Unidad 3: Cinemática de los fluidos

Se refiere a fluidos en movimiento. Al movimiento de un fluido se le llama flujo y existen dos métodos para estudiarlo:

Método de Lagrange (seguir una partícula): viendo cómo varían velocidad, aceleración, etc. Generalmente esta implica conocer la variación del vector posición en función del tiempo. Se utiliza el concepto de sistema fluido el cual se refiere a una masa específica de fluido encerrada por contornos definidos por una superficie cerrada.

Método de Euler (observador en reposo): en algún punto del espacio que sea de interés y vemos cuál es la velocidad, presión y propiedades termodinámicas en el punto, el fluido se irá renovando continuamente. No interesa una partícula individual, sino que la variación de las condiciones de flujo en tal punto. En este caso se considera un espacio denominado volumen de control fijo en el espacio. El fluido ingresa a ese volumen de control y sale del mismo.

Teorema de Euler: "Relación entre sistema y volumen de control"- permite estudiar los sistemas que varían en el tiempo. X es una propiedad cualquiera (masa, energía, etc.) en el volumen de control, que en un instante cualquiera será:

$$X_{(t)} = X_{VC\,(t)}$$

$$X_{s\,(t+\Delta t)} = X_{VC\,(t+\Delta t)} + \Delta X_{VC}^{\text{ingresante}} - \Delta X_{VC}^{\text{saliente}}$$

$$X_{s\,(t+\Delta t)} - X_{(t)} = X_{VC\,(t+\Delta t)} - X_{VC\,(t)} + \Delta X_{VC}^{\text{ingresante}} - \Delta X_{VC}^{\text{saliente}}$$

Dividiendo por Δt y tomando límite para Δt tendiendo a 0.

$$\delta X_s/\delta t = \delta X_{VC}/\delta t + \delta X_{VC}^{\text{ingresante}}/\delta t - \delta X_{VC}^{\text{saliente}}/\delta t$$

Tipos de flujos:

• Flujo ideal: viscosidad nula. Satisface la ecuación de continuidad, satisface la segunda ley de Newton en cualquier punto en cualquier instante, ninguna frontera sólida puede ser penetrada por el flujo ni pueden existir vacíos entre el fluido y la frontera.

• Fluido real: se considera el efecto de la viscosidad

• Flujo compresible: se considera la variación de densidad

• Flujo incompresible: se considera densidad constante

• Flujo estacionario: Estacionario $dP/dt = 0$ $dv/dt = 0$ pero puede ser que $dP/dx \neq 0$ o $dv/dx \neq 0$.

• No estacionario: No estacionario ($dP/dt \neq 0$ o $dv/dt \neq 0$)

• Flujo mixto: dos o más fases

• Flujo a presión: el desplazamiento del fluido se produce por diferencia de presión

• Flujo por gravedad: el desplazamiento del fluido se efecto de la gravedad. Flujo espacialmente constante: densidad del fluido y la velocidad media local del flujo son idénticas en todos los puntos del campo fluido.

• Flujo espacialmente variable: no se verifican las condiciones anteriores

• Flujo uniforme: se usa en canales abiertos: la forma y dimensiones de la sección transversal se mantiene constante

• Flujo variable: no se verifican las condiciones anteriores

• Flujo supersónico: la velocidad del fluido o de una partícula desplazándose en un fluido estacionario es superior a la velocidad de una onda de compresión o celeridad

• Flujo subsónico: la velocidad del fluido o de una partícula desplazándose en un fluido estacionario es inferior a la celeridad

• Flujo laminar: en este caso el fluido se mueve desplazándose una capa respecto de la otra en forma longitudinal y paralela sin que exista movimiento de fluido en una dirección diferente (por ejemplo, transversal).

• Flujo turbulento: en este caso existe un componente de la velocidad que tiene una dirección diferente a la del flujo general y se produce mezcla de fluido en sentido transversal al flujo.

Línea de corriente

Es una línea continua, trazada en el fluido, que en todo punto e instante, es tangente al vector velocidad, como v determina la dirección del flujo de masa y como es tangente, a través de una línea de corriente no puede haber flujo, es una LÍNEA IMPERMEABLE.

Como una partícula se mueve en la dirección de una línea de corriente, en cualquier instante su desplazamiento ds, que tiene componentes dx, dy y dz, tiene la dirección del vector ***v***, cuyas componentes son u, v y w, según x, y, z. Las igualdades siguientes establecen que los módulos de las componentes son proporcionales, ds y ***v*** tienen la misma dirección.

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w};\, Ecuación\ diferencial\ de\ una\ línea\ de\ corriente$$

Tubo de corriente

Es un conjunto de líneas de corriente dispuestas según una curva cerrada, es IMPERMEABLE.

La masa que entra es igual a la masa que sale → principio de continuidad.

Trayectoria: Se define como trayectoria a los sucesivos puntos que ocupan en el espacio una partícula de fluido durante el tiempo. Indica la posición de la partícula a lo largo del tiempo.

Clasificación de movimientos

Movimiento permanente: las características del movimiento y las propiedades del fluido en cualquier punto, no varían con el tiempo, aunque varíen de un punto a otro, *(dv/dt)* = 0, *(dP/dt)* = 0. Consideramos caudal constante.

Movimiento impermanente: cuando las condiciones en un punto varían en el tiempo, *(dv/dt)* ≠ 0, (*dP/dt)* ≠ 0.

Movimiento uniforme: la velocidad a lo largo de una línea de corriente se mantiene constante *(dv/ds)* = 0. Consideramos sección constante.

Movimiento variado: *v* varía a lo largo de una línea de corriente.

Ejemplos:

líquido a través de una cañería recta de sección constante y a caudal constante → permanente y uniforme.

líquido a través de una cañería recta de sección constante y a caudal creciente → no permanente y uniforme.

líquido a través de una cañería recta de sección creciente y a caudal constante → permanente y no uniforme.

líquido a través de una cañería recta de sección creciente y a caudal variable → no permanente y no uniforme.

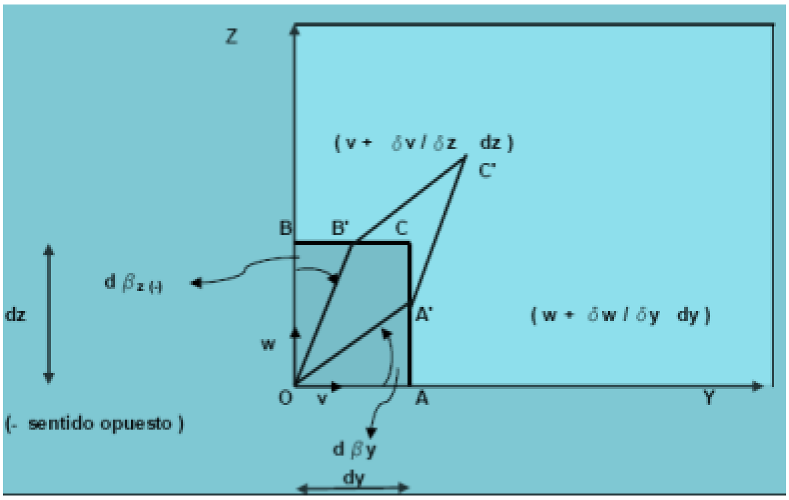
Movimiento rotacional

Es aquel en el cual se produce una deformación angular o rotación de la partícula. Consideramos una partícula de un fluido ideal (incompresible y sin rozamiento) en el espacio, el vector v tiene tres componentes según x, y, z:

v = f (u, v, w)

A través del tiempo la partícula se deforma según OA'C'B'.

Al comienzo, O y A tenían la misma velocidad, pero luego una fuerza provoca una variación de velocidad en los extremos:



$$\omega \rightarrow \omega + \frac{d\omega}{dy}.dy$$

$$v \rightarrow v + \frac{dv}{dz}.dz$$

$$\underbrace{\overline{AA'} = dB_y.dy}_{\text{arco = ángulo . radio}} \qquad y \qquad \underbrace{\overline{AA'} = \frac{d\omega}{dy}.dy.dt}_{x = v\,.\,t}$$

$$dB_y.dy = \frac{dw}{dy}.dy.dt \rightarrow \frac{dB_y}{dt} = \frac{dw}{dy} \; velocidad\ angular\ con\ la\ que\ OA\ se\ aleja\ del\ plano\ xy$$

$$\omega_{xy} = \frac{dw}{dy} \; velocidad\ angular\ de\ dy$$

Luego:

$$\overline{BB'} = dB_z.dz \qquad y \qquad \overline{BB'} = \frac{dv}{dz}.dz.dt \;\rightarrow\; \frac{dB_z}{dt} = \frac{dv}{dz}$$

$$\omega_{xz} = -\frac{dv}{dz} \; velocidad\ angular\ de\ dz$$

Ambas líneas han girado alrededor de x, es decir, puede definirse la rotación alrededor de x como la velocidad angular promedio de los dos elementos lineales infinitesimales en la partícula:

$$\omega_x = \frac{\omega_{xy} + \omega_{xz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) \quad ; \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) \quad ; \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dy}\right)$$

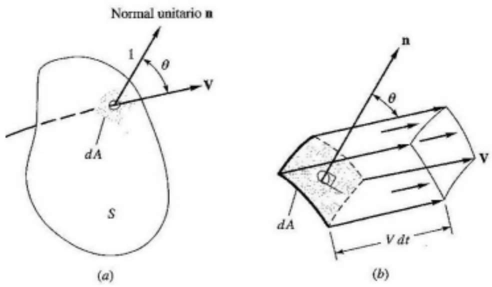
La velocidad final será: $\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z$.

$$\omega = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\, rot\ \bar{v} = \frac{1}{2}(\overline{\nabla} \times \bar{v})$$

Si el determinante es distinto de cero, el movimientos es rotacional (parte gira o se deforma).

Movimiento irrotacional: Se puede describir brevemente como aquel en que cada elemento no sufre una rotación neta entre dos instantes en condiciones determinadas. Si solamente rota o se deforma de tal manera que la velocidad angular de deformación sea nula el flujo es irrotacional. Se da cuando el determinante anterior es nulo, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Lo que tiene que ser CERO es la suma de las deformaciones.

Caudal o cantidad de flujo: Es la medida de la masa (caudal másico) o volumen (caudal volumétrico) que atraviesa un área definida por unidad de tiempo. Normalmente esta coincide con la sección transversal de un tubo de corriente.



Caudal volumétrico

$dQ = dv/dt = \mathbf{dA}.\mathbf{dx}/dt$

Pero $\mathbf{dx}/dt = \mathbf{V}$ (velocidad)

$dQ = \mathbf{dA}.\mathbf{V} = dA \cos\theta\, V$

$Q = \int \mathbf{dA}.\ \mathbf{V} = A \cos\theta\, V$

Las dimensiones son $[Q] = [L]^3/[T]$,

Unidades: m^3/s, cm^3/s, pie^3/s

Caudal másico **G = ρQ**

$dG = dm/dt = \rho\mathbf{dA}.\mathbf{dx}/dt$

Pero $\mathbf{dx}/dt = \mathbf{V}$ (velocidad)

$dG = \rho\mathbf{dA}.\mathbf{V} = \rho\, dA \cos\theta\, V$

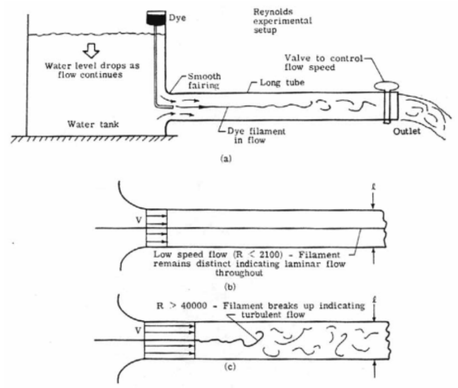
$G = \rho \int \mathbf{dA}.\ \mathbf{V} = \rho\, A \cos\theta\, V$

Dimensiones: $[G] = [M]/[T]$

Unidades : kg/s; ton/hr, slug/s;

Movimiento laminar y turbulento

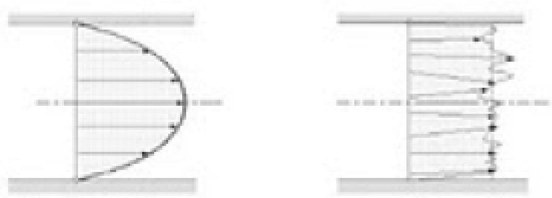
Experiencia de Reynolds: Consistía en un depósito de agua, en el cual estaba montado horizontalmente un tubo de vidrio con un extremo en el depósito y una válvula en el extremo opuesto. H se mantiene constante y se inyecta colorante mientras se varía la apertura de la válvula. Se observó que para:



Apertura pequeña: el colorante se distingue muy bien del agua, siguiendo una línea recta a través del tubo → Mov. laminar.
Apertura mayor: las líneas de colorante comenzaban a ondularse → Mov. de transición.
Apertura grande: se producen remolinos y el agua adquiere el color del colorante → Movimiento turbulento. En este movimiento hay una gran disipación de energía que es proporcional a la velocidad. Existe también un esfuerzo cortante, no regido por la ley de Newton.

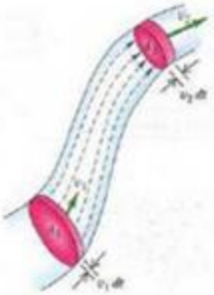
$$Re = \frac{\rho . D . v}{\mu}$$

Al aumentar el caudal, aumenta el número de Reynolds, ya que aumenta la velocidad también.
- Régimen laminar → $Re \leq 2000$. Se produce una especie de movimiento rotacional.
- Régimen de transición → $2000 \leq Re \leq 4000$.
- Régimen turbulento → $Re \geq 4000$: La distribución de la velocidad es logarítmica, la velocidad es mucho más uniforme que en régimen laminar, ya que las partículas chocan entre sí intercambiando energía. Se puede estudiar como un movimiento irrotacional.



a) Flujo laminar b) Flujo turbulento

Ecuación de continuidad: “principio de conservación de la masa”
Consideremos el flujo permanente de un fluido compresible a través de un tubo de corriente. Como no puede haber paso de fluido a través de las paredes del tubo de corriente, la masa por unidad de tiempo que entra debe ser igual a la masa por unidad de tiempo que sale.



Sección 1

$$dm_1 = \rho_1 . dV_1$$

$$dm_1 = \rho_1 . dA_1 ds_1 = \rho_1 . dA_1 v_1 dt$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho_1 . dA_1 v_1$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \rho_1 . dA_1 v_1 = \rho_2 . dA_2 v_2$$

Sección 2

$$\frac{dm_2}{dt} = \rho_2 . dA_2 v_2$$

Y teniendo en cuenta todos los tubos de corriente, y haciendo que dA → 0;

$\int \rho_1 . dA_1 v_1 = \int \rho_2 . dA_2 v_2$ y considerando la densidad constante en cualquier sección, tenemos:

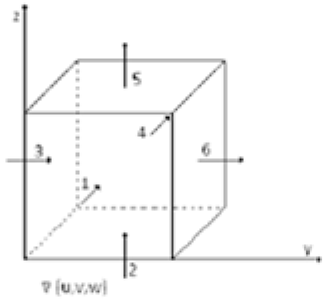
$\rho_1 . A_1 v_1 = \rho_2 . A_2 v_2$ → Ecuación de continuidad para un movimiento permanente de un fluido compresible.

Para un fluido incompresible, la densidad es la misma, entonces:

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ → Ecuación de continuidad para movimiento permanente de un fluido incompresible.

Consideremos ahora un volumen de control en forma de cubo de manera que el fluido ingresa por las caras 1 2 y 3, y sale por las 4 5 y 6:

El caudal en volumen por unidad de tiempo es constante en todas las secciones de un tubo de corriente.



$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= \rho . u . dy . dz \\ \frac{dm_2}{dt} &= \rho . w . dx . dy \\ \frac{dm_3}{dt} &= \rho . v . dx . dz \end{aligned}\right\} \frac{dm_e}{dt} = \rho . u . dy . dz + \rho . w . dx . dy + \rho . v . dx . dz$$

$$\frac{dm_4}{dt} = \left(\rho . u + \frac{\partial(\rho . u)}{\partial x} . dx\right) . dy . dz$$
$$\frac{dm_5}{dt} = \left(\rho . w + \frac{\partial(\rho . w)}{\partial z} . dz\right) . dx . dy$$
$$\frac{dm_6}{dt} = \left(\rho . v + \frac{\partial(\rho . v)}{\partial y} . dy\right) . dx . dz$$

$$\frac{dm_s}{dt} = \left(\rho . u + \frac{\partial(\rho . u)}{\partial x} . dx\right) . dy . dz + \left(\rho . w + \frac{\partial(\rho . w)}{\partial z} . dz\right) . dx . dy + \left(\rho . v + \frac{\partial(\rho . v)}{\partial y} . dy\right) . dx . dz$$

$$\frac{dm_s}{dt} - \frac{dm_e}{dt} = \left(\frac{dm_4}{dt} + \frac{dm_5}{dt} + \frac{dm_6}{dt}\right) - \left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} + \frac{dm_3}{dt}\right) = 0 \; (por\ la\ continuidad)$$

Reemplazando por los valores correspondientes: $\rightarrow \left(\frac{\partial(\rho . u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho . v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho . w)}{\partial z}\right) dx . dy . dz = 0$

Como dx.dy.dz ≠ 0 por ser el volumen de control, entonces: $\left(\frac{\partial(\rho . u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho . v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho . w)}{\partial z}\right) = 0$

Reemplazando $\bar{f} = \rho \bar{v}$ tenemos: $div\, \bar{f} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) = \bar{\nabla} . \bar{f}$

Finalmente nos queda $\boldsymbol{div}\ (\boldsymbol{\rho}\ \overline{\boldsymbol{v}}) = \mathbf{0}$ para movimiento permanente compresible.

Y $\boldsymbol{div}\ (\overline{\boldsymbol{v}}) = \mathbf{0}$ para movimiento permanente e incompresible.

En un caso real por lo general la divergencia no se anula pues en el interior de volumen de control puede haber una fuente (puntos que ceden masa) o un sumidero (puntos que absorben masa) por lo que variaría la masa y forma del cubo. Entonces: $\boldsymbol{div}\ (\boldsymbol{\rho}\ \overline{\boldsymbol{v}}) = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{t}}$ movimiento compresible impermanente

Podemos decir que $\boldsymbol{\nabla} . (\boldsymbol{\rho}\ \overline{\boldsymbol{v}})$ nos mide la variación de la masa del cubo de acuerdo a la masa que ingresa y que egresa, las que si son iguales permiten que el cubo mantenga su forma.

<u>Velocidad y aceleración</u>

Cuando hay movimiento de un fluido, lo más general es que la velocidad de las partículas **V (x,y,z) = u (x,y,z) + v (x,y,z) +w (x,y,z)**, cambie tanto en módulo como en dirección. Por lo que la aceleración de las partículas será:

$$\mathbf{a} = d\,[\mathbf{V}\ (x,y,z)]/dt = (\partial \mathbf{V}/\partial x)\ (dx/dt) + (\partial \mathbf{V}/\partial y)\ (dy/dt) + (\partial \mathbf{V}/\partial z)\ (dz/dt)$$

Como $dx/dt = u$; $dy/dt = v$; $dz/dt = z$ la ecuación se puede escribir:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}\ \partial \mathbf{V}/\partial x + \mathbf{v}\ \partial \mathbf{V}/\partial y + \mathbf{w}\ \partial \mathbf{V}/\partial z$$

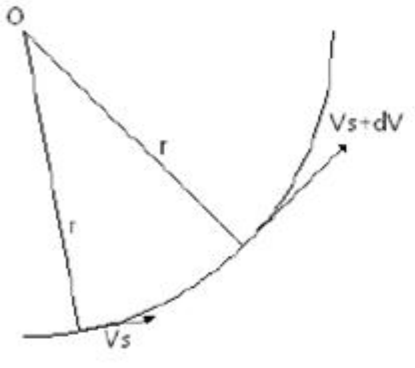
Donde cada componente es

$$\begin{cases} (a_x) = u\ (\partial u/\partial x) + v\ (\partial v/\partial y) + w\ (\partial w/\partial z) \\ (a_y) = u\ (\partial u/\partial x) + v\ (\partial v/\partial y) + w\ (\partial w/\partial z) \\ (a_z) = u\ (\partial u/\partial x) + v\ (\partial v/\partial y) + w\ (\partial w/\partial z) \end{cases}$$

La aceleración podemos dividirla en dos tipos: convectiva (por efecto de la traslación) y local (por efecto de la rotacionalidad).

<u>Tangencial:</u> produce variación de velocidad. Las líneas de fluido se mantienen rectilíneas.

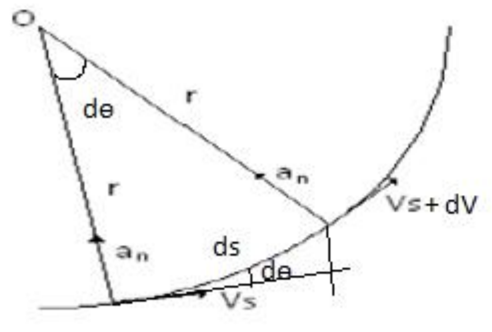
$$a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_s}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{dv_s}{ds}.v_s = \frac{1}{2}\frac{d(v_s^2)}{ds}$$



<u>Normal:</u> produce variación de la dirección. Las líneas de fluido se curvan.

$$\rightarrow \quad a_c = \sqrt{a_s^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{dv_n}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{dv_n}{ds}.v_s = \frac{v_s{}^2}{r}$$



$$\text{sen}\ \theta = \frac{ds}{r} = \frac{dVn}{Vs}$$

$$\Rightarrow \frac{dVn}{ds} = \frac{Vs}{r}$$

Si en algún punto de la corriente existen perturbaciones (remolinos), puede existir una aceleración local:

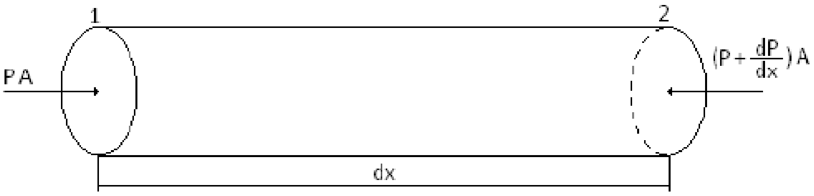
$$a_{local} = \frac{dv_s}{dt}$$

Si el movimiento es turbulento, puede haber variaciones de velocidad localizadas:

$$a_s = \frac{1}{2}\frac{d(v_s^2)}{ds} + \frac{dv_s}{dt} \quad ; \quad a_n = \frac{v_s{}^2}{r} + \frac{dv_n}{dt}$$

Relación entre el gradiente de presiones y la aceleración

Consideramos una cañería de sección transversal A en donde circula un fluido ideal en movimiento irrotacional, por lo que no hay efectos en la aceleración local:



$$F_x = PA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}.dx\right)A \rightarrow F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}.dx.A$$

$$erza\ por\ unidad\ de\ volumen = \frac{F_x}{dx.A} = -\frac{\partial P}{\partial x} = f_x$$

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}.dx.A = m.a_x = \rho.dx.dA.a_x \rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho.a_x$$

Y fijando una dirección, las derivadas parciales se convierten en totales. Para una dirección s y su correspondiente normal n, tendremos:

$$f_s = -\frac{\partial P}{\partial s} = \rho.a_s = \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{ds} \qquad (1)$$

$$f_n = -\frac{\partial P}{\partial n} = \rho.a_n = \rho\frac{{v_s}^2}{r} \qquad (2)$$

Si consideramos que la densidad varía sólo con s, tendremos diferenciales totales, e integrando (1) entre 1 y 2:

$-\int_1^2 \frac{dP}{ds} = \int \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{ds} \rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}(v_{s2}^2 - v_{s1}^2) \rightarrow$ **Variación de P en función de v para una línea de corriente.**

$$(3) \qquad P_1 + \frac{\rho}{2}v_{s1}^2 = P_2 + \frac{\rho}{2}v_{s2}^2 \rightarrow Ecuación\ de\ energía\ a\ lo\ largo\ de\ una\ línea\ de\ corriente.$$

En la ecuación (2):

$$-\frac{\partial P}{\partial n} = \rho\frac{v_s^2}{r} - \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn} + \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial n} = \rho\frac{v_s}{r}.v_s - \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn} + \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn} \quad ; \quad reeplazando\ \frac{v_s}{r} = \frac{dv_n}{ds}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial n} = \rho\frac{dv_n}{ds}.v_s - \rho\frac{d(v_s)}{dn}.v_s + \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn} \quad ; \quad resuelvo\ \frac{d(v_s^2)}{dn} = 2.v_s.\frac{dv_s}{dn}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial n} = \rho.v_s\left(\frac{dv_n}{ds} - \frac{dv_s}{dn}\right) + \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn} \qquad (4)$$

El término entre paréntesis tiene en cuenta la rotación de la partícula. Marca la diferencia entre (1) y (2). Si el movimiento fuese irrotacional, el término entre paréntesis es nulo, y las ecuaciones (1) y (4) tienen la misma integración y sería la ecuación (3):

$$-\int_1^2 \frac{dP}{ds} = \int \frac{\rho}{2}\frac{d(v_s^2)}{dn} \rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}(v_{s2}^2 - v_{s1}^2)$$

En general:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_{s1}^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_{s2}^2}{2g} = cte \qquad (5)$$

Todo movimiento irrotacional es a energía constante. Mientras que el término entre paréntesis de la ecuación (4) nos dice que la energía se mantiene constante a lo largo de una misma línea de corriente, mientras que la ecuación (5) nos indica que la energía es constante aún en puntos del fluido que pertenezcan a distintas líneas de corriente.

Función potencial

Función escalar del espacio y del tiempo tal que la derivada en una dirección cualquiera es la componente de la velocidad del fluido en esa dirección.

Cuando vimos el movimiento irrotacional vimos que:

$$\omega = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} rot\, \bar{v} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \times \bar{v}) = 0$$

Resolviendo el determinante tenemos:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \frac{\delta w}{\delta y} i + \frac{\delta v}{\delta x} k + \frac{\delta u}{\delta z} j - \frac{\delta u}{\delta y} k - \frac{\delta v}{\delta z} i - \frac{\delta w}{\delta x} j = \left[\left(\frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z}\right) i + \left(\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x}\right) j + \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right) k\right]$$

Definimos ahora una función potencial $\varphi(x, y, z)$ que tiene las siguientes características:

$$u = \frac{\delta \varphi}{\delta x} \quad ; \quad v = \frac{\delta \varphi}{\delta y} \quad ; \quad w = \frac{\delta \varphi}{\delta z}$$

Si φ existe, entonces la reemplazo en el determinante:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left[\left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta y \delta z} - \frac{\delta^2 \varphi}{\delta z \delta y}\right) i + \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta z \delta x} - \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \delta z}\right) j + \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \delta y} - \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y \delta x}\right) k\right] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{rot\, \bar{v} = 0}$$

Los movimientos irrotacionales admiten función potencial.
Considerando la ecuación de velocidad:

$$\bar{v} = u.i + v.j + w.k$$

$$\bar{v} = \frac{\delta \varphi}{\delta x}.i + \frac{\delta \varphi}{\delta y}.j + \frac{\delta \varphi}{\delta z}.k$$

Pero el gradiente es:

$$grad = \nabla = \frac{\delta i}{\delta x} + \frac{\delta j}{\delta y} + \frac{\delta k}{\delta z}$$

$$\boxed{\bar{v} = grad\, \varphi = \nabla \times \varphi}$$

Si φ representa una superficie, $\bar{v}$ sería perpendicular a la superficie. Si tenemos dos funciones (superficies equipotenciales), hay infinitos caminos para pasar de φ a $\varphi + d\varphi$, pero la relación $d\varphi/dr$ será máxima cuando sea mínimo dr (dr: normal a la superficie). El gradiente me da la mayor rapidez de variación de la superficie.
De la definición $\bar{v} = \nabla \times \varphi$, concluimos que el vector velocidad será el vector representativo del gradiente de φ.
En el plano de φ=cte:

$$d\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta x}dx + \frac{\delta\varphi}{\delta y}dy = 0$$

$$\boxed{u.dx + v.dy = 0}$$

$$\boxed{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{\varphi=cte} = -\frac{u}{v}} \qquad (a)$$

Función de corriente ⇨ se basa en el principio de continuidad por lo que este se tiene que cumplir. No hace falta que sea irrotacional.

Recordando que:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v = \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$\boxed{u.dy - v.dx = 0}$ (1) Ecuación de la línea de corriente.

Si definimos la función de corriente ψ como:

$$\psi_{(x,y)} \quad \boxed{u = \frac{\delta\psi}{\delta y} \quad ; \quad v = -\frac{\delta\psi}{\delta x}}$$

Reemplazando en (1):

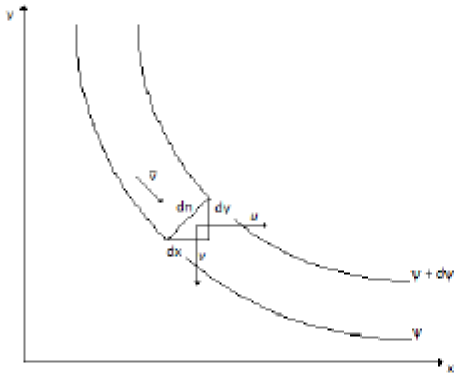
$$\boxed{\frac{\delta\psi}{\delta y}.dy + \frac{\delta\psi}{\delta x}.dx = 0 = d\psi}$$

Por lo tanto, ψ es constante a lo largo de una línea de corriente.

$$\boxed{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{\psi=cte} = \frac{v}{u}} \qquad (b)$$

Pendiente de la línea de corriente.

Comparando *(a)* y *(b)* concluimos que las líneas de corriente son normales a las superficies equipotenciales.



Consideramos profundidad unitaria.

$$V.dn = caudal$$

$$Q = \underbrace{V.dn}_{caudal\ entrante} = \underbrace{u.dy - v.dx}_{caudal\ saliente} = d\psi$$

El valor numérico para pasar de una línea de corriente a otra nos da el caudal que circula entre las dos líneas.

Ecuación de Laplace

Recordando las definiciones de φ y ψ:

$$(1)\boxed{u = \frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta y}} \quad ; \quad (2)\boxed{v = \frac{\delta\varphi}{\delta y} = -\frac{\delta\psi}{\delta x}} \rightarrow \text{Condiciones de Cauchy – Riemann.}$$

Derivamos (1) respecto de x y (2) respecto de y:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} = \frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y} \quad ; \quad \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} = -\frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y}$$

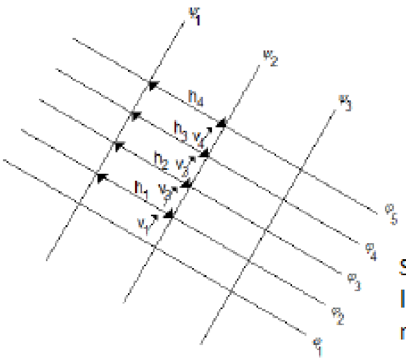
Sumando miembro a miembro:

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} = \frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y} - \frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y} = 0 \rightarrow \frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} = 0 \rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = 0}$$

Las funciones φ y ψ satisfacen las ecuaciones de Laplace, y cumplen con las ecuaciones de Cauchy – Riemann, se dice que las funciones son armónicas conjugadas.

En definitiva podremos obtener la velocidad derivando la función potencial φ respecto a la dirección de dicha velocidad o derivando la función de corriente ψ respecto a una dirección normal a la de la velocidad en cuestión.

Red de corriente es el conjunto de líneas de corriente y líneas de potencial. De la ecuación de función de corriente: $d\psi = udy - vdx$ y de la función de potencial $d\varphi = udx + vdy$ →vemos que las líneas de corriente son perpendiculares a las líneas de potencial. Además, en un flujo estacionario representa las trayectorias.
Suponiendo un fluido bidimensional y considerando profundidad unitaria, la red nos permite determinar las condiciones del flujo. Como el caudal (por continuidad) entre dos líneas de corriente es constante



$$v_1.h_1 = v_2.h_2 = cte \rightarrow h_2 > h_1 \rightarrow v_1 > v_2$$

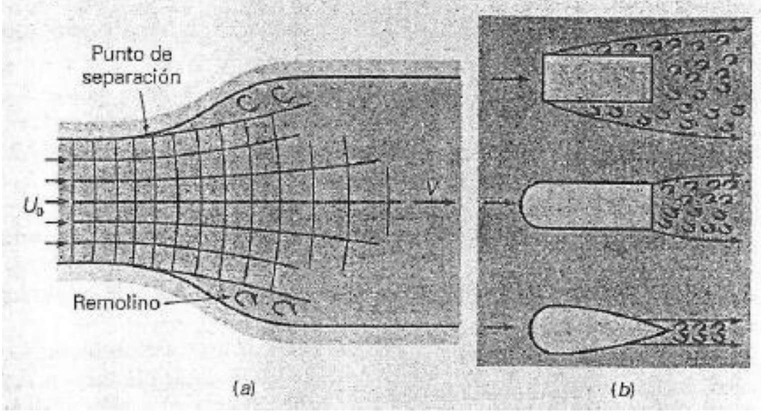
Además en una línea de corriente: $\frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = cte$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow si\ v_1 > v_2 \rightarrow P_2 > P_1$$

Se deduce que al ingresar a un angostamiento las líneas de corriente se acercan entre sí, lo que implica un aumento de la velocidad y una disminución en la presión en el flujo, mientras que al aumentar la sección estas se separan y la velocidad del fluido disminuye.

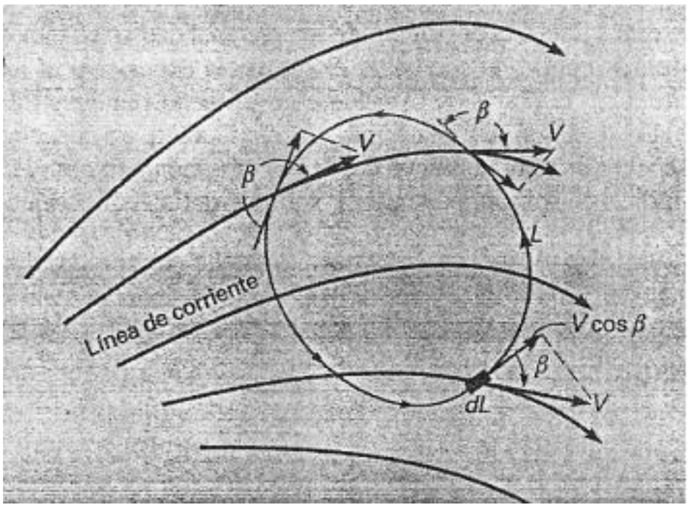
Las líneas de corriente se deben adaptar al contorno del objeto sólido que restringe el movimiento del fluido, además si este cambia de dirección, lo mismo hará la línea de corriente.

Separación en un flujo divergente. *a*) Formación de remolinos en un canal divergente. *b*) Estelas turbulentas.



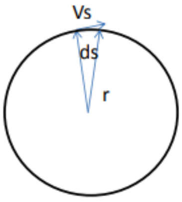
La red de corriente se diseñó para el caso de fluidos ideales y se puede usar para los fluidos reales cuando se puede trabajar lejos de los contornos en donde se producen los efectos viscosos más importantes. Cuando se produce una restricción las líneas de corriente siguen aproximadamente el contorno, pero no a la inversa y en este último caso se produce un fenómeno llamado desprendimiento de la capa límite.

<u>Circulación</u>: suponemos un campo fluido bidimensional, donde L es una curva cualquiera→ definimos la circulación como: $\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L V \cos\beta \cdot d\mathbf{L}$



- <u>Aplicaciones:</u>

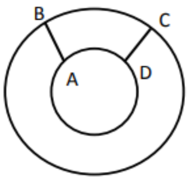
1.Integración en una circunferencia (línea de corriente circular)



$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_s . ds = \int_0^{2\pi} V_s\, r\, d\theta = \int_0^{2\pi} \omega\, r\, dr = 2\pi\, \omega\, r^2$

$\Gamma/\pi\, r^2 = 2\,\omega = \nabla \times \mathbf{V}$ Todos los movimientos que tienen rotación son rotacionales.

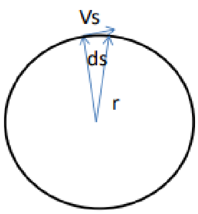
2. Integración en un sector circular



$\Gamma = \int_A^B V_s\, ds + \int_B^C V_s\, ds - \int_C^D V_s\, ds - \int_D^A V_s\, ds$

$\Gamma = \int_0^\theta \omega\, r_1 r_1 d\theta - \int_0^\theta \omega\, r_2\, r_2 d\theta = \omega\theta(r_1^2 - r_2^2)$

3. Consideremos una función potencial como rotacional



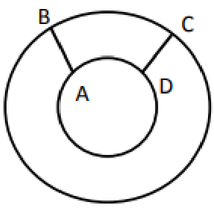
$V = d\psi/ds = d\psi/rd\theta = kd\theta/rd\theta = k/r$

Vr= k esta función se llama droll y es el momento del vector velocidad

$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_s\, ds = \int_0^{2\pi} (k/r)\, r\, d\theta = 2\pi\, k$

La circulación es constante

4. Consideremos el mismo razonamiento con otro circuito



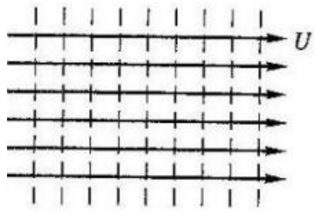
$\Gamma = \int_A^B V_s\, ds - \int_C^D V_s\, ds = \int_0^\theta (k/r_1)\, r_1 d\theta - \int_0^\theta (k/r_2)\, r_2 d\theta = 0$ irrotacional

Conclusión: cuando el movimiento contiene al centro de rotación $\Gamma \neq 0$ el movimiento es rotacional y cuando no contiene el centro de giro $\Gamma = 0$.

<u>Flujos sencillos</u>

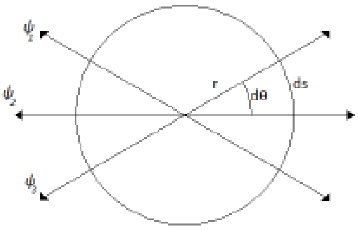
<u>1- Corriente uniforme en la dirección del eje x</u>: consideramos una corriente uniforme en la dirección del eje x uniforme V = ui. Tanto el campo de potencial como las líneas de corriente pueden ser descriptos como:

$u = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$ y $v = \partial\varphi/\partial x = -\,\partial\psi/\partial x$



Si integramos y despreciamos las constantes de integración lo cual no afecta a las velocidades en el flujo, vemos que la corriente uniforme: ui→ $\psi = Uy$ $\varphi = Ux$; las líneas de corriente son líneas horizontales (y=cte) y las líneas equipotenciales (x=cte) son verticales.

2- Fuente o sumidero en el origen: consideramos una fuente (punto en donde se genera un flujo radial uniforme saliente). La velocidad es radial y consideramos que no hay velocidad circunferencial. Consideremos un caudal constante y altura unitaria *h=1*. El caudal que atraviesa esta superficie de radio *r* es:



$$Q = 2\pi r h v = 2\pi r v$$

$$v.r = \frac{Q}{2\pi} = k \rightarrow v.r = k$$

Drall: momento del vector velocidad. (Drall =*vr*)

La existencia de Drall implica que el movimiento admite una función potencial φ y que el movimiento es irrotacional $\rightarrow \varphi = k.\theta$

Vimos que:

$$v = \frac{d\varphi}{dr} \quad o \quad v = \frac{d\psi}{ds}$$

$$d\varphi = v.dr \quad pero \quad v = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r}dr \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r + C}$$

→Es una familia de circunferencias concéntricas.

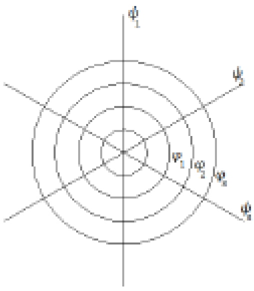
Cada una de las circunferencias es una línea equipotencial para una función de corriente.

$$d\psi = v.ds \quad pero \quad ds = r.d\theta$$

$$d\psi = v.r.d\theta = \frac{Q}{2\pi \cancel{r}}.\cancel{r}.d\theta \rightarrow \boxed{\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta + C}$$

Es una familia de rectas radiales.

Cada una de las rectas radiales es una línea de corriente.



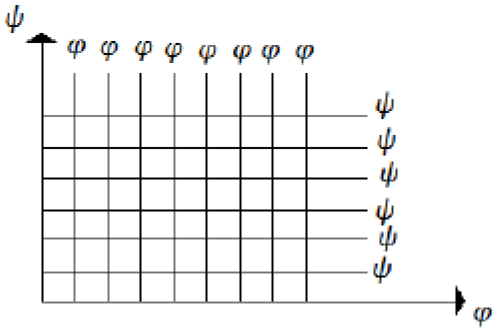
En un sumidero (punto en donde se genera un flujo radial uniforme entrante) son válidas las expresiones con signos opuestos. Combinando fuentes y sumideros, matemáticamente podemos simular el flujo alrededor de cuerpos (esferas, alas, etc.).
→ despreciando las constantes de integración, podemos determinar para una fuente o sumidero signo opuesto) que: $\Psi = m\theta$ y $\varphi = m \ln r$; donde $m = \frac{Q}{2\pi}$

- **Uso de la variable compleja**

Hay muchos casos en que las ecuaciones reales se complican demasiado, por eso se usa la variable compleja. Se pasa de una función en el plano W al plano Z.

$$Z = (x + iy)^2$$
$$Z = x^2 + 2yxi - y^2$$
$$Z = \underbrace{x^2 - y^2}_{\varphi} + \underbrace{2yx}_{\psi}\, i$$

$$\boxed{Z = \varphi + \psi i}$$



Obtenemos una red de corriente de un codo de 90° de una cañería. El perfil de los codos de 90° deben ser hipérbolas porque la velocidad es tangente a la línea de corriente.

3- Vórtice libre o torbellino irrotacional:

Se llama vórtice a la rotación uniforme de un fluido alrededor de su eje vertical.

Se denomina Vórtice Forzado a la rotación de un fluido que se mueve como un sólido respecto a un eje. Por definición, en el vórtice forzado cada partícula de fluido tiene la misma velocidad angular. La superficie que lo representa tiene la forma de un paraboloide de revolución $y = \omega^2 r^2/(2g)$.

Se llama vórtice libre cuando el fluido sigue girando, luego de haber detenido el recipiente en el cual se encuentra el fluido. Este movimiento se distingue del vórtice forzado en que, cada partícula se mueve en una trayectoria circular a una velocidad que varía

En una línea de corriente se cumple que:

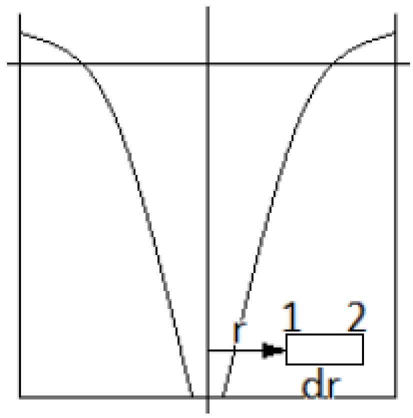
$$P + \frac{\rho v^2}{2} = cte \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho 2v}{2}\frac{dv}{dr} \rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho v \frac{dv}{dr}} \quad (1)$$

Considerando la porción de fluido, en 1 y 2 no hay igual presión debido a que existe el aporte de la fuerza centrífuga, ya que el fluido está girando:

$$dF = dm.\omega^2 r \quad ; \quad dm = \rho.A.dr$$

$$dF = \rho.A.\omega^2 r dr \rightarrow dP = \frac{dF}{A} = \rho\omega^2 r dr$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dP}{dr} = \rho\omega^2 r} \, (2)$$



Igualando (1) y (2):

$$\rho\omega^2 r = -\rho v \frac{dv}{dr} \quad ; \quad \omega = \frac{v}{r} \rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r^2} r = -v\frac{dv}{dr} \quad ; \quad \frac{v}{r} = -\frac{dv}{dr} \rightarrow \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\frac{dr}{r} + \frac{dv}{v} = 0 \rightarrow \ln r + \ln v = cte \rightarrow \ln(r.v) = k \rightarrow e^k = r.v \rightarrow \boxed{r.v = 'k}$$

Vemos que la velocidad es inversamente proporcional al radio para el vórtice libre ($v = \frac{'k}{r}$), pero en el vórtice forzado, la velocidad es directamente proporcional al radio ($v = \omega r$).

Considerando la fuerza centrífuga:

$$dF = \rho A dr \omega^2 r = \frac{\gamma}{g} A dr \omega^2 r$$

$$\frac{dF}{A} = dP = \frac{\gamma}{g}\omega^2 r.dr$$

$$\frac{dP}{\gamma} = dy = \frac{\omega^2 r dr}{g}$$

$$dy = \frac{\omega^2 r dr}{g}.\frac{r}{r} = \frac{v^2 dr}{gr} \rightarrow dy = \frac{v^2}{gr}\, dr$$

Pero v cumple con la ecuación de Drall $\rightarrow v = \frac{k}{r}$

$$dy = \frac{k^2}{gr^3}dr \rightarrow y = \frac{k^2}{g}.\frac{(r)^{-2}}{-2} \rightarrow \boxed{y = -\frac{k^2}{2gr^2} + C} \quad \text{Ec. de una hipérbola}$$

Debido a la ley de Drall, si r tiende a cero, la velocidad será infinita.

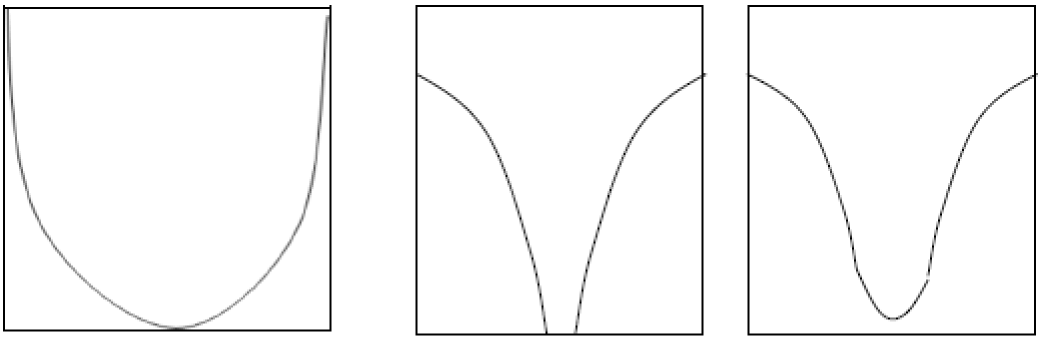
En las inmediaciones del centro cumple con el vórtice forzado y luego de cierta distancia cumple con la ley de Drall ($v.r = k, hipérbola$). Así, dejamos de resolver el paraboloide pasa a ser un hiperboloide. A medida que la velocidad disminuye por el roce, el nivel del fondo se va levantando, para mantener *v.r=k*. Para *r*=0 → *v*=∞, esto es imposible, por eso en el centro, el fluido se comporta como sólido ($v = \omega.r$).

El punto en donde se produce el cambio de vórtice libre a forzado está dado por

$y_{forzado} = y_{libre} = k^2/(2gr^2) = \omega^2 r^2/(2g)$

$k^2/(r^2) = \omega^2 r^2$

$k^2/\omega^2 = r^4$ de donde $r = \sqrt{(k/\omega)}$



Vórtice forzado Vórtice libre Vórtice real

•**Función de corriente y de potencial**: considerando que es un movimiento estacionario puramente circulatorio, donde $v_\theta = f(r)$ y $v_r = 0$. Hay muchas distribuciones de velocidad, pero tenemos que $v_\theta = k/r$ (verifica la ley de droll), la función de corriente y el potencial de velocidad son:

$v_r = 0 = (1/r).\ \partial\psi/\partial\theta = \partial\varphi/\partial r$

$v_\theta = K/r = -\partial\psi/\partial r = (1/r)\ \partial\varphi/\partial\theta$

$\rightarrow \psi = -K \ln r$ y $\varphi = K\theta$ donde K es una constante llamada intensidad del torbellino.

• **Aplicación**

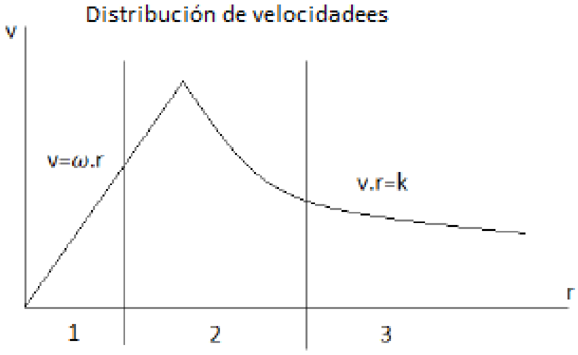
Consideremos una tormenta y un punto (0) alejando de la misma. Como la energía es constante: $P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = P + \frac{\rho v^2}{2}$

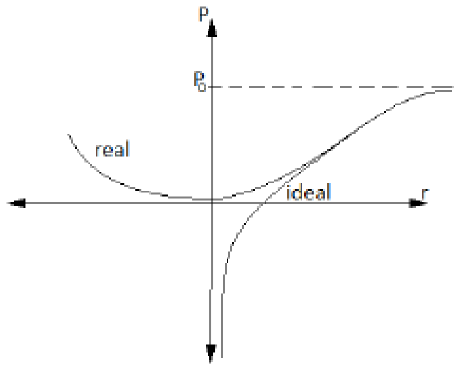
v_0 es despreciable frente a v, $P_0 = P + \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow P = P_0 - \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow \boxed{P = P_0 - \frac{\rho k^2}{2r^2}}$

Si r→0, la presión disminuye, provocando una succión destructiva

$- \ r \rightarrow \infty \quad ; \quad P = P_0$

$- \ r^2 = \frac{\rho k^2}{2P_0} \quad ; \quad P = 0$

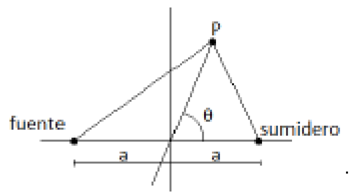




Parte 1 → cerca del ojo de la tormenta

Parte 2 → lejos del ojo de la tormenta

<u>4-Doblete o dipolo (flujo alrededor de un cilindro de sección regular)- superposición de una fuente y un sumidero de igual intensidad</u>: El doblete bidimensional se define como el caso límite de una fuente y un sumidero de igual intensidad que se aproxima el uno al otro de tal forma que el producto de su intensidad por la distancia permanece constante. El eje del doblete es la línea recta que va del sumidero a la fuente.



Consideramos una fuente de intensidad +m situada en un punto de coordenadas (x,y) = (-a,0) y un sumidero de intensidad –m situado en coordenadas (x´, y´) = (0, a) la función de corriente (en coordenadas rectangulares) es:

$\psi = \psi$ fuente + ψ sumidero = m tg $^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right)$ - m tg $^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right)$

y la función potencial es: $\varphi = \varphi$ fuente + φ sumidero = $\frac{1}{2}$m ln $[(x+a)^2 + y^2] - \frac{1}{2}$ m ln $[(x-a)^2 + y^2]$

usando identidades trigonométricas y logarítmicas:

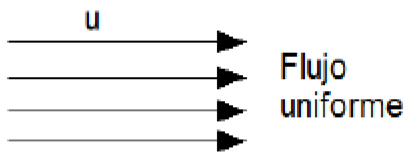
$\psi = -$ m tg $^{-1}\left[\frac{2ay}{(x^2+y^2-a^2)}\right] = -\left(\frac{m}{r}\right)$ sen θ

$\varphi = \frac{1}{2}$ m ln $\left\{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\right\} = \left(\frac{m}{r}\right)$ cos θ

<u>5- Combinación de dos movimientos potenciales: sumidero más torbellino en el origen:</u> Esta combinación se puede observar en la naturaleza. Se adapta bastante bien al movimiento de un tornado o al desagüe de una bañera.

$\psi = m\theta - K \ln r$ y $\varphi = m \ln r + k\theta$

<u>6-Dipolo y corriente uniforme:</u> Ahora consideramos el flujo alrededor de un cilindro de sección regular, analizaremos, primero el flujo uniforme, es decir, no muy cerca del cilindro.



La red de corriente de un flujo uniforme está dado por:

$\varphi = U.x$; $\varphi = U.r.\cos\theta$
$\psi = U.y$; $\psi = U.r.\text{sen}\,\theta$

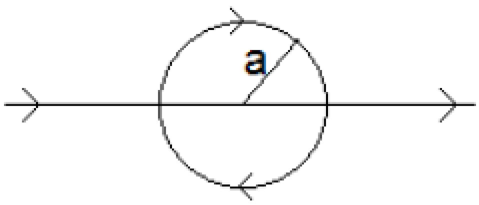
La suma de la red de corriente del flujo debido a un doblete con la de un flujo uniforme, da por resultado la red correspondiente a un flujo alrededor de un cilindro circular.

$$\varphi = U.r.\cos\theta + \frac{k\cos\theta}{r} \rightarrow \varphi = \cos\theta\left(U.r + \frac{k}{r}\right)$$
$$\psi = U.r.\text{sen}\,\theta - \frac{k\,\text{sen}\,\theta}{r} \rightarrow \psi = \text{sen}\,\theta\left(U.r - \frac{k}{r}\right)$$

La línea de corriente $\psi = 0$ está dada por:

$$\psi = 0 \rightarrow \text{sen}\,\theta\left(U.r - \frac{k}{r}\right) = 0 \begin{cases} \text{sen}\,\theta = 0 \rightarrow \theta = 0° \text{ ó } 180° \\ Ur = \frac{k}{r} \rightarrow r^2 = \frac{k}{U} \rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{k}{U}} = a} \end{cases}$$

La línea de corriente será una circunferencia de radio "a":



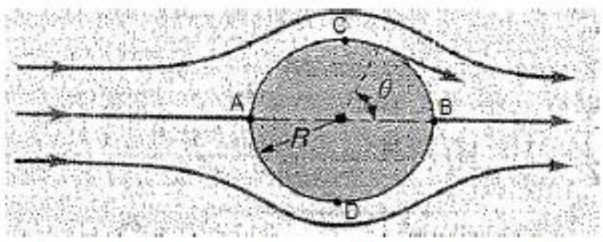
Para $\psi = 0$, la línea se llama "línea de corriente divisora".

Para otros valores de ψ tendremos otras líneas de corriente. La función potencial y de corriente de la red del flujo uniforme alrededor de un cilindro circular de radio a, será, sustituyendo k en función de a: $k = U.r^2 = a^2.U$.

Las líneas equipotenciales y de corriente serán:

$$\varphi = U.\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$\psi = U.\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$



La velocidad en cualquier punto puede obtenerse a partir de la función de corriente o del potencial de velocidad.

Sobre la superficie del cilindro, la velocidad es tangencial:

$$v = \frac{\delta\psi}{\delta r} = \operatorname{sen}\theta\left(U + \frac{k}{r^2}\right)\ pero\ k = U.a^2$$

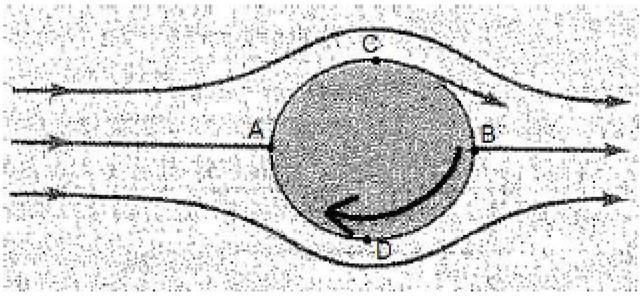
$$v = \operatorname{sen}\theta\left(U + \frac{U.a^2}{r^2}\right) \to si\ r = a \to \boxed{v = 2.U.\operatorname{sen}\theta}$$

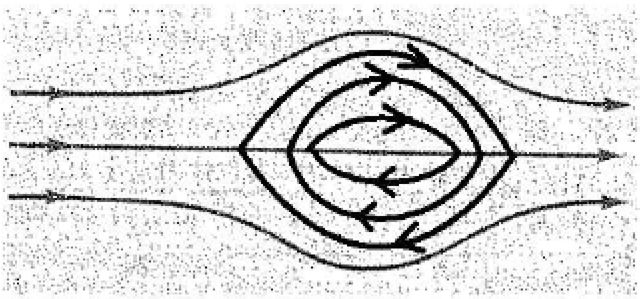
Para los puntos A y B, θ vale 0° y 180°, respectivamente, y las velocidades en ese punto son nulas (puntos de impacto o de máxima presión).

Para los puntos C y D, las velocidades son máximas $v = 2.U$

En estos puntos, la velocidad del fluido se duplica, son puntos de velocidad máxima y mínima presión.

Ahora al ir girando el cilindro, el fluido alrededor de él será la suma de la red de flujo uniforme y las redes de los flujos de un vórtice y de un doblete.





Con el sentido de giro, las líneas de abajo se restan, porque el sentido es opuesto.

<u>7- Fuente y corriente uniforme (cuerpo infinito de Rankine)</u>:

En este caso se suman las corrientes. Las ecuaciones son:

ψ= u r sen θ + mθ y φ = u r senθ + m ln r

el cuerpo formado no es una elipse, la semianchura aguas abajo en un punto muy alejado está dado por πm/U y el radio es:

r = m(π-θ)/u sen θ

Las componentes cartesianas de la velocidad son

u = ∂φ/∂y = u + (m/r) cos θ y v = -∂φ/∂x = (m/r) sen θ