Unidad 4: Dinámica de los Fluidos

La dinámica de los fluidos o hidrodinámica es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de estos bajo la acción de fuerzas. Al igual que la cinemática de los fluidos puede estudiarse a través del método de Euler (volumen de control) o a través del método de Lagrange (sistema fluido).

Euler fue el primero en reconocer que las leyes dinámicas para los fluidos sólo pueden expresarse de forma relativamente sencilla si se supone que el fluido es incompresible e ideal, es decir, si se pueden despreciar los efectos del rozamiento y la viscosidad. Sin embargo, como esto nunca es así en el caso de los fluidos reales en movimiento, las ecuaciones de Navier-Stokes hacen el intento de incluir los efectos de la viscosidad en las ecuaciones matemáticas, pero son tan complejas que sólo se pueden aplicar a flujos sencillos, como por ejemplo un fluido real que circula a través de una tubería recta.

Equilibrio dinámico

Ecuaciones de Navier-Stokes→ describen el movimiento de un fluido real considerando las fuerzas (másicas, presión y viscosas) que actúan sobre un volumen de control; las variaciones de estas son iguales a la variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo en el lado derecho de las ecuaciones. Las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las ecuaciones de Euler para el caso de flujo no viscoso.

a) $-\delta p/\delta x + \mu\,(\delta^2 u/\delta x^2 + \delta^2 u/\delta y^2 + \delta^2 u/\delta z^2) = \rho\,(\delta u/\delta t + u\,\delta u/\delta x + v\,\delta u/\delta y + w\,\delta u/\delta z)$

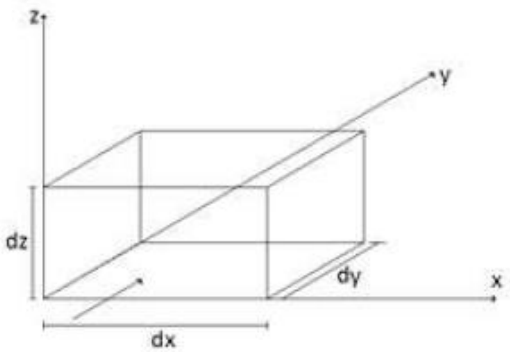
b) $-\delta p/\delta y + \mu\,(\delta^2 v/\delta x^2 + \delta^2 v/\delta y^2 + \delta^2 v/\delta z^2) = \rho\,(\delta v/\delta t + u\,\delta v/\delta x + v\,\delta v/\delta y + w\,\delta v/\delta z)$

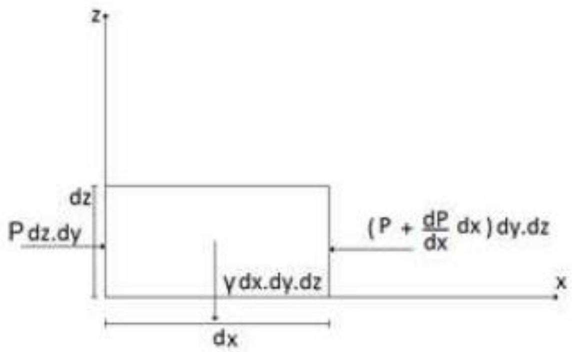
c) $-\rho g - \delta p/\delta z + \mu\,(\delta^2 w/\delta x^2 + \delta^2 w/\delta y^2 + \delta^2 w/\delta z^2) = \rho\,(\delta w/\delta t + u\,\delta w/\delta x + v\,\delta w/\delta y + w\,\delta w/\delta z)$

Ecuación de Euler → Consideramos un fluido ideal (μ=0, ρ=cte), en régimen permanente (dV/dt=0) y en condiciones de irrotacionalidad (rot(V)=0).
Las fuerzas a considerar son:

1) Fuerza de gravedad (externa al fluido).
2) Fuerzas causadas por diferencias de presiones (en los fluidos en reposo hay un gradiente de presiones y la fuerza que este origina está en equilibrio con la fuerza de gravedad).
3) Fuerza de viscosidad (si es ideal, μ=0).
4) Fuerza de elasticidad (si el fluido es incompresible ρ=cte, la fuerza es nula).
5) Tensión superficial (poco importante).

La segunda ley de Newton establece que F=m.a, y que el vector aceleración tiene la misma dirección que el vector fuerza resultante.
Considerando un paralelepípedo de fluido:





$$\sum \bar{F} = m\bar{a} \begin{cases} \sum \bar{F}_x = m\bar{a}_x \\ \sum \bar{F}_y = m\bar{a}_y \\ \sum \bar{F}_z = m\bar{a}_z \end{cases}$$

→ Donde las componentes de la aceleración se obtienen a partir de:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = u = f_1(x,y,z,t) \\ v_y = v = f_2(x,y,z,t) \\ v_z = w = f_3(x,y,z,t) \end{array}\right\}$$ En un instante t, dan la velocidad del fluido en cada punto del espacio.

Por ejemplo para v_x

$$dv_x = \frac{\delta v_x}{\delta x}dx + \frac{\delta v_x}{\delta y}dy + \frac{\delta v_x}{\delta z}dz + \frac{\delta v_x}{\delta t}dt$$

; Divido por dt:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\delta v_x}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta v_x}{\delta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\delta v_x}{\delta z}\frac{dz}{dt} + \frac{\delta v_x}{\delta t}\frac{dt}{dt}$$

→ Como es régimen permanente dV/dt=0 → $\frac{\delta v_x}{\delta t} = \frac{\delta v_y}{\delta t} = \frac{\delta v_z}{\delta t} = 0$ y las componentes de la aceleración son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x\frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y\frac{\delta v_x}{\delta y} + v_z\frac{\delta v_x}{\delta z}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v_x\frac{\delta v_y}{\delta x} + v_y\frac{\delta v_y}{\delta y} + v_z\frac{\delta v_y}{\delta z}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = v_x\frac{\delta v_z}{\delta x} + v_y\frac{\delta v_z}{\delta y} + v_z\frac{\delta v_z}{\delta z}$$

Las ecuaciones de Euler del movimiento se obtienen expresando las componentes de las fuerzas que actúan sobre la partícula en función del peso y de la presión en cada una de las caras:

$$\sum \overline{F_x} = m.\overline{a_x}$$

$$P.dz.dy - \left(P + \frac{dP}{dx}dx\right)dy.dz + X.\rho.dx.dy.dz = \rho.dx.dy.dz\frac{du}{dt}$$

$$P.dz.dy - Pdy.dz + \frac{dP}{dx}dx.dy.dz + X.\rho.dx.dy.dz = \rho.dx.dy.dz\frac{du}{dt}$$

Simplificando y siendo X la fuerza por unidad de masa:

$$\left(-\frac{dP}{dx} + X\rho\right) = \rho\frac{du}{dt} \rightarrow \boxed{-\frac{dP}{dx} + X\rho = \rho\frac{du}{dt}}$$

Operando análogamente para las otras componentes:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dx}\right) + X &= \frac{du}{dt} \\ -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dy}\right) + Y &= \frac{dv}{dt} \\ -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dz}\right) + Z &= \frac{dw}{dt} \end{aligned}}$$

Ecuación de Euler de la aceleración

F genérica por unidad de masa

Siendo X = Y = 0 (aceleraciones en x e y nulas) y Z = - g:

$$\boxed{-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{du}{dt} \quad ; \quad -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dz}\right) - g = \frac{dw}{dt}}$$

Ecuaciones de Euler para régimen permanente y fluido incompresible (ρ = cte).

Ecuación de Bernoulli (ecuación fundamental de la hidrostática) → Partimos de la ecuación de Euler y multiplicamos la primera por dx, la segunda por dy y la tercera por dz.

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dx}\right)dx &= \frac{du}{dt}dx \\
-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dy}\right)dy &= \frac{dv}{dt}dy \\
-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dz}\right)dz - g.dz &= \frac{dw}{dt}dz
\end{aligned}\right\}$$

Sumando miembro a miembro:

$$-\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)dx + \left(\frac{dP}{dy}\right)dy + \left(\frac{dP}{dz}\right)dz\right] - g.dz = \frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz$$

Pero:

$$u = \frac{dx}{dt} \;\; ; \;\; v = \frac{dy}{dt} \;\; ; \;\; w = \frac{dz}{dt} \;\; ; \;\; dP = \left[\left(\frac{dP}{dx}\right)dx + \left(\frac{dP}{dy}\right)dy + \left(\frac{dP}{dz}\right)dz\right] \rightarrow$$ diferencial total de Presiones

En régimen permanente, la densidad no es función del tiempo

$$-\frac{1}{\rho}dP - g.dz = u.du + v.dv + w.dw \quad \rightarrow \quad u.du = d\frac{u^2}{2} = \frac{2u}{2}du \;\rightarrow lo\ mismo\ para\ v\ y\ w$$

$$-\frac{1}{\rho}dP - g.dz = \frac{d}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

Donde $\text{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$:

$$-\frac{dP}{\rho} - g.dz = \frac{d}{2}(\text{v}^2)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dP}{\rho} + g.dz + \frac{d(\text{v}^2)}{2} = 0}$$

Ésta es la ecuación de Bernoulli para un fluido ideal y flujo permanente a lo largo de una línea de corriente.

$$\int\frac{dP}{\rho} + \int g.dz + \int\frac{d(\text{v}^2)}{2} = cte \rightarrow \boxed{\int\frac{dP}{\rho} + g.z + \frac{\text{v}^2}{2} = cte}$$

Fórmula para un fluido **compresible**, ideal y en régimen permanente.

La constante varía de una línea de corriente a otra, ρ es sólo función de P para un fluido incompresible.

$$\boxed{\frac{P}{\rho} + g.z + \frac{\text{v}^2}{2} = cte}$$

Ésta es la ecuación para un fluido **incompresible**, ideal y en régimen permanente.

Dividiendo por ***g***:

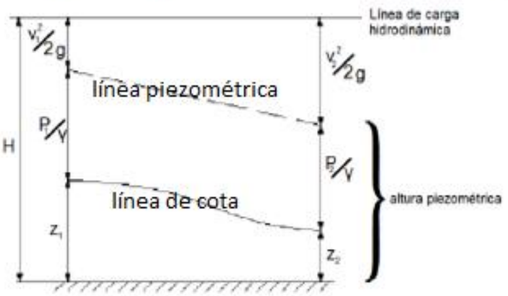
$$\boxed{\frac{P}{\gamma} + z + \frac{\text{v}^2}{2g} = cte} \rightarrow para\ un\ fluido\ ideal\ y\ en\ régimen\ permanente$$

La ecuación de Bernoulli nos dice que a lo largo de una línea de corriente la suma de las energías de presión (E. Presión), de posición (E. potencial) y de velocidad (E. Cinética) se mantiene constante. (Principio de conservación de la energía). Bernoulli -> Flujo estacionario, incompresible, sin rozamiento, fundamental saber determinar punto 1 y 2, P manom.

La expresión:

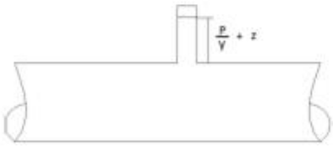
$$\boxed{\frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = cte = H}$$

Representa la altura de carga hidrodinámica H total, nos da la energía por unidad de peso y se representaría de la siguiente manera:



En la línea de cota el flujo se mueve por acción de la gravedad

$\left(\frac{P}{\gamma} + z\right) \Rightarrow$ es la altura piezométrica o estática. Es la altura que asciende el agua por un tubo piezométrico al colocarla en una cañería en la que la velocidad es nula.



En realidad, debido a la pérdida de carga que produce la viscosidad, la línea de carga total no es horizontal. En un fluido ideal, la altura piezométrica es constante para el fluido incompresible. En las redes se dice que la viscosidad produce pérdida de energía, ya que la altura la transforma en calor, el cual no se aprovecha.

Ecuación de la energía → Principio de conservación para fluidos reales, la ecuación de Bernoulli no se puede aplicar aquí porque no se incluyen las pérdidas, y el trabajo por unidad de masa que realizan las distintas máquinas en el circuito (bombas, o turbinas) ni considera otros intercambios energéticos.

→ Considerando un fluido real, compresible en régimen permanente (sin considerar variaciones de temperatura, reacciones químicas, nucleares o de otro tipo):

$$\boxed{\underbrace{\text{Energía de sección}}_{(1)} + \underbrace{\text{Energía añadida}}_{bomba} - \underbrace{\text{Energía perdida}}_{rozamiento} - \underbrace{\text{Energía extraída}}_{turbina} = \underbrace{\text{Energía de sección}}_{(2)}}$$

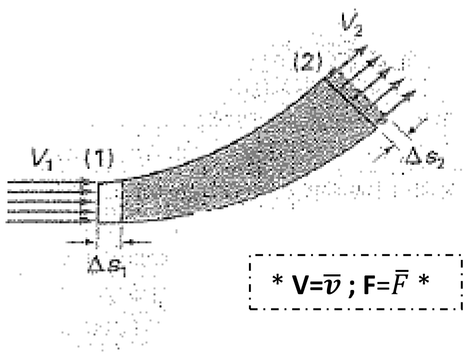
Acción Dinámica

Ecuación de la cantidad de movimiento → Permite determinar las fuerzas que actúan y que se producen porque la velocidad de un fluido cambia de dirección o de magnitud por la acción de un cuerpo.

La segunda Ley de Newton establece que $\sum \bar{F} = m.\bar{a} \;\; ; \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \rightarrow \sum \bar{F} = m.\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}$, es decir que la suma de fuerzas externas $\bar{F}$ sobre un fluido o sistema es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal $m\bar{V}$ de ese fluido, y este cambio debe producirse en la misma dirección que la fuerza.

Consideramos un volumen de control fijo situado entre las secciones 1 y 2 y un sistema fluido en movimiento que consiste en la masa de fluido contenido en el vc en un instante t. Durante un intervalo de tiempo Δt, suponemos que el fluido en la sección 1 se mueve Δs_1 y en la sección 2 se mueve Δs_2. Por el teorema de Euler (U3) vemos que:

$$\frac{d(m\mathbf{V})_S}{dt} = \frac{d(m\mathbf{V})_{VC}}{dt} + \frac{d(m\mathbf{V})_{VC}^{\text{fuera}}}{dt} - \frac{d(m\mathbf{V})_{VC}^{\text{dentro}}}{dt}$$



* V=$\bar{v}$; F=$\bar{F}$ *

Si reemplazamos en el 2da Ley de Newton obtenemos que para un flujo no estacionario:

$$\sum \mathbf{F} = \underbrace{\frac{d(m\mathbf{V})_{VC}}{dt}}_{\text{Variación en el tiempo de la cantidad de movimiento volumen de control}} + \underbrace{\frac{d(m\mathbf{V})_{VC}^{\text{fuera}}}{dt} - \frac{d(m\mathbf{V})_{VC}^{\text{dentro}}}{dt}}_{\text{Variación en el tiempo de la cantidad de movimiento que entra o sale del volumen de control}}$$

Ecuación general - se puede usar para fluido ideal o real, compresible o incompresible, estacionario o no estacionario

Para un <u>flujo estacionario</u> sabemos que las condiciones dentro del vc no varían $\rightarrow \frac{d(mV)_{vc}}{dt} = 0$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{V})_{VC}^{\text{fuera}}}{dt} - \frac{d(m\mathbf{V})_{VC}^{\text{dentro}}}{dt}$$

Si consideramos que:

- la superficie de control es normal a la velocidad donde corta la corriente
- la velocidad es constante donde corta a la superficie de control
- el flujo es estacionario y por lo tanto $\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \rho Q$
- $\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{V} = \dot{m}\,\mathbf{V} = \rho \cdot Q\,\mathbf{V}$
- $\Delta V = V_2 - V_1 = V_{fuera} - V_{dentro}$

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m}_2\mathbf{V}_2 - \dot{m}_1\mathbf{V}_1 = \rho_2 Q_2 \mathbf{V}_2 - \rho_1 Q_1 \mathbf{V}_1$$

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m}(\Delta\mathbf{V}) = \rho Q(\Delta\mathbf{V})$$

incluye F de gravedad, cortantes, presión, etc

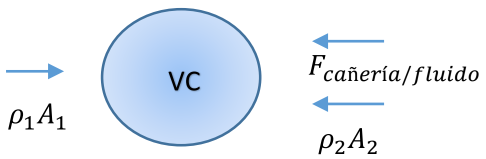
Como es una ecuacuación vectorial podemos expresarla:

$$\sum F_x = \dot{m}(\Delta V_x) = \rho Q(\Delta V_x) = \rho Q(V_{2x} - V_{1x})$$

$$\sum F_y = \dot{m}(\Delta V_y) = \rho Q(\Delta V_y) = \rho Q(V_{2y} - V_{1y})$$

$$\sum F_z = \dot{m}(\Delta V_z) = \rho Q(\Delta V_z) = \rho Q(V_{2z} - V_{1z})$$

$$\Sigma F = \rho_1 A_1 - \rho_2 A_2 - F_{cañería/fluido}$$



- Las P deben ser manométricas de modo que la presión fuera de la cañería sea 0.
- Despreciamos el preso del fluido dentro del volumen de control (excepto que me lo den)
- Despreciamos las F cortantes.

En sistemas donde las velocidades no son constantes en la sección, se debe tener en cuenta un <u>factor de corrección</u> denominado coeficiente de convección (β), para un fluido ideal β = 1, para tubería circular y flujo laminar β = 0,75 pero para flujo turbulento 1,005 < β < 1,05.

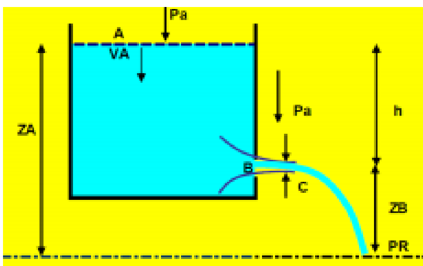
$$\beta = \frac{1}{AV^2}\int_A u^2\, dA$$

donde u es la velocidad local.

$$\boxed{\sum F = \rho . Q . (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)}$$

<u>Aplicaciones del Teorema de Bernoulli</u>

1) Salida de un orificio: Ecuación de Torricelli: tanque con nivel constante → Z_A es cte. El fluido saldrá por el orificio a una velocidad que debemos calcular. Aplicamos Bernoulli:



$$\frac{P_A}{\gamma}+z_A+\frac{v_A^2}{2g}=\frac{P_B}{\gamma}+z_B+\frac{v_B^2}{2g}\rightarrow v_A\approx 0\ ;\quad P_A=P_B=P_{atm}$$

la contribución de la energía cinética es despreciable comparada con la otra sección.

$$\rightarrow \boxed{v_B=\sqrt{2.g.\underbrace{(z_A-z_B)}_{h}}=\sqrt{2.g.h}}$$

→ es la velocidad teórica en el punto B → la sección en B≠ sección C

Esta ecuación nos dice: "La velocidad de salida de un fluido por un pequeño orificio practicado en la pared del recipiente, es la misma que adquiriría cayendo libremente en el vacío desde la superficie libre hasta el nivel del orificio". Es una velocidad teórica, por ende, el caudal también es teórico $Q_T=v_T A_B$, siendo A_B el área del orificio de salida. Pero la vena de fluido se contrae en la realidad, entonces se define un coeficiente de contracción:

$$C_c=\frac{\text{área contracta}}{\text{área del orificio}}=\frac{A_c}{A_B}\approx 0{,}63$$

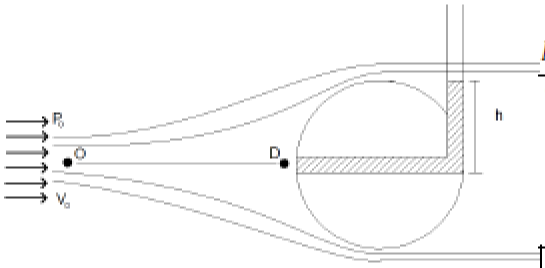
Se corrige además la velocidad teórica, mediante un coeficiente de velocidad:

$$C_v=\frac{\text{velocidad real}}{\text{velocidad teórica}}\approx 0{,}97$$

$$\rightarrow \boxed{Q_{real}=v_r.A_c=C_v.C_c.A_B\sqrt{2.g.h}=C_d.Q_T}$$

$C_d=0{,}61$; es el coeficiente de descarga.

2) Cuerpo sumergido en una corriente:



$$\frac{P_0}{\gamma}+z_0+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{P_D}{\gamma}+z_D+\frac{v_D^2}{2g}$$

Δz = 0; porque están a la misma altura, y v_D = 0 por ser punto de estancamiento.

$$\boxed{P_D=P_0+\frac{\rho v_0^2}{2}}$$

El término $\frac{\rho v_0^2}{2}$, es la transformación de energía cinética en energía de presión, y se lo denomina "presión dinámica".

La presión en el punto de impacto es la suma de la presión atmosférica y del aporte de velocidad a la presión, la presión dinámica.

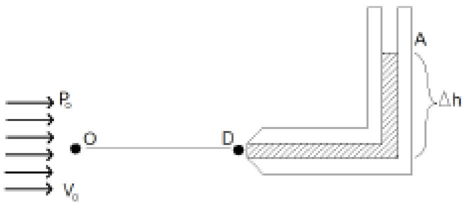
$$P_D-P_0=\frac{\rho v_0^2}{2}\rightarrow \boxed{\Delta P=\frac{\rho v_0^2}{2}}\rightarrow \boxed{v_0=\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}=\sqrt{2.g.h}}$$

3) Tubo de Pitot: Está construido por dos tubos, uno grande de diámetro regular y otro pequeño insertado en el grande. Se utiliza para medir la presión total o de "estancamiento", la velocidad de un fluido, o la de un objeto que se desplaza en un fluido (avión respecto al aire).

Aplicando Bernoulli entre O y D:

$$\frac{P_0}{\gamma}+z_0+\frac{v_0^2}{2g}=\frac{P_D}{\gamma}+z_D+\frac{v_D^2}{2g}\rightarrow\frac{v_0^2}{2g}=\frac{P_D-P_0}{\gamma}=\Delta h$$

$$\rightarrow \boxed{v_0=\sqrt{2.g.\Delta h}}$$

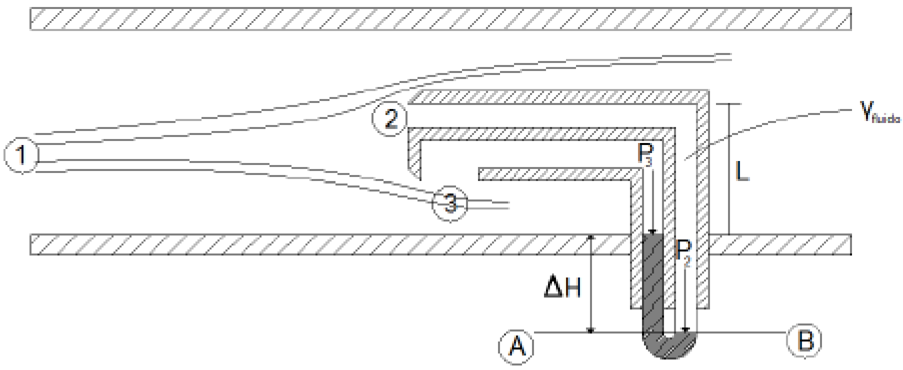


Aplicando Bernoulli entre D y A:

$$\frac{P_D}{\gamma}+z_D+\frac{v_D^2}{2g}=\frac{P_A}{\gamma}+z_A+\frac{v_A^2}{2g}\quad;\quad v_A=v_D=0\quad y\quad P_A=P_{atm}\rightarrow P_{man}=0$$

$$\frac{P_D}{\gamma}+z_D=z_A\rightarrow\boxed{P_{est}=\gamma.\Delta h}\rightarrow \text{Entre D y A reinan las condiciones estáticas}$$

4) Tubo de Pitot y Prandt: ambos se utilizan para medir velocidades. Prandtl combinó en un instrumento, un tubo de Pitot, el cual mide la presión total de estancamiento $P_{estanc}=P_{estática}+P_{dinámica};$ y un tubo piezométrico, el cual mide la presión estática. Con este instrumento combinado logro calcular la presión dinámica. La nariz reduce las perturbaciones.



P_1: presión de flujo no perturbado, con v_1 a medir.

P_2: presión de estancamiento, pues $v_2=0$.

P_3: presión medida en un tubo piezométrico, que no perturba la corriente $\rightarrow P_{estática}$.

Tenemos que $z_1\approx z_2\approx z_3$, las diferencias se consideran despreciables.

Despreciando las pérdidas, y considerando que $v_3=v_{1t}$ y $P_3=P_1$ y aplicando Bernoulli entre (1) y (2) para un fluido incompresible:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}\rightarrow\frac{P_2-P_1}{\gamma}=\frac{v_1^2}{2g}\rightarrow\boxed{P_2-P_1=\frac{\rho_f v_1^2}{2g}}\quad(A)$$

De (2) a (3) en el manómetro, al estar el fluido principal y el líquido manométrico en reposo, aplico la ecuación fundamental de la hidrostática.

$$P_A=P_B;\quad P_2+\gamma_f.\Delta H+\gamma_f.L=P_3+\gamma_{Hg}.\Delta H+\gamma_f.L$$

$$\boxed{P_2-P_3=\Delta H(\gamma_{Hg}-\gamma_f)}\quad(B)$$

Tenemos que $P_2 - P_3 = P_2 - P_1$ y que $P_{din} = P_{est} - P_{estática}$

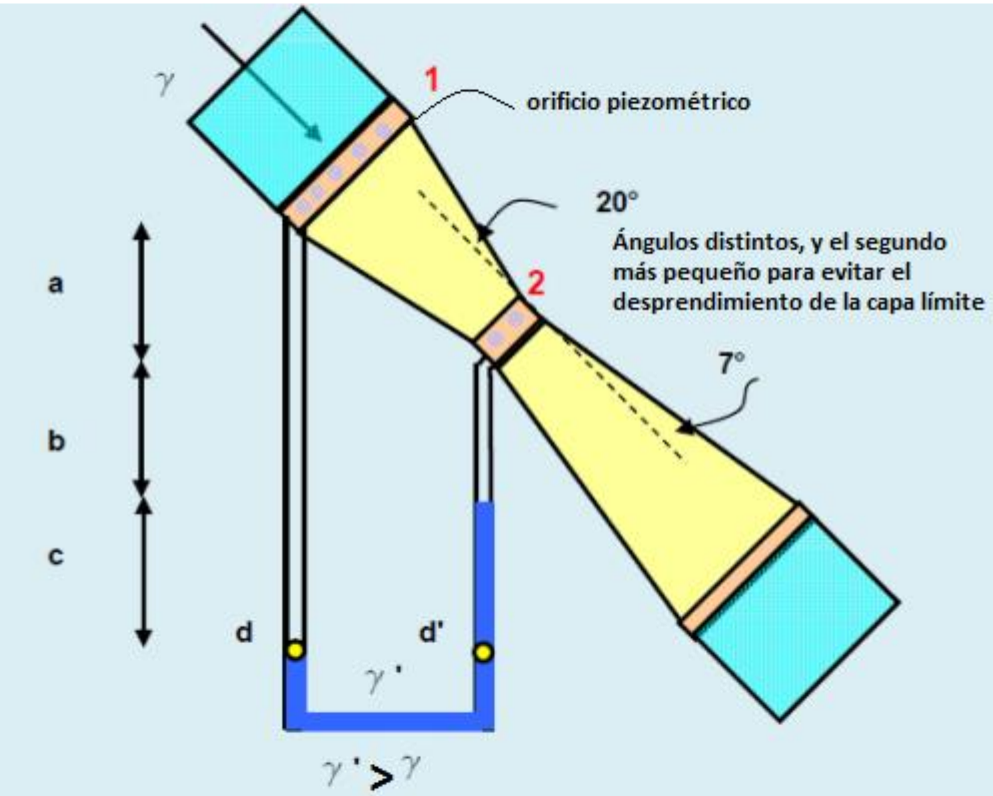
De (A) y (B):

$$P_2 - P_1 = \rho_f . \frac{v_1^2}{2} \quad ; \quad P_2 - P_3 = \Delta H(\gamma_{Hg} - \gamma_f)$$

$$\rho_f . \frac{v_1^2}{2} = \Delta H(\gamma_{Hg} - \gamma_f) \rightarrow \boxed{v_{1t} = \sqrt{\frac{2\Delta H(\gamma_{Hg} - \gamma_f)}{\rho_f}}} \rightarrow \text{velocidad teórica de corriente}$$

$$\boxed{v_{1R} = C . v_{1t}} \rightarrow \text{velocidad real de la corriente donde C se determina experimentalmente}$$

5) Tubo de Venturi: Es un dispositivo para medir caudales en tuberías. Consiste en dos secciones de forma de tronco o de cono, unidas por sus bases menores.
No depende de la posición en la que se encuentre el tubo. Los diámetros inicial y final son iguales.



En 1 y 2 hay orificios piezométricos, en los cuales va un manómetro, siempre hacia abajo. Los orificios piezométricos además sirven para tomar un promedio de presiones si el fluido esta perturbado.

El ángulo mayor me permite una mejor conversión de energía potencial en energía cinética.

El segundo cono el más largo para obtener una mejor descarga y además compensar el largo del cono.

El líquido en cuestión tiene un γ, el manómetro tiene un líquido con un γ’.

Aplicamos Bernoulli y continuidad entre 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \mathrm{a} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathrm{a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (1)$$

$$v_1 . A_1 = v_2 . A_2 \rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} . v_2 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

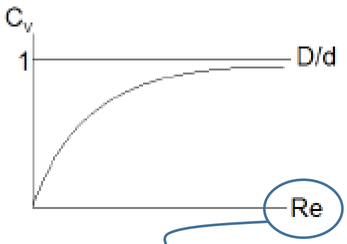
$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathrm{a} = \frac{v_2^2}{2g} - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathrm{a} = \frac{v_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] \rightarrow \boxed{v_{2t} = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathrm{a}\right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}} \quad (3) \rightarrow \text{velocidad teórica}$$

Pero en la sección del venturi no todos los puntos de esa sección tienen esa velocidad teórica v_{2t}. Para hallar esa velocidad real debo afectar la v_{2t} por un factor de corrección (que tiene en cuenta el rozamiento) llamado coeficiente de velocidad que depende del número de Reynolds.

$$\boxed{v_{2R} = C_v . v_{2t}} \quad (4)$$

Coeficiente de velocidad, es f(β, Re); donde β es la relac entre el diam de la garganta dg y dc (dg/dc)



El n° de Re depende de la veloc, diam, y visco cinem.
Uso datos de la garganta.

Para simplificar la ecuación (3), marcamos en el manómetro los puntos d y d'
→ $P_d = P_{d'}$.

Donde
$$P_d = P_1 + \gamma . \mathrm{a} + \gamma . \mathrm{b} + \gamma . \mathrm{c}$$

$$P_{d'} = P_2 + \gamma . \mathrm{b} + \gamma' . \mathrm{c}$$

$$P_1 + \gamma . \mathrm{a} + \gamma . \mathrm{b} + \gamma . \mathrm{c} = P_2 + \gamma . \mathrm{b} + \gamma' . \mathrm{c}$$

$$P_1 + \gamma(\mathrm{a} + \mathrm{c}) = P_2 + \gamma' . \mathrm{c}$$

Dividiendo por γ:

$$\frac{P_1}{\gamma} + (\mathrm{a} + \mathrm{c}) = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\gamma'}{\gamma} . \mathrm{c} \quad \rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathrm{a} = \frac{\gamma'}{\gamma} . \mathrm{c} - \mathrm{c} \quad \rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathrm{a} = \mathrm{c}\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1\right) \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (3):

$$\boxed{v_{2t} = \sqrt{\frac{2 . g . c\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1\right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}} \quad (6)$$

Ha desaparecido de la ecuación el valor de "a", por lo tanto, **al medir el caudal, esta medición será totalmente independiente de la posición del venturi.**

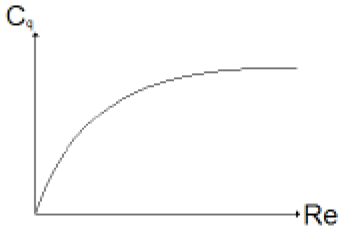
$Q_R = C_v . v_{2t} . A_2$

$$\boxed{Q_R = C_v\, A_2 \underbrace{\sqrt{\frac{2.g.c\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1\right)}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}}_{K} = C_v . K}$$ para un ventirímetro $\rightarrow \frac{A_2}{A_1} < 1$

No es lo mismo que Cd=Cv.Cc, ya que para Venturi Cc es despreciable por que es muy preciso

Cada venturi tiene un coeficiente característico, que al igual que $C_v \neq$ cte, depende del Re.

$C_q = f(Re) \rightarrow \boxed{C_q = C_v . K}$



Ventajas del venturi: poca pérdida de energía.

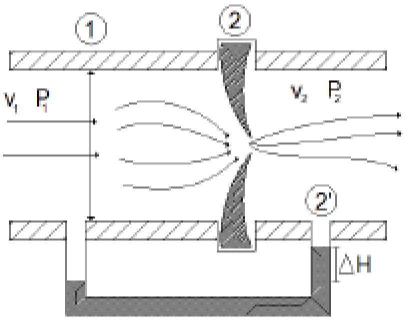
Desventajas: es muy caro.

6) Toberas

Más económica que el venturi. Los venturi se usan en instalaciones en donde no suelen haber recambios de cañería. En cambio se usan toberas cuando hay recambios (pues, van entre bridas).

La tobera es un tubo de salida por el que termina un conducto de descarga de un fluido. Existe una tobera de presión, la cual es una boquilla estrecha dispuesta en una tubería que sirve para transformar la presión del fluido en velocidad.

Una tobera de medida, es un venturi, sin tramo divergente (más barato), pero al variar más la sección más bruscamente, las pérdidas de energía que introduce son mayores.

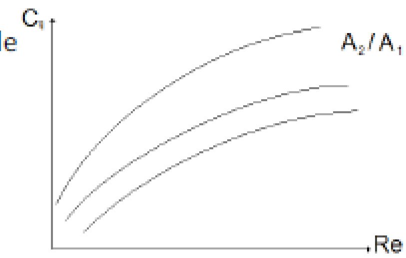


Las tomas de presión se hacen en (1) a una distancia mayor a P_1 de la tubería y en (2') (lo ideal sería en (2)) que es muy cerca de la salida de la tobera, que disminuye los errores.

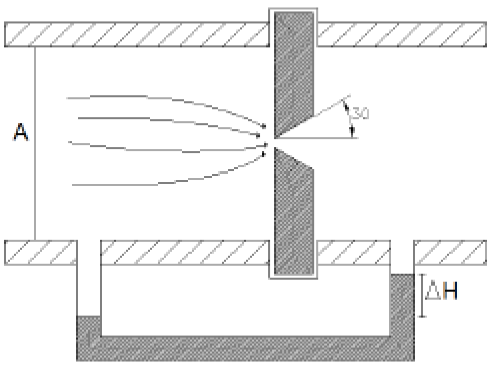
Los errores son absorbidos por el error con el que se calcula C_q. Se aplican iguales fórmulas que en el venturi.

Existen ábacos (tablas) o cartas para calcular cada tobera $(A_2/A_1) =$ cte y conociendo el Re podemos conocer C_q.

Antes de colocar una tobera, debe dejarse aguas arriba un tramo de tubería recta (sin accesorios), de al menos 10 D_1.



7) Placa orificio o diafragma

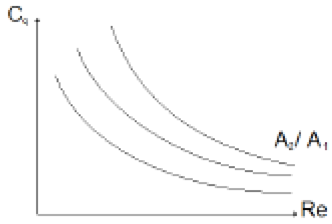


Son más baratas que las toberas, pero introducen más pérdidas. La conexión del manómetro es igual que en la tobera.

- Se usan idénticas fórmulas.

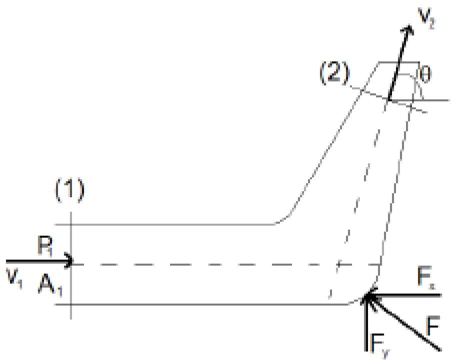
- Menos exacto.

- Más barato.



Aplicaciones del principio de cantidad de movimiento

Cálculo de la reacción en el codo:



$$\sum F_x = \rho.Q.(v_{2x} - v_{1x})$$

$$P_1A_1 - F_x - P_2A_2\cos\theta = \rho.Q.(v_2\cos\theta - v_1) \quad (a)$$

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

$$\sum F_y = \rho.Q.\left(v_{2y} - v_{1y}\right)$$

$$-P_2A_2\,\mathrm{sen}\,\theta + F_y = \rho.Q.(v_2\,\mathrm{sen}\,\theta - 0) \quad (b)$$

$$\rightarrow F_x = P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta - \rho.Q.(v_2\cos\theta - v_1)$$

$$\rightarrow F_y = P_2A_2\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho.Q.v_2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

En un cambio en la dirección de una tubería hay fuerzas que provocan desplazaminetos, es decir que la cantidad de movimiento poduce una sobrepresión, por eso los codos se refuerzan con hormigón o se encuentran anclados.

- Si cambio el sentido de circulación, cambian el sentido de las velocidades y ademas se intercambian la entrada y la salida (punto 1 y 2) por lo tanto las fuerzas no varían.