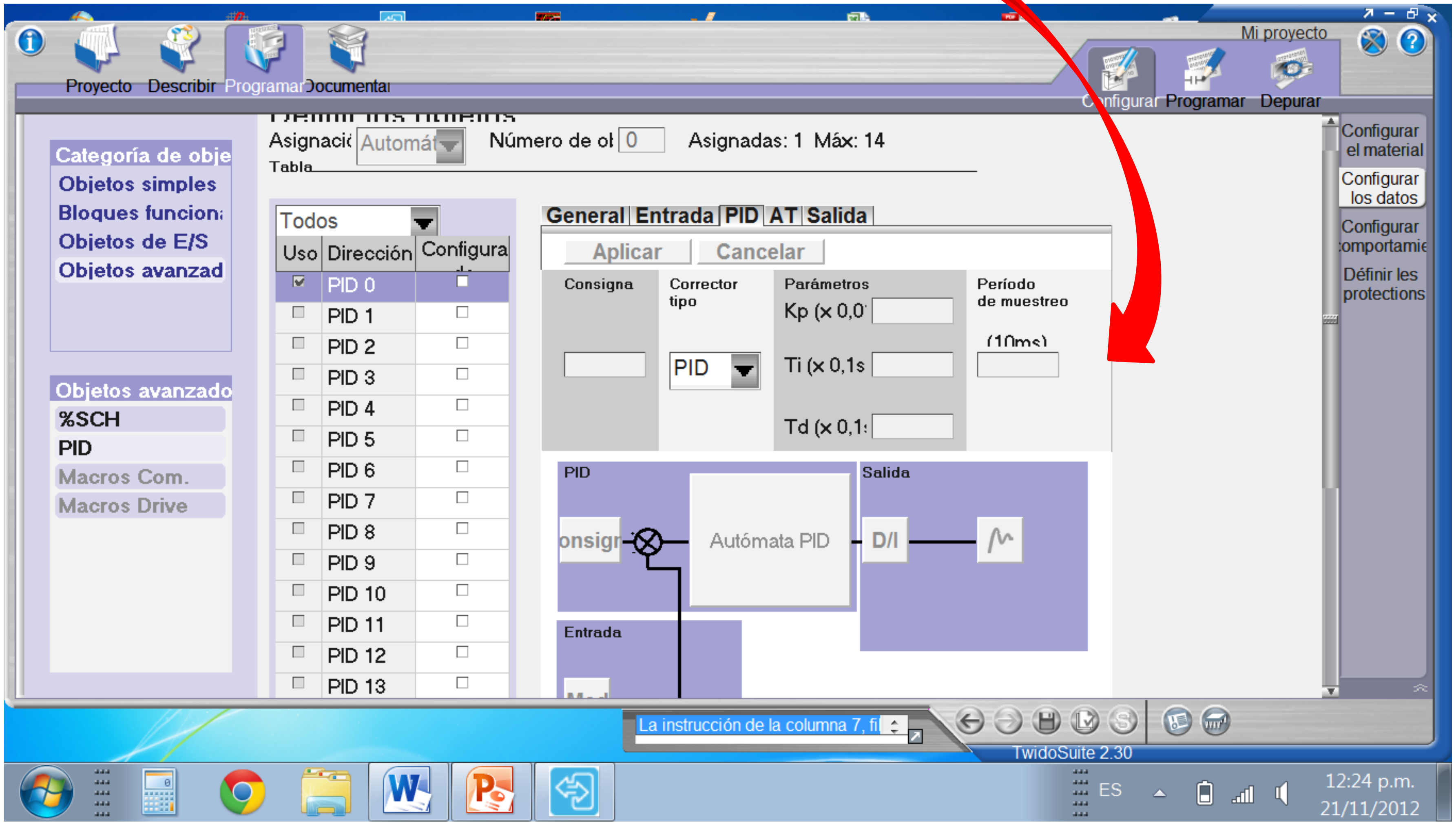
Ingeniería de Control- W. BOLTON

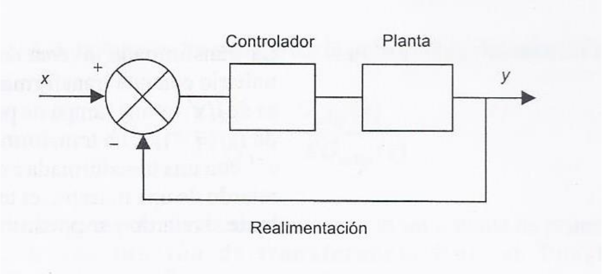
Controladores basados en microprocesador

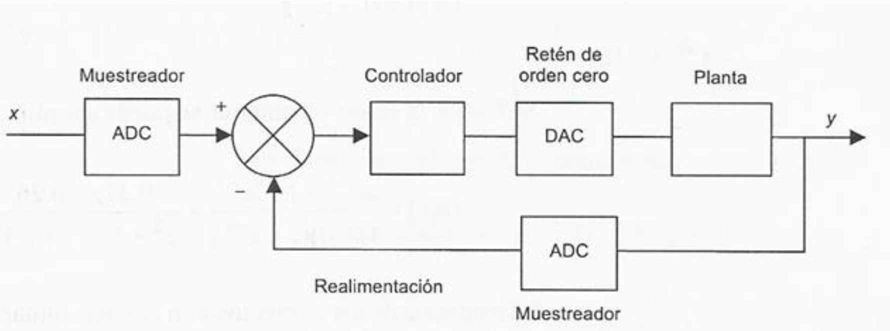


Bloque PID en los PLC’s (Controladores Lógicos Programables

T : intervalo entre pulsos







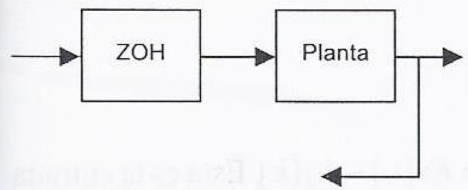


Figura 15.22 Parte del lazo de control digital

$$G(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-Ts}}{s} G_{\mathrm{p}}(s) \qquad [21]$$

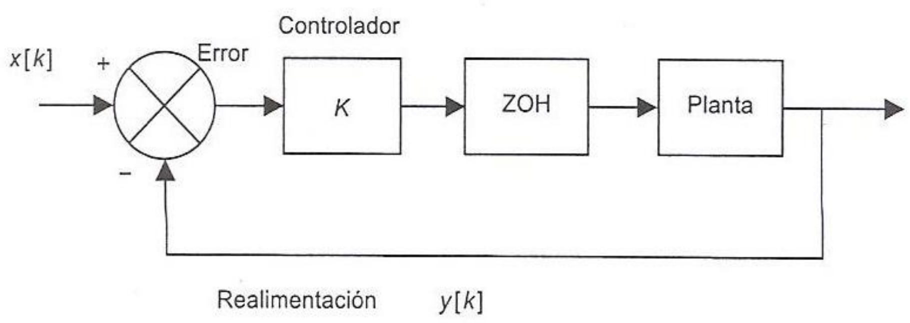
Para obtener la salida muestreada de los elementos cuando hay una entrada muestreada, se necesita la función de transferencia pulso; esto es igual a decir que se necesita la transformada z de la respuesta de los elementos a una entrada impulso unitario. En el dominio de s la respuesta de los elementos a un impulso unitario es lo mismo que la función de transferencia. De este modo

$$G(z) = \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - \mathrm{e}^{-Ts}}{s} G_{\mathrm{p}}(s)\right\} \qquad [22]$$

Suponga que la planta tiene una función de transferencia de $1/s(s+1)$. Entonces

$$G(z) = \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - \mathrm{e}^{-Ts}}{s^2(s+1)}\right\}$$

$$= \text{transformada } z \text{ de } \mathcal{L}^{-1}\left\{(1 - \mathrm{e}^{-Ts})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)\right\}$$



$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

$$G_p(s)G_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s^2(s+1)} = (1-e^{-Ts})\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)$$

la transformada z de $L^{-1}\{G_p(s)G_{zoh}(s)\}$= $(1-\frac{1}{z})\left(\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right)$

Para T=1 $\quad G_{zohp}(z) = \frac{0.37z+0.26}{z^2-1.37z+0.37}$

La función de transferencia pulso del sistema es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KG_{zohp}(z)}{1+KG_{zohp}(z)}$$

Para K=1 $\quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KG_{zohp}(z)}{1+KG_{zohp}(z)} = \frac{0.37z+0.26}{z^2-z+0.63}$

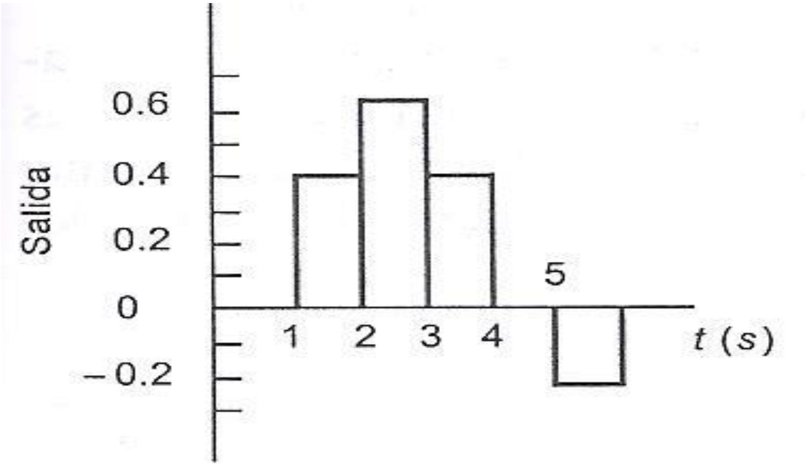
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KG_{zohp}(z)}{1 + KG_{zohp}(z)} = \frac{0.37z + 0.26}{z^2 - z + 0.63}$$

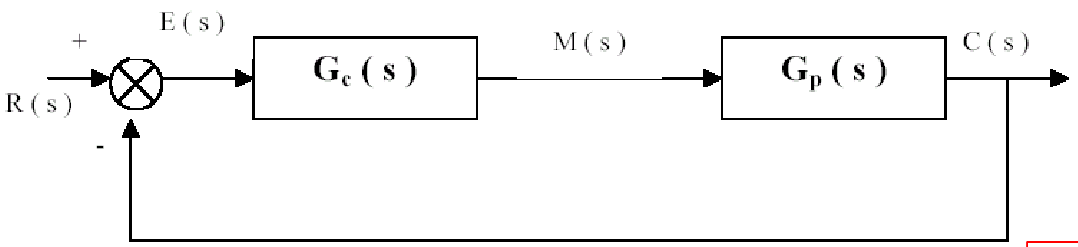
Si suponemos que la entrada X(z)=1 (impulso unitario)

Salida: Y(z)= $\frac{0.37z+0.26}{z^2-z+0.63} = \; 0.37z^{-1} + 0.63z^{-2} + 0.4z^{-3} - 0.25z^{-5} + \cdots$ ...

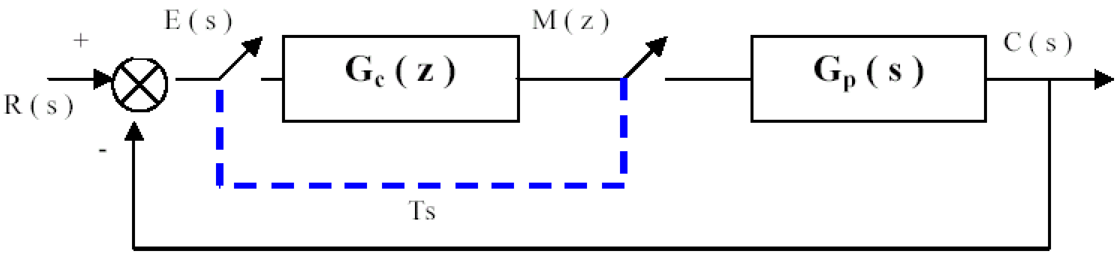
Así la salida es la secuencia en tiempo discreto: 0, 0.37, 0.63, 0.4, 0, 0.25….

y como esta salida está antes del elemento ZOH, tomará la forma:





$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)$$



$$G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}$$

En el caso de un algoritmo PID: $G(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$

Acción integral: $y[k] = y[k-1] + Te[k] \rightarrow Y(z) = \frac{Tz}{z-1} E(z)$

Acción derivativa: $y[k] = \frac{e[k]-e[k-1]}{T} \longrightarrow Y(z) = \frac{z-1}{Tz} E(z)$

El controlador digital equivalente es: $G(z) = K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz}$

La salida será: Salida(z)= $(K_p + K_i \frac{Tz}{z-1} + K_d \frac{z-1}{Tz})\, E(z)$

$$\boxed{\text{Salida (k)= } K_p e[k] + K_i(Te[k] + salida[k-1]) + \frac{K_d}{T}(e[k] - e[k-1])}$$

La ecuación de estado de un sistema continuo lineal:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{Ax}(\mathrm{t}) + \mathbf{Bu}(\mathrm{t})$$
$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{Cx}(\mathrm{t}) + \mathbf{Du}(\mathrm{t})$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}}$$

La ecuación de estado para sistemas lineales discretos:

$$\mathbf{x}(\mathrm{k}+1) = \boldsymbol{G}\mathbf{x}(\mathrm{k}) + \boldsymbol{H}\mathbf{u}(\mathrm{k})$$
$$\mathbf{y}(\mathrm{k}) = \mathbf{Cx}(\mathrm{k}) + \mathbf{Du}(\mathrm{k})$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{D}}$$

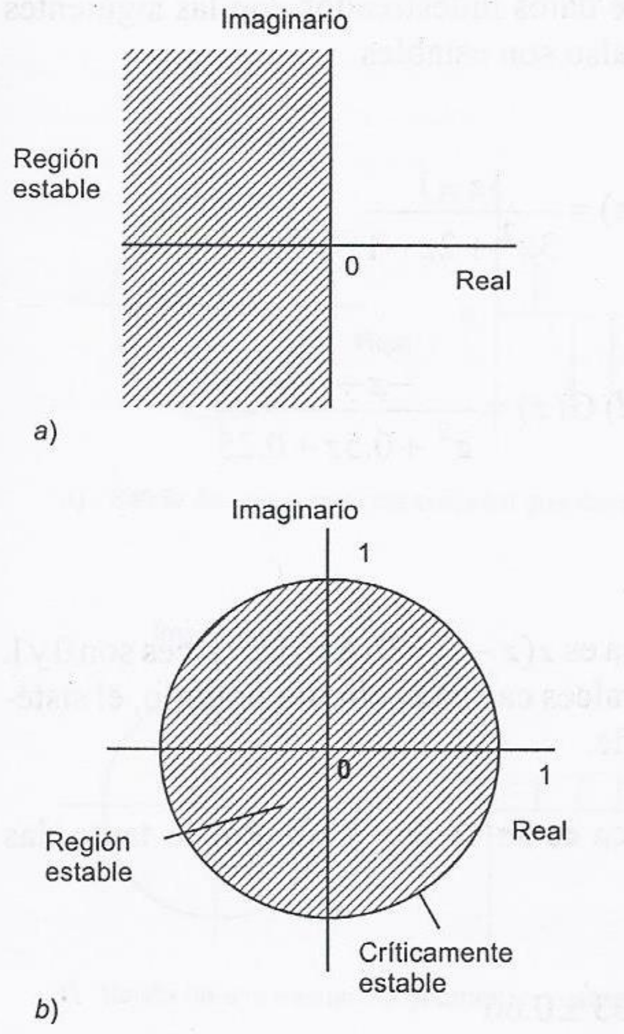
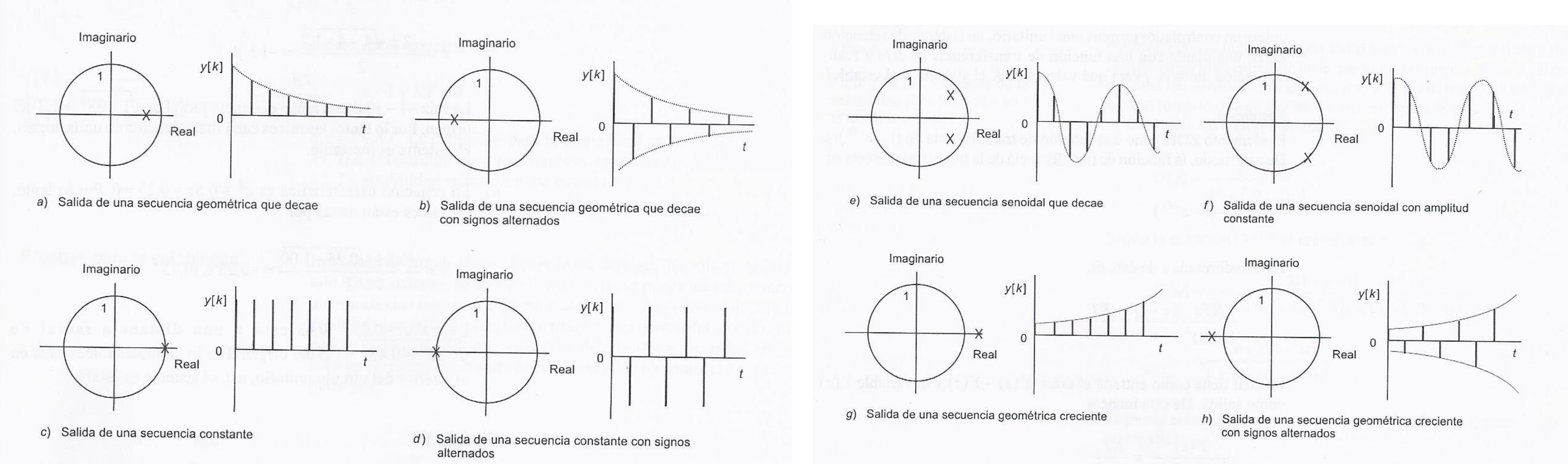


Figura 15.25 Regiones de estabilidad para los polos: *a*) plano *s*, *b*) plano *z*

<u>Estabilidad</u>

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

Para el caso de señales **continuas**, el sistema será estable si todos los polos de la Función de Transferencia en lazo cerrado caen en el semiplano izquierdo del plano *s*, por lo que *s* debe tener σ<0 .
Debido a que $e^{\sigma T}$ es la magnitud de *z*, es decir |z|, la condición de estabilidad en un **sistema de datos muestreados**, los polos de la Función de Transferencia pulso en lazo cerrado, deben caer dentro del círculo unitario (radio 1 y centro en el origen). Se dice que un sistema es críticamente estable si tiene un polo en el círculo.



a) Salida de una secuencia geométrica que decae

b) Salida de una secuencia geométrica que decae con signos alternados

c) Salida de una secuencia constante

d) Salida de una secuencia constante con signos alternados

e) Salida de una secuencia senoidal que decae

f) Salida de una secuencia senoidal con amplitud constante

g) Salida de una secuencia geométrica creciente

h) Salida de una secuencia geométrica creciente con signos alternados

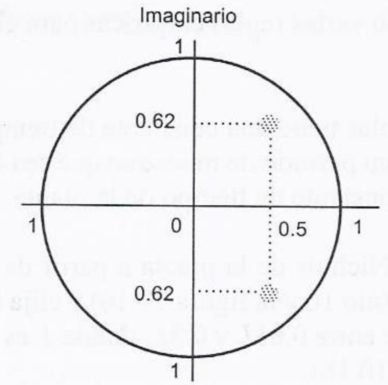
Figura 15.27 Efecto de la localización de las raíces en respuesta a una entrada impulso

$$G(z)=\frac{0.37z+0.26}{z^2-z+0.63}$$

Ésta tiene la ecuación característica

$$z^2-z+0.63=0$$

$$z=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4\times 0.63}}{2}=0.50\pm j0.6$$



Prueba de Routh-Hurwitz

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$G(z) = \frac{2.z+1}{z^2+0{,}4.z-0{,}1}$$

$$G(w) = \frac{2.\frac{(1+w)}{(1-w)}+1}{\left(\frac{(1+w)}{(1-w)}\right)^2+0{,}4.\frac{(1+w)}{(1-w)}-0{,}1} = \frac{(w+3)(1-w)}{0{,}5w^2+2{,}2.w+1{,}3}$$

w^2	0.5	1.3
w^1	2.2	
w^0	1.3	

Como en el arreglo de Routh no *hay cambios* de signo en la primera columna, el sistema es estable