# Unidad 5: Influencia de la viscosidad

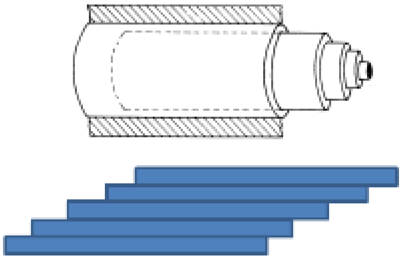
Debido a la viscosidad los fluidos reales ejercen una resistencia al desplazamiento o al corte, por lo tanto habrán pérdidas e irreversibilidades. . De acuerdo al patrón de desplazamiento se puede clasificar este movimiento en régimen laminar o turbulento. El número de Reynolds (Re) es un parámetro adimensional cuyo valor indica dicho régimen (2000 < Re < 4000 régimen de transición), - *la experiencia se explica en la U3.-*

$$Re = \frac{\text{Efecto de las fuerzas de inercia}}{\text{Efecto de las fuerzas viscosas}}$$

$$Re = \frac{L * V}{\nu} = \frac{\rho * L * V}{\mu} \quad \text{Placa plana}$$

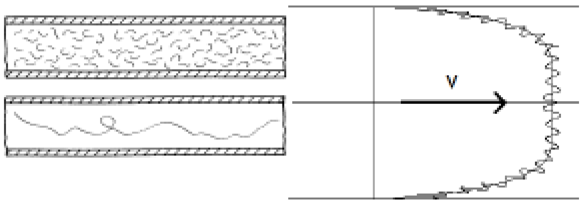
$$Re = \frac{D * V}{\nu} = \frac{\rho * D * V}{\mu} \quad \text{Cañería}$$

**Régimen laminar**



No hay componente transversal a la dirección del flujo.
Re < 2000
Se considera la corriente de un fluido, muy viscoso, a baja velocidad por una tubería de diámetro pequeño y sección constante en régimen permanente y uniforme.
El régimen laminar es ordenado, el fluido se mueve como en capas que no se mezclan entre sí. La velocidad de desplazamiento de las capas interiores es máxima, siendo nula en el contacto con las paredes de la cañería. La distribución de velocidad en una tubería en régimen laminar es parabólica. Existe sólo un cambio molecular de cantidad de movimiento.

**Régimen turbulento**



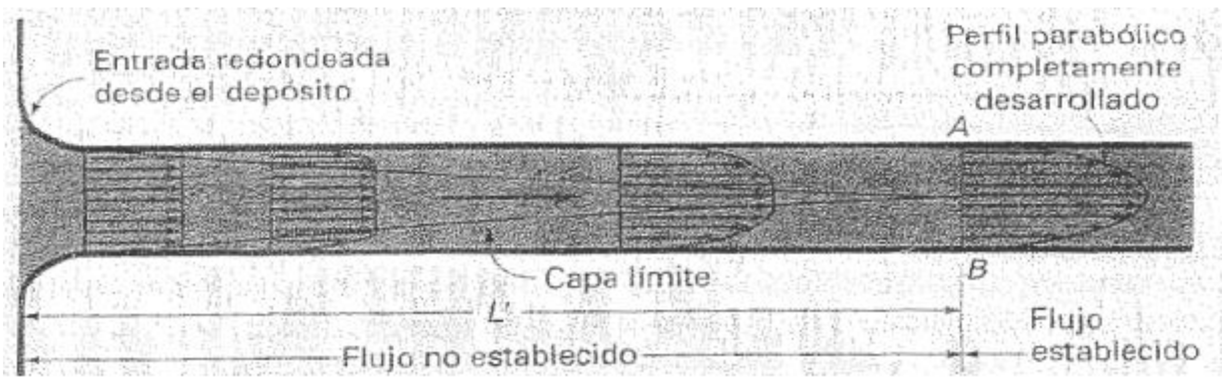

Hay una componente transversal a la dirección del flujo.
Re > 4000 Régimen turbulento.
Se considera una corriente de fluido, poco viscoso, a alta velocidad por una tubería de gran diámetro y sección constante, en régimen permanente y uniforme.
El régimen turbulento es caótico, las partículas se mueven desordenadamente y sus trayectorias se entrecruzan formando remolinos y hay un intercambio de cantidad de movimiento muy violento. La distribución de la velocidad es logarítmica. La disipación de la energía es mayor dado que por los remolinos hay un esfuerzo de corte adicional.

$$\tau_{turb} = \tau_{lam} + \tau_{remolinos}$$

$$\tau_{turb} = \mu \frac{dv}{dy} + \eta \frac{dv}{dy}$$

$\eta$: viscosidad del remolino
(depende del estado del movimiento)
Varía con el tiempo y el espacio, no es propiedad.

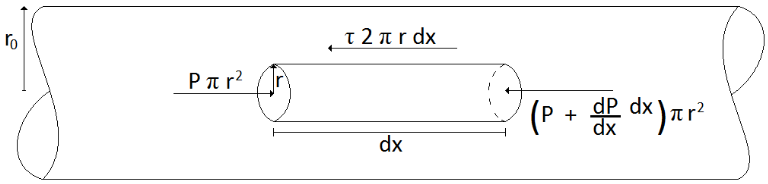
## Establecimiento del régimen laminar:



En la sección A-A cerca de la entrada bien redondeada el perfil de velocidad es casi uniforme a través de la sección transversal. La acción de τ es retardar al fluido que está cerca de la pared por lo tanto la velocidad solo se incrementa en el centro de la tubería, luego la longitud de transición es L´=0,058 Re D, el perfil de velocidad es fijo. Si el flujo es externo, los efectos fricciónales de la capa limite están confinados a la superficie del cuerpo.

## Deducción de la ecuación de Hagen-Poiseuille

Consideremos un fluido en régimen laminar dentro de una tubería de sección circular y de radio constante $r_0$. Dentro de ella consideramos un tubo de corriente.




Actúan las siguientes fuerzas:

1) Fuerzas debidas a la presión.
2) Fuerzas debidas a la viscosidad que desarrollan un esfuerzo de corte $\tau$ que se opone al movimiento.

Por la segunda ley de Newton **F=m.a**, y como para una determinada velocidad constante **a=0** → $\sum F = 0$ y tenemos:

$$P\pi r^2 - \left(P + \frac{\delta P}{\delta x}dx\right)\pi r^2 - \tau .2\pi r.dx = 0$$

Viscosidad

$$P\pi r^2 - P\pi r^2 - \frac{\delta P}{\delta x}dx.\pi r^2 - \tau .2\pi r.dx = 0$$

$$-\frac{\delta P}{\delta x}dx.\pi r^2 - \tau .2\pi r.dx = 0 \rightarrow \boxed{\tau = -\frac{r}{2}\frac{\delta P}{\delta x}} \quad (1)$$

1) El esfuerzo viscoso ↓ P de la cañería
2) Cómo se distribuye el esf. de corte para una posición cte o en el eje de la cañería.

Habíamos definido, por la ley de Newton:

$$\tau = \mu\frac{dv}{dy}$$

Expresémosla en función del radio, a medida que aumenta el radio, la velocidad disminuye, por lo tanto:

$$\tau = \mu\frac{dv}{dy} = -\mu\frac{dv}{dr}$$

Que igualándola con (1):

$$-\mu\frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{\delta P}{\delta x} \rightarrow dv = \frac{1}{2}.\frac{\delta P}{\delta x}.\frac{r.dr}{\mu}$$

Integrando y considerando $(\delta P/\delta x)$ como constante:

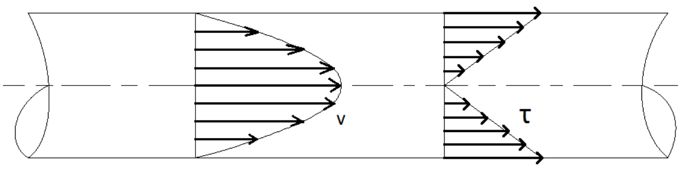
$$\boxed{v = \frac{1}{4\mu}\frac{\delta P}{\delta x}r^2 + C}$$

Como el fluido es viscoso, adquiere la velocidad del contorno, por lo tanto, para $r = r_0; v = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{4\mu}\frac{\delta P}{\delta x}r_0^2$

$$\rightarrow \boxed{v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\delta P}{\delta x}(r_0^2 - r^2)}$$

Ecuación de Hagen-Poiseuille para una tubería circular de diámetro pequeño, fluido viscoso, incompresible y newtoniano, flujo laminar y tubería llena

Esta ecuación representa una parábola y nos permite conocer la distribución de la velocidad en la sección de una tubería. Por lo tanto, la velocidad máxima será en el eje ($r = 0; v_{max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{\delta P}{\delta x}r_0^2$), y el esfuerzo de corte que es función lineal del radio será nulo donde la velocidad es máxima.




Para conocer las pérdidas por carga primero debo calcular el caudal que circula, para lo cual hay que encontrar una velocidad media que produzca el mismo caudal que produce la velocidad variable:

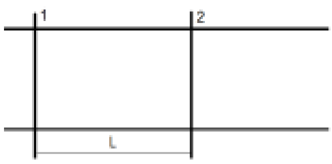
$$Q = v_m \pi . r_0^2 = \int_0^{r_0} v.2\pi.r.dr; \quad \text{pero} \rightarrow v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\delta P}{\delta x}(r_0^2 - r^2)$$

$$v_m \pi . r_0^2 = \int_0^{r_0} -\frac{1}{4\mu}\frac{\delta P}{\delta x}(r_0^2 - r^2).2\pi.r.dr = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{\delta P}{\delta x}\left[r_0^2\int_0^{r_0} r.dr - \int_0^{r_0} r^3.dr\right] = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{\delta P}{\delta x}\left[\frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^4}{4}\right] = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{\delta P}{\delta x}\frac{r_0^4}{4}$$

Simplificando:

$$\boxed{v_m = -\frac{1}{8\mu}\frac{\delta P}{\delta x}r_0^2 = \frac{v_{MÁX}}{2}}$$

Considerando que la presión varía sólo en la dirección de x, la derivada parcial se transformará en total (caso del fluido en régimen laminar), entonces, entre dos secciones tendremos:




$$\int_1^2 dP = -\int_0^L 8\mu\frac{v_m}{r_0^2}dx$$

$$P_2 - P_1 = -8\mu\frac{v_m}{r_0^2}L \rightarrow \boxed{P_1 - P_2 = 8\mu\frac{v_m}{r_0^2}L}$$

- Ecuacion de Hagen – Poiseuille, donde la variacion de presion es funcion del radio de la tuberia.
- Nos da la caida de presion entre dos puntos de un fluido en regimen laminar.

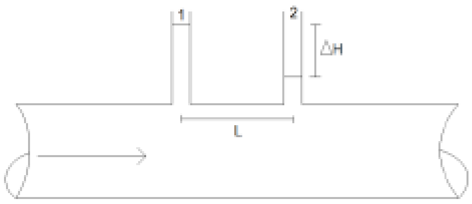
En función del diámetro será: $r_0 = \frac{D}{2} \rightarrow r_0^2 = \frac{D^2}{4} \rightarrow \boxed{P_1 - P_2 = \frac{32\mu v_m L}{D^2}}$

En función del caudal: $Q = \frac{\pi D^2}{4}.v_m \rightarrow v_m = \frac{4Q}{\pi D^2} \rightarrow \boxed{P_1 - P_2 = \frac{128\mu Q L}{\pi D^4}}$

Dividiendo por $\gamma$:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{128\mu Q L}{\gamma \pi D^4} \;;\; \text{pero} \quad \frac{P}{\gamma} = h \rightarrow \boxed{h_1 - h_2 = \frac{128\mu Q L}{\gamma \pi D^4}}$$

**PÉRDIDAS DE CARGA** en un tubo de sección constante para régimen laminar, donde h1 y h2 son las alturas piezométricas.




Fluido más viscoso → mayor pérdida de carga.

Diámetro más grande → menores pérdidas.

La potencia de la bomba que impulsará este fluido será:

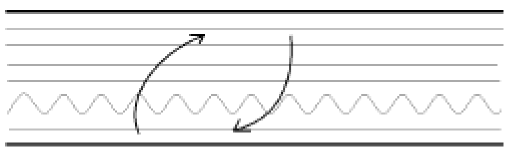
$$\boxed{N = \Delta P.Q} \left[\frac{N}{m^2}\frac{m^3}{s}\right] = \left[\frac{Nm}{s}\right] \quad \text{en CV} \rightarrow \boxed{N = \frac{\Delta P.Q}{75 \times \eta}}$$

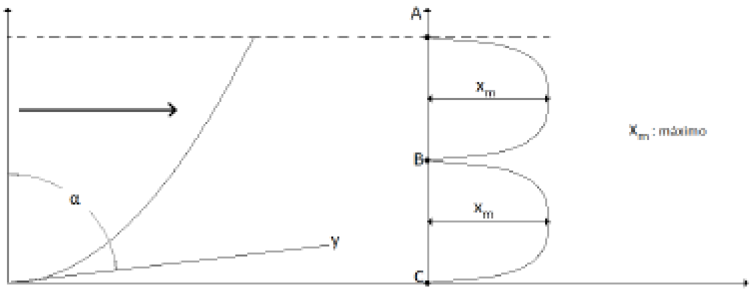
En realidad hay que afectarlo por un coeficiente de pérdidas $h_p$:

$$\boxed{N = \Delta P.Q.h_p} \quad \text{o} \quad \boxed{N = \frac{\Delta P.Q.h_p}{75 \times \eta}}$$

## <u>Inestabilidad del régimen laminar</u> (predomina la viscosidad)

Si en una tubería donde las líneas de corriente son rectas (régimen laminar) y por alguna razón una de estas líneas se curva (rugosidad en la tubería), se produce un acercamiento hacia otra línea de corriente, variando la velocidad y, por lo tanto, su cantidad de movimiento. De modo que ganará fuerzas (cupla) que tenderán a aumentar la turbulencia. Cualquiera sea la tendencia hacia la inestabilidad o la turbulencia, se amortigua por fuerzas cortantes viscosas que resisten el movimiento relativo de las capas adyacentes.





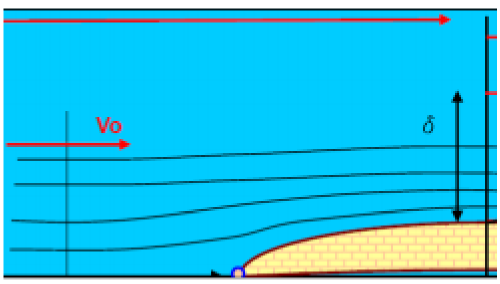

La experiencia determina el factor de inestabilidad o parámetro de inestabilidad. El cual es función de los factores que provocan la turbulencia: $x = \dfrac{y^2.dv/dy\,.\rho}{\mu}$

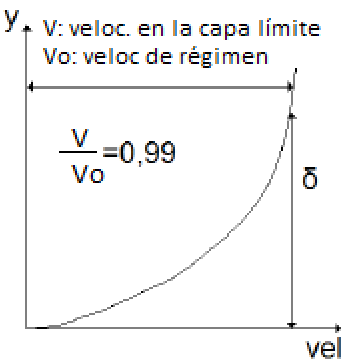
Donde "y" es la distancia al centro y "x" el parámetro de inestabilidad.

X=0 en las paredes (dv/dy=0) y en el centro (y=0).

## <u>Teoría de la capa límite</u>

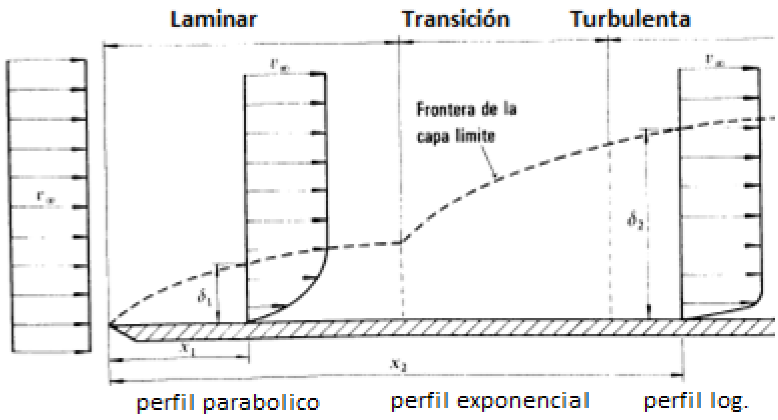
Si consideráramos el movimiento de un cuerpo, por ejemplo: un cilindro, en el seno de un fluido ideal (viscosidad nula), éste se movería sin experimentar resistencia alguna. Pero si consideramos un fluido un poco viscoso, tales como el agua o el aire, el cuerpo experimentaría una gran resistencia. Esto se debe a que la capa de fluido contigua a la superficie se adhiere a la misma por su viscosidad, a consecuencia de lo cual la velocidad del fluido en dicho punto es cero. Esta velocidad aumenta rápidamente por 1 hasta que pasa una película de fluido. Dicha película se denomina **capa límite** y es la zona donde se manifiesta la influencia de la viscosidad y la velocidad se ve afectada por las fuerzas cortantes.



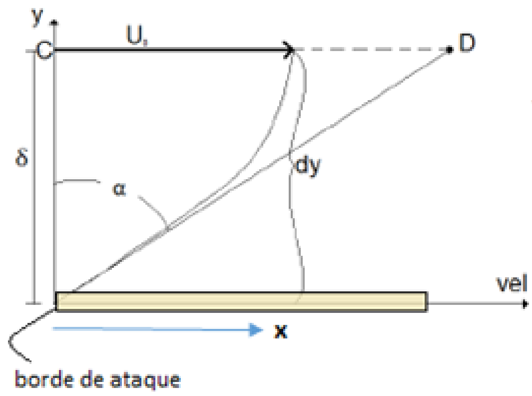
Para estudiar este tipo de situaciones es posible dividir el flujo en dos regiones:
- Región que comprende el flujo más allá de la capa límite donde los efectos viscosos son despreciables.
- Región cercana a la frontera sólida (capa límite) dónde se tendrán en cuenta los efectos viscosos e inerciales, cuyo espesor $\delta$ corresponde a un valor de velocidad igual al 99% de la velocidad no perturbada Vo.

La capa límite es muy delgada en el extremo situado corriente arriba de un cuerpo en reposo en un flujo uniforme, pero cuando esta comienza a moverse a lo largo del cuerpo, la acción del esfuerzo tiene a retener partículas adicionales del fluido, engrosando la capa límite con la distancia. El fluido en la capa límite también está sujeto a un gradiente de presión, que aumenta la cantidad de movimiento de la capa si la presión decrece corriente abajo y la disminuye la cantidad de movimiento si ocurre lo contrario (gradiente de presión adverso). El flujo exterior también puede introducir cantidades de movimiento dentro de ésta.




Para superficies lisas, la capa límite comienza siendo laminar y a medida que el espesor aumenta, ésta se hace inestable con régimen turbulento. Pero aun cuando la capa límite ya se ha hecho turbulenta, continúa existiendo una capa muy delgada próxima a la pared de movimiento laminar llamada *subcapa laminar*. Si nos encontráramos en una superficie rugosa y la subcapa cubre dicha superficie, ésta se comportará como lisa.

→ **Resistencia superficial:** considerando una placa plana, según Poiseuille para la capa límite laminar, la distribución de velocidades es parabólica:




$$\overline{CD} = cte \times U_0 = c.U_0$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \to \frac{\tau}{\mu} = \frac{dv}{dy} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{c.U_0}{\delta} \to \tau = \frac{\mu.c.U_0}{\delta}$$

Considerando la distancia x desde el borde de ataque

Según Prandtl: $\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{R_x}}$ ; donde $R_x = \frac{U_0 x}{\nu}$

$R_x$ es el Reynolds basado en la distancia x a la orilla frontal de la placa.
Vemos que δ aumenta con la raíz cuadrada de la distancia al frente.

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{R_x}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{U_0 x}{\nu}}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{U_0 x \rho}{\mu}}} \quad \to \quad \tau = \frac{\mu.c.U_0}{5x}\sqrt{\frac{U_0 x}{\nu}}$$

Multiplicando y dividiendo por $\rho.U_0^2/2$: sobrepresión dinámica

$$\tau = \frac{\mu.c.U_0}{5x}\sqrt{\frac{U_0 x}{\nu}}.\frac{\rho U_0^2}{2}.\frac{2}{\rho U_0^2} \to \tau = \frac{2}{5}.\overset{\nu}{\frac{\mu}{\rho}}.c.\frac{1}{U_0 x}\sqrt{\frac{x U_0}{\nu}}.\frac{\rho U_0^2}{2}$$

$$\tau = \frac{2}{5}\frac{c}{\sqrt{\frac{x U_0}{\nu}}}\frac{\rho U_0^2}{2} = C_s\frac{\rho U_0^2}{2} \to \boxed{\tau = C_s\frac{\rho U_0^2}{2}}$$

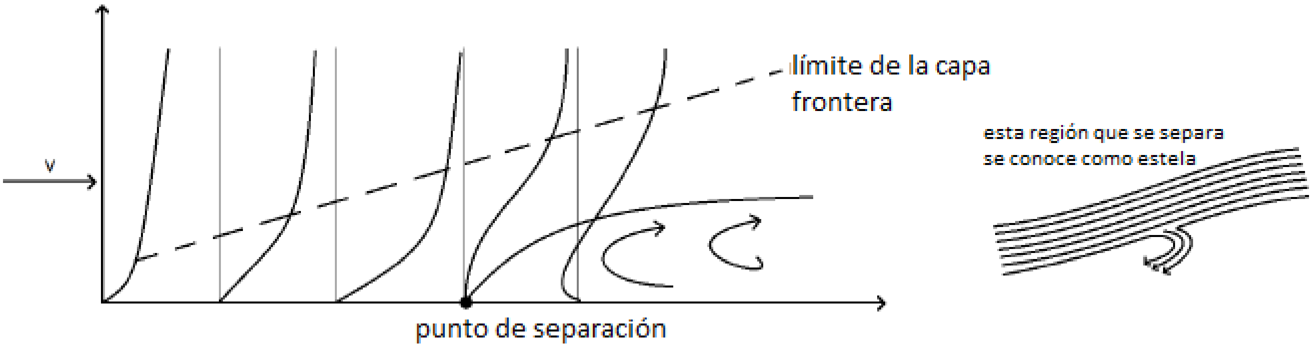
$C_s$ es el coeficiente de resistencia superficial local. $C_s = f(\mathrm{Re}, \mathrm{k})$ rugosidad absoluta

$$\tau = \frac{R_s}{A} \to \boxed{R_s = C_s.A\frac{\rho U_0^2}{2}} \to \text{Resistencia superficial} \qquad \text{A: área bañada por el fluido}$$

Cuando el Re para la placa alcanza un valor entre 500.000 y 1.000.000, la capa límite se vuelve turbulenta. El Re crítico depende de la turbulencia inicial de la corriente, de la orilla corriente arriba de la placa y de su rugosidad. Para el cálculo de la resistencia para la capa límite turbulenta el cálculo es análogo al anterior, usando la ecuación da la cantidad de movimiento para placas planas y lisas.

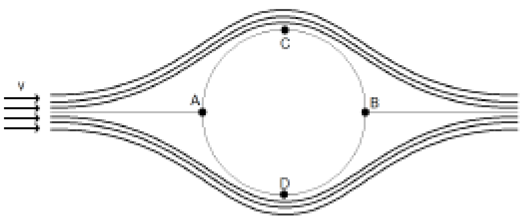
## Fenómenos de separación – Resistencia de forma

Si la presión decrece corriente abajo, como en una reducción, la capa límite tiende a reducir su espesor. Para gradientes de presión adverso (P aumenta en la dirección corriente abajo), la capa límite se ensancha rápidamente. El gradiente adverso y el corte en la frontera disminuyen el momento en la capa límite y si actúan sobre una distancia suficiente, la capa límite se separa. La línea de corriente de la frontera debe alejarse de la frontera en el punto de separación y corriente debajo de este punto, el gradiente de presión adverso causa un flujo hacia atrás cerca de la pared.




El arrastre y la sustentación tienen dos componentes: una que se origina de las diferencias de presión (arrastre de presión) y otra que resulta de los esfuerzos cortantes llamados “fricción de superficie” o arrastre viscoso.
Si la separación en el flujo de un cuerpo se puede evitar, la capa límite permanece delgada y evita la reducción de la presión en la estela, disminuyendo la presión de arrastre (es importante la forma aerodinámica a la parte trasera, para asegurar que el punto de separación ocurra lo más lejos posible).

Consideremos un cuerpo sumergido en la corriente de un fluido:



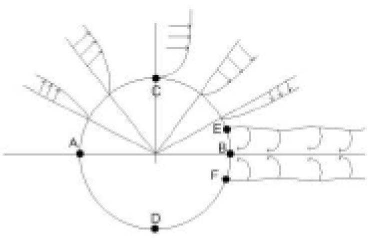

Si el fluido es ideal:

A – B: punto de presión máxima → punto de estancamiento.

C – D: punto de presión mínima.

Flujo no perturbado en todas las partes
existe arrastre de deformación $R = 3\pi D \mu v$

Para un fluido real analizaremos por secciones:




$\overline{AD}$ o $\overline{AC}$: el fluido va de mayor a menor presión, tiende a acelerarse, y la aceleración del fluido compensa el esfuerzo de corte ($\tau$) y se opone al aumento de $\delta$.

Los puntos de desprendimiento E y F deben estar lo más juntos posible.

$\overline{CB}$ o $\overline{DB}$: la presión aumenta en dirección de la corriente y hay desprendimiento de la capa límite (estela) que ocurre en E y F, donde la velocidad es nula, entonces si siguiera tendería a volverse y esto es imposible, a E y F se los denomina puntos de desprendimiento.

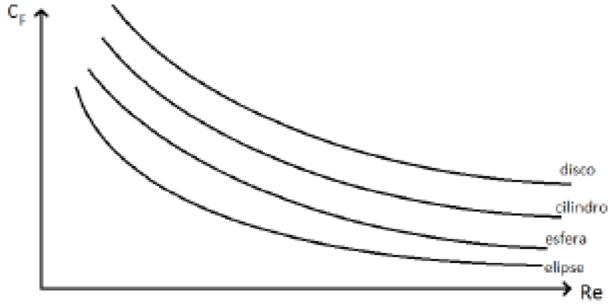
Al desprenderse se forman remolinos y turbulencia en la zona de la estela. Esto origina una fuerza sobre el cuerpo en el sentido del flujo. Si ahora considero quieto el fluido y el cuerpo moviéndose y hay estela, se generan remolinos y turbulencia, entonces bajo la presión y le quito posibilidades de avanzar, originando lo que se conoce como “resistencia de forma”, que es producida por un gradiente de presiones adverso que se origina al desprenderse la capa límite y que depende de la forma del contorno. Mientras más atrás estén E y F, menor es la resistencia de forma ($R_F$).
Experimentalmente:

$C_F$: coeficiente de forma. $C_F = f(\mathrm{Re}, \mathrm{forma})$

A: área proyectada vertical.

$\rho$: densidad del fluido.

$$\boxed{R_F = C_F . A \frac{\rho v_0^2}{2}}$$




Mientras más fuselado el cuerpo, menor $C_F$.

Todo cuerpo que se mueve dentro de un fluido, recibe dos resistencias:

- De superficie.
- De forma.

Ambas constituyen la resistencia al avance: Si se mejora $R_S$, aumenta $R_F$ y viceversa.

$$\boxed{R_A = R_S + R_F}$$

Predominio de $R_S$:

Predominio de $R_F$: