



FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO FACULTAD DE INGENIERÍA

CATEDRA: MECANICA APLICADA

UNIDAD 02: ARBOLES Y EJES

Ing. Sebastian M. Lazo

Agosto 2016

INDICE

1.	Introducción	3
2.	Materiales para fabricar arboles	3
3.	Configuración del eje	5
3.1.	Distribución axial de los componentes	5
3.2.	Métodos de sujeción y transmisión de torque	5
3.3.	Ensamble y desensamble	7
4.	Diseño de ejes	8
4.1.	Consideraciones generales	9
5.	Estrategia para desarrollar el diseño de un eje (por esfuerzos de fatiga)	9
6.	Esfuerzos sobre el árbol	11
6.1.	Estimación de concentraciones de esfuerzo	13
7.	Componentes diversos de los ejes	15
7.1.	Chavetas y pasadores	15
7.2.	Anillos de retención	18
7.3.	Tornillos de fijación	18
7.4.	Ranuras	19
7.5.	Ajustes con interferencia	19
8.	Consideraciones sobre deformación de ejes	20
8.1.	Ejes como vigas	21
8.2.	Ejes como barras de torsión	21
9.	Velocidades críticas de arboles	21
9.1.	Deformaciones en ejes debidas a vibraciones	22
9.2.	Coeficientes de influencia	24
10.	Anexo 1	26
11.	Anexo 2: Factores de concentración de tensiones	26
12.	Bibliografía	26

Nota: la siguiente simbolización indica los ítems revisados desde el apunte del año anterior.



1. Introducción

En el aspecto mecánico, un **árbol** es un elemento **rotatorio**, por lo general de sección transversal circular, que se emplea para **transmitir potencia o movimiento**. Constituye el eje de rotación u oscilación de elementos como engranes, poleas, volantes de inercia, manivelas, piñones y coronas, y miembros similares y, además, controla la geometría de su movimiento.

Un **eje** es un elemento **no giratorio** que **no transmite par de torsión** que se utiliza para soportar ruedas rotatorias, poleas y elementos parecidos. El eje de un automóvil no es un eje verdadero. El término es un remanente de la era de caballo y la calesa, cuando las ruedas giraban sobre elementos no rotatorios. Un eje no giratorio puede diseñarse con facilidad y analizarse como una viga estática, pero no justifica la atención especial que se le da en este módulo a los árboles que están sometidos a carga por fatiga.

La complejidad e importancia de los árboles en muchas aplicaciones de diseño de máquinas, hace conveniente un estudio profundo del diseño. El diseño de un árbol completo tiene mucha interdependencia con el de los componentes. La configuración de la propia máquina dictará que ciertos engranes, poleas, cojinetes y otros elementos se tendrán que analizar, al menos parcialmente, y determinar en forma tentativa su tamaño y espaciamiento. En este módulo se estudiarán los detalles referentes a los árboles, incluyendo algunos de los siguientes temas:

- Selección del material
- Configuración geométrica
- Esfuerzo
- Resistencia estática
- Resistencia por fatiga
- Deflexión y rigidez
- Deflexión por flexión
- Deflexión por torsión
- Pendiente en los cojinetes y elementos soportados por el eje
- Deflexión por cortante debida a cargas transversales sobre ejes cortos
- Vibración debida a la frecuencia natural

Cuando se deciden los diversos aspectos de un enfoque de diseño, es necesario tomar en cuenta que un **análisis de esfuerzos** en un punto específico de un eje se hace sólo mediante la **geometría del eje en la proximidad de ese punto**. De esta forma, no se necesita conocer la geometría de todo el eje. En diseño, por lo general, se localizan las áreas críticas, se dimensionan para cumplir los **requisitos de resistencia** y después se dimensiona el resto del eje para satisfacer las necesidades de los elementos soportados por éste.

Los **análisis de deflexión y de pendiente** no pueden hacerse hasta que se haya definido la geometría de todo el eje. De esta manera, la **deflexión es una función de la geometría de todas partes**, mientras que el **esfuerzo en una sección de interés es una función de la geometría local**. Por esta razón, el diseño de ejes permite primero una consideración de esfuerzo y resistencia. Una vez que se hayan establecido valores tentativos para las dimensiones del eje, se pueden determinar las deflexiones y las inclinaciones.

2. Materiales para fabricar árboles

La **deflexión no se ve afectada por la resistencia sino por la rigidez**, representada por el **módulo de elasticidad**, que es esencialmente constante en todos los aceros. Por esa razón, la **rigidez** no puede controlarse mediante decisiones sobre el material, sino sólo por **decisiones geométricas**.

La resistencia necesaria para soportar esfuerzos de carga afecta la elección de los materiales y sus tratamientos. Muchos ejes están hechos de acero de bajo carbono, acero estirado en frío o acero laminado en caliente, como lo son los aceros ANSI 1020-1050. A menudo no está garantizado el incremento significativo de la resistencia proveniente del tratamiento térmico ni el contenido de alta aleación. La falla por fatiga se reduce moderadamente mediante el incremento de la resistencia, y después sólo a cierto nivel antes de que los efectos adversos en el límite de resistencia a la fatiga y la sensibilidad a la muesca comience a contrarrestar los beneficios de una resistencia mayor. Una buena práctica consiste en iniciar con un acero de bajo o medio carbono de bajo costo, como primer paso en los cálculos del diseño. Si las

consideraciones de **resistencia** resultan dominar sobre las de **deflexión**, entonces debe probarse un **material con mayor resistencia**, lo que permite que los **tamaños del eje se reduzcan** hasta que el exceso de deflexión adquiera importancia. El costo del material y su procesamiento debe ponderarse en relación con la necesidad de contar con diámetros de eje más pequeños. Cuando están garantizadas, las aleaciones de acero típicas para tratamiento térmico incluyen ANSI 1340-50, 3140-50, 4140, 4340, 5140 y 8650.

Por lo general, los ejes no requieren endurecimiento superficial a menos que sirvan como un recubrimiento real en una superficie de contacto. Las elecciones típicas para el material para el **endurecimiento superficial** incluyen los grados de carburización ANSI 1020, 4340, 4820 y 8620. Por lo general, el acero estirado en frío se usa para diámetros menores de 3 pulgadas. El diámetro nominal de la barra puede dejarse sin maquinar en áreas que no requieren el ajuste de los componentes. El acero laminado en caliente debe maquinarse por completo. En el caso de ejes grandes que requieren la remoción de mucho material, los esfuerzos residuales pueden tender a causar alabeo. Si la concentricidad es importante, puede ser necesario maquinar las rugosidades, después tratar térmicamente para remover los esfuerzos residuales e incrementar la resistencia, luego maquinar para el terminado y llegar a las dimensiones finales.

Cuando se debe seleccionar el material, la cantidad que se producirá es un factor sobresaliente. Para pequeñas producciones, el torneado es el proceso de formado más común. Un punto de vista económico puede requerir la eliminación de una cantidad mínima de material. La alta producción puede permitir un método de conformado conservador de volumen (formado en caliente o en frío, fundición) y un mínimo de material en el eje puede convertirse en una meta de diseño. Se puede especificar el hierro fundido si la cantidad de producción es alta, y los engranes deberán fundirse de manera integral con el eje. Las propiedades del eje dependen localmente de su historia: trabajo en frío, formado en frío, laminado de los rasgos del filete, tratamiento térmico, incluyendo el medio de temple, agitación y régimen de templado.

El acero inoxidable puede resultar apropiado para algunos entornos.

En la tabla 2-1 se puede observar una clasificación resumida de aleaciones de acero normalizadas.

Denominaciones AISI/SAE para aleaciones de acero (Fuente: Diseño de Maquinas - Norton - 4th ed)

Lista parcial para otras aleaciones disponibles; para otras aleaciones, consulte a los fabricantes

Tipo	Series AISI/SAE	Elementos principales de la aleación
Aceros al carbono		
Básico	10xx	Carbono
Libre corte	11xx	Carbono más azufre (resulfurizado)
Aleaciones de acero		
Al manganeso	13xx	1.75% de manganeso
	15xx	1.00% a 1.65% de manganeso
Al níquel	23xx	3.50% de níquel
	25xx	5.00% de níquel
Al níquel-cromo	31xx	1.25% de níquel y 0.65% o 0.80% de cromo
	33xx	3.50% de níquel y 1.55% de cromo
Al molibdeno	40xx	0.25% de molibdeno
	44xx	0.40% o 0.52% de molibdeno
Al cromo-molibdeno	41xx	0.95% de cromo y 0.20% de molibdeno
Al níquel-cromo-molibdeno	43xx	1.82% de níquel, 0.50% o 0.80% de cromo y 0.25% de molibdeno
	47xx	1.45% de níquel, 0.45% de cromo y 0.20% o 0.35% de molibdeno
Al níquel-molibdeno	46xx	0.82% o 1.82% de níquel y 0.25% de molibdeno
	48xx	3.50% de níquel y 0.25% de molibdeno
Al cromo	50xx	0.27% a 0.65% de cromo
	51xx	0.80% a 1.05% de cromo
	52xx	1.45% de cromo
Al cromo-vanadio	61xx	0.60% a 0.95% de cromo y 0.10% a 0.15% de vanadio mínimo

Tabla 2-1

3. Configuración del eje

La configuración general de un eje para acomodar los elementos que lo conforman, por ejemplo, engranes, cojinetes y poleas, debe especificarse en los primeros pasos del proceso de diseño para poder realizar un análisis de fuerzas de cuerpo libre y para obtener diagramas de momento cortante.

Mientras que algunas veces es posible diseñar ejes de transmisión, cuya sección no cambia de diámetro a lo largo de su longitud, es más común que los ejes tengan varios escalones u hombros donde el diámetro cambia para alojar elementos sujetos como cojinetes, ruedas dentadas, engranes, etcétera, como se ilustra en las figuras 3-1 y 3-2, las cuales también presenta un conjunto de dispositivos que se utilizan comúnmente para sujetar o ubicar los elementos sobre el eje.

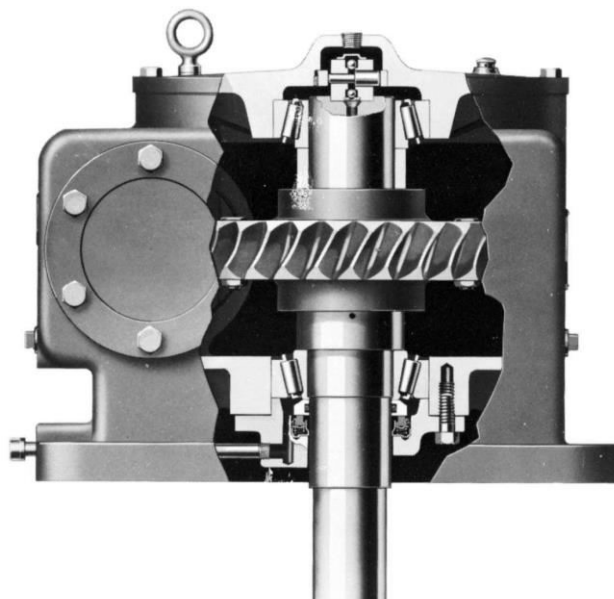


Figura 3-1

3.1. Distribución axial de los componentes

En la mayoría de los casos sólo deberían usarse dos cojinetes. Para ejes extremadamente largos que soportan varios componentes de carga, puede ser necesario proporcionar más de dos apoyos de cojinete. En este caso, debe tenerse cuidado especial en el alineamiento de los cojinetes.

Los ejes deben mantenerse cortos para minimizar los momentos flexionantes y las deflexiones. Es deseable cierto espacio axial entre los componentes para permitir el flujo de lubricante y proporcionar espacio de acceso para el desensamble de componentes con un jalador. Los componentes de carga deben colocarse cerca de los cojinetes, de nuevo para minimizar el momento flexionante en las ubicaciones que probablemente tendrán concentraciones de esfuerzo, y para minimizar la deflexión en los componentes sometidos a carga.

Los componentes deben localizarse de manera exacta sobre el eje para alinearse con los otros componentes correspondientes, y debe tenerse la precaución de sostener los componentes en posición. El medio principal para ubicar los componentes es posicionarlos contra un **hombro o escalón** del eje. Un hombro también proporciona un soporte sólido para minimizar la deflexión y vibración del componente, y también para crear el diámetro adecuado para ajustar piezas estándar como cojinetes. En ocasiones, cuando las magnitudes de las fuerzas son razonablemente bajas, los hombros pueden construirse con anillos de retención en ranuras, manguitos entre componentes o collarines de sujeción. En los casos donde las cargas axiales son muy pequeñas, puede ser factible hacerlo sin los hombros, y confiar en ajustes de presión, pasadores o collarines con tornillos de sujeción para mantener una ubicación axial.

En la figura 3-1 se muestra un ejemplo de un eje escalonado que soporta el engrane de un reductor de velocidad de corona sinfín. Cada hombro del eje sirve para un propósito específico, por lo cual se recomienda que el lector lo determine mediante observación.

3.2. Métodos de sujeción y transmisión de torque

Debemos distinguir entre elementos que solo sirven para **fijación axial** de aquellos que (además de la fijación axial) permiten la **transmisión de torque** y a la vez mantener la *fase* de cada elemento sobre el eje. (*fase* significa la ubicación angular relativa de los diferentes elementos sujetos al eje)

Fijación axial:

- Anillo de retención
- Hombro del eje

Transmisión de torque:

- Chavetas y cuñas
- Ejes estriados

Fijación axial + transmisión de torque:

- Pasadores (cilíndrico o cónico)
- Tornillos de fijación (también llamados tornillos prisioneros)
- Unión por fricción (por contracción térmica)
- Unión cónica (con collarín)

Cada uno de estos cambios en el contorno contribuye en algo a la concentración de esfuerzos (tema que fue estudiado en el módulo 1 de esta materia), lo cual se debe tomar en cuenta en los cálculos de esfuerzo por fatiga para el eje. Se usan radios generosos donde sea posible y técnicas para reducir los efectos de tales concentraciones de esfuerzos.

Las **cuñas y chavetas** requieren una ranura tanto en el eje como en la pieza, y podrían necesitar un **anillo de retención** para impedir el movimiento axial. Los **anillos de retención** circulares ranuran el eje y los **pasadores transversales** producen un orificio en el eje.

Los **ejes estriados** se asemejan a dientes de engranes cortados o formados en la superficie del eje y en la parte interior de la maza del componente sobre el que se transmite la carga. Por lo general, los ejes estriados son mucho más caros de fabricar que las cuñas, y normalmente no son necesarios para la transmisión de pares de torsión simples. De manera típica, se emplean cuando se transfieren pares de torsión considerables. **Una característica del eje estriado es que puede hacerse con un ajuste deslizante bastante holgado para permitir un gran movimiento axial entre el eje y el componente al mismo tiempo que se transmite el par de torsión.**

Las cuñas y los pasadores se pueden eliminar usando la **fricción** para sujetar los elementos (engranes, ruedas dentadas) al eje. Existen muchos diseños de **collarines de sujeción** (ajustes sin cuña), los cuales aprietan el diámetro exterior del eje con una gran fuerza de compresión para sujetar algo a ella, como la maza de la rueda dentada que se muestra en la figura 3-2 y figura 3-3. La maza tiene el diámetro interno ligeramente cónico, mientras un cono externo similar en este tipo de collarín de sujeción se fuerza en el espacio entre la maza y el eje mediante tornillos apretados. Ranuras axiales en la parte acunada del collarín le permiten cambiar de diámetro y apretar el eje, creando la suficiente fricción para transmitir el torque. Otro tipo de collarín de sujeción, llamado **collarín deslizante**, emplea un tornillo para cerrar una ranura radial y abrazar el collarín al eje. Los ajustes por interferencia y presión también se usan para este propósito. Sin embargo, tales acoplamientos de fricción también dan lugar a concentraciones de esfuerzos en el eje y pueden causar desgaste por corrosión. (para más aclaración sobre el tema véase Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed - sección 5.6 – pag. 364).

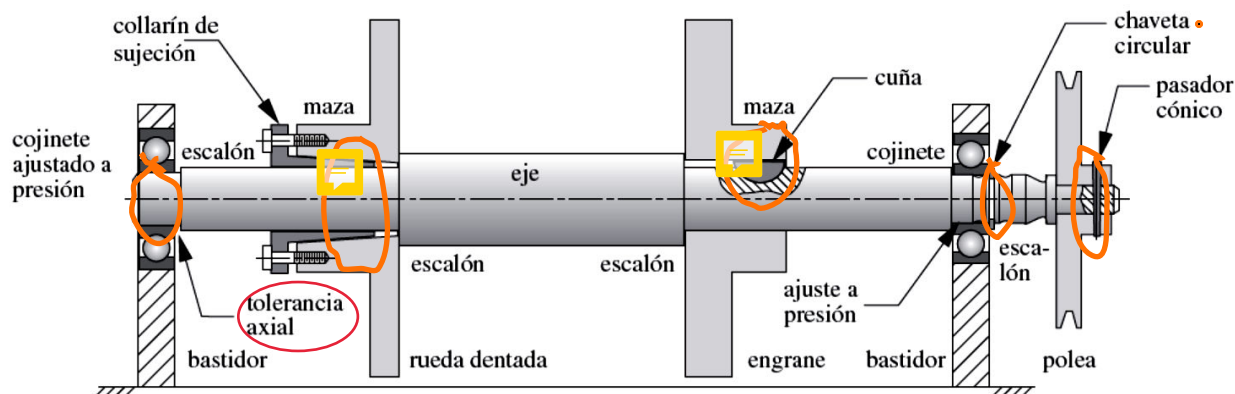


Figura 3-2

Para el dimensionamiento apropiado y las tolerancias adecuadas para transmitir el par de torsión con ajustes a presión y por contracción, véase Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – sección 7-8. Un método similar consiste en usar una maza dividida con tornillos para sujetarla al eje. En este método se permite el desensamble y los ajustes laterales. En otro método similar se usa una maza de dos partes, que consta de un elemento interior dividido que cabe en un agujero ahusado. Luego, el ensamble se aprieta al eje mediante tornillos que fuerzan la parte interior hacia la rueda y sujetan todo el ensamble contra el eje.

Algunas veces se utiliza un **pasador cónico** estándar para acoplar elementos a los ejes, como se observa en la polea de la figura 3-2. El orificio es escariado para que ajuste con el pasador cónico estandarizado y el pasador que se compra es colocado en su lugar. El cono poco profundo lo fija por fricción. Se debe retirar para el desensamble. Dicha técnica se debería

utilizar con precaución en ubicaciones con grandes momentos de flexión, pues debilita el eje y también crea concentración de esfuerzos.

Los **cojinetes** con elementos rodantes que se presentan en la figura 3-2 fueron hechos para tener sus pistas interior y exterior ajustadas a presión, tanto al eje como a su carcasa, respectivamente. Lo anterior requiere un maquinado con poca tolerancia del diámetro del eje, así como que un escalón brinde un tope para el ajuste a presión y la fijación axial. Por lo tanto, uno debe empezar con un diámetro más grande del eje que el diámetro interior del cojinete (ID), así como maquinar el eje para ajustar el cojinete elegido, cuyos tamaños sean estandarizados (y métricos). Algunas veces se utiliza una chaveta circular para garantizar que no haya movimiento axial entre el eje y el cojinete, como se ilustra en el cojinete del extremo derecho del eje, donde se encuentra la polea en la figura 3-2.

Los **anillos de retención** (chaveta circular) se encuentran comercialmente en gran variedad de estilos y requieren que se machine sobre el eje una pequeña ranura de poca tolerancia, con dimensiones específicas. Observe en la figura 3-2 cómo se logra la fijación axial del eje al aprisionar axialmente sólo uno de los cojinetes (el del lado derecho). El cojinete del extremo izquierdo tiene una holgura axial entre él y el escalón. Esto sirve para evitar esfuerzos axiales que se generan por expansión térmica del eje entre los dos cojinetes (véase Apuntes Modulo 2 Rodamientos – Disposición de Rodamientos fijo-libre). Por lo general, es mejor tener sólo un cojinete para soportar la carga axial, lo que permite tolerancias más grandes en las dimensiones de la longitud del eje, y evita que se apriete si el eje se expande debido a los cambios de temperatura. Esto es particularmente importante en el caso de ejes largos.

De ese modo, parece que no hay forma de escapar de los problemas de la concentración de esfuerzos en las máquinas reales. En el caso de los ejes, se necesita utilizar hombros, chavetas circulares u otros medios para fijar axialmente y con seguridad los componentes sobre el eje, y se tiene que instalar cuñas, sujetar o fijar el eje para transmitir el torque.

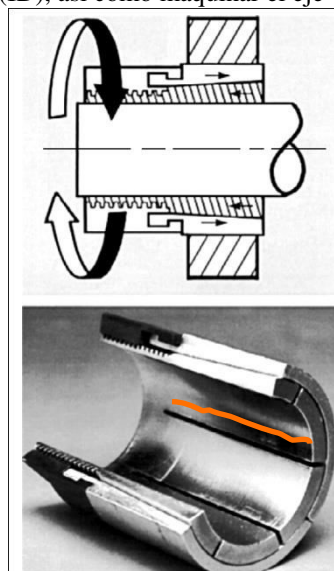


Figura 3-3: Acoplamiento trantorque (Cortesía de Fenner Manheim)

Cada uno de estos métodos de sujeción tiene sus ventajas y desventajas. Una **cuña** es fácil de instalar y sus tamaños están estandarizados con el diámetro del eje. Proporciona fases seguras, además de que es fácil de desarmar y reparar. Es posible que no oponga resistencia al movimiento axial y no siempre brinda un acoplamiento de ajuste real para el torque debido a la ligera tolerancia entre la cuña y el cuñero. Las inversiones del torque pueden causar ligeros contragolpes en las piezas. Un **pasador cónico** crea un acoplamiento ajustado real para el torque, además de que fija axial y radialmente las partes manteniéndolas en fase, aunque debilita el eje. Se desarma con un poco de mayor dificultad que una cuña. Un **collarín de sujeción** es fácil de instalar; sin embargo, no tiene fases repetidas. Lo anterior resulta desventajoso sólo si se requiere la sincronización de la rotación del eje con otros ejes del sistema. Si se desea, permite ajustar fácilmente la fase (aunque de forma insegura). Los ajustes a presión son conexiones semipermanentes que requieren equipo especial para desarmarlas. No proporcionan fases repetidas. Los **anillos de retención** son de fácil ensamble y desarmado, pero requieren una ranura mecanizada en el eje que genera una muy alta concentración de tensiones, por lo tanto no deben utilizarse donde existan momentos flectores importantes.

3.3. Ensamble y desensamble

Es necesario tener en consideración el método de ensamblado de los componentes en el eje, y el ensamblado del eje en el bastidor. Por lo general, esto requiere el diámetro más grande en el centro del eje, y diámetros progresivamente más pequeños hacia los extremos, para permitir que los componentes se deslicen hacia las puntas. Si se necesita un hombro en ambos lados de un componente, debe crearse uno de ellos mediante algo como un anillo de retención o mediante un manguito entre los dos componentes. La misma caja de engranes necesitará medios para posicionar físicamente el

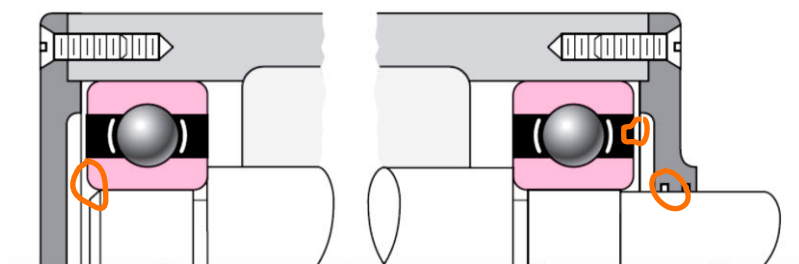


Figura 3-4

eje en sus cojinetes y éstos en el marco. Esta tarea se logra, de manera típica, proporcionando acceso a través del alojamiento al cojinete que se encuentra en un extremo del eje. La figura 3-4 es una disposición flotante que muestra los anillos interiores de los rodamientos ajustados a presión al eje, en tanto que los anillos exteriores flotan en el alojamiento. La holgura radial debe ser suficiente sólo para permitir vibraciones de maquinaria. Observe el sello de laberinto a la derecha.

La figura 3-5, es una situación similar al de la figura 3-4, con la diferencia que es una disposición ajustada de rodamientos.

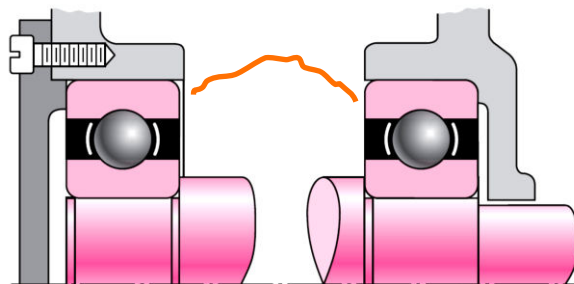


Figura 3-5

La figura 3-6 muestra una disposición de rodamientos fijo-libre, donde el anillo interior del cojinete de la izquierda está fijado al eje entre una tuerca y un hombro del eje. La tuerca de seguridad y la arandela son estándares. El anillo de retención de cierre en la pista exterior se emplea para ubicar de manera definitiva el eje en la dirección axial. Observe el cojinete flotante de la derecha y las ranuras rebajadas para esmerilado del eje.

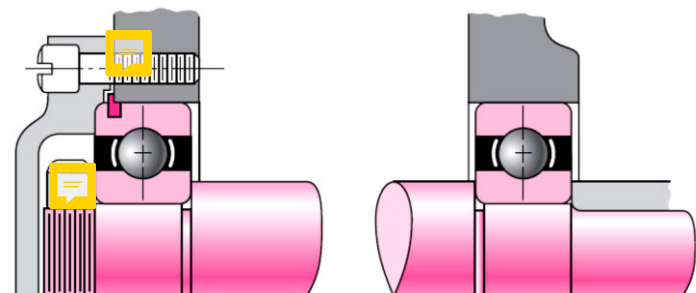


Figura 3-6

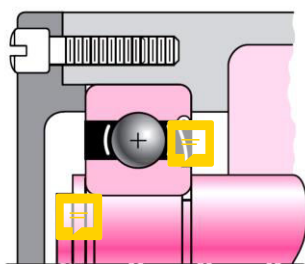


Figura 3-7

Por último, la figura 3-7 es una variante de la figura 3-6, en lo que respecta a que el cojinete de la izquierda ubica todo el ensamble del eje. En este caso el anillo interior está asegurado al eje mediante un anillo de retención. Observe el empleo de rodamiento sellado.

4. Diseño de ejes

Como se mencionó anteriormente, no es necesario evaluar los esfuerzos en todos los puntos de un eje; es suficiente hacerlo en unas cuantas ubicaciones potencialmente críticas. Por lo general, estas ubicaciones se localizan en la superficie exterior, en ubicaciones axiales **donde el momento flexionante es grande, donde el par de torsión está presente y donde existen concentraciones de esfuerzo**. Por comparación directa de diferentes puntos a lo largo del eje, pueden identificarse unas cuantas ubicaciones críticas sobre las cuales puede basarse el diseño. También puede resultar útil una evaluación de situaciones de esfuerzo típicas.

La mayoría de los ejes transmiten el **par de torsión** sólo a través de una parte de ellos. De manera típica, el par de torsión entra al eje por un engrane y sale del eje por otro engrane. Un diagrama de cuerpo libre del eje permite determinar el par de torsión en cualquier sección. Con frecuencia, el par de torsión es relativamente constante en un estado de operación estable. El esfuerzo cortante debido a la torsión será mayor en superficies exteriores.

Los **momentos flexionantes** sobre un eje pueden determinarse mediante diagramas de cortante y momento flexionante. Como la mayoría de los problemas de ejes incorporan engranes o poleas que introducen fuerzas en dos planos, por lo general los diagramas de momento cortante y flexionante deberán ser en dos planos. Los momentos resultantes se obtienen al sumar momentos como vectores en los puntos de interés a lo largo del eje. El ángulo de fase de los momentos no es importante puesto que el eje gira. Un momento flexionante constante producirá un momento completamente reversible sobre un eje giratorio, como un elemento de esfuerzo específico alternará de compresión a tensión en cada revolución del eje. El **esfuerzo normal** debido a los **momentos flexionantes** será mayor sobre las superficies exteriores (estos conceptos fueron desarrollados en Resistencia de los Materiales). En situaciones donde un cojinete se localiza en el extremo del eje, con frecuencia los esfuerzos cerca del cojinete no son críticos puesto que el momento flexionante es pequeño.

Los **esfuerzos axiales** sobre los ejes, debidos a componentes axiales transmitidos a través de engranes helicoidales o cojinetes ahusados de rodillo, casi siempre son despreciables en comparación con el esfuerzo de momento flexionante. A menudo son constantes, por lo que contribuyen poco a la fatiga. En consecuencia, por lo general **resulta aceptable despreciar los esfuerzos axiales** inducidos por los engranes y cojinetes cuando hay flexión presente en un eje. Si se aplica una carga axial al eje de alguna otra manera, no es seguro suponer que es despreciable sin verificar las magnitudes.

En el diseño de ejes deben considerarse tanto los **esfuerzos** como las **deflexiones**. La **deflexión** suele ser el factor crítico, pues las deflexiones excesivas provocarán un desgaste rápido de los cojinetes del eje. Los engranes, las bandas o las cadenas impulsadas por el eje también tienen problemas por la desalineación introducida por las deflexiones del eje. Observe que los esfuerzos en un eje se pueden calcular localmente para varios puntos a lo largo del eje con base en las cargas conocidas y suponiendo secciones transversales. No obstante, los cálculos de la **deflexión** requieren que se **defina la geometría total del eje**, de modo que por lo general un eje se diseña aplicando **consideraciones de esfuerzo** y, luego, se calcula la deflexión una vez que la geometría está totalmente definida. También puede resultar crítica la relación entre las frecuencias naturales del eje (tanto a la flexión como a la torsión) y la frecuencia contenida en las funciones de fuerza y torque-tiempo. Si las funciones de fuerza son cercanas en frecuencia, a las frecuencias naturales del eje, la resonancia podría crear vibraciones, esfuerzos altos y deflexiones grandes.

4.1. Consideraciones generales

Para el diseño de ejes, se consideran algunas reglas prácticas generales como sigue:

- 1) Para minimizar tanto las deflexiones como los esfuerzos, la longitud del eje debe mantenerse tan corta como sea posible y tiene que minimizar los voladizos.
- 2) Una viga en voladizo tiene mayor deflexión que una simplemente soportada con las mismas longitud, carga y sección transversal, por lo que habrá de utilizarse el montaje simplemente apoyado a menos que, por requerimientos de diseño, sea obligatorio el eje en voladizo. (La figura 3-2 muestra una situación donde, por cuestiones prácticas, se requiere una parte del eje en voladizo. La polea del extremo derecho del eje utiliza una correa en V. Si la polea se montara entre los cojinetes, entonces el montaje del eje debería ser desarmado para cambiar una correa, lo cual no es razonable. En tales casos, el eje en voladizo sería el menor de los males.)
- 3) Un eje hueco tiene una mejor razón rigidez/masa (rigidez específica), así como mayores frecuencias naturales que un eje sólido de rigidez o resistencia comparables, pero será más costoso y de mayor diámetro.
- 4) Si es posible, intente ubicar los concentradores de esfuerzos alejados de las regiones con momentos deflexión altos, luego minimice sus efectos con radios de acuerdo generosos.
- 5) Si la preocupación principal es minimizar la deflexión, entonces el material indicado sería un acero al bajo carbono, puesto que su rigidez es tan alta como la del más costoso de los aceros, mientras un eje diseñado para bajas deflexiones suele tener bajos esfuerzos.
- 6) Las deflexiones en los engranes transportados sobre el eje no deberían exceder 0.005 in aproximadamente, en tanto que la pendiente relativa entre los ejes de los engranes debería ser menor de 0.03° , aproximadamente.
- 7) Si se emplean cojinetes deslizantes, la deflexión del eje a través de la longitud del cojinete debe ser menor que el espesor de la película de aceite en el cojinete.
- 8) Si se utilizan rodamientos rígidos, la pendiente del eje en el rodamiento deberá mantenerse por debajo de 0.04° , aproximadamente.
- 9) Si hay cargas de empuje axial, deberán transferirse a tierra a través de un solo cojinete de empuje por cada dirección de carga. No divida las cargas axiales entre varios cojinetes de empuje, ya que la expansión térmica sobre el eje puede sobrecargar dichos cojinetes.

5. Estrategia para desarrollar el diseño de un eje (por esfuerzos de fatiga)

Los problemas de diseño de un árbol pueden ser resueltos de distintas formas, dependiendo principalmente de que datos de entrada tenemos; pero **siempre** para un árbol la verificación se realiza con un **cálculo de fatiga**, aplicando toda la teoría desarrollada en el modulo 1 de esta materia. La definición del material debe hacerse al inicio, y en caso de no verificar el **cálculo por resistencia**, se puede considerar la elección de un acero de **mayor calidad, aumentar las dimensiones**

geométricas, y/o **mejorar el diseño** disminuyendo las concentraciones de esfuerzo; y en caso de no verificar por razones de **deflexión**, la solución a ese problema será un **aumento en las dimensiones geométricas**. Al igual que en otros elementos de maquinas, las cargas y la velocidad son datos de entrada que no pueden variarse, ya que son inherentes a la naturaleza de la maquina donde se aplican.

En primer caso mencionaremos la situación más compleja, que es cuando no contamos con el diámetro del eje. En esta situación de deben hacer ciertas suposiciones, calcular un diámetro; y finalmente rehacer todo el cálculo verificando el factor de seguridad.

El segundo caso, es cuando ya tenemos completamente definida la geometría, lo cual resume el cálculo en una verificación, calculando el factor de seguridad del diseño.

Las imágenes 5-1 y 5-2 ilustran ambas situaciones. Las etapas 1, 2 y 3 ya fueron estudiadas en el modulo 1, por lo tanto no se van a desarrollar en este apunte.

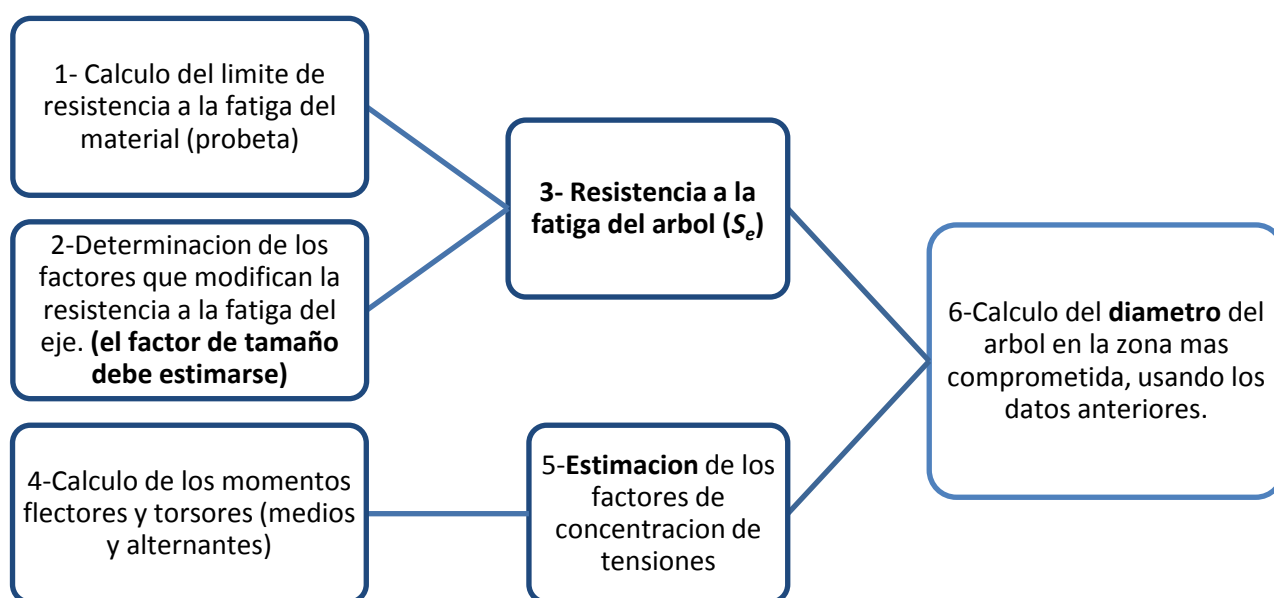


Figura 5-1: etapas de cálculo para cuando no tenemos la geometría definida

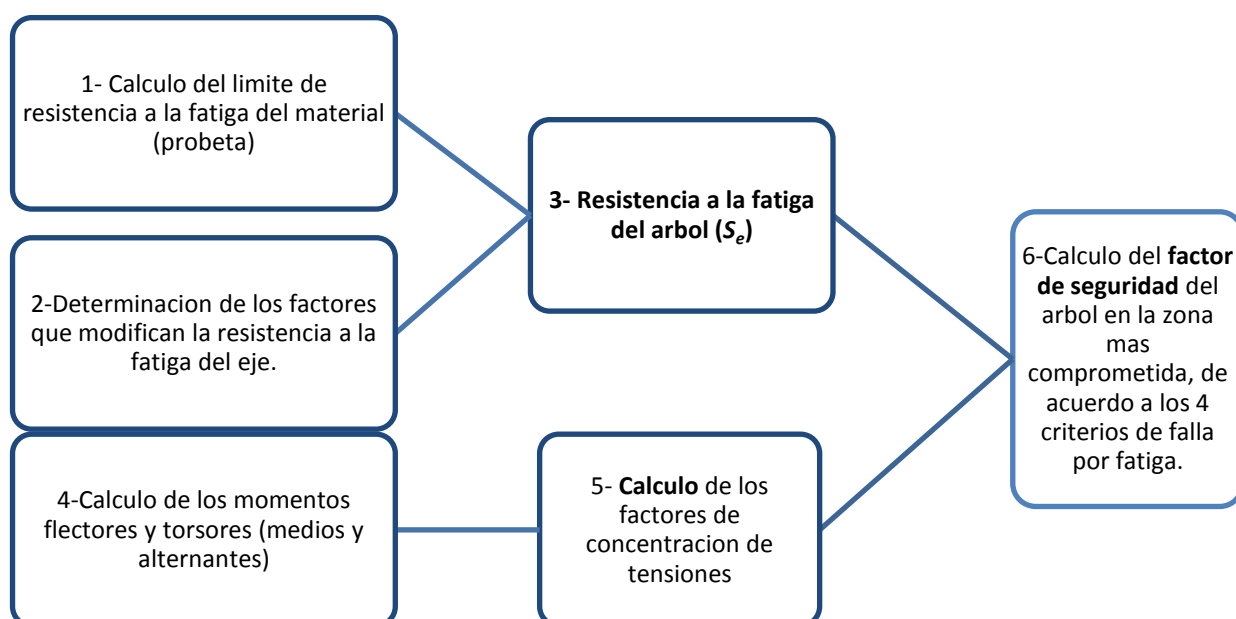


Figura 5-2: etapas de cálculo para cuando tenemos la geometría definida

6. Esfuerzos sobre el árbol

Los esfuerzos de flexión, torsión o axiales pueden estar presentes tanto en componentes medios como en alternantes. Para el análisis, es suficientemente simple combinar los diferentes tipos de esfuerzos en esfuerzos de von Mises alternantes y medios, como se desarrolla en el apunte del módulo 1 – apartado 5-3. Para este caso, se adaptarán las ecuaciones específicamente para aplicaciones de ejes. **En general, las cargas axiales son comparativamente muy pequeñas en ubicaciones críticas donde dominan la flexión y la torsión, por lo que pueden dejarse fuera de las siguientes ecuaciones.** Los **esfuerzos fluctuantes** debidos a la **flexión y la torsión** están dados por:

$$\sigma_a = K_f \cdot \frac{M_a \cdot c}{I} \quad \sigma_m = K_f \cdot \frac{M_m \cdot c}{I} \quad \text{Ecuación 6-1}$$

$$\tau_a = K_{fs} \cdot \frac{T_a \cdot c}{J} \quad \tau_m = K_{fs} \cdot \frac{T_m \cdot c}{J} \quad \text{Ecuación 6-2}$$

donde M_m y M_a son los momentos flexionantes medio y alternante, T_m y T_a son los pares de torsión medio y alternante, y K_f y K_{fs} son los factores de concentración del esfuerzo por fatiga de la flexión y la torsión, respectivamente; c representa la distancia a la fibra más alejada, y I y J son los momentos de inercia a la flexión y polar respectivamente.

Los **momentos flexionantes se determinan mediante la teoría de resistencia de los materiales**, suponiendo una viga estática. El **par torsor**, en el caso de ejes giratorios que transmiten potencia, lo calculamos de la siguiente manera:

$$T = \frac{P}{\omega} \quad \text{Ecuación 6-3}$$

Siendo P la potencia y ω la velocidad angular. Utilizando la potencia en **Watt** y la velocidad angular en **radianes por segundo**, el resultado del torque estará dado en **N/m**.

Aplicando la teoría, si se supone un **eje sólido con sección transversal cilíndrica**, pueden introducirse términos geométricos apropiados para c , I y J , lo que resulta en:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad J = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

Reemplazando en la ecuación 6-1 y 6-2:

$$\sigma_a = K_f \cdot \frac{32 \cdot M_a}{\pi \cdot d^3} \quad \sigma_m = K_f \cdot \frac{32 \cdot M_m}{\pi \cdot d^3} \quad \text{Ecuación 6-4}$$

$$\tau_a = K_{fs} \cdot \frac{16 \cdot T_a}{\pi \cdot d^3} \quad \tau_m = K_{fs} \cdot \frac{16 \cdot T_m}{\pi \cdot d^3} \quad \text{Ecuación 6-5}$$

Recordando que la teoría de Von Misses indica que:

$$\sigma_{combinado} = \sqrt{[\sigma]^2 + 3 \cdot [\tau]^2} \quad \text{Ecuación 6-6}$$

Reemplazamos los términos de las ecuaciones 6-4 y 6-5 en ecuación 6-6, para obtener los **esfuerzos combinados medios y alternantes**, despreciando las cargas axiales, para ejes giratorios redondos y macizos:

$$\sigma'_a = \sqrt{\left[K_f \cdot \frac{32 \cdot M_a}{\pi \cdot d^3}\right]^2 + 3 \cdot \left[K_{fs} \cdot \frac{16 \cdot T_a}{\pi \cdot d^3}\right]^2} \quad \text{Ecuación 6-7}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\left[K_f \cdot \frac{32 \cdot M_m}{\pi \cdot d^3}\right]^2 + 3 \cdot \left[K_{fs} \cdot \frac{16 \cdot T_m}{\pi \cdot d^3}\right]^2} \quad \text{Ecuación 6-8}$$

Estos **esfuerzos medios y alternantes combinados** pueden evaluarse usando cualquier criterio de falla estudiado en el módulo de fatiga. Por ejemplo, el criterio de falla por fatiga de la línea de Goodman tal como se expresó antes en el apunte del módulo 1 en la tabla 4:

$$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n_{go}}$$

Ecuación 6-9

Reemplazamos los términos de las ecuaciones 6-7 y 6-8 en ecuación 6-9, podemos calcular el factor de seguridad de acuerdo a Goodman para ejes giratorios redondos y macizos.

$$\frac{1}{n_{go}} = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{S_e} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_a]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_a]^2} \right) + \left(\frac{1}{S_{ut}} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_m]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_m]^2} \right) \right\}$$

**Ecuación 6-10
Goodman**

2016

Para propósitos de diseño, también es deseable resolver la ecuación para el diámetro. Esto resulta en

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot n_{go}}{\pi} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{S_e} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_a]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_a]^2} \right) + \left(\frac{1}{S_{ut}} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_m]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_m]^2} \right) \right\}}$$

**Ecuación 6-11
Goodman**

A continuación, se expresan las formulas de factor de seguridad y diámetro para los otros criterios de falla por fatiga. Observar con atención porque en algunos casos las diferencias son muy sutiles.

$$\frac{1}{n_{so}} = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{S_e} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_a]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_a]^2} \right) + \left(\frac{1}{S_y} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_m]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_m]^2} \right) \right\}$$

**Ecuación 6-12
Soderberg**

2016

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot n_{so}}{\pi} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{S_e} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_a]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_a]^2} \right) + \left(\frac{1}{S_y} \cdot \sqrt{4 \cdot [K_f \cdot M_m]^2 + 3 \cdot [K_{fs} \cdot T_m]^2} \right) \right\}}$$

**Ecuación 6-13
Soderberg**

$$\frac{1}{n_{as}} = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{4 \cdot \left(\frac{K_f \cdot M_a}{S_e} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{K_{fs} \cdot T_a}{S_e} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{K_f \cdot M_m}{S_y} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{K_{fs} \cdot T_m}{S_y} \right)^2}$$

**Ecuación 6-14
ASME elíptica**

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot n_{as}}{\pi} \cdot \sqrt{4 \cdot \left(\frac{K_f \cdot M_a}{S_e} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{K_{fs} \cdot T_a}{S_e} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{K_f \cdot M_m}{S_y} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{K_{fs} \cdot T_m}{S_y} \right)^2}}$$

**Ecuación 6-15
ASME elíptica**

$$\frac{1}{n_{ge}} = \frac{8 \cdot A}{\pi \cdot d^3 \cdot S_e} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot B \cdot S_e}{A \cdot S_{ut}} \right)^2} \right\}$$

**Ecuación 6-16
Gerber**

$$d = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot A \cdot n_{ge}}{\pi \cdot S_e} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot B \cdot S_e}{A \cdot S_{ut}} \right)^2} \right\}}$$

**Ecuación 6-17
Gerber**

Donde:

$$A = \sqrt{4 \cdot (K_f \cdot M_a)^2 + 3 \cdot (K_{fs} \cdot T_a)^2}$$

$$B = \sqrt{4 \cdot (K_f \cdot M_m)^2 + 3 \cdot (K_{fs} \cdot T_m)^2}$$

En el caso de un eje giratorio con flexión y torsión constantes, el esfuerzo flexionante es completamente reversible y la torsión es constante. Las ecuaciones de la 6-10 a la 6-17 pueden simplificarse al igualar M_m y T_a a 0, lo cual simplemente elimina algunos de los términos.

Observe que en una situación de análisis en la que se conoce el diámetro y se desea encontrar el factor de seguridad, como una alternativa al uso de las ecuaciones especializadas anteriores, siempre es válido calcular los esfuerzos alternantes y medios mediante las ecuaciones 6-7 y 6-8, y sustituirlos en una de las ecuaciones del criterio de falla, las ecuaciones de la tabla 4 del apunte del módulo 1 Fatiga, y despejar n de manera directa. Sin embargo, en una situación de diseño resulta bastante útil resolver con anterioridad las ecuaciones de diámetro.

Siempre es necesario considerar la posibilidad de falla estática en el primer ciclo de falla. El criterio de Soderberg evita de manera inherente la fluencia, como puede observarse en su curva de falla que se mantiene conservadoramente dentro de la línea de fluencia (Langer) en la figura 6-1. El criterio ASME elíptico también toma en cuenta la fluencia, pero no es completamente conservador a lo largo de todo su rango. Esto es evidente al observar que cruza la línea de fluencia. Los criterios de Gerber y Goodman no protegen contra la fluencia, por lo que requieren una verificación adicional de este aspecto.

Para tal propósito, se calcula el **esfuerzo máximo de von Mises**:

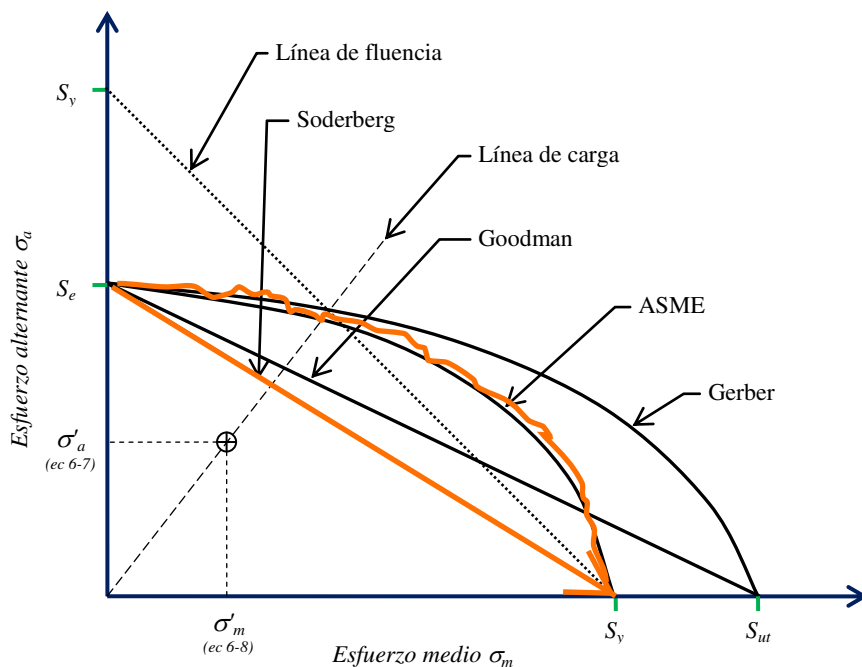


Figura 6-1

$$\sigma'_{max} = \sqrt{[\sigma_m + \sigma_a]^2 + 3 \cdot [\tau_m + \tau_a]^2}$$

Ecuación 6-18

Reemplazando las ecuaciones 6-4 y 6-5 en ecuación 6-18:

$$\sigma'_{max} = \sqrt{\left[32 \cdot K_f \cdot \frac{(M_m + M_a)}{\pi \cdot d^3}\right]^2 + 3 \cdot \left[16 \cdot K_{fs} \cdot \frac{(T_m + T_a)}{\pi \cdot d^3}\right]^2}$$

Ecuación 6-19

Finalmente podemos calcular el factor de seguridad contra la falla por fluencia:

$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_{max}}$$

Ecuación 6-20

6.1. Estimación de concentraciones de esfuerzo

El proceso de análisis del esfuerzo de la fatiga depende en gran medida de las concentraciones del esfuerzo. En el caso de los **hombros** y los **chaveteros**, las concentraciones del esfuerzo dependen de las especificaciones de tamaño que no se conocen en el primer paso del proceso. Por fortuna, como casi siempre estos elementos tienen proporciones estándar, **es posible estimar los factores de concentración del esfuerzo para la determinación inicial del diámetro del eje**. Estas concentraciones del esfuerzo se afinarán en iteraciones sucesivas, una vez que se conozcan los detalles.

Los **hombros** para el apoyo de rodamientos y engranes deben obedecer la recomendación de catálogo para el rodamiento o engrane específico. Una mirada a los catálogos de rodamientos muestra que un rodamiento típico necesita que la **relación D/d esté entre 1.2 y 1.5**. Para una primera aproximación, puede suponerse el peor de los casos con 1.5. De manera similar, el radio del filete del hombro debe dimensionarse para evitar la interferencia con el radio del filete del componente correspondiente. Existe una variación significativa entre los rodamientos típicos en la relación del radio del filete con el diámetro de perforación, donde r/d tiene valores típicos que van de alrededor de 0.02 a 0.06. Una mirada rápida a los

diagramas de concentración del esfuerzo (figuras G-2 y G-3 del anexo 2) muestra que las concentraciones del esfuerzo de la flexión y la torsión se incrementan de manera significativa en este intervalo. Por ejemplo, con $D/d = 1.5$ para la flexión, $K_t = 2.7$ en $r/d = 0.02$, y se reduce a $K_t = 2.1$ en $r/d = 0.05$, y aún más abajo $K_t = 1.7$ en $r/d = 0.1$. Esto indica que ésta es un área donde la atención a los detalles puede crear una diferencia significativa. Por fortuna, en la mayoría de los casos los diagramas de momento cortante y flexionante muestran que los momentos flexionantes son bastante bajos cerca de los cojinetes, puesto que los momentos flexionantes de las fuerzas de reacción en el suelo son pequeños.

En los casos donde el hombro del rodamiento resulta crítico, el diseñador debe planear la selección de un rodamiento con un radio de filete generoso, o considerar la utilización de un radio de filete más grande sobre el eje al rebajarlo en la base del hombro como se muestra en la figura 6-2a.

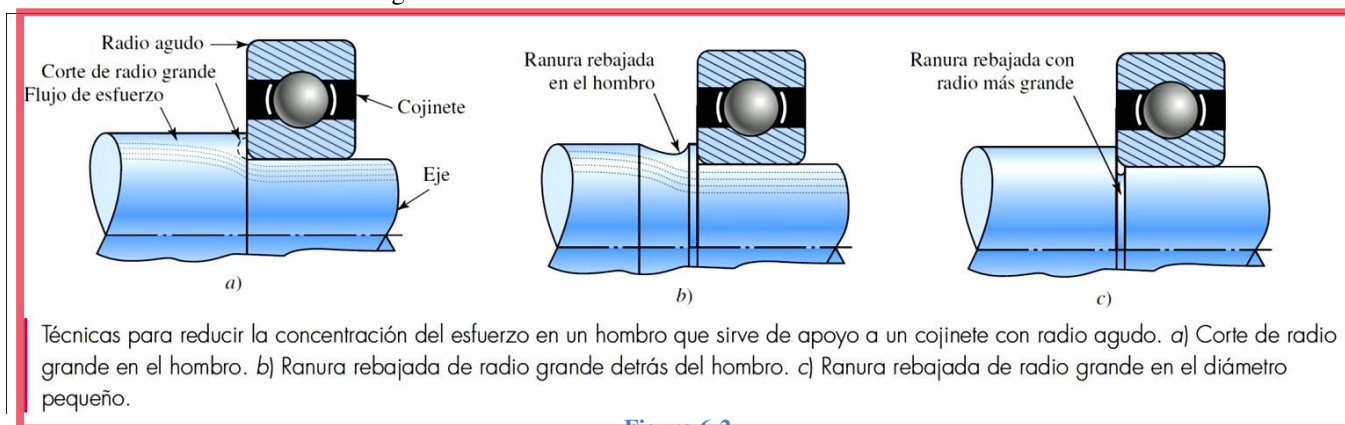


Figura 6-2

Esto crea de manera efectiva una zona muerta en el área del hombro que no está sometida a los esfuerzos de flexión, como lo muestran las líneas de flujo del esfuerzo. Una ranura rebajada en el hombro, como la que se muestra en la figura 6-2b, puede satisfacer un propósito similar. Otra opción consiste en cortar una ranura rebajada de radio grande en el diámetro pequeño del eje, como se muestra en la figura 6-2c. Esto tiene la desventaja de reducir el área de la sección transversal, pero a menudo se usa en casos donde es útil proporcionar una ranura rebajada antes del hombro para evitar que la operación de esmerilado o torneado tenga que realizarse a lo largo de todo el hombro.

En el caso del **filete hombro estándar**, para estimar los valores K_t en la primera iteración, debe seleccionarse una relación r/d de manera que puedan obtenerse los valores de K_t . Para el peor extremo del espectro, con $r/d = 0.02$ y $D/d = 1.5$, los valores de K_t a partir de los diagramas de concentración del esfuerzo en hombros indican 2.7 para la flexión, 2.2 para la torsión y 3.0 para el esfuerzo axial.

Un **chavetero** producirá una concentración del esfuerzo cercana al punto crítico donde se localiza el componente que transmite carga. La concentración del esfuerzo en un chavetero fresado es una función de la relación del radio r en la parte baja de la ranura y el diámetro del eje d . Para las primeras etapas del proceso de diseño, es posible estimar la concentración del esfuerzo en los chaveteros sin importar las dimensiones reales del eje, suponiendo una relación típica de $r/d = 0.02$. Esto da $K_t = 2.2$ para la flexión y $K_{ts} = 3.0$ para la torsión, si se considera que la cuña está en su lugar.

En las figuras A-15-16 y A-15-17 del anexo 2 se dan los valores de las concentraciones del esfuerzo en **ranuras con base plana** como las que se emplean en los anillos de retención. Cuando se examinan las especificaciones típicas de los anillos de retención en los catálogos de los vendedores, se puede ver que normalmente el grosor de la ranura es un poco más grande que su profundidad, y que el radio en la parte baja de la ranura es de alrededor de 1/10 de su grosor. De las figuras A-15-16 y A-15-17, los factores de concentración del esfuerzo para las dimensiones típicas de los anillos de retención, son de alrededor de 5 para el esfuerzo de flexión y axial, y de 3 para la torsión. Por fortuna, un radio pequeño casi siempre conducirá a una menor sensibilidad a la muesca, lo que reduce K_t .

En la tabla 6-1 se resumen algunos factores de la concentración del esfuerzo típicos de la primera iteración en el diseño de un eje, es decir, **para cuando no conocemos el diámetro del eje**. Se pueden hacer estimaciones similares para otras características. El punto es darse cuenta de que las concentraciones del esfuerzo se normalizan esencialmente, de manera que dependen de relaciones entre características geométricas, no de dimensiones específicas. En consecuencia, al estimar las relaciones apropiadas, pueden obtenerse los valores de la primera iteración de las concentraciones del esfuerzo. Estos valores pueden usarse para el diseño inicial y después insertar los valores reales una vez que los diámetros hayan sido determinados.

	FLEXION	TORSION	AXIAL
Filete de hombro: agudo ($r/d=0,02$)	2,7	2,2	3,0
Filete de hombro: bien redondeado ($r/d = 0,1$)	1,7	1,5	1,9
Chavetero fresado ($r/d=0,02$)	2,2	3,0	---
Chavetero de patin o trapezoidal	1,7	---	---
Ranura para anillo de retención	5,0	3,0	5,0

Tabla 6-1: Estimaciones de primera iteración de los factores de concentración del esfuerzo K_t .

Advertencia: Estos factores sólo son estimaciones que pueden usarse cuando las dimensiones reales aún no se determinan. No utilice estos valores cuando ya se cuente con las dimensiones reales. (fuente: Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 7th ed)

Como se definió en el punto 5.2 del módulo 1 Fatiga de Materiales, el factor K_t y K_{ts} deben ser reducidos por los factores de sensibilidad a la muesca q y $q_{cortante}$. Estos últimos factores dependen directamente del radio de la muesca y del material con el cual se fabrica la pieza a estudiar. Debido a que en este planteo la geometría no es conocida, **adoptaremos de forma conservadora que el material tiene sensibilidad total a la muesca**. Esto significa que:

$$q = 1 \quad q_{cortante} = 1$$

Por lo tanto, **para realizar el predimensionamiento**, asumimos para los factores de concentración de tensiones a la fatiga que:

$$K_f = K_t \quad \text{Ecuación 6-21}$$

$$K_{fs} = K_{ts} \quad \text{Ecuación 6-22}$$

7. Componentes diversos de los ejes

7.1. Chavetas y pasadores

Las **chavetas** (también llamadas cuñas) y los **pasadores** se utilizan sobre ejes para fijar elementos rotatorios, como engranes, poleas o ruedas. Las chavetas se emplean para permitir la transmisión del par de torsión del eje al elemento que soporta. Los pasadores se usan para posicionar axialmente y para transferir el par de torsión o empuje, o ambos. En la figura 7-1 se muestra una variedad de cuñas y pasadores. Los pasadores resultan útiles cuando la carga principal es cortante y cuando existen rotación o torsión y empuje. Los pasadores ahusados se dimensionan de acuerdo con su diámetro del extremo mayor.

a) Cuña cuadrada; b) cuña redonda; c) y d) pasadores redondos; e) pasador ahusado; f) pasador elástico tubular hendido. Los pasadores e) y f) se muestran más largos de lo normal para ilustrar el biselado en los extremos; sus longitudes se deben mantener menores que los diámetros de las mazas para prevenir lesiones debidas a los salientes en partes rotatorias.

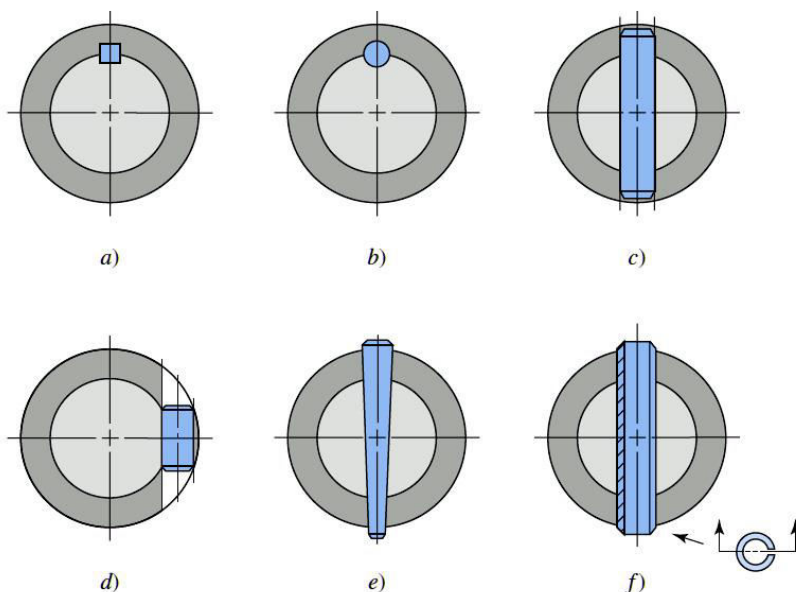


Figura 7-1: distintos diseños de cuñas y pasadores

La ASME define una **chaveta** como una pieza de maquinaria desmontable que, cuando se ensambla en los chaveteros, brinda un medio positivo de transmisión del torque entre el eje y la maza. Tanto el tamaño como la forma de las chavetas fueron estandarizados de varias maneras (Los estándares ANSI B17.1-1967, Keys and Keyseats, y B17.2-1967, Woodruff Keys and Keyseats). Una **chaveta paralela** tiene sección transversal cuadrada o rectangular con altura y ancho

constantes a lo largo de su longitud. (Véase la figura 7-2a.) Una **chaveta cónica** es de ancho constante, pero su altura varía como un cono lineal de 1/8 in por pie, y se introduce en una ranura cónica en la masa hasta que se bloquea. Puede tener o no una cabeza de cuña para facilitar su remoción. (Véase la figura 7-2b.) Una **chaveta Woodruff** es semicircular de ancho plano y constante. Se ajusta en un chavetero semicircular maquinado en el eje con un cortador circular estándar. (Véase la figura 7-2c.)

La **chaveta cónica** sirve para fijar axialmente la masa sobre el eje, pero las **chavetas paralelas** o las **Woodruff** requieren, además, de algún otro medio de **fijación axial**. Algunas veces se utilizan anillos de retención o collarines para este propósito.

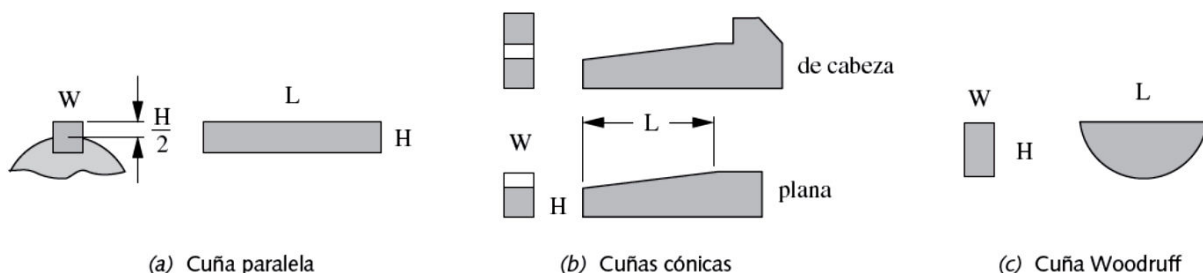


Figura 7-2: Diversos estilos de chavetas

Las **chavetas paralelas** son las que se usan más comúnmente. Los estándares ANSI e ISO definen tamaños particulares de secciones transversales de chavetas y profundidades de chaveteros, como una función del diámetro del eje en el asiento de la chaveta. En la tabla 7-1 se presenta una parte de dicha información para el intervalo menor de diámetros del eje. Para tamaños de ejes mayores, consulte los estándares respectivos. Las chavetas cuadradas se recomiendan para ejes de hasta 6.5 in de diámetro (US), o 25 mm de diámetro (ISO), y las chavetas rectangulares para diámetros más grandes. La chaveta paralela se coloca con la mitad de su altura en el eje y la otra mitad en la maza, como se indica en la figura 7-1a.

La longitud de la chaveta tiene que ser aproximadamente 1.5 veces menor que el diámetro del eje para evitar un giro excesivo por la deflexión del eje. Si se necesita mayor resistencia, se deberían usar dos chavetas, orientadas a 90° y 180°, por ejemplo.

El ancho de una **chaveta cónica** para un diámetro determinado de eje es el mismo que para una chaveta paralela, como se indica en la tabla 7-1. El tamaño del cono y de la cabeza los define el estándar. El cono es de bloqueo, lo cual significa que la fuerza de fricción entre las superficies mantiene la chaveta **axialmente** en su lugar. La cabeza de la cuña es opcional y brinda una superficie para tirar con fuerza de la cuña hacia fuera cuando el extremo no es accesible. Las chavetas cónicas tienden a crear excentricidad entre la maza y el eje, porque la tolerancia radial total se corre hacia un lado.

Diámetro del eje (in)	Ancho nominal de la cuña (in)	Diámetro del tornillo prisionero (in)	Diámetro del eje (mm)	Ancho x alto de la cuña (mm)
0.312 < d ≤ 0.437	0.093	#10	8 < d ≤ 10	3 x 3
0.437 < d ≤ 0.562	0.125	#10	10 < d ≤ 12	4 x 4
0.562 < d ≤ 0.875	0.187	0.250	12 < d ≤ 17	5 x 5
0.875 < d ≤ 1.250	0.250	0.312	17 < d ≤ 22	6 x 6
1.250 < d ≤ 1.375	0.312	0.375	22 < d ≤ 30	8 x 7
1.375 < d ≤ 1.750	0.375	0.375	30 < d ≤ 38	10 x 8
1.750 < d ≤ 2.250	0.500	0.500	38 < d ≤ 44	12 x 8
2.250 < d ≤ 2.750	0.625	0.500	44 < d ≤ 50	14 x 9
2.750 < d ≤ 3.250	0.750	0.625	50 < d ≤ 58	16 x 10
3.250 < d ≤ 3.750	0.875	0.750	58 < d ≤ 65	18 x 11
3.750 < d ≤ 4.500	1.000	0.750	65 < d ≤ 75	20 x 12
4.500 < d ≤ 5.500	1.250	0.875	75 < d ≤ 85	22 x 14
5.500 < d ≤ 6.500	1.500	1.000	85 < d ≤ 95	25 x 14

Tabla 7-1: Tamaños de chavetas estándar y de tornillos prisioneros en medidas estadounidenses y métricas para ejes

Las **chavetas Woodruff** se usan en ejes más pequeños y son autoalineables, de modo que se prefieren en lugar de las cónicas. La penetración de una cuña Woodruff en la maza es la misma que en la de una cuña cuadrada, es decir, la mitad del ancho de la cuña. La forma semicircular crea un chavetero más profundo en el eje, el cual se resiste al rodamiento de la cuña, pero debilita el eje en comparación con el chavetero de una cuña cuadrada o cónica. Son de uso general, y se aplican

especialmente cuando se debe posicionar una rueda contra un hombro de un eje, puesto que la guía ranurada no necesita maquinarse en la región de concentración de esfuerzo en el hombro. El uso de este tipo de chaveta también produce una mejor concentricidad después del ensamble de la rueda y su eje, lo cual resulta especialmente importante a velocidades elevadas, como por ejemplo, con un rodete de turbina y su eje.

En la tabla 7-3 se dan las dimensiones de algunos tamaños estándar de chavetas Woodruff y en la 7-2 se proporcionan los diámetros de los ejes para los que son apropiados los distintos anchos de chavetero.

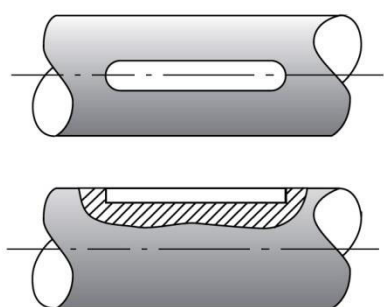
Tamaño de la cuña	Altura	Corrimiento	Profundidad de la ranura	Eje	Maza
w	D	b	e		
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0.109	$\frac{1}{64}$	0.0728	0.0372
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	0.172	$\frac{1}{64}$	0.1358	0.0372
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	0.172	$\frac{1}{64}$	0.1202	0.0529
$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{2}$	0.203	$\frac{3}{64}$	0.1511	0.0529
$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{8}$	0.250	$\frac{1}{16}$	0.1981	0.0529
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0.203	$\frac{3}{64}$	0.1355	0.0685
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0.250	$\frac{1}{16}$	0.1825	0.0685
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0.313	$\frac{1}{16}$	0.2455	0.0685
$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{8}$	0.250	$\frac{1}{16}$	0.1669	0.0841
$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{4}$	0.313	$\frac{1}{16}$	0.2299	0.0841
$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{8}$	0.375	$\frac{1}{16}$	0.2919	0.0841
$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$	0.313	$\frac{1}{16}$	0.2143	0.0997
$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	0.375	$\frac{1}{16}$	0.2763	0.0997
$\frac{3}{16}$	1	0.438	$\frac{1}{16}$	0.3393	0.0997
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	0.375	$\frac{1}{16}$	0.2450	0.1310
$\frac{1}{4}$	1	0.438	$\frac{1}{16}$	0.3080	0.1310
$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$	0.547	$\frac{5}{64}$	0.4170	0.1310
$\frac{5}{16}$	1	0.438	$\frac{1}{16}$	0.2768	0.1622
$\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{4}$	0.547	$\frac{5}{64}$	0.3858	0.1622
$\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{2}$	0.641	$\frac{7}{64}$	0.4798	0.1622
$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{4}$	0.547	$\frac{5}{64}$	0.3545	0.1935
$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	0.641	$\frac{7}{64}$	0.4485	0.1935

Tabla 7-3: tamaños de chavetas Woodruff

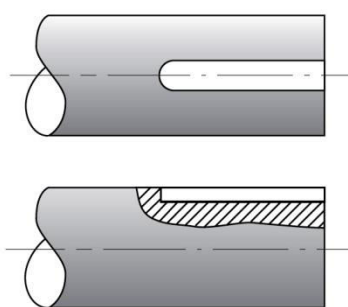
Ancho de la ranura, pulg	Diámetro del eje, pulg	De	Hasta (inclusive)
$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	
$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	
$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	2	
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	$2\frac{1}{4}$	
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{8}$	
$\frac{3}{8}$	1	$2\frac{5}{8}$	

Tabla 7-2

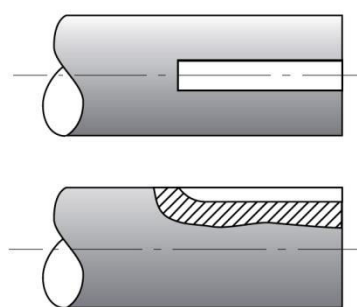
Como las cuñas tienen esquinas relativamente afiladas (< 0.5 mm de radio), los chaveteros también las tienen. Esto causa concentraciones de esfuerzos significativas. El chavetero está escariado en la maza y corre a lo largo de su longitud, pero el eje se debe fresar en uno o en los dos extremos. Si se fresa un extremo, el chavetero lucirá como el de la figura 7-3a y tendrá esquinas afiladas en el lado que mira a uno o a ambos extremos, así como a lo largo de cada lado. Si en cambio se corta un chavetero con corredor deslizante, como se muestra en la figura 7-3c, se elimina la esquina puntiaguda en el extremo y se reduce la concentración de esfuerzos. El asiento de un chavetero Woodruff sobre el eje también tiene un radio grande en el lado que mira, pero padece (como todos los asientos de chavetero) de esquinas afiladas en los lados. Peterson obtuvo experimentalmente las curvas derivadas de la concentración de esfuerzos en asientos de chavetas, con extremo fresado en ejes bajo cargas de flexión o de torsión. Éstas se reproducen en la figura 6-16 del anexo 2. Tales factores se encuentran entre 2 y 4 aproximadamente, y dependen de la razón entre el radio de la esquina y el diámetro del eje.



(a) Cuñero con extremo fresado con dos extremos



(b) Cuñero con extremo fresado con un extremo



(c) Cuñero de corredera deslizante con un extremo

Figura 7-3: Distintos diseños de chaveteros

7.2. Anillos de retención

Con frecuencia se emplea un **anillo de retención**, en lugar de un hombro de eje o un manguito, **para posicionar axialmente un componente sobre un eje o en un agujero de alojamiento**. Como se ve en la figura 7-4, se corta una ranura en el eje o en el agujero de alojamiento para hacer que penetre el retenedor de resorte. Para determinar los tamaños, dimensiones y capacidades, se deben consultar los catálogos de los fabricantes.

En las tablas A-15-16 y A-15-17 del apéndice 2 se dan los valores de los factores de concentración del esfuerzo para ranuras con fondo plano en ejes, apropiados para anillos de retención. A fin de que los anillos se asienten adecuadamente en el fondo de la ranura, y soporten las cargas axiales que se ejercen en contra de los lados de la ranura, el radio del fondo de la ranura debe ser razonablemente agudo, usualmente, alrededor de un décimo del ancho de la ranura. Esto es causa, comparativamente, de valores altos de los factores de concentración del esfuerzo, alrededor de 5 para el esfuerzo de flexión y axial y 3 para la torsión. Debe tenerse cuidado al usar anillos de retención, en particular en ubicaciones con esfuerzos de flexión altos.

Las dimensiones de los anillos de retención están dados en la norma DIN 471 (anillos para ejes) y DIN 472 (anillos para agujeros).

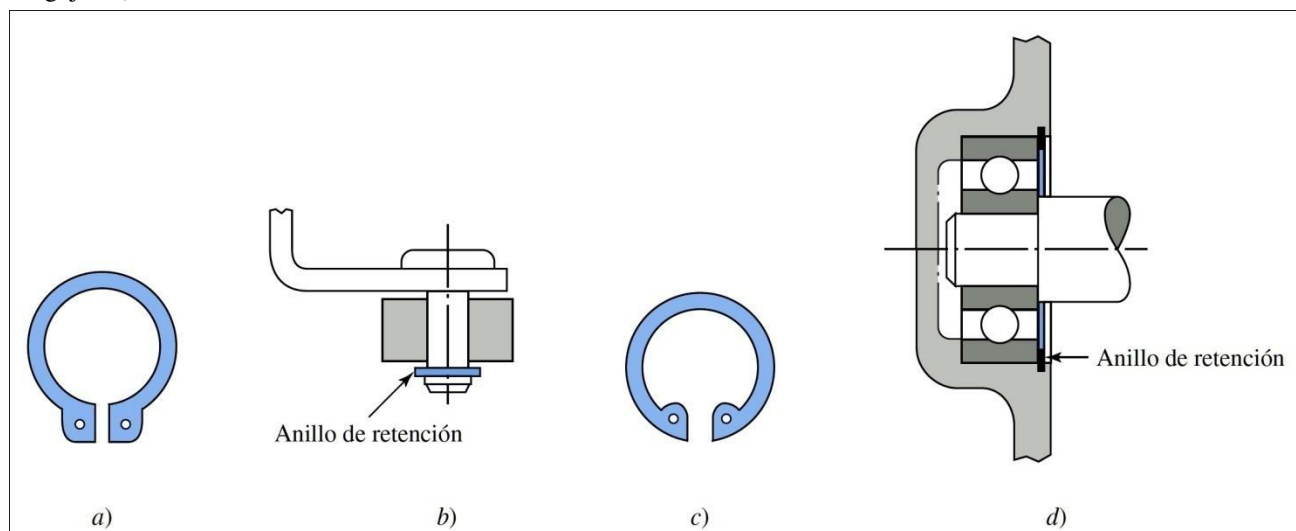


Figura 7-4: Usos comunes de los anillos de retención: a) anillo externo y b) su aplicación; c) anillo interno y d) su aplicación.

7.3. Tornillos de fijación

A diferencia de los pernos y de los tornillos de cabeza que dependen de la tensión para desarrollar una fuerza de sujeción, los tornillos de fijación se basan en la compresión para desarrollar tal fuerza. La resistencia al movimiento axial de un collarín o de una masa con relación al eje se llama capacidad de sujeción. Dicha capacidad de sujeción, que en realidad es una fuerza de resistencia, se debe a la resistencia de fricción de las partes en contacto del collarín y del eje, así como a cualquier penetración ligera del tornillo de fijación en el eje.

En la figura 7-5 se presentan los tipos de punta disponibles con los tornillos de fijación de cabeza hueca, los cuales también se fabrican con ranuras para desarmador y con cabeza cuadrada.

En la tabla 7-4 se listan los valores del par de torsión de asentamiento y la capacidad de sujeción correspondiente para tornillos de sujeción de series de pulgada. Los valores indicados se aplican tanto a la capacidad de sujeción axial, para resistir el empuje, así como la capacidad de sujeción tangencial, para resistir la torsión. Los factores usuales de seguridad son de 1.5 a 2.0 para cargas estáticas y de 4 a 8 para cargas dinámicas diversas.

Los tornillos de sujeción deben tener una longitud de casi la mitad del diámetro del eje. Observe que la recomendación también proporciona una regla aproximada para el espesor radial de una masa o de un collarín.

Tamaño, pulg.	Par de torsión del asiento, lbf · pulg.	Potencia de sujeción, lbf
#0	1.0	50
#1	1.8	65
#2	1.8	85
#3	5	120
#4	5	160
#5	10	200
#6	10	250
#8	20	385
#10	36	540
$\frac{1}{4}$	87	1 000
$\frac{5}{16}$	165	1 500
$\frac{3}{8}$	290	2 000
$\frac{7}{16}$	430	2 500
$\frac{1}{2}$	620	3 000
$\frac{9}{16}$	620	3 500
$\frac{5}{8}$	1 325	4 000
$\frac{3}{4}$	2 400	5 000
$\frac{7}{8}$	5 200	6 000
1	7 200	7 000

*Con base en un tornillo de acero aleado contra un eje de acero, de rosca gruesa o fina clase 3A en agujeros clase 2B y tornillos de presión de punta ahuecada y cabeza hueca.

Tabla 7-4: Potencia (fuerza) de sujeción típica de tornillos de presión de cabeza hueca.

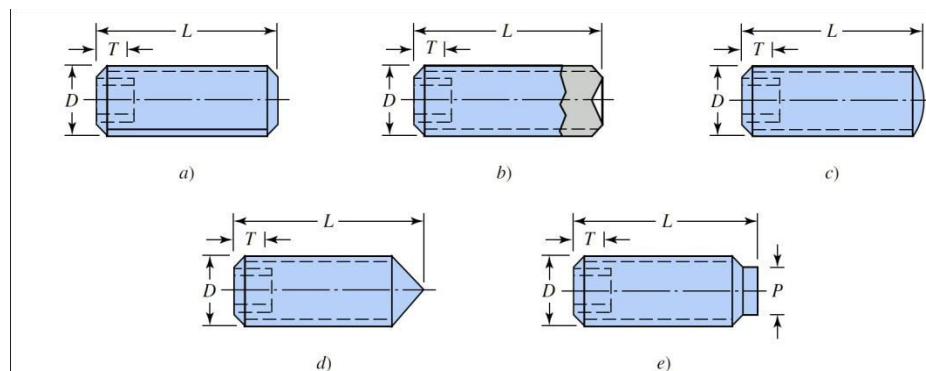


Figura 7-5: Tornillos de sujeción de cabeza hueca: a) punta plana; b) punta ahuecada; c) punta ovalada; d) punta cónica; e) punta de macho corto.

7.4. Ranuras

Cuando se debe transmitir más torque del que se maneja con cuñas, es posible utilizar en su lugar ranuras. Las ranuras son esencialmente “cuñas integradas” que bordean el exterior del eje y el interior de la maza con formas dentadas. Las primeras ranuras tenían dientes de sección transversal cuadrada; sin embargo, más adelante se sustituyeron con dientes en forma de involuta, como se ilustra en la figura 7-6. El diente en forma de involuta se emplea universalmente en engranes, y se usa la misma tecnología de corte para fabricar ranuras. Además de sus ventajas de manufactura, el diente de involuta tiene menos concentración de esfuerzos que un diente cuadrado y es más fuerte. La SAE define estándares tanto para dientes de ranuras de forma cuadrada como para dientes con forma de involuta, mientras la ANSI publica estándares para ranuras de involuta.

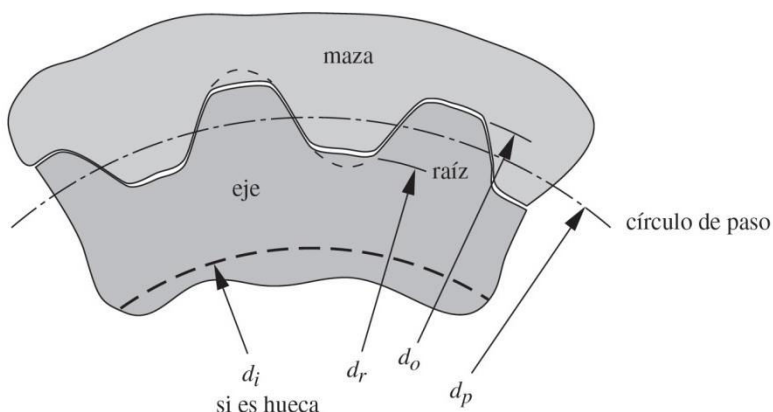


Figura 7-6: Geometría de un eje ranurado y la maza

Algunas **ventajas** de las ranuras son la **resistencia máxima en la raíz del diente**, la **precisión** en la forma del diente debido al uso de cortadores estándar y el buen acabado de maquinado superficial por el proceso estándar de corte de engranes (cortado), lo cual elimina el esmerilado. La mayor ventaja de las ranuras sobre las chavetas es su capacidad (con tolerancias adecuadas) para permitir grandes movimientos axiales entre el eje y la maza, al mismo tiempo que transmite torque. Se utilizan para conectar el eje de salida de la transmisión

con el eje impulsor en automóviles y camiones, donde el movimiento de la suspensión causa movimientos

axiales entre los accesorios (union cardanica). También se emplean en el interior de transmisiones asincrónicas manuales de camiones, con la finalidad de acoplar axialmente a sus ejes los engranes de cambios. Asimismo, el torque del motor de gasolina usualmente pasa hacia la transmisión a través de una ranura que conecta el embrague del motor con el eje de entrada de la transmisión y permite el movimiento axial necesario para desacoplar el embrague desde el volante. (para mas informacion referirse a Diseño de Maquinas – Norton– ed. 4th - capítulo 6.11).

7.5. Ajustes con interferencia

Otro medio común para acoplar una maza a un eje consiste en utilizar un ajuste de presión o de contracción, llamado también **ajuste de interferencia**. Un ajuste de presión se obtiene maquinando el orificio de la maza de un diámetro ligeramente más pequeño que el del eje, como se muestra en la figura 7-7. Luego, las dos piezas se fuerzan juntas lentamente a presión, de preferencia aplicando aceite lubricante a la junta. Las deflexiones elásticas, tanto del eje como de la maza, actúan para crear grandes fuerzas normales y de presión entre las piezas. La fuerza de fricción transmite el torque del eje a la maza y resiste el movimiento axial. La Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes (AGMA) publica el estándar AGMA 9003-A91, Flexible Couplings—Keyless Fits, el cual define fórmulas para los cálculos de ajustes de interferencia.

Tan sólo las piezas relativamente pequeñas logran ajustarse a presión, sin excederla capacidad de fuerza de una prensa típica. Para piezas más grandes, se puede hacer un ajuste de contracción calentando la maza con la finalidad de expandir su diámetro interior, y/o un ajuste de expansión enfriando el eje para reducir su diámetro. Las piezas caliente y fría se pueden deslizar juntas con un poco de fuerza axial, pero cuando equilibran su temperatura ambiente, su cambio dimensional provoca la interferencia deseada por el contacto de fricción. Otro método consiste en expandir hidráulicamente la maza con aceite a presión aplicado a través de pasillos en el eje o en la maza. La técnica, además, se utiliza para remover una maza.

La tabla 7-5 resume algunos valores típicos de ajustes con interferencias para uniones. Dicho ajuste se deberá seleccionar en función del torque, del diámetro de la unión y de los materiales de construcción del eje y la maza. (para más información referirse a Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – ed. 8th - capítulo 7-8).

	Aplicaciones	Eje	Toleran. ϕ nom.		Toleran. ϕ nom.		Toleran. ϕ nom.	
			Más de 18 a 30		Más de 30 a 50		Más de 50 a 100	
			Agujero	Eje	Agujero	Eje	Agujero	Eje
AJUSTE ÚNICO H7	Forzado ligero. Montaje con maza de Nylon. Rodamientos.	j6		9 -4		11 -5		12 -7
	Forzado medio. Montaje con martillo de plomo.	k6		15 2		18 2		21 2
	Forzado duro. Montaje con prensa, en frío.	n6		28 15		33 17		39 20
		p6		35 22		42 26		51 32
		r6		41 28		50 34		62 43
		s6		48 35		59 43		78 59
	Forzado muy duro. Calado con diferencia de temperatura.	u8		87 54		109 70		148 102

Tabla 7-5: Ajustes típicos para uniones con interferencia

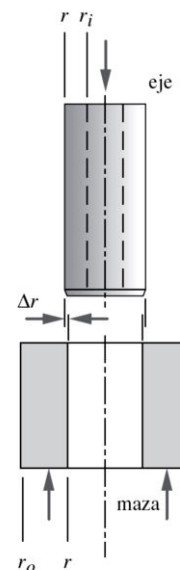


Figura 7-7

8. Consideraciones sobre deformación de ejes

Un **eje** es una **viga** que se **flexiona transversalmente** y también una **barra de torsión** que se **flexiona por torsión**. Es necesario analizar ambos modos de flexión. El análisis de deflexión incluso en un solo punto de interés requiere información completa de la geometría de todo el eje. Por esta razón es deseable diseñar las dimensiones de las ubicaciones críticas para manejar los esfuerzos, y encontrar estimaciones razonables de todas las otras dimensiones, antes de realizar un análisis de deformación. La deflexión del eje, tanto transversal como torsional, debe verificarse en los **engranes y rodamientos**. Las deflexiones permisibles dependerán de muchos factores, y los catálogos de rodamientos y engranes deben usarse como guía para considerar la desalineación permisible para rodamientos y engranes específicos. Como una directriz general, en la tabla 8-1 se presentan los intervalos típicos de las pendientes máximas y deflexiones transversales de la línea de centro del eje. Las deflexiones transversales permisibles de los engranes rectos dependen del tamaño del diente, por lo que están representadas por el paso diametral P = número de dientes/diámetro de paso.

Pendientes	
Rodillo ahusado	0.0005-0.0012 rad
Rodillo cilíndrico	0.0008-0.0012 rad
Bola con ranura profunda	0.001-0.003 rad
Bola esférica	0.026-0.052 rad
Bola autoalineante	0.026-0.052 rad
Engrane recto sin corona	< 0.0005 rad
Deflexiones transversales	
Engranes rectos con $P < 10$ dientes/pulg	0.010 pulg
Engranes rectos con $11 < P < 19$	0.005 pulg
Engranes rectos con $20 < P < 50$	0.003 pulg

8-1: Pendientes y deflexiones de referencia para rodamientos y engranajes

El análisis de deflexiones largo y tedioso para realizarlo de manera manual, en particular cuando se consideran muchos puntos de interés. En consecuencia, prácticamente todos los análisis de deflexión de ejes deben ser evaluados con la ayuda de software.

Cualquier programa de elemento finito de propósito general puede manejar con facilidad un problema de ejes. Este recurso es práctico si el diseñador ya está familiarizado con el uso del software y con la forma de modelar apropiadamente el eje. También existen soluciones de software de propósito general para el análisis de ejes en tres dimensiones, pero es algo caro si sólo se usa de manera ocasional. También existe software que requiere muy poco entrenamiento para el análisis de vigas planas, el cual puede bajarse de internet.

8.1. Ejes como vigas

Los métodos aprendidos en Resistencia de los Materiales para el cálculo de deflexiones en vigas son directamente aplicables. La única complicación es la presencia frecuente en un eje de los escalones que cambian las propiedades de la sección transversal en toda su longitud. La integración de la función M/EI se vuelve mucho más compleja por el hecho de que tanto I como M son ahora funciones de la dimensión a lo largo del eje-viga. En vez de hacer una integración analítica para el caso de I constante, se utilizará una técnica de integración numérica, como la regla de Simpson o la regla trapezoidal, para formar las funciones de pendiente y deflexión a partir de la función M/EI . Si las cargas transversales y los momentos varían con el tiempo, entonces se deben emplear las magnitudes máximas absolutas para calcular las deflexiones. La función de deflexión dependerá de la carga y las condiciones limitantes de la viga, es decir, si es simplemente soportada, en voladizo o suspendida.

8.2. Ejes como barras de torsión

La deflexión angular θ (en radianes) para un eje de longitud l , módulo de rigidez G , momento de inercia polar J , con torque T , es:

$$\theta = \frac{T \cdot l}{G \cdot J} \quad \text{Ecuación 8-1}$$

Si el eje es escalonado, las secciones transversales que cambian complican el cálculo de la deflexión por torsión debido al cambio del momento polar de inercia J . Cualquier grupo de secciones adyacentes con diámetro diferente en el eje se pueden considerar un conjunto de resortes en serie, puesto que sus deflexiones se suman y el torque pasa sin modificación.

Entonces, para un eje escalonado fabricado de material homogéneo, el ángulo de deformación total es:

$$\theta = \frac{T}{G} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{l_i}{J_i} \quad \text{Ecuación 8-2}$$

Se conocen algunos valores máximos de referencia para la deformación por torsión para árboles de máquinas:

Casos ordinarios:	20 min / metro
Cargas variables:	15 min / metro
Cargas bruscamente reversibles:	10 min / metro

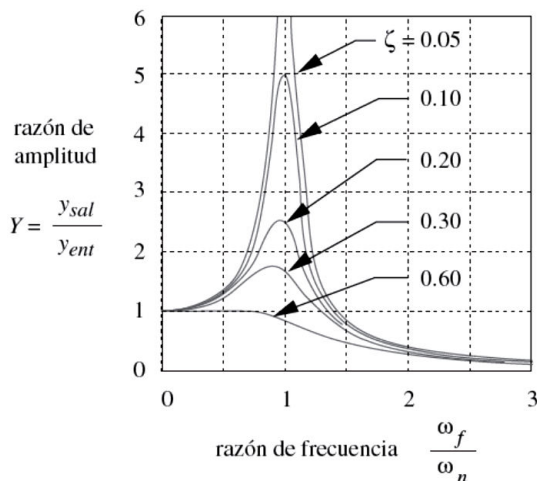
9. Velocidades críticas de árboles

Todos los sistemas que contienen elementos que almacenan energía poseen un conjunto de frecuencias naturales, donde el sistema vibrará con amplitudes potencialmente grandes. Cualquier masa que se mueve almacena energía cinética y cualquier resorte almacena energía potencial. Todos los elementos de máquinas fueron hechos de materiales elásticos; por lo tanto, pueden actuar como resortes. Todos los elementos tienen masa, pero si también tienen velocidad, almacenarán energía cinética. Cuando un sistema dinámico vibra, dentro del sistema ocurre una transferencia repetitiva de energía potencial a energía cinética a energía potencial, etcétera. Los ejes cumplen con este criterio girando a alguna velocidad y flexionándose tanto por torsión como por flexión.

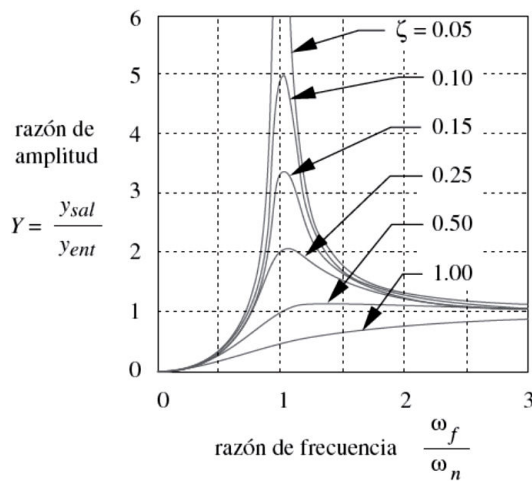
Si un eje, o cualquier elemento relacionado, se somete a una carga que varía con el tiempo, vibrará. Incluso si sólo recibe **carga transitoria**, como un martillazo, vibrará a sus **frecuencias naturales**, justo como una campana cuando se

golpea. Lo anterior se conoce como **vibración libre**. Esta **vibración transitoria o libre** se extingue finalmente debido al amortiguamiento presente en el sistema. Si se mantiene la carga que varía con el tiempo, como por ejemplo de manera senoidal, el eje u otro elemento continuarán vibrando a la **frecuencia forzada** de la función impulsora. Si la **frecuencia forzada** coincide con alguna de las **frecuencias naturales del elemento**, entonces la amplitud de la respuesta vibratoria será mucho mayor que la amplitud de la función impulsora. Se dice entonces que el elemento está en **resonancia**.

La figura 9-1a ilustra la respuesta de amplitud de una vibración forzada, y la figura 9-1b, una vibración autoexcitada, como una función de la razón entre la **frecuencia forzadora** y la **frecuencia natural del sistema** ω_f/ω_n . Cuando esta razón es 1, el sistema está en **resonancia** y la amplitud de la respuesta se aproxima al infinito en ausencia de amortiguamiento. La respuesta de la amplitud en la figura 9.1 se muestra como una razón adimensional de amplitudes de salida a amplitudes de entrada.



(a) Respuesta de vibración forzada externamente



(b) Respuesta de vibración autoexcitada

Figura 9-1: Respuesta de un sistema con un solo grado de libertad a frecuencias forzadas o de autoexcitación variables

Cualquier amortiguamiento, mostrado como una razón de amortiguamiento ξ , reduce la razón de amplitud de resonancia. A la frecuencia natural se le llama también **frecuencia crítica o velocidad crítica**. Se debe evitar la excitación de un sistema a su frecuencia (resonancia) crítica o cerca de ella, ya que las deflexiones resultantes a menudo causarán esfuerzos lo suficientemente grandes como para que la pieza falle rápidamente.

Un criterio de diseño seguro sugiere que la frecuencia o velocidad de trabajo este por encima o por debajo en un 25% de la frecuencia crítica. La figura 9-2 muestra este criterio.

En caso de funcionamiento post crítico, el paso por la zona de velocidad crítica debe realizarse lo más rápido posible, evitando que las amplitudes se tornen peligrosas. El motor o máquina motriz debe poseer una reserva de cupla suficiente para que exista poder de aceleración y se supere la zona riesgosa.

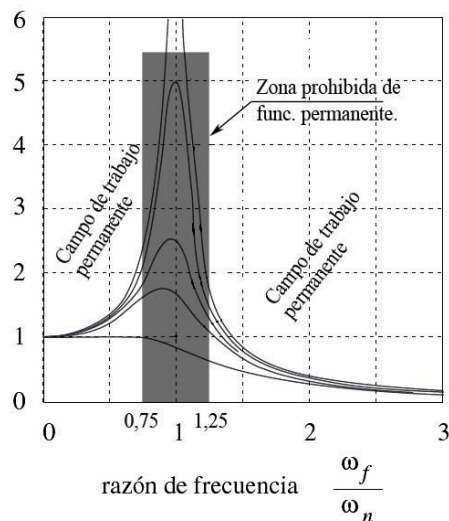


Figura 9-2

9.1. Deformaciones en ejes debidas a vibraciones

El cabeceo de un eje es un fenómeno vibratorio de autoexcitación, al cual están potencialmente expuestos todos los ejes. Aun cuando es una práctica común y recomendable equilibrar dinámicamente todos los elementos giratorios de una máquina (sobre todo si opera a grandes velocidades), no es posible lograr un equilibrio dinámico exacto, excepto por casualidad.

Cualquier desbalanceo residual de un elemento giratorio causa que su centro de masa real sea excéntrico en relación con el eje de giro del eje. Tal excentricidad crea una fuerza centrífuga que tiende a flexionar el eje en la dirección de la excentricidad, incrementando ésta y por lo mismo aumentando la fuerza centrífuga. La única resistencia a esta fuerza se debe a la rigidez elástica del eje, como se ilustra en la figura 9-3.

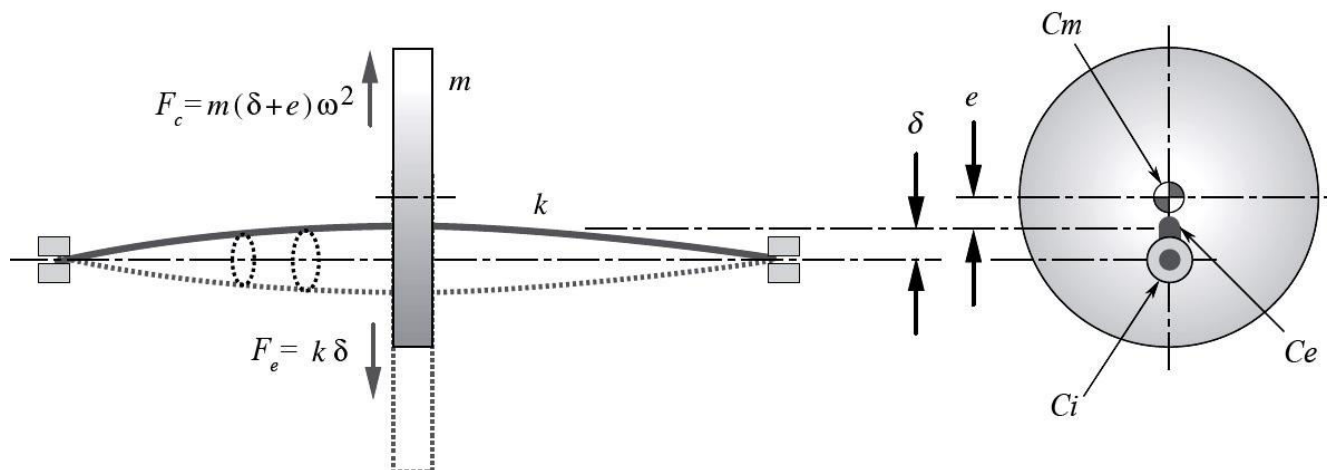


Figura 9-3: Cabeceo de un árbol (amplitud muy exagerada)

La excentricidad inicial del eje está representada por e , la deflexión dinámica es δ , m la masa del volante, k la constante de resorte del sistema, C_m es el centro de masa del volante, C_i es el centro ideal o línea que une ambos cojinetes y C_e representa el centro del eje.

El diagrama de cuerpo libre muestra que las fuerzas que se generan son:

Fuerza Centrífuga: $F_c = m \cdot \omega^2 \cdot (\delta + e)$

Ecuación 9-1

Fuerza Elástica: $F_e = k \cdot \delta$

Ecuación 9-2

Igualando ambas fuerzas:

$$k \cdot \delta = m \cdot \omega^2 \cdot (\delta + e)$$

Recordando que la pulsación natural de un sistema elástico con un grado de libertad es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Reemplazamos y despejamos la razón de deformación δ/e :

$$\frac{\delta}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Ecuación 9-3

La ecuación 9-3 y la figura 9-4 muestran la amplitud de la deflexión del eje normalizado para la excentricidad original (δ/e), como una función de la razón entre la frecuencia de giro y la frecuencia crítica ω/ω_n . Note que cuando $\omega/\omega_n = 0$, no hay respuesta, a diferencia de la vibración forzada de la sección anterior, lo cual se debe a que no hay fuerza centrífuga, a menos que el eje gire. Conforme la velocidad del eje se incrementa, la deflexión aumenta rápidamente. Si no hay amortiguamiento ($\xi = 0$), en $\omega/\omega_n = 0.707$, la deflexión del eje es igual a la excentricidad y teóricamente se vuelve infinita en la resonancia ($\omega/\omega_n = 1$). Desde luego, siempre habrá algún amortiguamiento, pero si el valor de ξ es pequeño, la deflexión será muy grande en la resonancia y puede causar esfuerzos lo suficientemente grandes para que el eje falle.

Observe qué sucede cuando la velocidad del eje rebasa ω_n , la fase cambia 180° , lo cual significa que la deflexión cambia abruptamente de lado en resonancia. A mayores razones de ω/ω_n , la deflexión se aproxima a $-e$, lo cual significa entonces que el sistema gira alrededor del centro de masa de la masa excéntrica y la línea central del eje es excéntrica. La conservación de la energía hace que el sistema intente girar alrededor de su verdadero centro de masa. Lo anterior ocurrirá en cualquier sistema donde los elementos giratorios sean excéntricos y grandes, comparados con el eje. Tal vez haya observado un ventilador de techo cuyo centro de motor orbita alrededor de su eje de rotación. Las aspas del ventilador generalmente no están en equilibrio perfecto y el montaje gira alrededor del centro de masa del montaje del aspa, en lugar de que gire alrededor de la línea central del sistema motor/eje.

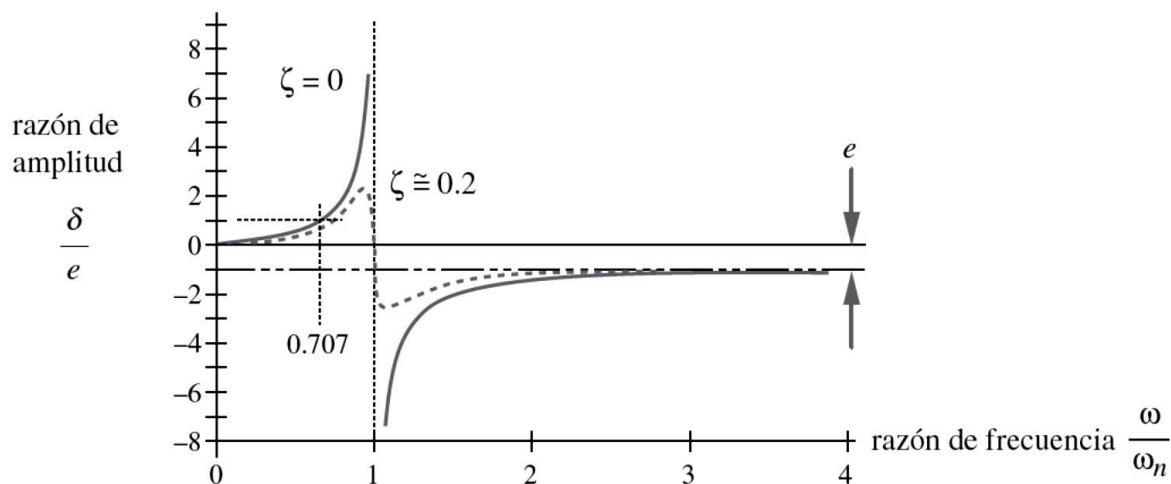


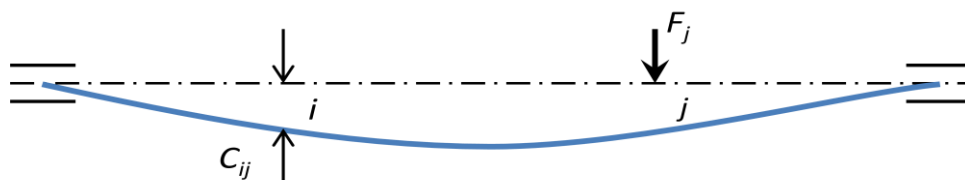
Figura 9-4: Respuesta de amplitud de un sistema de cabeceo de eje autoexcitado en función de la razón de frecuencia

Como se aclaró anteriormente, conviene evitarse la rotación de un sistema en su frecuencia crítica o cerca de ella. Debido a que la razón de amplitud de vibración en un eje que cabecea inicia en cero, en lugar de en uno (como en las vibraciones forzadas), la frecuencia forzada puede estar más cerca de la frecuencia crítica que con la vibración lateral.

Observe la diferencia entre *vibración lateral del eje* y *cabeceo del eje*. La **vibración lateral** es una **vibración forzada**, que para generarse requiere de alguna fuente externa de energía, como las vibraciones de otras piezas de la máquina, y entonces el eje vibra en uno o más planos laterales, ya sea que esté girando o no. El **cabeceo del eje** es una **vibración autoexcitada**, causada por el giro del eje que actúa sobre una **masa excéntrica**. Siempre ocurrirá cuando estén presentes tanto el giro como la excentricidad. El eje asume una forma flexionada, la cual entonces gira o cabecea alrededor del eje, algo muy parecido al salto de la cuerda al que juegan los niños.

9.2. Coeficientes de influencia

Dado que el eje es un cuerpo elástico, se utilizan **coeficientes de influencia** que son las deflexiones transversales en la ubicación i de un eje, debida a una carga unitaria en la ubicación j del eje.



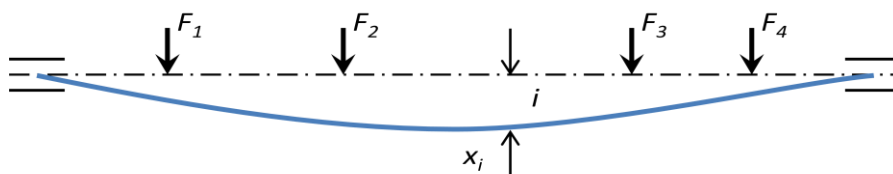
Dado que el sistema se supone lineal, si la carga en j es F_j , la deformación en i será ahora F_j veces mayor, es decir:

$$x_i = C_{ij} \cdot F_j$$

Si hay varias F_j en distintos j , la deformación total en i será:

$$x_i = C_{i1} \cdot F_1 + C_{i2} \cdot F_2 + C_{i3} \cdot F_3 + \dots + C_{in} \cdot F_n$$

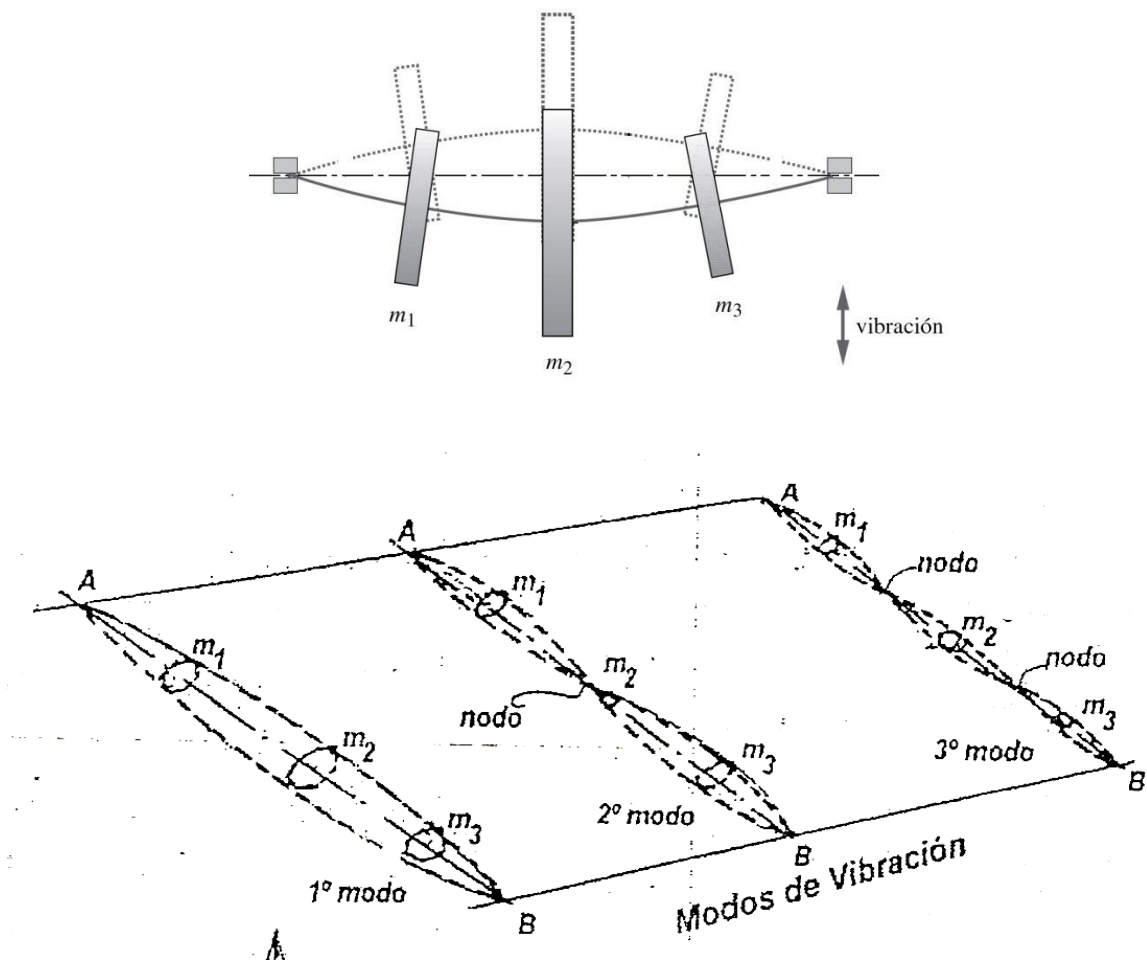
$$x_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot F_j$$




En un árbol con varias masas se plantea un sistema de ecuaciones lineales con tantas incógnitas como masas estén acopladas. Se resuelve ese sistema para obtener las raíces correspondientes que permiten hallar las **velocidades críticas**.

Por ej: si el árbol tiene tres masas, las velocidades críticas son tres. Es decir que el sistema presenta resonancia a tres velocidades. Las transiciones entre resonancias se dan con distintas configuraciones del sistema masas-árbol que se denominan MODOS DE VIBRACIÓN.

En la figura siguiente se observan los tres modos de vibración para un caso planteado:



 <p>UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO</p>  <p>FACULTAD DE INGENIERÍA</p>	<p><i>Mecánica Aplicada</i></p> <p><i>Arboles y Ejes</i></p> <p>Teoría y Cálculo</p>	<p>Profesor: Ing. Sebastián M. Lazo</p>
---	---	---

10. **Anexo 1**

Para tablas de propiedades de materiales, referirse al archivo:

[propiedades de materiales-Norton-Diseño de Máquinas.pdf](#)

almacenadas en la plataforma de la cátedra.

11. **Anexo 2: Factores de concentración de tensiones**

Para graficas de factores de concentración de tensiones, referirse al anexo 2 del archivo:

[Unidad 1- Fatiga .pdf](#)

almacenadas en la plataforma de la cátedra.

12. **Bibliografía**

- “**Diseño en Ingeniería Mecánica**”, Joseph Edward SHIGLEY, Charles Mischke, Ed. Mc. Graw Hill, 8va edición.
- “**Diseño de elementos de maquinas**”, V.M. FAIRES, Editorial Montaner y Simon - Barcelona 4ta edición.
- “**Diseño de maquinas**”, Robert L. NORTON – Prentice Hall – 1ra edición
- “**Elementos de Maquinas**”, Bernard HAMROCK - Ed. Mc. Graw Hill, 1ra edición.