TP N° 3: CINEMATICA DE LOS FLUIDOS

Problema N°1: Suponiendo que ρ es constante, satisfacen los siguientes flujos la condición de continuidad?

a) $u = -2y$; $v = 3x$
b) $u = 3x$; $v = 6xy$
c) $u = c$; $v = xy$
d) $u = -x/(x^2+y^2)$; $v = -y/(x^2+y^2)$

Rta: en flujo bidimensional incompresible se debe verificar:

$\delta u/\delta x + \delta v/\delta y = 0$

a) $du/dx = 0$; $dv/dy = 0$

$0+0=0$ cumple

b) $du/dx = 3$; $dv/dy = 6x$ $3+6x \neq 0$ no cumple

c) $du/dx = 0$; $dv/dy = x$ $0+x \neq 0$ no cumple

d) $du/dx = (-1(x^2+y^2) - 2x(-x))/(x^2+y^2)^2$

$dv/dy = (-1(x^2+y^2) - 2y\,(-y))/(x^2+y^2)^2$

$du/dx + dv/dy =$
$(-1(x^2+y^2) - 2x(-x))/(x^2+y^2)^2 + (-1(x^2+y^2) - 2y\,(-y))/(x^2+y^2)^2$

$du/dx + dv/dy = (-x^2-y^2 + 2x^2) + (-x^2-y^2) + 2y^2)/(x^2+y^2)^2$

$du/dx + dv/dy = [(x^2-y^2) + (y^2-x^2)]/(x^2+y^2)^2$

$du/dx + dv/dy = [(0)]/(x^2+y^2)^2 = 0$ cumple

Problema N°2: defina si los siguientes flujos son irrotacionales:

a) u= -2y; v = 3x
b) u= 3x; v = 6xy
c) u= c ; v = xy
d) u= -x /(x^2+y^2); v = -y/(x^2+y^2)

Rta: en flujo irrotacional se debe verificar que

$\delta v/\delta x - \delta u/\delta y = 0$

a) u= -2y;   v = 3x

dv/dx = 3 ; du/dy = -2

3-2 =1 ≠ 0 rotacional

b) $u = 3x;\ v = 6xy$

$\delta v/\delta x = 6y$ $\delta u/\delta y = 0$

$\delta v/\delta x - \delta u/\delta y = 6y$ $\neq 0$ rotacional

c) $u = c\ ;\ v = xy$

$\delta v/\delta x = y$ $\delta u/\delta y = 0$

$\delta v/\delta x - \delta u/\delta y = y$ $\neq 0$ rotacional

d) $u = -x/(x^2+y^2);$ $v = -y/(x^2+y^2)$

$$\delta v/\delta x = -2x\,(-y)\,/(x^2+y^2)^2 = 2xy\,/(x^2+y^2)^2$$

$$\delta u/\delta y = -2y(-x)/(x^2+y^2)^2 = 2xy\,/(x^2+y^2)^2$$

$$\delta v/\delta x - \delta u/\delta y = 2xy\,/(x^2+y^2)^2 - 2xy\,/(x^2+y^2)^2 = 0$$ irrotacional

Problema N° 3. Considere el siguiente campo bidimensional estacionario de velocidad:

$$\boldsymbol{V = (u, v) = (0,5 + 1,2x)i + (-2,0 - 1,2y)j}$$

¿Existe un punto de estancamiento en este campo de flujo? Si es así, ¿dónde está?

Resolución

Asumimos un flujo estacionario

El campo de velocidad es

$$V = (u, v) = (0{,}5 + 1{,}2x)i + (-2{,}0 - 1{,}2y)j$$

Los componentes son:

$$u = (0,5 + 1,2x)i$$

$$v = (-2,0 - 1,2y)j$$

Para tener un punto de estancamiento se necesita que la V = 0, o que u= 0 y v= 0

Se plantea el sistema de ecuaciones:

$$0 = (0,5 + 1,2x)i$$

$$0 = (-2,0 - 1,2y)j$$

$$x = -0.4167$$
$$y = -1,667$$

Problema N° 4 Considere el siguiente campo bidimensional estacionario de velocidad:

$$V = (u, v) = (a^2 - (b - cx)^2)i + (-2cby + 2c^2xy)j$$

¿Existe un punto de estancamiento en este campo de flujo? Si es así, ¿dónde está?

Se procede en forma similar:

$$V = (u, v) = (a^2 - (b - cx)^2)i + (-2cby + 2c^2xy)j$$

$$u = (a^2 - (b - cx)^2)i$$

$$v = (-2cby + 2c^2xy)j$$

$$0 = (a^2 - (b - cx)^2)i$$

$$0 = (-2cby + 2c^2xy)j$$

$$x = \frac{(b - a)}{c}$$

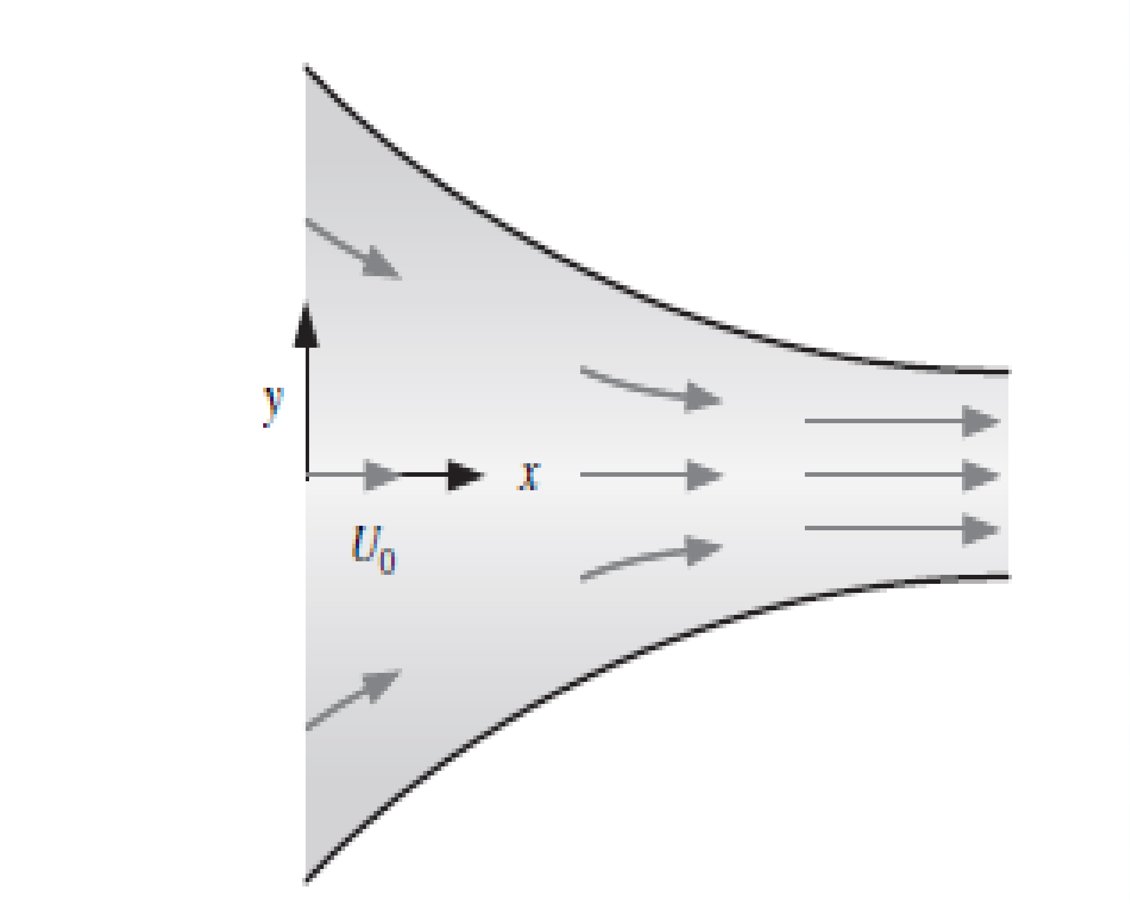
$$y = 0$$

Problema 5. Considere el flujo bidimensional, incompresible y estacionario por un ducto convergente (fig siguiente). Un sencillo campo aproximado de velocidad para este flujo es:

$$V = (u, v) = (Uo + bx)i - byj$$

donde *Uo* es la velocidad horizontal en $x = 0$. Note que en esta ecuación se ignoran los efectos viscosos a lo largo de las paredes, pero es una aproximación razonable para toda la gran parte del campo de flujo. Calcule la aceleración material para las partículas de fluido que pasan por este ducto. Dé su respuesta de dos maneras:

1) como las componentes a_x y a_y y de la aceleración y
2) como el vector aceleración $\vec{a}$.



Se asume

a) flujo estacionario

b) flujo incompresible

c) flujo bidimensional

Campo de velocidad:

$$V = (u, v) = (Uo + bx)i - byj$$

Los componentes del campo de aceleración son

$$a_x = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} = 0 + (Uo + bx)b + (-by)0 + 0$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} = 0 + (Uo + bx)0 + (-by)(-b) + 0$$

Componentes de la aceleración material

$$a_x = b(Uo + bx) \qquad a_y = b^2y$$

$$\boldsymbol{a} = b(Uo + bx)i + b^2yj$$

Problema 6. Se modela el flujo en un ducto convergente mediante el campo bidimensional y estacionario de velocidad del problema 5. El campo de presión se da por: donde P_0 es la presión en x = 0. Genere una expresión para la razón de cambio de la presión *siguiendo una partícula de fluido*.

$$P = Po - \frac{\rho}{2}[\,Uo^2 + \ 2Uobx + b^2(x^2 + \ y^2)]$$

Se asume

a) flujo estacionario

b) flujo incompresible

c) flujo bidimensional

Campo de presiones

$$P = Po - \frac{\rho}{2}[\,Uo^2 + \ 2Uobx + b^2(x^2 + \ y^2)]$$

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} + u\frac{dP}{dx} + v\frac{dP}{dy} + w\frac{dP}{dz}$$

$$\frac{DP}{Dt} = \ 0 + u\frac{dP}{dx} + v\frac{dP}{dy} + 0$$

Del ejercicio anterior: $V = (u, v) = (Uo + bx)i - byj$

$$\frac{DP}{Dt} = (Uo + bx)(-\rho Uob - \rho b^2 x) + (-by)(-\rho b^2 y)$$

$$\frac{DP}{Dt} = \ \rho[-Uo^2 b - 2Uob^2 x + b^2(y^2 - x^2)]$$

Problema 7. Se da un campo bidimensional, incompresible y estacionario de velocidad por las siguientes componentes en el plano *xy*:

$$u = 1{,}1 + 2{,}8x + 0{,}65y$$

$$v = 0{,}98 - 2{,}1x - 2{,}8\,y$$

Calcule el campo de aceleración (encuentre expresiones para las componentes a_x y a_y), de la aceleración, y calcule la aceleración en el punto $(x, y) = (2, 3)$.

Asumimos que:

a) flujo estacionario
b) flujo bidimensional

Componentes de velocidad

$$u = 1,1 + 2,8x + 0,65y$$

$$v = 0,98 - 2,1x - 2,8\,y$$

$$a_x = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\,\frac{du}{dz}$$

$$a_x = 0 + (1,1 + 2,8x + 0,65y)2,8 + (\,0,98 - 2,1x - 2,8y)0,65 + 0$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\,\frac{dv}{dz}$$

$$a_y = 0 + (1,1 + 2,8x + 0,65y)(-2,1) + (\,0,98 - 2,1x - 2,8y)(-2,8) + 0$$

Los componentes de la aceleración quedan

$$a_x = 3{,}717 + 6{,}475x$$

$$a_y = -5{,}054 + 6{,}475y$$

En el punto (-2,3)

$$a_x = -9{,}23$$

$$a_y = 14{,}37$$

Problema N°8
Se combina el campo fluido de una fuente y un sumidero de la misma intensidad con un flujo rectilíneo uniforme. Dados U=0,80; q=2π; a=2, dibuje el campo de fluido.

Solución

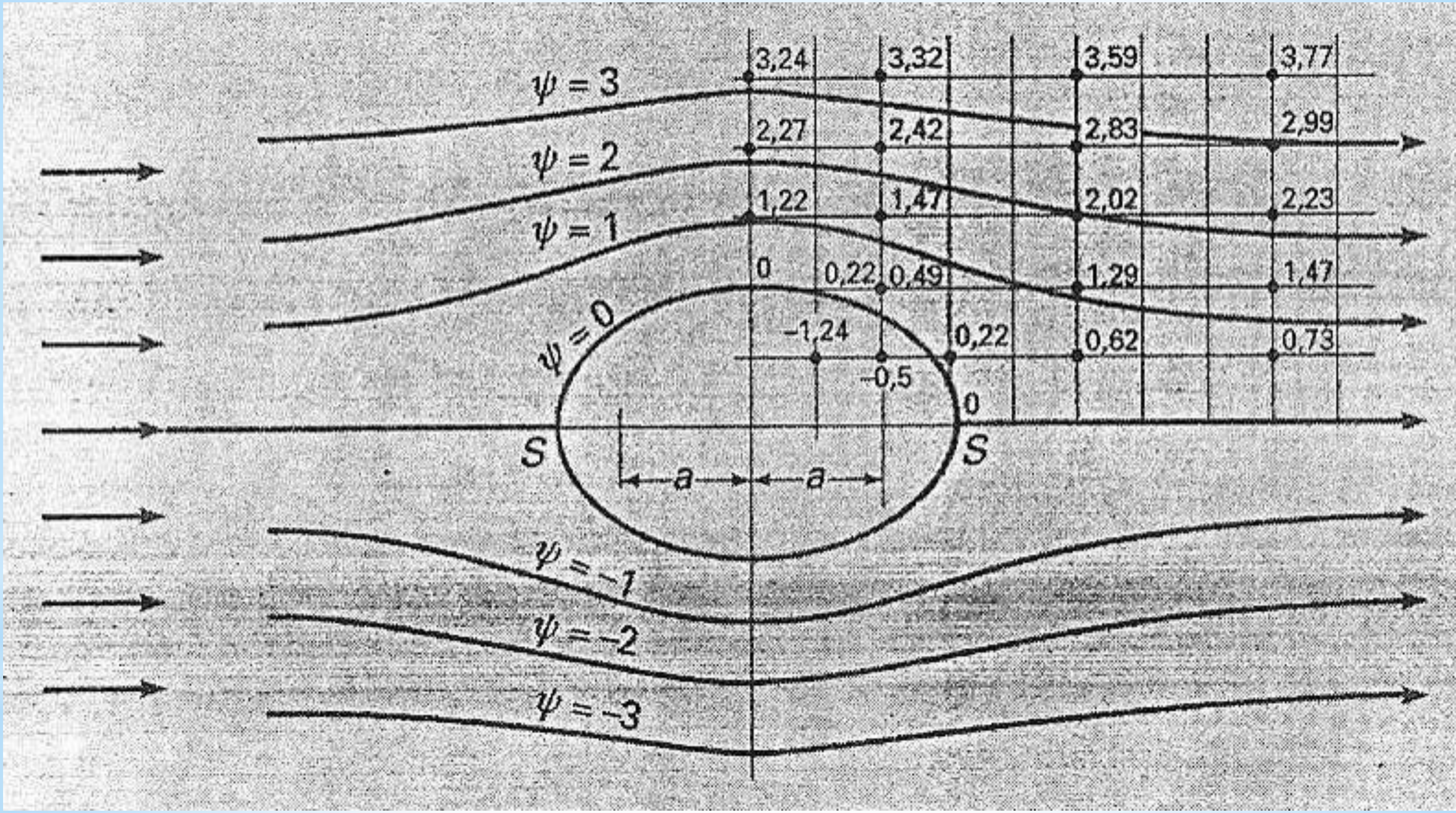
$$\psi = 0{,}8\, y + \tan^{-1}[\frac{y}{(x+2)}] - \tan^{-1}[\frac{y}{(x-2)}]$$

Haciendo

$$A = \frac{y}{(x+2)} \qquad B = \frac{y}{(x-2)}$$

Se calcula ψ para cada uno de los cuadrantes simétricos

x	y	A	B	arctg A (rad)	arctg B (rad)	0,8 y	ψ
0	2	2/2	-2/2	0,78	2,36	1,6	0
0	3	2/3	-3/2	0,98	2,16	2,4	1,22
0	4	4/2	-4/2	1,11	2,04	3,2	2,27
2	2	2/4	∞	0,46	1,57	1,6	0,49
2	3	¾	∞	0,64	1,57	2,4	1,47
5	1	1/7	1/3	0,14	0,32	0,8	0,62
5	2	2/7	2/3	0,28	0,59	1,6	1,29
8	1	1/10	1/6	0,10	0,17	0,8	0,73
8	2	2/10	2/6	0,19	0,32	1,6	1,47



ψ = 3
ψ = 2
ψ = 1
ψ = 0
ψ = −1
ψ = −2
ψ = −3
3,24
3,32
3,59
3,77
2,27
2,42
2,83
2,99
1,22
1,47
2,02
2,23
0
0,22
0,49
1,29
1,47
−1,24
0,22
0,62
0,73
−0,5
0
S
S
a
a