FACULTAD
DE INGENIERÍA

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

CUERPO RÍGIDO
Tres Dimensiones

Ing. Carlos Barrera-2021

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

OBJETIVOS

- **Estudiar el análisis cinético de movimiento de cuerpos rígidos en tres dimensiones**
- **Aplicar y analizar como varían los parámetros en el movimiento de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos**

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

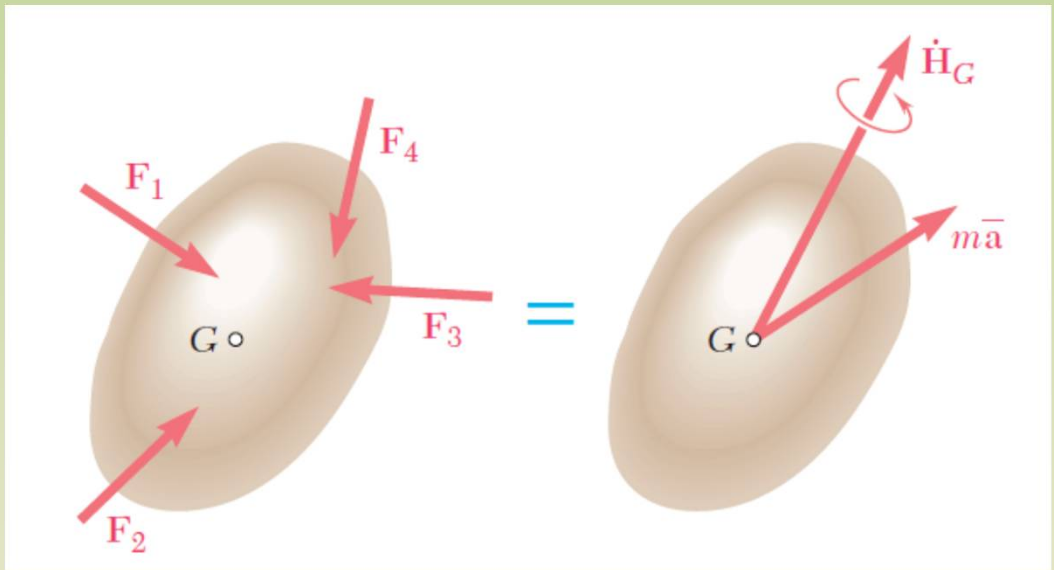
Cátedra:

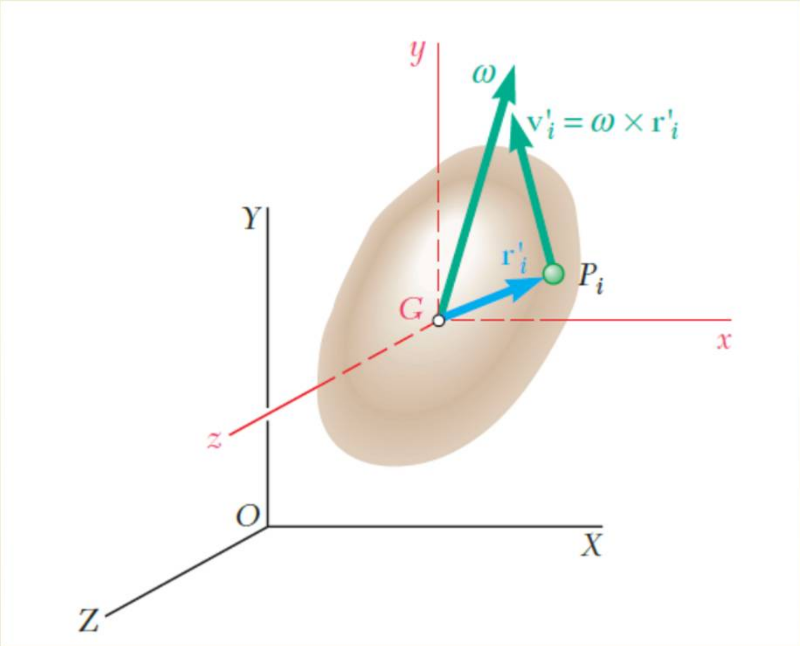
MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

CINÉTICA DE CUERPOS RIGIDOS EN TRES DIMENSIONES

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$





CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE CUERPOS RIGIDOS EN TRES DIMENSIONES

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \, \Delta m_i)$$

Ing. Carlos Barrera

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\, \Delta m_i]$$

$$H_x = \sum_{i=1}^{n} [y_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_z - z_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_y]\, \Delta m_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)]\, \Delta m_i$$

$$= \omega_x \sum_i (y_i^2 + z_i^2)\, \Delta m_i - \omega_y \sum_i x_i y_i\, \Delta m_i - \omega_z \sum_i z_i x_i\, \Delta m_i$$

$$H_x = \omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int zx\, dm$$
$$H_y = -\omega_x \int xy\, dm + \omega_y \int (z^2 + x^2)\, dm - \omega_z \int yz\, dm$$
$$H_z = -\omega_x \int zx\, dm - \omega_y \int yz\, dm + \omega_z \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Ing. Carlos Barrera

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

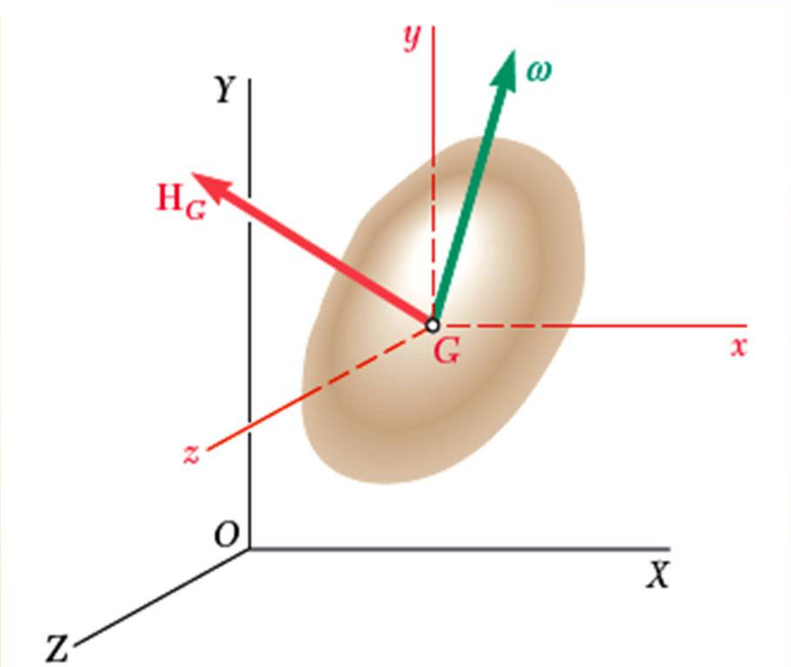
$$\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2)\, dm \qquad \bar{I}_y = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

$$\bar{I}_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$\bar{I}_{xy} = \int xy\, dm \qquad \bar{I}_{yz} = \int yz\, dm \qquad \bar{I}_{zx} = \int zx\, dm$$

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x\omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\omega_z \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_x & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ -\bar{I}_{yx} & \bar{I}_y & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{zx} & -\bar{I}_{zy} & \bar{I}_z \end{pmatrix}$$

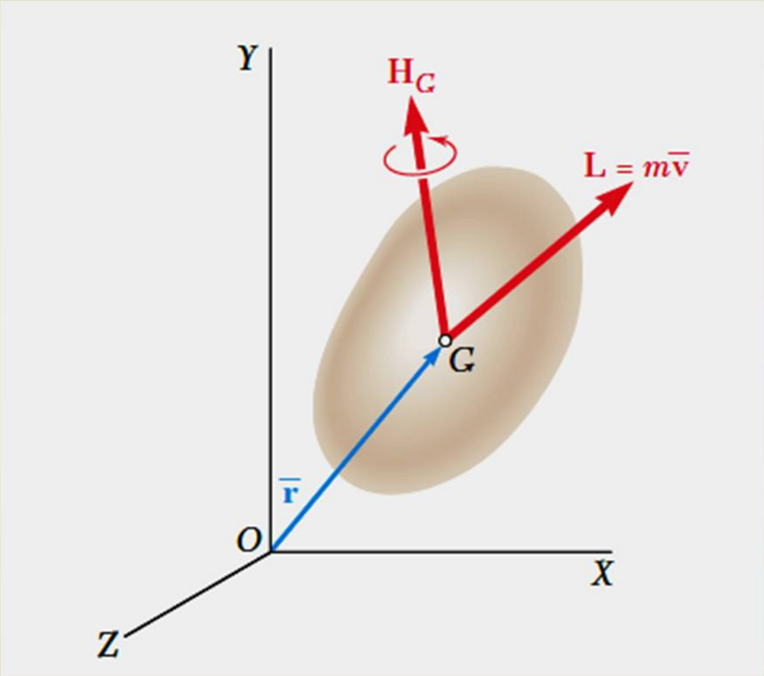


Ing. Carlos Barrera

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix}$$

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'}$$



REDUCCIÓN DE LAS CANTIDADES DE MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS DE CUERPOS RIGIDOS A UN VECTOR Y A UN PAR EN G

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

ECUACIONES DE EULER

Rotación respecto a un punto fijo

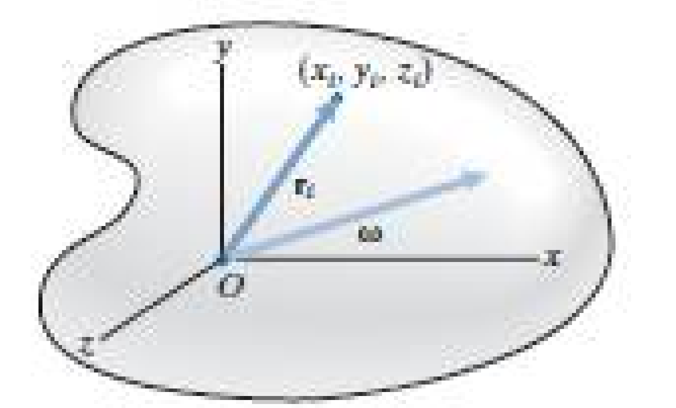
Las ecuaciones tridimensionales de movimiento para un cuerpo rígido se llaman Ecuaciones de Euler

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}.$$

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}.$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k},$$



$$H_{Ox} = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z,$$

$$H_{Oy} = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z,$$

$$H_{Oz} = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.$$

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2),$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2),$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i,$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i x_i z_i$$

Ω **Vector de velocidad angular del sistema coordenado.**

$\Omega = \omega$ **Si el sistema está fijo al cuerpo**

$$\mathbf{H}_O = H_{Ox}\,\mathbf{i} + H_{Oy}\,\mathbf{j} + H_{Oz}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \frac{dH_{Ox}}{dt}\mathbf{i} + H_{Ox}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dH_{Oy}}{dt}\mathbf{j} + H_{Oy}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dH_{Oz}}{dt}\mathbf{k} + H_{Oz}\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Expresando las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios en función de la velocidad angular Ω del sistema coordenado

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k},$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{dH_{Ox}}{dt}\mathbf{i} + \frac{dH_{Oy}}{dt}\mathbf{j} + \frac{dH_{Oz}}{dt}\mathbf{k} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O.$$

Sustituyendo las componentes de H_O obtenemos las ecuaciones del momento angular

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$\Sigma M_{Ox} = I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy}\frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz}\frac{d\omega_z}{dt} - \Omega_z(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z) + \Omega_y(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z),$$

$$\Sigma M_{Oy} = -I_{yx}\frac{d\omega_x}{dt} + I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt} - I_{yz}\frac{d\omega_z}{dt} + \Omega_z(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) - \Omega_x(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z),$$

$$\Sigma M_{Oz} = -I_{zx}\frac{d\omega_x}{dt} - I_{zy}\frac{d\omega_y}{dt} + I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} - \Omega_y(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) + \Omega_x(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z).$$

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

La aceleración angular del cuerpo rígido es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\omega_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\omega_z}{dt}\mathbf{k} + \mathbf{\Omega} \times \omega.$$

Podemos plantear el momento en forma de matriz:

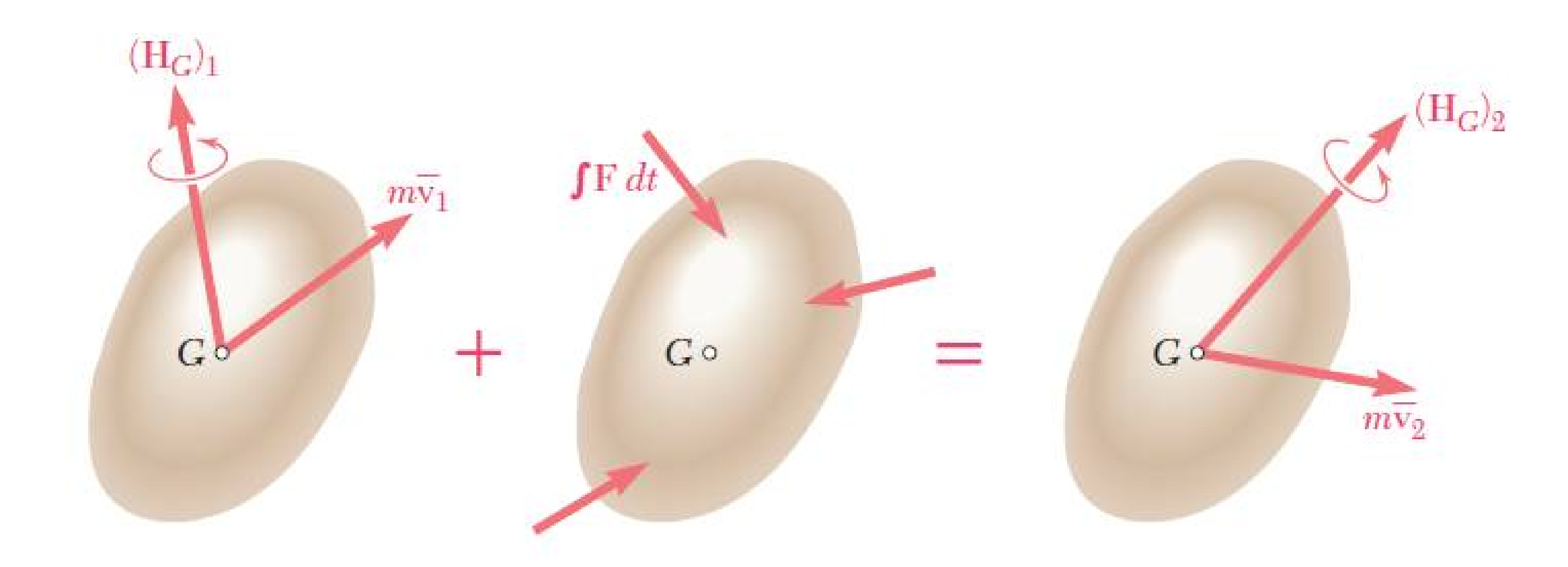
$$\begin{bmatrix} \Sigma M_{Ox} \\ \Sigma M_{Oy} \\ \Sigma M_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO AL MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1\to 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$



Ing. Carlos Barrera

17:03

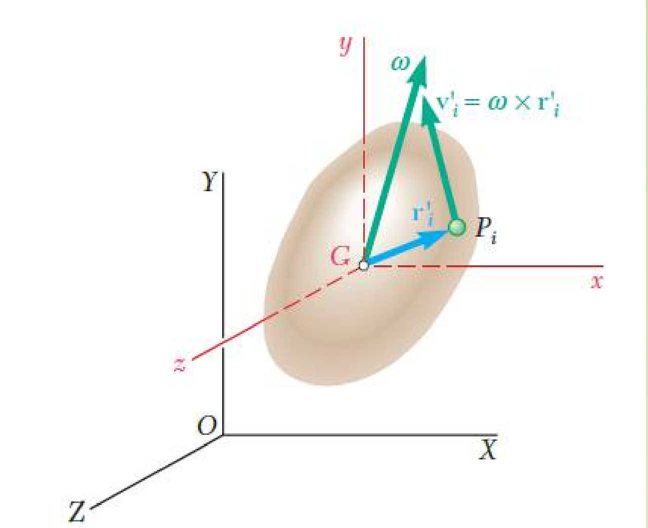
ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2$$



$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'|^2 \Delta m_i$$

$$\begin{aligned} T' &= \tfrac{1}{2}\int[(\omega_x y - \omega_y x)^2 + (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2]\, dm \\ &= \tfrac{1}{2}[\omega_x^2\int(y^2 + z^2)\, dm + \omega_y^2\int(z^2 + x^2)\, dm + \omega_z^2\int(x^2 + y^2)\, dm \\ &\qquad - 2\omega_x\omega_y\int xy\, dm - 2\omega_y\omega_z\int yz\, dm - 2\omega_z\omega_x\int zx\, dm] \end{aligned}$$

$$T' = \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x)$$

$$\begin{aligned} T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y \\ - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \end{aligned}$$

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2)$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

ÁNGULOS DE EULER

Giróscopo

Las ecuaciones del movimiento angular relacionan el momento total que actúa sobre un cuerpo rígido con su velocidad y aceleración angulares.

Primero mostraremos como especificar la orientación de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

Para describir la orientación de un cuerpo rígido en movimiento plano se requiere sólo el ángulo ϴ que especifica la rotación del cuerpo respecto a alguna orientación de referencia.

En el movimiento tridimensional se requieren de 3 ángulos. Se necesitan 2 ángulos para especificar la dirección del eje y un tercer ángulo para especificar la rotación del cuerpo rígido respecto al eje.

El mejor sistema conocido para describir la orientación de un cuerpo rígido es el de los ángulos de Euler.

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

El cuerpo tiene un eje de simetría rotacional y presentamos dos sistemas coordenados: el xyz con su eje z coincidiendo con el eje de simetría del cuerpo y el XYZ que es un sistema coordenado de referencia inercial.

Consideramos que el cuerpo está en una posición tal que los sistemas xyz y XYZ están superpuestos.

Los ángulos ψ y ϴ especifican la orientación del sistema xyz respecto al sistema XYZ.

Ψ es el ángulo de PRECESIÓN y ϴ es el ángulo de NUTACIÓN

El ángulo ø que especifica el giro del cuerpo rígido respecto al sistema xyz se llama ángulo de GIRO.

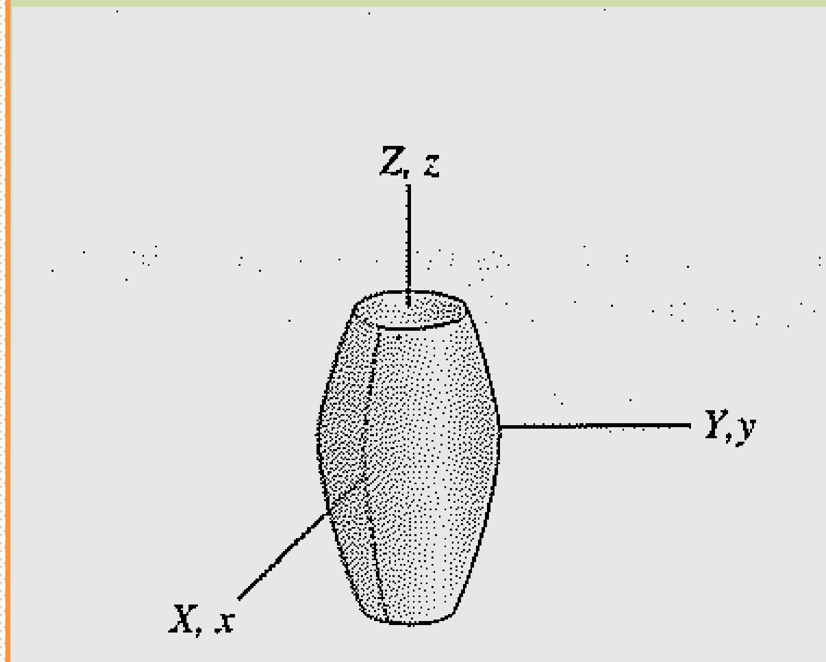
Estos 3 ángulos especifican la orientación del cuerpo rígido respecto al sistema coordenado de referencia y se llaman ÁNGULOS DE EULER.

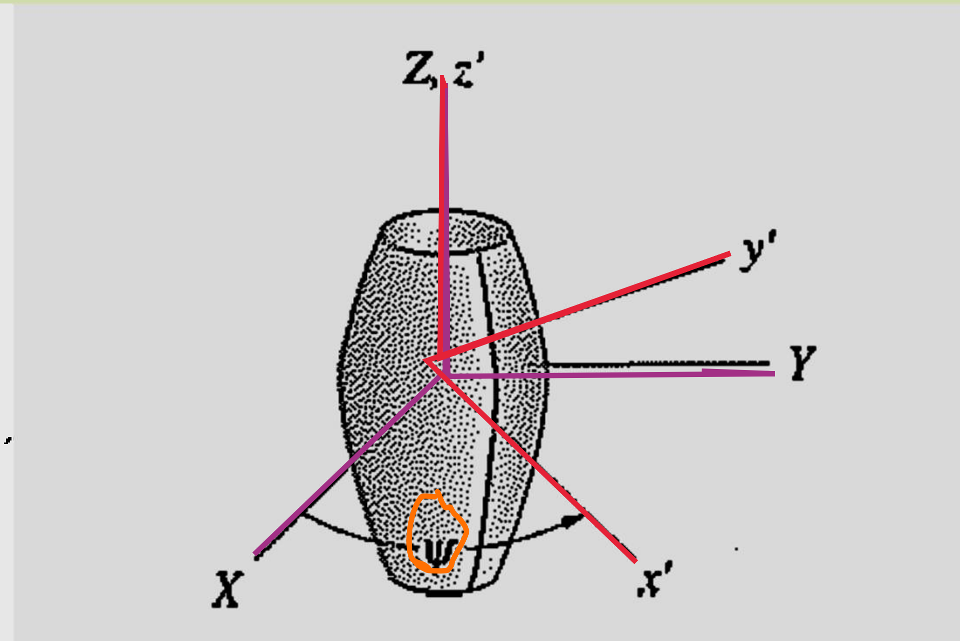
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

CUERPOS CON UN EJE DE SIMETRÍA





Posición de referencia

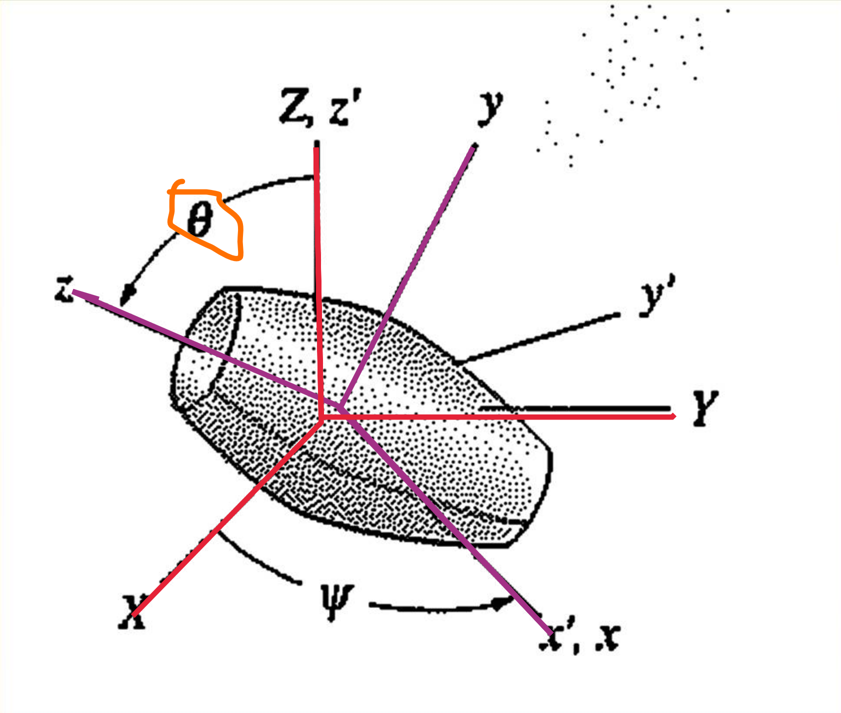
Rotación ψ respecto al eje Z

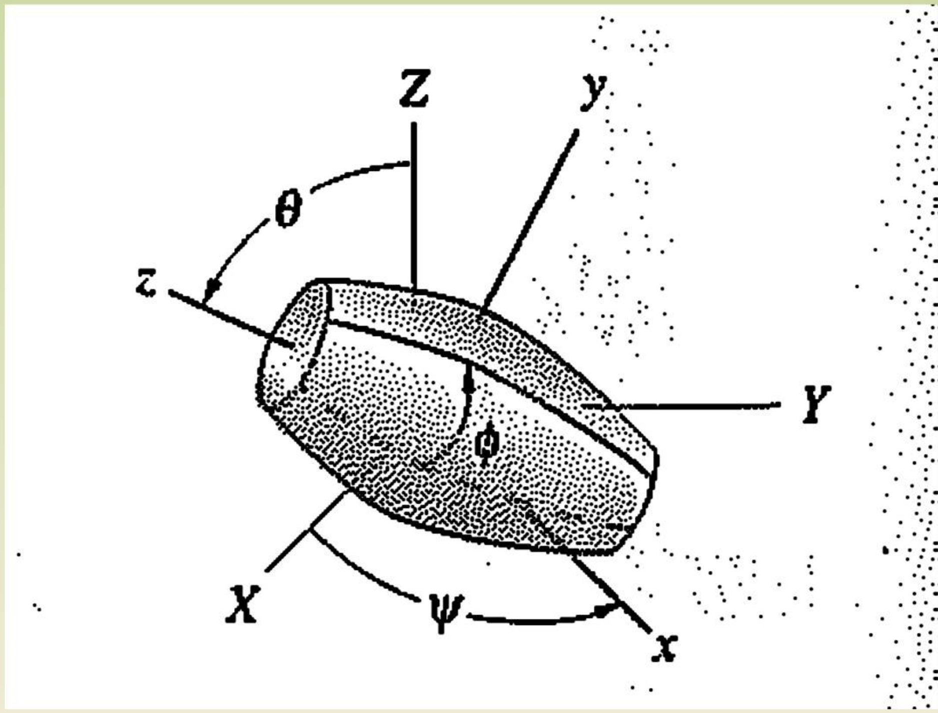
Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

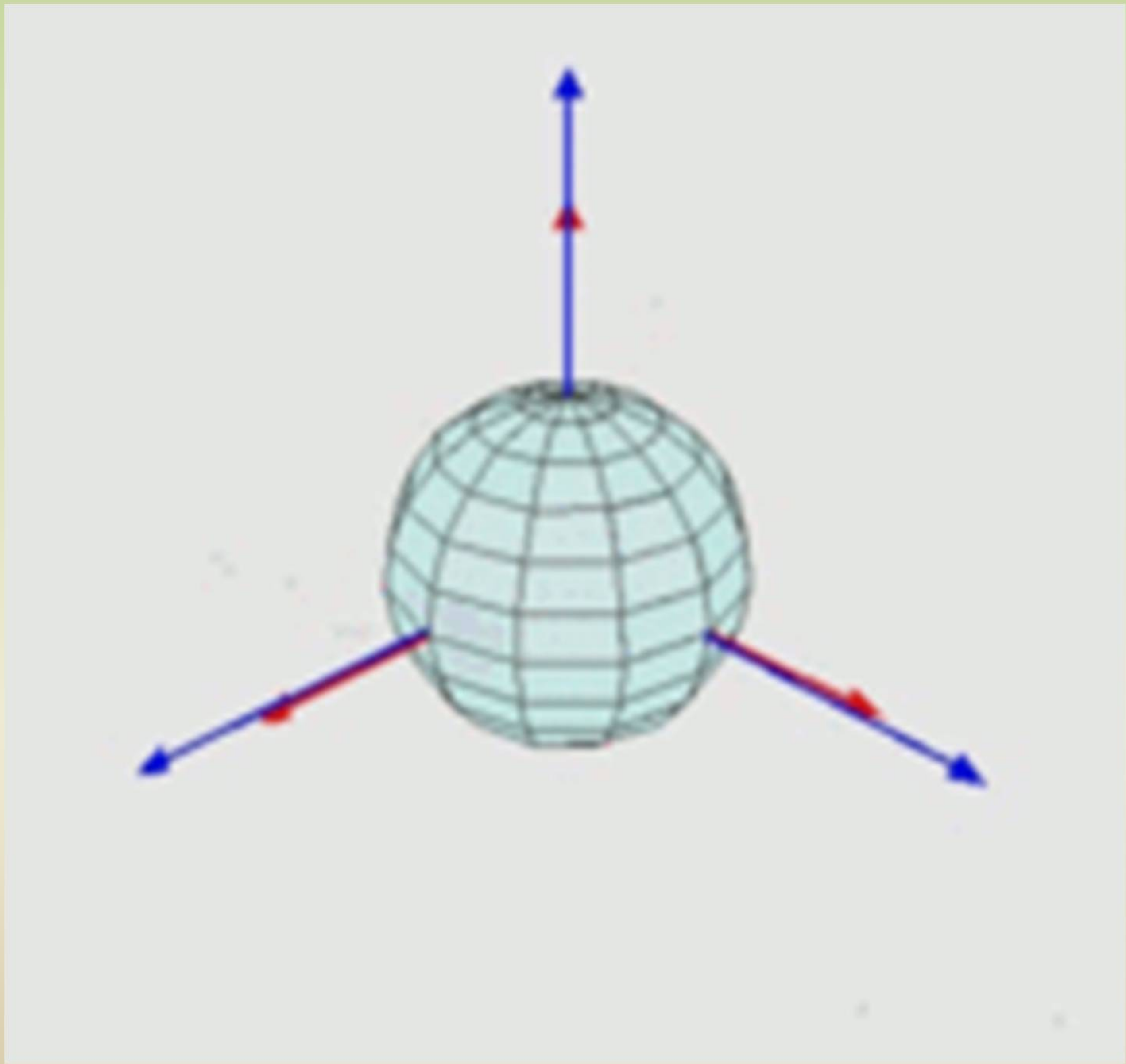




Rotación ϴ respecto al eje x`

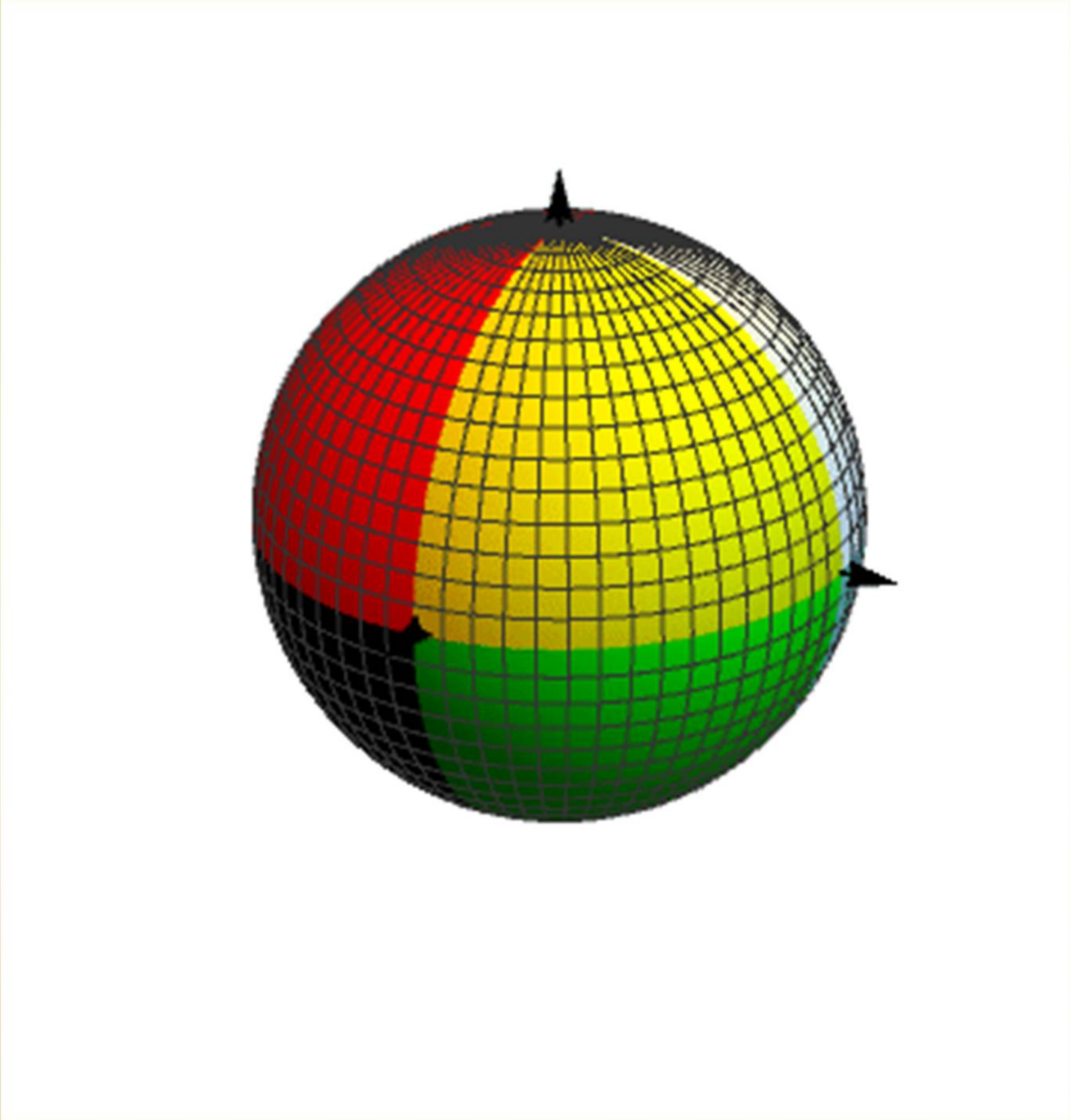
Rotación ø del cuerpo respecto al sistema xyz

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



Ing. Carlos Barrera

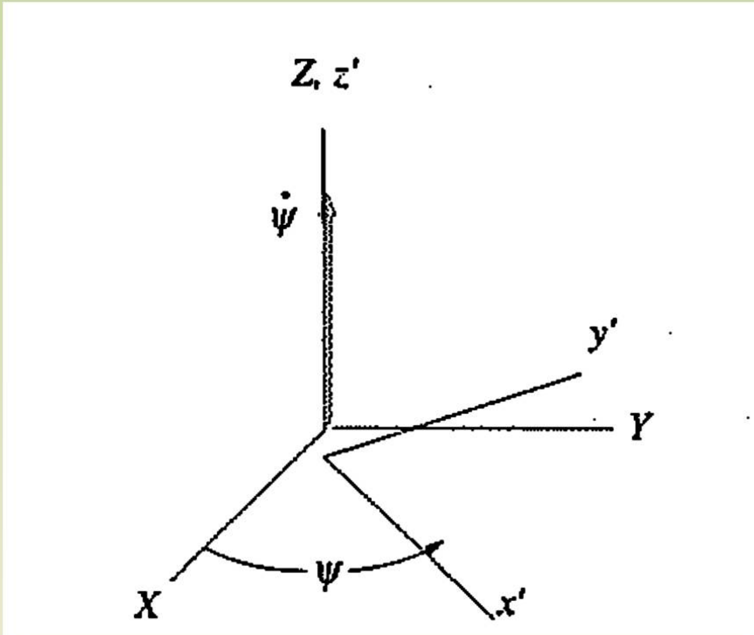
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

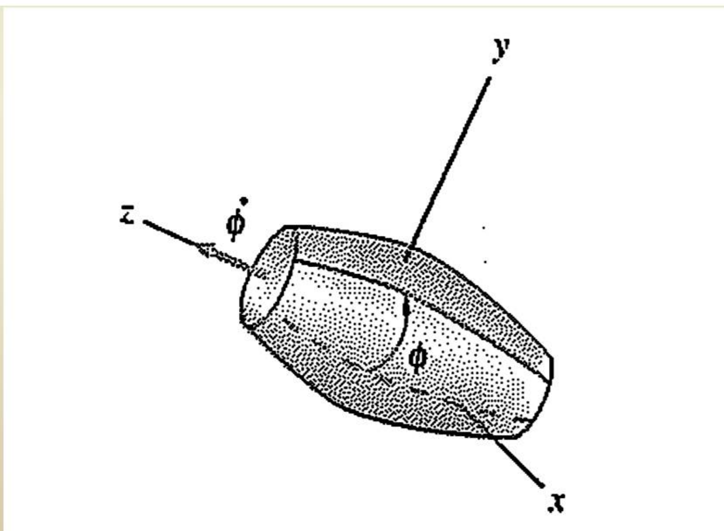


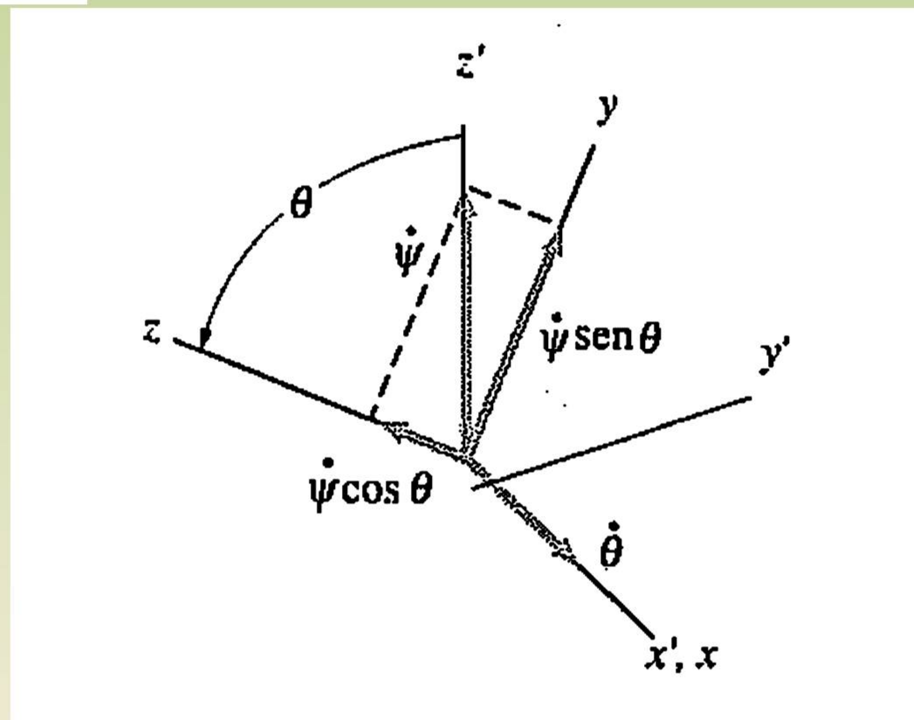
Ing. Carlos Barrera

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Rotación ψ y velocidad angular $\dot{\psi}$.







(b) Rotación θ, velocidad angular $\dot{\theta}$ y componentes de la velocidad angular $\dot{\psi}$.

Ing. Carlos Barrera

Para estudiar el movimiento de un cuerpo en función de los ángulos de Euler, debemos expresar las ecuaciones del movimiento angular en función de ellos.

La primer figura muestra la rotación ψ desde la orientación de referencia del sistema xyz hasta su orientación intermedia x\`y\`z\`. La velocidad angular del sistema coordenado debido a la razón de cambio de ψ se representa con el vector de velocidad angular ψ apuntando en la dirección z\`.

La segunda figura muestra la segunda rotación ϴ.

Las componentes de la velocidad angular del sistema xyz respecto al sistema de referencia son

$$\Omega_x = \dot{\theta},$$

$$\Omega_y = \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\theta,$$

$$\Omega_z = \dot{\psi}\cos\theta.$$

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

En la tercer figura la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema xyz se representa con el vector $\dot{\phi}$. Sumando esta velocidad angular a la del sistema xyz, obtenemos las componentes de la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema XYZ

$$\omega_x = \dot{\theta},$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

Derivando respecto al tiempo

Ing. Carlos Barrera

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \ddot{\theta},$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

A causa de la simetría rotacional del cuerpo, los productos de inercia I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} son cero, e $I_{xx} = I_{yy}$. La matriz de inercia es de la forma

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones del momento angular en función de los ángulos de Euler son

$$\Sigma M_x = I_{xx}\ddot{\theta} + (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta,$$

$$\Sigma M_y = I_{xx}(\ddot{\psi} \operatorname{sen}\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_{zz}(\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta),$$

$$\Sigma M_z = I_{zz}(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta).$$

Para determinar los ángulos de Euler en función del tiempo cuando se conoce el momento total, esas ecuaciones suelen resolverse por integración numérica.

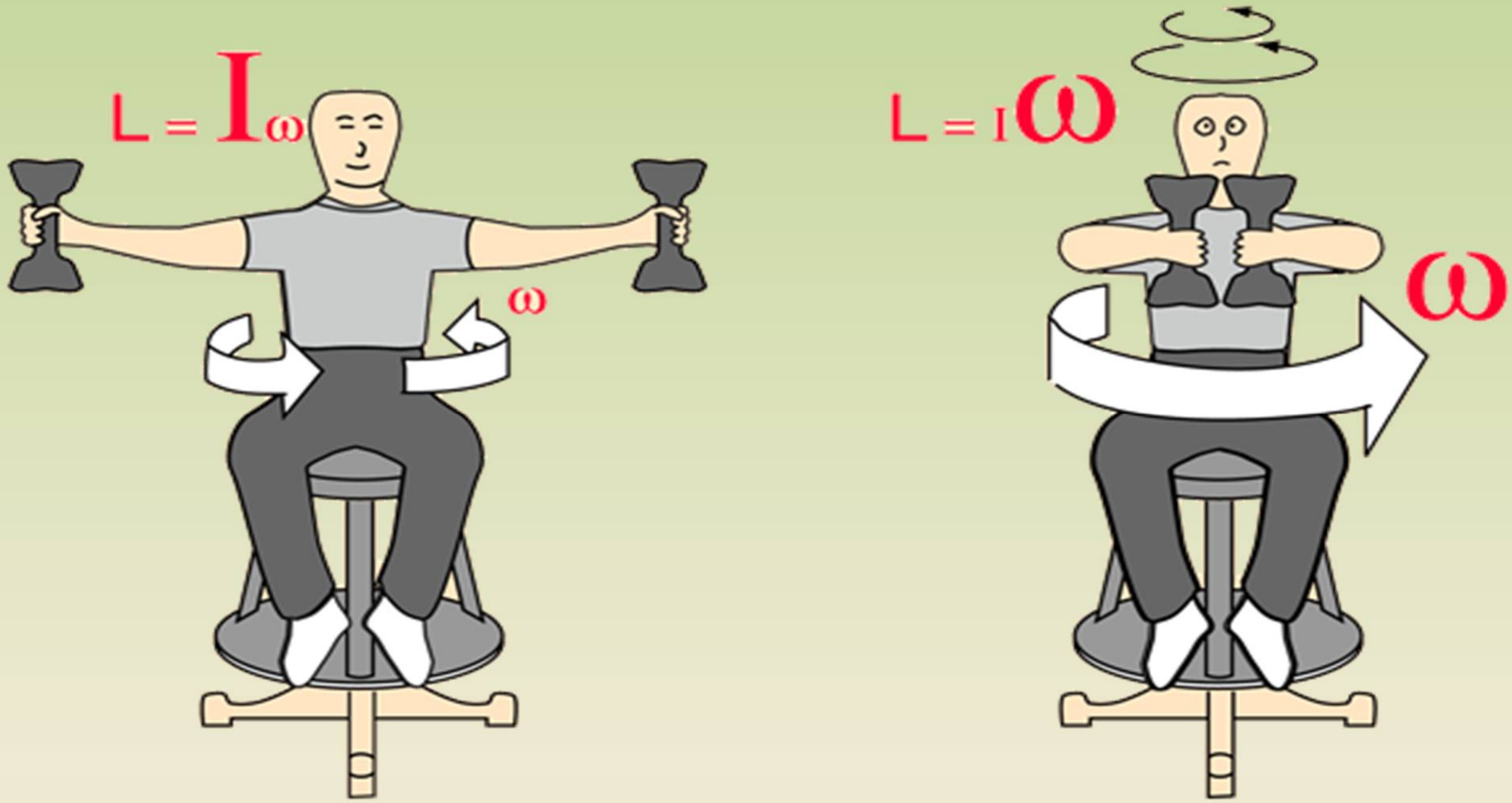
UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS



El momento de inercia es grande con las masas expandidas. Para un determinado momento angular, la velocidad angular es relativamente baja.

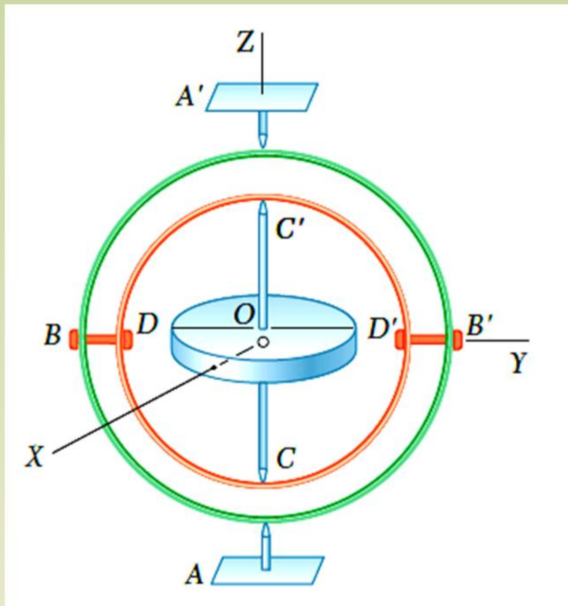
Si tiramos de las masas hacia el centro, el momento de inercia disminuye considerablemente. La conservación del momento angular dictamina que debe aumentar la velocidad angular.

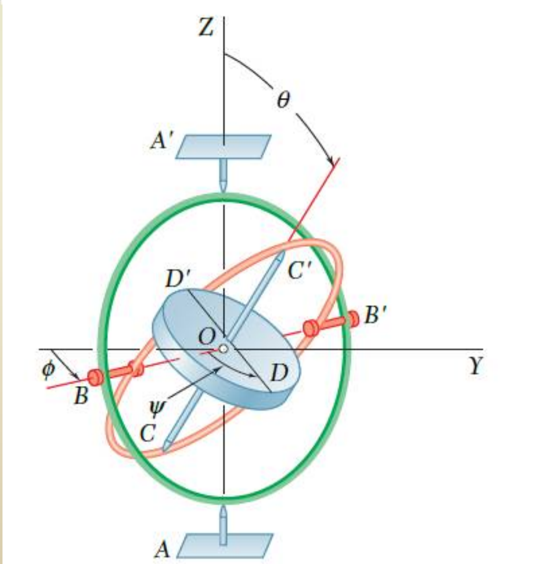
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

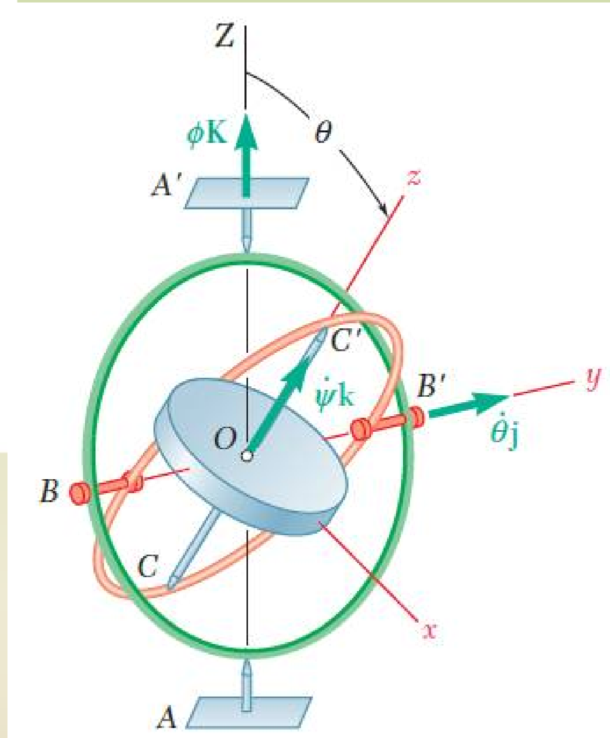
FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

MOVIMIENTO DE UN GIROSCOPO





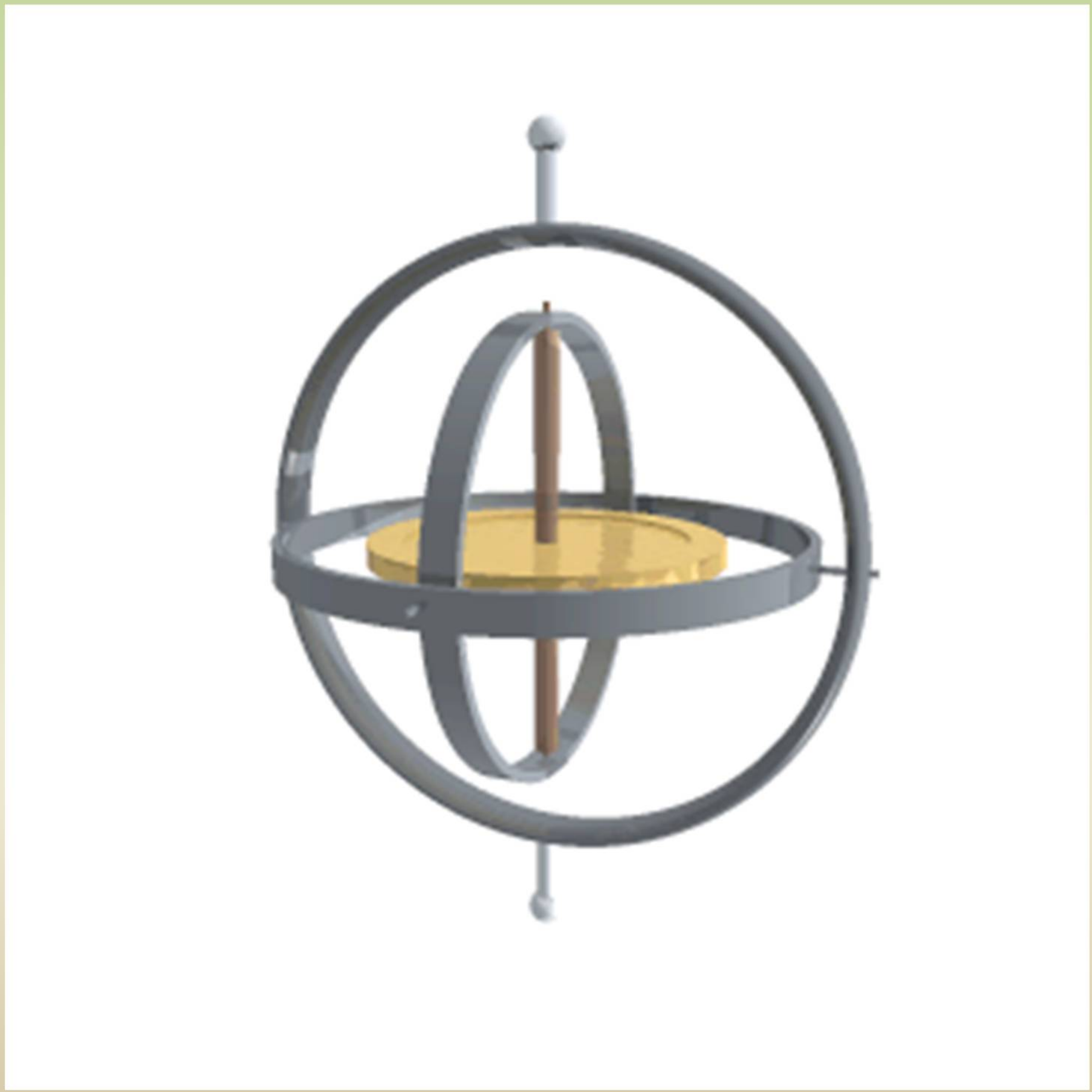


Un giróscopo consiste en un rotor que puede girar libremente alrededor de su eje geométrico. Cuando está montado en una suspensión asume cualquier orientación pero su centro de masa debe permanecer fijo en el espacio.

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



Ing. Carlos Barrera

UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

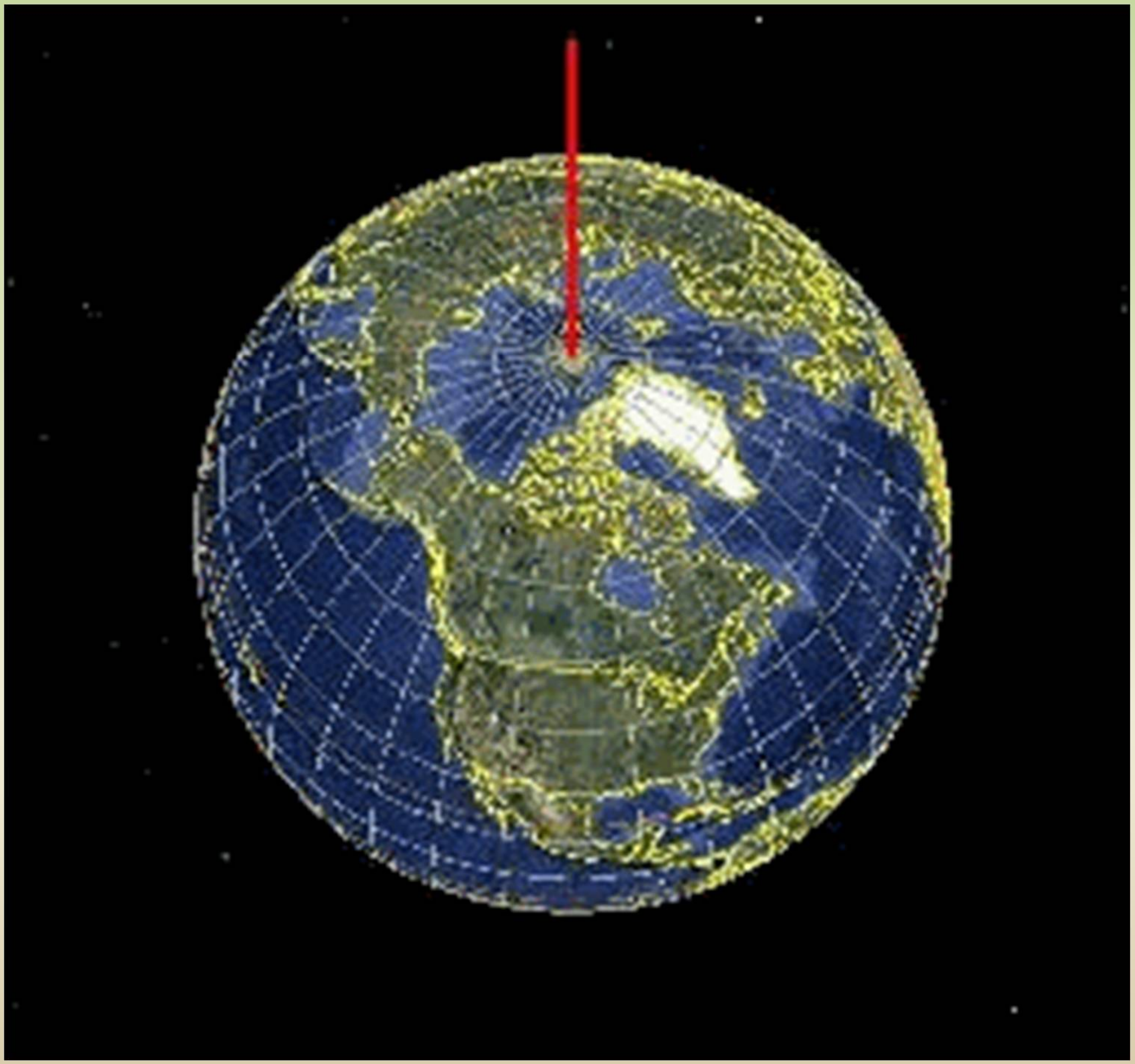
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Un giroscopio o giróscopo es un objeto esférico, o en forma de disco, montado en un soporte cardánico, montado de manera que puedan girar libremente en cualquier dirección. Se utiliza para medir la orientación o para mantenerla, por estar basado su funcionamiento en el principio de conservación del momento angular . Aunque pueda parecer un objeto inusual y sorprendente, forma parte de numerosas aplicaciones en nuestra vida diaria como la de disminuir el balanceo de navíos, aeronaves o proyectiles, para estabilizar plataformas de tiro, la suspensión de los helicópteros o como brújula, ya que este artilugio siempre se orienta hacia el norte geográfico, es decir, hacia el eje de inclinación de la tierra, y no el magnético como las brújulas convencionales . Otra aplicación más demostratíva de los giroscopios es el trompo.

La inercia o efecto giroscópico se produce habitualmente en otras circunstancias de nuestra vida, como el caso del giro que se le proporciona a la pelota de rugby al lanzarla, a un proyectil o una bala, para que así mantenga una trayectoria más recta que si no girara. También podemos observar este fenómeno en los patinadores, que giran más rápido al recoger sus brazos y frenan al desplegarlos ...

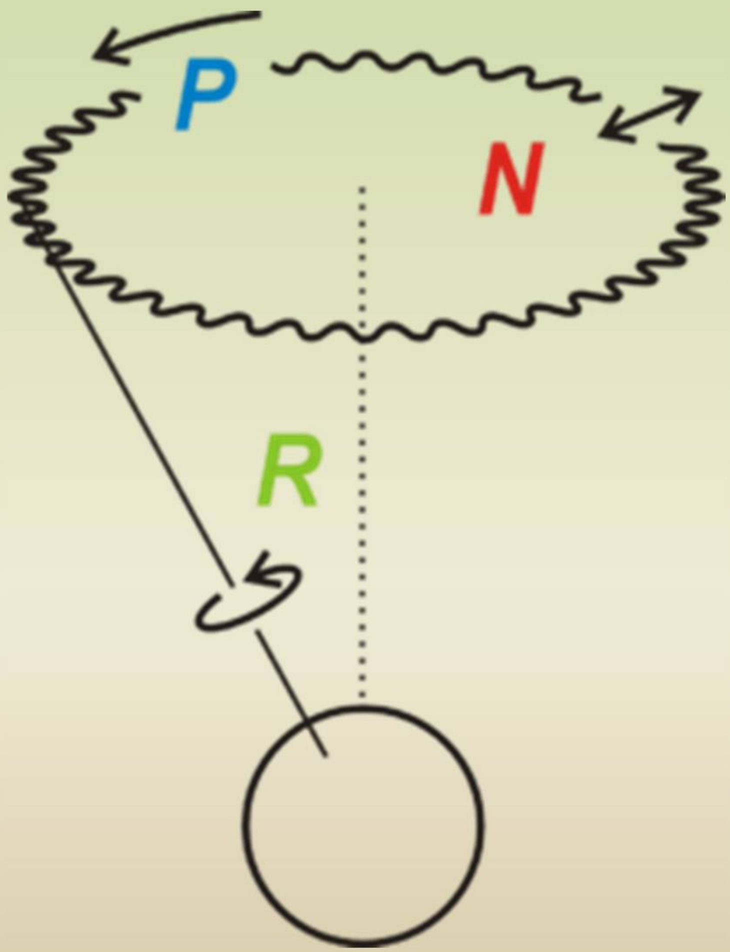
Otro efecto práctico se produce cuando montamos en bici y tomamos una curva, nos inclinamos junto con la bici hacia el centro de la curva. Cuanto mayor es la velocidad, menor es el giro del manillar y mayor es la inclinación que podemos tomar con respecto a la vertical . Estos son los fundamentos del movimiento del giróscopo, un dispositivo inventado en 1852 por León Foucault para demostrar la rotación de la Tierra ya que cualquier cuerpo en rotación, incluida la Tierra, presenta: inercia giroscópica, es decir, tienden a resistir cambios en su orientación para conservar su momento angular, una magnitud física intrínseca a los cuerpos en rotación, que depende del radio (distancia del extremo al eje de giro), de la masa y de la velocidad de giro .

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



Ing. Carlos Barrera

Movimientos del giroscopio



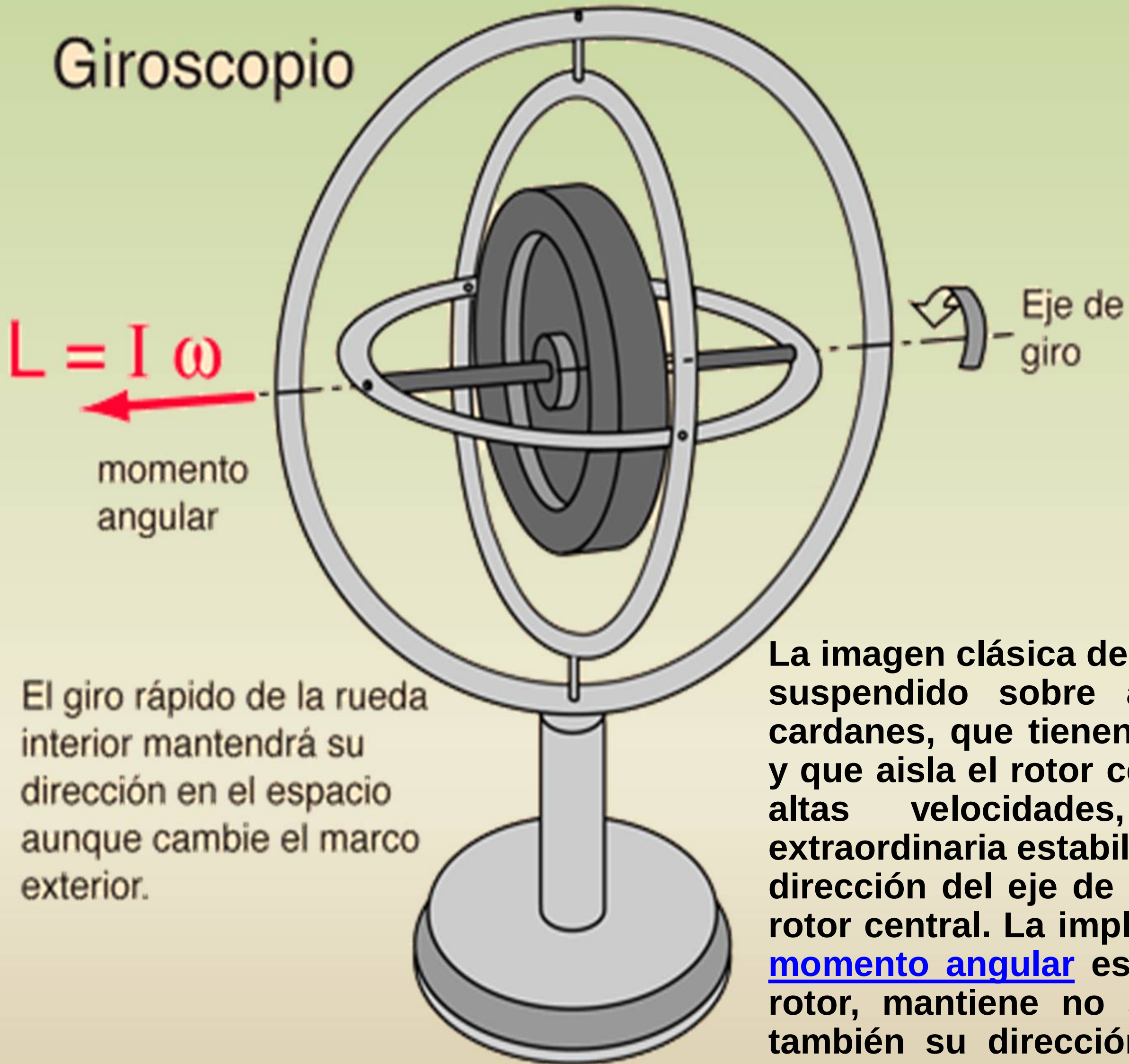
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

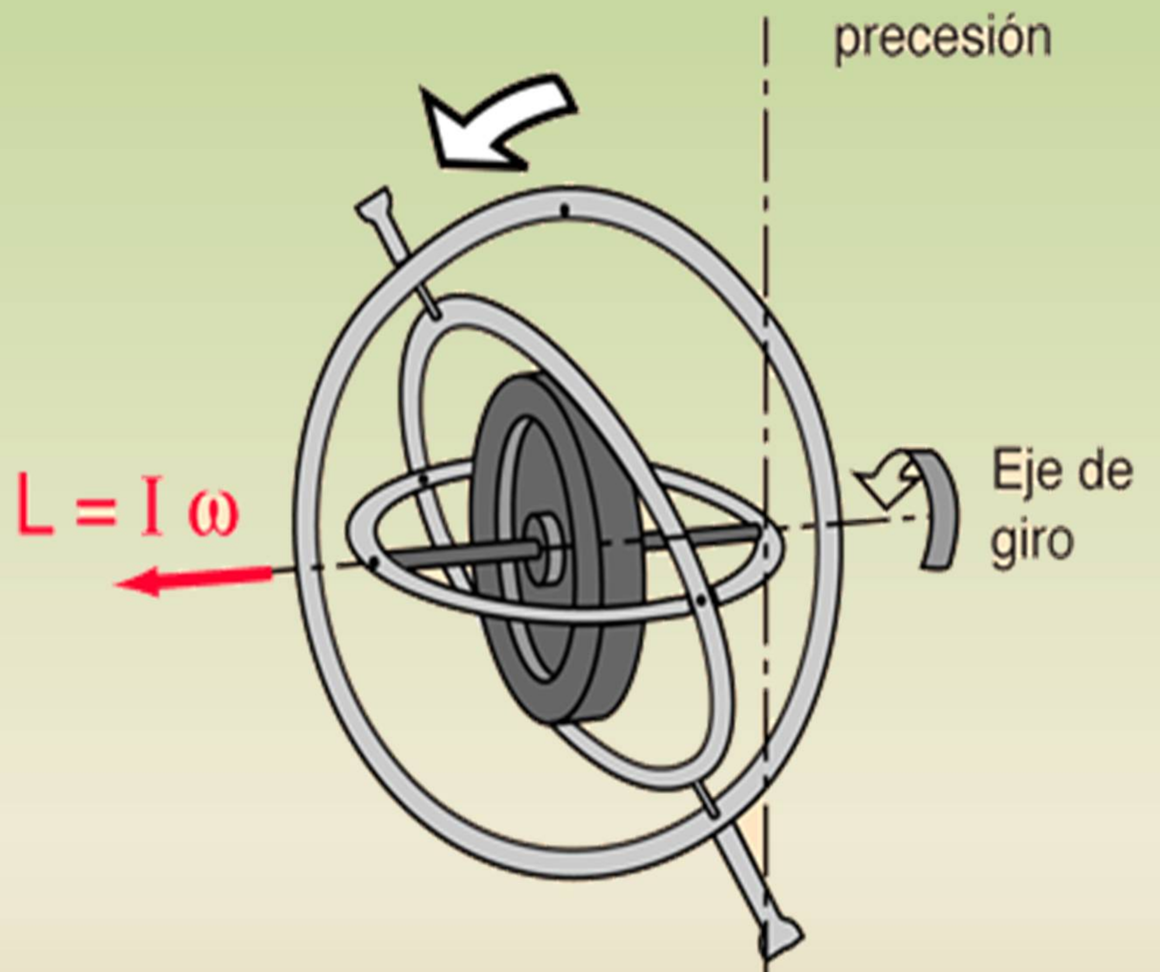
UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

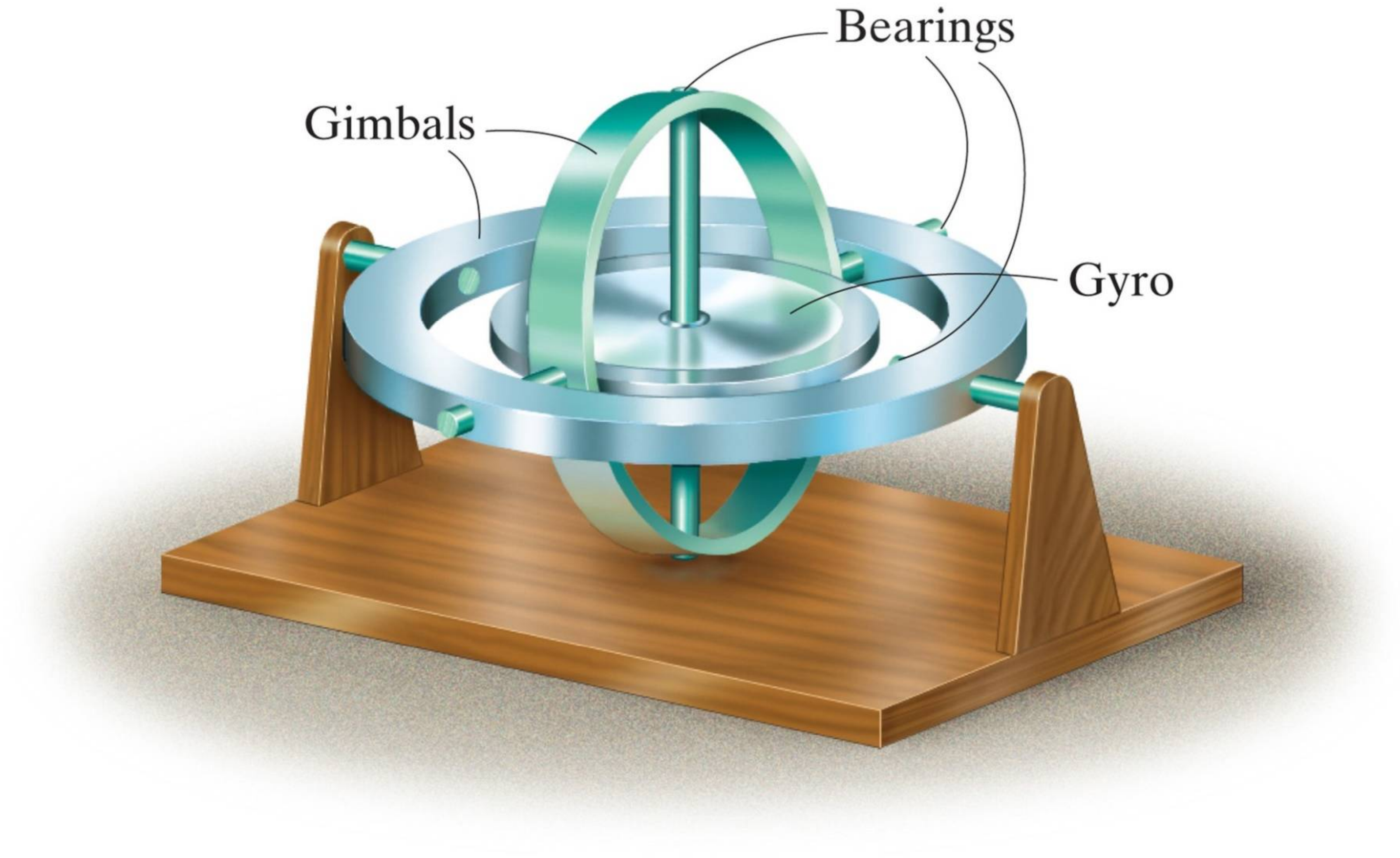


La imagen clásica de un giróscopo es la de un rotor suspendido sobre anillos de soporte llamados cardanes, que tienen cojinetes casi sin rozamiento y que aisla el rotor central de los pares externos. A altas velocidades, el giróscopo presenta extraordinaria estabilidad de balanceo y mantiene la dirección del eje de alta velocidad de rotación, del rotor central. La implicación de la conservación del momento angular es, que el momento angular del rotor, mantiene no solamente su magnitud, sino también su dirección en el espacio, en ausencia de pares externos.



Si un giroscopo se inclina, el sistema cardánico tratará de reorientarlo para mantener el eje de giro del rotor en la misma dirección. Si se libera en esta orientación, el giróscopo hará un movimiento de precesión en la dirección mostrada, como consecuencia del par ejercido por la gravedad sobre el giróscopo.

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



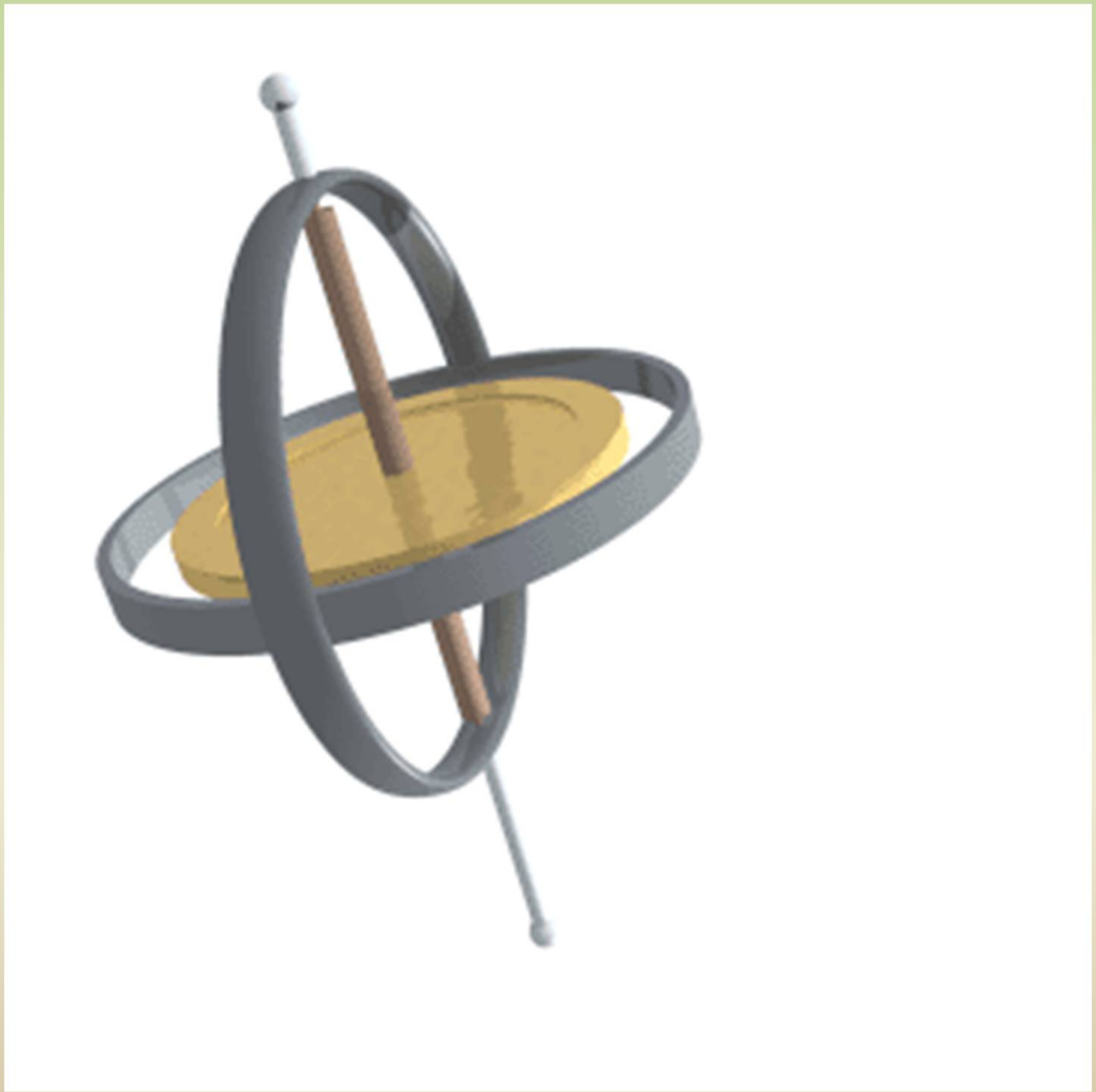
21_19

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



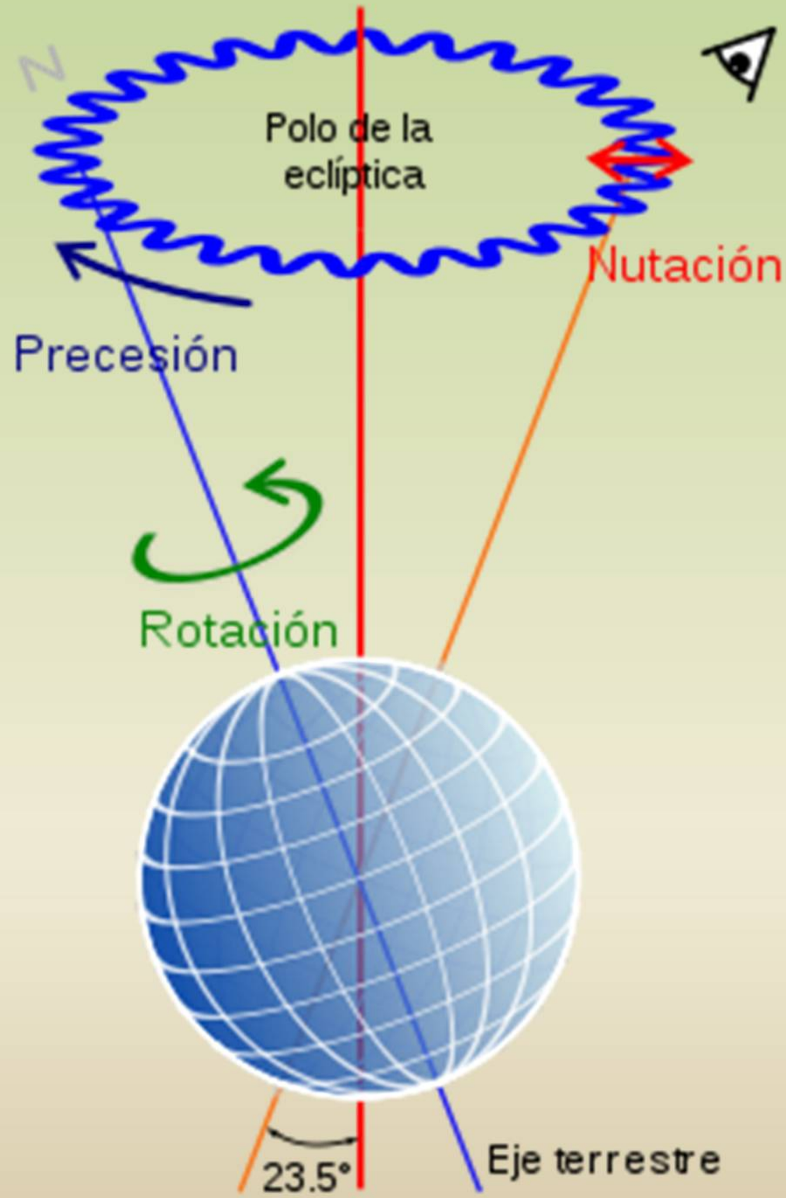
Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

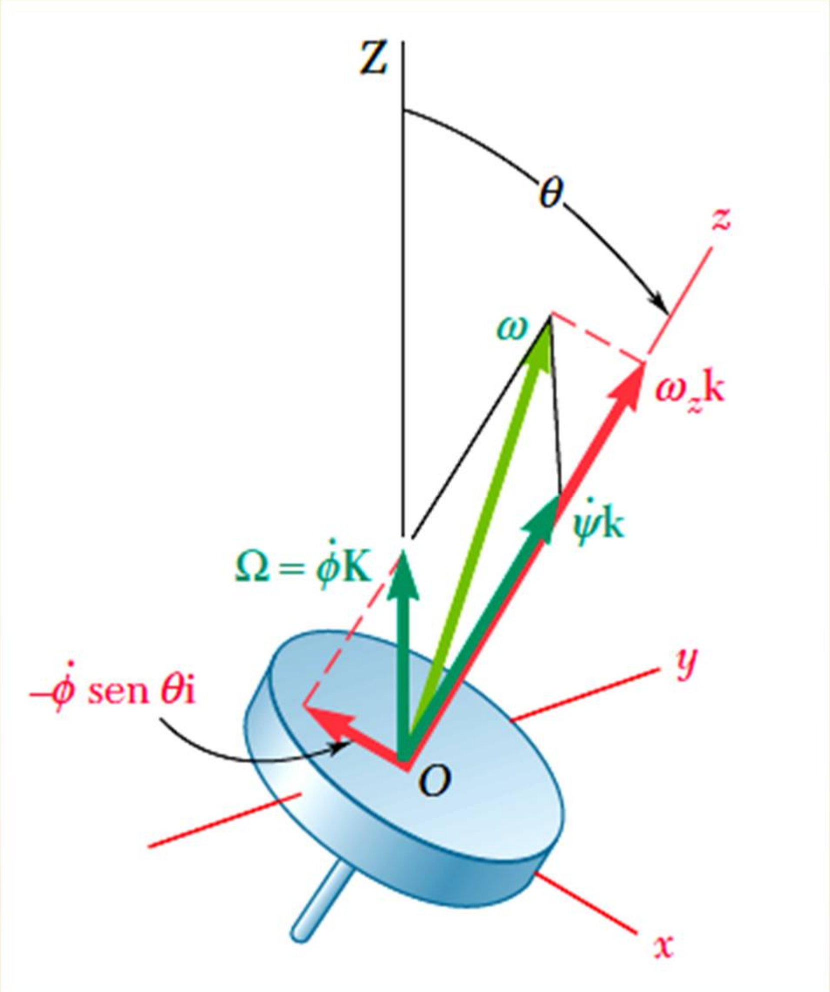
De acuerdo con la mecánica del sólido rígido, además de la rotación alrededor de su eje de simetría, un giróscopo presenta en general dos movimientos principales: la precesión y la nutación. Este hecho se deduce directamente de las ecuaciones de Euler.



PRECESIÓN PERMANENTE

Este movimiento se observa en trompos y giróscopos.

La razón de giro del cuerpo respecto al sistema coordenado xyz se supone constante. El ángulo de nutación ϴ, es decir la inclinación del eje de giro z respecto al eje Z, se supone constante y la razón de precesión, que es la razón a la que el sistema xyz gira respecto al eje Z, también se supone constante. La última hipótesis explica el nombre dado a este movimiento.



Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

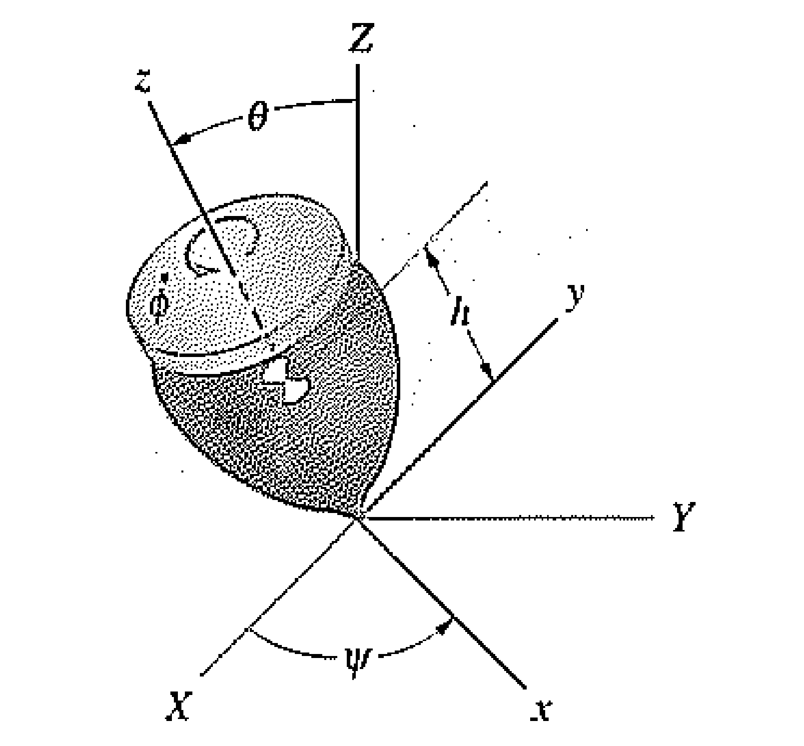
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

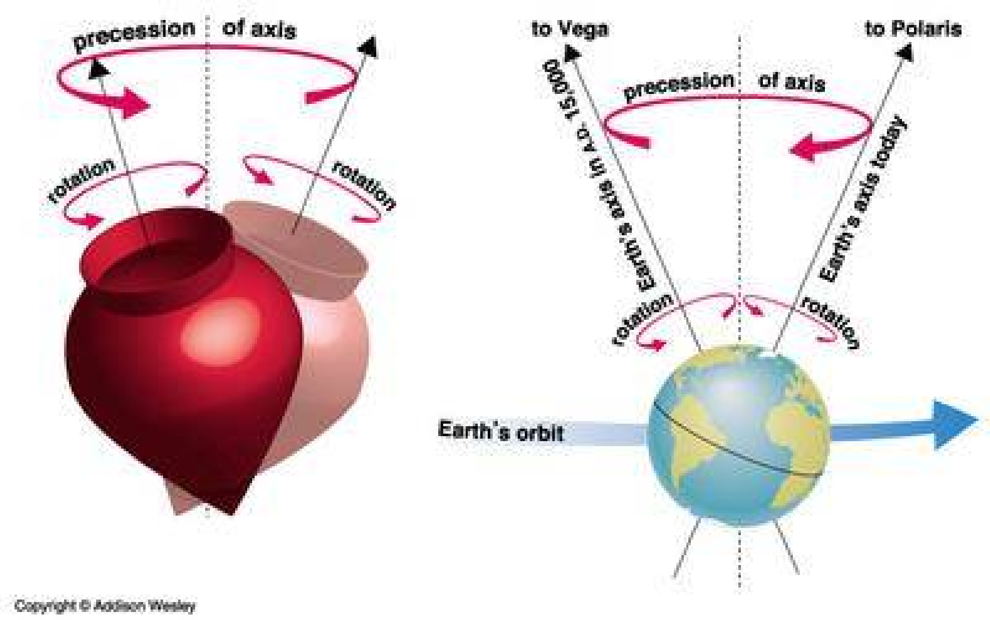
$$\Sigma M_x = (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta,$$

$$\Sigma M_y = 0,$$

$$\Sigma M_z = 0.$$

PRECESIÓN DE UN TROMPO



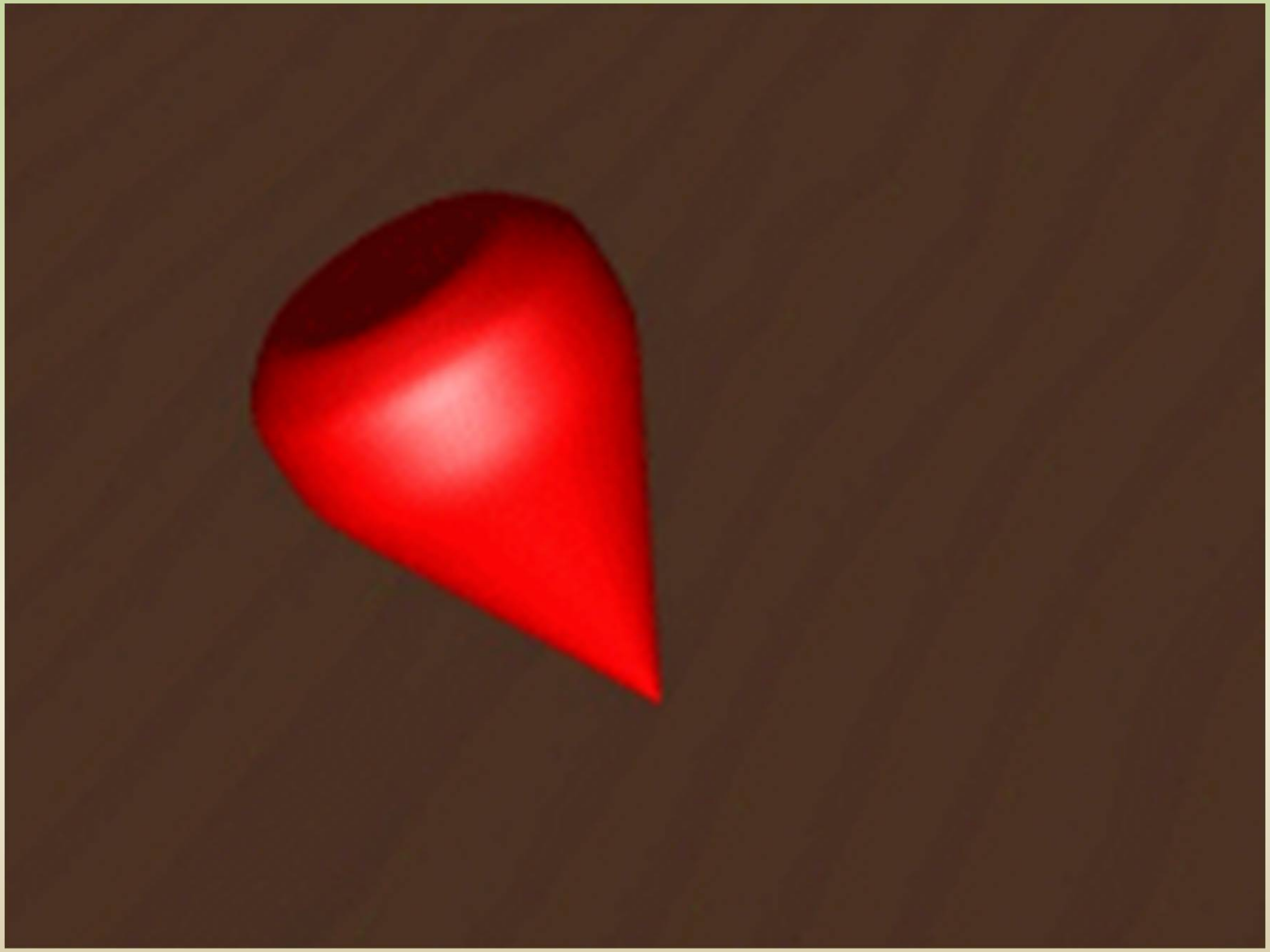


Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

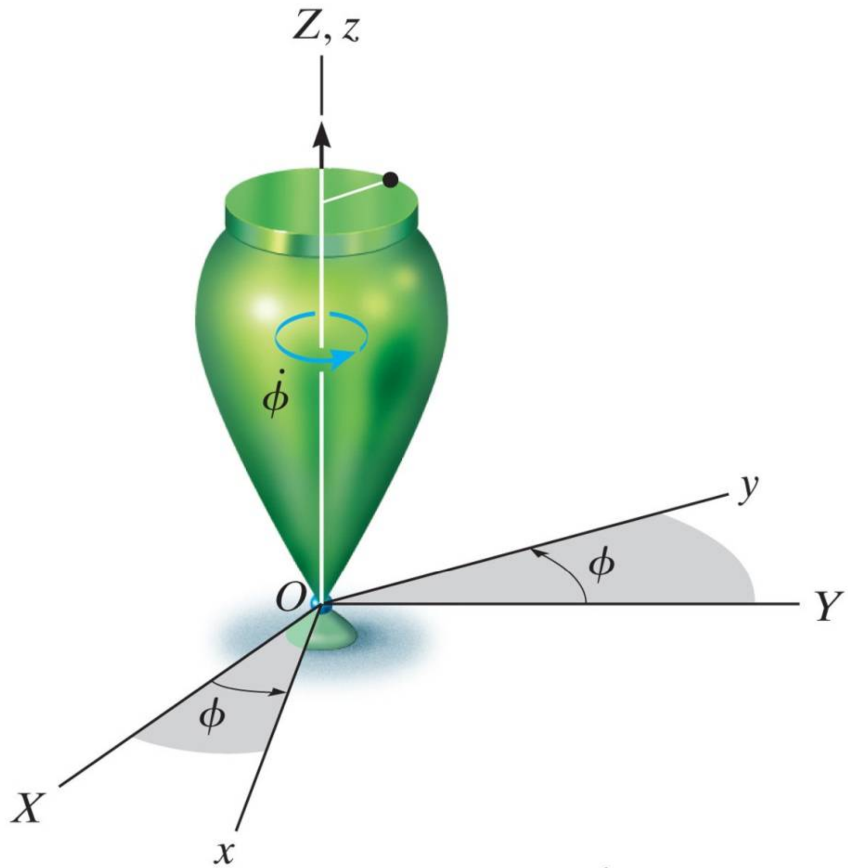


Ing. Carlos Barrera

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

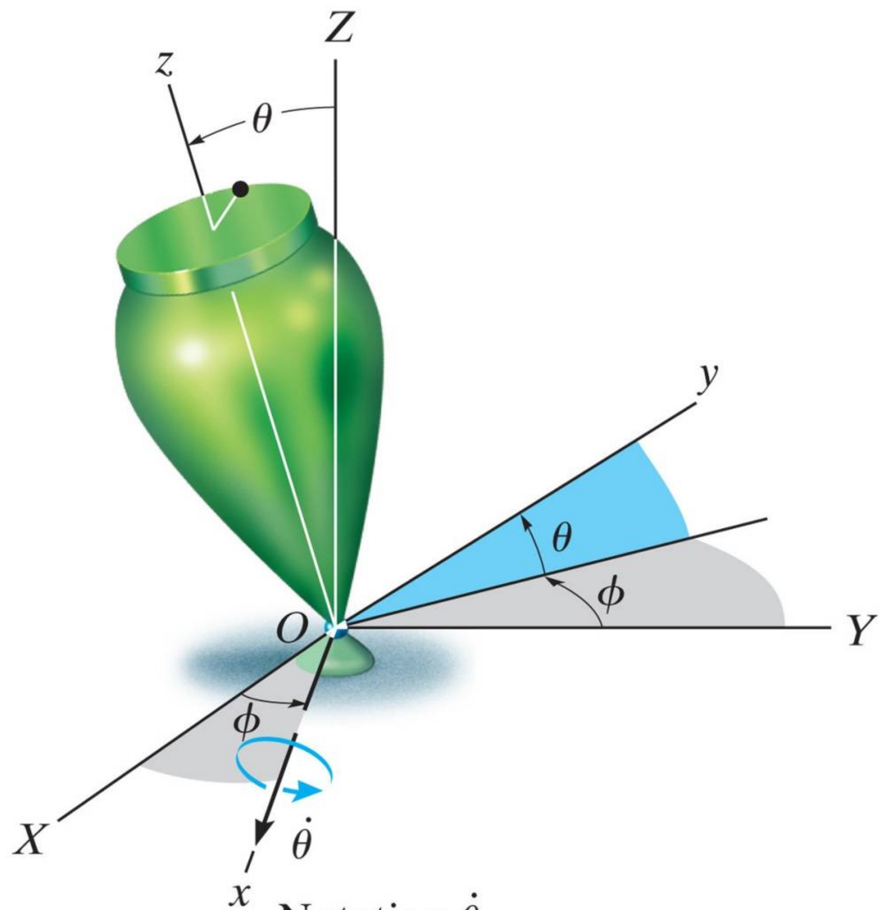
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



Precession $\dot{\phi}$

(b)

21_15b



Nutation $\dot{\theta}$

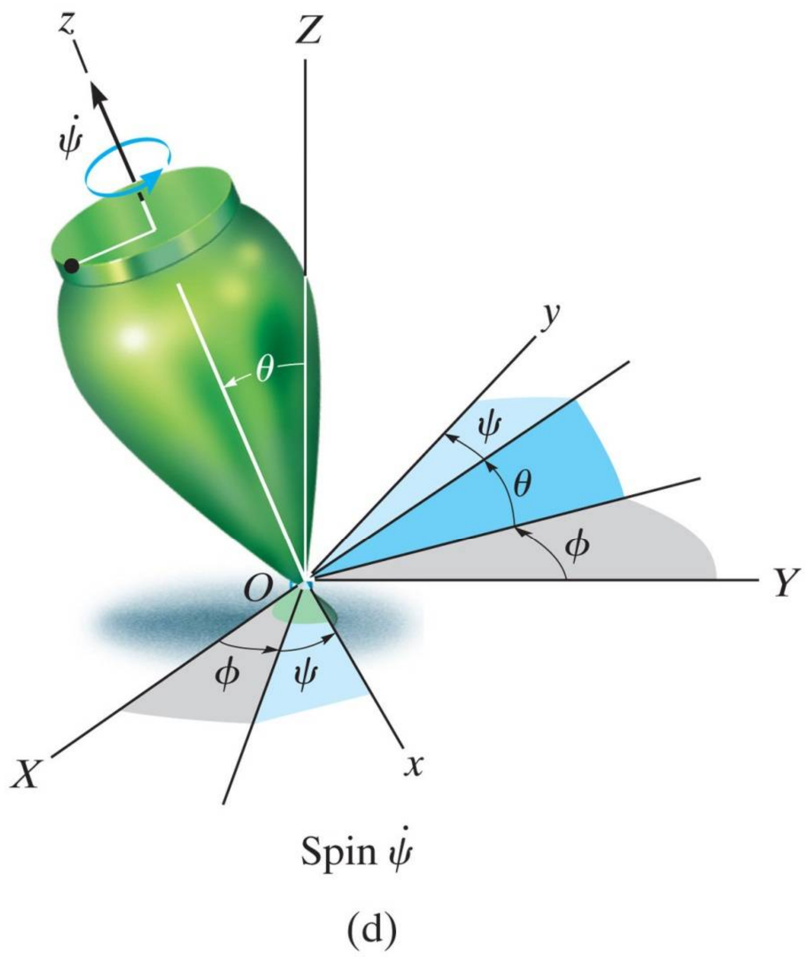
(c)

21_15c

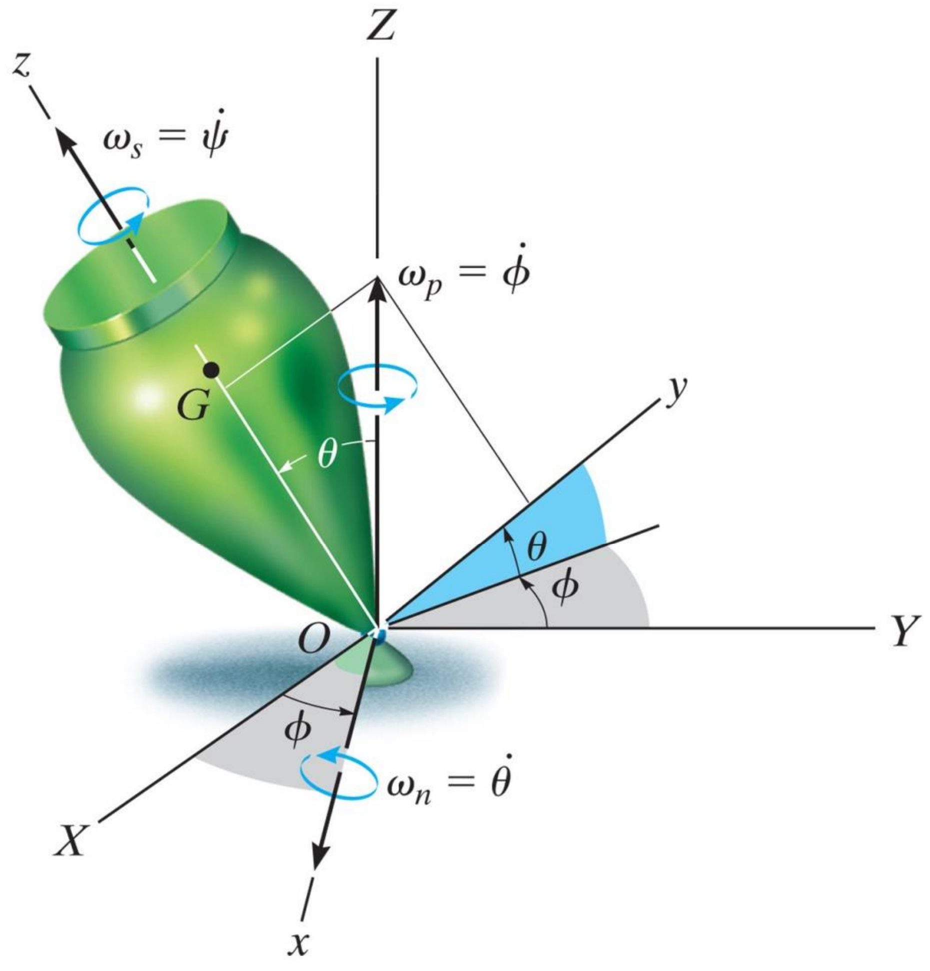
UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



21_15d



21_16

Ing. Carlos Barrera

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

Cuando el trompo se pone en movimiento, su eje de giro es inicialmente vertical.

Conforme la fricción reduce la razón de giro, el eje de giro se inclina girando alrededor del eje vertical. Esta fase de movimiento se aproxima a la precesión permanente.

Para analizar el movimiento, colocamos el sistema de referencia XYZ con su origen en la punta del trompo y el eje Z hacia arriba.

Luego alineamos el eje z del sistema xyz con el eje de giro.

Suponemos que la punta del trompo permanece en un punto fijo.

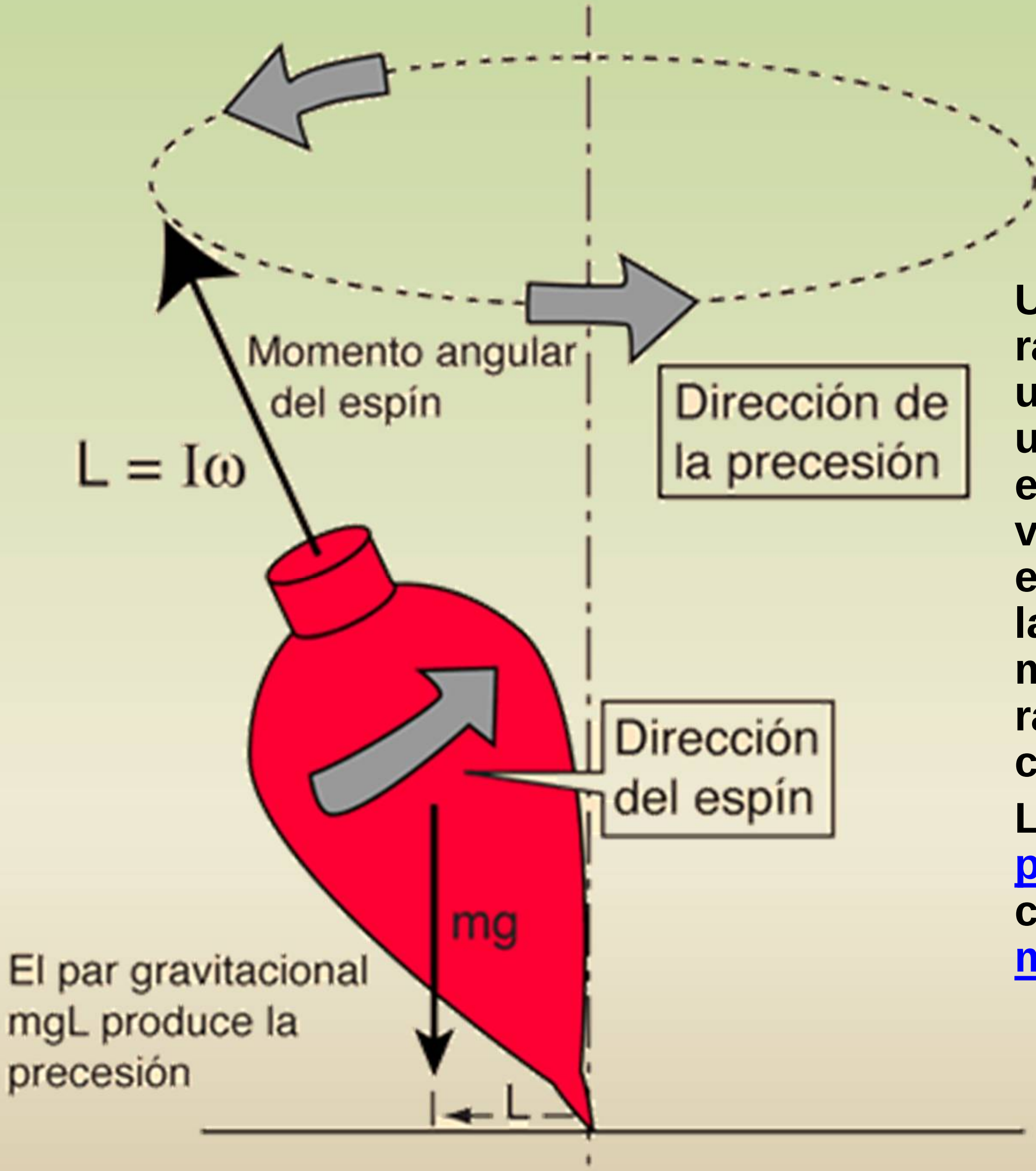
El ángulo de precesión y el de nutación especifican el eje de giro.

El peso del trompo ejerce un momento M_X = mgh sen ϴ respecto al origen y los momentos $M_Y = 0$ $M_Z = 0$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$mgh = (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi},$$

La ecuación relaciona la razón de giro, el ángulo de nutación y la razón de precesión.



Un trompo que gira rápidamente, [precederá](#) (realizará un movimiento de precesión) en una dirección determinada por el [par](#) ejercido por su [peso](#). La velocidad angular de la precesión es inversamente proporcional a la velocidad angular del giro, de manera que la precesión es más rápida y mas pronunciada, cuando se va parando el trompo.

La dirección del [par de precesión](#) se puede visualizar con la ayuda de la [regla de la mano derecha](#)

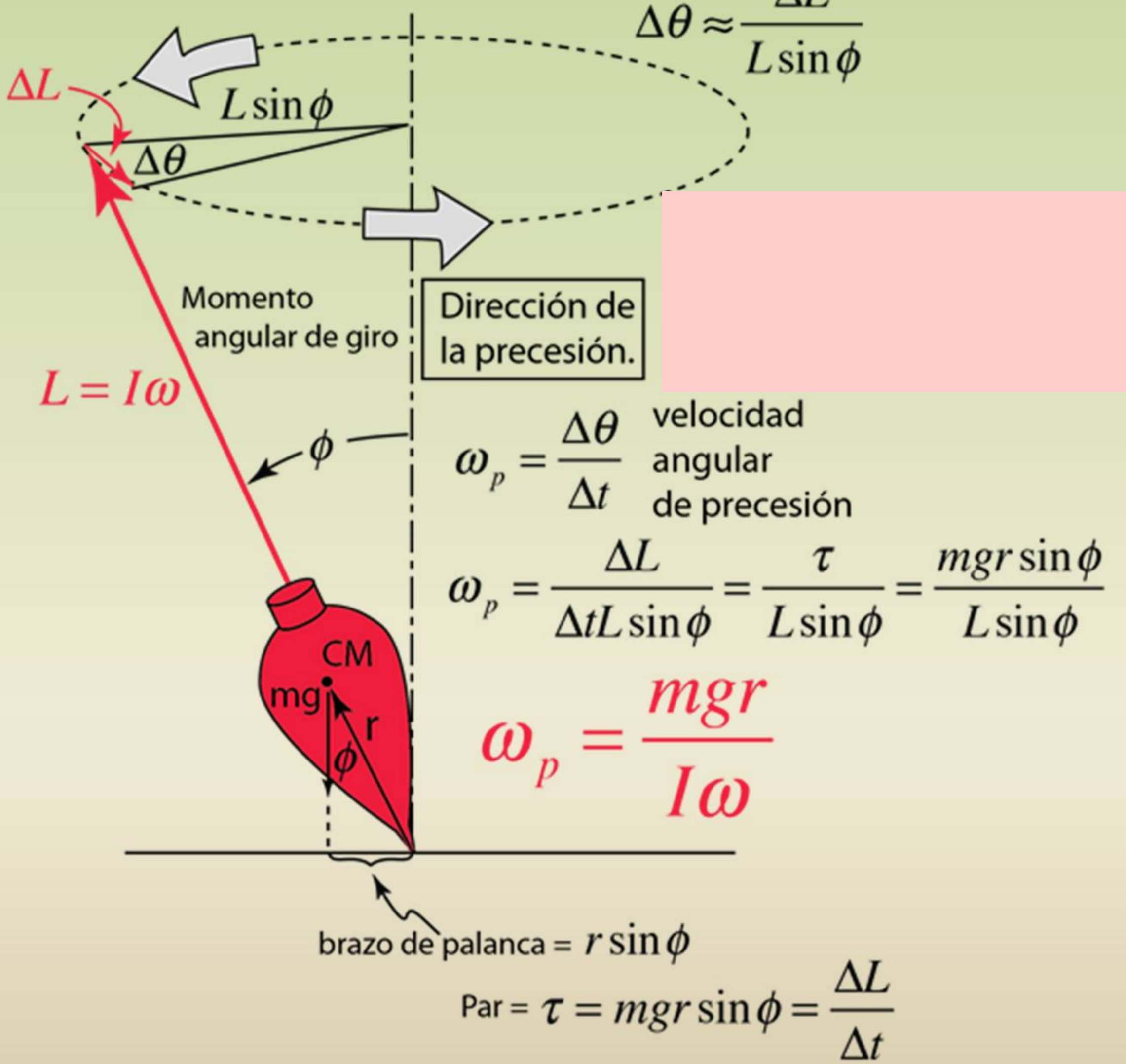
UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:

MECÁNICA APLICADA

MECÁNICA Y MECANISMOS

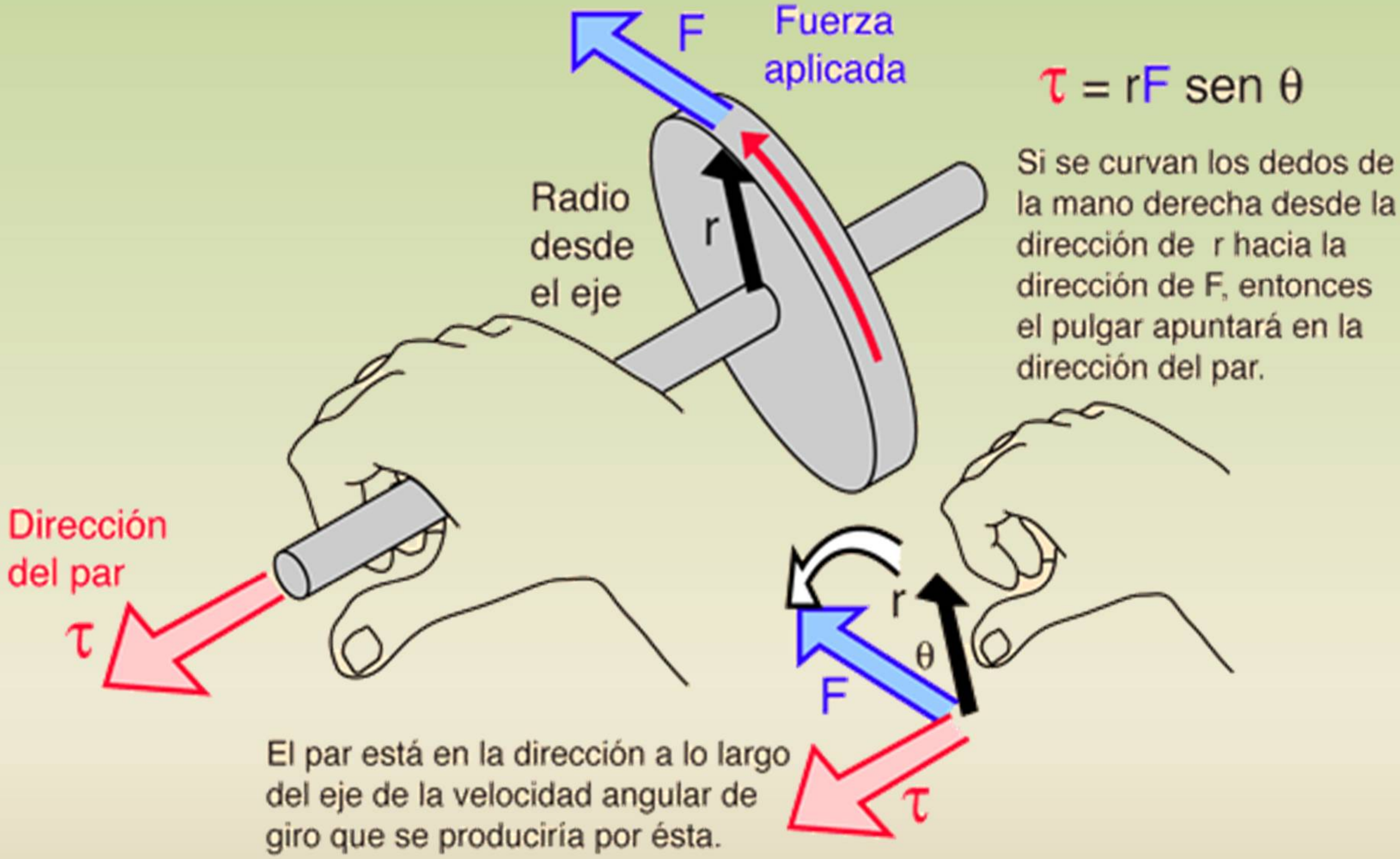


Haga girar un trompo sobre una superficie plana, y verá su extremo superior como se desplaza lentamente, dibujando un círculo alrededor de una dirección vertical, en un proceso llamado precesión. A medida que la velocidad del giro del trompo disminuye, verá como esta precesión se hace mas y mas rápida. Luego empieza a cabecear arriba y abajo al tiempo que hace la precesión y finalmente cae. Mostrando que la velocidad de precesión se hace más rápida cuando la velocidad de giro se vuelve más lenta, como un problema clásico de la mecánica. El proceso se resume en la siguiente ilustración.

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

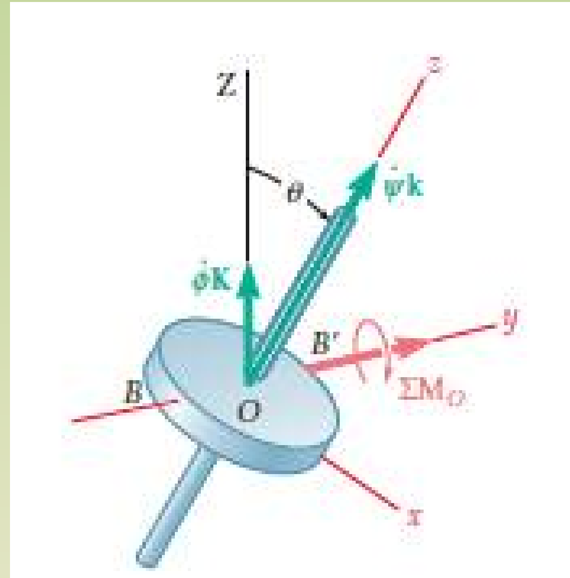


Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

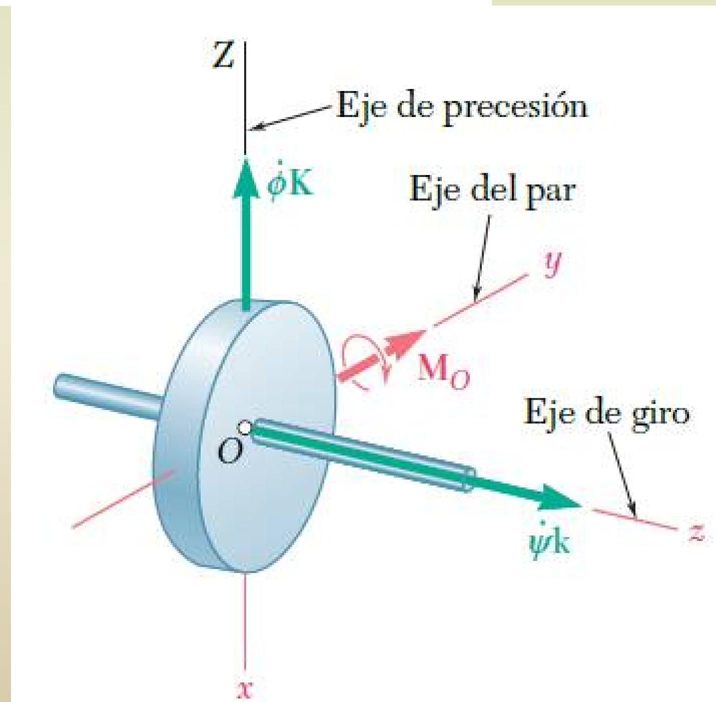
Ing. Carlos Barrera

17:03

Si se aplica al giróscopo un par Mo alrededor de un eje perpendicular a su eje de giro , el giróscopo tendrá una precesión alrededor de un eje perpendicular tanto al eje de giro como al eje de par. Dado que los pares elevados que se requieren para cambiar la orientación de sus ejes , los giróscopos se utilizan como estabilizadores en torpedos, barcos, aviones.



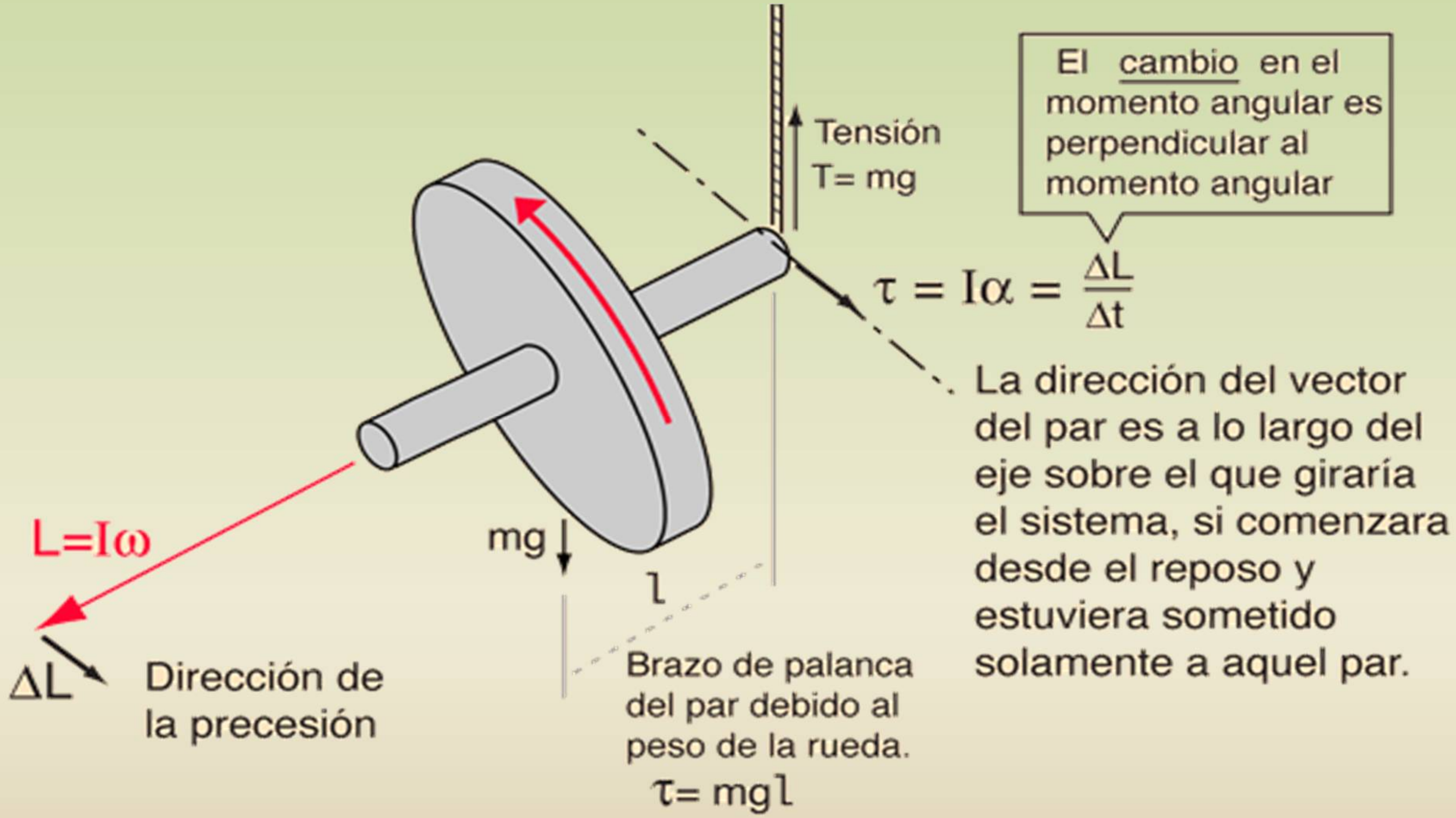
$$\Sigma \mathbf{M}_O = I\dot{\psi}\dot{\phi}\mathbf{j}$$



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

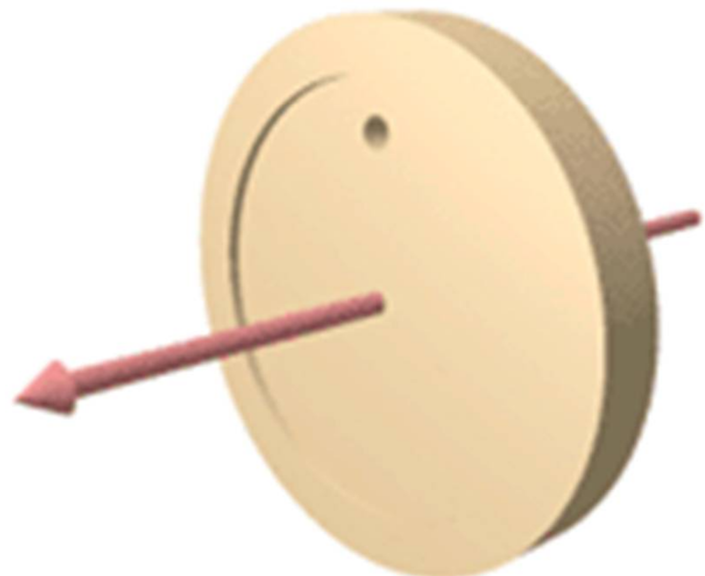
Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS



Cátedra:
MECÁNICA APLICADA
MECÁNICA Y MECANISMOS

BIBLIOGRAFIA

Mecánica Vectorial para Ingenieros	Beer Johnston
Dinámica	Bedford